Вынужденнные колебания в электрическом контуре

Лабораторная работа

Высшая школа экономики, Санкт-Петербургская школа
физико-математических и компьютерных наук

Физика, 1 курс

Андрей Ситников Никита Афанасьев

29.04.2022

Цель работы

Исследование резонансных кривых, с целью определения добротности и логарифмического декремента затухания при нарастании и затухании колебаний

Теория

Рассмотрим цепь с таким параллельным контуром:

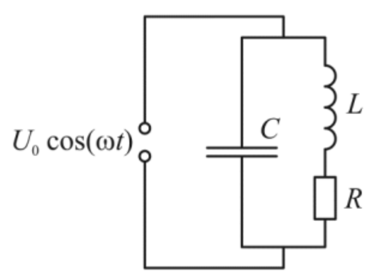

Figure 1: Схема контура

Запишем импедансы параллельных элементов и посчитаем полный импеданс контура:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{R + i\omega L} + i\omega C = \frac{1 - (\omega/\omega_0)^2 + i\omega RC}{R + i\omega L}$$

При этом, если частота генератора совпадает с частотой колебательного контура, то импеданс упрощается до:

$$Z_{\text{рез}} = \frac{R + i\omega_0 L}{i\omega_0 RC} = \frac{L}{RC} - i\frac{1}{\omega_0 C}$$

Что при малом сопротивлении (R«w_0*L) превращается в:

$$Z_{\text{рез}} = \frac{L}{RC}$$

что также можно переписать через добротность $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$

$$Z_{\text{рез}} = \frac{L}{RC} = \frac{Q}{\omega_0 C}$$

А если рассматривать импеданс для всех частот генератора, то формула будет такой:

$$|Z| = \frac{\omega L}{\sqrt{\left(1 - (\omega/\omega_0)^2\right)^2 + (\omega RC)^2}}$$

Методика

При исследовании резонансной кривой тока в колебательном контуре обычно снимают зависимость амплитуды напряжения на резисторе R от частоты генератора. Однако при резком увеличении тока вблизи резонанса выходное напряжение генератора заметно изменяется, что вносит существенные искажения в форму резонансной кривой.

В работе для устранения влияния генератора используется такая схема:

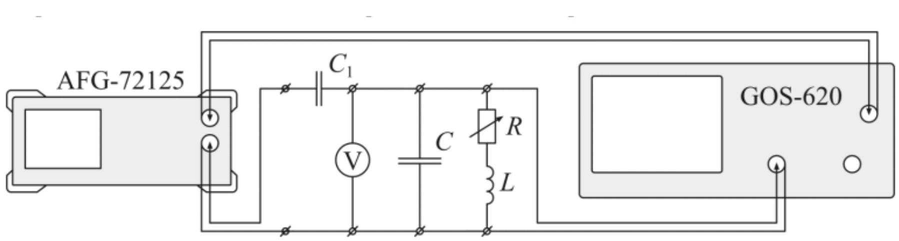

Figure 2: Схема установки

Синусоидальный сигнал с генератора подаётся на параллельный колебательный контур через небольшую разделительную ёмкость C_1. При этом ток в цепи определяется ёмкостью C_1 и вблизи резонанса остается практически постоянным. Напряжение ёмкости контура C поступает на вертикальный вход осциллографа. Зависимость амплитуды этого напряжения от частоты генератора согласно формуле:

$$U_0 = I_0|Z| = \frac{I_0 \omega L}{\sqrt{\left(1 - (\omega/\omega_0)^2\right)^2 + (\omega RC)^2}} \tag{1}$$

Разделительная ёмкость C_1 выбирается настолько малой, что в рабочем диапазоне частот её импеданс $ZC_1 = 1/(\omega C1)$ много больше импеданса контура, в цепи генератор создаёт ток с постоянной амплитудой, а колебательный контур выполняет роль нагрузочного сопротивления, которое, в свою очередь, зависит от частоты. Поскольку в резонансе сопротивление Zрез параллельного контура максимально, то и напряжение на ёмкости

C (неизменный ток, умноженный на максимальное сопротивление) тоже максимально. Входное сопротивление осциллографа в измеряющей цепи достаточно велико: $R_{\text{ЭО}} = 1$ МОм. Таким образом, при выполнении условий:

$$Z_{C_1} = \frac{1}{\omega C_1} \gg Z_{\text{рез}} = \frac{Q}{\omega C}$$
$$R_{\text{ЭО}} \gg \frac{Q}{\omega C}$$

и при условии, что действительная часть импеданса катушки много меньше её мнимой части, резонансная кривая в нашем контуре будет выглядеть так же, как в последовательном: максимум амплитуды при резонансе. А с помощью ширины кривой можно будет определить добротность контура.

Рассмотрим процесс установления колебаний в контуре вблизи резонанса. Несложно показать, что возникающие в контуре колебания будут представлять собой суперпозицию двух синусоид: первая – с частотой собственных колебаний контура ω_0 и амплитудой, экспоненциально убывающей со временем; вторая – с частотой внешнего источника ω и постоянной амплитудой. Зависимость напряжения на контуре (при напряжении и его производной равным 0 при t = 0) от времени имеет вид:

$$U(t) = U_0 \left(\cos(\omega t - \varphi) - e^{-\gamma t} \cos\left(\omega_0 t - \varphi\right)\right)$$

Здесь U_0 – амплитуда установившихся колебаний, γ – коэффициент затухания. При частотах ω, отличающихся от собственной частоты контура $\omega 0$, уравнение описывает биения. При очень близких частотах биения не возникают, так как колебания с собственной частотой контура затухают быстрее, чем накапливается разность фаз между колебаниями с частотами ω и $\omega 0$ достаточная для наблюдения этого эффекта. В этом случае уравнение сводится к простому виду:

$$U(t) = U_0 \left(1 - e^{-\gamma t}\right) \cos\left(\omega_0 t - \varphi\right)$$

Заметим, что добротность колебательного контура можно выразить через коэффициент затухания:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

Это соотношение позволяет определить добротность контура по скорости нарастания амплитуды вынужденных колебаний при резонансе или по скорости затухания свободных колебаний. Нарастание и затухание колебаний можно наблюдать на экране осциллографа, если на контур подаются – части синусоиды, разделённые интервалами, в течение которых сигнал отсутствует. Чем выше добротность, тем медленнее нарастают и медленнее затухают колебания в контуре. Количественные оценки можно сделать, если определить логарифмический декремент затухания по скорости нарастания или затухания колебаний. В условиях резонанса, огибающая затухающих колебаний – это перевёрнутая огибающая нарастающего участка, поэтому при расчёте логарифмического декремента по затухающему участку нет необходимости использовать амплитуду установившихся колебаний U0, которая в контуре с высокой добротностью иногда не успевает установиться за время подачи ненулевого напряжения.

При частоте генератора близкой (но не равной) к резонансной, происходят биения

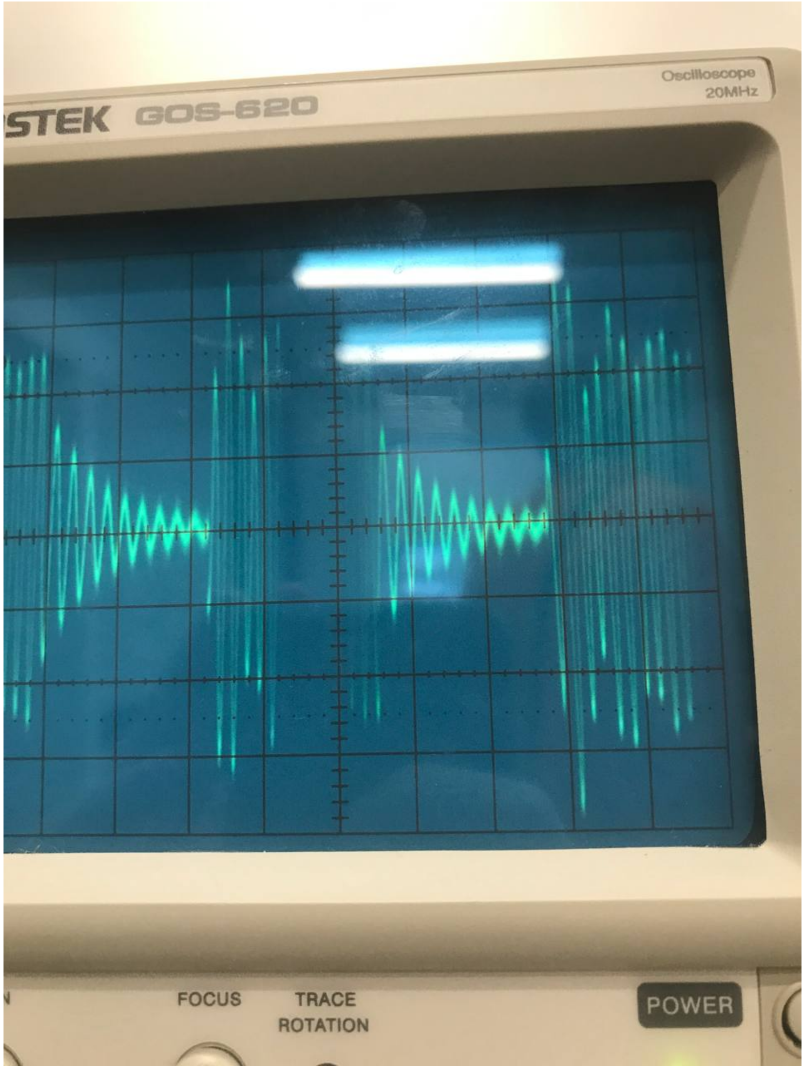

Figure 3: Фото биений

Которые появляются из-за наложения двух колебаний, различных по частоте: вынужденных и свободных. В итоге, из-за изменения сдвига по фазе от времени — со временем меняется и амплитуда.

Результаты

Результаты измерения LCR-метром элементов системы:

Параметр	Значение
R_0	0.07Ω
R_30	30.08Ω
C	97.183нФ
R_C	0.23Ω
L	14.633мГн
R_L	3.44Ω
C_1	223pF

Как оказалось, сопротивление моста имеет постоянную добавку 0.07Ω, но мы здесь и далее будем писать 0 и 30Ω, имея в виду номинальное сопротивление — тем более, что добавка мала. Добавим, что емкость C_1 действительно мала — импеданс много больше остальных импедансов схемы.

R = 0 График показаний вольтметра от частоты генератора:

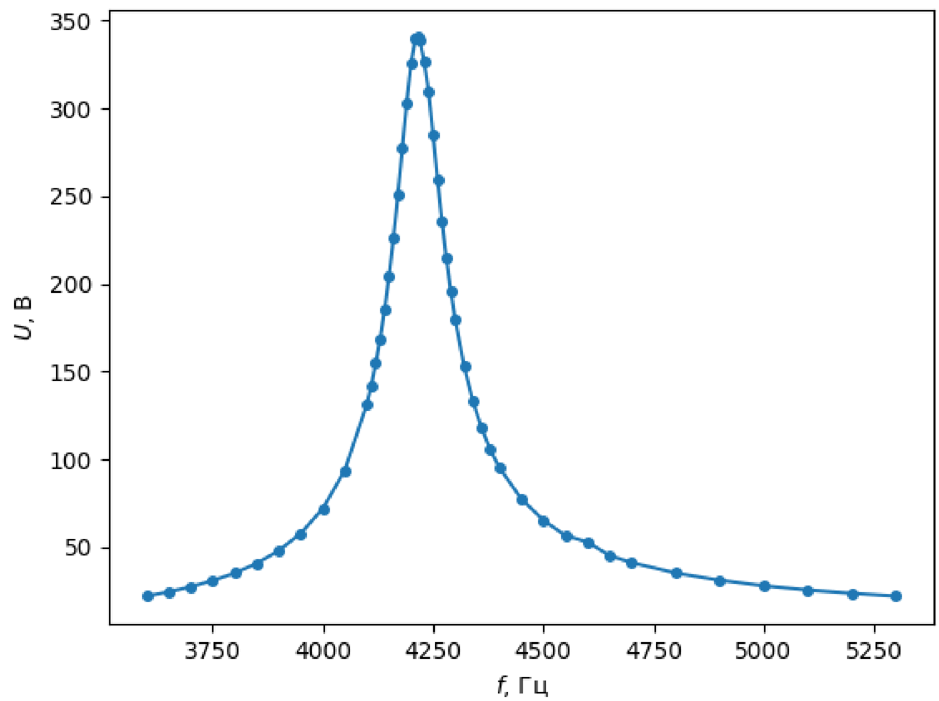

Figure 4: АЧХ при R = 0Ω

R = 30 ом График показаний вольтметра от частоты генератора:

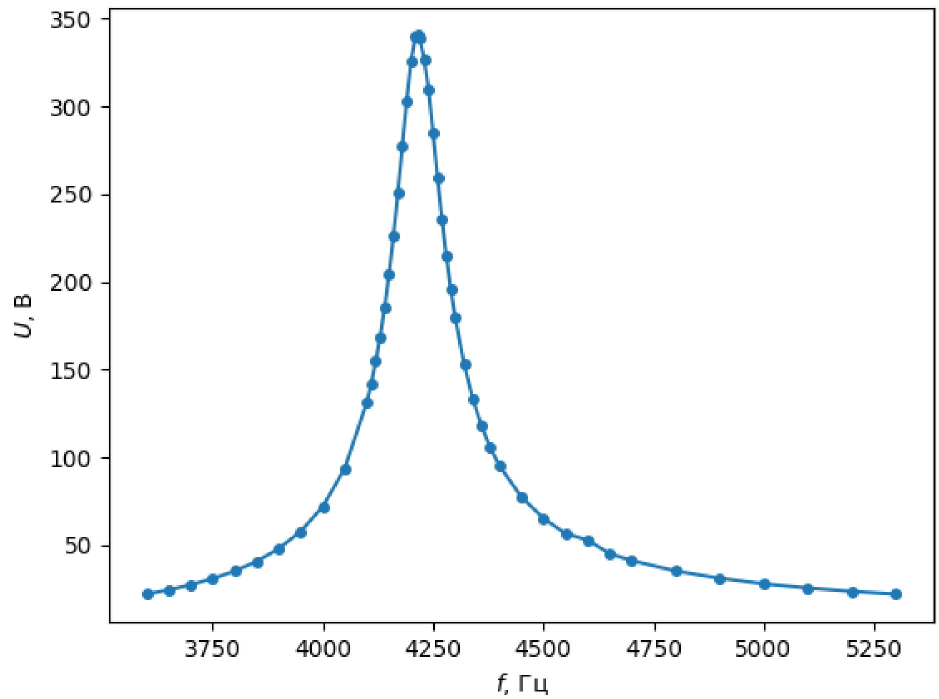

Figure 5: АЧХ при R = 30Ω

Обработка данных

График резонансных кривых в относительных координатах Отнормируем оси АЧХ по резонансной частоте и максимальной амплитуде:

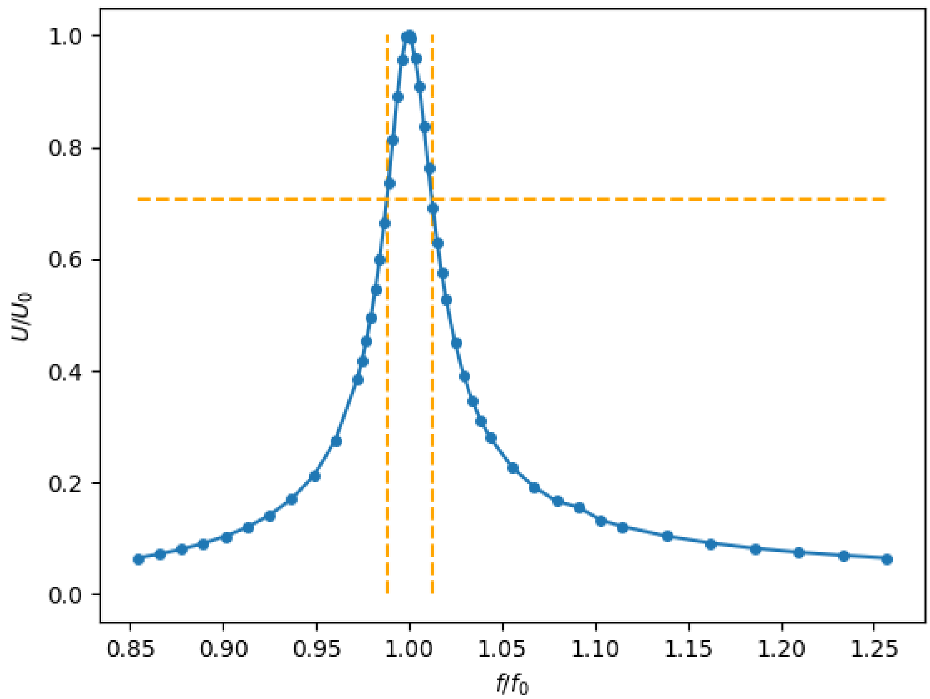

Figure 6: Нормированная АЧХ при R = 0Ω

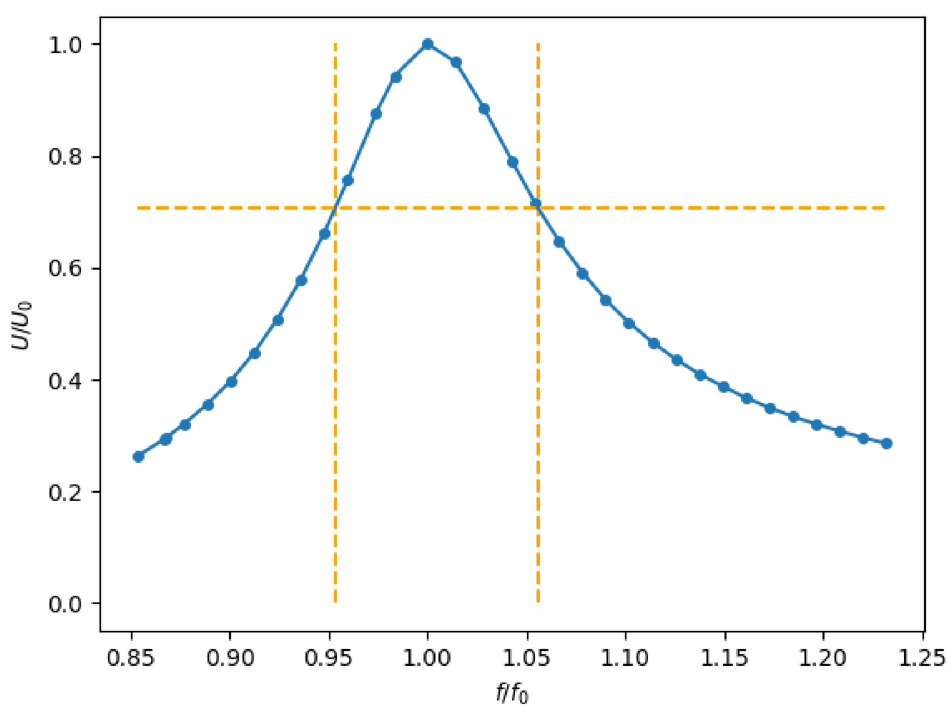

Figure 7: Нормированная АЧХ при R = 30Ω

Ширина полосы при $R = 0$: 0.242, откуда добротность — $Q_0 = \frac{f}{\Delta f} = \frac{1}{0.24} \approx 41.4$

Ширина полосы при $R = 30$: 0.102, откуда добротность — $Q_{30} = \frac{f}{\Delta f} = \frac{1}{0.24} \approx 9.8$

Здесь погрешность будет достаточно высокой, так как мы используем линейную интерполяцию между точками, которых у нас не так много. Если оценить погрешность "расстояния" как расстояние между ближайшими точками измерения (10 Гц в первом случае и 20 во втором), получим, что $Q_0 = 41 \pm 4$, $Q_{30} = 9.8 \pm 0.5$

Сравнение теоритической и экспериментальной резонансных частот Экспериментально наблюдаемая частота — 4216 Гц (забыли точно убедиться для R = 30Ω, но там она была также очень близкой)

Теоретическая частота:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}{2\pi} \approx \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Даже для $R = 30\Omega$ отклонение из-за поправки на γ не превышает 2Ω, поэтому им можно спокойно пренебречь (2/4220 ≈ 0.05%).

Откуда получается, что частота резонанса — $\nu = 4220$ Гц, очень близко к экспериментальной.

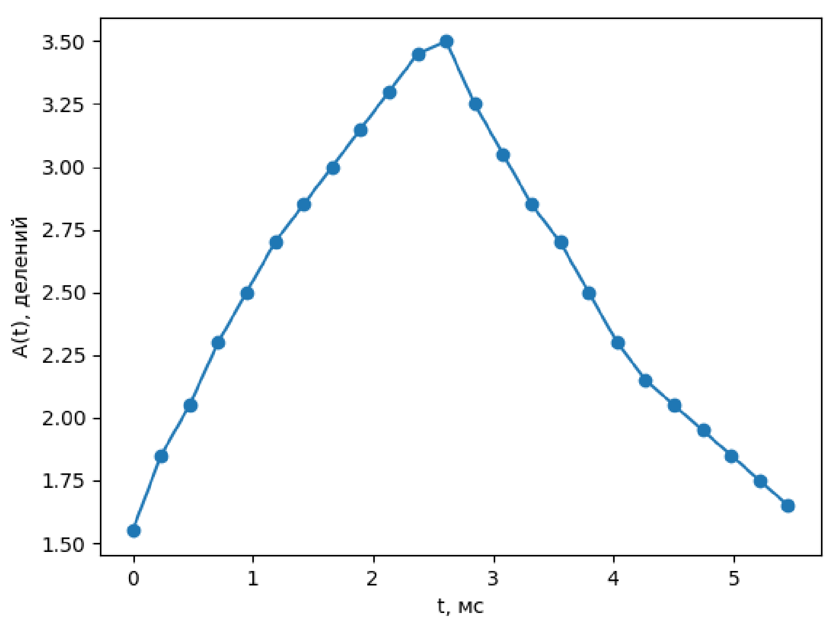

Figure 8: График максимумов сигнала от времени при R = 0Ω

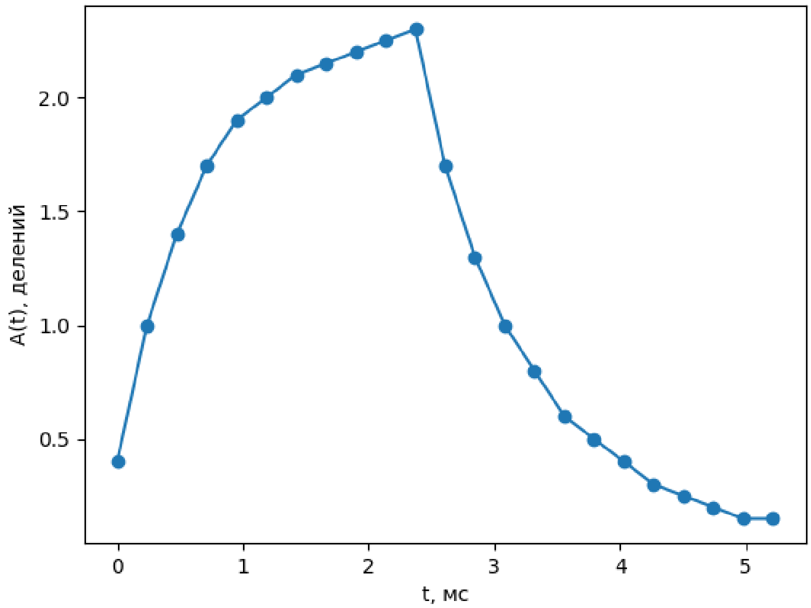

Figure 9: График максимумов сигнала от времени при R = 30Ω

Коэффициент затухания Рассмотрим в логарифмическом масштабе правые части графиков (из левых извлекать информацию гораздо сложнее по той простой причине, что мы не знаем точно напряжение, к которому стремится экспонента; правая же часть стремится к нулю, так как это амплитуды):

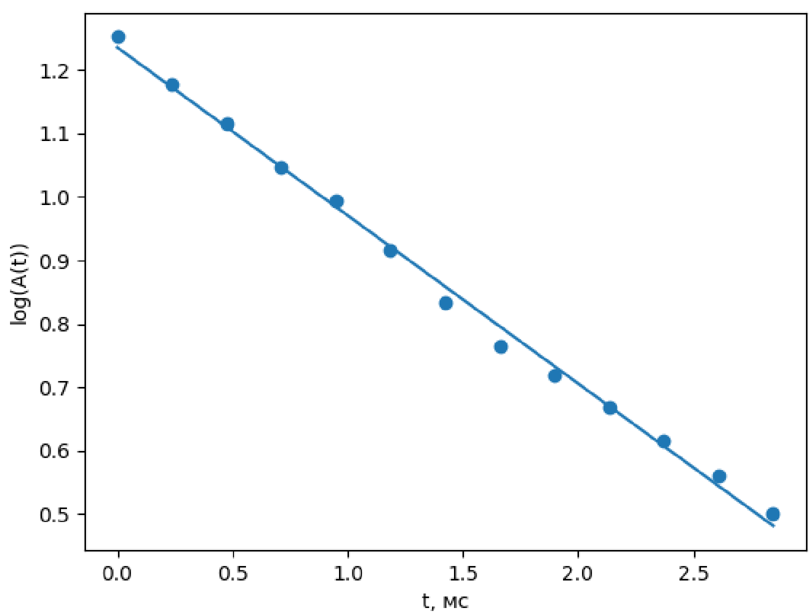

Figure 10: Логарифм амплитуды от времени при R = 0Ω

Логарифмический декремент затухания: 0.62

Коэффициент наклона (из линейной аппроксимации): -0.26 1/мс

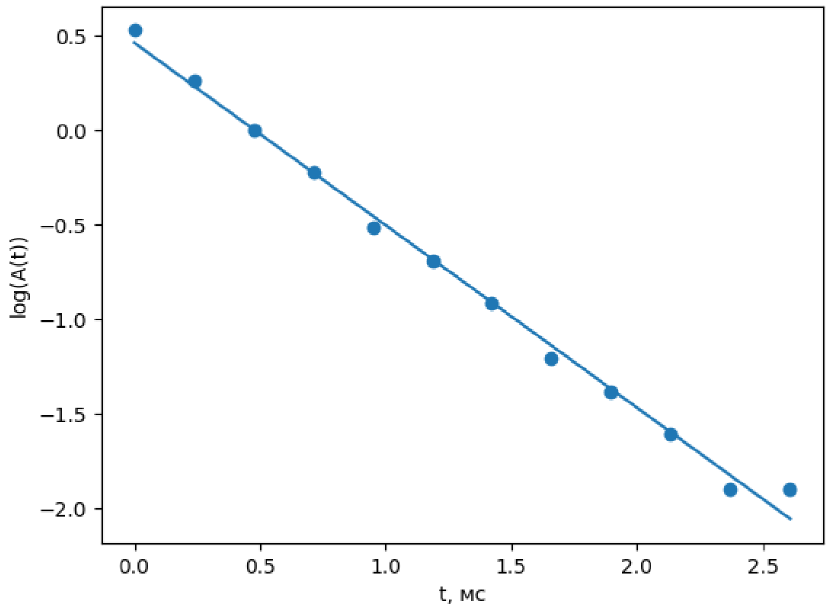

Figure 11: Логарифм амплитуды от времени при R = 30Ω

Логарифмический декремент затухания: 0.23

Коэффициент наклона: -0.97 1/мс.

Метод наименьших квадратов дает ошибку в 0.02, но мы не можем ручаться, что у осциллографа одни и те же расстояния “сверху” и “посередине” соответствуют одним и тем же разницам в напряжении, учитывая особенности конструкции электронного осциллографа (отклонение пучка электронов может быть нелинейным), поэтому этим цифрам доверять нельзя.

Добротность через коэффициент затухания

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\gamma}\sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\pi}{\gamma T}$$

Подставляя, получаем $Q_0 \approx 50$, $Q_{30} \approx 13.7$. Значения резко выше (за пределами погрешности) полученных через АЧХ.

Попробуем определить добротность из параметров системы (см. таблицу выше). И здесь начинается самое интересное:

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$Q_0 = \frac{1}{R_0}\sqrt{\frac{L}{C}} \approx 104$$

Что в два раза отличается от наблюдаемых результатов. Более того, если мы посчитаем для 30Ω:

$$Q_{30} = \frac{1}{R_30}\sqrt{\frac{L}{C}} \approx 11.5$$

Что по-прежнему выше полученных через АЧХ, но уже не настолько “критично”.

Попробуем по выражению 1 построить графики:

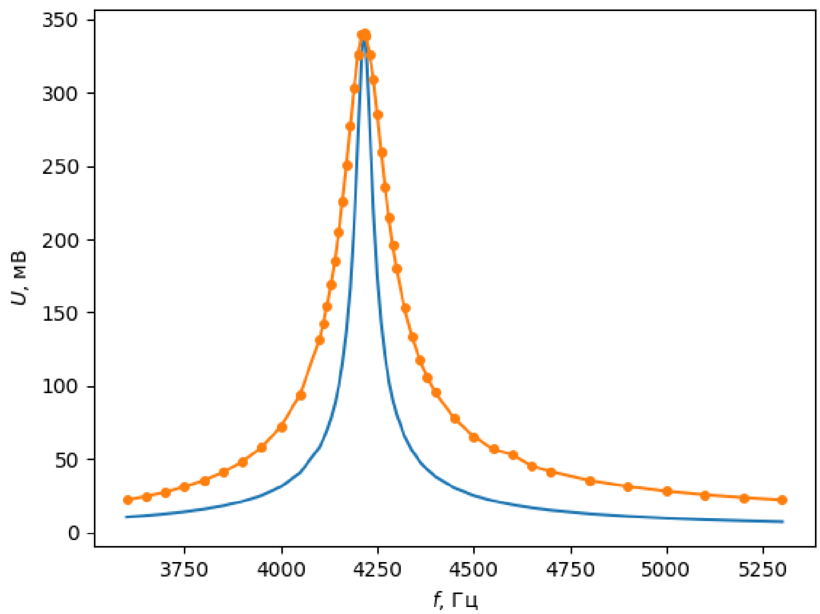

Figure 12: Теоретическое и наблюдаемое АЧХ при R = 0Ω

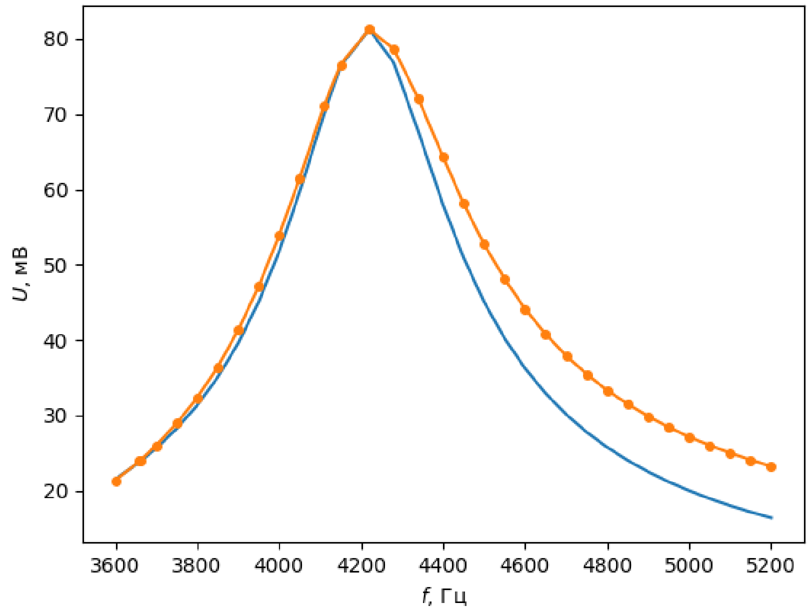

Figure 13: Теоретическое и наблюдаемое АЧХ при R = 30Ω

Если бы у нас был бы фактор, влияющий на индуктивность или емкость, у нас бы сместился пик. Пик совпадает с теоретическим, значит, проблема в неверно подсчитанном сопротивлении. Мы замерили сопротивления всех элементов (в т.ч. постоянной добавки сопротивления моста), но сложно утверждать, что никуда не могло “закрасться” паразитное сопротивление. Попробуем ввести неизвестное “добавочное сопротивление” и подогнать кривые.

При добавочном сопротивлении $\Delta R = 5.6\Omega$ графики:

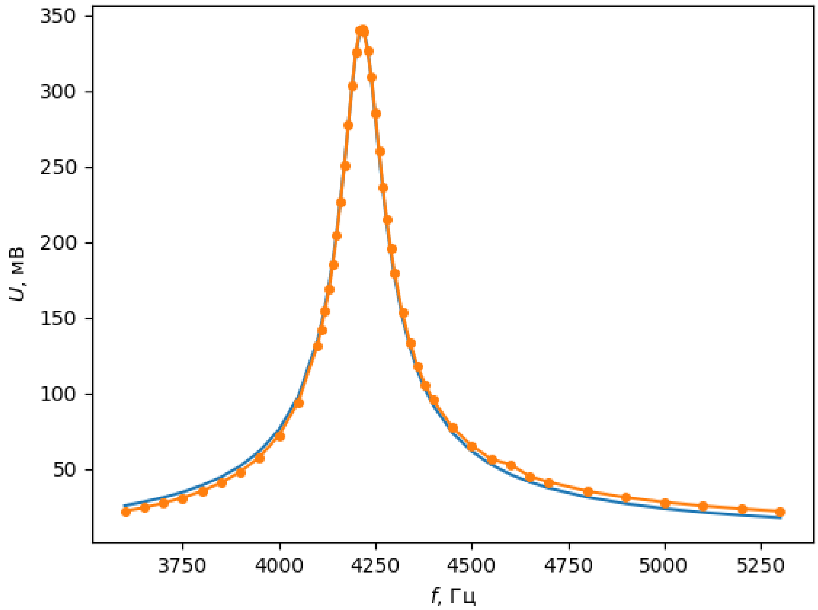

Figure 14: Теоретическое АЧХ с добавочным сопротивлением при R = 0Ω

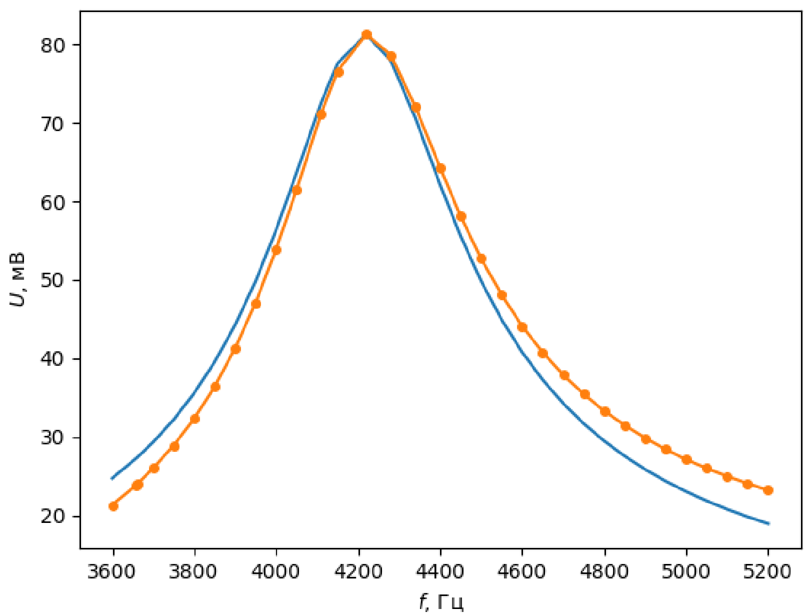

Figure 15: Теоретическое АЧХ с добавочным сопротивлением при R = 30Ω

Видно, что начинаются расхождения “по краям”, которые могли возникнуть из-за зависящего от w падения напряжения на конденсаторе C_1, но в целом совпадает. Отсюда добротности с “поправкой”:

$$Q_0 = 41.5$$

$Q_{30} = 9.9$

Увы, такое совпадение объясняется тем, что мы “подогнали” доп. сопротивление под АЧХ (хотя сам факт того, что оно “подгоняется” говорит о том, что общая теория, описывающая колебания в этом контуре верна). Идеально было бы найти и замерить это сопротивление в контуре, но нам это не удалось.

Совмещать результаты достаточно бессмысленно — тем не менее, как уже было сказано, видно, что результат, полученный через коэффициент затухания выше полученного через АЧХ (на 20% для $R = 0\Omega$ и 40% для $R = 30\Omega$). Сложно сказать, чем вызвана такое отклонение, но, скорее всего, это показывает несостоятельность его использования для измерения добротности. Так как коэффициент и добротность связаны через частоту, которую мы знаем точно, то относительные отклонения совпадают, значит, наблюдаемый коэффициент затухания на 20-40% меньше теоретического.

Выводы

Эксперимент наглядно демонстрирует, что эффект биений несложно получить без использования нескольких генераторов за счет разности частот вынужденных и свободных компонент колебания при использовании модулирующего сигнала. Было обнаружено неучтенное сопротивление 5.6Ω, с поправкой на которые АЧХ системы совпадает с теорическим. Также замечено, что экспериментально наблюдаемый коэффициент затухания меньше на 20%-40% теоретического.