

Вынужденные колебания в электрическом контуре

Лабораторная работа

Высшая школа экономики, Санкт-Петербургская школа
физико-математических и компьютерных наук

Физика, 1 курс

Андрей Ситников

Никита Афанасьев

24.04.2022

Цель работы

Исследование резонансных кривых, с целью определения добротности и логарифмического декремента затухания при нарастании и затухании колебаний

Теория

Рассмотрим цепь с таким параллельным контуром:

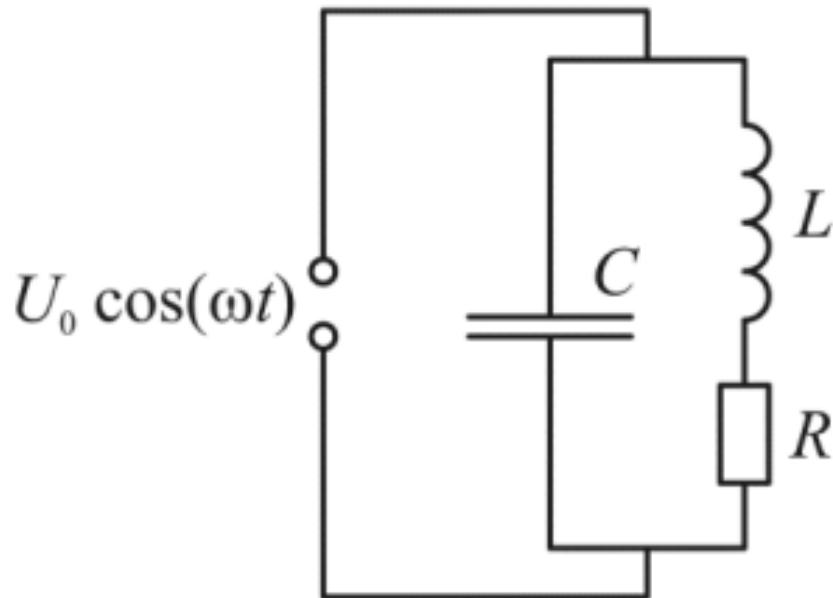


Figure 1: Схема контура

Запишем импедансы параллельных проводов, и посчитаем полный импеданс контура

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{R + i\omega L} + i\omega C = \frac{1 - (\omega/\omega_0)^2 + i\omega RC}{R + i\omega L}$$

При этом, если частота генератора совпадает с частотой колебательного контура, то импеданс упрощается до:

$$Z_{\text{рез}} = \frac{R + i\omega_0 L}{i\omega_0 RC} = \frac{L}{RC} - i\frac{1}{\omega_0 C}$$

Что при малом сопротивлении ($R \ll \omega_0 L$) превращается в:

$$Z_{\text{рез}} = \frac{L}{RC}$$

что также можно переписать через добротность $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$

$$Z_{\text{рез}} = \frac{L}{RC} = \frac{Q}{\omega_0 C}$$

А если рассматривать импеданс для всех частот генератора, то формула будет такой:

$$|Z| = \frac{\omega L}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + (\omega RC)^2}}$$

Методика

При исследовании резонансной кривой тока в колебательном контуре обычно снимают зависимость амплитуды напряжения на резисторе R от частоты генератора. Однако при резком увеличении тока вблизи резонанса выходное напряжение генератора заметно просаживается, что вносит существенные искажения в форму резонансной кривой.

В работе для устранения влияния генератора используется такая схема:

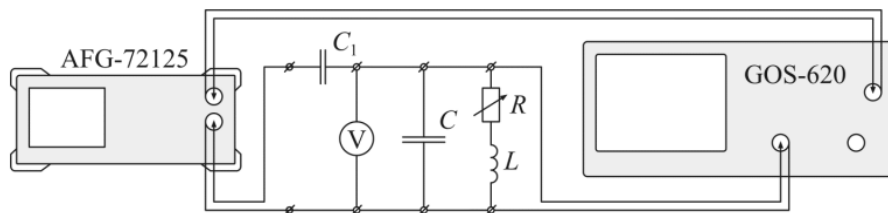


Figure 2: Схема установки

Синусоидальный сигнал с генератора подаётся на параллельный колебательный контур через небольшую разделительную ёмкость C_1 . При этом ток в цепи определяется ёмкостью C_1 и вблизи резонанса остается практически постоянным. Напряжение с ёмкости контура C поступает на вертикальный вход осциллографа. Зависимость амплитуды этого напряжения от частоты генератора согласно формуле:

$$U_0 = I_0 |Z| = \frac{I_0 \omega L}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + (\omega RC)^2}}$$

Разделительная ёмкость C_1 выбирается настолько малой, что в рабочем диапазоне частот её импеданс $Z_{C_1} = 1/(\omega C_1)$ много больше импеданса контура, в цепи генератора течёт ток с постоянной амплитудой, а колебательный контур выполняет роль нагрузочного сопротивления, которое, в свою очередь, зависит от частоты. Поскольку в резонансе сопротивление $Z_{\text{рез}}$ параллельного контура максимально, то и напряжение на ёмкости C (неизменный ток, умноженный на максимальное сопротивление) тоже максимально. Входное сопротивление осциллографа в измеряющей цепи достаточно велико: $R_{\text{ЭО}} = 1 \text{ МОм}$. Таким образом, при выполнении условий

$$Z_{C_1} = \frac{1}{\omega C_1} \gg Z_{\text{рез}} = \frac{Q}{\omega C}$$

$$R_{\text{ЭО}} \gg \frac{Q}{\omega C}$$

и при условии, что действительная часть импеданса катушки много меньше её мнимой части, резонансная кривая в нашем контуре будет выглядеть так же, как в последовательном: максимум амплитуды при резонансе. Ширина резонансной кривой определяет важную характеристику контура — добротность.

Рассмотрим процесс установления колебаний в контуре вблизи резонанса. Несложно показать, что возникающие в контуре колебания будут представлять собой суперпозицию двух синусоид: первая — с частотой собственных колебаний контура ω_0 и амплитудой, экспоненциально убывающей со временем; вторая — с частотой внешнего источника ω и постоянной амплитудой. Зависимость напряжения на контуре (при напряжении и его производной равным 0 при $t = 0$) от времени имеет вид:

$$U(t) = U_0 (\cos(\omega t - \varphi) - e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t - \varphi))$$

Здесь U_0 — амплитуда установившихся колебаний, γ — коэффициент затухания. При частотах ω , отличающихся от собственной частоты контура ω_0 , уравнение описывает биения. При очень близких частотах биения не возникают, так как колебания с собственной частотой контура затухают быстрее, чем накапливается разность фаз между колебаниями с частотами ω и ω_0 . В этом случае уравнение сводится к простому виду

$$U(t) = U_0 (1 - e^{-\gamma t}) \cos(\omega_0 t - \varphi)$$

Заметим, что добротность колебательного контура можно выразить через коэффициент затухания

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

Это соотношение позволяет определить добротность контура по скорости нарастания амплитуды вынужденных колебаний при резонансе или по скорости затухания свободных колебаний. Нарастание и затухание колебаний можно наблюдать на экране осциллографа, если на контур подаются цуги — отрезки синусоиды, разделённые интервалами, в течение которых сигнал отсутствует. Чем выше добротность, тем медленнее нарастают и медленнее затухают колебания в контуре. Количественные оценки можно сделать, если определить логарифмический декремент затухания по скорости нарастания или затухания колебаний. В условиях резонанса огибающая затухающих колебаний — это перевёрнутая огибающая нарастающего участка, поэтому при расчёте логарифмического декремента по затухающему участку нет необходимости использовать амплитуду установившихся колебаний U_0 , которая в контуре с высокой добротностью иногда не успевает установиться за время продолжительности цуга.

При частоте генератора близкой (но не равной) к резонансной, происходят биения

Фото

Которые появляются из-за наложения двух колебаний, различных по частоте: вынужденных и свободных. В итоге, из-за изменения сдвига по фазе от времени — со временем меняется и амплитуда.

Результаты

Параметр	Значение
R_0	0.07Ω
R_{30}	30.08Ω
C	97.183нФ
R_C	0.23Ω
L	14.633мГн
R_L	3.44Ω

R = 0 Резонансная частота контура (теоретически): (на практике) :

График показаний вольтметра от частоты генератора:

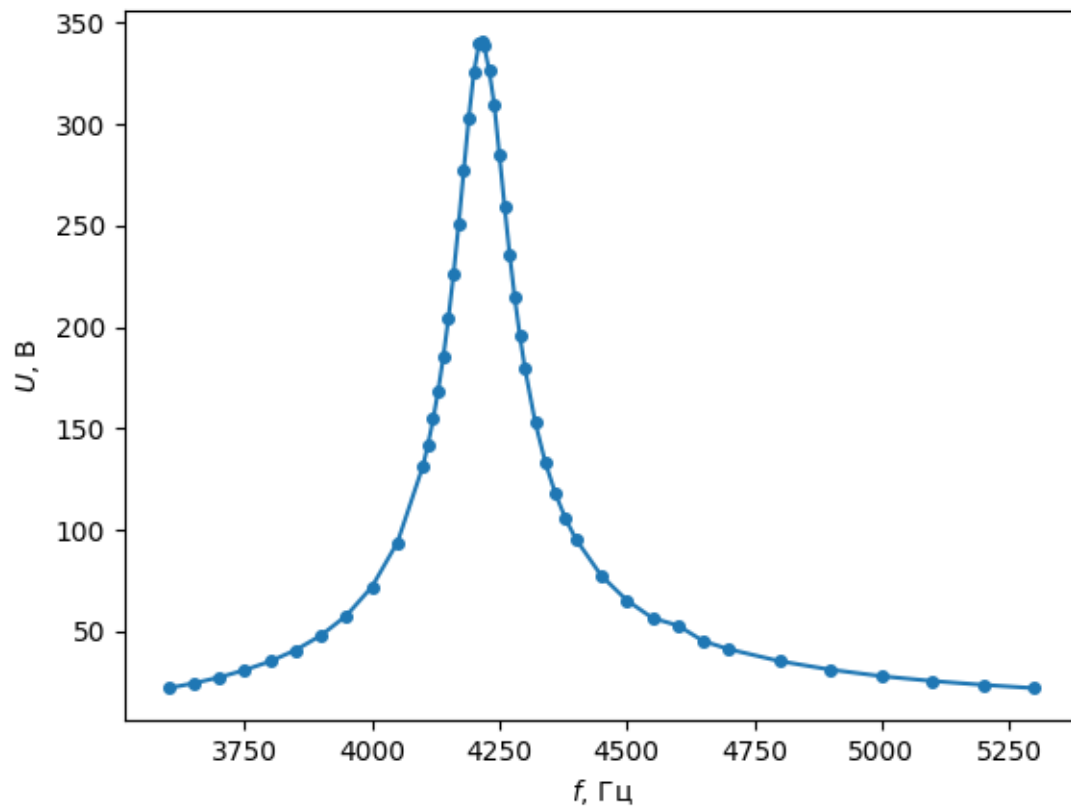


Figure 3: Нормированная АЧХ при $R = 0\Omega$

R = 30 ом Резонансная частота контура (теоретически): (на практике) :

График показаний вольтметра от частоты генератора:

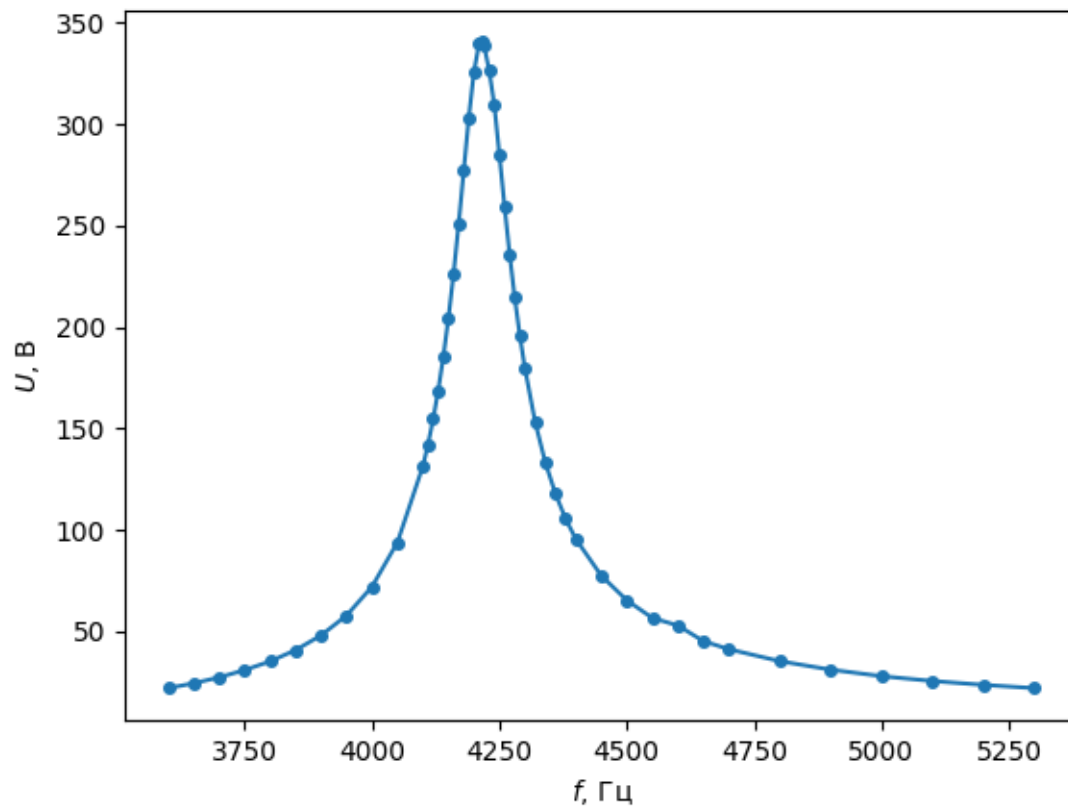


Figure 4: Нормированная АЧХ при $R = 30\Omega$

Фото графика затухающих и растущих колебаний для обоих значений R

Фото биений

значение R_L и L из LCR метра

Обработка данных

График резонансных кривых в относительных координатах

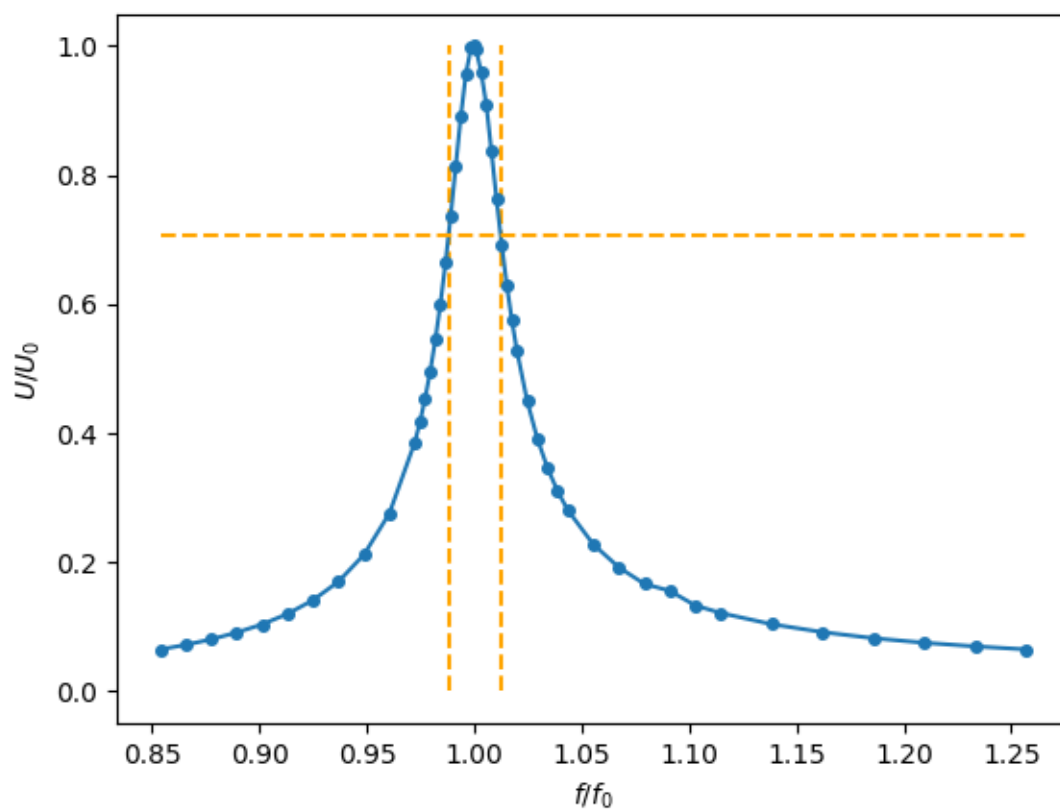


Figure 5: Нормированная АЧХ при $R = 0\Omega$

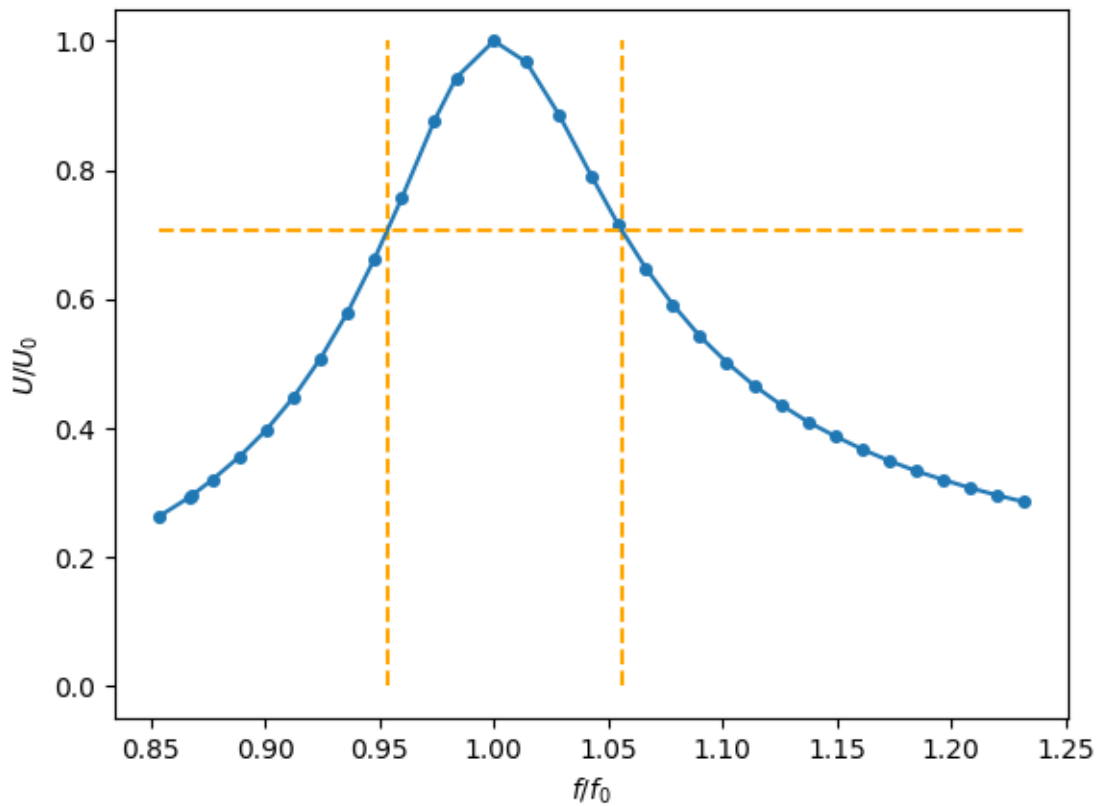


Figure 6: Нормированная АЧХ при $R = 30\Omega$

Ширина полосы при $R = 0$: 0.242, откуда добротность — $Q = \frac{f}{\Delta f} = \frac{1}{0.24} \approx 41.4$

Ширина полосы при $R = 30$: 0.102, откуда добротность — $Q = \frac{f}{\Delta f} = \frac{1}{0.24} \approx 9.8$

Добротность из формулы Сравнение теоритической и экспериментальной резонансных частот

график амплитуды зат. колеб. от времени из него достать добротность и коэф. затухания

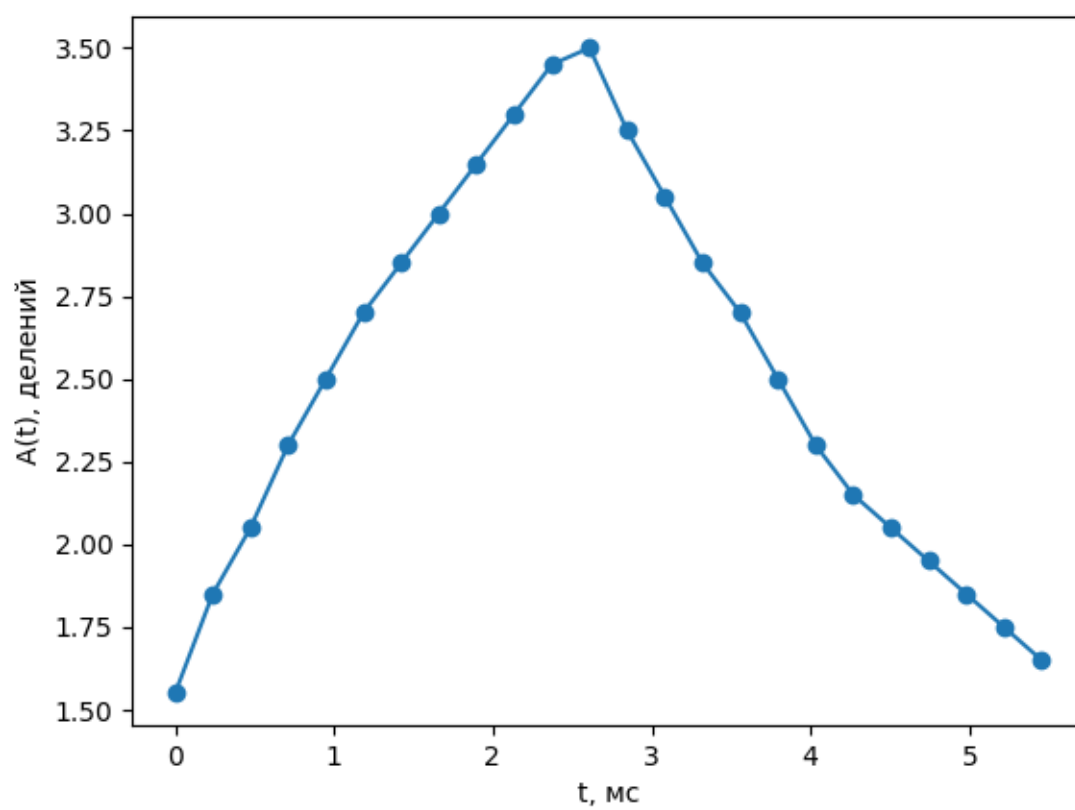


Figure 7: График максимумов сигнала от времени при $R = 0\Omega$

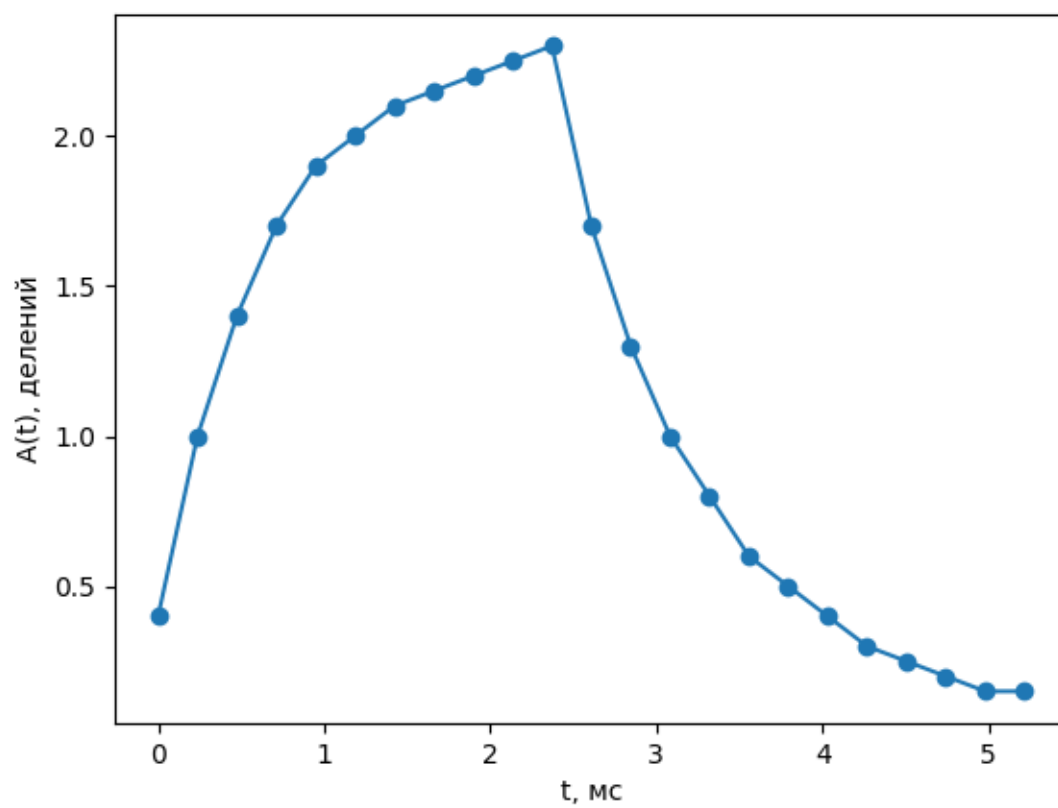


Figure 8: График максимумов сигнала от времени при $R = 30\Omega$

Рассмотрим в логарифмическом масштабе правые части графиков:

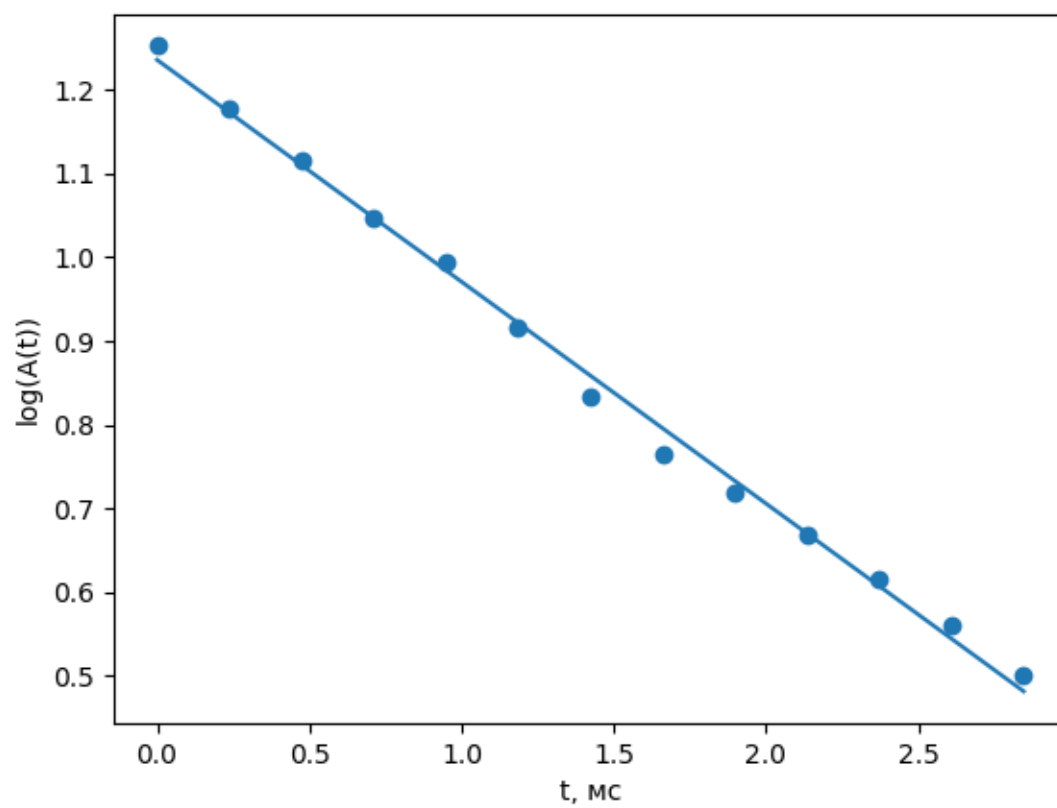


Figure 9: log_curve_0

Коэффициент наклона: -0.27 1/мс

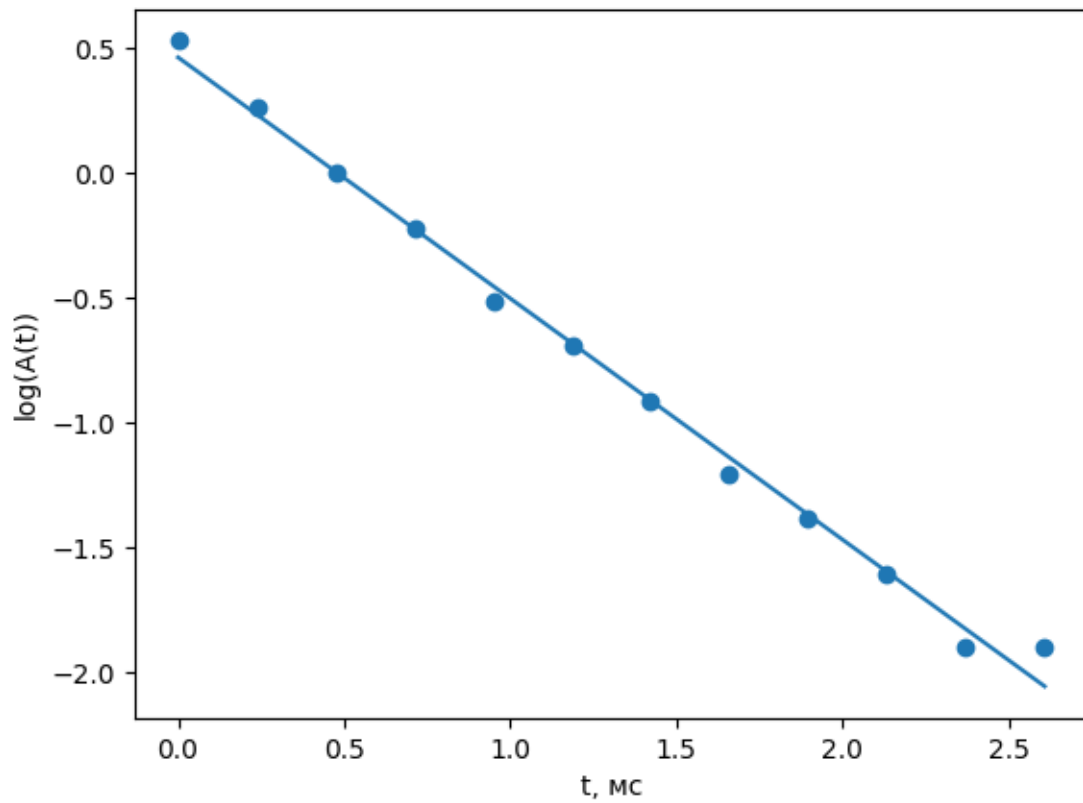


Figure 10: log_curve_30

Коэффициент наклона: -0.27 1/мс.

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\gamma} \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\pi}{\gamma T}$$

Подставляя, получаем $Q_0 \approx 50$, $Q_{30} \approx 13.7$.

добротность из параметров