

# MATEMÁTICA

Funções Exponencial e Logarítmica



Livro Eletrônico



# SUMÁRIO

Apresentação .....	3
Funções Exponencial e Logarítmica .....	4
1. Tópicos Adicionais .....	4
1.1. Função Inversa .....	4
1.2. Função Composta .....	6
1.3. Inequações Produto e Quociente .....	13
2. Funções Exponenciais .....	16
2.1. Potência .....	16
2.2. Propriedades da Potência .....	17
2.3. Função Exponencial .....	19
3. Função Logarítmica .....	28
3.1. Função Logarítmica .....	30
Resumo .....	36
Mapa Mental .....	39
Questões Comentadas em Aula .....	40
Questões de Concurso .....	45
Gabarito .....	59

## APRESENTAÇÃO

Olá, aluno(a), seja bem-vindo(a), a mais uma aula de Funções. Nessa aula, nós vamos tratar a Função Inversa, a Função Composta e as Funções Exponencial e Logarítmica.

São temas menos cobrados em questões de provas, porém, é importante você ficar de olho neles, pois, quando são cobrados, surpreendem os candidatos.

Vale ressaltar que as questões de Função Exponencial e Logarítmica tendem a ser bem mais tranquilas que outras questões de funções, portanto, considero temas de um custo-benefício bastante atrativo.

Por fim, gostaria de lembrá-lo de me seguir no Instagram (@math.gran). E, vamos lá, começar nossa aula?

# FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

## 1. TÓPICOS ADICIONAIS

### 1.1. FUNÇÃO INVERSA

Uma função bijetora é aquela que é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

O principal interesse no estudo das funções bijetoras é que elas são inversíveis. Uma função é **inversível se, e somente se, for bijetora**.

Considere a função:

$$f: A \rightarrow B; \quad A = \{0, 1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$y = f(x) = x + 1$$

Essa função pode ser representada graficamente pela Figura 10.

Observe que a função  $f$  é bijetora, porque é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

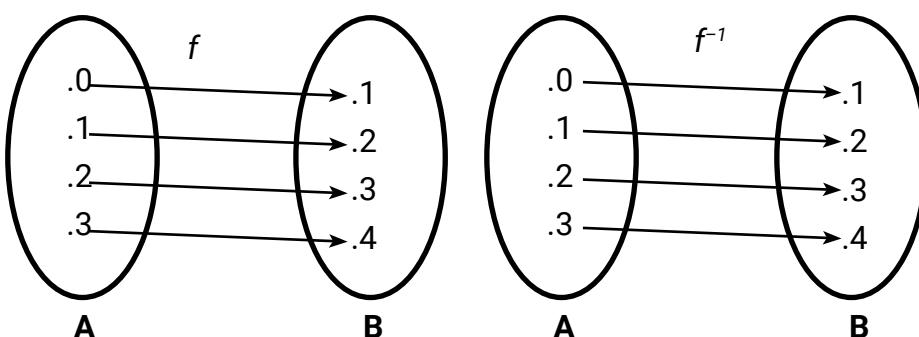


Figura 1: Função e sua Inversa

A Figura 10 também ilustra a sua função inversa. Observe que, enquanto a função direta  $f$  leva o 0 para 1, leva 1 para 2, perceba que a função inversa faz o contrário, ou seja, ela leva 1 para 0 e 2 para 1.

A função inversa corresponde à pergunta:

*Qual o elemento que, quando aplicado na função  $f$  produz como resultado 2?*

Nesse exemplo, temos que  $f^{-1}(2) = 1$ , porque  $f(1) = 2$ .

Matematicamente, podemos calcular a expressão da função inversa.

$$y = x + 1$$

Basta isolar  $x$  em função de  $y$ .

$$\therefore x = y - 1$$

Agora, vamos escrever  $x$  como a função inversa de  $y$ .

$$\therefore x = f^{-1}(y) = y - 1$$

Um ponto importante para se comentar sobre a função inversa é que os conceitos de domínio e contradomínio são invertidos. Vejamos:

$$f: A \rightarrow B, y = f(x) = x + 1$$

$$\therefore f^{-1}: B \rightarrow A, x = f^{-1}(y) = y - 1$$

A função inversa consiste no procedimento matemático de resolver uma equação.

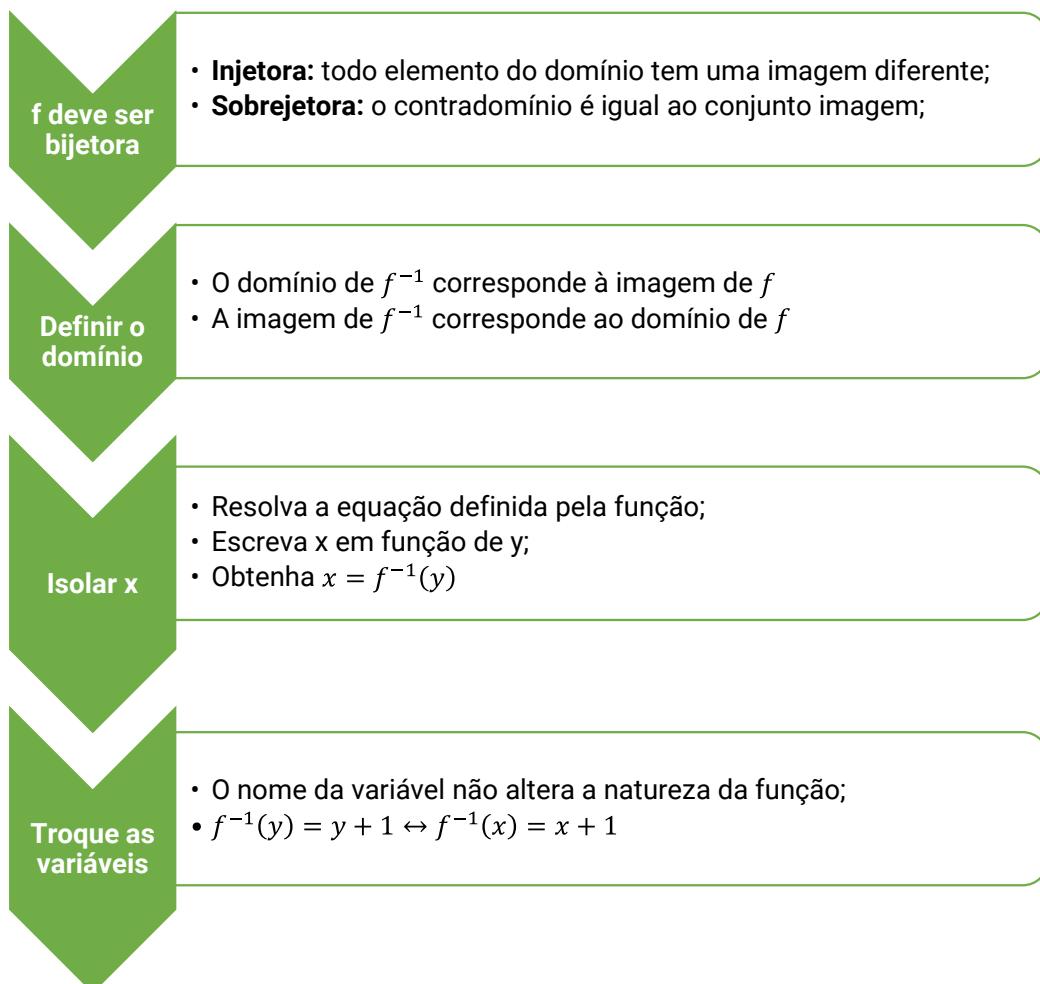
De maneira geral, deveríamos escrever exatamente como no esquema e dizer que a função inversa é a função inversa de  $y$ . Ou seja,  $x = f^{-1}(y)$ .

Porém, como já detalhamos anteriormente, o nome da variável que está no interior de uma função é irrelevante para identificar a natureza dessa função. Sendo assim, é muito comum que as questões de prova troquem a variável e escrevam da seguinte forma.

$$f^{-1}(y) = y - 1 \leftrightarrow f^{-1}(x) = x - 1$$

Essa troca de variáveis é perfeitamente compreensível. Porém, eu sugiro que você seja extremamente indelicado com as questões, principalmente com as objetivas. Sempre que um enunciado escrever  $f^{-1}(x)$ , você vai riscar e escrever  $f^{-1}(y)$  no lugar. Essa é uma dica de prova somente para facilitar o seu entendimento. Combinado?

Sendo assim, podemos summarizar o procedimento para obter uma função inversa.



## 1.2. FUNÇÃO COMPOSTA

A função composta acontece quando aplicamos uma função sucessivamente a outra. Por exemplo, considere as funções:

$$f(x) = x + 1 \quad g(x) = x^2$$

Pode-se obter duas funções compostas:  $f \circ g$  e  $g \circ f$ . Leem-se, respectivamente, f bola g e g bola f.

Tem-se que:

$$f \circ g = f(g(x))$$

$$g \circ f = g(f(x))$$

Façamos as contas:

$$f \circ g = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$$

$$g \circ f = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Para você entender bem a diferença entre as duas funções compostas, vejamos um meme criado pela página “Mathematical Memes”

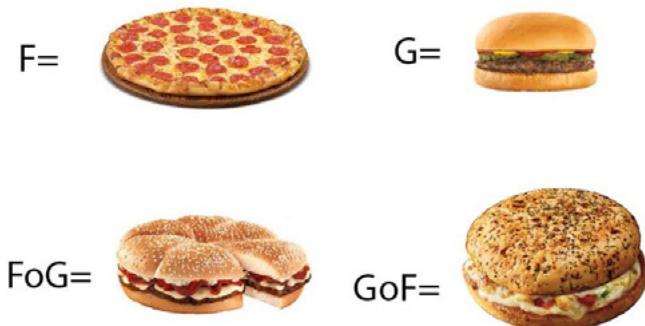


Figura 2: Ilustração da Função Composta

A função  $f$  é uma pizza, enquanto que a  $g$  é um sanduíche. A função composta  $f \circ g$  é uma pizza de sanduíche. Já a função composta  $g \circ f$  é um hambúrguer de pizza. Reparou a diferença?

### DIRETO DO CONCURSO

**001. (CESPE/PREFEITURA DE SÃO LUÍS-MA/2017)** Se  $x \geq 0$  representa a quantidade de quilômetros percorridos por um veículo em determinado dia, então:

**$f(x) = x/12$**  representa a quantidade de litros de combustível consumido pelo veículo para percorrer  $x$  quilômetros;

$g(x) = 60 - x/12$  representa a quantidade de litros de combustível que restam no tanque do veículo depois de percorridos  $x$  quilômetros.

Ainda com base no texto 11A1AAA, se  $m(x) = x - 240$ , e se a função composta  $Q(x) = (g \circ m)(x) = g(m(x))$  representa a quantidade de litros de combustível que resta no tanque de um veículo depois de percorrer  $x$  quilômetros, tendo iniciado o percurso com o tanque cheio, então o tanque de combustível desse veículo tem capacidade para:

- a) mais de 90 litros e menos de 95 litros.
- b) mais de 95 litros.
- c) 80 litros.
- d) mais de 80 litros e menos de 85 litros.
- e) mais de 85 litros e menos de 90 litros.



Primeiramente, devemos calcular a função composta.

$$Q(x) = g(m(x)) = 60 - \frac{m(x)}{12} = 60 - \frac{x - 240}{12} = 60 - \frac{x}{12} + 20 = 80 - \frac{x}{12}$$

O tanque cheio acontece na partida do veículo, ou seja, em  $x = 0$ .

$$Q(0) = 80 - \frac{0}{12} = 80$$

**Letra c.**

**002.** (CESPE/PREFEITURA DE SÃO LUÍS-MA/2017) Se  $f(x)$  e  $g(x)$  são as funções definidas no texto 11A1AAA, e se  $h(x) = f(x)/g(x)$ , então a inversa  $h^{-1}(x)$  pode ser expressa por:

- a)  $h^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-720}$
- b)  $h^{-1}(x) = -\frac{x+1}{720+x}$
- c)  $h^{-1}(x) = \frac{x+1}{720x}$
- d)  $h^{-1}(x) = \frac{720x}{x+1}$
- e)  $h^{-1}(x) = \frac{720-x}{x+1}$



Calcularemos primeiramente a função  $h$ .

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x/12}{60 - x/12} = \frac{x}{720 - x}$$

Para calcular a função inversa, chamemos  $y = h(x)$ .

$$y = \frac{x}{720 - x}$$

Podemos usar as propriedades das proporções para isolar o x em função de y.

$$\begin{aligned}\frac{y}{y+1} &= \frac{x}{720-x+x} = \frac{x}{720} \\ \therefore x &= \frac{720y}{y+1} = f^{-1}(y)\end{aligned}$$

Agora, façamos a troca de variáveis.

$$f^{-1}(y) = \frac{720y}{y+1} \leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{720x}{x+1}$$

**Letra d.**

**003.** (ESAF/AFRFB/2009) Considere as inequações dadas por:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \leq 0 \text{ e } g(x) = -2x^2 + 3x + 2 \geq 0$$

Sabendo-se que A é o conjunto solução de  $f(x)$  e B o conjunto solução de  $g(x)$ , então o conjunto  $Y = A \cap B$  é igual a:

- a)  $Y = \left\{ x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{2} < x \leq 2 \right\}$
- b)  $Y = \left\{ x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{2} \leq x \leq 2 \right\}$
- c)  $Y = \{x \in \mathbb{R}, x = 1\}$
- d)  $Y = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$
- e)  $Y = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$



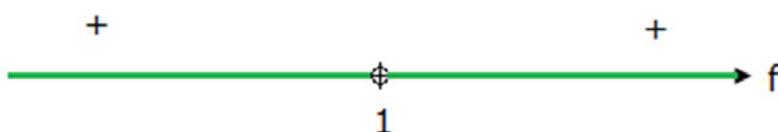
Para resolver as inequações, primeiramente devemos obter as raízes de ambas as funções.

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \leq 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Interessantíssimo. A função  $f$  tem uma raiz dupla, ou seja, uma única raiz real. Fora das raízes, o sinal de  $f$  é o mesmo do coeficiente a. Portanto, a função é sempre positiva, exceto na raiz real.



Sendo assim, a inequação  $f(x) \leq 0$  possui apenas uma solução  $x = 1$ . Sendo assim,  $A = \{1\}$ . Para a inequação  $g$ , poderíamos calcular as raízes, mas é mais fácil checar se  $x = 1$  também pertence ao seu conjunto solução. Basta calcular o valor de  $g(1)$ .

$$g(1) = -2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 2 = -2 + 3 + 2 = 3 \geq 0$$

Sendo assim, 1 também pertence ao conjunto solução de  $g(x) \geq 0$ . Logo, a intersecção  $Y = A \cap B = \{1\}$ .

Já temos a resposta. Porém, apenas por questões de praticar mais, vamos resolver a inequação  $g(x) \geq 0$ . Para isso, precisamos obter as raízes de  $g$ .

$$-2x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 2}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{-4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{-4} = \frac{-3 \pm 5}{-4}$$

Temos, portanto, as duas raízes de  $g$ .

$$x_1 = \frac{-3 + 5}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3 - 5}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

Sendo assim,  $g$  possui sinal oposto ao coeficiente  $a = -2 < 0$ , ou seja, sinal positivo no intervalo entre as raízes reais.



**Letra c.**

**004.** (ESAF/AFRFB/2014) Considere a função bijetora  $f$ , de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  definida por  $f(x) = (x^2 - 1)$ , se  $x \geq 0$  e  $f(x) = (x - 1)$ , se  $x < 0$ , em que  $\mathbb{R}$  é o conjunto de números reais. Então os valores da função inversa de  $f$ , quando  $x = -8$  e  $x = 8$  são, respectivamente, iguais a:

- a) -7; 3
- b) -7; -3
- c) 1/9; 1/63
- d) -1/9; -1/63
- e) -63; 9



A meu ver, essa foi uma das questões mais difíceis já cobradas em provas de concursos públicos, pois requer bastante entendimento matemático sobre funções e funções inversas.

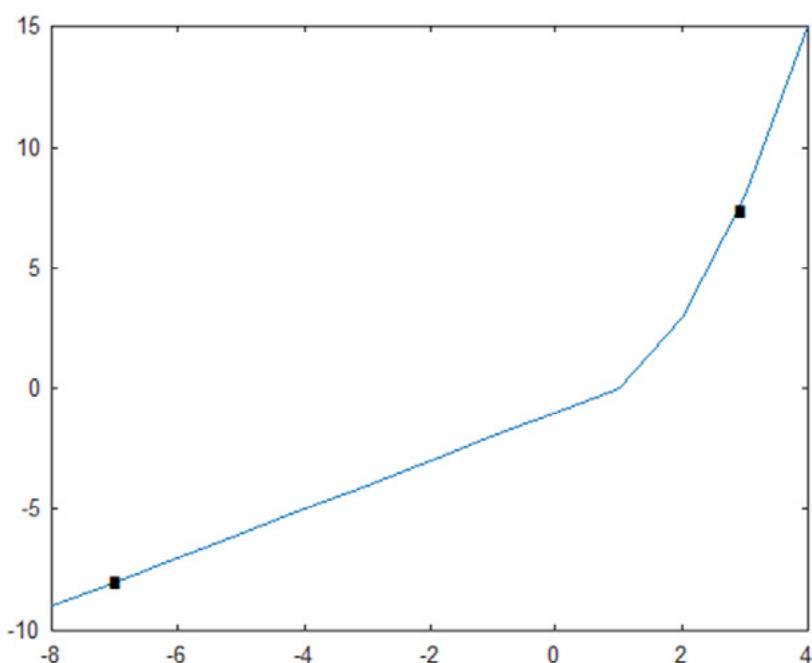
Eu sempre sugiro que você seja mal educado com as questões que pedem para você calcular  $f^{-1}(x)$ . Nesse caso, para que você possa entender melhor o problema, troque o enunciado pela função inversa de  $f$ , quando  $y = -8$  e  $y = 8$ . Matematicamente falando, não há diferenças relevantes, porém, ficará mais fácil de entender.

Para encontrar a função inversa, primeiro precisamos traçar a função direta.

O primeiro ponto é que a função é uma reta para  $x < 0$  e uma parábola para  $x > 0$ . Agora, vamos construir uma pequena tabela de valores registrados para a função.

x	f(x)
-3	$-3^2 - 1 = -4$
-2	$-2^2 - 1 = -3$
-1	$-1^2 - 1 = -2$
0	$0^2 - 1 = -1$
1	$1^2 - 1 = 0$
2	$2^2 - 1 = 7$
3	$3^2 - 1 = 8$

Sendo assim, podemos construir o gráfico.



O ponto preto à esquerda representa o ponto em que  $y = -8$ , enquanto que o ponto preto à direita representa o ponto em que  $y = 8$ .

Note que, para  $y = -8$ , temos  $x < 0$ , por isso, precisamos utilizar a expressão que  $f(x) = x-1$ . A função inversa de  $y = -8$  é aquele valor de  $x$  que, quando colocado na função original, produz  $y = -8$ . Sendo assim:

$$y = f(x) = x - 1$$

$$-8 = x - 1 \therefore x = -8 + 1 = -7$$

$$f(-7) = -8 \leftrightarrow f^{-1}(-8) = -7$$

Para  $y = +8$ , temos  $x > 0$ , portanto devemos utilizar a expressão  $f(x) = x^2 - 1$ .

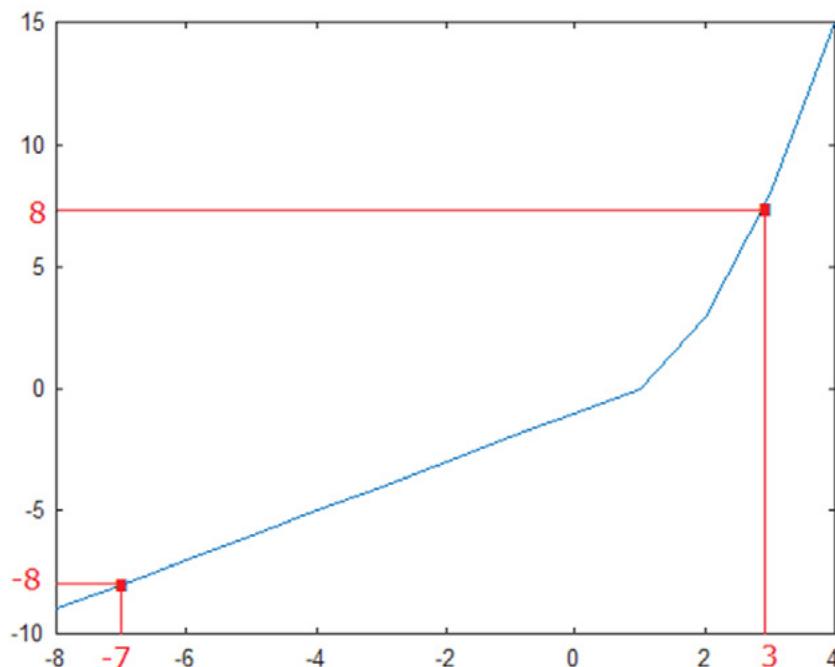
$$y = f(x) = x^2 - 1$$

$$8 = x^2 - 1 \therefore x^2 = 8 + 1 = 9 \therefore x = \sqrt{9} = 3$$

Nesse caso, devemos descartar a raiz negativa, pois  $f(-3) = -3^2 - 1 = -8$ , enquanto que  $f(3) = 3^2 - 1 = 8$ . Sendo assim, a função inversa de 8 é igual a 3.

$$f(3) = 8 \leftrightarrow f^{-1}(8) = 3$$

Destacaremos no gráfico em vermelho os pontos calculados para que você entenda os pontos pesquisados e encontrados. A função inversa de 8 é 3, porque a  $f(3) = 8$ . Analogamente, a função inversa de -8 é -7, porque  $f(-7) = -8$ . A função inversa corresponde aos valores de  $x$ , tais que  $f(x) = y$ .



**Letra a.**

**005.** (ESAF/AFRFB/2012/AUDITOR-FISCAL) A função bijetora dada por  $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$  possui domínio no conjunto dos números reais, exceto o número 2, ou seja:  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ . O conjunto imagem de  $f(x)$  é o conjunto dos reais menos o número 1, ou seja:  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Desse modo, diz-se que  $f(x)$  é uma função de  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  em  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Com isso, a função inversa de  $f$ , denotada por  $f^{-1}$ , é definida como:

a)  $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ , de  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  em  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

b)  $f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ , de  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  em  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

c)  $f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ , de  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  em  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

d)  $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{x+1}$ , de  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  em  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

e)  $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{x+1}$ , de  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  em  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$



Uma questão de altíssimo nível sobre funções inversas. Porém, a resolução segue o mesmo algoritmo de sempre.

$$y = \frac{x+1}{x-2}$$

Devemos isolar  $x$  em função de  $y$ .

$$\begin{aligned} yx - 2y &= x + 1 \\ \therefore yx - x &= 1 + 2y \\ \therefore x(y-1) &= 1 + 2y \quad \therefore x = \frac{1+2y}{y-1} = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Agora, façamos a troca de variáveis.

$$f^{-1}(y) = \frac{1+2y}{y-1} \leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{1+2x}{x-1} = \frac{2x+1}{x-1}$$

Sobre o domínio e o conjunto imagem, podemos ver que o domínio da função inversa deve ser:

$$x - 1 \neq 0 \quad \therefore x \neq 1 \quad \therefore D(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Por outro lado, a imagem da função inversa é igual ao domínio da função direta. Lembrando-nos que:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2} \rightarrow x - 2 \neq 0 \quad \therefore x \neq 2 \quad \therefore Im(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Sendo assim, a função inversa é dada por:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

**Letra a.**

## 1.3. INEQUAÇÕES PRODUTO E QUOCIENTE

Embora essas inequações jamais tenham sido exploradas em provas de concursos – pelo menos, até o momento em que escrevia esse material, eu não encontrei nenhuma questão sobre o tema –, a Receita Federal já tangenciou o tema. E as provas mais recentes da Área Fiscal tem trazido várias novidades. Por isso, esse tipo de inequação pode ser inaugurado em alguma prova vindoura.

O conceito é bem simples. Considere duas funções  $f(x)$  e  $g(x)$  que, provavelmente, serão funções do primeiro ou segundo grau ou relacionadas a elas. As inequações produto ou quociente são de alguma das seguintes formas:

$$f(x) \cdot g(x) \geq 0 \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$$

$$f(x) \cdot g(x) \leq 0 \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

$$f(x) \cdot g(x) > 0 \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0$$

$$f(x) \cdot g(x) < 0 \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0$$

Para resolver as inequações, precisamos encontrar os sinais de  $f$  e  $g$  e lembrarmos da regra de sinais:

- (+) vezes (+) dá (+);
- (+) vezes (-) dá (-);
- (-) vezes (+) dá (-);
- (-) vezes (-) dá (+);

O único cuidado a se ter é nas inequações quociente. Nesse caso, não podemos incluir os zeros (ou raízes) de  $g(x)$ , pois não é possível dividir por zero.

Vejamos um exemplo para ficar mais claro:

$$\frac{x+1}{x-2} \leq 0$$

Essa inequação é bastante simples de resolver. No numerador, temos:

$$x + 1 \geq 0 \therefore x \geq -1$$

No denominador, temos:

$$x - 2 > 0 \therefore x > 2$$

Sendo assim, as distribuições de sinais de  $f$  e  $g$  são:

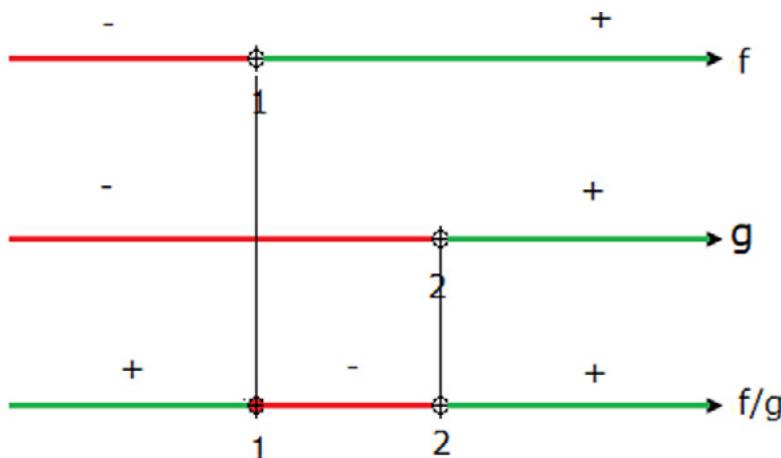


Figura 3: Solução de uma Inequação Quociente

A região à esquerda do 1 é positiva, porque, nessa região, tanto  $f$  como  $g$  são negativas, e a divisão de um número negativo por outro número negativo resulta um número positivo.

Na região entre 1 e 2, temos a divisão de um número positivo ( $f$ ) por outro negativo ( $g$ ), portanto, o resultado será negativo.

Por fim, na região acima de 2, temos a divisão de dois números positivos (tanto  $f$  como  $g$  são positivas nessa região), portanto, o resultado também será positivo.

Perceba que incluímos o 1 na parte negativa, porque a inequação carrega o símbolo de menor ou igual, portanto, devemos incluir os zeros do numerador ( $f$ ). Porém, não incluímos o 2, porque não podemos incluir os zeros do denominador, haja vista que não podemos dividir por zero.

Sendo assim, o conjunto solução da inequação é:

$$1 \leq x < 2 ; [1,2[ \{x \in \mathbb{R}, 1 \leq x < 2\};$$

São apenas três formas diferentes de escrever a mesma solução da inequação.

Vejamos mais um exemplo, agora envolvendo equações do segundo grau.

$$II: \frac{x^2 - 7x + 10}{\sqrt{-x^2 + 5x - 4}} \geq 0$$

Nesse caso, temos também um radical no denominador. Em primeiro lugar, precisamos garantir que existe o nosso quociente.

$$g(x) = -x^2 + 5x - 4 > 0$$

Para isso, devemos encontrar as raízes do denominador. A soma delas é igual a 5 e o produto é igual a 4, portanto, essas raízes são 1 e 4.

Fora das raízes, a função apresenta o mesmo sinal de a que é negativo. Portanto, somente no interior das raízes, a função assume sinal positivo, sendo assim, possível extrair sua raiz quadrada.

A função raiz quadrada de g é positiva entre 1 e 4 e nem existe fora dessa região.



No numerador, temos a seguinte função, cujo sinal precisamos também estudar:

$$f(x) = x^2 - 7x + 10 = 0$$

A soma das raízes é igual a 7 e o produto é igual a 10. Consegue ver que 2 e 5 são as soluções? Se não, basta fazer a fórmula de Bhaskara.

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{7 + 3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{7 - 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

A função f apresenta o mesmo sinal do coeficiente a fora das raízes. Ou seja, sinal positivo fora das raízes e negativo entre elas.

É importante lembrar que devemos incluir os zeros do numerador, mas não os zeros do denominador na solução da inequação.

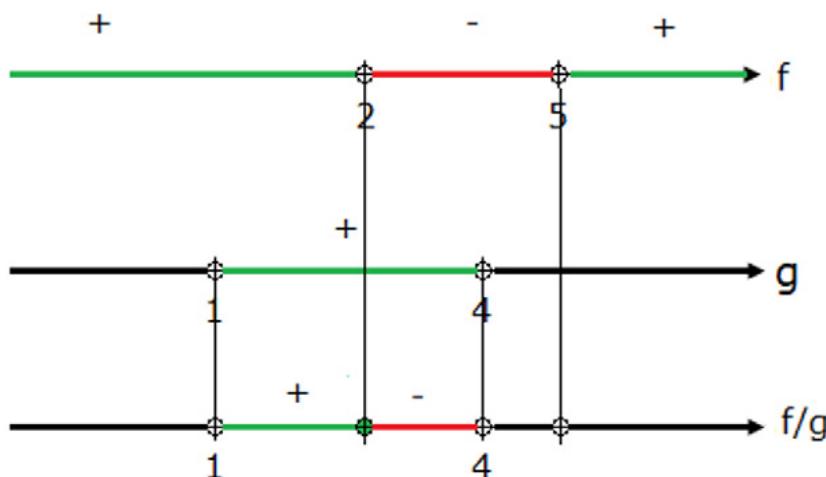


Figura 4: Sinal de Inequação envolvendo radicais e funções do segundo grau

A região que nos interessa é aquela em que a inequação assume valores maiores ou iguais a zero, portanto é a região:

$$1 < x \leq 2 ; ]1,2[ ; \{x' \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 2\}$$

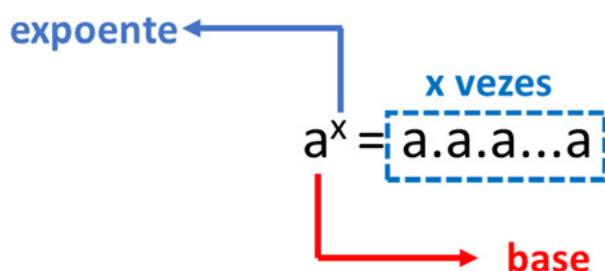
## 2. FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Agora, nós vamos estudar a função exponencial. Essa função é bastante famosa pelos termos “crescimento exponencial” e “decaimento exponencial”.

Nesse capítulo, nós vamos estudar o que esses termos significam, as limitações a esse modelo e como tudo isso pode ser explorado em questões de prova.

### 2.1. POTÊNCIA

A potência nada mais é do que uma multiplicação em escala. Ela é formada por uma base e por um expoente.



Por exemplo, quando temos uma potência  $2^4$ , devemos multiplicar a base por ela própria 4 vezes. Vejamos:

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

A forma correta de ler  $2^4$  é “dois elevado à quarta potência”, ou, de forma resumida, “dois à quarta” ou “dois elevado a quatro”. Vejamos outros exemplos de potências com suas formas de leitura:

$2^6$  = “dois elevado a seis” ou “dois à sexta”

$3^4$  = “três elevado a quatro” ou “três à quarta”

$7^5$  = “sete elevado a cinco” ou “sete à quinta”

Em particular, quando o expoente é igual a 2, costuma-se dizer “ao quadrado”, e, quando o expoente é igual a 3, costuma-se dizer “ao cubo”. Vejamos exemplos:

$4^3$  = “quatro ao cubo”

$3^2$  = “três ao quadrado”

$5^2$  = “cinco ao quadrado”

Agora, vamos calcular as potências mostradas acima. Para isso, deve-se multiplicar a base por ela própria pelo número de vezes determinado pelo expoente.

$$2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$$

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

$$7^5 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 16087$$

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

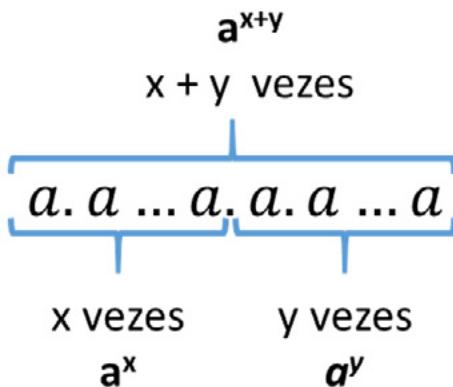
## 2.2. PROPRIEDADES DA POTÊNCIA

Nessa seção, vamos nos aprofundar um pouco mais nas propriedades da potência.

- **Produto de Potências de Mesma Base:** conserva-se a base e soma-se os expoentes;

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Essa igualdade decorre da propriedade associativa da multiplicação.



Por exemplo, podemos verificar um exemplo dessa desigualdade para a potência 2 elevado a 2+3.

$$2^{2+3} = 2^2 \cdot 2^3$$

$$2^5 = 2^2 \cdot 2^3$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 8$$

$$32 = 32 \text{ (ok)}$$

Outra forma de ver essa propriedade é dizer que a potência da soma é igual ao produto de potências.

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

- **Razão de Potências de Mesma Base:** conserva-se a base e subtrai-se os expoentes;

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

É uma propriedade diretamente derivada da propriedade anterior.

Por exemplo, quando temos a razão  $2^5/2^3$ , podemos aplicar essa propriedade:

$$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$$

- **Potência de Potência:** conserva-se a base e multiplica-se os expoentes

$$(a^x)^n = a^{nx} = (a^n)^x$$

Essa propriedade é diretamente da potência da soma. Vejamos um exemplo.

$$2^6 = ?$$

Podemos calcular de maneira direta.

$$2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$$

Mas, também podemos utilizar a propriedade da potência de potência para fazer essa conta de maneira mais fácil.

$$2^6 = (2^3)^2 = 8^2 = 8 \cdot 8 = 64$$

- **Expoente Negativo:** basta inverter a potência:

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

Vejamos um exemplo.

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

- **Radiciação:** a radiciação corresponde a uma potência de expoente fracionário.

$$\sqrt[n]{a^x} = a^{(x/n)}$$

Essa propriedade é muito útil. Vejamos um exemplo.

$$\sqrt[3]{8^2} = ?$$

Podemos efetuar a operação.

$$\sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{6/3} = 2^2 = 4$$

- **Exponentes Zero e Um:**

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

A potência de expoente unitário é diretamente decorrente da definição de potência.  $a^1$  é igual a multiplicado por si próprio apenas uma vez. Logo, o número a deve aparecer somente uma vez, portanto,  $a^1 = a$ .

Por outro lado, a potência de expoente zero pode ser demonstrada pela potência da diferença.

$$a^0 = a^{1-1}$$

$$a^0 = \frac{a^1}{a^1} = \frac{a}{a} = 1$$

## 2.3. FUNÇÃO EXPONENCIAL

A Função Exponencial é descrita genericamente da seguinte forma.

$$y = f(x) = a^x; \text{em que } 0 < a \neq 1$$

A função é caracterizada por uma base **a**, que é um número positivo e diferente de 1. O valor de **a** determina o ritmo de crescimento da função.

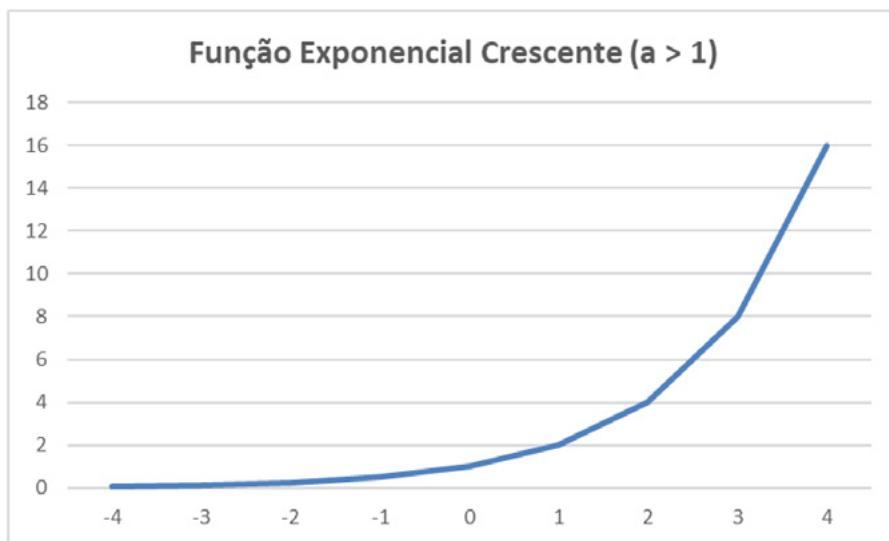
É importante que **a** seja positivo, porque não é possível calcular todas as potências de um número negativo. Por exemplo, não podemos calcular  $(-1)^{1/2}$ , pois essa seria a raiz quadrada de um número negativo.

Podemos calcular um conjunto de valores dessa função para que sejamos capazes de entender o seu comportamento.

x	y = $2^x$
-4	$2^{-4} = 1/16 = 0,0625$
-3	$2^{-3} = 1/8 = 0,125$
-2	$2^{-2} = 1/4 = 0,25$
-1	$2^{-1} = 1/2 = 0,50$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
4	$2^4 = 16$

Tabela 5: Série de Valores da Exponencial Crescente

Quando a base  $a > 1$ , a exponencial é crescente.



A função exponencial crescente ( $a > 1$ ) tende rapidamente ao infinito, alcançando valores bem elevados, mesmo para pequenos exponentes de  $x$ .

Por outro lado, a função possui uma **assíntota horizontal**. À medida que  $x$  alcança valores cada vez mais negativos, a função vai tendendo a zero. Porém, ela nunca realmente atinge o zero, porque o resultado de uma potência é sempre positivo.

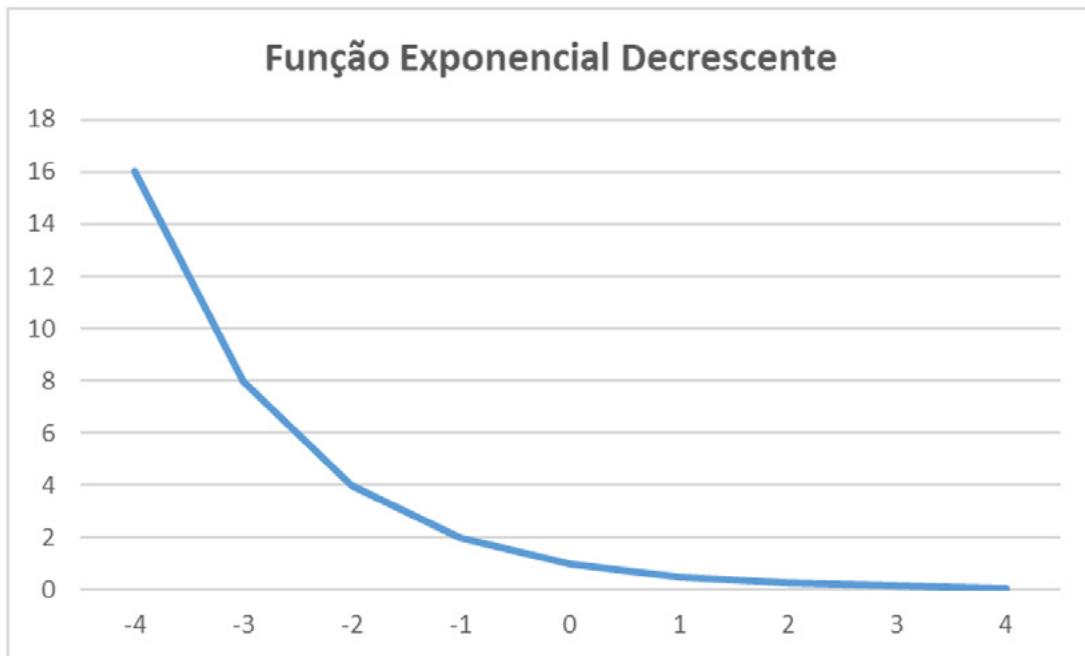
O eixo  $x$  é denominado **assíntota horizontal**, porque o gráfico da função se aproxima cada vez mais desse eixo, mas nunca efetivamente o toca. Ou seja, jamais a função se anulará.

Por outro lado, a função exponencial é **decrescente** quando  $0 < a < 1$ .

<b>x</b>	<b>y = <math>(1/2)^x</math></b>
<b>-4</b>	$(1/2)^{-4} = 2^4 = 16$
<b>-3</b>	$(1/2)^{-3} = 2^3 = 8$
<b>-2</b>	$(1/2)^{-2} = 2^2 = 4$
<b>-1</b>	$(1/2)^{-1} = 2^1 = 2$
<b>0</b>	$(1/2)^0 = 1$
<b>1</b>	$(1/2)^1 = 1/2 = 0,50$
<b>2</b>	$(1/2)^2 = 1/4 = 0,25$
<b>3</b>	$(1/2)^3 = 1/8 = 0,125$
<b>4</b>	$(1/2)^4 = 1/16 = 0,0625$

Tabela 6: Série de Valores para a Função Exponencial Decrescente

Nesse caso, a exponencial é decrescente. Perceba que a função continua admitindo o eixo x como **assíntota horizontal**. À medida que os valores de x se tornam cada vez maiores, a função adquire valores cada vez mais próximos de zero, mas ela nunca realmente se anula.

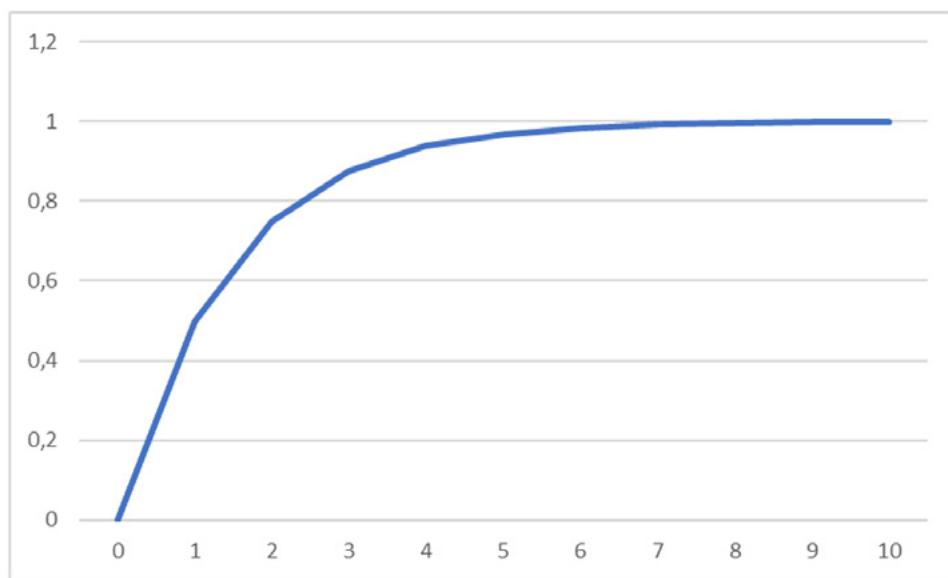


Um fato interessante sobre as funções exponenciais decrescentes é que, à medida que x tende ao infinito, isto é, vai crescendo, os resultados das potências vão ficando cada vez mais próximos. Por esse motivo, a função exponencial decrescente é também utilizada para descrever o comportamento de variáveis que crescem até um valor máximo.

Pense, por exemplo, no carregamento de uma bateria de celular. Ela pode ser descrita por uma função como  $y = (1 - 0,5^{-x})$ . Vejamos o gráfico dessa

x	$y = 1 - (1/2)^x$
0	$1 - (1/2)^0 = 0$
1	$1 - (1/2)^1 = 1 - 1/2 = 0,50$
2	$1 - (1/2)^2 = 1 - 1/4 = 0,75$
3	$1 - (1/2)^3 = 1 - 1/8 = 0,875$
4	$1 - (1/2)^4 = 1 - 1/16 = 0,9375$

Plotando o gráfico dessa função, teríamos:



Observe que esse gráfico guarda muita semelhança com o que acontece, de fato, durante o carregamento de um celular. No início, a bateria está descarregada. Logo quando ligamos o celular na tomada, ele ganha carga muito rapidamente. Porém, à medida que a bateria fica mais cheia, o carregamento se torna mais lento.

### 2.3.1. Modelagem com Função Exponencial

A Função Exponencial é muito utilizada na fase inicial do crescimento de populações, doenças contagiosas e aplicações financeiras.

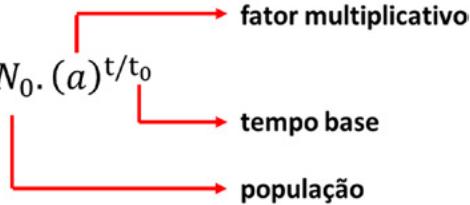
Elas descrevem situações em que se deseja “uma função que dobra a cada 10 minutos” ou que “reduz em um terço a cada 2 semanas”.

São utilizados normalmente

- **População Inicial ( $N_0$ ):** é a população inicial, que pode ser a população inicial de uma colônia de bactérias, o número inicial de infectados ou o capital inicialmente investido a juros compostos;
- **Fator Multiplicativo (a):** é o fator que indica por quanto a população é multiplicada. Por exemplo, quando dizemos “uma população de bactérias dobra a cada 10 minutos”, o fator multiplicativo é  $a = 2$ ;

Vale ressaltar que pode ser menor que 1. Por exemplo, “a massa de um isótopo radioativo se reduz à metade a cada 8 horas”. Nesse caso,  $a = 1/2$ ;

- **Tempo Base ( $t_0$ ):** é o tempo necessário para o fator multiplicativo agir. No caso do exemplo anterior, seria  $t_0 = 10$  minutos para a colônia de bactérias e  $t_0 = 8$  horas para o decaimento radioativo.

$$N(t) = N_0 \cdot (a)^{t/t_0}$$


Por exemplo, o crescimento exponencial é muito utilizado para o crescimento de populações, como bactérias. Suponha que uma população inicial de 200 bactérias foi colocada em uma cultura e que, dadas as condições apropriadas, essa população se multiplicava por 2,5 a cada 3 dias.

Nesse caso, podemos escrever o seguinte modelo para a função exponencial:

$$N(t) = N_0 \cdot (a)^{t/t_0} = 200 \cdot (2,5)^{t/3}$$

Agora, vamos estudar um modelo de decaimento exponencial. Considere que uma amostra de 10 g de um isótopo radioativo se reduz à metade a cada 8 horas. Qual a função que descreve a massa desse isótopo em função do tempo?

$$m(t) = m_0 \cdot (a)^{t/t_0} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/8}$$

Nesse caso, o fator multiplicativo é  $a = 1/2$ , porque a situação se trata de um decaimento exponencial.

Um ponto interessante a se observar é que a função exponencial é **muito sensível** à variação dos parâmetros **a** e  **$t_0$** . Para exemplificar isso, consideremos as seguintes situações:

- Considere que tenhamos uma população inicial de 200 bactérias. Essa bactéria se espalha multiplicando sua população por 2,5 a cada 3 dias.
- Considere agora que a bactéria multiplica sua população por 2 a cada 3 dias.

Nas duas situações descritas acima, quantas pessoas serão contaminadas após 45 dias? No primeiro caso, temos  $a = 2,5$ .

$$N_1(t) = 200 \cdot (2,5)^{t/3}$$

$$N_1(45) = 200 \cdot (2,5)^{45/3} = 200 \cdot (2,5)^{15} = 200.931322,6 \cong 186\,264\,515$$

Portanto, se considerarmos o parâmetro base  $a = 2,5$ , teríamos uma população de 186 milhões de bactérias ao final de 45 dias. Por outro lado, se considerássemos  $a = 2$ , teríamos:

$$N_2(t) = 200 \cdot (2)^{t/3}$$

$$N_2(45) = 200 \cdot (2)^{45/3} = 200 \cdot (2)^{15} = 200.32768 \cong 6\,553\,600$$

Nessa situação, o número de contaminados após 45 dias seria de 6,5 milhões de pessoas. Logo, é preciso ter muito cuidado ao elaborar parâmetros para uma função exponencial. Dado que ela é bastante sensível, qualquer mínima alteração pode levar a mudanças substanciais no resultado.

## DIRETO DO CONCURSO

**006.** (FGV/SEDUC-AM/2014/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Uma população P cresce em função do tempo t (em anos), segundo a sentença  $P = 2000 \cdot 5^{0,1t}$ . Hoje, no instante t = 0, a população é de 2 000 indivíduos. A população será de 50 000 indivíduos daqui a:

- a) 20 anos.
- b) 25 anos.
- c) 50 anos.
- d) 15 anos.
- e) 10 anos.



Se a população cresce segundo a expressão  $P(x) = 2000 \cdot 5^{0,1t}$ , basta igualarmos a expressão ao valor desejado para encontrar o valor de t em que ele ocorre. Assim:

$$P(x) = 2.000 \cdot 5^{0,1t} = 50.000$$

$$5^{0,1t} = \frac{50.000}{2.000}$$

$$5^{0,1t} = 25$$

Partindo do conceito  $\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b$ :

$$\log_5 25 = 0,1t$$

$$\log_5 25 = 2$$

$$\therefore 0,1t = 2$$

$$t = \frac{2}{0,1} = 20$$

**Letra a.**

**007.** (FGV/SEDUC-AM/2014/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Uma população de bactérias cresce exponencialmente, de forma que o número P de bactérias t horas após o instante inicial de observação do fenômeno pode ser modelado pela função

$$P(t) = 15 \times 2^{t+2}$$

De acordo com esse modelo, a cada hora, a população de bactérias

- a) cresce 20%.
- b) cresce 50%
- c) dobra.
- d) triplica.
- e) quadruplica.



Como temos a população inicial sendo multiplicada por uma potência de base dois e a variável  $t$  não está sendo multiplicada, podemos afirmar que, a cada hora, a população de bactérias dobra.

**Letra c.**

### 2.3.2. Número de Euler

O número de Euler é a base da exponencial natural. Ele aparece em diversas demonstrações matemáticas, como sendo o limite:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Vamos calcular alguns valores dessa expressão e montar o gráfico correspondente.

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2,00
2	2,250
5	2,489
10	2,594
20	2,653
50	2,691
100	2,705
200	2,711

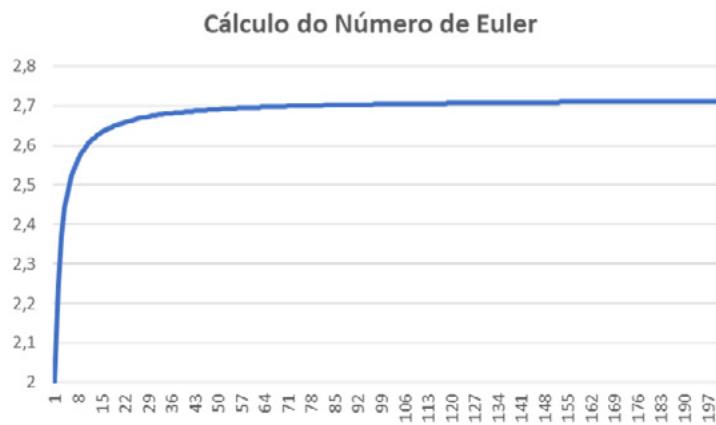


Figura 5: Cálculo da Expressão  $(1 + 1/n)^n$

Com o auxílio de um computador, é possível determinar o limite dessa tendência de crescimento, que é conhecido como número de Euler.

$$e \cong 2,71828 \cong 2,72$$

Isso significa, que, à medida que  $n$  tende a infinito, isto é, vai crescendo indefinidamente, a expressão  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  se aproxima do número de Euler, cujo valor aproximado é 2,72.

Considero importante você saber essa aproximação, pois pode ser cobrado em provas.

## DIRETO DO CONCURSO

**008.** (FGV/PREFEITURA DE SALVADOR-BA/2019/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Sabe-se que  $\log_3(x) + \log_3(y) = 4$ . O valor do produto  $xy$  é:

- a) 12.
- b) 24.
- c) 36.
- d) 54.
- e) 81.



Vamos utilizar uma das propriedades mais importantes dos logaritmos. Eles transformam produto em soma. Portanto, o logaritmo do produto é igual à soma de logaritmos.

$$\log_3 x + \log_3 y = \log_3(xy) = 4$$

Para calcular o  $xy$  agora, basta aplicar a definição do logaritmo. Devemos pegar a base e elevar ao logaritmo para chegar ao logaritmando.

$$\log_3(xy) = 4 \therefore xy = 3^4 = 81$$

**Letra d.**

**009.** (CESPE/PRF/2019) Para avaliar a resposta dos motoristas a uma campanha educativa promovida pela PRF, foi proposta a função  $f(x) = 350 + 150e^{-x}$ , que modela a quantidade de acidentes de trânsito com vítimas fatais ocorridos em cada ano. Nessa função,  $x \geq 0$  indica o número de anos decorridos após o início da campanha.

Com referência a essa situação hipotética, julgue o item que se segue.

De acordo com o modelo, no final do primeiro ano da campanha, apesar do decréscimo com relação ao ano anterior, ainda ocorreram mais de 400 acidentes de trânsito com vítimas fatais.



Depois de um ano ( $x = 1$ ), teremos:

$$f(1) = 350 + 150 \cdot e^{-1} = 350 + \frac{150}{e}$$

Como  $e < 3$ , o valor da função será maior que:

$$f(1) = 350 + \frac{150}{e} > 350 + \frac{150}{3}$$

$$f(1) > 350 + 50$$

$$f(1) > 400$$

**Certo.**

**010.** (CESPE/PRF/2019) Para avaliar a resposta dos motoristas a uma campanha educativa promovida pela PRF, foi proposta a função  $f(x) = 350 + 150e^{-x}$ , que modela a quantidade de acidentes de trânsito com vítimas fatais ocorridos em cada ano. Nessa função,  $x \geq 0$  indica o número de anos decorridos após o início da campanha.

Com referência a essa situação hipotética, julgue o item que se segue.

Segundo o modelo apresentado, após dez anos de campanha educativa, haverá, em cada um dos anos seguintes, menos de 300 acidentes de trânsito com vítimas fatais.



Depois de dez anos ( $x = 10$ ), teremos:

$$f(10) = 350 + 150 \cdot e^{-10}$$

Observe que a exponencial é sempre positiva, portanto:

$$f(10) = 350 + 150 \cdot e^{-10} > 350$$

**Errado.**

**011.** (FGV/PREFEITURA DE SALVADOR-BA/2019/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Uma colônia de bactérias, inicialmente com 10 bactérias, dobra de tamanho a cada hora. A função que expressa o número  $N(t)$  de bactérias dessa colônia,  $t$  horas após o instante inicial é:

- a)  $N(t) = 10t$ .
- b)  $N(t) = 20t$ .
- c)  $N(t) = 10 + 2t$ .
- d)  $N(t) = 10 \cdot 2^t$
- e)  $N(t) = 10 \cdot t^2$



A ideia de dobrar a cada hora é compatível exatamente com a noção de exponencial de base 2.

$$N(t) = N_0 \cdot 2^t$$

Como a população inicial é igual a 10, devemos fazer  $N_0 = 10$ .

$$N(t) = 10 \cdot 2^t$$

**Letra d.**

**012.** (COMPERVE/CÂMARA DE CURRAIS NOVOS-RN/2017/AGENTE DE PORTARIA) Suponha que uma das máquinas de extração de Scheelita em uma mina de Currais Novos tem depreciação, em  $t$  anos após a sua compra, dada pela função  $P(t) = P_0 \cdot 2^{-0,2t}$ , em que  $P_0$  é uma constante real. Após 10 anos de depreciação, a máquina foi vendida pelo preço de R\$ 12.000,00. Dessa forma, o valor de compra dessa máquina foi de:

- a) R\$48.000,00
- b) R\$36.000,00
- c) R\$64.000,00
- d) R\$24.000,00



Após dez anos, podemos calcular o preço da máquina pela função fornecida.

$$P(10) = P_0 \cdot 2^{-0,2 \cdot 10} = P_0 \cdot 2^{-2} = \frac{P_0}{4}$$

Como sabemos que  $P(10) = 12000$ , temos que:

$$P(10) = \frac{P_0}{4} = 12000 \therefore P_0 = 4 \cdot 12000 = 48000$$

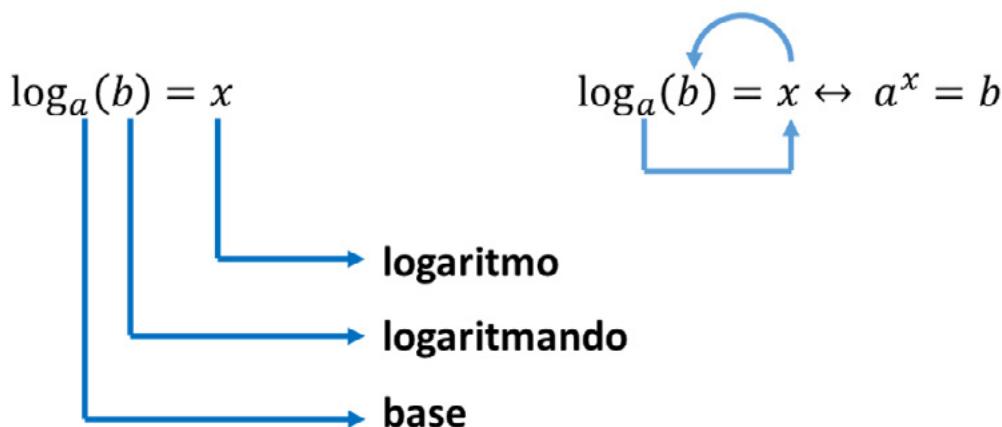
O preço de compra, por sua vez, corresponde ao preço da máquina no ano 0.

$$P(0) = P_0 \cdot 2^{-0,2 \cdot 0} = P_0 \cdot 2^0 = P_0 = 48000$$

**Letra a.**

### 3. FUNÇÃO LOGARÍTMICA

O logaritmo, por sua vez, corresponde à função inversa da potência.



O logaritmo de **b** na base **a** é o número ao qual se deve elevar **a**, de modo a obter **b**. Essa operação só existe mediante duas condições:

- **Base Positiva e diferente de 1:**  $0 < a \neq 1$ . O logaritmo só pode ser calculado nas bases em que se fala da operação de potenciação.

- **Logaritmando Positivo:**  $b > 0$ . O resultado da exponencial é sempre positivo, portanto, não se pode tirar logaritmo de número que não seja positivo.

As duas bases mais importantes no logaritmo são:

- **Base 10:** quando a base é omitida, supõe-se que o logaritmo é de base 10;
- **Número de Euler:** também representado pela expressão **ln**.

Vejamos alguns exemplos de cálculos de logaritmos:

$$\log 100 = 2, \text{ porque } 10^2 = 100$$

$$\log_3 243 = 5, \text{ porque } 3^5 = 243$$

$$\log_5 125 = 3, \text{ porque } 5^3 = 125$$

Algumas propriedades interessantes do logaritmo que podemos ter em mente.

- **Logaritmo do Produto:** é igual à soma de logaritmos

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

Vejamos um exemplo.

$$\log_2(32) = \log_2(4 \cdot 8)$$

Podemos calcular todos os logaritmos envolvidos.

$$\log_2(32) = 5, \text{ porque } 2^5 = 32$$

$$\log_2(4) = 2, \text{ porque } 2^2 = 4$$

$$\log_2(8) = 3, \text{ porque } 2^3 = 8$$

Agora, podemos testar a propriedade.

$$5 = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 \text{ (ok)}$$

- **Logaritmo da Potência:** é igual ao logaritmo multiplicado pelo expoente

$$\log_a(b^n) = n \cdot \log_a(b)$$

Vejamos mais um exemplo.

$$\log_2(4^3) = 3 \cdot \log_2(4) = 3 \cdot 2 = 6$$

Também poderíamos ter calculado diretamente.

$$\log_2(4^3) = \log_2(64) = 6, \text{ porque } 2^6 = 64$$

- **Mudança de Base:** é igual à razão de logaritmos em uma base arbitrária

$$\log_b(a) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$$

Essa propriedade é muito interessante, porque os logaritmos na base 10 são tabelados. Com base neles, podemos obter qualquer logaritmo em qualquer base.

Por exemplo, sabemos que  $\log 2 = 0,3$  e que  $\log 3 = 0,48$ . Com base nisso, podemos obter  $\log_2 3$ ?

A resposta é que sim. Basta aplicar a propriedade de mudança de base para a base 10.

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0,48}{0,3} = \frac{4,8}{3} = 1,6$$

### 3.1. FUNÇÃO LOGARÍTMICA

A função logarítmica em uma determinada base  $a$  que é sempre um número positivo e diferente de 1. Ou seja,  $0 < a \neq 1$

$$y = f(x) = \log_a(x)$$

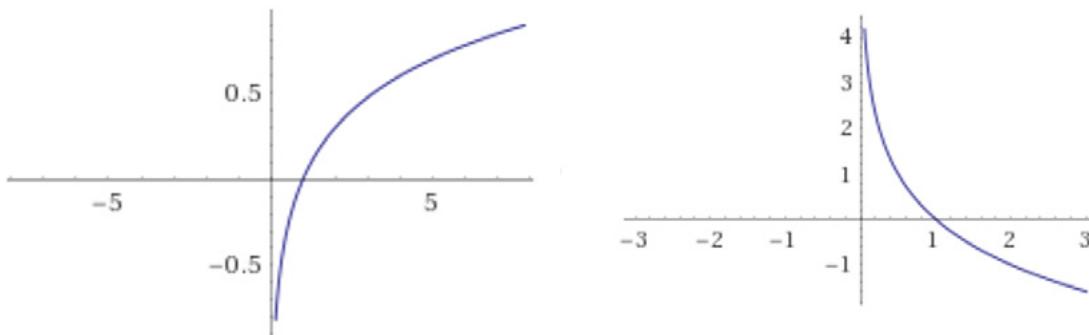
Essa função tem um domínio restrito, pois só é possível calcular o logaritmo de números positivos.

$$D: \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \text{ ou } D = \mathbb{R}_+^*$$

Da mesma forma que acontece na função exponencial, tem-se:

- Função Logarítmica Crescente: acontece para  $a > 1$ ;
- Função Logarítmica Decrescente: acontece para  $0 < a < 1$ .

Vejamos os dois gráficos. À esquerda, vemos o gráfico da função  $y = \log x$  e, à direita, vemos o gráfico da função  $y = \log_{1/2} x$ .



A função logarítmica possui uma **assíntota vertical** no **eixo y**. Isso acontece, porque, à medida que os valores de  $x$  tendem a zero, a função tende a valores cada vez mais próximos do infinito.

Porém, nunca a função pode realmente ser descrita para  $x = 0$  – somente para valores ligeiramente positivos. Sendo assim, a função sempre se aproxima do **eixo y**, mas nunca efetivamente o toca.

## DIRETO DO CONCURSO

**013.** (ESAF/ATA-RFB/2014) Sabendo-se que  $\log x$  representa o logaritmo de  $x$  na base 10, calcule o valor da expressão  $\log 20 + \log 5$ .

- a) 5
- b) 4
- c) 1
- d) 2
- e) 3



Podemos aplicar a regra de que o logaritmo do produto é igual à soma dos logaritmos.

$$\log 20 + \log 5 = \log(20 \cdot 5) = \log 100 = 2$$

**Letra d.**

**014.** (CESPE/SEDUC-AL/2018/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) A equação  $\ln x = -4$  tem uma única solução.



O logaritmo é uma função injetora. Isso significa que não existem dois termos  $x_1$  e  $x_2$ , de modo que o logaritmo natural desses números seja igual. Por esse motivo, a equação do enunciado realmente tem uma única solução, que pode ser calculada como mostrado a seguir.

$$\ln x = -4 \leftrightarrow e^{-4} = x$$

Como o número de Euler não é uma variável e sim uma constante, sabemos que apenas um valor de  $x$  soluciona essa equação. Com o auxílio de uma calculadora, teríamos  $x \cong 0,018$ .

**Certo.**

**015.** (CESPE/PC-ES/2011/PERITO CRIMINAL ESPECIAL) Em um sítio arqueológico, foram encontrados ossos de animais e um perito foi incumbido de fazer a datação das ossadas. Sabese que a quantidade de carbono 14, após a morte do animal, varia segundo a lei  $Q(t) = Q(0) \cdot e^{-0,00012t}$ , em que  $e$  é a base do logaritmo natural,  $Q(0)$  é a quantidade de carbono 14 existente do corpo do animal no instante da morte e  $Q(t)$  é a quantidade de carbono 14  $t$  anos depois da morte. Com base nessas informações e considerando  $-2,4$  e  $0,05$  como valores aproximados de  $\ln(0,09)$  e  $e^{-3}$ , respectivamente, julgue os itens se seguem.

Se, em uma ossada, o perito constatou que a quantidade de carbono 14 presente era 9% da quantidade no instante da morte do animal, então é correto afirmar que o animal morreu a menos de 19.000 anos.



A quantidade de carbono 14 varia de acordo com a lei  $Q(t) = Q(0) \cdot e^{-0,00012t}$ . Se a quantidade de carbono presente era 9% da quantidade inicial, no instante da morte, então temos que  $Q(t) = Q(0) \cdot 0,09$

Podemos inferir então que

$$e^{-0,00012t} = 0,09$$

O enunciado nos dá que  $\ln 0,09 = -2,4$ . Dessa forma, aplicando  $\ln$ , obtemos

$$\ln e^{-0,00012t} = \ln 0,09$$

$$-0,00012t = -2,4$$

$$t = \frac{-2,4}{-0,00012} = 20.000$$

Logo, o item está errado.

**Errado.**

**016.** (CESPE/PC-ES/2011/PERITO CRIMINAL ESPECIAL) Suponha que, ao examinar uma ossada, o perito tenha verificado que o animal morreu há 25.000 anos. Nesse caso, a quantidade de carbono 14 existente nessa ossada, no instante do exame, era superior a 4% da quantidade no instante da morte.



Como temos o valor de  $t$  em anos, podemos aplicar diretamente no termo que multiplica a quantidade inicial de carbono 14

$$e^{-0,00012t} = e^{-0,00012 \cdot 25.000} = e^{-3}$$

De acordo com o enunciado,

$$e^{-3} = 0,05 = 5\%$$

$$5\% > 4\%$$

O item nos diz que a quantidade de carbono 14 existente é superior a 4%, e não exatamente igual, por conseguinte, o item está correto.

**Certo.**

**017.** (FADESP/IFPA/2018/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Um experimento realizado em laboratório apontou que, ao administrar uma nova substância no organismo de um camundongo, a população de bactérias que ali se desenvolvera diminuiu com o passar do tempo, segundo o modelo:  $P(t) = P_i \cdot e^{kt}$ .

Com  $P_i$  é a população inicial,  $t$  é o tempo (em dias) e,  $k$  uma constante real. Observou-se que após o primeiro dia, a contar do momento da administração da substância, a população era de, aproximadamente,  $120 \times 10^3$  bactérias, enquanto que, no segundo dia, a população era de aproximadamente  $15 \times 10^3$  bactérias. Com esses dados, o valor da constante real  $k$ , obtido pelo pesquisador é:

- a)  $-8 \ln 2$
- b)  $-2 \ln 3$
- c)  $-5 \ln 3$
- d)  $-3 \ln 2$
- e)  $-4 \ln 2$



No primeiro dia após a administração da substância, tem-se:

$$P(1) = P_i \cdot e^{k \cdot 1} = 120 \cdot 10^3$$

No segundo dia, tem-se:

$$P(2) = P_i \cdot e^{k \cdot 2} = 15 \cdot 10^3$$

Podemos dividir as duas populações:

$$\frac{P(2)}{P(1)} = \frac{P_i \cdot e^{2k}}{P_i \cdot e^k} = e^k$$

Substituindo os valores fornecidos, temos que:

$$\frac{15 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^3} = e^k$$

$$e^k = \frac{1}{8}$$

$$\therefore k = \ln\left(\frac{1}{8}\right) = -\ln(8) = -\ln(2^3) = -3 \cdot \ln(2)$$

**Letra d.**

**018. (EMATER/2018/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO)** O intervalo de números reais que contém todos os pontos do domínio da função logarítmica  $f(x) = \log x + 1$  ( $-x^2 - x + 6$ ) é dado por:

- a)  $-3 < x < 2$  e  $x \neq 0$
- b)  $-3 < x < -2$  e  $x \neq -1$
- c)  $-1 < x < 2$  e  $x \neq 1$
- d)  $-1 < x < 2$  e  $x \neq 0$



São duas condições que devem ser atendidas para a existência do logaritmo. A primeira é que a base deve ser positiva e diferente de 1.

$$x + 1 \neq 1 \therefore x \neq 0$$

$$x + 1 > 0 \therefore x > -1$$

A segunda condição é que o logaritmando deve ser positivo.

$$-x^2 - x + 6 > 0$$

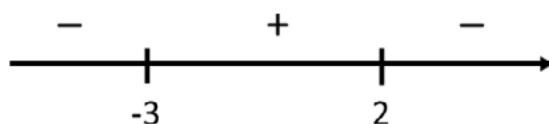
Para resolver uma inequação do segundo grau, devemos primeiramente calcular suas raízes.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6 = 1 + 24 = 25$$

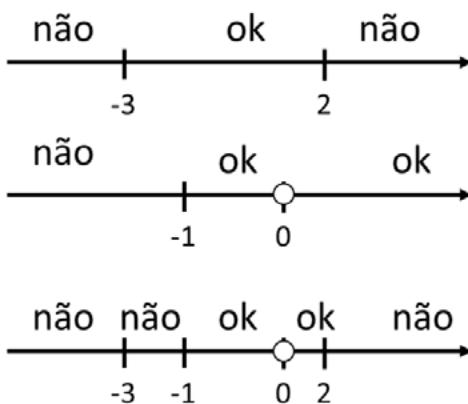
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot (-1)} = \frac{1 \pm 5}{-2} \therefore x_1 = \frac{1 - 5}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{1 + 5}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$$

No espaço entre as raízes, a função do segundo grau tem sinal contrário ao coeficiente a.



Vamos reunir as duas condições.



Sendo assim, o domínio da função é:

$$-1 < x < 2 \text{ e } x \neq 0$$

**Letra d.**

**019. (CESPE/BNB/2018/ANALISTA BANCÁRIO)** A respeito de números reais e de funções de variáveis reais, julgue o item que se segue. As únicas soluções da equação  $(\log_3 x)^2 = \log_3 x + 6$  são  $x = 1/9$  e  $x = 27$ .



Podemos fazer uma substituição de variáveis para facilitar. Considere:

$$y = \log_3 x$$

Temos que:

$$y^2 = y + 6 \therefore y^2 - y - 6 = 0$$

Podemos calcular as raízes da equação.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

As duas raízes são, portanto:

$$y_1 = \frac{1 - 5}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$y_2 = \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Agora, podemos obter o valor de x.

$$y_1 = \log_3(x_1) = -2 \therefore x_1 = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$y_2 = \log_3(x_2) = 3 \therefore x_2 = 3^3 = 27$$

$$-1 < x < 2 \text{ e } x \neq 0$$

**Certo.**

## RESUMO

---

### Propriedades da Potência

**Produto de Potências de Mesma Base:** conserva-se a base e soma-se os expoentes.

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

**Razão de Potências de Mesma Base:** conserva-se a base e subtrai-se os expoentes:

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

**Potência de Potência:** repete a base e multiplica os expoentes.

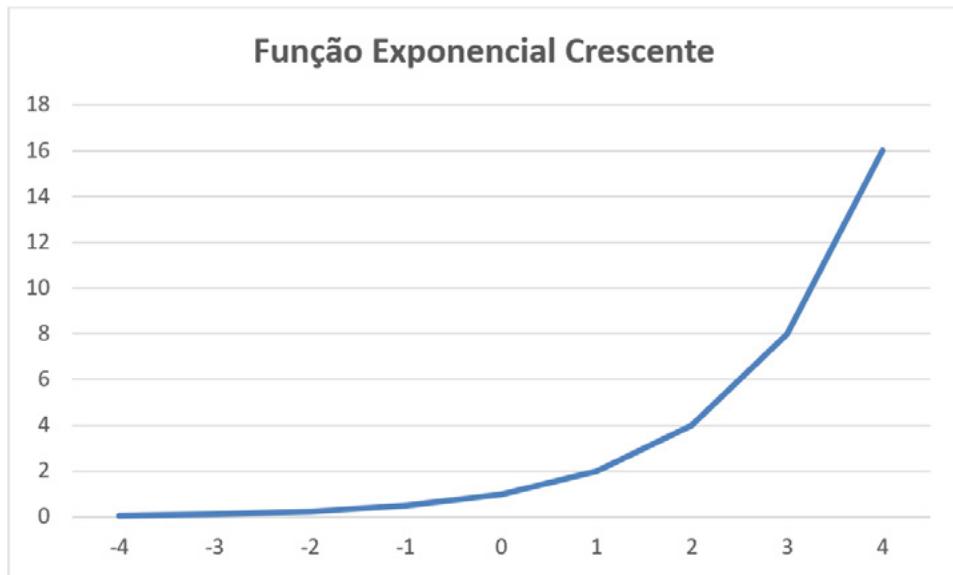
$$(a^x)^n = a^{nx} = (a^n)^x$$

**Expoente Negativo:** basta inverter.

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

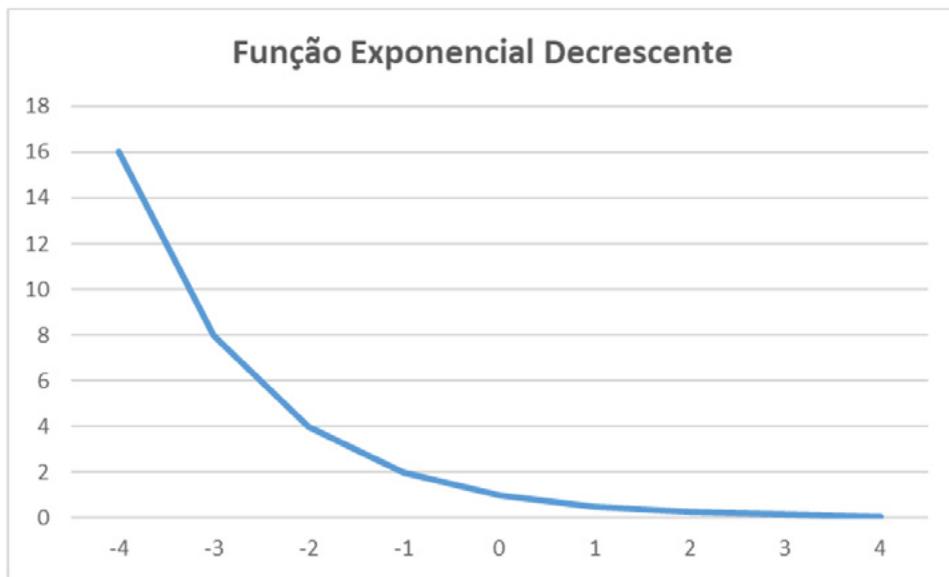
**Função Exponencial:  $f(x) = a^x$**

- **Condições:**  $0 < a \neq 1$
- $a > 1$ : função crescente.



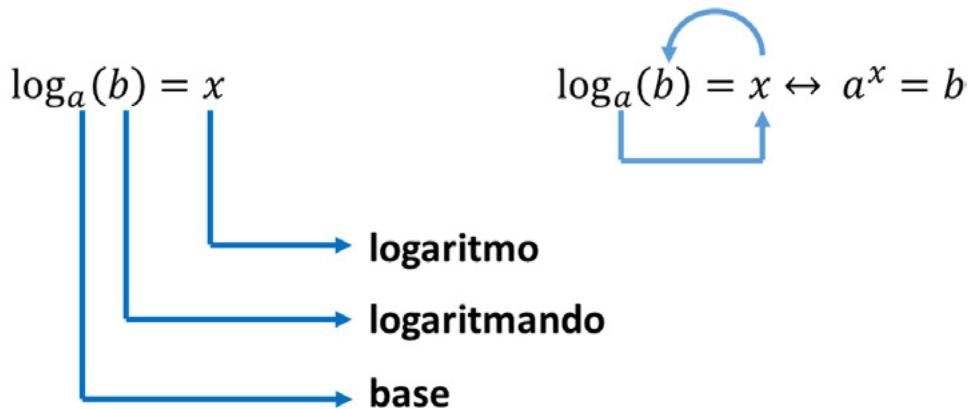
A função exponencial crescente ( $a > 1$ ) tende rapidamente ao infinito, alcançando valores bem elevados, mesmo para pequenos exponentes de  $x$ .

Para  $0 < a < 1$ , a exponencial é decrescente. À medida que os valores de  $x$  se tornam cada vez maiores, a função adquire valores cada vez mais próximos de zero, mas ela nunca realmente se anula.



## Propriedades do Logaritmo

- O logaritmo, por sua vez, corresponde à função inversa da potência.



- Logaritmo do Produto:** é igual à soma de logaritmos:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

- Logaritmo da Potência:** é igual ao logaritmo multiplicado pelo expoente:

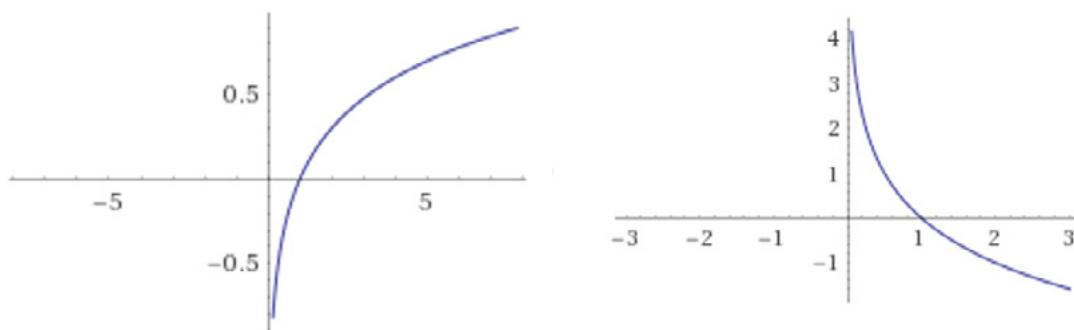
$$\log_a(b^n) = n \cdot \log_a(b)$$

## Função Logarítmica

Da mesma forma que acontece na função exponencial, tem-se:

- Função Logarítmica Crescente:** acontece para  $a > 1$ ;
- Função Logarítmica Decrescente:** acontece para  $0 < a < 1$ .

Vejamos os dois gráficos. À esquerda, vemos o gráfico da função  $y = \log x$  e, à direita, vemos o gráfico da função  $y = \log_{1/2} x$ .



## MAPA MENTAL



Professor  
ThiagoSilva

### Exponencial

#### Propriedades da Potência

**Potência da Soma:** é igual ao produto de potências

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

**Potência da Diferença:** é igual à razão de diferenças

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

**Potência de Potência:** repete a base e multiplica os expoentes

$$(a^x)^n = a^{nx} = (a^n)^x$$

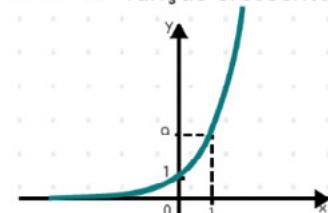
**Expoente Negativo:** basta inverter

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

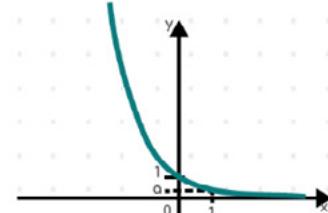
Função Exponencial  
 $f(x) = a^x$

Condições:  $0 < a \neq 1$

$a > 1$ : função crescente



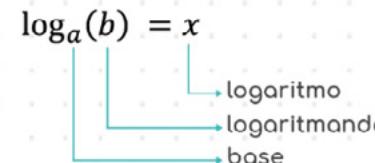
$0 < a < 1$ : função decrescente



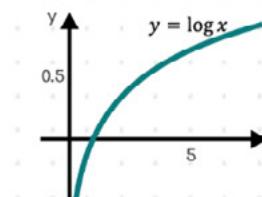
### Funções Exponencial e Logarítmica

#### Propriedades do Logaritmo

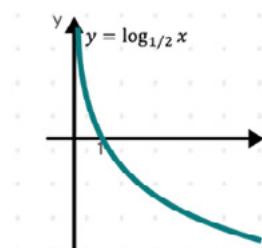
$$\log_a(b) = x \leftrightarrow a^x = b$$



$a > 1$ : função crescente



$0 < a < 1$ : função decrescente



**Logaritmo do Produto:** é igual a soma de logaritmos

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

**Logaritmo da Potência:** é igual ao logaritmo multiplicado pelo expoente

$$\log_a(b^n) = n \cdot \log_a(b)$$

## QUESTÕES COMENTADAS EM AULA

**001.** (CESPE/PREFEITURA DE SÃO LUÍS-MA/2017) Se  $x \geq 0$  representa a quantidade de quilômetros percorridos por um veículo em determinado dia, então:

**f(x) = x/12** representa a quantidade de litros de combustível consumido pelo veículo para percorrer  $x$  quilômetros;

**g(x) = 60 - x/12** representa a quantidade de litros de combustível que restam no tanque do veículo depois de percorridos  $x$  quilômetros.

Ainda com base no texto 11A1AAA, se  $m(x) = x - 240$ , e se a função composta  $Q(x) = (g \circ m)(x) = g(m(x))$  representa a quantidade de litros de combustível que resta no tanque de um veículo depois de percorrer  $x$  quilômetros, tendo iniciado o percurso com o tanque cheio, então o tanque de combustível desse veículo tem capacidade para:

- a) mais de 90 litros e menos de 95 litros.
- b) mais de 95 litros.
- c) 80 litros.
- d) mais de 80 litros e menos de 85 litros.
- e) mais de 85 litros e menos de 90 litros.

**002.** (CESPE/PREFEITURA DE SÃO LUÍS-MA/2017) Se  $f(x)$  e  $g(x)$  são as funções definidas no texto 11A1AAA, e se  $h(x) = f(x)/g(x)$ , então a inversa  $h^{-1}(x)$  pode ser expressa por:

a)  $h^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-720}$

b)  $h^{-1}(x) = -\frac{x+1}{720+x}$

c)  $h^{-1}(x) = \frac{x+1}{720x}$

d)  $h^{-1}(x) = \frac{720x}{x+1}$

e)  $h^{-1}(x) = \frac{720-x}{x+1}$

**003.** (ESAF/AFRFB/2009) Considere as inequações dadas por:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \leq 0 \text{ e } g(x) = -2x^2 + 3x + 2 \geq 0$$

Sabendo-se que A é o conjunto solução de  $f(x)$  e B o conjunto solução de  $g(x)$ , então o conjunto  $Y = A \cap B$  é igual a:

a)  $Y = \left\{ x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{2} < x \leq 2 \right\}$

b)  $Y = \left\{ x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{2} \leq x \leq 2 \right\}$

c)  $Y = \{x \in \mathbb{R}, x = 1\}$

- d)  $Y = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$   
e)  $Y = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$

**004.** (ESAF/AFRFB/2014) Considere a função bijetora  $f$ , de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  definida por  $f(x) = (x^2 - 1)$ , se  $x \geq 0$  e  $f(x) = (x - 1)$ , se  $x < 0$ , em que  $\mathbb{R}$  é o conjunto de números reais. Então os valores da função inversa de  $f$ , quando  $x = -8$  e  $x = 8$  são, respectivamente, iguais a:

- a) -7; 3  
b) -7; -3  
c)  $1/9; 1/63$   
d)  $-1/9; -1/63$   
e) -63; 9

**005.** (ESAF/AFRFB/2012/AUDITOR-FISCAL) A função bijetora dada por  $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$  possui domínio no conjunto dos números reais, exceto o número 2, ou seja:  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ . O conjunto imagem de  $f(x)$  é o conjunto dos reais menos o número 1, ou seja:  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Desse modo, diz-se que  $f(x)$  é uma função de  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  em  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Com isso, a função inversa de  $f$ , denotada por  $f^{-1}$ , é definida como:

- a)  $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ , de  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  em  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$   
b)  $f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ , de  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  em  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$   
c)  $f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ , de  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  em  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$   
d)  $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{x+1}$ , de  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  em  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$   
e)  $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{x+1}$ , de  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  em  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

**006.** (FGV/SEDUC-AM/2014/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Uma população  $P$  cresce em função do tempo  $t$  (em anos), segundo a sentença  $P = 2000 \cdot 5^{0,1t}$ . Hoje, no instante  $t = 0$ , a população é de 2 000 indivíduos. A população será de 50 000 indivíduos daqui a:

- a) 20 anos.  
b) 25 anos.  
c) 50 anos.  
d) 15 anos.  
e) 10 anos.

**007.** (FGV/SEDUC-AM/2014/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Uma população de bactérias cresce exponencialmente, de forma que o número  $P$  de bactérias  $t$  horas após o instante inicial de observação do fenômeno pode ser modelado pela função

$$P(t) = 15 \times 2^{t+2}$$

De acordo com esse modelo, a cada hora, a população de bactérias

- a) cresce 20%.
- b) cresce 50%
- c) dobra.
- d) triplica.
- e) quadruplica.

**008.** (FGV/PREFEITURA DE SALVADOR-BA/2019/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Sabe-se que  $\log_3(x) + \log_3(y) = 4$ . O valor do produto  $xy$  é:

- a) 12.
- b) 24.
- c) 36.
- d) 54.
- e) 81.

**009.** (CESPE/PRF/2019) Para avaliar a resposta dos motoristas a uma campanha educativa promovida pela PRF, foi proposta a função  $f(x) = 350 + 150e^{-x}$ , que modela a quantidade de acidentes de trânsito com vítimas fatais ocorridos em cada ano. Nessa função,  $x \geq 0$  indica o número de anos decorridos após o início da campanha.

Com referência a essa situação hipotética, julgue o item que se segue.

De acordo com o modelo, no final do primeiro ano da campanha, apesar do decréscimo com relação ao ano anterior, ainda ocorreram mais de 400 acidentes de trânsito com vítimas fatais.

**010.** (CESPE/PRF/2019) Para avaliar a resposta dos motoristas a uma campanha educativa promovida pela PRF, foi proposta a função  $f(x) = 350 + 150e^{-x}$ , que modela a quantidade de acidentes de trânsito com vítimas fatais ocorridos em cada ano. Nessa função,  $x \geq 0$  indica o número de anos decorridos após o início da campanha.

Com referência a essa situação hipotética, julgue o item que se segue.

Segundo o modelo apresentado, após dez anos de campanha educativa, haverá, em cada um dos anos seguintes, menos de 300 acidentes de trânsito com vítimas fatais.

**011.** (FGV/PREFEITURA DE SALVADOR-BA/2019/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Uma colônia de bactérias, inicialmente com 10 bactérias, dobra de tamanho a cada hora. A função que expressa o número  $N(t)$  de bactérias dessa colônia,  $t$  horas após o instante inicial é:

- a)  $N(t) = 10t$ .
- b)  $N(t) = 20t$ .
- c)  $N(t) = 10 + 2t$ .
- d)  $N(t) = 10 \cdot 2^t$
- e)  $N(t) = 10 \cdot t^2$

**012.** (COMPERVE/CÂMARA DE CURRAIS NOVOS-RN/2017/AGENTE DE PORTARIA) Suponha que uma das máquinas de extração de Scheelita em uma mina de Currais Novos tem depreciação, em t anos após a sua compra, dada pela função  $P(t) = P_0 \cdot 2^{-0,2t}$ , em que  $P_0$  é uma constante real. Após 10 anos de depreciação, a máquina foi vendida pelo preço de R\$ 12.000,00. Dessa forma, o valor de compra dessa máquina foi de:

- a) R\$48.000,00
- b) R\$36.000,00
- c) R\$64.000,00
- d) R\$24.000,00

**013.** (ESAF/ATA-RFB/2014) Sabendo-se que  $\log x$  representa o logaritmo de  $x$  na base 10, calcule o valor da expressão  $\log 20 + \log 5$ .

- a) 5
- b) 4
- c) 1
- d) 2
- e) 3

**014.** (CESPE/SEDUC-AL/2018/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) A equação  $\ln x = -4$  tem uma única solução.

**015.** (CESPE/PC-ES/2011/PERITO CRIMINAL ESPECIAL) Em um sítio arqueológico, foram encontrados ossos de animais e um perito foi incumbido de fazer a datação das ossadas. Sabe-se que a quantidade de carbono 14, após a morte do animal, varia segundo a lei  $Q(t) = Q(0) \cdot e^{-0,00012t}$ , em que  $e$  é a base do logaritmo natural,  $Q(0)$  é a quantidade de carbono 14 existente do corpo do animal no instante da morte e  $Q(t)$  é a quantidade de carbono 14  $t$  anos depois da morte. Com base nessas informações e considerando  $-2,4$  e  $0,05$  como valores aproximados de  $\ln(0,09)$  e  $e^{-3}$ , respectivamente, julgue os itens se seguem.

Se, em uma ossada, o perito constatou que a quantidade de carbono 14 presente era 9% da quantidade no instante da morte do animal, então é correto afirmar que o animal morreu a menos de 19.000 anos.

**016.** (CESPE/PC-ES/2011/PERITO CRIMINAL ESPECIAL) Suponha que, ao examinar uma ossada, o perito tenha verificado que o animal morreu há 25.000 anos. Nesse caso, a quantidade de carbono 14 existente nessa ossada, no instante do exame, era superior a 4% da quantidade no instante da morte.

**017.** (FADESP/IFPA/2018/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Um experimento realizado em laboratório apontou que, ao administrar uma nova substância no organismo de um camundongo, a população de bactérias que ali se desenvolvera diminuiu com o passar do tempo, segundo o modelo:  $P(t) = P_i \cdot e^{kt}$ .

Com  $P_0$  é a população inicial,  $t$  é o tempo (em dias) e,  $k$  uma constante real. Observou-se que após o primeiro dia, a contar do momento da administração da substância, a população era de, aproximadamente,  $120 \times 10^3$  bactérias, enquanto que, no segundo dia, a população era de aproximadamente  $15 \times 10^3$  bactérias. Com esses dados, o valor da constante real  $k$ , obtido pelo pesquisador é:

- a)  $-8 \ln 2$
- b)  $-2 \ln 3$
- c)  $-5 \ln 3$
- d)  $-3 \ln 2$
- e)  $-4 \ln 2$

**018.** (EMATER/2018/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO) O intervalo de números reais que contém todos os pontos do domínio da função logarítmica  $f(x) = \log_{x+1}(-x^2 - x + 6)$  é dado por:

- a)  $-3 < x < 2$  e  $x \neq 0$
- b)  $-3 < x < -2$  e  $x \neq -1$
- c)  $-1 < x < 2$  e  $x \neq 1$
- d)  $-1 < x < 2$  e  $x \neq 0$

**019.** (CESPE/BNB/2018/ANALISTA BANCÁRIO) A respeito de números reais e de funções de variáveis reais, julgue o item que se segue. As únicas soluções da equação  $(\log_3 x)^2 = \log_3 x + 6$  são  $x = 1/9$  e  $x = 27$ .

## QUESTÕES DE CONCURSO

**020.** (CESPE/SEED-PR/2021/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) O valor de  $\log_2(16) + \log_{16}(2)$  é igual a

- a) 0.
- b) 65/8.
- c) 1.
- d) 4.
- e) 17/4.



$$\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b$$

Assim, vamos calcular os logaritmos individualmente:

$$\log_2 16 = x \leftrightarrow 2^x = 16$$

Para comparar as potências, devemos deixá-las na mesma base

$$2^x = 2^4$$

Descobrimos então que  $x = 4$ .

Calculando o segundo termo

$$\log_{16} 2 = y \leftrightarrow 16^y = 2$$

Novamente, devemos deixar as potências na mesma base, ficando com

$$(2^4)^y = 2$$

Utilizando a propriedade potências, temos que

$$2^{4y} = 2^1$$

Portanto

$$4y = 1$$

$$y = \frac{1}{4}$$

Agora, basta somarmos x com y

$$x + y = 4 + \frac{1}{4} = \frac{16}{4} + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

**Letra e.**

**021.** (CESPE/SEDUC-AL/2018/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Se  $a > 0$  e  $\ln a \in [10, 20]$ , então  $\ln a^2 \in [100, +\infty)$ .



Ao tratarmos de logaritmo, existe uma propriedade quando o logaritmando é uma potência, de forma que

$$\ln a^2 = 2 \cdot \ln a$$

Assim, se  $\ln a \in [10, 20]$ , então  $2 \cdot \ln a \in [20, 40]$ , logo  $\ln a^2 \in [20, 40]$ .

**Errado.**

**022.** (FGV/SEDUC-SP/2013/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Considere a desigualdade

$$\log_{2013}(\log_{2014}(\log_{2015}x)) > 0$$

O menor valor inteiro de  $x$  que satisfaz essa desigualdade é

- a)  $2013^{2014} + 1$ .
- b)  $2014^{2013} + 1$ .
- c)  $2014^{2015} + 1$ .
- d)  $2015^{2014} + 1$ .
- e) 2016.



Pela definição de logaritmo, podemos escrever:

$$\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b$$

Assim, podemos considerar que:

$$\log_{2013}(\log_{2014}(\log_{2015}(x))) > 0$$

Façamos uma substituição de variáveis:

$$a = \log_{2014}(\log_{2015}(x))$$

Substituindo na equação inicial, temos:

$$\log_{2013} a > 0 \leftrightarrow 2013^0 < a \therefore a > 1$$

Por conseguinte,

$$\log_{2014}(\log_{2015}x) > 1$$

Agora, vamos fazer outra substituição de variáveis:

$$b = \log_{2015}(x)$$

Substituindo na equação acima:

$$\log_{2014} b > 1 \leftrightarrow 2014^1 < b$$

$$\therefore b > 2014$$

Por fim, chegamos em:

$$\log_{2015} x > 2014 \leftrightarrow 2014^{2015} < x$$

Como  $x > 2014^{2015}$ , o primeiro número inteiro para o qual essa desigualdade é satisfeita é  $2014^{2015} + 1$ . Para  $x = 2014^{2015}$ , teríamos ainda uma igualdade.

**Letra d.**

**023.** (CESPE/INMETRO/2010/TÉCNICO EM METROLOGIA) Uma pesquisa a respeito do crescimento populacional de certa comunidade constatou que esse crescimento varia segundo a lei  $P(t) = P_0 \cdot e^{0,1155t}$ , em que  $e$  é a base do logaritmo natural,  $P_0$  é a população da comunidade no início da pesquisa e  $P(t)$  é a população  $t$  anos depois do início da pesquisa.

Nessa situação, tomando 0,693 como valor aproximado de  $\ln 2$ , é correto afirmar que, 6 anos depois do início da pesquisa, a população inicial foi multiplicada por

- a) 6.
- b) 5.
- c) 4.
- d) 3.
- e) 2.



Como  $t$  representa o tempo em anos depois do início da pesquisa na expressão  $P(t) = P_0 \cdot e^{0,1155t}$ , para saber por quanto a população inicial foi multiplicada após 6 anos, devemos encontrar o valor de  $e^{0,1155 \cdot 6}$  com  $t = 6$ . Portanto:

$$e^{0,1155 \cdot 6} = e^{0,693}$$

O enunciado nos dá que

$$\ln 2 = \log_e 2 = 0,693$$

A partir do conceito de logaritmo, encontramos que

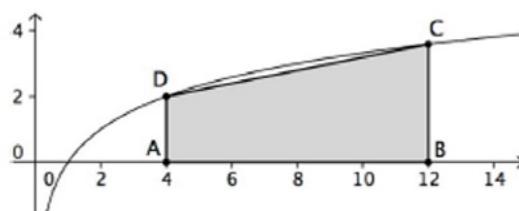
$$e^{0,693} = 2$$

Assim, descobrimos que, após 6 anos, a população inicial foi multiplicada por 2.

**Letra e.**

**024.** (FGV/AL-RO/2018/ANALISTA LEGISLATIVO/ MATEMÁTICA) A figura a seguir mostra o gráfico da função  $f(x) = \log_2 x$  e os pontos:

$A = (4, 0)$ ,  $B = (12, 0)$ ,  $C = (12, f(12))$  e  $D = (4, f(4))$ .



Considerando  $f(3) = 1,585$ , a área do quadrilátero ABCD é igual a

- a) 20,16.  
 b) 21,52.  
 c) 22,34.  
 d) 23,60.  
 e) 24,88.

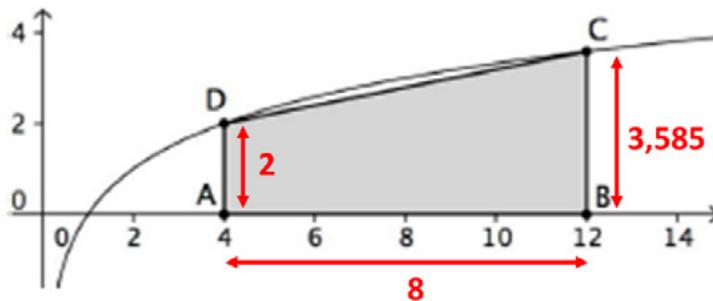


Observe que nós temos um trapézio. Os pontos desconhecidos são as ordenadas dos pontos D e C.

$$f(4) = \log_2(4) = 2$$

$$f(12) = \log_2(4 \cdot 3) = \log_2(4) + \log_2(3) = 2 + 1,585 = 3,585$$

Vamos definir as dimensões no gráfico.



Dessa forma, a área do trapézio é:

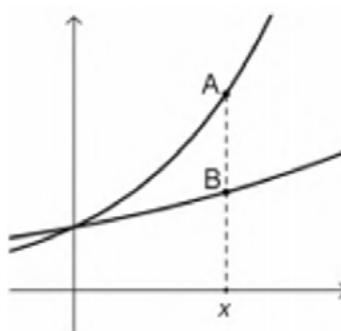
$$S = \frac{(2 + 3,585)}{2} \cdot 8$$

$$S = \frac{(5,585)}{2} \cdot 8 \cong 22,34 \text{ m}^2$$

**Letra c.**

**025.** (FGV/SEDUC-SP/2013/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) A figura abaixo mostra uma parte dos gráficos das funções  $y = 1,6^x$  e  $y = 1,2^x$ .

Para certo valor de  $x$ , a ordenada do ponto A, sobre o gráfico da primeira função, é o dobro da ordenada de B, sobre o da segunda.



Considerando  $\log 2 = 0,301$  e  $\log 3 = 0,477$ , esse valor de  $x$  é, aproximadamente,

- a) 2,12.
- b) 2,28.
- c) 2,41.
- d) 2,50.
- e) 2,58.



Pelas informações do enunciado, uma exponencial é igual ao dobro da outra.

$$1,6^x = 2 \cdot 1,2^x$$

$$\therefore \frac{(1,6)^x}{(1,2)^x} = \left(\frac{1,6}{1,2}\right)^x = 2$$

Observe que temos duas potências com o mesmo expoente. Portanto, podemos repetir o expoente e tomar a razão entre as bases, como visto acima. Observe também que a razão  $1,6/1,2$  é igual a  $4/3$ .

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x = 2$$

$$\therefore x = \log_{4/3} 2$$

Podemos usar a propriedade de mudança de base para a base 2.

$$x = \frac{\log_2 2}{\log_2 \left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{1}{\log_2 \left(\frac{4}{3}\right)}$$

E, agora, vamos trabalhar o logaritmo que está no denominador.

$$x = \frac{1}{\log_2 \left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{1}{\log_2(4) - \log_2(3)} = \frac{1}{2 - \log_2(3)}$$

Agora, vamos calcular  $\log_2 3$  usando a mudança de base:

$$\log_2(3) = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0,477}{0,301} \cong 1,585$$

Vamos calcular o logaritmo  $x$ .

$$x = \frac{1}{2 - 1,585} = \frac{1}{0,415} \cong 2,41$$

**Letra c.**

**026. (CESPE/SEED-PR/2021/PROFESSOR DE MATEMÁTICA)** A quantidade de soluções reais da equação  $\log_3(x^3) + \log_3(1/2) = \log_3(4)$  é igual a:

- a) 4.
- b) 0.

- c) 1.  
d) 2.  
e) 3.



Utilizando a propriedade do logaritmo de produtos, temos que

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Dessa forma,

$$\log_3 x^3 + \log_3 \frac{1}{2} = \log_3 \left( x^3 \cdot \frac{1}{2} \right)$$

Podemos inferir então que

$$\log_3 \left( x^3 \cdot \frac{1}{2} \right) = \log_3 4$$

$$\frac{x^3}{2} = 4$$

$$x^3 = 8$$

$$x = \sqrt[3]{8} = 2$$

Logo, a equação admite apenas uma solução real.

**Letra c.**

(CESPE/PRF/2019) Para avaliar a resposta dos motoristas a uma campanha educativa promovida pela PRF, foi proposta a função  $f(x) = 350 + 150e^{-x}$ , que modela a quantidade de acidentes de trânsito com vítimas fatais ocorridos em cada ano. Nessa função,  $x \geq 0$  indica o número de anos decorridos após o início da campanha.

Com referência a essa situação hipotética, julgue os itens que se seguem.

**027.** Segundo o modelo apresentado, após dez anos de campanha educativa, haverá, em cada um dos anos seguintes, menos de 300 acidentes de trânsito com vítimas fatais.



Uma das poucas vezes que vi ser cobrado de o aluno saber o número de Euler.

Após dez anos de campanha, sabendo que a função exponencial é sempre positiva, podemos dizer que:

$$f(10) = 350 + 150 \cdot e^{-10} > 350 + 150 \cdot 0 > 350 > 300$$

**Errado.**

**028.** De acordo com o modelo, no final do primeiro ano da campanha, apesar do decréscimo com relação ao ano anterior, ainda ocorreram mais de 400 acidentes de trânsito com vítimas fatais.



Após um ano, temos que:

$$f(1) = 350 + 150 \cdot e^{-1} = 350 + \frac{150}{e} = 350 + \frac{150}{2,72} \cong 405 > 400$$

**Certo.**

**029.** (FCC/BANESE/2012/TÉCNICO BANCÁRIO) Uma empresa utiliza a função  $y = (1,2)^x - 1$  para estimar o volume de vendas de um produto em um determinado dia. A variável  $y$  representa o volume de vendas em milhares de reais. A variável  $x$  é um número real e representa a quantidade de horas que a empresa dedicou no dia para vender o produto ( $0 \leq x \leq 6$ ). Em um dia em que o volume de vendas estimado foi de R\$ 500,00, o valor utilizado para  $x$ , em horas, é tal que:

- a)  $1 < x \leq 2$ .
- b)  $2 < x \leq 3$ .
- c)  $3 < x \leq 4$ .
- d)  $4 < x \leq 5$ .
- e)  $5 < x \leq 6$ .



O volume de vendas é estimado pela função  $y = (1,2)^x - 1$ , onde  $y$  é dado em milhares de reais.

Como no dia em questão o volume de vendas estimado foi de R\$ 500, temos que  $y = \frac{R\$500}{1000} = 0,5$ . Aplicando esse valor na função, temos

$$y = (1,2)^x - 1$$

$$0,5 + 1 = (1,2)^x$$

$$1,5 = (1,2)^x$$

O enunciado não nos fornece nenhum dado com valores de log, por conseguinte, vamos encontrar o intervalo por meio de tentativa e erro

$$1,2^1 = 1,2$$

$$1,2^2 = 1,44$$

$$1,2^3 = 1,728$$

$$1,2^2 < 1,5 < 1,2^3$$

Portanto, podemos estimar que o valor de  $x$ , dado em horas, é maior que 2 e menor que 3.

**Letra b.**

**030.** (CESPE/CPRM/2013/ANALISTA EM GEOCIÊNCIAS) Tendo em vista que, em determinado mês de 31 dias, a precipitação pluvial média diária em uma localidade é representada, em mm, pela função  $P(t) = 25 \cdot e^{-(t-16)^2}$ , para  $t$  de 1 a 31, julgue os itens subsequentes.

Em nenhum dia do referido mês ocorreu precipitação pluvial média inferior a 10 mm.



Para encontrar a resposta, basta comparar a função fornecida que representa a precipitação pluvial média diária aos 10mm do item:

$$P(t) = 25 \cdot e^{-(t-16)^2} < 10$$

$$25 \cdot e^{-(t-16)^2} < 10$$

$$e^{-(t-16)^2} < \frac{10}{25}$$

$$\frac{1}{e^{(t-16)^2}} < 0,4$$

$$\frac{1}{0,4} < e^{(t-16)^2}$$

$$2,5 < e^{(t-16)^2}$$

Considerando  $e = 2,72$ , sabemos que, elevado a qualquer expoente maior ou igual a 1, será maior que 2,5. Como a potência de  $e$  está elevada ao quadrado, não sendo elevado então por números negativos, a inequação só não é verdadeira para  $t = 16$ .

**Errado.**

**031.** (CESPE/CPRM/2013/ANALISTA EM GEOCIÊNCIAS) A precipitação pluvial média não excedeu 30 mm nesse mês.



Da mesma forma que no item anterior, basta comparar a média desejada com a função que a representa

$$P(t) = 25 \cdot e^{-(t-16)^2} \leq 30$$

$$e^{-(t-16)^2} \leq \frac{30}{25}$$

$$\frac{1}{e^{(t-16)^2}} \leq 1,2$$

$$\frac{1}{1,2} \leq e^{(t-16)^2}$$

$$0,83 \leq e^{(t-16)^2}$$

Como o menor valor que  $e^{(t-16)^2}$  pode atingir é 1, sabemos que a inequação é verdadeira para todo  $t$ .

**Certo.**

**032.** (CESPE/CPRM/2013/ANALISTA EM GEOCIÊNCIAS) A precipitação pluvial média no dia 1º foi igual ao dobro da ocorrida no último dia desse mês.



Vamos então calcular a precipitação pluvial média para  $t=1$  e para  $t=31$ .

$$P(1) = 25 \cdot e^{-(1-16)^2} = 25 \cdot e^{-(-15)^2} = \frac{25}{e^{225}}$$

$$P(31) = 25 \cdot e^{-(31-16)^2} = 25 \cdot e^{-(15)^2} = \frac{25}{e^{225}}$$

A média de precipitação pluvial do primeiro dia do mês e do último dia do mês foram exatamente iguais.

**Errado.**

**033.** (CESPE/CPRM/2013/ANALISTA EM GEOCIÊNCIAS) Nesse mês, a maior precipitação média ocorreu no dia 16.



$$P(t) = 25 \cdot e^{-(t-16)^2} = \frac{25}{e^{(t-16)^2}}$$

Quanto maior for o divisor, menor será o quociente. Assim, como  $t \in [1, 31]$ , para que  $P(t)$  atinja seu maior valor,  $e^{(t-16)^2}$  deve ser mínimo.

Qualquer número elevado a 0 é 1.  $e$  elevado a qualquer número  $\geq 1$  tem resultado  $\geq 2,72$ . Portanto, sabemos que, para encontrar o valor máximo de  $P(t)$ ,  $(t - 16)^2 = 0$ .

$$(t - 16)^2 = 0$$

$$t = 16$$

Dessa forma descobrimos que a maior precipitação média ocorreu no dia 16.

**Certo.**

**034.** (CESPE/BANCO DO BRASIL/2008/ESCRITURÁRIO) Considere que o tamanho da população mundial feminina possa ser expresso, em bilhões de habitantes, pela função  $P(T) = 6 \cdot (1 - e^{-0,02T}) + 3$ , em que  $T = 0$  representa o ano de 2008,  $T = 1$ , o ano de 2009, e, assim, por diante. Com base nesse modelo, julgue os itens seguintes.

Considerando que o tamanho da população masculina mundial seja sempre inferior ao da feminina, tem-se que a população mundial será sempre inferior a 18 bilhões de habitantes.



Para analisar melhor, vamos reescrever a função

$$P(T) = 6 \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{0,02T}}\right) + 3$$

Podemos notar que, quanto maior for T, maior será o divisor, logo, menor será o quociente

$\frac{1}{e^{0,02T}}$ , e assim, maior será o número que multiplicará o valor inicial, já que esse termo é subtraído de 1.

Dessa forma, notamos que o valor máximo será dado por T máximo, ou seja, com T tendendo a infinito. Podemos calcular utilizando limites:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} 6 \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{0,02T}}\right) + 3 = 6 \cdot (1 - 0) + 3 = 6 + 3 = 9$$

Portanto, o maior valor que a população feminina pode atingir é 9 bilhões, e como a população masculina é sempre inferior, a população mundial sempre será inferior a 18 bilhões.

**Certo.**

**035.** (FCC/SEDU-ES/2018/PROFESSOR DE ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO) Considerando apenas valores reais de x tais que  $x \geq 0$ , o comprimento do segmento de reta sobre a reta de equação  $y = x + 3$ , para a qual as imagens da função  $y = x + 3$  são maiores do que as imagens da função  $y = 2^x + 1$  é igual a

- a)  $3\sqrt{2}$ .
- b) 2.
- c)  $2\sqrt{2}$ .
- d)  $\sqrt{2}$ .
- e) 3.

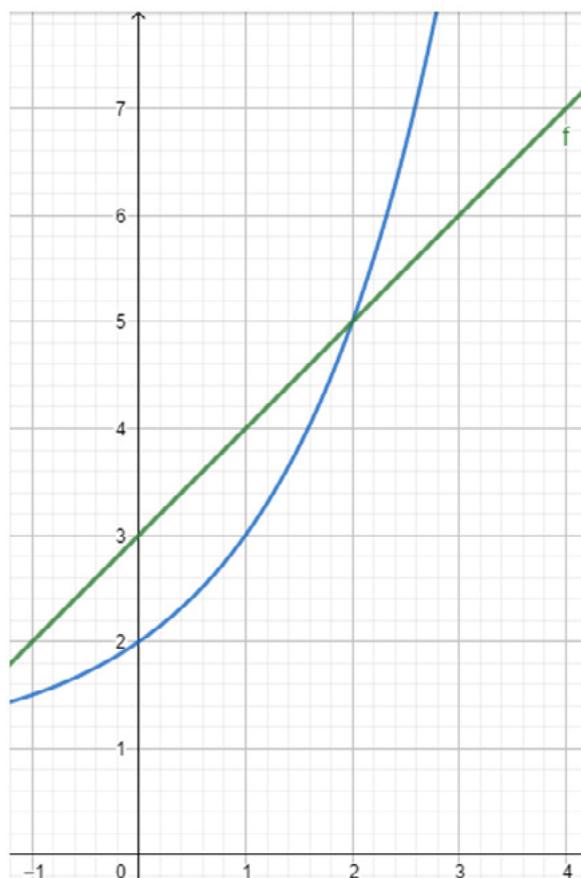


Analizando as duas equações, podemos notar que ambas são funções crescentes, onde  $y = x + 3$  cresce linearmente e  $y = 2^x + 1$  cresce exponencialmente.

Podemos igualar as equações para encontrar onde elas se cruzam, porém esboçar as funções vai nos ajudar a enxergar melhor o que a questão pede, e como o enunciado nos dá que  $x \geq 0$ , vamos calcular

x	x + 3	2 <sup>x</sup> = 1
0	3	2
1	4	3
2	5	5
3	6	9

Identificamos então que as funções se cruzam quando  $x = 2$  e que a imagem de  $y = x + 3$  é maior que a de  $y = 2^x + 1$  quando  $x \in [0, 2)$



Assim, queremos saber o cumprimento entre os pontos A(0, 3) e B(2, 5)

Para calcular a distância entre dois pontos, utilizamos o conceito de Pitágoras na função

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Então ficamos com

$$d_{AB} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

**Letra c.**

**036. (CESPE/PREFEITURA DE SÃO LUÍS-MA/2017/PROFESSOR DE MATEMÁTICA)**
**Texto 11A1AAA**

Se  $x \geq 0$  representa a quantidade de quilômetros percorridos por um veículo em determinado dia, então:

$f(x) = x/12$  representa a quantidade de litros de combustível consumido pelo veículo para percorrer  $x$  quilômetros;

$g(x) = 60 - x/12$  representa a quantidade de litros de combustível que restam no tanque do veículo depois de percorridos  $x$  quilômetros.

Considerando que  $f(x)$  e  $g(x)$  sejam as funções definidas no texto 11A1AAA, assinale a opção correta a respeito do sinal da função  $H(x) = \ln[f(x)/g(x)]$ , que está definida para todo  $x$  do intervalo  $(0, 720)$ , em que  $\ln[x]$  é o logaritmo natural de  $x$ .

- a)  $H(x) \geq 0$  para todo  $x$  do intervalo  $(0, 720)$
- b)  $H(x) \leq 0$  para todo  $x$  do intervalo  $(0, 1)$  e  $H(x) > 0$  para todo  $x$  do intervalo  $(1, 720)$ .
- c)  $H(x) \geq 0$  para todo  $x$  do intervalo  $(0, 360]$  e  $H(x) < 0$  para todo  $x$  do intervalo  $(360, 720)$ .
- d)  $H(x) \leq 0$  para todo  $x$  do intervalo  $(0, 360]$  e  $H(x) > 0$  para todo  $x$  do intervalo  $(360, 720)$ .
- e)  $H(x) \leq 0$  para todo  $x$  do intervalo  $(0, 720)$ .



Vamos identificar melhor nosso  $H(x)$

$$H(x) = \ln \frac{f(x)}{g(x)} = \ln \frac{\frac{x}{12}}{60 - \frac{x}{12}} = \ln \frac{\frac{x}{12}}{\frac{720 - x}{12}}$$

$$H(x) = \ln \left( \frac{x}{12} \cdot \frac{12}{720 - x} \right) = \ln \frac{x}{720 - x}$$

Agora, vamos procurar o 0 da função para identificar em qual intervalo  $x$  é positivo e em qual é negativo, assim:

$$\ln \frac{x}{720 - x} = 0$$

$$e^{\ln \frac{x}{720 - x}} = e^0$$

$$\frac{x}{720 - x} = 1$$

$$x = 720 - x$$

$$2x = 720 \therefore x = 360$$

A função do logaritmo natural é crescente. Como a variável  $x$  está definida no intervalo  $(0, 720)$ , então temos que  $H(x) > 0$  para  $[360, 720)$  e  $H(x) \leq 0$  para o intervalo  $(0, 360]$ .

**Letra d.**

**037. (CESPE/PETROBRAS/2007/ANALISTA DE COMÉRCIO E SUPRIMENTOS JÚNIOR)**


Suponha que a produção de óleo e a demanda de derivados, entre 2003 e 2006, de uma companhia de petróleo hipotética sejam as mostradas nos gráficos acima. Suponha, ainda, que, a partir de 2006, o gráfico represente o planejamento estratégico da companhia, tanto para a produção como para a demanda. Os valores são dados em mil barris por dia (mbpd). Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.

Suponha que, no planejamento estratégico da companhia, a produção de óleo cresça, a partir de 2006, à taxa de 5% ao ano. Suponha também que  $\log_{10}3 = 0,48$ ,  $\log_{10}5 = 0,70$  e que  $\log_{10}7 = 0,85$ . Nessa situação, em algum ano antes de 2014, a produção de óleo terá atingido 3.200 mbpd.



Podemos fazer uma analogia dessa questão com juros compostos, já que temos a taxa (5% ao ano), o capital inicial (1600 mbpd, dado fornecido no gráfico) e, apesar de não termos o tempo, que é nossa incógnita, temos o montante final (3.200 mbpd).

Sendo o montante dado de acordo com a expressão:

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

Nesse caso, devemos somar 1 à taxa, porque o crescimento a uma taxa de 5% ao ano é o mesmo que multiplicar continuamente a taxa de produção de óleo por 1,05.

Nessa expressão, M é o montante; C é o capital inicial; i é a taxa; t é o tempo. Podemos substituir essas informações na expressão acima.

$$3200 = 1600 \cdot (1 + 0,05)^t$$

$$\frac{3200}{1600} = 1,05^t$$

$$1,05^t = 2$$

E agora, empregando o conceito de logaritmo, temos:

$$\log_{1,05} 2 = t$$

Utilizando a propriedade de mudança de base

$$\log_{1,05} 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1,05}$$

Não sabemos quanto é  $\log 1,05$ , porém podemos tentar calcular. Decompondo 105:

<b>105</b>	3
<b>35</b>	5
<b>7</b>	7
<b>1</b>	

Podemos dizer então que  $1,05 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 10^{-2}$ , e como o enunciado nos dá os valores de alguns logs, podemos aplicar na propriedade logarítmica do produto

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Então temos que

$$\log_{10} 1,05 = \log_{10}(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 10^{-2}) = \log_{10} 3 + \log_{10} 5 + \log_{10} 7 - 2 \cdot \log_{10} 10$$

$$\log 1,05 = 0,48 + 0,7 + 0,85 - 2 \cdot 1 = 0,03$$

O enunciado também não nos fornece o valor de  $\log 2$ , porém podemos calculá-lo com a propriedade logarítmica do quociente

$$\log_a \left( \frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

Como sabemos que  $\log_{10} 10 = 1$  e o enunciado nos fornece  $\log_{10} 5 = 0,7$ , temos que

$$\log_{10} 2 = \log_{10} \left( \frac{10}{5} \right) = \log_{10} 10 - \log_{10} 5$$

$$\log_{10} 2 = 1 - 0,7 = 0,3$$

Por fim, temos então que

$$\log_{1,05} 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1,05} = \frac{0,3}{0,03} = 10$$

Ou seja, este montante será obtido 10 anos após o ano inicial. Se o ano inicial foi 2006, então será obtido em 2016, depois de 2014.

É importante ressaltar que, tratando-se de logaritmo com base 10, nem sempre ela estará evidenciada,  $\log x = \log_{10} x$ .

**Errado.**

## GABARITO

- |       |       |       |
|-------|-------|-------|
| 1. c  | 14. C | 27. E |
| 2. d  | 15. E | 28. C |
| 3. c  | 16. C | 29. b |
| 4. a  | 17. d | 30. E |
| 5. a  | 18. d | 31. C |
| 6. a  | 19. C | 32. E |
| 7. c  | 20. e | 33. C |
| 8. d  | 21. E | 34. C |
| 9. C  | 22. d | 35. c |
| 10. E | 23. e | 36. d |
| 11. d | 24. c | 37. E |
| 12. a | 25. c |       |
| 13. d | 26. c |       |

## Thiago Cardoso



Engenheiro eletrônico formado pelo ITA com distinção em Matemática, analista-chefe da Múltiplos Investimentos, especialista em mercado de ações. Professor desde os 19 anos e, atualmente, leciona todos os ramos da Matemática para concursos públicos.

LEI Nº 8.666/1993 - LICITAÇÃO

Avaliação

5 stars

Commentário

Seu feedback é valioso. Você gostaria de deixar um comentário e assim nos ajudar a melhorar nossos produtos e serviços?

Obs: A avaliação da aula em pdf é exclusivamente pedagógica. Clique aqui para relatar problemas técnicos, pois serão desconsiderados deste canal.

Sim, salvar comentário. Não, obrigado.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

## NÃO SE ESQUEÇA DE AVALIAR ESTA AULA!

SUA OPINIÃO É MUITO IMPORTANTE PARA MELHORARMOS AINDA MAIS NOSSOS MATERIAIS.

ESPERAMOS QUE TENHA GOSTADO DESTA AULA!

PARA AVALIAR, BASTA CLICAR EM LER A AULA E, DEPOIS, EM AVALIAR AULA.

**AVALIAR**