

# Вынужденные колебания в электрическом контуре

## Лабораторная работа

Высшая школа экономики, Санкт-Петербургская школа  
физико-математических и компьютерных наук

Физика, 1 курс

Андрей Ситников

Никита Афанасьев

24.04.2022

### Цель работы

Исследование резонансных кривых, с целью определения добротности и логарифмического декремента затухания при нарастании и затухании колебаний

### Теория

Рассмотрим цепь с таким параллельным контуром:

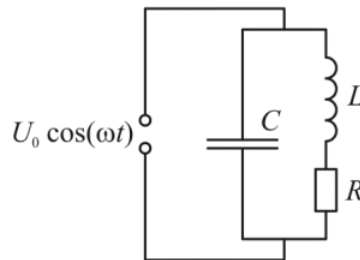


Figure 1: Схема контура

Запишем импедансы параллельных проводов, и посчитаем полный импеданс контура

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{R + i\omega L} + i\omega C = \frac{1 - (\omega/\omega_0)^2 + i\omega RC}{R + i\omega L}$$

При этом, если частота генератора совпадает с частотой колебательного контура, то импеданс упрощается до:

$$Z_{\text{рез}} = \frac{R + i\omega_0 L}{i\omega_0 RC} = \frac{L}{RC} - i \frac{1}{\omega_0 C}$$

Что при малом сопротивлении ( $R \ll \omega_0 L$ ) превращается в:

$$Z_{\text{рез}} = \frac{L}{RC}$$

что также можно переписать через добротность  $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$

$$Z_{\text{рез}} = \frac{L}{RC} = \frac{Q}{\omega_0 C}$$

А если рассматривать импеданс для всех частот генератора, то формула будет такой:

$$|Z| = \frac{\omega L}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + (\omega RC)^2}}$$

## Методика

При исследовании резонансной кривой тока в колебательном контуре обычно снимают зависимость амплитуды напряжения на резисторе R от частоты генератора. Однако при резком увеличении тока вблизи резонанса выходное напряжение генератора заметно просаживается, что вносит существенные искажения в форму резонансной кривой.

В работе для устранения влияния генератора используется такая схема:

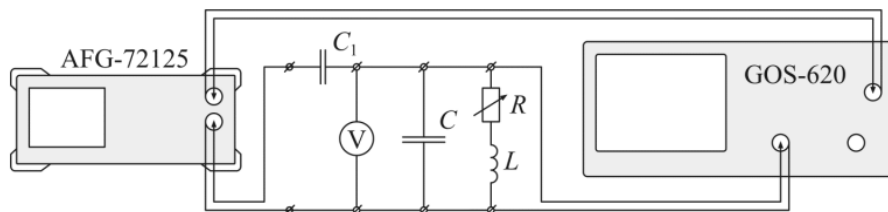


Figure 2: Схема установки

Синусоидальный сигнал с генератора подаётся на параллельный колебательный контур через небольшую разделительную ёмкость  $C_1$ . При этом ток в цепи определяется ёмкостью  $C_1$  и вблизи резонанса остается практически постоянным. Напряжение с ёмкости контура  $C$  поступает на вертикальный вход осциллографа. Зависимость амплитуды этого напряжения от частоты генератора согласно формуле:

$$U_0 = I_0 |Z| = \frac{I_0 \omega L}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + (\omega RC)^2}}$$

Разделительная ёмкость  $C_1$  выбирается настолько малой, что в рабочем диапазоне частот её импеданс  $Z_{C_1} = 1/(\omega C_1)$  много больше импеданса контура, в цепи генератора течёт ток с постоянной амплитудой, а колебательный контур выполняет роль нагрузочного сопротивления, которое, в свою очередь, зависит от частоты. Поскольку в резонансе сопротивление  $Z_{\text{рез}}$  параллельного контура максимально, то и напряжение на ёмкости

С (неизменный ток, умноженный на максимальное сопротивление) тоже максимально. Входное сопротивление осциллографа в измеряющей цепи достаточно велико:  $R_{ЭО} = 1 \text{ МОм}$ . Таким образом, при выполнении условий

$$Z_{C_1} = \frac{1}{\omega C_1} \gg Z_{\text{рез}} = \frac{Q}{\omega C}$$

$$R_{ЭО} \gg \frac{Q}{\omega C}$$

и при условии, что действительная часть импеданса катушки много меньше её мнимой части, резонансная кривая в нашем контуре будет выглядеть так же, как в последовательном: максимум амплитуды при резонансе. Ширина резонансной кривой определяет важную характеристику контура — добротность.

Рассмотрим процесс установления колебаний в контуре вблизи резонанса. Несложно показать, что возникающие в контуре колебания будут представлять собой суперпозицию двух синусоид: первая — с частотой собственных колебаний контура  $\omega_0$  и амплитудой, экспоненциально убывающей со временем; вторая — с частотой внешнего источника  $\omega$  и постоянной амплитудой. Зависимость напряжения на контуре (при напряжении и его производной равным 0 при  $t = 0$ ) от времени имеет вид:

$$U(t) = U_0 (\cos(\omega t - \varphi) - e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t - \varphi))$$

Здесь  $U_0$  — амплитуда установившихся колебаний,  $\gamma$  — коэффициент затухания. При частотах  $\omega$ , отличающихся от собственной частоты контура  $\omega_0$ , уравнение описывает биения. При очень близких частотах биения не возникают, так как колебания с собственной частотой контура затухают быстрее, чем накапливается разность фаз между колебаниями с частотами  $\omega$  и  $\omega_0$ . В этом случае уравнение сводится к простому виду

$$U(t) = U_0 (1 - e^{-\gamma t}) \cos(\omega_0 t - \varphi)$$

Заметим, что добротность колебательного контура можно выразить через коэффициент затухания

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

Это соотношение позволяет определить добротность контура по скорости нарастания амплитуды вынужденных колебаний при резонансе или по скорости затухания свободных колебаний. Нарастание и затухание колебаний можно наблюдать на экране осциллографа, если на контур подаются цуги — отрезки синусоиды, разделённые интервалами, в течение которых сигнал отсутствует. Чем выше добротность, тем медленнее нарастают и медленнее затухают колебания в контуре. Количественные оценки можно сделать, если определить логарифмический декремент затухания по скорости нарастания или затухания колебаний. В условиях резонанса огибающая затухающих колебаний — это перевёрнутая огибающая нарастающего участка, поэтому при расчёте логарифмического декремента по затухающему участку нет необходимости использовать амплитуду установившихся колебаний  $U_0$ , которая в контуре с высокой добротностью иногда не успевает установиться за время продолжительности цуга.

При частоте генератора близкой (но не равной) к резонансной, происходят биения

Фото

Которые появляются из-за наложения двух колебаний, различных по частоте: вынужденных и свободных. В итоге, из-за изменения сдвига по фазе от времени — со временем меняется и амплитуда.

## Результаты

Параметр	Значение
$R_0$	$0.07\Omega$
$R_{30}$	$30.08\Omega$
C	$97.183\text{нФ}$
$R_C$	$0.23\Omega$
L	$14.633\text{мГн}$
$R_L$	$3.44\Omega$

**R = 0** Резонансная частота контура (теоретически): (на практике) :

График показаний вольтметра от частоты генератора:

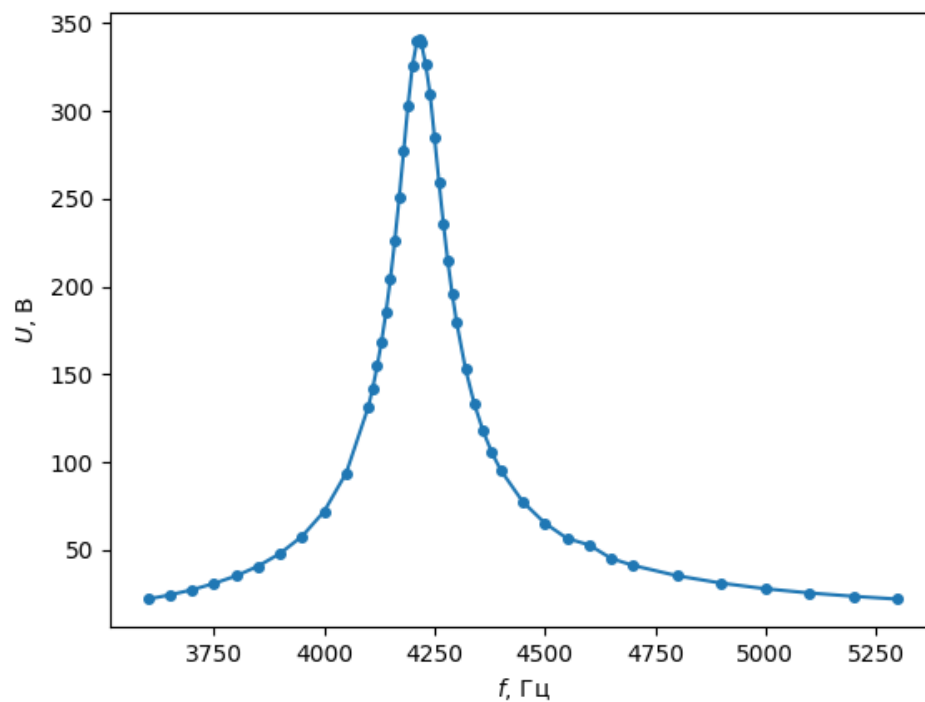


Figure 3: АЧХ при  $R = 0\Omega$

**R = 30 ом** Резонансная частота контура (теоретически): (на практике) :

График показаний вольтметра от частоты генератора:

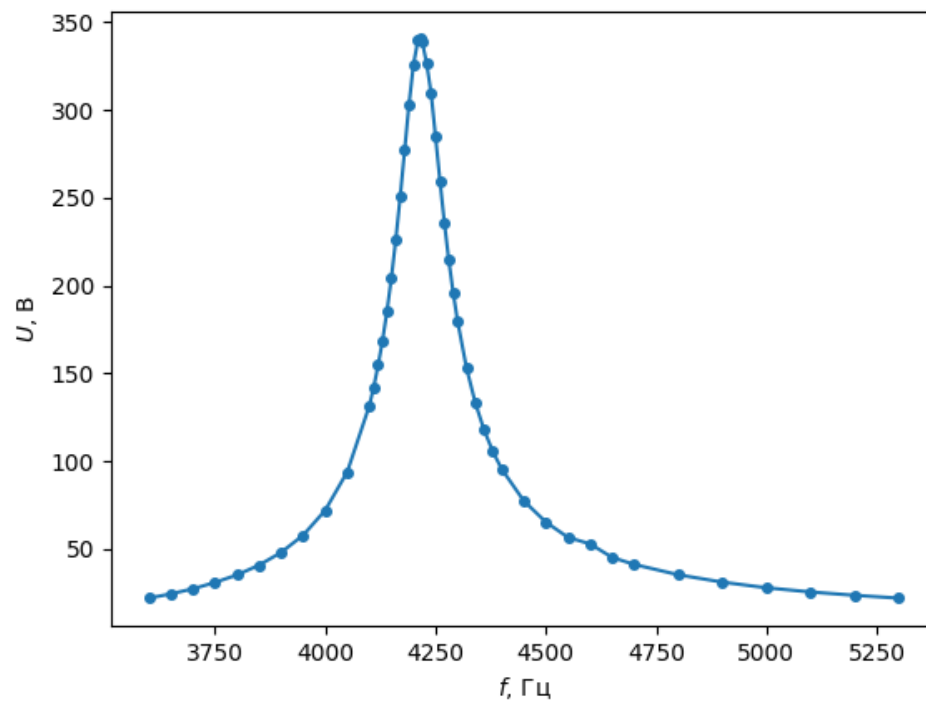


Figure 4: АЧХ при  $R = 30\Omega$

Фото графика затухающих и растущих колебаний для обоих значений  $R$

Фото биений

значение  $R_L$  и  $L$  из LCR метра

## Обработка данных

График резонансных кривых в относительных координатах

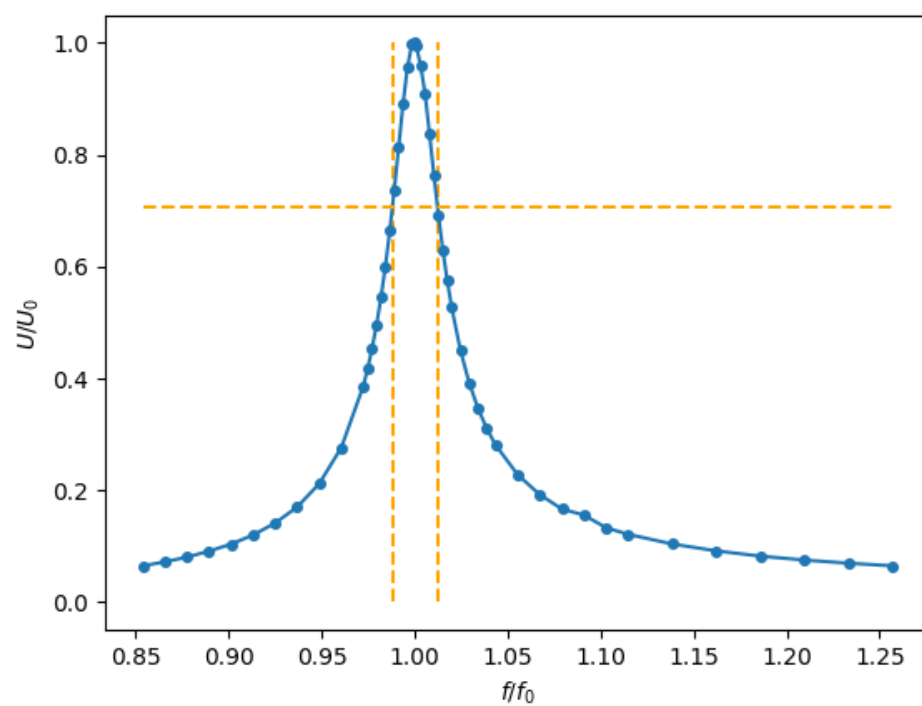


Figure 5: Нормированная АЧХ при  $R = 0\Omega$

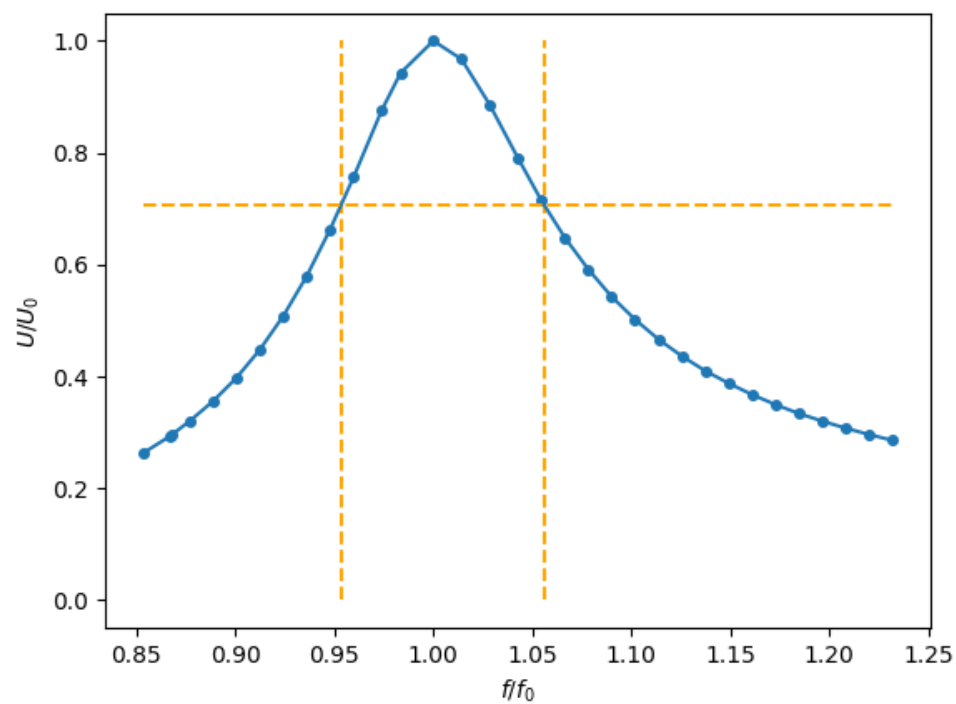


Figure 6: Нормированная АЧХ при  $R = 30\Omega$

Ширина полосы при  $R = 0$ : 0.242, откуда добротность —  $Q = \frac{f}{\Delta f} = \frac{1}{0.24} \approx 41.4$

Ширина полосы при  $R = 30$ : 0.102, откуда добротность —  $Q = \frac{f}{\Delta f} = \frac{1}{0.24} \approx 9.8$

Добротность из формулы Сравнение теоритической и экспериментальной резонансных частот

график амплитуды зат. колеб. от времени из него достать добротность и коэф. затухания

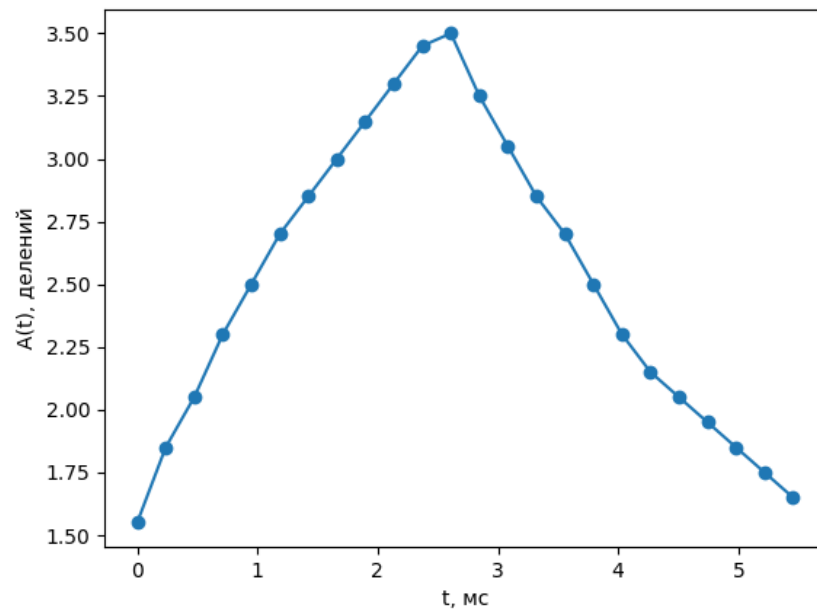


Figure 7: График максимумов сигнала от времени при  $R = 0\Omega$

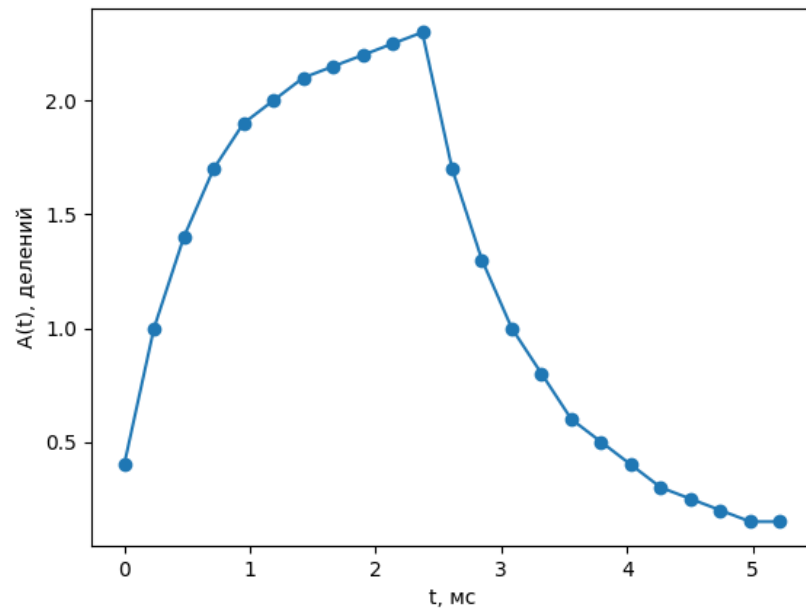


Figure 8: График максимумов сигнала от времени при  $R = 30\Omega$

Рассмотрим в логарифмическом масштабе правые части графиков:

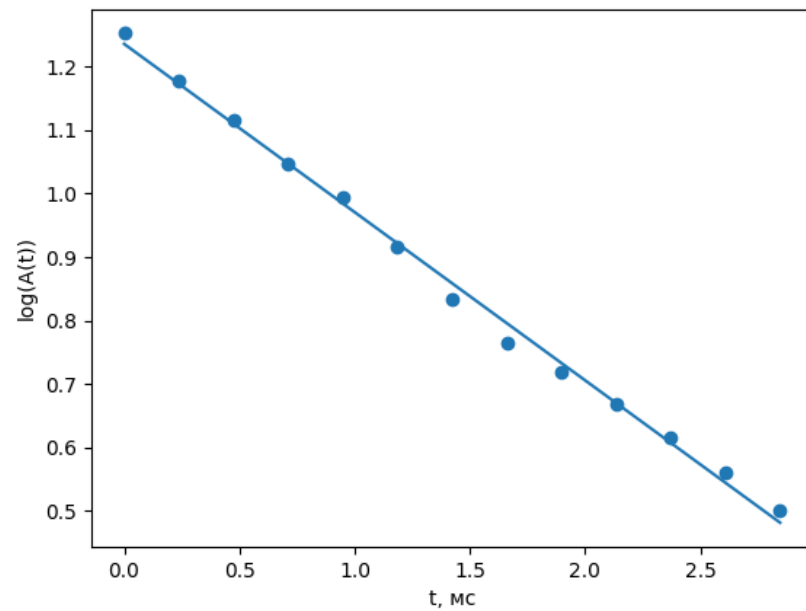


Figure 9: Логарифм амплитуды от времени при  $R = 0$

Коэффициент наклона:  $-0.27 \text{ 1/мс}$



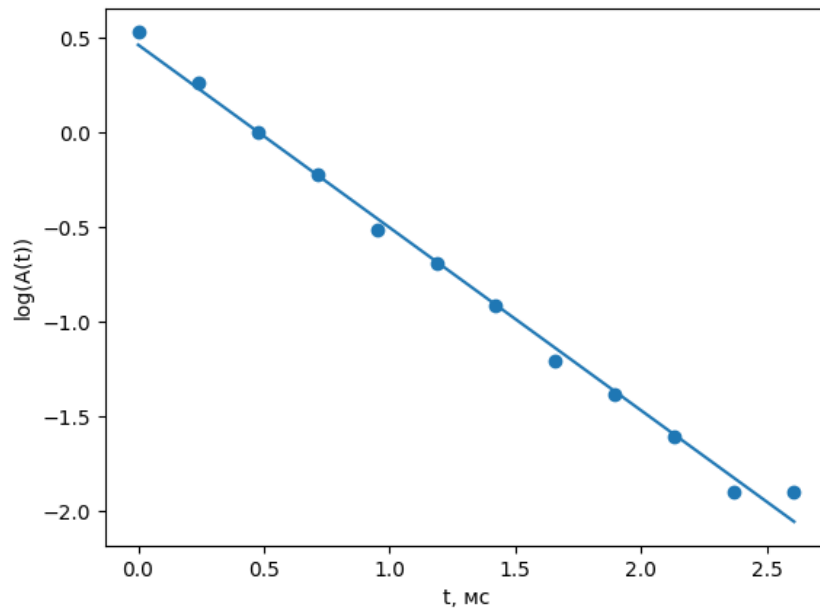


Figure 10: Логарифм амплитуды от времени при  $R = 0$

Коэффициент наклона:  $-0.27 \text{ 1/мс.}$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\gamma} \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\pi}{\gamma T}$$

Подставляя, получаем  $Q_0 \approx 50$ ,  $Q_{30} \approx 13.7$ .

добротность из параметров