Matematica per l'Ingegneria 2024-2025 Prof. Ada Boralevi italian

Quaternioni e Ottonioni: Dalle Rappresentazioni alle Applicazioni Geometriche

Sisto Davide

March 20, 2025

Ringraziamenti

Qui puoi inserire i tuoi ringraziamenti.

Sommario

In queste pagine andremo a trattare le proprietà caratterizzanti di quaternioni che, nella metà dell'800 hanno rivoluzionato i numeri da noi conosciuti , estendendoli a dimensioni superiori, analizzeremo la loro caratterizzazioni e le proprietà che ne conferiscono una rilevante importanza. Successivamente saremo in grado , abbandonando altre buone proprietà a varcare le porte dell'ottava dimensione scoprendo quelli che sono gli ottetti , più comunemente conosciuti come 'ottonioni' .

Contents

Part I

Quaternioni

Chapter 1

Introduzione ai Quaternioni

I quaternioni sono un'affascinante e potente estensione dei numeri complessi, sviluppati nel 1843 dal matematico irlandese William Rowan Hamilton. Tuttavia, il loro impatto sulla matematica e sulle applicazioni moderne va ben oltre la loro apparente complessità iniziale. Hamilton, durante una passeggiata nei pressi di Dublino, ebbe quella che definì "l'illuminazione" che lo portò a scoprire il sistema che oggi conosciamo come quaternioni. La leggenda vuole che, mentre camminava con sua moglie, ebbe l'intuizione di come estendere i numeri complessi in una quarta dimensione, riuscendo a conciliare così la necessità di un sistema di numeri che potesse risolvere equazioni più complesse rispetto ai numeri reali o complessi. In quel momento, incise sull'arco di un ponte una formula fondamentale, segno tangibile di una scoperta che avrebbe cambiato per sempre il volto della matematica.

I quaternioni si rappresentano come una combinazione di una parte reale e tre parti immaginarie, ed è proprio questa struttura che rende possibile una molteplicità di applicazioni, dalla meccanica classica alla grafica computerizzata, fino alla realtà aumentata e alla robotica. Si tratta di un sistema non commutativo, cioè, l'ordine in cui vengono moltiplicati cambia i risultati, ma questa peculiarità è ciò che rende i quaternioni così potenti. Il loro uso si rivela particolarmente vantaggioso quando si tratta di rotazioni nello spazio tridimensionale, dove il loro potere supera quello delle matrici di rotazione per via della loro maggiore efficienza computazionale e della mancanza di ambiguità.

Hamilton, benché fosse intriso di entusiasmo per la sua invenzione, non godette di un immediato riconoscimento pubblico. I suoi quaternioni incontrarono inizialmente una certa resistenza nella comunità matematica. La difficoltà di comprendere appieno la nuova algebra e le sue implicazioni lo portò a lottare per farla accettare. Nonostante ciò, con il tempo, il suo contributo alla matematica fu inevitabilmente riconosciuto, e i quaternioni divennero uno degli strumenti fondamentali nello studio delle trasformazioni geometriche e della fisica teorica.

Se Hamilton avesse potuto immaginare fino a che punto la sua scoperta avrebbe influenzato il mondo, probabilmente avrebbe sorriso nel vedere come il suo "frutto della passeggiata" avesse trovato applicazione nelle simulazioni spaziali e nei videogiochi moderni, dove ogni rotazione e orientamento nello spazio tridimensionale è modellato proprio dai quaternioni. L'idea di "percepire" lo spazio e il movimento, di rappresentare la rotazione in modo fluido e senza singolarità, era qualcosa che Hamilton non avrebbe potuto prevedere, ma che oggi gioca un ruolo cruciale nelle tecnologie che danno forma alla nostra realtà digitale. In definitiva, i quaternioni non solo descrivono il mondo matematico, ma influenzano anche il mondo che viviamo, e tutto ciò grazie all'intuizione di un matematico che, come una cometa che attraversa la notte, ha segnato un nuovo corso nella storia delle idee matematiche.

1.1 Definizione e Proprietà Fondamentali

$$H = \{h = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot i + \alpha_3 \cdot j + \alpha_4 \cdot k \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}\}$$

L'espressione $h = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot i + \alpha_3 \cdot j + \alpha_4 \cdot k$ è detta *quaternione*, e H è l'insieme dei quaternioni di Hamilton.

Somma di quaternioni

Siano $h_1 = \alpha_\beta 1 +_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k$ e $h_2 = \beta_1 + \beta_2 i + \beta_3 j + \beta_4 k$:

$$h_1 + h_2 = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2)i + (\alpha_3 + \beta_3)j + (\alpha_4 + \beta_4)k \in H$$

La somma è associativa e commutativa. L'elemento neutro è $0_H = 0 + 0i + 0j + 0k$, e l'inverso additivo è:

$$-h = (-\alpha_1) + (-\alpha_2)i + (-\alpha_3)j + (-\alpha_4)k$$

Infatti $h + (-h) = 0_H \quad \forall h \in H$.

Prodotto di quaternioni

Il prodotto tra $h_1 = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k$ e $h_2 = \beta_1 + \beta_2 i + \beta_3 j + \beta_4 k$ è:

$$h_1 \cdot h_2 = (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 - \alpha_4\beta_4) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3)i + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_2\beta_4 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_2)j + (\alpha_1\beta_4 +$$

Il prodotto è associativo ma non commutativo.

Tabella moltiplicativa

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

1.2 Il Centro di H

È chiaro che $\mathbb{R} \subseteq Z(\mathbb{H})$. Dobbiamo quindi dimostrare che $Z(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{R}$. A tal fine, sia

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i + \alpha_3 j + \alpha_4 k \in Z(\mathbb{H}).$$

Per ogni

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 i + \beta_3 j + \beta_4 k \in \mathbb{H},$$

abbiamo che $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$. Poiché

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \beta = {} & (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 - \alpha_4\beta_4) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3)i \\ & + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_2\beta_4 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_2)j + (\alpha_1\beta_4 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_1)k,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\beta \cdot \alpha = {} & (\beta_1\alpha_1 - \beta_2\alpha_2 - \beta_3\alpha_3 - \beta_4\alpha_4) + (\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1 + \beta_3\alpha_4 - \beta_4\alpha_3)i \\ & + (\beta_1\alpha_3 - \beta_2\alpha_4 + \beta_3\alpha_1 + \beta_4\alpha_2)j + (\beta_1\alpha_4 + \beta_2\alpha_3 - \beta_3\alpha_2 + \beta_4\alpha_1)k,\end{aligned}$$

abbiamo che

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha.$$

Dall'uguaglianza si ricava:

$$2(\alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3)i + 2(-\alpha_2\beta_4 + \alpha_4\beta_2)j + 2(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)k = 0.$$

Questo implica il sistema di equazioni:

$$\alpha_3\beta_4 = \alpha_4\beta_3, \quad \alpha_4\beta_2 = \alpha_2\beta_4, \quad \alpha_2\beta_3 = \alpha_3\beta_2.$$

Se $\alpha_2 \neq 0$, dalla terza equazione segue che $\beta_3 = (\alpha_3\alpha_2^{-1}) \cdot \beta_2$ per ogni $\beta \in \mathbb{H}$. Questa contraddizione implica che dobbiamo avere $\alpha_2 = 0$. Analogamente, si dimostra che anche $\alpha_3 = 0$ e $\alpha_4 = 0$. In conclusione, quindi, abbiamo che $\alpha = \alpha_1 \in \mathbb{R}$. Questo prova l'inclusione $Z(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{R}$.

1.3 Rappresentazioni Matriciali

1.4 Connessione con il Gruppo SO(3) e il Gimbal Lock

Chapter 2

Applicazioni dei Quaternioni

2.1 Grafica Computerizzata e Animazione 3D

2.2 Fisica e Meccanica Classica

Part II

Ottonioni e Fibrazioni di Hopf

Chapter 3

Gli Ottonioni

3.1 Definizione e Proprietà

3.2 Differenze con i Quaternioni

3.3 Applicazioni degli Ottonioni

Chapter 4

Le Fibrazioni di Hopf

4.1 Definizione e Costruzione

4.2 Relazioni con Quaternioni e Ottonioni

4.3 Implicazioni Geometriche

Chapter 5

Conclusioni

Sintesi dei risultati e spunti per future ricerche.

Bibliography