MATEMÁTICA

Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares

GRAN CURSOS ONLINE

Livro Eletrônico

Sumário

Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares 4
1. Conceitos Básicos 4
1.1. Elemento 4
1.2. Soma de Matrizes 4
1.3. Produto de Matrizes 5
1.4. Matriz Transposta 8
2. Determinante 12
2.1. Matriz Triangular 13
2.2. Matriz 2x2 13
2.3. Matriz 3x3 14
2.4. Teorema de Binet 15
2.5. Produto por Escalar 16
2.6. Regra de Jacobi 16
3. Sistemas Lineares 34
3.1. Classificação de Sistemas Lineares 36
Questões Comentadas em Aula 47
Gabarito 56

Apresentação

Olá, aluno(a)!

Seja bem-vindo(a) a mais uma aula do nosso curso de Matemática e Raciocínio Lógico. Nessa aula, falaremos sobre Matrizes.

O assunto de Matrizes é um assunto com pouca teoria, centrada principalmente nas propriedades do determinante. Nesse material, abordamos de forma bastante objetiva e concisa, de modo que você tenha todas as ferramentas que vai precisar para resolver questões de prova envolvendo esse assunto.

Como sempre, gostaria de me disponibilizar no Fórum de Dúvidas.

MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

1. Conceitos Básicos

Uma matriz é uma forma de dispor números na forma de uma tabela com linhas e colunas.

A ordem de uma matriz é dada pelo número de linhas e colunas que ela possui. Vejamos alguns exemplos:

$$A_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_{3x1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

É importante atentar para a sequência correta. Quando falamos da matriz A_{2x3}, queremos dizer que A possui duas linhas e três colunas. É sempre assim: primeiro o número de linhas, depois o número de colunas.

Lembre-se: na matriz, tudo está organizado LINHA-COLUNA.

Um caso particular de matrizes são as matrizes quadradas, que são aqueles em que o número de linhas é igual ao número de colunas.

1.1. Elemento

O elemento de uma matriz é identificado pela linha e pela coluna em que se localiza.

O elemento a_{ij} está na linha i e na coluna j. Por exemplo, nas matrizes anteriores, temos:

$$a_{13} = -1$$

$$b_{21} = -3$$

Note que o elemento a_{13} está na primeira linha e na terceira coluna da matriz A e que o elemento b_{21} está na segunda linha e na primeira coluna da matriz B.

1.2. Soma de Matrizes

A soma de matrizes só pode ser feita entre duas matrizes de mesma ordem produzindo uma nova matriz de mesma ordem.

$$C_{m\times n} = A_{m\times n} + B_{m\times n}$$

A soma é feita elemento a elemento. Pode-se escrever matematicamente que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Em outras palavras, qualquer elemento da matriz C é igual à soma dos elementos das matrizes A e B que estejam na linha e coluna correspondentes. Vejamos um exemplo para ficar mais claro:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 25 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+4 & 3+5 & 5+6 \\ 4+7 & 9+8 & 25+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 11 \\ 11 & 17 & 34 \end{bmatrix}$$

Analogamente, pode ser feita a diferença de matrizes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 25 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$C = B - A = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 4-2 & 5-3 & 6-5 \\ 7-4 & 8-9 & 9-25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -16 \end{bmatrix}$$

1.3. Produto de Matrizes

O primeiro ponto a se comentar é que o produto de matrizes **nem sempre é compatível**. É necessário que as matrizes tenham dimensões apropriadas.

Para que seja possível realizar o produto AB, precisamos que o número de colunas da matriz A seja igual ao número de linhas da matriz B.

$$C = A_{m\times p} B_{p\times n} = C_{m\times n}$$

Vejamos alguns exemplos.

$$C = A_{3\times 2} B_{2\times 1} = C_{3\times 1}$$

$$C = A_{4\times 3} B_{3\times 3} = C_{4\times 3}$$

$$C = A_{3\times 2} B_{3\times 2} \text{ não é compatível}$$

É interessante que o produto de duas matrizes de mesma ordem nem sempre é compatível, como no caso acima. Na verdade, esse produto somente será compatível no caso de matrizes quadradas.

Além disso, **o produto de matrizes**, em regra, **não é comutativo**. Ou seja, o produto AB é diferente de BA, na maioria dos casos.

É bastante possível que ambos os produtos existam, mas sejam de ordens diferentes.

$$C = A_{4\times3}B_{3\times4} = C_{4\times4}$$

$$D = B_{3\times4}B_{4\times3} = D_{3\times3}$$

Também é possível que o produto AB exista, mas não exista o produto BA.

$$C = A_{3\times2}B_{2\times1} = C_{3\times1}$$

$$B_{2\times1}A_{3\times2}\ não\ é\ compatível$$

O produto de matrizes deve ser feito linha por coluna. Podemos estabelecer o seguinte algoritmo.

$$C = A_{m\times p}B_{p\times n} = C_{m\times n}$$

Essa notação não é rigorosa matemática, é apenas uma forma de escrever que eu criei para facilitar o entendimento sobre o produto de matrizes.

Em outras palavras, o elemento c_{12} (primeira linha e segunda coluna de C) é igual à soma dos produto dos elementos da primeira linha da matriz A pelos elementos da segunda coluna da matriz B.

Vejamos um exemplo para entender melhor.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 25 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{3\times3}B_{3\times1} = C_{3\times1} = \begin{bmatrix} 1.1 + 1.0 + 1.2 \\ 2.1 + 3.0 + 5.2 \\ 4.1 + 0.9 + 2.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 54 \end{bmatrix}$$

Veja que, para chegar ao elemento c_{12} (primeira linha e segunda coluna de C), multiplicamos os elementos da primeira linha de A pelos elementos da segunda coluna de B. Como escrevemos na nossa notação, $c_{12} = A_1B_2$.

Entendo que o produto de matrizes é bastante estranho. Por isso, vamos fazer um novo exemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{3\times 3}B_{3\times 1} = C_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 1.2 + 2.(-1) + 3.1 \\ 4.2 + 5.(-1) + 6.1 \\ 7.2 + 8.(-1) + 9.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}$$

1.3.1. Matriz Identidade

Um caso particular importante de matriz é **a matriz identidade**, que possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1 e todos os elementos fora da diagonal principal iguais a 0.

Vejamos alguns exemplos de matrizes identidades de várias ordens.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação. Sendo assim, o produto de qualquer matriz A pela identidade, em qualquer ordem, desde que seja compatível, é igual à própria matriz A.

$$AI = IA = A$$

1.3.2. Matriz Inversa

A matriz inversa de uma matriz quadrada A é aquela que, quando multiplicada pela matriz A em qualquer ordem produz a matriz identidade. Ou seja,

$$B = A^{-1} \leftrightarrow AB = BA = I$$

Uma observação importante é que a matriz inversa do produto também pode ser obtida como o produto das matriz inversa, porém na ordem trocada.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

O procedimento para a obtenção de matrizes inversas é bastante complicado.

1.4. Matriz Transposta

A matriz transposta da matriz A é obtida trocando-se suas linhas e colunas de lugar. A transposta de A pode ser representada por A' ou por A^t. Vejamos um exemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \therefore A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \therefore B' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1.4.1. Propriedades da Transposta

A transposta da soma é igual à soma de transpostas.

$$(A + B)' = A' + B'$$

Além disso, a transposta do produto é igual ao produto das transpostas, porém na ordem trocada.

$$(AB)' = B'A'$$

1.4.2. Matriz Simétrica e Antissimétrica

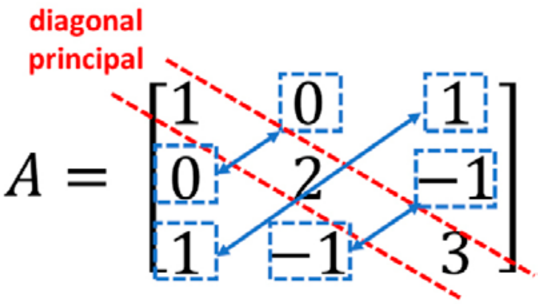
Dois casos particulares importantes de matrizes são as matrizes simétricas e antissimétricas.

Uma matriz quadrada é simétrica quando é igual à sua transposta. Vejamos um exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Faça a transposição e verifique que A = A'.

Uma matriz será simétrica quando todos os elementos diametralmente opostos pela diagonal principal são iguais. Vejamos:



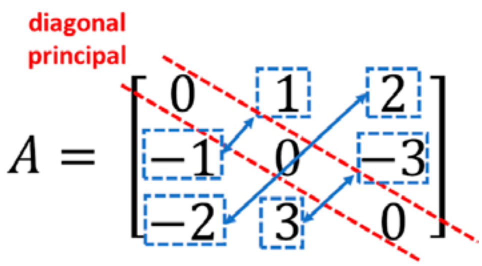
Para facilitar sua compreensão, destacamos a diagonal principal em vermelho, e mostramos os elementos opostos por ela em azul.

Por outro lado, uma matriz quadrada é antissimétrica quando é o negativo de sua transposta. Em outras palavras, A + A' = 0. Vejamos como exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

São duas condições para que uma matriz seja antissimétrica:

- Todos os elementos da diagonal principal são nulos;
- Os elementos diametralmente opostos à diagonal principal são simétricos.



Ao fazer a transposição de A, podemos ver facilmente que a soma A + A' produz a matriz nula.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A + A' = \begin{bmatrix} 0+0 & 1-1 & 2-2 \\ 1-1 & 0 & 3-3 \\ 2-2 & 3-3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

DIRETO DO CONCURSO

Questão 1 (FGV/PREFEITURA DE SALVADOR/BA/2019/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Considere as matrizes A_{2x3} e B_{2x2}.

Sobre essas matrizes é correto afirmar que

a) Existe a soma A + B e é uma matriz 4x5.

b) Existe o produto AB e é uma matriz 4x6.

c) Existe o produto BA e é uma matriz 4x6.

d) Não existe o produto AB.

e) Não existe o produto BA.

COMENTÁRIO

Letra d.

Vejamos sobre a existência dos produtos AB e BA com base nos tamanhos das matrizes.

$$A_{2\times 3}\ B_{2\times 2}$$

incompatível

$$B_{\boxed{2}\times 2}\ A_{2\times \boxed{3}} = C_{\boxed{2\times 3}}$$

compatível

Portanto, o produto AB não existe, e o produto BA retorna uma matriz 2x3.

QUESTÃO 2 (IBFC/PC-PR/2017/PERITO CRIMINAL) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$,assinale a alternativa que apresenta a matriz C que representa a soma das matriz A e B, ou seja, C = A + B:

COMENTÁRIO

5, 4, 1; 1, 0, 1

Basta fazer a soma individual dos elementos da matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+1 & 0+1 \\ 0+1 & 1-1 & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

QUESTÃO 3 (IBFC/PC-PR/2017/PERITO CRIMINAL) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ e a matriz matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$,assinale a alternativa que apresenta a matriz C que representa a subtração das matriz A e B, ou seja, C = A – B:

COMENTÁRIO

2, -2; 4, -5

Aplicando a regra da subtração de matrizes:

$$C = A - B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-1 & 0-2 \\ 4-0 & -7-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

QUESTÃO 4 (CESPE/SEDF/2017) Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 40 \end{bmatrix}$ julgue o próximo item.

Se B = $B = \begin{bmatrix} 0 & x & -7 \\ 1 & 0 & z \\ y & 10 & 0 \end{bmatrix}$ e a matriz A + B for simétrica, então x + y + z = 0.

COMENTÁRIO

Certo.

Façamos a soma das matrizes A + B.

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x & -7 \\ 1 & 0 & z \\ y & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+0 & 0+x & 10-7 \\ 4+1 & 10+0 & 20+z \\ 0+y & 2+10 & 40+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & x & 3 \\ 5 & 10 & 20+z \\ y & 12 & 40 \end{bmatrix}$$

Assim, a soma A + B é:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & x & 3 \\ 5 & 10 & 20+z \\ y & 12 & 40 \end{bmatrix}$$

Para que a matriz seja simétrica, devemos ter:

$$x = 5$$

$$3 = y$$

$$20 + z = 12 \therefore z = -8$$

Portanto, a soma pedida é:

$$x + y + z = 5 + 3 - 8 = 0$$

2. Determinante

O determinante é o principal assunto cobrado a respeito de matrizes e o que mais você precisa ficar de olho.

A definição de determinante é bastante complicada e requer a compreensão do Teorema de Laplace, que é um assunto que considero bastante avançado para ser cobrado em provas de concurso.

Por isso, vamos focar apenas nos casos particulares mais importantes e nas propriedades dos determinantes, que são os assuntos cobrados desse tópico.

Primeiramente, você deve saber que o conceito de determinante **somente se aplica a matrizes quadradas**.

2.1. Matriz Triangular

Uma matriz triangular tem todos os elementos de um lado acima ou abaixo da diagonal principal iguais a zero. O seu determinante é simplesmente o produto de todos os elementos da diagonal principal.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & -4 & 4 \end{bmatrix} \therefore \det A = 1.2.4 = 8$$

Perceba que, nesse caso, podemos ignorar todos os termos que estão fora da diagonal principal.

Um caso particular de matriz triangular é a matriz diagonal.

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \therefore \det B = (-2).(-1).3 = 6$$

2.2. Matriz 2x2

Numa matriz 2x2 qualquer, o determinante é calculado de maneira muito simples.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \therefore \det A = ad - bc$$

Observe que o determinante de uma matriz 2x2 pode ser calculado como o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \det(A) = ad - bc$$

Vejamos alguns exemplos.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = 4.1 - 2.3 = 4 - 6 = -2$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det(B) = 1.3 - 2.(-1) = 3 + 2 = 5$$

2.3. Matriz 3x3

Os determinantes de ordem 3 devem ser calculados pela Regra de Sarrus. O procedimento está descrito a seguir:

- Duplicar as duas primeiras colunas ao lado da terceira;
- Multiplicar os elementos da diagonal principal e das duas paralelas a ela com sinal positivo;
- Multiplicar os elementos da diagonal secundária e das duas paralelas a ela com sinal negativo.

Vejamos um exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix} \qquad A = \left[\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{matrix}$$

$$\det A = 1.5.9 + 2.6.7 + 3.4.8 - 7.5.2 - 8.6.1 - 9.4.2$$

$$\therefore \det A = 45 + 84 + 96 - 70 - 48 - 72 = 225 - 190 = 35$$

2.4. Teorema de Binet

Agora, vamos a uma das propriedades mais cobradas do assunto determinante. Se compatível, o determinante do produto é igual ao produto dos determinantes.

Trata-se de uma propriedade bastante interessante, pois já sabemos que, em geral, o produto AB não é comutativo. Ou seja, AB geralmente é diferente de BA. Porém, o determinante do produto é sim comutativo.

$$\det(AB) = \det(A)\,.\det(B)$$

Um caso particular interessante diz respeito ao determinante da potência, que também é a potência do determinante.

$$\det(A^n) = (\det A)^n$$

É relativamente comum questões de prova pedirem para que você calcule a potência de uma matriz.

Como vimos, o produto de matrizes já é por si só bastante complicado de fazer e toma muito tempo na hora da prova. Sendo assim, calcular A^5 na hora da prova é completamente fora de questão.

2.5. Produto por Escalar

Quando uma matriz é multiplicada por um escalar (um número real qualquer), o seu determinante ficará multiplicado seguindo a regra:

$$\det(kA) = k^n \det(A)$$

É preciso prestar atenção, pois o escalar fica elevado à ordem da matriz.

Por exemplo, se a matriz A é de ordem 3, o escalar ficará elevado ao cubo.

É importante não confundir essa propriedade com o que acontece quando multiplicamos **apenas uma linha ou coluna** da matriz por um escalar qualquer.

Se somente uma linha da matriz fica multiplicada por 3, então o determinante da matriz ficará multiplicado por 3.

Vejamos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \therefore \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2.2 - (-1).1 = 4 + 1 = 5$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \therefore \det B = 2.5 = 10$$

A matriz B é obtida multiplicando-se por 2 a primeira linha de A, portanto o seu determinante também será o dobro do determinante de A. Isso pode ser verificado calculando-se normalmente o determinante dessa matriz diretamente sem o uso de nenhuma propriedade.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \therefore \det B = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4.2 - (-1).2 = 8 + 2 = 10$$

2.6. Regra de Jacobi

A Regra de Jacobi estabelece que o determinante não se altera quando é feita uma alteração na matriz, de modo que uma linha ou coluna seja somada ou subtraída a qualquer outra linha ou coluna da matriz.

Vejamos alguns exemplos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = ?$$

Nessa matriz, tomamos a primeira linha e a subtraímos da segunda e da terceira linhas. Ao fazer isso, o determinante não se altera.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-1 & 3-1 & 1-1 \\ 1-1 & 1-1 & 5-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1.2.4 = 8$$

Então, obtivemos uma matriz triangular, cujo determinante é bem mais fácil de ser calculado.

É possível também multiplicar a linha ou coluna por um fator conveniente.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = ?$$

Nesse caso, podemos multiplicar a primeira linha por dois para subtrair da segunda e por três para subtrair da terceira.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2-2.1 & 3-2.1 & 3-2.1 \\ 3-3.1 & 3-3.1 & 6-3.1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1.1.3 = 3$$

Mais uma vez, usamos a regra prática para o cálculo de determinante de matriz triangular.

DIRETO DO CONCURSO

Questão 5 (IADES/CRF/TP/2019/ANALISTA DE TI) Suponha que, na Comissão de Farmácia Hospitalar do Conselho Federal de Farmácia, existam 5 computadores e 3 impressoras. Um sistema foi desenvolvido para controlar o número de páginas impressas diariamente. Esse sistema registra o número de páginas impressas em uma matriz $A = (a_{ij})_{5\times3}$ na qual cada elemento aij registra o número de páginas enviadas pelo computador i para a impressora j. Ao final de determinado dia, verificou-se o registro da matriz, conforme apresentado.

$$A = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array}}^{impressoras} \\ \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 2 & 0 & 25 \\ 0 & 3 & 7 \\ 10 & 13 & 16 \\ 5 & 0 & 30 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ computador\ 1 \\ computador\ 2 \\ computador\ 3 \\ computador\ 4 \\ computador\ 5 \end{array}$$

Como exemplo, nesse dia, o computador 1 imprimiu 10 páginas na impressora 2. O total de páginas impressas pelos computadores 2, 3 e 5 na impressora 3 foi igual a

a) 55.
b) 62.
c) 67.
d) 72.
e) 80.

COMENTÁRIO

Letra b.

Vamos marcar os elementos pedidos em vermelho.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 2 & 0 & \mathbf{25} \\ 0 & 3 & \mathbf{7} \\ 10 & 13 & 16 \\ 5 & 0 & \mathbf{30} \end{bmatrix}$$

Portanto, a soma pedida é:

$$S = a_{23} + a_{33} + a_{53} = 25 + 7 + 30 = 62$$

Questão 6 (IADES/CAU-RO/2018/ARQUITETO E URBANISTA) Suponha que, no CAU-RO, cinco conselheiros foram eleitos para o Conselho Diretor. Na primeira reunião do conselho, eles deveriam eleger entre si um presidente; para tanto, fizeram uma eleição em que cada um deveria votar em outro conselheiro e não poderia votar em si mesmo. Cada um dos cinco conselheiros foi identificado com um número de 1 a 5, e os votos foram representados na matriz A = $(aij)_{5x5}$ apresentada, na qual, para $i \neq j$, se o conselheiro i votar no conselheiro j, e $a_{ij} = 1$; caso contrário, $a_{ij} = 0$. Com base nessas informações, o conselheiro que foi eleito presidente foi o identificado com o número

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) 5.
b) 1.
c) 3.
d) 2.
e) 4.

COMENTÁRIO

Letra d.

Pela definição do enunciado, o elemento a_{ij} é igual a 1, quando o candidato **i** votou no candidato **j**. Portanto, a coluna marca o elemento que recebeu o voto.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \text{votos recebidos por 1} & \text{votos recebidos por 2} & & & \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Portanto, a apuração de votos:

- 1 voto para o candidato 1;
- 3 votos para o candidato 2;
- 1 voto para o candidato 4.

Portanto, o candidato 2 será eleito.

QUESTÃO 7 (CESPE/IFF/2018) Considere que k seja um número real e que o determinante da matriz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & k \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ seja igual a 27. Nesse caso, se $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$, então o determinante da matriz B – A, será igual a:

a) 30

b) 0

c) 3

d) 6

e) 10

COMENTÁRIO

Letra d.

Primeiramente, devemos calcular o determinante da matriz B.

$$\det B = \begin{vmatrix} 3 & k \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 3.9 - 3.(k) = 27 - 3k = 27$$

Assim, podemos calcular o valor de k.

$$27 - 3k = 27$$

$$\therefore 3k = 27 - 27 = 0$$

$$\therefore k = 0$$

Com isso, temos as matrizes A e B definidas.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

Devemos tomar a diferença.

$$B - A = \begin{bmatrix} 3-3 & 0-(-1) \\ 3-9 & 9-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

E, finalmente, calculamos o determinante da matriz 2x2.

$$\det(B - A) = \begin{vmatrix} 0 & +1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 0.3 - (-6).1 = 0 + 6 = 6$$

QUESTÃO 8 (CESPE/SEDUC-AL/2018/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Se *a* é um número real e se o determinante da matriz $P = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ for igual a zero, então *a* = -2 ou *a* = 1.

COMENTÁRIO

Certo.

Vamos fazer a soma das matrizes.

$$P = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} a+0 & 1-2 \\ 0-2 & a-1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 \\ -2 & a+1 \end{bmatrix}$$

Calculemos o determinante 2x2.

$$\det P = \begin{vmatrix} a & -1 \\ -2 & a+1 \end{vmatrix} = a.(a+1) - (-2).(-1) = 0$$

$$\det P = a.(a+1) - 2 = 0$$

$$\det P = a^2 + a - 2 = 0$$

Chegamos a uma equação do segundo grau, cujo discriminante pode ser calculado como:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4.1(-2) = 1 + 8 = 9$$

Os valores possíveis para o coeficiente **a** são:

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2.1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

Tomando os dois sinais da expressão, temos:

$$a_1 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_2 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

QUESTÃO 9 (ESAF/DNIT/2013/TÉCNICO ADMINISTRATIVO) Os elementos de uma matriz A3X2, isto é, com três linhas e duas colunas, são dados por:

$$a_{ij} = \begin{cases} (i+j)^2 & ,se\ i = j \\ i^2 + j^2 & ,se\ i \neq j \end{cases}$$

Em que a_{ij} representa o elemento da matriz $A3_{X2}$localizado na linha *i* e coluna *j*. Então, a soma dos elementos da primeira coluna de A_{3X2} é igual a:

a) 17

b) 15

c) 12

d) 19

e) 13

COMENTÁRIO

Letra d.

A matriz A possui 3 linhas e 2 colunas. Os elementos da primeira coluna são aqueles a_{i1}.

$$a_{11} = (1+1)^2 = 2^2 = 4$$

$$a_{21} = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$$

$$a_{31} = 3^2 + 1^2 = 9 + 1 = 10$$

Portanto, a soma pedida é:

$$S = a_{11} + a_{21} + a_{31} = 4 + 5 + 10 = 19$$

Questão 10 (CESPE/SE-DF/2017) Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 40 \end{bmatrix}$, julgue o próximo item. A matriz A é inversível.

COMENTÁRIO

Letra d.

Para saber se A é inversível, devemos pegar o seu determinante e verificar se é não nulo.

$$A = \left|\begin{matrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 40 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & 0 \\ 4 & 10 \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

$-\quad -\quad -\qquad +\quad +\quad +$

$$\det A = 2.10.40 + 0.20.0 + 10.4.2 - 10.10.0 - 2.20.2 - 0.4.40$$

$$\det A = 800 + 0 + 80 - 0 - 80 - 0 = 800$$

Como o determinante é diferente de zero, a matriz é inversível.

Questão 11 (ESAF/AFRFB/2014) A matriz quadrada A, definida genericamente por A = aij, é dada por a11 = 0; a12 = – 4; a13 = 2; a21 = x; a22 = 0; a23 = (1 – z); a31 = y; a32 = 2z e, por último, a33 = 0. Desse modo, para que a matriz A seja uma matriz antissimétrica, os valores de a21, a23, a31 e a32 deverão ser, respectivamente, iguais a:

a) 4; -2; -2; -2.
b) 4; -2; 2; -2.
c) 4; 2; -2; -2.
d) -4; -2; 2; -2.
e) -4; -2; -2; -2.

COMENTÁRIO

Letra c.

Uma matriz simétrica é aquela que, somada à sua transposta, iguala a zero. Assim temos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ x & 0 & 1-z \\ y & 2z & 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ -4 & 0 & 2z \\ 2 & 1-z & 0 \end{bmatrix}$$

De fato, devemos ter que todos os elementos da diagonal principal são nulos. Essa condição já foi observada pelo enunciado. Adicionalmente, devemos ter:

$$x + (-4) = 0 \therefore x = 4$$

$$2 + y = 0 \therefore y = -2$$

$$2z + (1 - z) = 0 \therefore z + 1 = 0 \therefore z = -1$$

Sendo assim, a matriz pedida é:

Sendo assim, os elementos pedidos são:

a21 = 4, a23 = 2, a31 = -2 e a32 = -2

QUESTÃO 12 (IBFC/PC-PR/2017/PERITO CRIMINAL) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, assinale a alternativa que apresenta a matriz C que representa a subtração das matriz A e B, ou seja, C = AB:

COMENTÁRIO

8, 10; 10, 16

Basta aplica o algoritmo tradicional da multiplicação de matrizes.

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.1 + 3.3 & -1.2 + 3.4 \\ 4.1 + 2.3 & 4.2 + 2.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 9 & -2 + 12 \\ 4 + 6 & 8 + 8 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

Questão 13 (IBFC/PC-PR/2017/PERITO CRIMINAL/ADAPTADA) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e a matriz$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, determine o elemento d_{21} da matriz D = BA

COMENTÁRIO

13

O elemento d_{21} é obtido pelo produto dos elementos da segunda linha da matriz B pelos elementos da primeira coluna da matriz A.

$$d_{21} = 3.(-1) + 4.4 = -3 + 16 = 13$$

É interessante que você saiba essa técnica para resolver o problema com mais agilidade.

Questão 14 (CESPE/SEDUC-AL/2018/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Julgue o item que se segue, relativo a matriz e sistema linear.

Se *a* é um número real e se o determinante da matriz

$$P = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a - 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

for igual a zero, então, a = -2 ou a = 1.

COMENTÁRIO

Certo.

Vamos efetuar a soma de matrizes

$$P = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Quando multiplicamos uma matriz por um escalar, no caso, 2, todos os seus elementos devem ser multiplicados por 2.

$$P = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Agora, vamos somar os elementos das mesmas posições.

$$P = \begin{bmatrix} a+0 & 1-2 \\ 0-2 & a-1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 \\ -2 & a+1 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, podemos calcular o discriminante da matriz P.

$$\det P = a(a+1) - (-2).(-1) = a(a+1) - 2 = 0$$

$$a^2 + a - 2 = 0$$

Podemos resolver a equação do segundo grau. Para isso, primeiramente vamos calcular o discriminante.

$$\Delta = 1^2 - 4.1.(-2) = 1 + 8 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

Com a raiz quadrada do discriminante, vamos calcular o valor das possíveis soluções de **a**.

$$a = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$\therefore a_1 = \frac{-1-3}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$\therefore a_2 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Portanto a = -2 ou a = 1.

Questão 15 (FGV/SAD-PE/ANALISTA DE CONTROLE INTERNO/FINANÇAS PÚBLICAS/2009) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e seja n um número natural maior que 1. Na matriz A^{2n}, o elemento que ocupa a 1ª linha e 2ª coluna é:

a) -1
b) 0
c) 1
d) n
e) 2n

COMENTÁRIO

Letra b.

Potência de matrizes, em geral, é bastante complicado. Porém, a matriz A tem uma particularidade.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular a matriz A².

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1.1 + (-1).0 & 1.(-1) + (-1).(-1) \\ 0.1 + (-1).0 & 0.(-1) + (-1).(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & -1+1 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

A matriz A é, portanto, uma matriz involutiva, ou seja, uma de suas potências é a própria matriz identidade.

Notamos que $A^2 = I \therefore A^{2n} = I^n = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

QUESTÃO 16 (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018/ENGENHEIRO JÚNIOR) Considere a matriz A apresentada a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Qual é o valor do determinante dessa matriz?

a) -36

b) -27

c) -15

d) +18

e) +45

COMENTÁRIO

Letra b.

Embora não exista uma regra prática para calcular um determinante de quinta ordem, podemos notar que essa matriz é quase triangular. Usando a Regra de Jacobi, podemos transformá-la em uma matriz efetivamente triangular.

Podemos multiplicar a primeira linha por quatro para subtrair da segunda.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4-4.1 & -1-4.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Para eliminar o termo que nos incomoda na última linha, podemos multiplicar a quarta linha por 2/5 e subtrair da última.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\frac{2}{5}.5 & 1-\frac{2}{5}.2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{vmatrix}$$

$$= 1.(-9).3.5.(\frac{1}{5}) = -27$$

Questão 17 (CESGRANRIO/PETROBRAS/2018/TÉCNICO DE ADMINISTRAÇÃO E CONTROLE JÚNIOR) Sejam A uma matriz quadrada de ordem 2 e B uma matriz quadrada de ordem 3, tais que detA. detB = 1. O valor de det(3A). det(2B) é:

a) 5
b) 6
c) 36
d) 72
e) 108

COMENTÁRIO

Letra d.

Usando as propriedades do determinante do produto por escalar.

$$P = \det(3A)\,.\det(2B) = 3^2.\det(A)\,.\,2^3.\det(B) = 9.8.\det(A)\,.\det(B) = 72.1$$

Questão 18 (CESPE/SEDUC-AL/2018/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Se a é um número real e se o determinante da matriz $P = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ for igual a zero, então a = -2 ou a = 1.

COMENTÁRIO

Certo.

Façamos a soma.

$$P = \begin{bmatrix} a+2.0 & 1+2.(-1) \\ 0+2.(-1) & a-1+2.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 \\ -2 & a+1 \end{bmatrix}$$

Agora, tomemos o determinante:

$$\det P = \begin{vmatrix} a & -1 \\ -2 & a+1 \end{vmatrix} = a(a+1) - (-1)(-2) = 0$$

$$a^2 + a - 2 = 0$$

$$\therefore a = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-2)}}{2.1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$a_1 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_2 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Sendo assim, de fato, os valores possíveis de a que anulam o determinante citado são 1 e -2.

Questão 19 (ESAF/AFRFB/2012) As matrizes, A, B, C e D são quadradas de quarta ordem. A matriz B é igual a 1/2 da matriz A, ou seja: b = 1/2 A. A matriz C é igual a matriz transposta de B, ou seja: c = B^t. A matriz D é definida a partir da matriz C; a única diferença entre essas duas matrizes é que a matriz D tem como primeira linha a primeira linha de C multiplicada por 2. Sabendo-se que o determinante da matriz A é igual a 32, então a soma dos determinantes das matrizes B, C e D é igual a:

a) 6
b) 4
c) 12
d) 10
e) 8

COMENTÁRIO

Letra e.

O determinante da matriz B é obtido pela regra:

$$\det B = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \det A = \frac{1}{16}.32 = 2$$

O determinante da matriz C é a transposta de B, portanto tem o mesmo determinante.

$$C = B' \therefore \det C = \det B = 2$$

Como a matriz D é obtida pela multiplicação de uma linha de C por 2, o seu determinante também será o determinante de C multiplicado por 2.

$$\det D = 2.\det C = 2.2 = 4$$

Portanto, a soma pedida é:

$$S = \det B + \det C + \det D = 2 + 2 + 4 = 8$$

Questão 20 (ESAF/MF/2009/TÉCNICO ADMINISTRATIVO) Seja uma matriz quadrada 4 por 4. Se multiplicarmos os elementos da segunda linha da matriz por 2 e dividirmos os elementos da terceira linha da matriz por -3, o determinante da matriz fica:

a) Multiplicado por -1.
b) Multiplicado por -16/81.
c) Multiplicado por 2/3.
d) Multiplicado por 16/81.
e) Multiplicado por -2/3.

COMENTÁRIO

Letra e.

Quando multiplicamos uma linha da matriz por 2, o determinante fica multiplicado por 2. Quando dividimos uma linha da matriz por -3, o determinante fica dividido por -3. Sendo assim, o determinante da matriz ficará multiplicado por -2/3.

Questão 21 (ESAF/MF/2017/ASSISTENTE TÉCNICO ADMINISTRATIVO) Dadas as matrizes

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ calcule o determinante do produto AB:

a) 8
b) 12
c) 9
d) 15
e) 6

COMENTÁRIO

Letra e.

Pelo Teorema de Binet, o determinante do produto é igual ao produto dos determinantes.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 2.3 - 1.3 = 6 - 3 = 3$$

$$\det B = \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 2.3 - 1.4 = 6 - 4 = 2$$

Sendo assim, o determinante do produto será:

$$\det(AB) = \det(A)\,.\det(B) = 3.2 = 6$$

Questão 22 (ESAF/ANAC/2016/TÉCNICO ADMINISTRATIVO) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, o determinante da matriz 2A é igual a:

a) 40
b) 10
c) 18
d) 16
e) 36

COMENTÁRIO

Letra a.

Primeiramente calcularemos o determinante da matriz A. Esse é um tipo de determinante que me deixa muito tentado a aplicar a Regra de Jacobi. Subtrairemos

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= 1.1.4 + 0.1.0 + 2.1.1 - 0.1.2 - 1.1.1 - 4.1.0 = 4 + 0 + 2 - 0 - 1 - 0 = 5$$

Agora, aplicando o determinante do produto, temos:

$$\det 2A = 2^3.\det(A) = 8.5 = 40$$

Questão 23 (ESAF/ATRFB/2012) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, o determinante de A^5 é igual a:

a) 20

b) 28

c) 32

d) 30

e) 25

COMENTÁRIO

Letra c.

Calcular uma matriz elevada à quinta potência tomaria tempo demais na sua preciosa prova. O mais interessante é utilizar as propriedades do determinante.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.1 - 0.1 = 2 - 0 = 2$$

Agora, basta usar que:

$$\det(A^5) = (\det A)^5 = 2^5 = 32$$

3. Sistemas Lineares

Um sistema linear é formado por um conjunto de equações e incógnitas. Os sistemas mais conhecidos são os sistemas de duas equações e duas incógnitas. Vejamos um exemplo:

$$x + y = 4$$

$$x - y = 2$$

Nesse sistema, temos duas equações e duas incógnitas (x e y). Sistemas desse tipo podem ser resolvidos pelo método da adição ou da subtração.

Nesse material, aprenderemos a lidar com sistemas lineares de várias equações e várias incógnitas. Por exemplo, o sistema seguir possui 3 equações e 3 incógnitas.

$$x + y + z = 6$$

$$2x - y + 2z = 4$$

$$x + 2y + 3z = 12$$

A primeira habilidade que devemos desenvolver para resolver esse tipo de linear é separá-lo em matrizes. A matriz principal (denominada matriz A) é formada pelos coeficientes associados às incógnitas. Vejamos um exemplo:

Coeficientes x	Coeficientes y	Coeficientes z
1	1	1
2	-1	2
1	2	3

Dessa maneira, temos a matriz principal associada ao sistema.

De posse dela, podemos escrever o sistema da seguinte forma.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

A segunda matriz é denominada matriz B ou matriz dos coeficientes independentes.

Sendo assim, temos o sistema:

$$AX = B$$

$$em\ que: A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\ e\ B = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Para obter as matrizes A e B, é importante deixar o sistema bem organizado com todos os coeficientes independentes isolados do lado direito da equação, exatamente como vimos nesse exemplo. Vejamos um exemplo de sistema que veio completamente desarrumado e que precisamos consertar.

$$2y + z = 4 - x$$

$$3z - 2 = 4y - 2x$$

$$x + y + z + 1 = 0$$

Precisamos organizar esse sistema isolando as incógnitas x, y e z no lado esquerdo e os coeficientes independentes no lado direito das equações. Vejamos como fica:

$$x + 2y + z = 4$$

$$2x - 4y + 3z = 2$$

$$x + y + z = -1$$

Agora, sim, podemos obter as matrizes A e B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\ e\ B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Além das matrizes A e B, temos as matrizes auxiliares A_x, A_y e A_z.

A matriz A_x é obtida a partir da matriz A substituindo-se a coluna correspondente aos coeficientes da incógnita x pelos coeficientes da matriz B.

Por exemplo, considere o primeiro sistema de equações:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \; e \; B = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Devemos nos lembrar de que os coeficientes relacionados à incógnita x são os da primeira coluna, os relacionados à y são os da segunda e os relacionados à z são os da terceira.

$$A_x = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & 3 \end{bmatrix}, A_y = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 12 & 3 \end{bmatrix}, A_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

3.1. Classificação de Sistemas Lineares

O principal assunto que é cobrado em provas é simplesmente a classificação dos sistemas lineares.

Um sistema linear é **possível** quando admite soluções reais. Por outro lado, um sistema **impossível** é aquele que **não admite soluções reais**.

Um sistema possível pode ser classificado em:

- **Determinado**: quando admite uma única solução;
- **Indeterminado**: quando admite várias soluções.

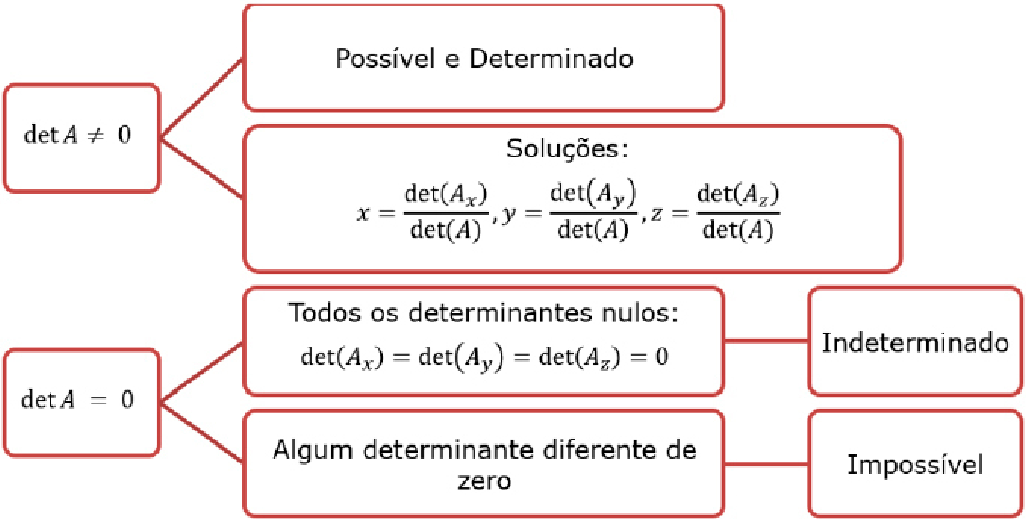
Um sistema será possível e determinado quando o determinante da matriz principal (A) for diferente de zero. Nesse caso, as soluções são dadas por:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)}, y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)}, z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)}$$

O sistema será possível e indeterminado quando o determinante da matriz principal (A) e de todas as matrizes auxiliares forem nulos. Nesse caso, o sistema admite infinitas soluções.

Por fim, se o determinante da matriz principal (A) for nulo e alguma das matrizes auxiliares tiver um determinante não nulo, o sistema será impossível.

Vamos esquematizar para você.



DIRETO DO CONCURSO

Questão 24 (FGV/AL-RO/2018/ANALISTA LEGISLATIVO/MATEMÁTICA) Considere o sistema linear:

x + 2y + 3z = 160

2x + 3y + z = 140

3x + y + 2z = 156

O valor de x é:

a) 20

b) 22

c) 24

d) 26

e) 28

COMENTÁRIO

Letra c.

É uma questão interessante para treinarmos a Regra de Cramer. Primeiramente, vamos escrever a matriz principal do sistema.

$$x + 2y + 3z = 160$$

$$2x + 3y + z = 140$$

$$3x + y + 2z = 156$$

Dessa forma, a matriz principal é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular o seu determinante.

$$A = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \qquad\qquad + \quad + \quad +$$

$$\det(A) = 1.3.2 + 2.1.3 + 3.2.1 - 1.1.1 - 2.2.2 - 3.3.3$$

$$\det(A) = 6 + 6 + 6 - 1 - 8 - 27 = -18$$

Façamos o mesmo para a matriz auxiliar A_x, que pode ser obtida substituindo-se a coluna dos coeficientes da incógnita x pelos coeficientes independentes.

$$A_x = \begin{bmatrix} 160 & 2 & 3 \\ 140 & 3 & 1 \\ 156 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vamos aplicar a Regra de Sarrus.

$$A_x = \left|\begin{matrix} 160 & 2 & 3 \\ 140 & 3 & 1 \\ 156 & 1 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 160 & 2 \\ 140 & 3 \\ 156 & 1 \end{matrix}$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

Tomemos o determinante.

$$\det(A_x) = 160.3.2 + 2.1.156 + 3.140.1 - 3.3.156 - 160.1.1 - 2.140.2$$

$$\det(A_x) = 960 + 312 + 420 - 1404 - 160 - 560$$

$$\det(A_x) = 1692 - 2124 = -432$$

Portanto, o valor de x é:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-432}{-18} = 24$$

QUESTÃO 25 (ESAF/AFRFB/2012) Considere o sistema de equações lineares dado por:

x + y + z = 0

x − y + rz = 2

rx + 2y + z = -1

Sabendo-se que o sistema tem solução única para $r \neq 0 \; e \; r \neq 1$, então, o valor de x é igual a:

a) 2/r

b) -2/r

c) 1/r

d) -1/r

e) 2r

COMENTÁRIO

Letra d.

Obteremos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & r \\ r & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & r \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

A solução é dada pela razão de determinantes:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)}$$

Vamos calcular os determinantes necessários:

$$\det(A_x) = \left| \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & r \\ -1 & 2 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{matrix}$$

$$\det(A_x) = 0.(-1).1 + 1.r.(-1) + 1.2.2 - 1.(-1).(-1) - r.2.0 - 1.1.2$$

$$\det(A_x) = 0 - r + 4 - 1 - 0 - 2 = 1 - r$$

$$\det(A) = \left| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & r \\ r & 2 & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ r & 2 \end{matrix}$$

$$\det(A) = 1.(-1).1 + 1.r.r + 1.1.2 - 1.(-1).r - r.2.1 - 1.1.1$$

$$\det(A) = -1 + r^2 + 2 + r - 2r - 1 = r^2 - r$$

Agora, façamos a razão:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{1 - r}{r^2 - r} = \frac{1 - r}{r(r-1)} = -\frac{1}{r}$$

QUESTÃO 26 (ESAF/AFRFB/2009) Com relação ao sistema:

$$x + y + z = 1$$

$$\frac{2x - y}{3z + 2} = \frac{z + 1}{2x + y} = 1$$

Onde $3z + 2 \neq 0 \; e \; 2x + y \neq 0$, pode-se, com certeza, afirmar que:

a) É impossível

b) É indeterminado

c) Possui determinante igual a 4

d) Possui apenas a solução trivial.

e) É homogêneo.

COMENTÁRIO

Letra c.

O sistema veio bastante desarrumado. Precisamos arrumar as suas equações:

$$x + y + z = 1$$

$$\frac{2x - y}{3z + 2} = \frac{z + 1}{2x + y} = 1$$

$$\therefore \frac{2x - y}{3z + 2} = 1 \therefore 2x - y = 3z + 2 \therefore 2x - y - 3z = 2$$

$$\therefore \frac{z + 1}{2x + y} = 1 \therefore z + 1 = 2x + y \therefore 2x + y - z = 1$$

Temos, portanto, o sistema de três equações e três incógnitas:

$$x + y + z = 1$$

$$2x - y - 3z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

Podemos obter a matriz principal do sistema:

$$\det(A) = 1.(-1).(-1) + 1.(-3).(2) + 1.2.(1) - 1.(-1).(2) - (-3).(-1).(-1) - 1.1.(-2)$$

$$\det(A) = +1 - 6 + 2 + 2 + 3 + 2 = 10 - 6 = 4$$

QUESTÃO 27 (CESPE/INMETRO/2010/TÉCNICO EM METROLOGIA) Um técnico é incumbido de examinar alguns lotes de instrumentos de medida. Em cada lote, ele separa os instrumentos descalibrados dos sem defeito. Em determinado lote, ele verifica que o número de instrumentos sem defeito, *x*, e o número de instrumentos descalibrados, *y*, são as soluções do sistema linear

$$3x + 2y = 48$$
$$x + ay = 44$$

Nessa situação, sabendo-se que o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema é igual a 7, é correto afirmar que o número de instrumentos examinados nesse lote foi:

a) 24
b) 23
c) 22
d) 21
e) 20

COMENTÁRIO

Letra e.

A matriz principal do sistema é:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & a \end{bmatrix} \therefore \det(A) = 7 \therefore \det(A) = 3.a - 2.1 = 3a - 2 = 7$$

$$\therefore 3a = 7 + 2 = 9 \therefore a = \frac{9}{3} = 3$$

Existem várias formas de resolver o sistema. Queremos saber o total dos instrumentos examinados, ou seja, x + y. Podemos utilizar a técnica de cálculo com os determinantes.

$$A_x = \begin{bmatrix} 48 & 2 \\ 44 & 3 \end{bmatrix} \therefore \det(A_x) = 3.48 - 2.44 = 144 - 88 = 56$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 3 & 48 \\ 1 & 44 \end{bmatrix} \therefore \det(A_y) = 3.44 - 1.48 = 132 - 48 = 84$$

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{56}{7} = 8$$

$$y = \frac{\det\,(A_y)}{\det(A)} = \frac{84}{7} = 12$$

$$\therefore x + y = 8 + 12 = 20$$

Outra forma de resolver o problema seria trabalhar com as equações para fazer aparecer diretamente a soma x + y. Vejamos.

$$3x + 2y = 48$$

$$x + 3y = 44$$

Podemos multiplicar por dois a primeira a equação

$$6x + 4y = 96$$

$$x + 3y = 44$$

Agora, basta somar as duas equações:

$$7x + 7y = 96 + 44 = 140$$

$$x + y = 140/7 = 20$$

Questão 28 (FUMARC/SEE-MG/2018/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Para o início do ano letivo, a mãe de Luiza foi à papelaria e comprou 10 canetas, 10 borrachas e 10 lápis, pagando R$ 23,00. A mãe de Larissa foi à mesma papelaria e adquiriu 8 canetas, 4 borrachas e 20 lápis, gastando R$ 22,00. Também nessa loja, a mãe das gêmeas Larissa e Melissa adquiriu 18 canetas, 14 borrachas e 15 lápis, dos mesmos tipos dos outros, e pagou R$ 36,00.

Se a mãe de Fernanda for à mesma papelaria e comprar 20 canetas, 5 borrachas e 30 lápis, de quanto será a sua despesa?

a) R$ 29,00
b) R$ 32,50
c) R$ 38,50
d) R$ 42,00
e) R$ 48,00

COMENTÁRIO

Letra c.

Essa é uma questão longa para treinarmos a Regra de Cramer. Montemos o sistema.

$$10C + 10B + 10L = 23$$

$$8C + 4B + 20L = 22$$

$$18C + 14B + 15L = 36$$

As matrizes A e B correspondentes ao sistema são:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 8 & 4 & 20 \\ 18 & 14 & 15 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 23 \\ 22 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, podemos obter as matrizes auxiliares:

$$A_C = \begin{bmatrix} 23 & 10 & 10 \\ 22 & 4 & 20 \\ 36 & 14 & 15 \end{bmatrix}, A_B = \begin{bmatrix} 10 & 23 & 10 \\ 8 & 22 & 20 \\ 18 & 36 & 15 \end{bmatrix}, A_L = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 23 \\ 8 & 4 & 22 \\ 18 & 14 & 36 \end{bmatrix}$$

Agora, passemos aos cálculos dos determinantes. Primeiramente, precisamos calcular o determinante da matriz principal.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 8 & 4 & 20 \\ 18 & 14 & 15 \end{vmatrix} \begin{matrix} 10 & 10 \\ 8 & 4 \\ 18 & 14 \end{matrix}$$

$$\det(A) = 10.4.15 + 10.20.18 + 10.8.14 - 10.4.18 - 10.20.14 - 10.8.15$$

$$\det(A) = 600 + 3600 + 1120 - 720 - 2800 - 1200 = 600$$

$$\det(A_C) = \begin{vmatrix} 23 & 10 & 10 \\ 22 & 4 & 20 \\ 36 & 14 & 15 \end{vmatrix} \begin{matrix} 23 & 10 \\ 22 & 4 \\ 36 & 14 \end{matrix}$$

$$\det(A_C) = 23.4.15 + 10.20.36 + 10.22.14 - 36.4.10 - 14.20.23 - 15.22.10$$

$$\det(A_C) = 1380 + 7200 + 3080 - 1440 - 6440 - 3300 = 480$$

A matriz A_B.

$$\det(A_B) = \begin{vmatrix} 10 & 23 & 10 \\ 8 & 22 & 20 \\ 18 & 36 & 15 \end{vmatrix} \begin{matrix} 10 & 23 \\ 8 & 22 \\ 18 & 36 \end{matrix}$$

$$\det(A_B) = 10.22.15 + 23.20.18 + 10.8.36 - 10.22.18 - 10.20.36 - 23.8.15$$

$$\det(A_B) = 3300 + 8280 + 2880 - 3960 - 7200 - 2760 = 540$$

A matriz A_L.

$$\det(A_L) = \begin{vmatrix} 10 & 10 & 23 \\ 8 & 4 & 22 \\ 18 & 14 & 36 \end{vmatrix} \begin{matrix} 10 & 10 \\ 8 & 4 \\ 18 & 14 \end{matrix}$$

$$\det(A_L) = 10.4.36 + 10.22.18 + 23.8.14 - 23.4.18 - 10.22.14 - 10.8.36$$

$$\det(A_L) = 1440 + 3960 + 2576 - 1656 - 3080 - 2880 = 240$$

Dessa forma, podemos calcular os preços das canetas, borrachas e lápis.

$$C = \frac{\det(A_C)}{\det(A)} = \frac{480}{600} = R\$0{,}80$$

$$B = \frac{\det(A_B)}{\det(A)} = \frac{540}{600} = \frac{9}{10} = R\$0{,}90$$

$$L = \frac{\det(A_L)}{\det(A)} = \frac{360}{600} = \frac{6}{10} = R\$0{,}60$$

Por fim, vamos calcular o total gasto na compra desejada de 20 canetas, 5 borrachas e 30 lápis.

$$S = 20.0{,}80 + 5.0{,}90 + 30.0{,}60 = 16 + 4{,}5 + 18 = 38{,}5$$

QUESTÕES COMENTADAS EM AULA

QUESTÃO 1 (FGV/PREFEITURA DE SALVADOR/BA/2019/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Considere as matrizes A_{2x3} e B_{2x2}.

Sobre essas matrizes é correto afirmar que

a) Existe a soma A + B e é uma matriz 4x5.

b) Existe o produto AB e é uma matriz 4x6.

c) Existe o produto BA e é uma matriz 4x6.

d) Não existe o produto AB.

e) Não existe o produto BA.

QUESTÃO 2 (IBFC/PC-PR/2017/PERITO CRIMINAL) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, assinale a alternativa que apresenta a matriz C que representa a soma das matriz A e B, ou seja, C = A + B:

QUESTÃO 3 (IBFC/PC-PR/2017/PERITO CRIMINAL) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ e a matriz matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, assinale a alternativa que apresenta a matriz C que representa a subtração das matriz A e B, ou seja, C = A – B:

QUESTÃO 4 (CESPE/SEDF/2017) Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 40 \end{bmatrix}$ julgue o próximo item.

Se B = $B = \begin{bmatrix} 0 & x & -7 \\ 1 & 0 & z \\ y & 10 & 0 \end{bmatrix}$ e a matriz A + B for simétrica, então x + y + z = 0.

QUESTÃO 5 (IADES/CRF/TP/2019/ANALISTA DE TI) Suponha que, na Comissão de Farmácia Hospitalar do Conselho Federal de Farmácia, existam 5 computadores e 3 impressoras. Um sistema foi desenvolvido para controlar o número de páginas impressas diariamente. Esse sistema registra o número de páginas impressas em uma matriz $A = (a_{ij})_{5\times3}$ na qual cada elemento aij registra o número de páginas enviadas pelo computador i para a impressora j. Ao final de determinado dia, verificou-se o registro da matriz, conforme apresentado.

$$A = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array}}^{impressoras} \\ \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 \\ 2 & 0 & 25 \\ 0 & 3 & 7 \\ 10 & 13 & 16 \\ 5 & 0 & 30 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ computador\ 1 \\ computador\ 2 \\ computador\ 3 \\ computador\ 4 \\ computador\ 5 \end{array}$$

Como exemplo, nesse dia, o computador 1 imprimiu 10 páginas na impressora 2. O total de páginas impressas pelos computadores 2, 3 e 5 na impressora 3 foi igual a

a) 55.

b) 62.

c) 67.

d) 72.

e) 80.

Questão 6 (IADES/CAU-RO/2018/ARQUITETO E URBANISTA) Suponha que, no CAU-RO, cinco conselheiros foram eleitos para o Conselho Diretor. Na primeira reunião do conselho, eles deveriam eleger entre si um presidente; para tanto, fizeram uma eleição em que cada um deveria votar em outro conselheiro e não poderia votar em si mesmo. Cada um dos cinco conselheiros foi identificado com um número de 1 a 5, e os votos foram representados na matriz A = $(aij)_{5x5}$ apresentada, na qual, para $i \neq j$, se o conselheiro i votar no conselheiro j, e $a_{ij} = 1$; caso contrário, $a_{ij} = 0$. Com base nessas informações, o conselheiro que foi eleito presidente foi o identificado com o número

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) 5.

b) 1.

c) 3.

d) 2.

e) 4.

Questão 7 (CESPE/IFF/2018) Considere que k seja um número real e que o determinante da matriz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & k \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ seja igual a 27. Nesse caso, se $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$, então o determinante da matriz B – A, será igual a:

a) 30

b) 0

c) 3

d) 6

e) 10

Questão 8 (CESPE/SEDUC-AL/2018/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Se *a* é um número real e se o determinante da matriz $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ for igual a zero, então *a* = -2 ou *a* = 1.

Questão 9 (ESAF/DNIT/2013/TÉCNICO ADMINISTRATIVO) Os elementos de uma matriz A3X2, isto é, com três linhas e duas colunas, são dados por:

$$a_{ij} = \begin{Bmatrix} (i+j)^2 & , se\ i = j \\ i^2 + j^2 & , se\ i \neq j \end{Bmatrix}$$

Em que a_{ij} representa o elemento da matriz $A3_{X2}$ localizado na linha *i* e coluna *j*. Então, a soma dos elementos da primeira coluna de A_{3X2} é igual a:

a) 17

b) 15

c) 12

d) 19

e) 13

Questão 10 (CESPE/SE-DF/2017) Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 40 \end{bmatrix}$, julgue o próximo item. A matriz A é inversível.

Questão 11 (ESAF/AFRFB/2014) A matriz quadrada A, definida genericamente por A = aij, é dada por a11 = 0; a12 = – 4; a13 = 2; a21 = x; a22 = 0; a23 = (1 − z); a31 = y; a32 = 2z e, por último, a33 = 0. Desse modo, para que a matriz A seja uma matriz antissimétrica, os valores de a21, a23, a31 e a32 deverão ser, respectivamente, iguais a:

a) 4; -2; -2; -2.

b) 4; -2; 2; -2.

c) 4; 2; -2; -2.

d) -4; -2; 2; -2.

e) -4; -2; -2; -2.

Questão 12 (IBFC/PC-PR/2017/PERITO CRIMINAL) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, assinale a alternativa que apresenta a matriz C que representa a subtração das matriz A e B, ou seja, C = AB:

Questão 13 (IBFC/PC-PR/2017/PERITO CRIMINAL/ADAPTADA) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, determine o elemento d_{21} da matriz D = BA

Questão 14 (CESPE/SEDUC-AL/2018/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Julgue o item que se segue, relativo a matriz e sistema linear.

Se *a* é um número real e se o determinante da matriz for igual a zero, então, a = -2 ou a = 1.

$$P = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Questão 15 (FGV/SAD-PE/ANALISTA DE CONTROLE INTERNO/FINANÇAS PÚBLICAS/2009) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e seja n um número natural maior que 1. Na matriz A^{2n}, o elemento que ocupa a 1ª linha e 2ª coluna é:

a) -1

b) 0

c) 1

d) n

e) 2n

QUESTÃO 16 (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018/ENGENHEIRO JÚNIOR) Considere a matriz A apresentada a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Qual é o valor do determinante dessa matriz?

a) -36

b) -27

c) -15

d) +18

e) +45

QUESTÃO 17 (CESGRANRIO/PETROBRAS/2018/TÉCNICO DE ADMINISTRAÇÃO E CONTROLE JÚNIOR) Sejam A uma matriz quadrada de ordem 2 e B uma matriz quadrada de ordem 3, tais que detA. detB = 1. O valor de det(3A). det(2B) é:

a) 5

b) 6

c) 36

d) 72

e) 108

Questão 18 (CESPE/SEDUC-AL/2018/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Se a é um número real e se o determinante da matriz $P = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ for igual a zero, então a = -2 ou a = 1.

Questão 19 (ESAF/AFRFB/2012) As matrizes, A, B, C e D são quadradas de quarta ordem. A matriz B é igual a 1/2 da matriz A, ou seja: b = 1/2 A. A matriz C é igual a matriz transposta de B, ou seja: c = B^t. A matriz D é definida a partir da matriz C; a única diferença entre essas duas matrizes é que a matriz D tem como primeira linha a primeira linha de C multiplicada por 2. Sabendo-se que o determinante da matriz A é igual a 32, então a soma dos determinantes das matrizes B, C e D é igual a:

a) 6
b) 4
c) 12
d) 10
e) 8

Questão 20 (ESAF/MF/2009/TÉCNICO ADMINISTRATIVO) Seja uma matriz quadrada 4 por 4. Se multiplicarmos os elementos da segunda linha da matriz por 2 e dividirmos os elementos da terceira linha da matriz por -3, o determinante da matriz fica:

a) Multiplicado por -1.
b) Multiplicado por -16/81.
c) Multiplicado por 2/3.
d) Multiplicado por 16/81.
e) Multiplicado por -2/3.

Questão 21 (ESAF/MF/2017/ASSISTENTE TÉCNICO ADMINISTRATIVO) Dadas as matrizes

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ calcule o determinante do produto AB:

a) 8

b) 12

c) 9

d) 15

e) 6

Questão 22 (ESAF/ANAC/2016/TÉCNICO ADMINISTRATIVO) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, o determinante da matriz 2A é igual a:

a) 40

b) 10

c) 18

d) 16

e) 36

Questão 23 (ESAF/ATRFB/2012) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, o determinante de A^5 é igual a:

a) 20

b) 28

c) 32

d) 30

e) 25

Questão 24 (FGV/AL-RO/2018/ANALISTA LEGISLATIVO/MATEMÁTICA) Considere o sistema linear:

x + 2y + 3z = 160

2x + 3y + z = 140

3x + y + 2z = 156

O valor de x é:

a) 20

b) 22

c) 24

d) 26

e) 28

Questão 25 (ESAF/AFRFB/2012) Considere o sistema de equações lineares dado por:

$$x + y + z = 0$$

$$x - y + rz = 2$$

$$rx + 2y + z = -1$$

Sabendo-se que o sistema tem solução única para $r \neq 0 \; e \; r \neq 1$, então, o valor de x é igual a:

a) 2/r

b) -2/r

c) 1/r

d) -1/r

e) 2r

Questão 26 (ESAF/AFRFB/2009) Com relação ao sistema:

$$x + y + z = 1$$

$$\frac{2x - y}{3z + 2} = \frac{z + 1}{2x + y} = 1$$

Onde $3z + 2 \neq 0 \; e \; 2x + y \neq 0$, pode-se, com certeza, afirmar que:

a) É impossível

b) É indeterminado

c) Possui determinante igual a 4

d) Possui apenas a solução trivial.

e) É homogêneo.

Questão 27 (CESPE/INMETRO/2010/TÉCNICO EM METROLOGIA) Um técnico é incumbido de examinar alguns lotes de instrumentos de medida. Em cada lote, ele separa os instrumentos descalibrados dos sem defeito. Em determinado lote, ele verifica que o número de instrumentos sem defeito, *x*, e o número de instrumentos descalibrados, *y*, são as soluções do sistema linear

$$3x + 2y = 48$$

$$x + ay = 44$$

Nessa situação, sabendo-se que o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema é igual a 7, é correto afirmar que o número de instrumentos examinados nesse lote foi:

a) 24

b) 23

c) 22

d) 21

e) 20

Questão 28 (FUMARC/SEE-MG/2018/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Para o início do ano letivo, a mãe de Luiza foi à papelaria e comprou 10 canetas, 10 borrachas e 10 lápis, pagando R$ 23,00. A mãe de Larissa foi à mesma papelaria e adquiriu 8 canetas, 4 borrachas e 20 lápis, gastando R$ 22,00. Também nessa loja, a mãe das gêmeas Larissa e Melissa adquiriu 18 canetas, 14 borrachas e 15 lápis, dos mesmos tipos dos outros, e pagou R$ 36,00.

Se a mãe de Fernanda for à mesma papelaria e comprar 20 canetas, 5 borrachas e 30 lápis, de quanto será a sua despesa?

a) R$ 29,00

b) R$ 32,50

c) R$ 38,50

d) R$ 42,00

e) R$ 48,00

GABARITO

1. d
2. 5, 4, 1; 1, 0, 1
3. 2, -2; 4, -5
4. C
5. b
6. d
7. d
8. C
9. d
10. d
11. c
12. 8, 10; 10, 16
13. 13
14. C
15. b
16. b
17. d
18. C
19. e
20. e
21. e
22. a
23. c
24. c
25. d
26. c
27. e
28. c

Thiago Cardoso

Engenheiro eletrônico formado pelo ITA com distinção em Matemática, analista-chefe da Múltiplos Investimentos, especialista em mercado de ações. Professor desde os 19 anos e, atualmente, leciona todos os ramos da Matemática para concursos públicos.

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES


LEI Nº 8.666/1993 - LICITAÇÃO
Avaliação
Comentário
Seu feedback é valioso. Você gostaria de deixar um comentário e assim nos ajudar a melhorar nossos produtos e serviços?
Obs: A avaliação da aula em pdf é exclusivamente pedagógica. Clique aqui para relatar problemas técnicos, pois serão desconsiderados deste canal.
Sim, salvar comentário.
Não, obrigado.
NÃO SE ESQUEÇA DE AVALIAR ESTA AULA!
SUA OPINIÃO É MUITO IMPORTANTE PARA MELHORARMOS AINDA MAIS NOSSOS MATERIAIS.
ESPERAMOS QUE TENHA GOSTADO DESTA AULA!
PARA AVALIAR, BASTA CLICAR EM LER A AULA E, DEPOIS, EM AVALIAR AULA.
AVALIAR