PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Distribuição de Probabilidade

Livro Eletrônico

GRAN CURSOS ONLINE

SUMÁRIO

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

APRESENTAÇÃO

Nessa aula, vamos falar sobre as distribuições de probabilidade contínuas e discretas.

Vamos estudar várias distribuições de probabilidade. Porém, eu gostaria de pontuar que as distribuições mais importantes são: Bernoulli, Binomial e Normal. Portanto, essas serão as distribuições estudadas mais profundamente nesse material.

As demais distribuições costumam aparecer somente nas provas específicas da área de estatística. Porém, quando o edital fala apenas em "Distribuições de Probabilidade", elas podem teoricamente ser cobradas. Por isso, coloquei-as nesse material.

Por fim, gostaria de lembrá-lo de me seguir no Instagram (@math.gran), que é onde eu sempre posto muitas dicas de Matemática.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

1. Distribuições de Probabilidade

A primeira distinção importante que o aluno deve saber é a respeito da diferença entre distribuições discretas e contínuas de probabilidade.

Para isso, vamos revisar a diferença entre variáveis discretas e contínuas.

Por sua vez, as variáveis quantitativas podem ser classificadas em:

- **Discretas:** o conjunto de possíveis resultados é enumerável. Ex.: número de filhos (0, 1, 2, 3 etc.); número de alunos em uma sala de aula (0, 1, 2, 3 etc.);
- **Contínuas:** podem assumir qualquer número real, inclusive, números fracionais e irracionais. **Ex.:** nível de açúcar no sangue, altura.

Um conjunto enumerável pode ser entendido como um conjunto que pode ser associado aos números naturais. Dessa forma, existe o primeiro, o segundo, o terceiro etc.

Uma variável discreta só pode assumir um conjunto enumerável de valores. É o caso do número de filhos de uma pessoa. Uma pessoa pode ter 0 filhos, 1 filho, 2 filhos, mas não pode ter 2½ filhos (dois filhos e meio).

Por outro lado, uma variável contínua pode assumir qualquer valor em um intervalo de números reais. Por exemplo, a altura de uma pessoa pode ser 2m, mas também pode ser 1,57m, pode ser também 1,837m. E, assim, por diante.

1.1. Distribuições Discretas

Uma distribuição discreta de probabilidade é chamada de **função distribuição de probabilidade ou função massa de probabilidade**. Isso significa que ela define a **probabilidade exata** de ocorrência de um fenômeno.

É importante destacar que as **distribuições de probabilidade** **somente** se aplicam a **variáveis discretas.**

Por exemplo, suponha que a probabilidade de que um casal tenha uma certa quantidade de filhos seja descrita pela seguinte distribuição de probabilidades.

Número de Filhos	Probabilidade
0	0,10
1	0,50
2	0,20
3	0,10
4	0,05
5	0,03
6	0,02

Tabela 1: Distribuição de Probabilidade para o Número de Filhos de um Casal

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Nessa tabela, temos:

- P{X = 1} = 0,50: o que significa que a probabilidade de que um casal tenha **exatamente** um filho é de 0,50 ou 50%;
- P{X = 2} = 0,20: o que significa que a probabilidade de que um casal tenha **exatamente** dois filhos é de 0,20 ou 20%.

E, assim, por diante.

É importante observar que o número de filhos é variável discreta. Um casal pode ter 1 filho, 2 filhos, 3 filhos, mas não pode ter 1,5 filho nem 2,27 filhos. O número de filhos de um casal é sempre um número inteiro.

A palavra "**exatamente**" é muito importante, pois é ela que vai diferenciar esse tipo de distribuição das distribuições contínuas e é algo que você precisa compreender bem.

Além disso, tem-se duas relações importantes a respeito de distribuições discretas. A primeira é uma condição de validade.

1.1.1. Condição de Validade

A condição de validade é uma **exigência** para que a **distribuição seja válida**. Assim, todas as distribuições discretas devem atender a essa condição. Ela decorre diretamente dos Axiomas de Kolgomorov: **o somatório de todas as probabilidades deve ser igual a 1 (ou 100%).**

Matematicamente, podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\{X = i\} = 1$$

A distribuição da Tabela 1, de fato, atende a essa condição:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\{X = i\} = 0{,}10 + 0{,}50 + 0{,}20 + 0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}03 + 0{,}02 = 1{,}00$$

Direto do Concurso

001. (FCC/TRF-4ª REGIÃO/2010/ANALISTA JUDICIÁRIO/ÁREA ADMINISTRATIVA) O número de televisores vendidos diariamente em uma loja apresenta a seguinte distribuição de probabilidades de venda:

Nº de televisores	0	1	2	3	4	5
Probabilidades	x	3y	z	z	2y	x

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

A probabilidade de que, em um determinado dia, não seja vendido nenhum televisor é igual a 10% e de que seja vendido mais que 3 é igual a 30%. Então, a probabilidade de que em um determinado dia sejam vendidos 2 televisores é de:

a) 10%
b) 12%
c) 15%
d) 18%
e) 20%

A probabilidade de que não seja vendido nenhum televisor é igual a x. Portanto, x = 10%. Além disso, a probabilidade de que sejam vendidos mais que 3 é:

$$P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) = 2y + x = 30\%$$

$$2y + 10\% = 30\% \therefore 2y = 30\% - 10\% = 20\%$$

$$\therefore y = \frac{20\%}{2} = 10\%$$

Finalmente, como condição de validade, temos que a soma de todas as probabilidades de venda devem ser iguais a 1.

$$x + 3y + z + z + 2y + x = 100\%$$

$$2x + 5y + 2z = 100\%$$

$$2.10\% + 5.10\% + 2z = 100\%$$

$$20\% + 50\% + 2z = 100\%$$

$$2z = 100\% - 50\% - 20\% = 30\%$$

$$z = \frac{30\%}{2} = 15\%$$

A probabilidade de vender exatamente 2 televisores é, portanto, z = 15%.

Letra c.

1.1.2. Valor Esperado

Outra definição extremamente importante é **o valor esperado, esperança** ou **média** da distribuição que é dado por:

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} kp(k)$$

Desse modo, para calcular o valor esperado de uma distribuição de probabilidades, basta pegar o somatório das probabilidades multiplicadas pelos valores a ela associados. Vejamos como exemplo a Tabela 1

que indica o número de filhos do casal.

$$E[X] = 0.0{,}10 + 1.0{,}50 + 2.0{,}20 + 3.0{,}10 + 4.0{,}05 + 5.0{,}03 + 6.0{,}02 = 1{,}67$$

Assim, a média de filhos por casal é de 1,67 com base na distribuição estudada.

Também podemos calcular a variância da distribuição com base na relação que estudamos no capítulo de Variância e Desvio Padrão. A variância de uma distribuição é igual a média dos quadrados menos o quadrado da média.

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Basta, agora, calcular o valor esperado de X² que pode ser facilmente obtido olhando os dados da tabela.

Número de Filhos (X)	Probabilidade	X²
0	0,10	0
1	0,50	1
2	0,20	4
3	0,10	9
4	0,05	16
5	0,03	25
6	0,02	36

Para calcular a média dos quadrados, podemos recorrer à mesma técnica que vimos anteriormente: basta multiplicar os valores possíveis de X² pelas probabilidades a eles associadas.

$$E[X^2] = 0.0{,}10 + 1.0{,}50 + 4.0{,}20 + 9.0{,}10 + 16.0{,}05 + 25.0{,}03 + 36.0{,}02$$

$$\therefore E[X^2] = 4{,}47$$

De posse da média dos quadrados, podemos aplicar a expressão da variância:

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$Var(X) = 4{,}47 - (1{,}67)^2 = 4{,}47 - 2{,}7889 = 1{,}6811$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Podemos, por fim, calcular o desvio-padrão como a raiz quadrada da variância:

$$\sigma = \sqrt{Var} = \sqrt{1{,}6811} \approx 1{,}30$$

E, agora, vamos treinar com questões de prova?

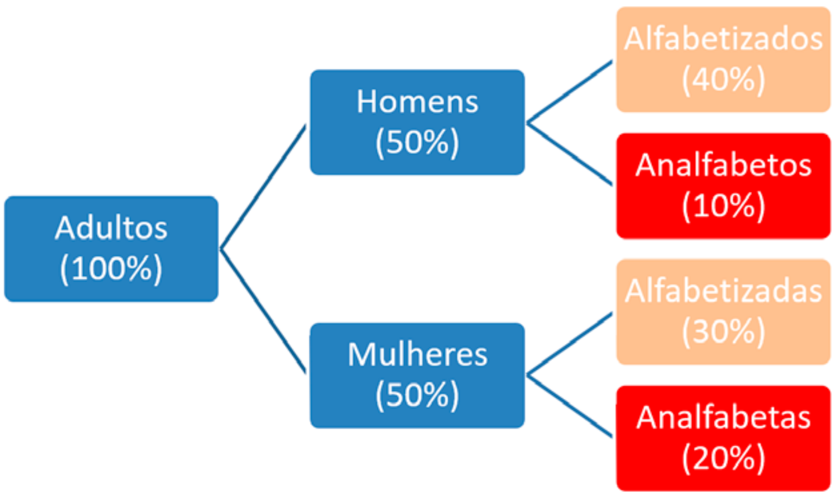
DIRETO DO CONCURSO

002. (FCC/TRT-9ª REGIÃO/PR/2010/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Em uma população suponha que:

- 80% dos adultos do sexo masculino sejam alfabetizados;
- 60% dos adultos do sexo feminino sejam alfabetizados.

A proporção de adultos do sexo masculino e feminino é igual.
Sorteando-se ao acaso e com reposição uma amostra de 3 pessoas desta população, a probabilidade de se encontrar pelo menos uma alfabetizada na amostra é:
a) 0,875
b) 0,895
c) 0,927
d) 0,973
e) 0,985

Aqui é interessante utilizar o conceito de probabilidade complementar. O único caso que não nos interessa é se tivermos 3 pessoas analfabetas na amostra.
A probabilidade de uma pessoa qualquer ser analfabeta é dada pela região vermelha.



A probabilidade de, em uma amostra de 3 pessoas, as 3 serem analfabetas é:

0,30	0,30	0,30	$=(0{,}30)^3 = 0{,}027$
Analfabeto	**Analfabeto**	**Analfabeto**	**Total**

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Sendo assim, a probabilidade de ter pelo menos uma pessoa alfabetizada é a complementar.

$$P = 1 - 0{,}027 = 0{,}973$$

Letra d.

---

003. (FCC/MPU/2007/ANALISTA DE DOCUMENTAÇÃO) Em uma livraria 4 livros didáticos com defeito foram misturados a outros 16 livros sem defeito. Um professor foi à livraria e escolheu, aleatoriamente, 4 desses livros para presentear seus alunos. A probabilidade de ter escolhido 3 livros com defeito é:

a) $\dfrac{\binom{4}{3}\binom{16}{1}}{\binom{20}{4}}$

b) $\dfrac{\binom{16}{3}\binom{4}{1}}{\binom{20}{4}}$

c) $\binom{16}{4}(0{,}8)^4(0{,}2)^{12}$

d) $\binom{20}{4}(0{,}8)^4(0{,}2)^{16}$

e) $\binom{16}{3}(0{,}8)^4(0{,}2)^{12}$

Tem-se um total de 20 livros. Como o professor vai escolher 4 desses livros, o total de formas de escolher 4 livros dentre 20 é:

$$\#Total = \binom{20}{4}$$

No entanto, queremos escolher 3 livros dentre os 4 que apresentam defeito **E** um livro dentre os 15 que não apresentam defeito. Portanto, o número e eventos favoráveis é:

$$\#Favoráveis = \binom{4}{3}\binom{16}{1}$$

Sendo assim, usando o conceito clássico de probabilidade:

$$P = \frac{\#Favoráveis}{\#Total} = \frac{\binom{4}{3}\binom{16}{1}}{\binom{20}{4}}$$

Letra a.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

004. (FCC/TRT-9ª REGIÃO/PR/2010/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Em um lote de 8 peças, há duas defeituosas e 6 boas. Escolhendo-se ao acaso 3 peças do lote, a probabilidade de se encontrar no máximo uma defeituosa é:

a) 13/56
b) 2/5
c) 25/28
d) 5/14
e) 15/28

Queremos no máximo uma defeituosa, ou seja, sendo X o número de peças com defeito, queremos:

$$P = P(X = 0) + P(X = 1)$$

É importante destacar que, quando retiramos peças do lote, modificamos a probabilidade de que a próxima peça seja defeituosa. Sendo assim, temos:

Para o cálculo de P(X=0), temos que existem 6 peças boas entre 8 no total. Depois de tirar uma peça boa, sobram 5 boas e 7 no total. Depois de tirar a segunda peça boa, sobram 4 boas e 6 no total.

6/8	5/7	4/6	$=\frac{6}{8}.\frac{5}{7}.\frac{4}{6}=\frac{5}{14}$
Boa	**Boa**	**Boa**	**Total**

Para o cálculo de P(X=1), temos:

$P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$	2/8	6/7	5/6	$= 3.\frac{2}{8}.\frac{6}{7}.\frac{5}{6}=\frac{15}{28}$
Permutações	**Defeituosa**	**Boa**	**Boa**	**Total**

Agora, podemos calcular a probabilidade desejada:

$$P = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{5}{14} + \frac{15}{28} = \frac{10 + 15}{28} = \frac{25}{28}$$

Letra c.

005. (FCC/TRT-9ª REGIÃO/PR/2010/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Em um pequeno grupo de casais, X e Y são as variáveis aleatórias que representam a renda, em milhares de reais, do marido e de sua esposa, respectivamente. A distribuição de probabilidade conjunta de X e Y é dada na tabela abaixo:

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Y \ X	3	4
2	4p	3p
3	2p	p

Seja Z = 0,7X + 0,8Y a renda do casal após a dedução de impostos. A média de Z, em milhares de reais, é:

a) 4,10
b) 4,22
c) 4,56
d) 4,84
e) 5,04

Em primeiro lugar, vamos calcular p. Devemos partir do princípio que a soma de todas as probabilidades é igual a 1.

$$4p + 3p + 2p + p = 1$$

$$10p = 1 \therefore p = \frac{1}{10} = 0{,}10 = 10\%$$

Agora, podemos montar uma tabela com os valores de Z e suas probabilidades associadas:

X	Y	Z	P(Z)
3	2	0,7.3 + 0,8.2 = 3,7	0,40
4	2	0,7.4 + 0,8.2 = 4,4	0,30
3	3	0,7.3 + 0,8.3 = 4,5	0,20
4	3	0,7.4 + 0,8.3 = 5,2	0,10

Portanto, podemos calcular o valor esperado de Z:

$$E[Z] = 0{,}40.3{,}7 + 0{,}30.4{,}4 + 0{,}20.4{,}5 + 0{,}10.5{,}2$$

$$E[Z] = 1{,}48 + 1{,}32 + 0{,}90 + 0{,}52$$

$$E[Z] = 4{,}22$$

Letra b.

A partir da próxima seção, nós vamos começar a estudar as distribuições de probabilidade. E, para aprender bem esse conteúdo, você precisa compreender os seguintes pontos sobre cada distribuição estudada:

- As hipóteses em que essa distribuição é aplicada;

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

- A expressão geral e como obter cada valor de probabilidade;
- A média e a variância das distribuições.

Então, é exatamente nisso que vamos focar. Vamos em frente?

1.2. Estimador de Máxima Verossimilhança

O estimador de máxima verossimilhança toma a amostra obtida como sendo **a mais provável** de se obter a partir da população original. Em outras palavras, o estimador toma a amostra obtida **como representativa da população.**

O primeiro caso de estimador de máxima verossimilhança que nós já estudamos no capítulo sobre Desvio Padrão é para o cálculo do desvio padrão amostral. Nesse caso, como a amostra é considerada como representativa da população como um todo, não é feito nenhum ajuste para o cálculo da variância amostral. Sendo assim, não é utilizado aquele famoso N-1 no denominador.

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N}}$$

Deve-se utilizar as mesmas expressões para o cálculo da variância populacional, sem fazer nenhum ajuste. Porém, o estimador não-viesado para a variância populacional possui N-1 no denominador, e não N.

Portanto, **o estimador de máxima verossimilhança para a variância é viesado.** Em outras palavras, ele não tende para o real valor do parâmetro variância, mas sim para um valor ligeiramente diferente.

Nas questões em que é dada uma amostra e que se deseja calcular o desvio padrão, é importante observar o enunciado da questão e verificar se ele pede "o estimador não tendencioso" ou "o estimador de máxima verossimilhança".

Se o enunciado pede o estimador não tendencioso, é preciso utilizar o N – 1 no denominador; se o enunciado pede o estimador de máxima verossimilhança, não se utiliza o fator de ajuste e se coloca simplesmente N no denominador.

Vamos rever um exemplo.

Direto do Concurso

006. (CESPE/TCE-PA/2016/AUDITOR DE CONTROLE EXTERNO) Caso, em uma amostra aleatória de tamanho *n* = 4, os valores amostrados sejam A = {2, 3, 0, 1}, a estimativa de máxima verossimilhança para a variância populacional será igual a 5/3.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Na estimativa de máxima verossimilhança, não é feita nenhuma correção de ajuste.

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{(2-1{,}5)^2 + (3-1{,}5)^2 + (0-1{,}5)^2 + (1-1{,}5)^2}{4}$$

$$= \frac{(0{,}5)^2 + (1{,}5)^2 + (-1{,}5)^2 + (-0{,}5)^2}{4}$$

$$= \frac{0{,}25 + 2{,}25 + 2{,}25 + 0{,}25}{4} = \frac{5}{4}$$

Errado.

1.2.1. Aplicação para Distribuições de Probabilidade

O estimador de máxima verossimilhança é muito utilizado para estimar parâmetros de uma distribuição de probabilidades, técnica referenciada como **método dos momentos**.

Se desejamos obter a média e a variância populacional a partir de uma amostra, o estimador de máxima verossimilhança tomará os valores de μ e σ^2 que melhor expliquem aquela amostra.

Existem várias técnicas para obter tal estimativa, porém, em provas de concursos, o mais comum é simplesmente:

- **Média Populacional:** toma-se como a própria média amostral;
- **Desvio Padrão Populacional:** toma-se como o desvio padrão amostral calculado pela técnica de máxima verossimilhança, isto é, com N no denominador.

Caso seja fornecida uma distribuição conhecida – o que é o caso, na maioria das questões –, você utilizará as expressões daquela distribuição para o cálculo da variância com base na média.

O cálculo do desvio padrão só deve ser feito, caso realmente seja necessário para estimar os parâmetros da distribuição. No caso de distribuições com um único parâmetro, como a distribuição de Bernoulli e Poisson, o parâmetro deve ser obtido diretamente a partir da média populacional.

Não tente obter a variância da população a partir da variância populacional nessas situações. Calcule sempre o parâmetro a partir da média e, depois, utilize o parâmetro para calcular a variância da distribuição.

Por enquanto, não temos como resolver questões desse tipo, porque ainda não vimos nenhuma distribuição de probabilidade. Mas, fique tranquilo: em breve, teremos questões desse conteúdo.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

2. Distribuição de Bernoulli

A distribuição de Bernoulli é feita para eventos que tem apenas dois resultados possíveis. Por exemplo: sucesso ou falha, cara ou coroa, 0 ou 1.

Uma dica para reconhecer uma distribuição de Bernoulli é que ela sempre trabalha com proporções entre duas escolhas. São exemplos de variáveis aleatórias que seguem uma distribuição de Bernoulli:

- uma pessoa ser favorável ou não a um determinado projeto de lei;
- o percentual de votos de um candidato em uma eleição no segundo turno.

Suponha, por exemplo, que a probabilidade de uma pessoa ser favorável a um determinado projeto de lei seja igual a 60%. Nesse caso, quando um entrevistador for entrevistar uma pessoa, ele sabe que:

- a probabilidade de ela ser favorável ao projeto de lei é igual a 60%;
- a probabilidade de ela não ser favorável é igual a 40%.

Agora, vamos dar um trato matemático a essa distribuição de probabilidades. Ela se trata de uma distribuição bastante simples, com apenas duas probabilidades associadas.

$$P\{X = 0\} = 1 - p \text{ (falha)}$$
$$P\{X = 1\} = p \text{ (sucesso)}$$

Para calcular o valor esperado da distribuição, podemos recorrer à técnica de multiplicar o valor obtido pela probabilidade a ele associada. Assim, teremos:

$$E[X] = 0.(1-p) + 1.p = 0 + p$$

$$\therefore E[X] = p$$

Também podemos calcular a variância dessa distribuição. Para isso, vamos construir a distribuição para X^2:

$$P\{X^2 = 0\} = 1 - p \text{ (falha)}$$
$$P\{X^2 = 1\} = p \text{ (sucesso)}$$

Assim, a média dos quadrados da distribuição é:

$$E[X^2] = 0^2.(1-p) + 1^2.p = p$$

A variância da distribuição, por sua vez, é dada pela diferença entre a média dos quadrados e o quadrado da média. Assim, podemos escrever:

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

$$\therefore Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

$$\therefore Var(X) = p(1-p)$$

Direto do Concurso

007. (CESPE/TCE-PA/2016/AUDITOR DE CONTROLE EXTERNO) Considere um processo de amostragem de uma população finita cuja variável de interesse seja binária e assuma valor 0 ou 1, sendo a proporção de indivíduos com valor 1 igual a *p* = 0,3. Considere, ainda, que a probabilidade de cada indivíduo ser sorteado seja a mesma para todos os indivíduos da amostragem e que, após cada sorteio, haja reposição do indivíduo selecionado na amostragem.
A partir dessas informações, julgue o item subsequente.
Caso, em uma amostra de tamanho *n* = 10, os valores observados sejam A = {1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0}, a estimativa via estimador de máxima verossimilhança para a média populacional será igual a 0,4.

A estimativa de máxima verossimilhança toma a amostra obtida como representativa da população original. Portanto, a média populacional pode ser obtido como a média amostral.

$$\hat{\mu} = \frac{1+0+1+0+1+0+0+1+0+0}{10} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

Portanto, a afirmação está correta.
Vale observar que, caso a questão tivesse pedido a variância, não deveríamos calcular a variância amostral. Em vez disso, devemos utilizar a expressão conhecida para a distribuição de Bernoulli para calcular sua variância:

$$Var = p.(1-p) = 0{,}4.(1-0{,}4) = 0{,}4.0{,}6 = 0{,}24$$

Certo.

3. Distribuição Binomial

A distribuição binomial é uma das mais distribuições mais importantes e que devemos conhecer.

Ela pode ser considerada uma distribuição derivada da Bernoulli. Ela consiste em registrar as probabilidades de se obter **k** sucessos em **n** repetições de um experimento. Nessas repetições, os experimentos devem atender ao seguinte:

- cada repetição do experimento tem exclusivamente como resultado duas possibilidades, isto é, cada repetição individual do experimento é descrito por uma variável de Bernoulli;

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

- o resultado de cada tentativa é independente das demais;
- a probabilidade de sucesso a cada repetição do experimento é constante e igual a **p**;

Exemplo de uma variável que segue a distribuição binomial é uma pesquisa eleitoral em uma cidade muito grande. O objetivo dessa pesquisa é determinar, de um grupo de 5 pessoas, qual a probabilidade de que somente uma delas seja contrária ao projeto de lei.

Suponha que o percentual de pessoas favoráveis ao projeto de lei seja igual a 60%.

Quando a primeira pessoa é selecionada, a probabilidade de que ela seja favorável ao projeto de lei é 60%.

Como a população da cidade é muito grande, quando a segunda pessoa é selecionada, a probabilidade de que ela seja favorável também é igual a 60%. E, assim, sucessivamente.

3.1. Números Binomiais

O número binomial é essencial para o cálculo dos valores na distribuição binomial. Então, por isso, vamos aprendê-los nessa seção. E o primeiro passo para aprender esses números é aprender os fatoriais.

3.1.1. Números Fatoriais

Sendo **n** um número inteiro, um número fatorial **n!** é definido pela seguinte expressão:

$$0! = 1$$

$$n! = n.(n-1)!$$

De maneira simples, podemos entendê-lo como o produto de todos os números inteiros de 1 até n. Vejamos exemplos:

$$1! = 1.0! = 1$$

$$2! = 2.1! = 2.1 = 2$$

$$3! = 3.2! = 3.2.1 = 6$$

$$4! = 4.3! = 4.3.2.1 = 24$$

$$5! = 5.4! = 5.4.3.2.1 = 120$$

Uma observação interessante é que um número fatorial n! sempre contém a expressão de todos os fatoriais anteriores. Como exemplo, note que 10! inclui a expressão de 7!, e que 8! inclui também a expressão de 5!

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

$$10! = 10.9.8.\underbrace{7.6.5.4.3.2.1} = 10.9.8.7!$$

$$8! = 8.7.6.\underbrace{5.4.3.2.1} = 8.7.6.5!$$

Por isso, é relativamente fácil dividir dois números fatoriais. Vejamos exemplos:

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10.9.8.7!}{7!} = 10.9.8 = 720$$

$$\frac{8!}{5!} = \frac{8.7.6.5!}{5!} = 8.7.6 = 336$$

Devido a essa facilidade, podemos aprender o conceito de **números binomiais.**

Considere dois números inteiros **n** e **p**, de modo que $n \geq p$. O binomial de n p a p é o número definido pela seguinte expressão.

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

O termo $C_{n,p}$ se refere à combinação. Vale ressaltar que esse conceito de número binomial é exatamente o mesmo que se estuda em Análise Combinatória.

Vejamos alguns exemplos de números binomiais. Calculemos o binomial de 6, 3 a 3.

$$C_{6,3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!\,3!} = \frac{6.5.4}{3.2.1} = 5.4 = 20$$

Observe que utilizamos cores acima para facilitar a identificação das contas. Colocamos os números 3! em vermelho evidenciado que eles foram simplificados. Essa simplificação sempre vai acontecer quando estivermos lidando com números binomiais, pois os fatoriais são sempre divisíveis um pelo outro.

Vejamos outro exemplo.

$$C_{8,2} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{8!}{2!\,6!} = \frac{8.7.6!}{2!\,6!} = \frac{8.7}{2.1} = 4.7 = 28$$

3.1.1. Casos Especiais de Binomiais

Alguns números binomiais são relativamente simples de calcular. Por isso, é interessante sabermos três casos particulares.

- O binomial de qualquer número 0 a 0 é sempre igual a 1.

$$C_{n,0} = \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{0!\,n!} = \frac{1}{1} = 1$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

- O binomial de qualquer número 1 a 1 é sempre igual ao próprio número.

$$C_{n,1} = \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n.(n-1)!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n}{1} = n$$

- O binomial de qualquer número n a n é sempre igual a 1.

$$C_{n,n} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\,(0)!} = \frac{n!}{n!\,.1} = 1$$

Outro caso especial que precisamos saber é sobre **os binomiais complementares.**

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Dois binomiais são complementares quando possuem o mesmo numerador e a soma dos seus denominadores é igual ao próprio numerador.

$$\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$$

Façamos as contas para mostrar que realmente os dois binomiais são iguais.

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8.7.6.\mathbf{5!}}{3.2.1.\mathbf{5!}} = 8.7 = 56$$

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\,(8-5)!} = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{8.7.6.\mathbf{5!}}{3.2.1.\mathbf{5!}} = 8.7 = 56$$

Podemos, ainda, demonstrar matematicamente a propriedade dos binomiais complementares.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,[n-(n-p)]!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

3.2. Distribuição de Probabilidade

Vamos, agora, demonstrar a expressão geral da Distribuição Binomial. Para isso, vamos trabalhar com uma variável binominal que tenha dois parâmetros:

- **p:** é a probabilidade de sucesso de cada tentativa;
- **n:** é o número de repetições de cada experimento.

Uma pergunta muito comum a ser respondida pela distribuição binomial é a seguinte: Qual a probabilidade de que, em 10 lançamentos, sejam obtidos 5 resultados iguais a 6?

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Nesse caso, temos n = 10, porque serão feitas 10 repetições do experimento.

Além disso, temos uma probabilidade de sucesso $p = \frac{1}{6}$, porque há 1 chance de sucesso em um total de 6 resultados possíveis no dado. A probabilidade de falha em cada evento pode ser calculada pelo Princípio da Inclusão e Exclusão.

$$p_{FALHA} = q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Agora, desejamos saber, durante o lançamento de n dados, qual a probabilidade de obtermos **k** sucessos em **n** lançamentos?

Para isso, podemos seguir três passos:

- escolhemos k dos n questões para serem sucessos;

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- os k eventos escolhidos devem ser sucessos.

Como os eventos são independentes, podemos aplicar que:

p	x	p	x	p	x	p	$= p^k$
1º Sucesso		**2º Sucesso**		**...**		**kº Sucesso**	**Total**

$$P_1 = p^k$$

- e os demais (n – k) eventos devem ser fracassos.

Como visto, a probabilidade de um fracasso é complementar à probabilidade de sucesso.

$1-p$	x	$1-p$	x	$1-p$	x	$1-p$	$= (1-p)^{n-k}$
1ª Falha		**2ª Falha**		**...**		**(n-k)ª Falha**	**Total**

$$P_2 = (1-p)^{n-k}$$

Como utilizar o operador E, devemos multiplicar os três passos desenvolvidos para calcular a probabilidade desejada.

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

A expressão encontrada é muito importante no estudo da Estatística, pois corresponde à distribuição binomial.

Para o exemplo desejado, podemos plotar o gráfico da distribuição de probabilidade para o exemplo apontado, considerando os parâmetros n = 10 e p = 0,50.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

k	P		k	P
0	0,000977		**6**	0,205078
1	0,009766		**7**	0,117188
2	0,043945		**8**	0,043945
3	0,117188		**9**	0,009766
4	0,205078		**10**	0,000977
5	0,246094			

Tabela 2 : Valores calculados para a Distribuição Binomial com n = 10 e p = 0,50

Vamos, agora, plotar o gráfico dessa distribuição binomial.

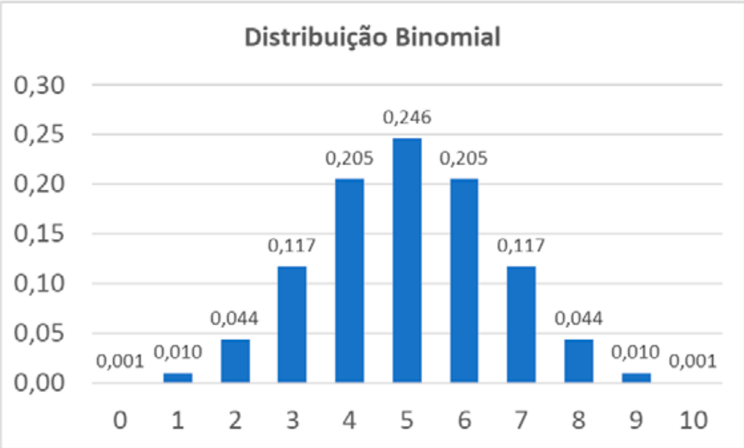


Figura 1: Distribuição Binomial com n = 10 e p = 0,5

Para p = 0,5, de fato, o gráfico é bastante simétrico como visto na Figura 1. Nesse caso, podemos notar que o pico do gráfico, isto é, **a sua moda** acontece exatamente no termo central, que é igual a 6.

Vejamos o que aconteceria quando n = 10 e p = 0,2.

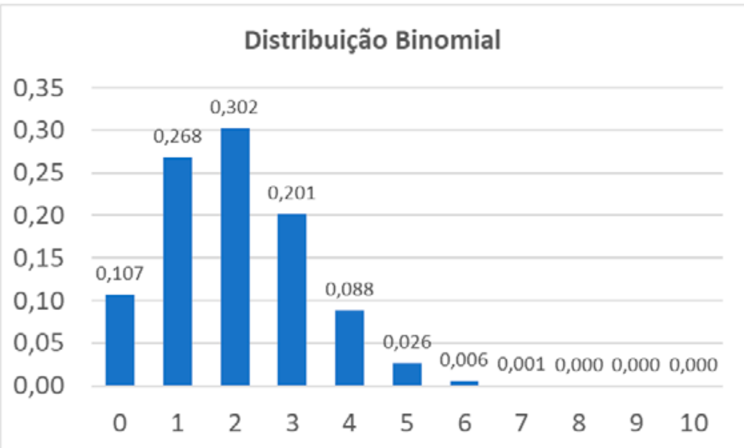


Figura 2: Distribuição Binomial com n = 10 e p = 0,5

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Nessa situação, o gráfico deixou de ser simétrico e se tornou assimétrico à direita. Outro ponto interessante é que a moda da distribuição atingiu exatamente o valor:

$$Mo = np = 10.0{,}2 = 2$$

Porém, vale observar que nem sempre o produto **np** será um número inteiro. Mas, podemos anotar a regra de que a moda da distribuição binomial é sempre o inteiro mais próximo do produto **np.**

Direto do Concurso

008. (CS-UFG/2018/ASSESSOR TÉCNICO LEGISLATIVO/ECONOMISTA) Considere uma variável aleatória *X* com distribuição binomial e parâmetros *p* = 1/3 e *n* = 4. Qual é a probabilidade de *X* = 2?

a) 4/81
b) 1/9
c) 2/9
d) 8/27

A probabilidade para a distribuição binomial é dada por:

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (I)$$

Nessa expressão, o número binomial é dado pela expressão:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad (II)$$

O enunciado forneceu os seguintes parâmetros:

$$p = \frac{1}{3}$$

$$n = 4$$

$$k = X = 2$$

Substituindo os valores acima em (II), ficamos com:

$$\binom{n}{k} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2!} = \frac{12}{2 \cdot 1} = 6$$

Substituindo (II) e os parâmetros em (I):

$$P(k) = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{4-2} = 6 \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$$

Letra d.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

3.2.1. Média e Variância

A média e a variância de uma distribuição binomial são calculadas por:

$$E[X] = np$$

$$Var(X) = np(1-p)$$

As demonstrações dessas propriedades, bem como da propriedade de que a distribuição binomial atende aos axiomas de Kolgomorov, são bastante complicadas e exigem elevado conhecimento Análise Combinatória e também da teoria de Momentos de variáveis aleatórias.

Por isso, não faremos essa demonstração aqui. Sugiro apenas que você memorize as expressões que lhe foram fornecidas.

3.2.2. Probabilidades Constantes

Uma das condições mais importantes para termos uma distribuição binomial é que **as probabilidades de sucesso em todos as repetições do experimento sejam iguais**.

Mas, existem situações em que essa condição **não é atendida**, e, por isso, devemos ficar **atentos.**

Pense, por exemplo, que, em vez de fazer a pesquisa eleitoral em uma cidade, você esteja fazendo a pesquisa em uma residência com 5 pessoas. Suponha que 60%, isto é, 3 dessas pessoas são favoráveis ao projeto de lei.

Diante disso, ao selecionar 3 pessoas distintas, a probabilidade de que somente 1 delas seja favorável ao projeto é dada pela distribuição binomial?

Pense bem na sua resposta.

Note o seguinte: o primeiro indivíduo a ser selecionado realmente tem uma probabilidade de 60% de ser favorável, porém, o segundo não.

Se o primeiro indivíduo extraído da amostra for favorável ao projeto de lei, sobrarão 4 pessoas possíveis de serem selecionadas, dentre as quais apenas 2 são favoráveis ao projeto de lei. Então, a probabilidade de a segunda pessoa selecionada para a amostra ser favorável ao projeto de lei passaria a ser igual a 50%.

Por outro lado, se o primeiro indivíduo não era favorável ao projeto de lei, sobrarão 4 pessoas possíveis de serem selecionadas, dentre as quais 3 são favoráveis ao projeto de lei. Então, a probabilidade de a segunda pessoa selecionada para a amostra ser favorável ao projeto de lei passaria a ser igual a 75%.

Como as probabilidades não são constantes, não podemos recorrer à expressão que aprendemos para a distribuição binomial. Nesse caso, devemos recorrer às técnicas estudadas no capítulo de Probabilidades. Para isso, vamos:

- considerar que o primeiro elemento selecionado será favorável. São 3 opções possíveis em um total de 5.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

- O segundo elemento selecionado não é favorável. São 2 opções possíveis em um total de 4.
- O terceiro elemento selecionado também não é favorável. Como 1 não favorável já foi selecionado, restou apenas 1 opção possível em um total de 3.

$\frac{3}{5}$	x	$\frac{2}{4}$	x	$\frac{1}{3}$	x	$3!$	$= P$
Sim		**Não**		**Não**		**Permutações**	**Total**

Assim, a probabilidade desejada:

$$P = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3! = \frac{3.2.1.3.2.1}{5.4.3} = \frac{3}{5} = 0{,}60 = 60\%$$

Mas, e em que situações podemos realmente utilizar a Distribuição Binomial? Existem **três palavras-chave** que podem aparecer em uma questão que servem como verdadeiros convites para você utilizar essa distribuição:

- população muito grande (ou de tamanho infinito);
- com reposição;
- eventos mutuamente independentes.

Agora, vamos entender cada uma dessas palavras-chave.

Se a população for muito grande, a probabilidade será muito pouco alterada pela retirada de um elemento. Pense o seguinte: a população do Brasil é igual a 200 milhões de pessoas e 60% delas são favoráveis a um projeto de lei.

Se uma pessoa favorável ao projeto de lei for retirada para a amostra, o efeito da variação de uma única unidade em um total de 200 milhões modificar em quase nada essa probabilidade de 60%, tendo em vista que elas representam 120 milhões, que é um número muito grande.

Então, se vamos extrair um grupo de 5 pessoas e desejamos que exatamente 2 delas sejam favoráveis ao projeto de lei, poderíamos utilizar a distribuição binomial:

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot (0{,}60)^2 \cdot (0{,}40)^3 = \frac{5!}{3!\,2!} \cdot (0{,}60)^2 \cdot (0{,}40)^3$$

$$P(X = 2) = 0{,}375 = 37{,}5\%$$

Vamos à segunda palavra-chave: seleção com reposição.

Pense, por exemplo, que você tem um saco escuro com 5 bolas pretas e 5 bolas brancas. Você vai retirar 1 bola, verificar se a cor, colocá-la de volta no saco, e repetir o experimento 3 vezes. Qual a probabilidade de que exatamente 1 delas seja branca?

Nesse caso, como a bola retirada é sempre reposta, sempre teremos 5 bolas pretas e 5 bolas brancas dentro saco. Portanto, em todas as repetições do experimento, a probabilidade é igual a 50%. Assim, podemos utilizar a expressão da distribuição binomial.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

$$P(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot (0{,}50)^1 \cdot (0{,}50)^2 = 3 \cdot 0{,}50 \cdot 0{,}25 = 0{,}375 = 37{,}5\%$$

O último é uma sequência de eventos mutuamente independentes. Pense, por exemplo, no lançamento consecutivo de um dado. Qual é a probabilidade de que, em 5 lançamentos, 2 deles resultem em número igual a 6?

O fato de o primeiro dado ter obtido o número 6 ou não é irrelevante para a probabilidade do segundo dado ter resultado favorável. A probabilidade será sempre igual a 1/6.

Direto do Concurso

009. (UFAC/2019/ESTATÍSTICO) Seja X uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros n e p. Então, pode-se dizer que a variância de X é dado por:

a) n.
b) np.
c) np (1 – p).
d) np².
e) np²(1 – p).

Para distribuições binomiais, a variância é sempre dada por:

$$Var(X) = np(1 - p)$$

As demonstrações envolvem cálculos mais avançados que não são condizentes com o assunto. A estratégia é ter a fórmula guardada na memória.

Letra c.

010. (FGV/SEFAZ-RJ/2010/AGENTE FISCAL DE RENDAS) 40% dos eleitores de uma certa população votaram, na última eleição, num certo candidato A. Se cinco eleitores forem escolhidos ao acaso, com reposição, a probabilidade de que três tenham votado no candidato A é igual a:

a) 12,48%
b) 17,58%
c) 23,04%
d) 25,78%
e) 28,64%

Questão direta sobre a distribuição binomial. Como a amostra foi escolhida com reposição, o candidato poderia aplicar diretamente a distribuição binomial.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

$$P(X=3)=\binom{5}{3}(0{,}40)^3(0{,}60)^2=\frac{5!}{3!\,.2!}0{,}064.0{,}36=\frac{5.4.3!}{3!\,2.1}.0{,}064.0{,}36$$

$$P(X=3)=10.0{,}064.0{,}36=0{,}2304=23{,}04\%$$

Letra c.

3.2.3. Probabilidade de um Intervalo

Uma situação muito comum é quando o enunciado pede não só uma probabilidade de um ponto específico do gráfico da distribuição binomial, mas de um conjunto de valores. Nesse tipo de questão, é muito comum o uso de palavras-chave, como "no máximo", "no mínimo" e "entre".

Vejamos exemplos de como esse tipo de pergunta pode aparecer em prova:

Ao realizar 4 lançamentos de um dado, qual é a probabilidade de que no máximo 1 seja um número par?

Nessa situação, temos 10 lançamentos, portanto, n = 4; a probabilidade de sucesso é igual a 1/2; e desejamos 0 ou 1 sucessos. Então, devemos somar as probabilidades.

$$P\ (X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)$$

Essas três probabilidades podem ser calculadas separadamente pela expressão da distribuição binomial. Vamos calcular P (X = 0), que corresponde à probabilidade de se obter 0 sucessos, isto é, 0 números pares:

$$P(X=0)=\binom{4}{0}\cdot(0{,}50)^0\cdot(0{,}50)^4$$

$$P(X=0)=\ 1\cdot 1\cdot(0{,}50)^4=0{,}0625=6{,}25\%$$

E, agora, vamos calcular P (X = 1), que corresponde à probabilidade de se obter 1 sucesso, isto é, 1 número par:

$$P(X=1)=\binom{4}{1}\cdot(0{,}50)^1\cdot(0{,}50)^{4-1}$$

$$P(X=1)=\frac{4!}{1!\,3!}\cdot(0{,}50)\cdot(0{,}50)^3$$

$$P(X=1)=\frac{4.3!}{1.3!}\cdot 0{,}50\cdot 0{,}125=4.0{,}50.0{,}125=0{,}25=25\%$$

E, agora, vamos calcular a soma desejada:

$$P\ (X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=6{,}25\%+25\%=31{,}25\%$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Note que, quando a questão fala em um intervalo de valores em uma distribuição binomial, a conta pode ficar bem longa e complicada. Então, quando cabível, podemos utilizar algumas técnicas para facilitar as contas.

Uma das técnicas mais utilizadas é a Probabilidade Complementar. Ela consiste em calcular a probabilidade de não ocorrer o evento desejado. Vejamos um exemplo:

Ao realizar 4 lançamentos de um dado, qual é a probabilidade de que no máximo 3 seja um número par?

Observe que, nesse caso, a probabilidade pedida foi $P\ (X \leq 3)$, que pode ser esticada da seguinte forma:

$$P\ (X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

Perceba, no entanto, que seria muito complicado e cansativo calcular quatro probabilidades pela expressão da distribuição binomial. Porém, podemos utilizar a ideia da probabilidade complementar. O complemento de X ≤ 3 é X > 3. Então, teremos:

$$P\ (X \leq 3) = 1 - P(X > 3)$$

A única hipótese em que X > 3, isto é, mais de 3 sucessos seria X = 4, que corresponde a 4 sucessos, que é o número total de repetições do experimento realizadas. Então, podemos escrever:

$$P(X > 3) = P(X = 4)$$

Pela a distribuição binomial, temos:

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot (0{,}50)^4 \cdot (0{,}50)^{4-4}$$

$$P(X = 4) = 1 \cdot (0{,}50)^4 \cdot (0{,}50)^0$$

$$P(X = 4) = 1 \cdot 0{,}0625 \cdot 1 = 0{,}0625 = 6{,}25\%$$

Assim, calculamos a probabilidade completar. Então, podemos calcular a probabilidade original desejada:

$$P\ (X \leq 3) = 1 - P(X > 3)$$

$$P\ (X \leq 3) = 1 - 0{,}0625 = 0{,}9375 = 93{,}75\%$$

Portanto, a probabilidade desejada é igual a 93,75%.

Por enquanto, estudaremos somente a técnica da probabilidade complementar. Mais adiante, veremos a técnica da aproximação pela distribuição normal, que também é bastante útil.

Direto do Concurso

011. (CESPE/CÂMARA DOS DEPUTADOS/2012/ANALISTA) Considere que, em um estudo realizado para avaliar a disponibilidade de 40 urnas eletrônicas para uso imediato, Y seja o

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

número dessas urnas, que apresentavam problemas técnicos e que, historicamente, a probabilidade de uma urna apresentar defeito seja igual a 0,08. Considere, ainda, que as urnas sejam mutuamente independentes e que 0,036 e 0,039 sejam os valores aproximados, respectivamente, de $0{,}92^{40}$ e $0{,}92^{39}$.

A probabilidade de haver duas ou mais urnas defeituosas é aproximadamente igual a:

a) 83%

b) 87%

c) 90%

d) 94%

e) 97%

A probabilidade de haver duas ou mais urnas defeituosas é mais facilmente calculada pela probabilidade complementar.

$$P = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

Podemos calcular os dois pedaços. Façamos primeiramente a conta P (X = 0), que corresponde à probabilidade de nenhuma urna dar defeito:

$$P(X = 0) = \binom{40}{0}(0{,}08)^0(0{,}92)^{40} = \frac{40!}{0!\,40!}.1.0{,}036 = 0{,}036$$

Agora, vamos determinar a probabilidade P (X = 1), que corresponde à probabilidade de exatamente uma urna dar defeito:

$$P(X = 1) = \binom{40}{1}(0{,}08)^1(0{,}92)^{40} = \frac{40!}{0!\,40!}.0{,}08.0{,}039$$

$$P(X = 1) = 40.0{,}08.0{,}039 = 0{,}1248$$

Então, podemos calcular a soma de probabilidades, que corresponde à probabilidade de, no máximo, uma urna dar defeito:

$$\therefore P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}036 + 0{,}1248 = 0{,}1608$$

Agora, podemos calcular a probabilidade complementar.

$$P = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0{,}1608 = 0{,}8392 \approx 0{,}84 = 84\%$$

Letra a.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

3.3. Diferença entre as Distribuições de Bernoulli e Binomial

Um ponto que os alunos frequentemente confundem é sobre quando utilizar uma distribuição de Bernoulli ou Binomial.

A palavra-chave para entender que uma questão fala sobre a distribuição de Bernoulli é **proporção.**

Por exemplo, se o enunciado fala que 30% dos entrevistados são favoráveis a um determinado projeto, temos que, ao escolher uma pessoa, a probabilidade de ela ser ou não favorável ao projeto segue uma distribuição de Bernoulli.

Isso acontece porque uma pessoa só pode ser favorável ou não favorável ao projeto.

Por outro lado, ao escolher um grupo de 5 pessoas, a probabilidade de que 3 delas sejam favoráveis ao projeto segue uma distribuição binomial.

Vejamos um quadro comparativo.

Distribuição de Bernoulli	Distribuição Binomial
Uma pessoa ser favorável a um projeto	Em um grupo de 5 pessoas, quantas delas são favoráveis?
Um bebê nascer homem ou mulher	Uma família tem 3 filhos, qual é a probabilidade de nascer um homem?
Marcar uma alternativa certa no chute em uma prova abcde	Em uma prova de 20 questões, qual é o valor esperado de número de acertos nos chutes?

4. Distribuição Geométrica

Embora seja relativamente comum em editais, a distribuição geométrica só costuma cair em provas específicas para a área de Estatística. Desse modo, caso você precise adiantar os seus estudos em Estatística, pode ser interessante pular essa distribuição.

A distribuição geométrica é também uma distribuição de probabilidades que parte da distribuição de Bernoulli. Ela visa a determinar qual a probabilidade de **a primeira ocorrência de sucesso** ocorra **somente na k-ésima repetição do experimento.**

Para isso, devemos ter as mesmas restrições que já estudamos na distribuição binomial:

- cada repetição do experimento tem exclusivamente como resultado duas possibilidades, isto é, cada repetição individual do experimento é descrito por uma variável de Bernoulli;
- o resultado de cada tentativa é independente das demais;
- a probabilidade de sucesso a cada repetição do experimento é constante e igual a **p**;

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Note que, ao contrário, da distribuição binomial, **o único parâmetro da distribuição geométrica é a probabilidade de sucesso p.** Por esse motivo, uma forma de dizer que uma variável aleatória X segue uma distribuição geométrica é dizer $X \sim Geo\ (p)$.

Essa diferença existe, porque, na distribuição binominal, o número de repetições era apenas um parâmetro da distribuição. Já na distribuição geométrica, o número de repetições é exatamente a variável aleatória pesquisada.

Vejamos alguns exemplos de perguntas que remetem a uma distribuição geométrica.

- Em um lançamento sucessivo de uma moeda, qual a probabilidade que a primeira "cara" seja observada somente no 6º lançamento?
- Em um lançamento sucessivo de um dado, qual a probabilidade de que o primeiro número 6 seja obtido no 3º lançamento?

Pela definição da distribuição geométrica, para que o sucesso aconteça somente no k-ésimo lançamento, devemos ter:

- (k – 1) falhas – cada falha tem probabilidade de ocorrência (1 – p);
- e, na sequência, um sucesso, cuja probabilidade de ocorrência é igual a p.

Assim, podemos representar graficamente essa situação:

$(\mathbf{1-p})$	x	$(\mathbf{1-p})$	x		x	$(\mathbf{1-p})$	x	$(\mathbf{p})$
1ª Falha		**2ª Falha**		**...**		**(k-1)ª Falha**		**Sucesso**

Como são (k – 1) falhas, note que estamos multiplicando (1 – p) por (1 – p) exatamente (k – 1) vezes consecutivas. Isso representa uma potência, então chegamos à seguinte expressão:

$$X \sim Geo\ (p) \therefore P(X = k) = (1 - p)^{k-1}.p$$

Com base nessa expressão, vamos responder aos exemplos apresentados.

Em um lançamento sucessivo de uma moeda, qual a probabilidade que a primeira "cara" seja observada somente no 6º lançamento?

Nessa situação, a probabilidade de sucesso é p = 1/2, porque o lançamento de uma moeda só tem dois resultados possíveis: cara ou coroa. Então, podemos escrever:

$$1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 6) = (1 - p)^{n-1} \cdot p = \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$P(X = 6) = \left(\frac{1}{2}\right)^{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Em um lançamento sucessivo de um dado, qual a probabilidade de que o primeiro número 6 seja obtido no 3º lançamento?

Nessa situação, a probabilidade de sucesso é p = 1/6, porque o lançamento de um dado tem seis resultados possíveis. Então, podemos escrever:

$$1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$P(X = 2) = (1 - p)^{n-1} \cdot p = \left(\frac{5}{6}\right)^{3-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$$

$$P(X = 2) = \left(\frac{5}{6}\right)^{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{25}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$$

Outro ponto interessante é que o domínio da distribuição geométrica corresponde a todo o conjunto dos números naturais. Isso significa que podemos calcular o valor da probabilidade para qualquer número natural, mesmo que seja muito grande.

Isso significa que existe uma probabilidade – pequena, mas existe – de que o primeiro número 6 seja obtido somente depois de 1 milhão de lançamentos de um dado.

Vamos, agora, obter os valores de uma distribuição geométrica com parâmetro p = 1/6.

k	P		k	P
1	0,166667		**9**	0,038761
2	0,138889		**10**	0,032301
3	0,115741		**11**	0,026918
4	0,096451		**12**	0,022431
5	0,080376		**13**	0,018693
6	0,06698		**14**	0,015577
7	0,055816		**15**	0,012981
8	0,046514			

Tabela 3: Valores calculados para a Distribuição Binomial com p = 1/6

Se plotarmos o gráfico da distribuição geométrica, notaremos uma distribuição de probabilidade sempre decrescente.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

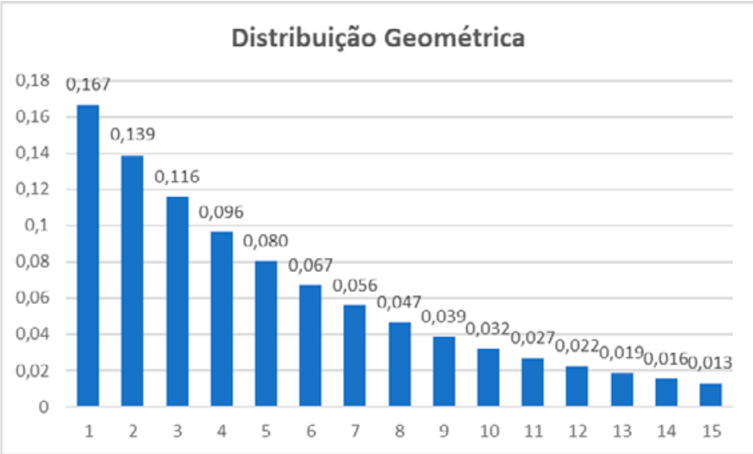


Figura 3: Distribuição Geométrica

4.1. Condição de Validade

Uma demonstração interessante que devemos fazer é que a soma de todos os valores possíveis das probabilidades de uma distribuição geométrica são iguais a 1. Essa é uma das condições impostas pelos Axiomas de Kolgomorov.

Embora essa demonstração seja interessante do ponto de vista matemático, gostaria de destacar que ela requer conhecimentos prévios de Progressão Geométrica. Portanto, caso você não tenha estudado esse conteúdo ainda, recomendo que você não veja essa demonstração e passe para a próxima seção. Basta você se lembrar da condição imposta por Kolgomorov de que a soma das probabilidades deve ser igual a 1. Vale notar que, em questões de concurso, eu nunca vi demonstrações sendo cobradas. Elas servem apenas como curiosidade matemática.

Bom, se você ainda está por aqui nessa seção, então eu entendo que você quer aprender como demonstramos que a distribuição geométrica é uma distribuição de probabilidades válida. Então, vamos lá.

Como vimos, é possível calcular o valor da distribuição geométrica para qualquer número natural. Podemos escrever:

$$P(X = 1) = (1 - p)^0 \cdot p$$

$$P(X = 2) = (1 - p)^1 \cdot p$$

$$P(X = 3) = (1 - p)^2 \cdot p$$

$$\dots$$

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Vamos montar o somatório de todas essas probabilidades:

$$S = P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots + P(X = k)$$

$$S = (1 - p)^0 \cdot p + \ (1 - p)^1 \cdot p + \cdots + (1 - p)^{k-1} \cdot p$$

Para facilitar as notações, podemos substituir q = 1 – p. Assim, teremos:

$$S = q^0 \cdot p + \ q^1 \cdot p + \cdots + q^{k-2} \cdot p + q^{k-1} \cdot p$$

Podemos, então, usar um artifício matemático interessante: basta multiplicar todo o somatório por **q.**

$$Sq = q^1 \cdot p + \ q^2 \cdot p + \cdots + q^{k-1} \cdot p + q^k \cdot p$$

Vamos, agora, realizar a subtração Sq – S, notando que seremos capazes de cortar vários termos:

$$\begin{array}{rl} & Sq = \cancel{q^1} \cdot p + \ \cancel{q^2} \cdot p + \cancel{\cdots} + \cancel{q^{k-1}} \cdot p + \mathbf{q^k \cdot p} \\ (-) & S = \mathbf{q^0 \cdot p} + \ \cancel{q^1} \cdot p + \cancel{\cdots} + \cancel{q^{k-2}} \cdot p + \cancel{q^{k-1}} \cdot p \end{array}$$

$$Sq - S = q^k \cdot p \ - q^0 \cdot p$$

Assim, a diferença calculada é:

$$Sq - S = q^k \cdot p - q^0 \cdot p$$

$$S(q - 1) = p \cdot [q^k - 1]$$

Como a distribuição geométrica abrange todos os números naturais, o último termo é $k \to \infty$ Nesse caso, o termo q^k tende a zero.

$$S(q - 1) = p \cdot [0 - 1]$$

$$\therefore S = \frac{-p}{q - 1}$$

Agora, vamos usar a substituição q = 1 – p:

$$\therefore S = \frac{-p}{q - 1} = \frac{-p}{(1 - p) - 1} = \frac{-p}{-p} = 1$$

Portanto, a distribuição geométrica atende aos axiomas de Kolgomorov.

Obs.: caso você tenha ficado em dúvida de por que q^k tende a zero, quando k tende a infinito, você pode tomar um exemplo. Pense em q = 1/2 e uma calculadora.

A conta $(1/2)^6$ consiste em pegar o número 1 e dividir por 2 seis vezes. O resultado a que você chegará é 0,015625.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Se você continuar a conta, isto é, continuar dividindo por 2, você pegará novas potências de 2. E cada vez mais os números vão ficando pequenos. Vai chegar um momento que a conta vai ficar tão pequena que a sua calculadora simplesmente dirá o valor 0.

4.2. Média e Variância

Primeiramente, vamos anotar a média e a variância de uma variável aleatória distribuída geometricamente, com probabilidade de sucesso a cada tentativa **p.**

$\boldsymbol{E[X] = \frac{1}{p}}$	$\boldsymbol{Var[X] = \frac{1-p}{p^2}}$

A esperança da distribuição geométrica é bastante intuitiva. Pense no exemplo do lançamento de um dado. Quantos lançamentos serão necessários para que o primeiro número 6 seja obtido?

Ora, sabendo que a probabilidade de o dado der 6 é igual a 1/6, é de se esperar que, na média, a cada 6 lançamentos, 1 deles retorne o número 6. Portanto, seriam necessários 6 lançamentos, em média, para garantir que teremos um sucesso.

Mais uma vez, é possível provar ambos os resultados matematicamente. Porém, essas demonstrações utilizarão também conceitos de Progressão Geométrica. Fica a mesma consideração da seção anterior: se você não estudou esse conteúdo, recomendo pular para a próxima seção.

Bom, já que você está aqui, vamos fazer a nossa demonstração. Vamos nos lembrar de como é distribuída a variável geométrica.

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{P(X=k)}$
1	$(1-p)^0.p$
2	$(1-p)^1.p$
3	$(1-p)^2.p$
...	...
k	$(1-p)^{k-1}.p$

Pela definição de esperança, basta somar os valores de **k** multiplicados pelas probabilidades a eles associadas.

$$E[X] = 1.(1-p)^0p^1 + 2.(1-p)^1.p + \cdots + k.(1-p)^{k-1}.p$$

Mais uma vez, vamos recorrer à substituição q = 1 – p para facilitar nossas contas:

$$E[X] = 1.q^0p^1 + 2.q^1.p^1 + \cdots + k.q^{k-1}.q$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Vamos, mais uma vez, multiplicar

$$q.E[X] = 1.q^1p^1 + 2.q^2.p^1 + \cdots + k.q^k.q$$

Pode-se, então, tomar a diferença:

$$\begin{array}{rrlll} & E[X] = & 1.q^0p^1 + & \boxed{2.q^1.p^1} & + \boxed{3.q^2p \ldots + k}.q^{k-1}.q \\ (-) & q.E[X] = & & 1.q^1p^1 & + 2.q^2.p^1 + \cdots + k.q^k.q \\ \hline E[X] - q.E[X] = & & 1.q^0p + & (2-1)q^1p & + (3-2)q^2p + \cdots \end{array}$$

Observe que a diferença E[X] – qE[X] resultou em uma soma já conhecida:

$$E[X] - q.E[X] = q^0p + q^1p + q^2.p + q^3.p + \cdots$$

A soma ao lado direito é exatamente igual a 1, pois é a soma de todas as probabilidades associadas à distribuição geométrica. Então, temos:

$$E[X] - q.E[X] = 1$$

$$E[X].[1-q] = 1$$

$$\therefore E[X] = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

Já a demonstração da variância requer o uso de integral e momentos, então, ficará para outra ocasião, pois a teoria que temos até o momento não é suficiente.

4.3. Probabilidade Acumulada

Assim como no caso da distribuição binomial, é possível que uma questão de prova cobre o somatório dos termos de uma distribuição geométrica.

Essa situação aparecerá quando aparecerem **palavras-chave** como "no mínimo", "no máximo" e "entre". Suponha, por exemplo, que um enunciado pergunte o seguinte:

> Qual a probabilidade de que, no lançamento sucessivo de uma moeda, a primeira cara ocorra até o kº lançamento?

Nesse caso, o enunciado pediu que a primeira cara aconteça até o kº lançamento, isto é, ela pode acontecer no primeiro lançamento (X = 1), no segundo lançamento (X = 2), no terceiro lançamento (X = 3), e, assim por diante, até o k-ésimo lançamento (X = k). Logo, podemos escrever essa soma:

$$P(X \leq k) = P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots + P(X = k)$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Agora, vamos substituir os valores da distribuição geométrica.

$$P(X \leq k) = p + (1-p).p + (1-p)^2.p + \cdots + (1-p)^{k-1}.p$$

Observe que temos a soma dos termos de uma progressão geométrica. Usando a fórmula da soma dos termos da PG, teremos:

$$P(X \leq k) = \frac{[1-(1-p)^k]}{1-(1-p)} \cdot p$$

$$P(X \leq k) = \frac{[1-(1-p)^k]}{p} \cdot p$$

$$\therefore P(X \leq k) = [1-(1-p)^k]$$

Dessa forma, se a pergunta fosse: qual a probabilidade de que a primeira cara aconteça até o terceiro lançamento?

Nesse caso, a pergunta foi P (X ≤ 3)? Basta substituir na fórmula.

$$P(X \leq 3) = [1-(1-p)^3]$$

$$P(X \leq 3) = \left[1-\left(1-\frac{1}{2}\right)^3\right]$$

$$P(X \leq 3) = \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right] = \left[1-\frac{1}{8}\right] = \frac{7}{8}$$

Outra expressão que pode ser pedida é a probabilidade complementar. Pense, por exemplo, em uma pergunta como a seguinte:

Qual a probabilidade de que, no lançamento sucessivo de uma moeda, a primeira cara não ocorra até o kº lançamento?

Nessa situação, queremos P (X > k), pois queremos que o primeiro sucesso aconteça somente a partir do lançamento k + 1 – ésimo. Observe que essa é exatamente a probabilidade complementar à que foi calculada anteriormente. Então, podemos escrever:

$$P(X > k) = 1 - P(X \leq k) = 1 - [1-(1-p)^k]$$

$$\therefore P(X > k) = (1-p)^k$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

4.4. Esquecimento

A distribuição geométrica é semelhante a um interessante peixe retratado no filme Procurando Nemo: a Dory.

De forma semelhante à simpática Dory, a distribuição geométrica esquece o passado.

O que isso significa?

Imagine que desejamos determinar a probabilidade de que, no lançamento sucessivo de uma moeda, a primeira coroa seja obtida no 6º lançamento.

Agora, suponha que já começamos a fazer os lançamentos e que, em determinado ponto, já fizemos três tentativas e que, até o momento não foi obtido nenhum sucesso. Assim, já sabemos que X > 3, pois o primeiro sucesso só poderá ser obtido a partir da 4ª tentativa.

Restam, portanto, mais 3 tentativas para chegar ao 6º lançamento, que era o desejado.

Podemos nos fazer, então, duas perguntas:

Obs.: sabendo que já foram realizadas três tentativas, qual é a probabilidade de que, agora, o primeiro sucesso seja obtido somente depois de mais 6 lançamentos?

Ter o primeiro sucesso obtido nessa situação é uma situação equivalente a obter o primeiro sucesso somente no 9º lançamento, contando a partir do lançamento original, sabendo que X > 3, porque já forma feitos 3 lançamentos mal-sucedidos.

$$P(X = 9 \mid X > 3) = P(X = 6)$$

É possível sim demonstrar essa propriedade. A probabilidade condicional é dada pela definição:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Substituindo A por X = 9 e B por X > 3, teremos:

$$P(A|B) = \frac{(1-p)^8 . p}{P(X > 3)}$$

Como vimos na seção anterior, P (X > 3) = $(1-p)^3$. Então, depomos escrever:

$$P(X = 9|X > 3) = \frac{(1-p)^8 . p}{(1-p)^3} = (1-p)^5 . p = P(X = 6)$$

Podemos, então, generalizar a propriedade de esquecimento da distribuição geométrica:

$$P(X = b \mid X > a) = P(X = b - a)$$

O significado dessa expressão é que a probabilidade de que o primeiro sucesso seja obtido depois de 6 lançamentos é a mesma, independentemente de já termos começado os lançamentos ou não.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

DIRETO DO CONCURSO

012. (INÉDITA/2021) Um oftalmologista realiza um teste de estimulação da retina, que tem probabilidade de sucesso igual a 80%. Caso o teste não seja bem-sucedido, ele precisa realizar novamente o teste. Assim que o teste for bem-sucedido, ele poderá fazer a cirurgia. Sabendo que o médico leva 10 minutos para realizar um teste, determine:

a) A probabilidade de que precise de 3 tentativas para poder realizar a cirurgia.

b) A probabilidade de que o oftalmologista precise de mais de 40 minutos para testar a estimulação da retina antes de realizar a cirurgia.

c) O tempo médio que o cirurgião leva para fazer a estimulação da retina de seus pacientes.

O sucesso na estimulação da retina do paciente é uma variável de Bernoulli. E essa questão estuda a distribuição de probabilidade do primeiro sucesso.

a) A probabilidade de que ele precise de 3 tentativas é dada pela distribuição geométrica: o oftalmologista precisa de 2 falhas e um sucesso.

$$P(3) = (1 - p)^2 \cdot p$$

$$P(3) = (1 - 0{,}80)^2 \cdot 0{,}80 = (0{,}20)^2 \cdot 0{,}80$$

$$P(3) = (0{,}04) \cdot 0{,}80 = 0{,}032$$

Portanto, essa probabilidade é igual a 3,2%.

b) Para que o cirurgião gaste mais de 40 minutos, ele precisaria de pelo menos 4 tentativas. Essa probabilidade é a complementar da probabilidade acumulada da distribuição binomial.

$$P(X > 4) = (1 - p)^4 = (1 - 0{,}80)^4 = (0{,}20)^4 = 0{,}0016 = 0{,}16\%$$

c) O valor esperado de uma distribuição geométrica é igual ao inverso da probabilidade de sucesso de cada evento. Então, podemos escrever:

$$E[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}80} = 1{,}25$$

Como cada tentativa leva 10 minutos, então o tempo necessário é:

$$t = 1{,}25.10 = 12{,}5\ min$$

a) 3,2%; b) 0,16%; c) t = 12,5 min.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

013. (CESPE/TELEBRAS/2013/ESPECIALISTA EM GESTÃO DE TELECOMUNICAÇÕES/ESTATÍSTICA) O número X de realizações de determinado experimento necessárias para obter o primeiro sucesso segue a distribuição geométrica $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$. Considerando $(x_1,..., x_n)$ uma amostra de X, julgue o item subsequente. O estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro p é dado por $\hat{p} = \frac{1}{\bar{x}}$, em que $\bar{x}$ é a média amostral.

Na distribuição geométrica, a média amostral do número de tentativas necessárias para se obter o primeiro sucesso é igual ao inverso do parâmetro **p**. Então, a afirmação está correta.

Certo.

014. (FGV/DPE-RJ/2019/TÉCNICO SUPERIOR ESPECIALIZADO/ESTATÍSTICA) Para que as pessoas que aguardam atendimento em uma repartição pública fiquem acomodadas com relativo conforto, é necessário que o recinto seja dimensionado à razão de um metro quadrado de espaço para cada cidadão em espera.

Se o número de pessoas que comparece, por dia, tem distribuição geométrica, com parâmetro p = 0,2, é correto afirmar que:

a) em função da distribuição do número de pessoas, o tamanho médio ideal do recinto deve ser de 16 metros quadrados;

b) a probabilidade de que uma sala de espera com 4 metros quadrados não seja confortável em certo dia é $(0,2).(0,8)^4$;

c) a probabilidade de que uma sala com 3 metros quadrados fique subutilizada em certo dia é igual a 0,448;

d) considerando uma sala de espera que tem 20 metros quadrados e o fato de que 18 pessoas já estão aguardando, a probabilidade de que atinja sua lotação exata é igual a 0,16;

e) a distribuição de probabilidade do tamanho (A) de sala ideal, a cada dia, é dada por P (A = x) = $(0,2)^2.(0,8)^{2x}$ para X = 1,2,3,...

Essa questão não tem muito sentido, tendo em vista que a distribuição geométrica não costuma ser aplicada nesse contexto. Seria um contexto mais adequado para a distribuição de Poisson. Porém, nós não vamos discutir com o enunciado e vamos julgar as afirmações com base na distribuição geométrica.

a) A média de uma distribuição geométrica é igual ao inverso do parâmetro de probabilidade. Portanto, nesse caso, a média é igual a:

$$E[X] = \frac{1}{0,2} = 5$$

Como o tamanho médio do recinto é igual a 1 metro quadrado por pessoa, esses tamanho médio será igual a 5 metros quadrados.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

b) Para isso, deve-se ter mais de 4 pessoas nessa sala. A probabilidade de ocorrência de mais de 4 pessoas pode ser calculada pelo complementar da probabilidade acumulada, como mostrado a seguir:

$$P[X > 4] = (1 - p)^4 = (1 - 0{,}2)^4 = (0{,}8)^4$$

c) Para que a sala seja subutilizada, é preciso que somente 1 ou 2 pessoas estejam presentes na sala. Na distribuição geométrica, a probabilidade do 0 é nula. Então, podemos recorrer à probabilidade acumulada:

$$P(X \leq 3) = 1 - (1 - p)^3 = 1 - (1 - 0{,}2)^3$$

$$P(X \leq 3) = 1 - (0{,}8)^3 = 1 - 0{,}512 = 0{,}488$$

Portanto, a afirmação está incorreta.

d) Como já há 18 pessoas na sala, é preciso que mais 2 cheguem para que a sala atinja a sua lotação exata. Então, teríamos:

$$P(X = 2) = (0{,}8)^1 \cdot 0{,}2 = 0{,}8.0{,}2 = 0{,}16$$

Afirmação correta.

e) A expressão da distribuição geométrica é:

$$P(x) = (1 - p)^{x-1} \cdot p = (1 - 0{,}2)^{x-1} \cdot 0{,}2$$

$$P(x) = (0{,}8)^{x-1} \cdot 0{,}2$$

Portanto, a afirmação está incorreta.

Letra d.

---

015. (FCC/TCE-RR/2015/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes com distribuição geométrica com médias dadas, respectivamente, por 3 e 4. Considere que X e Y representam o número de repetições do experimento até a ocorrência do primeiro sucesso. Nessas condições, a probabilidade denotada por $P(X \leq 2, Y = 3)$ é igual a

a) 3/25.
b) 5/48.
c) 5/64.
d) 7/64.
e) 5/32.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Essa questão rigorosamente cobra uma distribuição de duas variáveis aleatórias independentes. Porém, isso não vai ser diferente do que estamos acostumados.
A probabilidade de dois eventos independentes é igual ao produto das probabilidades.
Então, devemos primeiramente obter as duas probabilidades separadas, isto é, P (X ≤ 2) e P (Y = 3). Como essas duas variáveis são distribuídas geometricamente, o valor esperado é igual ao inverso da probabilidade. Assim, podemos calcular as probabilidades associadas às distribuições X e Y:

$$E[X] = \frac{1}{p_X} \therefore p_X = \frac{1}{E[X]} = \frac{1}{3}$$

$$E[Y] = \frac{1}{p_Y} \therefore p_Y = \frac{1}{E[Y]} = \frac{1}{4}$$

Agora, podemos calcular as probabilidades. Para a variável aleatória Y, podemos escrever:

$$P(Y = 3) = (1 - p)^2 \cdot p$$

$$P(Y = 3) = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$$

E, agora, vamos calcular P (X≤2), lembrando-nos da probabilidade acumulada na distribuição geométrica:

$$P(X \leq 2) = 1 - (1 - p)^2 = 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$P(X \leq 2) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Dessa forma, a probabilidade desejada pode ser obtida como o produto dos dois passos calculados anteriormente:

$$P(X \leq 2, Y = 3) = P(X \leq 2) \cdot P(Y = 3) = \frac{9}{64} \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{64}$$

Letra c.

---

016. (CESPE/TELEBRAS/2013/ESPECIALISTA EM GESTÃO DE TELECOMUNICAÇÕES/ESTATÍSTICA) O número X de realizações de determinado experimento necessárias para obter o primeiro sucesso segue a distribuição geométrica $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$. Considerando $(x_1,..., x_n)$ uma amostra de *X*, julgue o item subsequente. Se, após realizadas cinco séries do experimento, cada série tiver terminado com o primeiro sucesso e os números de experimentos, em cada série, tiverem sido 4, 7, 6, 5 e 3, então o estimador de máxima verossimilhança para *p* é igual a 0,2.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Vamos calcular a média amostral.

$$\mu = \frac{4+7+6+5+3}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

No estimador de máxima verossimilhança, consideramos que a média populacional da variável é igual à média amostral, no caso, igual a 5. Em uma distribuição geométrica, podemos estabelecer a relação entre a média populacional e o parâmetro de probabilidade:

$$E[X] = \frac{1}{p} \therefore p = \frac{1}{E[X]} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Certo.

---

017. (FCC/CNMP/2015/ESTATÍSTICA) Utilizando o método dos momentos, deseja-se obter uma estimativa do parâmetro p da distribuição geométrica $P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}$, em que x = 1, 2, 3,... Para isto, observou-se em 6 experiências quando determinado evento com probabilidade p ocorreu pela primeira vez. A tabela abaixo apresenta o resultado destas observações:

Experiência Ocorrência pela primeira vez

1 segunda

2 quarta

3 primeira

4 segunda

5 terceira

6 terceira

O valor desta estimativa, com base nestas experiências, é, em %, de

a) 15.

b) 30.

c) 75.

d) 60.

e) 40.

Obs.: Considere que o método dos momentos nada mais é do que o estimador de máxima verossimilhança.

Para o estimador de máxima verossimilhança, vamos calcular a média amostral:

$$\mu = \frac{2+4+1+2+3+3}{6} = \frac{15}{6} = 2{,}5$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Em uma distribuição geométrica, podemos estabelecer a relação entre a média populacional e o parâmetro de probabilidade:

$$E[X] = \frac{1}{p} \therefore p = \frac{1}{E[X]} = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4 = 40\%$$

Letra e.

---

018. (FCC/TRT-19ª REGIÃO/AL/2014/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Em uma realização de 4 experiências, verificou-se que um acontecimento, cuja probabilidade é p, ocorreu, pela primeira vez, na terceira, segunda, terceira e primeira experiências, respectivamente. Com base nestas experiências e utilizando o método dos momentos, deseja-se obter uma estimativa pontual do parâmetro p da distribuição geométrica $P(X = x) = (1-p)^{x-1} p$ (x = 1, 2, 3...). O valor encontrado para esta estimativa é de

a) 3/4.
b) 1/2.
c) 1/3
d) 2/3.
e) 4/9.

Para o estimador de máxima verossimilhança, vamos calcular a média amostral:

$$\mu = \frac{3+2+3+1}{4} = \frac{9}{4}$$

Em uma distribuição geométrica, podemos estabelecer a relação entre a média populacional e o parâmetro de probabilidade:

$$E[X] = \frac{1}{p} \therefore p = \frac{1}{E[X]} = \frac{4}{9}$$

Letra e.

---

5. Distribuição de Poisson

Assim como a distribuição geométrica, é bastante comum que a distribuição de Poisson esteja frequente em editais. Porém, questões de provas dessa distribuição são mais cobradas somente nos concursos específicos da área de Estatística.

Você também pode pular essa distribuição. Porém, essa é uma distribuição bem simples com poucas fórmulas, então, pode ser que o custo-benefício dela compense.

A distribuição de Poisson expressa a probabilidade de uma série de eventos ocorrer a quantidade de ocorrências de um determinado fenômeno em um intervalo de tempo T.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Pense, por exemplo, que, em média, chegam 4 clientes por hora em um supermercado. A probabilidade de que cheguem 10 clientes em uma mesma hora naquele supermercado pode ser calculada pela distribuição de Poisson.

Essa distribuição média tem um único parâmetro: o parâmetro λ. Esse parâmetro é justamente a média de ocorrência dos eventos. Assim, a distribuição de probabilidade é dada por:

$$X \sim Po\ (\lambda) \therefore P\{X = k\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Nessa expressão, P {X = k} representa a probabilidade de k ocorrências no intervalo de tempo considerado.

O número "**e**" é conhecido como **Número de Euler** e é uma importante referência para o estudo de funções exponenciais. Esse número é um número irracional, sendo aproximadamente igual a:

$$e \cong 2{,}71828\ldots$$

Considero desnecessário saber o valor aproximado do número de Euler. O enunciado fornecerá para você diretamente as potências necessárias para calcular a distribuição de probabilidade de que trata a questão.

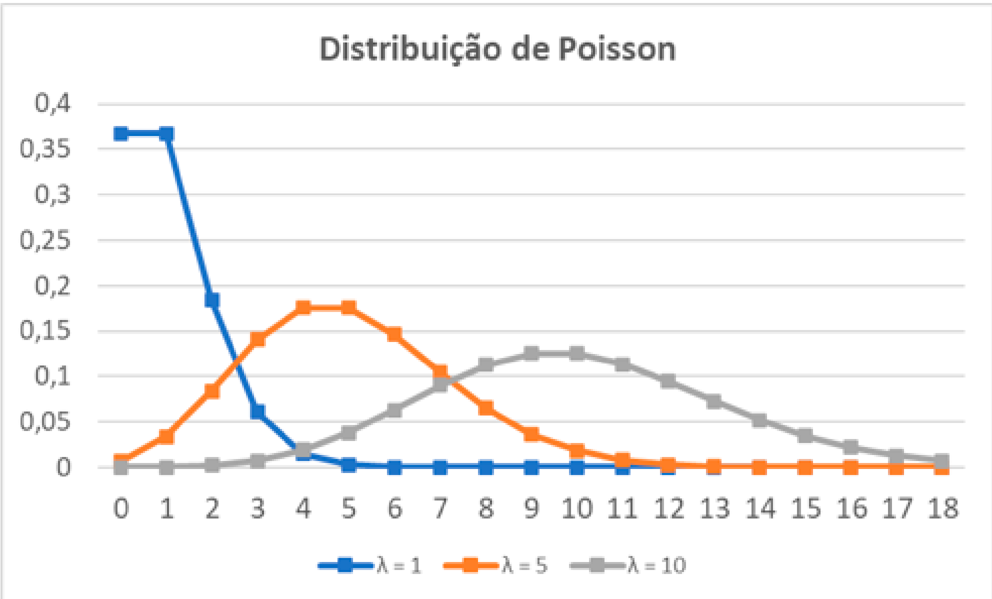
É bastante complicado provar a condição de validade para a distribuição de Poisson, bem como sua média e variância. Por isso, não faremos a demonstração aqui nesse material.

Memorize, então, uma interessante propriedade: a variância de uma distribuição de Poisson é igual à sua média.

$$E[X] = \lambda$$

$$Var[X] = \lambda$$

Vamos desenhar o gráfico referente a essa distribuição de probabilidade.



O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Memorize, então, uma interessante propriedade: a variância de uma distribuição de Poisson é igual à sua média.

$$E[X] = \lambda$$
$$Var[X] = \lambda$$

Observe que a distribuição sempre atinge um pico para k muito próximo do parâmetro λ. Além disso, quanto maior o parâmetro λ, mais espalhada será a distribuição de probabilidades.

Pense, por exemplo, que o número médio de clientes que chegam a um supermercado seja igual a 10 clientes por hora. Nesse caso, para expressar a probabilidade de que **k** clientes cheguem em uma determinada hora, teríamos uma distribuição de Poisson, cujo parâmetro é λ = 10.

Por outro lado, pense que o número médio de clientes que chegam em uma loja de ternos seja igual a 1 cliente por hora. Nesse caso, teríamos uma distribuição de Poisson, com parâmetro λ = 1.

Concorda comigo que, se chega 1 cliente por hora na loja de ternos, é muito pouco provável que, em uma determinada hora, cheguem 5 clientes de uma vez, não é?

Por outro lado, no supermercado, é relativamente provável que haja um horário de movimento mais fraco, em que apareçam 5 clientes em uma hora. Também é relativamente provável que, em outro horário, o movimento esteja melhor e que apareçam 15 clientes em uma única hora.

Direto do Concurso

019. (FEPESE/ISS CRICIÚMA/2017/AUDITOR-FISCAL DE RENDAS E TRIBUTOS) Considere as seguintes descrições de distribuições de probabilidade de variáveis aleatórias:

Distribuição 1: expressa a probabilidade de que uma dada quantidade de eventos ocorra em um dado intervalo de tempo, se conhecemos a taxa média de ocorrência desses eventos nesse intervalo de tempo, e se a ocorrência de um evento é independente do momento da ocorrência do evento anterior.

Distribuição 2: expressa o número de sucessos numa sequência de **n** experimentos feitos de forma que: cada experimento tem exclusivamente como resultado duas possibilidades, sucesso ou fracasso; cada experimento é independente dos demais; e a probabilidade de sucesso em cada evento é sempre a mesma.

As distribuições descritas acima são, respectivamente:

a) 1: normal • 2: qui-quadrado
b) 1: de Poisson • 2: normal
c) 1: de Poisson • 2: binomial
d) 1: qui-quadrado • 2: normal
e) 1: qui-quadrado • 2: binomial

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

A definição de uma distribuição de Poisson se trata sobre eventos com taxa média de ocorrência conhecida. Ela diz respeito a um intervalo de tempo e permite o cálculo da probabilidade de ocorrência de eventos neste intervalo. A distribuição 1 é a de Poisson.
Da definição de distribuição binomial sabemos que possui as variáveis n (número de experimentos), k (ocorrências desejadas, sucessos) e p (probabilidade destas ocorrências acontecerem), que para este caso é igual para todas as tentativas. Na distribuição binomial há apenas duas alternativas para cada tentativa: sucesso ou falha. A distribuição 2 é a binomial.
Letra c.

O total diário – X – de pessoas recebidas em uma unidade de pronto atendimento (UPA) para atendimento ambulatorial, e o total diário - Y - de pessoas recebidas nessa mesma UPA para atendimento de urgência segue processos de Poisson homogêneos, com médias, respectivamente, iguais a 20 pacientes/dia e 10 pacientes/dia, e as variáveis aleatórias X e Y são independentes. Sabe-se que, em média, a necessidade de cuidados hospitalares atinge 10% dos pacientes do atendimento ambulatorial e 90% dos pacientes do atendimento de urgência.
A partir dessa situação hipotética, julgue o próximo item, considerando que o registro da necessidade de cuidados hospitalares seja feito no momento em que o paciente chegue à UPA e que H seja a quantidade diária registrada de pacientes com necessidades de cuidados hospitalares.

020. (CESPE/EBSERH/2018/ANALISTA ADMINISTRATIVO/ESTATÍSTICO) A média da variável aleatória H é igual a 11 pacientes/dia.

Observe que os pacientes do atendimento ambulatorial chegam a uma taxa média de 20 pacientes por dia e que 10% deles necessita de cuidados hospitalares – portanto, são 2 em média por dia; já os pacientes do atendimento de urgência chegam a uma taxa média de 10 pacientes por dia e que 90% deles necessitam de cuidados hospitalares – portanto, são 9 em média por dia.
Assim, a média da variável H pode ser expressa matematicamente pelo valor esperado:

$$E[H] = 0{,}10.20 + 0{,}90.10 = 2 + 9 = 11$$

Certo.

---

021. (CESPE/EBSERH/2018/ANALISTA ADMINISTRATIVO/ESTATÍSTICO) Considerando a equivalência 1 dia=24 horas, então o tempo médio de chegada entre dois pacientes consecutivos para o atendimento de urgência nessa UPA é inferior a 3 horas.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Note que são 10 pacientes que chegam por dia para o atendimento de urgência. Como 1 dia tem 24 horas, então o tempo médio de chegada de um paciente é:

$$t = \frac{24}{10} = 2{,}4\ h$$

De fato, o tempo médio de chegada é inferior a 3 horas.

Certo.

022. (CESPE/EBSERH/2018/ANALISTA ADMINISTRATIVO/ESTATÍSTICO) Supunha que, nessa UPA, o sistema de atendimento seja descrito por um modelo de fila simples com servidor único e baseado no processo de nascimento e morte, e que X +Y seja o total diário de pessoas atendidas na UPA. Nessa situação, o processo estará em estado de equilíbrio se a taxa de atendimento de pacientes for igual ou superior a 30 pacientes por dia.

O valor esperado é um operador linear. Portanto, a esperança da soma é igual à soma das esperanças:

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

$$E[X+Y] = 20 + 10 = 30$$

Portanto, a taxa de atendimento de equilíbrio é igual a 30 pacientes por dia. Como o enunciado fala em "igual ou superior", a afirmação está correta, até porque "igual ou superior" já inclui o "igual".

Certo.

023. (CESPE/EBSERH/2018/ANALISTA ADMINISTRATIVO/ESTATÍSTICO) A soma X + Y segue uma distribuição de Poisson com média e variância respectivamente iguais a 30 e 900.

O valor esperado é um operador linear. Portanto, a esperança da soma é igual à soma das esperanças:

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

$$E[X+Y] = 20 + 10 = 30$$

Portanto, de fato, a média é igual a 30. Porém, na distribuição de Poisson, a média é igual à variância. Portanto, a variância deveria ser igual a 30, e não 900.

Errado.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

024. (FCC/SEFAZ-BA/2019/ESTATÍSTICO) Uma variável aleatória X representa o número de contribuintes que chega a cada hora para ser atendido em um órgão público. Supõe-se que X tem distribuição de Poisson, com parâmetro λ, ou seja, $p(x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$, sendo e a base do logaritmo (ln) tal que ln(e) = 1. Se P(x = 2) = P(x = 3), então a probabilidade de que menos de 3 contribuintes cheguem em 1 hora é

Dados:

e^{-1} = 0,37,

e^{-2} = 0,14 e

e^{-3} = 0,05

a) 30,0%.

b) 42,5%.

c) 22,5%.

d) 57,5%.

e) 37,5%.

Questão bastante direta sobre a distribuição de Poisson.

$$P(X = 2) = P(X = 3)$$

$$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} = \frac{\lambda^3 . e^{-\lambda}}{3!}$$

Cortando as exponenciais dos dois lados, temos:

$$\frac{\lambda^2}{2.1} = \frac{\lambda^3}{3.2.1}$$

$$\frac{\lambda^2}{2} = \frac{\lambda^3}{6}$$

Dessa forma, como $\lambda \neq 0$, podemos simplificar dos dois lados:

$$\frac{1}{2} = \frac{\lambda}{6} \therefore \lambda = \frac{6}{2} = 3$$

Encontramos o parâmetro da exponencial. Com isso, vamos calcular a expressão pedida.

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

Precisamos calcular as três probabilidades envolvidas.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

$$P(X=0)=\frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!}=\frac{1.e^{-3}}{1}=0{,}05$$

$$P(X=1)=\frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!}=\frac{3^1.e^{-3}}{1}=3.0{,}05=0{,}15$$

$$P(X=2)=\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}=\frac{3^2.e^{-3}}{2.1}=\frac{9.0{,}05}{2}=0{,}225$$

De posse dos três valores de probabilidade, podemos calcular a expressão pedida.

$$P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$

$$P(X<3)=0{,}05+0{,}15+0{,}225=0{,}425=42{,}5\%$$

Letra b.

---

025. (FCC/DPE-SP/2015/ESTATÍSTICO/ADAPTADA) Suponha que o número mensal de prisões em flagrante, comunicadas a uma Defensoria Pública de uma determinada região, tenha distribuição de Poisson com média 9. Nessas condições, a probabilidade de serem comunicadas, à Defensoria, pelo menos 3 prisões em flagrante em um período de 10 dias é igual a:

Dados:

e^{-2} = 0,14; e^{-3} = 0,05

a) 0,575.
b) 0,425.
c) 0,525.
d) 0.475.
e) 0,555.

A média da distribuição de Poisson é dada pelo próprio parâmetro λ. Foi fornecida a média mensal (30 dias) que é $\lambda_{30}=9$. Para o período de 10 dias, a média seria proporcional:

$$\frac{\lambda_{10}}{10}=\frac{\lambda_{30}}{30}$$

$$\frac{\lambda_{10}}{10}=\frac{9}{30}$$

$$\therefore \lambda_{10}=\frac{9}{30}\cdot 10=\frac{9}{3}=3$$

Dessa forma, a média da Poisson é igual a 3.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Queremos calcular a probabilidade de pelo menos 4 prisões em flagrante. Para isso, é mais fácil calcular a probabilidade complementar: ou seja, de haver 3 ou menos prisões em flagrante.

$$P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3)$$

Dessa forma, basta calcular P (X = 0), P (X = 1) e P (X = 2).

$$P(X = 0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = \frac{1.0,05}{1!} = 0,05$$

$$P(X = 1) = \frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} = \frac{3.0,05}{1!} = 0,15$$

$$P(X = 2) = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} = \frac{3^2.0,05}{2!} = \frac{9.0,05}{2.1} = 0,225$$

Dessa forma, temos:

$$P(X \leq 3) = 0,05 + 0,15 + 0,225 = 0,425$$

Por fim, temos:

$$P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0,425 = 0,575$$

Letra a.

---

026. (FGV/TJ-RO/2015/ESTATÍSTICO) O número de recursos em um processo é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro λ = 5. Então a probabilidade de que um processo tenha menos do que 2 recursos é:

a) $31e^{-5}$
b) $6e^{-5}$
c) $5e^{-5}$
d) $1 - 6e^{-5}$
e) $1 - 31e^{-5}$

Questão bastante direta sobre a distribuição de Poisson.

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} = \frac{e^{-5}5^0}{0!} + \frac{e^{-5}5^1}{1!}$$

$$P = e^{-5}\left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!}\right) = e^{-5}\left(\frac{1}{1} + \frac{5}{1}\right) = 6e^{-5}$$

Letra b.

---

027. (FCC/SEFAZ-PI/2015/ANALISTA DO TESOURO ESTADUAL) O número de falhas mensais de um computador é uma variável que tem distribuição de Poisson com média λ. Sabe-se que

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

λ é igual à média de uma distribuição uniforme no intervalo [2, 4]. Nessas condições, a probabilidade de o computador apresentar exatamente duas falhas no período de 15 dias é igual a:
Dados: $e^{-3} = 0,05$; $e^{-1,5} = 0,22$.

a) 22,50%
b) 12,50%
c) 24,15%
d) 15,25%
e) 24,75%

O número de falhas mensais terá a média exatamente igual ao ponto médio do intervalo fornecido:

$$\lambda_{30} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Porém, não nos interessam as falhas mensais. Estamos interessados apenas nas falhas no período de 15 dias. Se a média de falhas em 30 dias é de 3 falhas, então, a média de falhas em metade do período será também a metade, portanto 1,5 falhas.

$$\therefore \lambda_{15} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Agora, podemos calcular a probabilidade de ocorrência de exatamente duas falhas:

$$P(X=2) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-1,5}(1,5)^2}{2!} = \frac{0,22.2,25}{2}$$

$$P(X=2) = 0,11.2,25 = 0,2475 = 24,75\%$$

Letra e.

---

028. (FCC/TRE-SP/2012/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Suponha que o número de eleitores que chegam a uma seção de uma Zona Eleitoral no dia de uma determinada eleição, siga a uma distribuição de Poisson com uma média de chegada de 30 eleitores por meia hora. A probabilidade de que cheguem menos de 3 eleitores em 5 minutos é:

a) $12,5\ e^{-5}$.
b) $12,5\ e^{-6}$
c) $18,5\ e^{-5}$
d) $17,5\ e^{-5}$.
e) $17,5\ e^{-6}$.

A média de eleitores que chegam em 5 minutos deve ser tomada como proporcional a 5 minutos.

$$\lambda_5 = \frac{30}{6} = 5$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Como queremos que cheguem menos de 3 eleitores, queremos:

$$P = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}$$

$$P = e^{-5}\left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!}\right) = e^{-5}\left(\frac{1}{1} + \frac{5}{1} + \frac{25}{2}\right) = 18{,}5e^{-5}$$

Letra c.

---

029. (FCC/TRT-11ª REGIÃO/2017/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Suponha que:

I – A variável X, que representa o número mensal de suicídios no país A, tem distribuição de Poisson com média mensal 2.

II – A variável Y, que representa o número mensal de suicídios no país B, tem distribuição de Poisson com média mensal 4.

III – As variáveis X e Y são independentes

Nessas condições, a probabilidade de em determinado mês ocorrerem menos de 2 suicídios no país A e exatamente 2 no país B é igual a

Dados:

$e^{-1} = 0{,}37$

$e^{-2} = 0{,}135$

$e^{-4} = 0{,}018$

a) 4,122%

b) 5,548%

c) 5,832%

d) 3,565%

e) 4,468%

Primeiramente, vamos calcular P(A) que representa a probabilidade de ocorrerem menos de dois suicídios no país A.

$$P(A) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} = \frac{e^{-2}2^0}{0!} + \frac{e^{-2}2^1}{1!}\text{p}$$

$$P(A) = \frac{0{,}135.1}{1} + \frac{0{,}135.2}{1} = 0{,}135 + 0{,}27 = 0{,}405$$

Agora, vamos calcular a probabilidade de ocorrerem exatamente dois suicídios no país B:

$$P(B) = P(Y = 2) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^2}{2!} = \frac{e^{-4}.4^2}{2} = \frac{0{,}018.16}{2} = 0{,}144$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Por fim, queremos a probabilidade da intersecção, pois o enunciado usa a palavra E:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0{,}405.0{,}144 = 0{,}05832 = 5{,}832\%$$

Letra c.

---

030. (FCC/INFRAERO/2011/ESTATÍSTICO) O número de passageiros que chegam a um posto de atendimento de uma empresa de aviação para fazer o check-in às quartas-feiras pela manhã tem distribuição de Poisson com taxa média de 5 passageiros por minuto. A probabilidade de chegar a esse mesmo posto, numa quarta-feira pela manhã, pelo menos 2 passageiros em 30 segundos, é de:

Dados: $e^{-1} = 0{,}368$; $e^{-2} = 0{,}135$; $e^{-2{,}5} = 0{,}082$

a) 0,575.
b) 0,682
c) 0,713.
d) 0,754.
e) 0,814.

Devemos nos lembrar que a média de chegada de passageiros em 30 segundos é metade da média por minuto.

$$\lambda_{30} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

A probabilidade chegar pelo menos 2 passageiros pode ser mais facilmente calculada pela probabilidade da exclusão.

$$P = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} - \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!}$$

$$P = 1 - \frac{e^{-2{,}5}(2{,}5)^0}{0!} - \frac{e^{-2{,}5}(2{,}5)^1}{1!}$$

$$P = 1 - \frac{0{,}082.1}{1} - \frac{0{,}082.2{,}5}{1} = 1 - 0{,}082 - 0{,}205 = 1 - 0{,}287 = 0{,}713$$

Letra c.

---

031. (FCC/SEFAZ-SP/2009/AGENTE FISCAL DE RENDAS) O número de pessoas que chega ao guichê de uma repartição pública para autuação de processos apresenta uma distribuição de Poisson a uma taxa de duas pessoas por minuto. A probabilidade de que nos próximos 2 minutos chegue pelo menos uma pessoa neste guichê é:

a) $(e^4 - 1).e^{-4}$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

b) $4.e^{-4}$
c) $(e^4 - 4).e^{-4}$
d) $2.[(e^2 - 1)].e^{-2}$
e) $(e^2 - 2).e^{-2}$

A média de chegada é de duas pessoas por minuto. Portanto, em dois minutos, temos uma média de quatro pessoas chegando. Sendo assim, devemos usar $\lambda = 4$.
Agora, a probabilidade de chegar pelo menos uma pessoal é igual ao complementar da probabilidade de não chegar ninguém.

$$P = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-4}.\frac{4^0}{0!} = 1 - e^{-4}$$

Podemos fazer um certo trabalho com a expressão:

$$1 - e^{-4} = e^{-4}(e^4 - 1)$$

Letra a.

032. (FGV/SEFAZ-RJ/2009/AGENTE FISCAL DE RENDAS) O número de clientes que buscam, em cada dia, os serviços de um renomado cirurgião tem uma distribuição de Poisson com média de 2 pacientes por dia.
Para cada cirurgia efetuada, o cirurgião recebe R$ 10.000,00. No entanto, ele consegue fazer o máximo de duas cirurgias em um dia; clientes excedentes são perdidos para outros cirurgiões.
Assinale a alternativa que indique o valor esperado da receita diária do cirurgião.
Dado: e^{-2} =0,14.
a) R$5.600,00
b) R$8.400,00
c) R$10.000,00
d) R$14.400,00
e) R$20.000,00

Se não chegar nenhum paciente, o cirurgião não terá receita. Se chegar apenas um, a sua receita será de R$10.000. Se chegarem dois ou mais, a sua receita de R$20.000, porque ele não poderá atender mais pacientes. Portanto, vamos calcular as probabilidades associadas.

$$P(X = 0) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-2}\,.\,2^0}{0!} = \frac{0{,}14.1}{1} = 0{,}14$$

$$P(X = 1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-2}\,.\,2^1}{1!} = \frac{0{,}14.2}{1} = 0{,}28$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0{,}14 - 0{,}28 = 1 - 0{,}42 = 0{,}58$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Montemos a tabela de probabilidades:

Número de Clientes	Probabilidade	Receita
0	0,14	R$0
1	0,28	R$10.000
≥ 2	0,58	R$20.000

Sendo assim, o valor esperado da receita do cirurgião é:

$$E[X] = 0{,}14.0 + 0{,}28.10000 + 0{,}58.20000$$

$$E[X] = 0 + 2800 + 11600 = 14400$$

Letra d.

6. Distribuição Normal

A distribuição normal, também conhecida como gaussiana, é, sem dúvidas, a distribuição de probabilidade mais importante da Estatística. Ela será muito estudada em diversos teoremas, como o Teorema do Limite Central, que define Intervalos de Confiança.

A distribuição normal é contínua. Isso significa que ela se aplica a variáveis contínuas, isto é, aquelas que podem assumir qualquer valor real.

Por exemplo, o nível de açúcar no sangue de uma pessoa é uma variável contínua, porque ela pode assumir qualquer valor. Uma pessoa pode ter 95 mg/L de glicose, mas também pode ter 90,38 mg/L ou ainda 92,745 mg/L.

É diferente do que acontece com o número de filhos de um casal, que é uma variável discreta: um casal só pode ter 1 filho, 2 filhos ou 3 filhos. Não existe a probabilidade de um casal ter 1/2 filho.

A distribuição normal é caracterizada por sua média (μ) e variância (σ^2). Quando queremos dizer que uma variável aleatória X segue uma distribuição normal, utilizamos a seguinte notação:

$$\boxed{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$$

A distribuição normal é caracterizada por uma **função densidade de probabilidade**, e não por uma distribuição de probabilidades, como acontece com as distribuições contínuas. Na próxima seção, nós já veremos qual o significado especial desse nome.

Por enquanto, vamos apresentar a densidade de probabilidade característica da normal.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Eu sei que essa expressão parece bastante complicada e assusta. Porém, eu vou te dar uma boa notícia: eu nem recomendo que você decore essa expressão. Até hoje, eu confesso

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

que, mesmo usando Estatística quase que diariamente no meu trabalho, eu nunca utilizei essa expressão na minha vida. Quando estamos falando da distribuição normal, o mais comum é recorrer a tabelas. Em breve, nós vamos conhecer as famosas tabelas da distribuição normal – essas são sim são bastante úteis.

Em particular, quando a média da distribuição é nula e a variância é igual a 1, a distribuição normal é conhecida como normal **padrão.**

O gráfico da normal padrão é bastante conhecido e você deve registrá-lo. Você será muito bem-sucedido em Estatística, se tiver a prática de desenhar esse gráfico em todas as questões de Estatística Inferencial. Lembra bastante um sino.

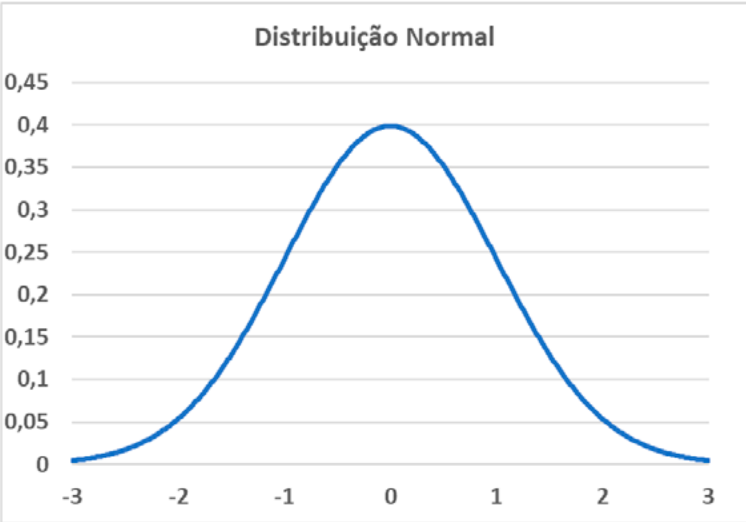


Figura 5: Gráfico da Curva Normal

Observe que esse gráfico é bem diferente do que era visto nas distribuições de probabilidade discretas. Naquelas distribuições, o gráfico só era visualizado em alguns pontos. Vejamos o caso da distribuição binomial com n = 10 e p = 0,5. Esse gráfico só pode ser calculado nos pontos: {0, 1, 2, ..., 9, 10}.

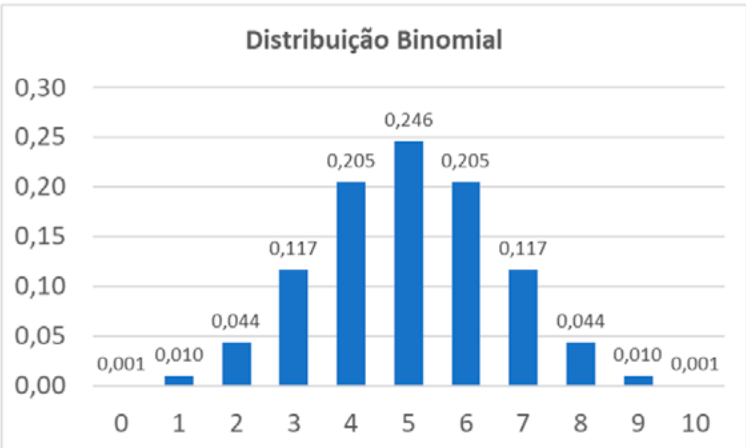


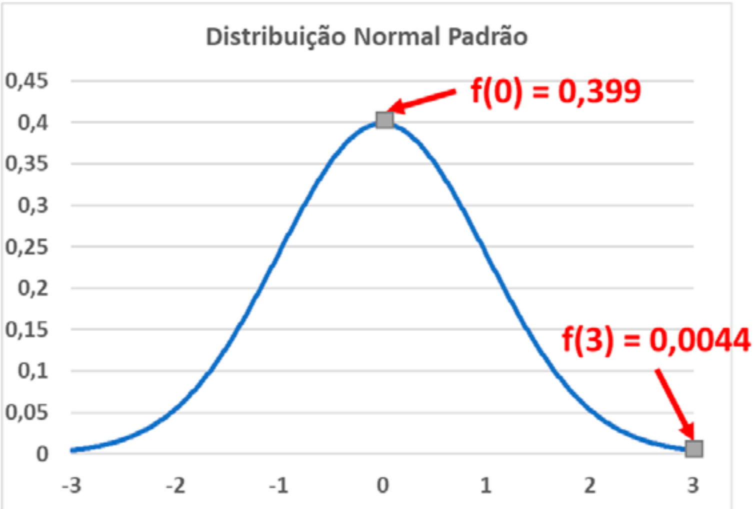
Figura 6: Distribuição Binomial com n = 10 e p = 0,5

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

É bem diferente do que acontece com o gráfico da distribuição normal, que pode ser calculado para qualquer valor real.

6.1. O Que é uma Densidade de Probabilidade?

Embora o gráfico da distribuição normal possa ser calculado para qualquer valor real, os pontos retratados nela não correspondem a valores de probabilidade. Retornemos ao gráfico da distribuição normal padrão:



Considere que X seja uma variável aleatória que segue uma distribuição normal padrão. Embora, para uma normal padrão, f(0) = 0,399 seja muito maior que f(3) = 0,0044, isso **não significa que a probabilidade** de X = 0 seja maior que a probabilidade de X = 3.

Na realidade, a probabilidade de qualquer ponto específico na distribuição normal padrão **é sempre igual a zero.** Podemos escrever o seguinte:

$$P\{X = 0\} = P\{X = -3\} = P\{X = 1\} = 0$$

Na realidade, podemos generalizar para qualquer número real:

$$P\{X = a\} = 0; \ \ \forall\, a \in \ \mathbb{R}$$

Se você não conhece o símbolo ∀, ele significa "para todo". O enunciado matemático anterior mostra que a probabilidade de qualquer número específico é sempre igual a zero na distribuição normal padrão.

Perceba que essa é uma situação bem diferente do que acontece na distribuição binomial, que é uma distribuição discreta. Na binomial, podemos dizer sim que P (X = 5) = 0,246, como mostrado na Figura 6.

Mas, então, qual seria a utilidade do gráfico da distribuição normal? Afinal de contas, nós queremos uma função densidade de probabilidade que nos auxilie a calcular probabilidades, não é mesmo?

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

O sentido de uma **densidade de probabilidades** é que o gráfico não trata valores propriamente de probabilidades, mas sim apenas densidades. A probabilidade deve ser calculada **pela área do gráfico subentendida entre dois pontos**.

Por isso, na distribuição normal, somente assumem valores positivos as probabilidades de intervalos. Por exemplo, podemos calcular as probabilidades dos intervalos P(0 < X < 1) e P(2 < X < 3).

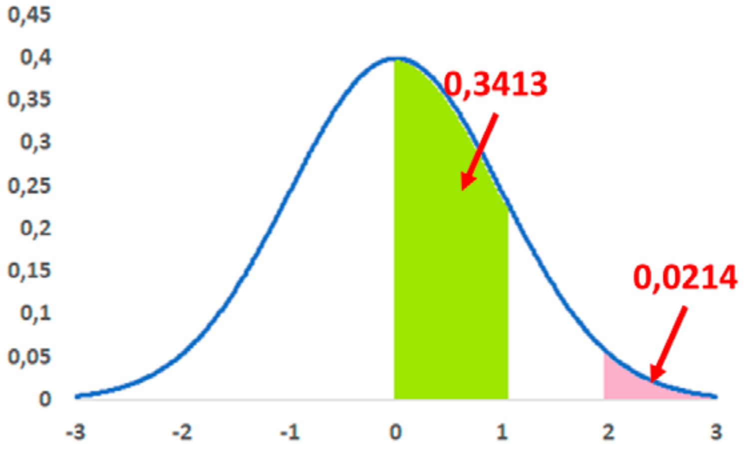


Figura 7: Probabilidades no Gráfico da Distribuição Normal

Usando uma tabela de dados sobre a distribuição normal – não se preocupe, em breve, você também vai aprender a usar, ok? –, nós somos capazes de calcular as probabilidades dos intervalos pedidos, e elas são aproximadamente iguais a:

$$P(0 < X < 1) = 0{,}3413 = 34{,}13\%$$

$$P(2 < X < 3) = 0{,}0214 = 2{,}14\%$$

Desse modo, as probabilidades de intervalos são o que há de mais importante nessa distribuição. É interessante destacar que pouco importa se o intervalo contém ou não os seus extremos, isto é, não importa se os limites do intervalo foram definidos com "maior ou igual" e "menor ou igual", ou somente com "maior" e "menor", porque a probabilidade de um ponto qualquer em uma distribuição contínua é sempre nula.

$$P\{0 < X < 1\} = P\{0 \leq X < 1\} = P\{0 < X \leq 1\} = P\{0 \leq X \leq 1\} = 34{,}13\%$$

Matematicamente, a área debaixo da curva é dada por uma integral:

$$P\{a < X < b\} = \int_{x=a}^{b} f(x)dx$$

Mas, nem se preocupe com essa integral. De maneira geral, eu considero muito pouco provável que uma integral seja cobrada em provas de concurso público. Mas, a integral da normal não

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

é cobrada nem mesmo nas faculdades de engenharia, porque ela é impossível de ser calculada matematicamente.

Não podemos calcular exatamente uma integral debaixo da curva da distribuição normal. Mas, nós somos capazes de calcular valores aproximados com o auxílio de um computador.

6.2. Densidade de Probabilidade Acumulada

Pelos axiomas de Kolgomorov, o somatório total de todas as probabilidades associadas a uma distribuição normal deve ser igual a 1 (ou 100%).

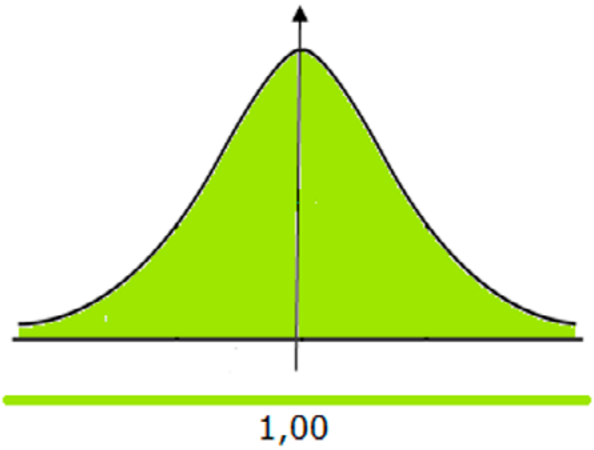


Figura 8: A área total sob toda a curva normal é igual a 1

E, acredite em mim: isso é possível sim de provar teoricamente, porém, isso requer uso de técnicas avançadas de cálculo integral. Caso você tenha curiosidade, eu coloquei a demonstração no apêndice.

Mas, o que você realmente vai precisar para fazer questões de provas de concurso é aprender a trabalhar com a densidade de probabilidade acumulada para a distribuição normal padrão, cujo gráfico é expresso a seguir.

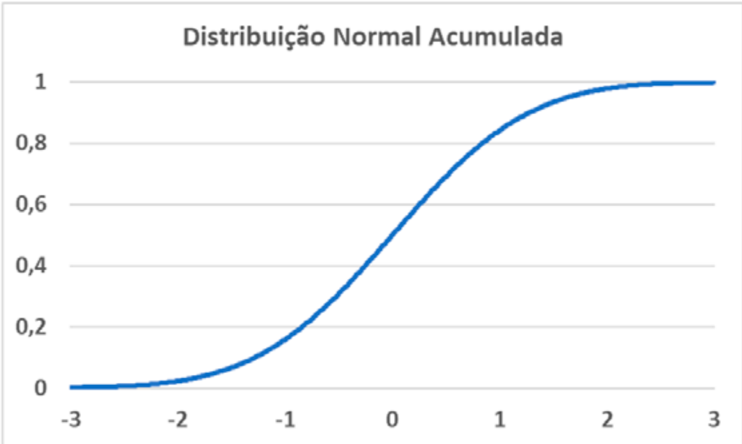


Figura 9: Gráfico da Distribuição Normal Padrão Acumulada

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

O gráfico mostrado na Figura 9 trata as integrais da função densidade de probabilidade normal padrão partindo do extremo esquerdo gráfico – ou, matematicamente falando, partindo de menos infinito. Vamos destacar alguns valores no gráfico da densidade de probabilidade acumulada:

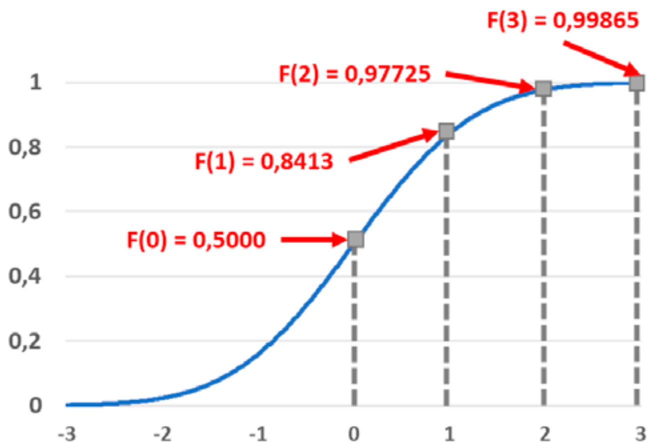


Figura 10: Pontos Específicos da Distribuição Normal Padrão Acumulada

Matematicamente, é comum escrever com **f** minúsculo os valores da densidade de probabilidade da normal padrão e com **F** maiúsculo os valores da densidade de probabilidade acumulada da normal padrão.

Os valores representados na Figura 10 correspondem à área total debaixo do gráfico da curva normal desde o extremo esquerdo do gráfico, isto é, desde o menos infinito até o ponto representado. Vejamos a seguir:

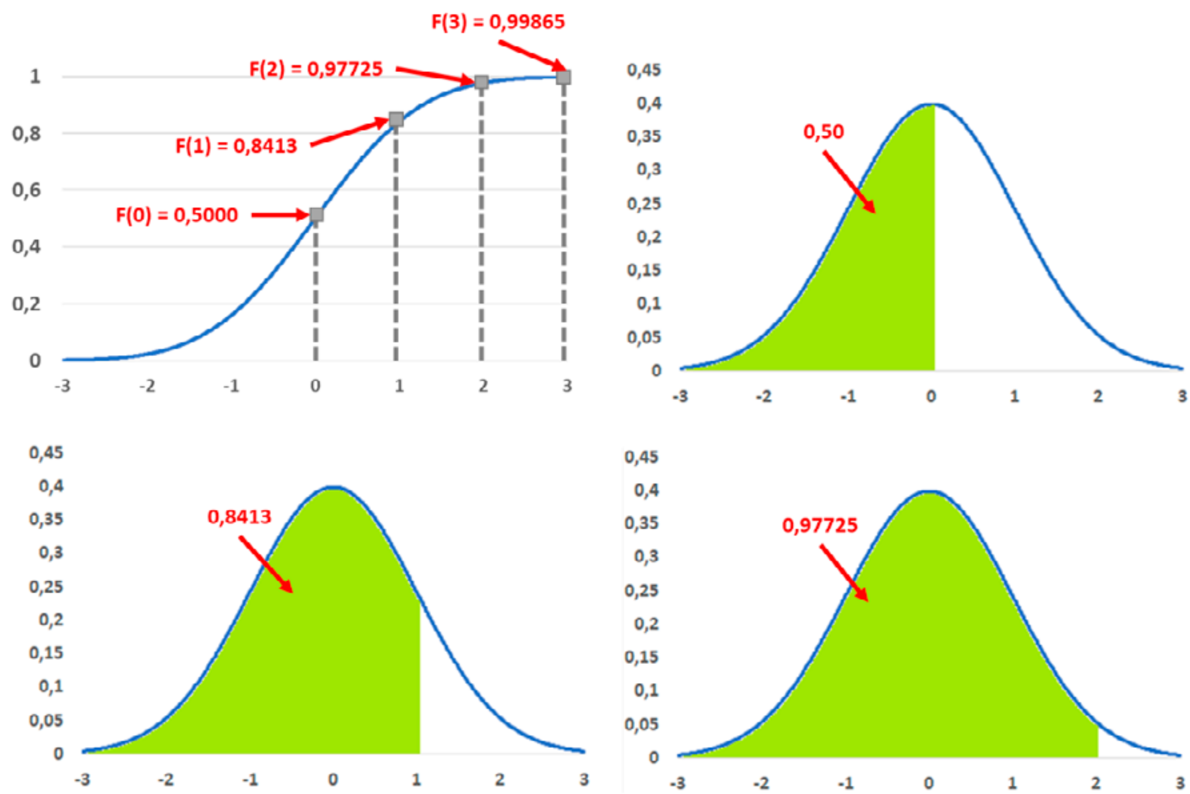


Figura 11: Relação entre a Densidade de Probabilidade Normal Padrão e Acumulada

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Matematicamente, podemos escrever:

$$P(X < 0) = F(0) = 0{,}5000 = 50{,}00\%$$

$$P(X < 1) = F(1) = 0{,}8413 = 84{,}13\%$$

$$P(X < 2) = F(2) = 0{,}97725 = 97{,}725\%$$

$$P(X < 3) = F(3) = 0{,}99865 = 99{,}865\%$$

Esses valores podem ser utilizados para calcular as probabilidades de um intervalo sob a curva normal. Basta tirar as diferenças entre as probabilidades acumuladas.

$$P(0 < X < 1) = F(1) - F(0) = 0{,}8413 - 0{,}5000 = 0{,}3413 = 34{,}13\%$$

$$P(2 < X < 3) = F(3) - F(2) = 0{,}99865 - 0{,}97725 = 0{,}0214 = 2{,}14\%$$

Para entender o porquê de podermos utilizar essa diferença para calcular as probabilidades de um intervalo, basta observar no gráfico da distribuição normal:

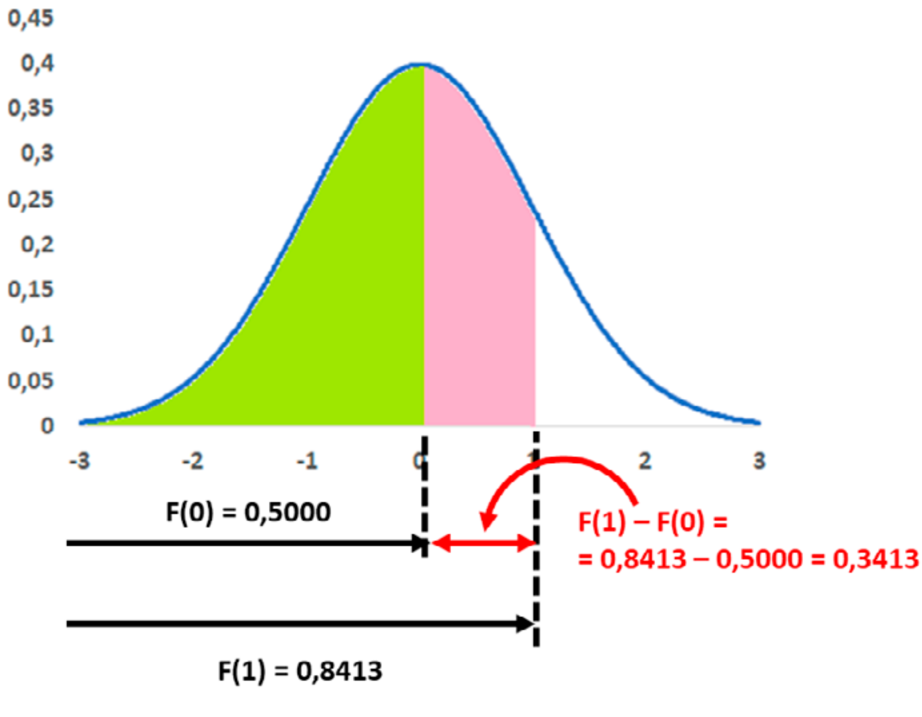


Figura 12: Probabilidade de Intervalos na Distribuição Normal

Portanto, sendo dados os valores da densidade acumulada da distribuição normal padrão, é possível obter as probabilidades vários intervalos.

Os valores da densidade de probabilidade acumulada são sempre fornecidos na prova na forma de uma tabela completa para você pesquisar nela ou ainda na forma de alguns valores específicos que você possa vir a precisar.

Eu gostaria de simplificar a tabela da distribuição normal padrão e trazer para você os principais pontos na Tabela 4. Não é necessário decorar essa tabela, porque os dados serão

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

fornecidos na prova. Mas, esses pontos serão tão utilizados em questões que, naturalmente, com o tempo, você acaba se acostumando a eles.

z	F(z)	z	F(z)
0	0,50 = 50%	**1,28**	0,90 = 90%
1	0,84 = 84%	**1,64**	0,95 = 95%
2	0,977 = 97,7%	**1,96**	0,975 = 97,5%
3	0,99865 = 99,865%	**2,05**	0,98 = 98%

Tabela 4: Principais Pontos no Gráfico da Distribuição Normal Padrão Acumulada

Vejamos alguns exemplos de contas que podem ser realizadas.

Direto do Concurso

033. (INÉDITA/2021) Com base nos dados fornecidos na Tabela 4, determine as probabilidades sobre a distribuição normal:

a) P (1 < Z < 1,96)
b) P (0 < Z < 2,05)
c) P (1,28 < Z < 1,96)

Para calcular as probabilidades na distribuição normal, basta tomar as diferenças de probabilidades acumuladas.

a) $P(1 < Z < 1{,}96) = F(1{,}96) - F(1) = 97{,}5\% - 84\% = 13{,}5\%$
b) $P(0 < Z < 2{,}05) = F(2{,}05) - F(0) = 98\% - 50\% = 48\%$
c) $P(1{,}28 < Z < 1{,}96) = F(1{,}96) - F(1{,}28) = 97{,}5\% - 90\% = 7{,}5\%$

a) 13,5%; b) 48%; c) 7,5%.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Agora, vamos apresentar uma tabela completa de valores observados na distribuição normal padrão acumulada. Nessa tabela, destacamos os pontos principais mostrados anteriormente.

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861

Tabela 5: Tabela da Distribuição Normal Acumulada para P(Z < z)

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

6.3. Normalização

Como vimos, a curva normal padrão tem média nula e variância unitária. Assim, se uma variável Z segue uma distribuição normal padrão, podemos escrever:

$$Z \sim N(0,1)$$

A grande importância da curva normal padrão é que os seus valores são tabelados e serão fornecidos a você na hora da prova.

Quando você estudar o comportamento de uma variável aleatória que segue uma distribuição normal com outros valores média e variância, você deve transformá-la em uma variável aleatória normal padrão, por meio de um procedimento é chamado de normalização. Basta fazer a transformação:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Se a variável X segue distribuição normal, a variável auxiliar Z seguirá sempre uma distribuição normal padrão, isto é, com média nula e variância unitária.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \therefore Z \sim N(0,1)$$

É importante reparar que devemos dividir a variável X pelo **desvio-padrão**, e não pela variância. Esse é um dos erros mais comuns cometidos pelos alunos em questões de prova.

Os alunos sempre tentam colocar a variância no denominador. Memorize: **devemos dividir pelo desvio-padrão**. Vamos treinar a normalização?

Direto do Concurso

034. (CESPE/TCE-PE/2017/ANALISTA DE CONTROLE EXTERNO) **...** e_j denota o erro aleatório que segue distribuição normal com média nula e variância V. Considerando que a estimativa da variância da *V* seja igual a 6, a razão e_j/V é uma variável aleatória que segue distribuição normal com média nula e variância unitária.

De acordo com o enunciado, o erro denotado por **e** é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal com média nula, mas variância diferente de 1, portanto ele não é uma variável normal padrão. Esse item descreve o processo de normalização dessa variável aleatória.
Porém, devemos nos lembrar de que a normalização deve ser feita com o **desvio-padrão**, não com a variância. Portanto, a afirmação está incorreta.
A forma adequada de efetuar a normalização seria:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{e - 0}{\sqrt{V}} = \frac{e}{\sqrt{V}}$$

Errado.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

035. (CESPE/POLÍCIA FEDERAL/2018/AGENTE DA POLÍCIA FEDERAL) O valor diário (em R$ mil) apreendido de contrabando em determinada região do país é uma variável aleatória *W* que segue distribuição normal com média igual a R$ 10 mil e desvio padrão igual a R$ 4 mil. Nessa situação hipotética,
A razão ***w*-20/ √4** segue distribuição normal padrão.

Para encontrarmos a expressão que segue a distribuição normal-padrão temos:

$$Z = \frac{W - \mu}{\sigma} \quad (I)$$

Do enunciado temos os parâmetros:

$$\mu = R\$\, 10\, mil$$

$$\sigma = R\$\, 4\, mil$$

Substituindo os valores acima em (I):

$$Z = \frac{W - 10}{4}$$

$$\frac{W - 10}{4} \neq \frac{W - 20}{\sqrt{4}}$$

Errado.

036. (INÉDITA/2021) Se X é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal com média igual a 5 e variância igual a 4, determine as probabilidades.

a) P (X < 5,5)
b) P (X < 9,8)
c) P (X < 8)

Dados: Para uma distribuição normal padrão, P(Z < 0,25) = 0,599; P(Z < 1,20) = 0,885; P(Z < 1,5) = 0,933; P(Z < 1,96) = 0,975; P(Z < 2,4) = 0,992.

Primeiramente, vamos calcular o desvio-padrão dessa distribuição:

$$\sigma = \sqrt{4} = 2$$

Agora, vamos calcular as probabilidades pedidas.
a)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{5{,}5 - 5}{2} = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Portanto, X = 5,5 corresponde a Z = 0,25. Então, podemos escrever:

$$P(X < 5{,}5) = P(Z < 0{,}25) = 0{,}599 = 59{,}9\%$$

b)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{9{,}8 - 5}{2} = \frac{4{,}8}{2} = 2{,}4$$

Portanto, X = 9,8 corresponde a Z = 2,4. Então, podemos escrever:

$$P(X < 5{,}5) = P(Z < 2{,}4) = 0{,}992 = 99{,}2\%$$

c)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{8 - 5}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Portanto, X = 8 corresponde a Z = 1,5. Então, podemos escrever:

$$P(X < 8) = P(Z < 1{,}5) = 0{,}933 = 93{,}3\%$$

a) 59,9%; b) 99,2%; c) 93,3%

---

037. (CESGRANRIO/BACEN/2010) Estima-se que os retornos de um determinado mercado tenham distribuição normal, com média 20% e desvio padrão 10%. A probabilidade de perdas financeiras é de, aproximadamente:

a) 1%
b) 2,3%
c) 5%
d) 10%
e) 20%

Dados: P (Z<1) = 0,85 e P (Z<2) = 0,977

A probabilidade de perdas financeiras é expressa por:

$$P(X < 0) = ?$$

Para calcular essa probabilidade, devemos proceder à normalização:

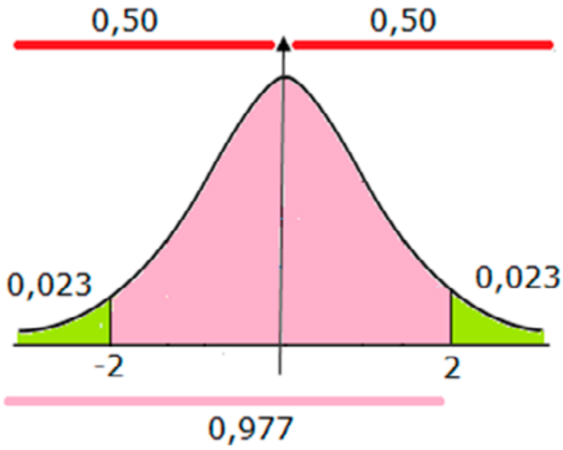
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{0 - 20\%}{10\%} = -2$$

Sendo assim, X = 0 corresponde a Z = -2. Dessa forma, temos que:

$$P(X < 0) = P(Z < -2)$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

O enunciado nos forneceu que P(Z<2) = 0,977. Podemos utilizar esse valor fornecido e a propriedade de simetria da normal para obter a probabilidade desejada.
Como toda a área foi fornecida até 2, então acima de 2 temos uma área restante de 0,023. Por simetria, temos:



Dessa maneira temos:

$$P(X < 0) = P(Z < -2) = 0{,}023 = 2{,}3\%$$

Letra b.

6.3.1. Os Valores Extremos da Normal

Uma das características da distribuição normal é que o seu gráfico tem uma assíntota. Isso significa que ele nunca atinge 100%, porém, a sua distribuição de probabilidade rapidamente atinge valores muito próximos a 100% no eixo positivo. A título de comparação, vamos obter as probabilidades em alguns pontos do gráfico.

Z	P (Z < z)	P (Z > z)
1	0,8413	15,87%
2	0,9772	2,28%
3	0,99865	0,135%
4	0,9999683	0,00317%
5	0,999999713	$2{,}87.10^{-7}$

Note que a probabilidade de que uma observação qualquer se distancie 5 desvios padrões da média em uma distribuição normal é praticamente nula, da ordem de 10^{-7} – isto é, são seis zeros depois da vírgula: 0,000000287.

Pense, por exemplo, que a altura média do brasileiro siga uma distribuição normal com média igual a 169 cm com desvio padrão igual a 8 cm. Isso significa que, para Z = 5:

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$5 = \frac{X - 169}{8} \therefore X - 169 = 5.8 = 40$$

$$\therefore X = 169 + 40 = 239\ cm$$

Dessa forma, a probabilidade de se encontrar um brasileiro com altura superior a 239 cm é muito baixa – cerca de $2{,}87.10^{-7}$. Poderíamos dizer o mesmo para Z = –5:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$-5 = \frac{X - 169}{8} \therefore X - 169 = -5.8 = -40$$

$$\therefore X = 169 - 40 = 129\ cm$$

Então, supondo que a chance de encontrar um brasileiro menor que 129 cm também seria praticamente nula.

6.4. Simetria da Normal

A distribuição normal é **perfeitamente simétrica em relação à origem**.

A primeira implicação desse fato é que a média, a moda e a mediana são todas iguais.

No caso específico da curva normal padrão, a média, a moda e a mediana são iguais a zero.

Além disso, podemos utilizar a propriedade de simetria da distribuição normal para deduzir outras informações. Suponha que a prova tenha oferecido o valor tabelado P(Z < 1) = 0,84.

Vamos fazer uma lista dessas observações que podem ser muito úteis em questões de prova.

1) Como a normal é simétrica em relação à origem, temos que metade do gráfico está à esquerda e metade está à direita. Com base nisso, podemos obter a probabilidade do intervalo $P\ (0 < Z < 1)$:

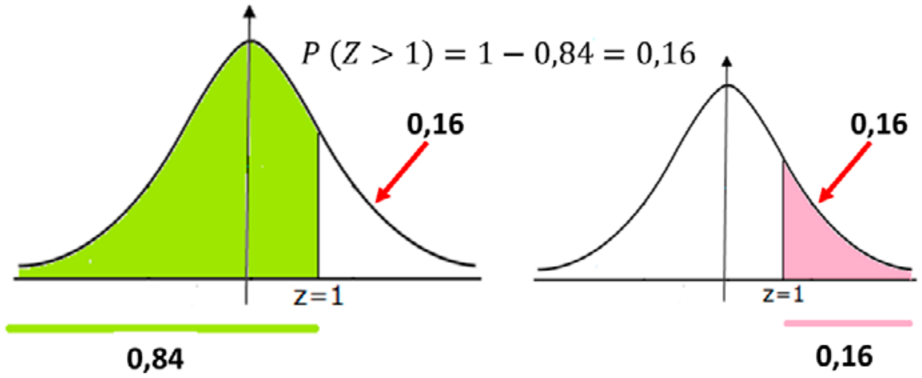
$$P\ (0 < Z < 1) = 0{,}84 - 0{,}5 = 0{,}34$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Observe que essa propriedade já havia sido explicada anteriormente. Nós já tínhamos visto que F(0) = P(Z < 0) = 0,50 = 50%.

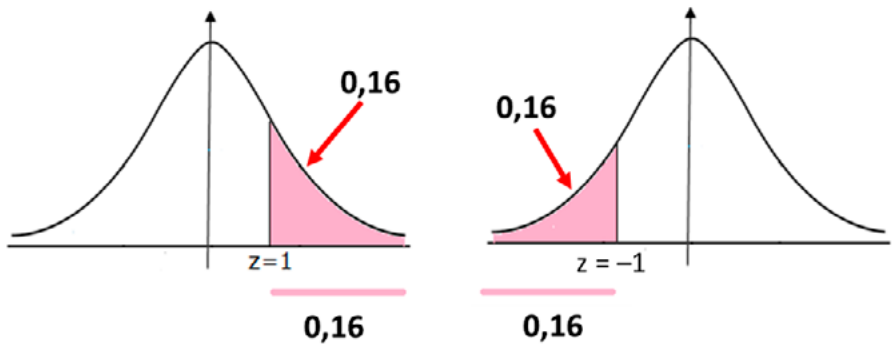
$$P(0 < Z < 1) = F(1) - F(0) = 0{,}84 - 0{,}50 = 0{,}34 = 34\%$$

2) Como a área inteira da curva normal é igual a 1 e já temos que P (Z < 1) = 0,84, o restante que está em branco deve ser igual a 0,16 – exatamente o que falta para 1**.**



Note que, para chegar a essa conclusão, utilizamos a probabilidade complementar. Note trecho P (Z > 1), que está representado na parte direita da figura anterior é justamente a probabilidade complementar do trecho P (Z < 1). Portanto, a soma das duas probabilidades deve ser igual a 1.

3) Outra consequência importante da distribuição normal é que, se traçarmos do outro lado do gráfico z = –1, chegaremos a uma interessante simetria:



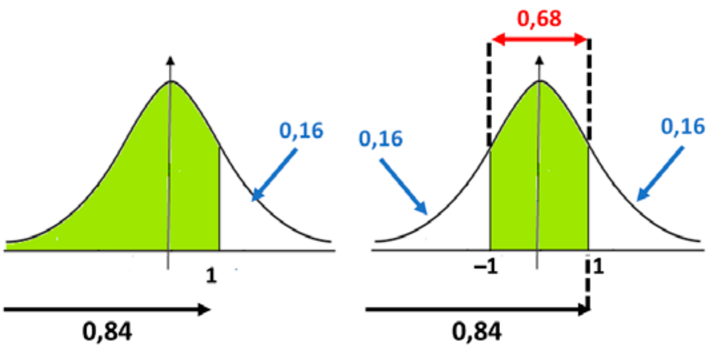
Podemos concluir, pela simetria da distribuição normal padrão, que a parte esquerda do gráfico anterior é exatamente igual à parte direita do gráfico. Então, podemos escrever:

$$P(Z > 1) = P(Z < -1) = 0{,}16 = 16\%$$

4) Normal Bicaudal: a normal bicaudal consiste em calcular a probabilidade de um intervalo simétrico. Vamos calcular, por exemplo a probabilidade P(–1 < Z <1), que pode ser escrita também como P (|Z| < 1).

Além disso, podemos traçar do outro lado z = -1. As regiões partindo da origem e chegando tanto a z = 1 como z = -1 são iguais.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.



Uma relação importante que nós podemos ter entre a probabilidade da normal de um intervalo simétrica é a seguinte:

- Calculamos o complementar da probabilidade do intervalo não simétrico. Nesse caso:

$$1 - 0{,}84 = 0{,}16$$

- O complementar da probabilidade do intervalo simétrico será o dobro do termo calculado acima:

$$P(|Z| < 1) = 1 - 2 \cdot 0{,}16 = 1 - 0{,}32 = 0{,}68$$

Vejamos alguns exemplos:

Intervalo Assimétrico	Probabilidade	Intervalo Simétrico	Probabilidade
$P(Z < 1,28)$	90% = 100% – 10%	$P(\|Z\| < 1,28)$	80% = 100% – 20%
$P(Z < 1,64)$	95% = 100% – 5%	$P(\|Z\| < 1,64)$	90% = 100% – 10%
$P(Z < 1,96)$	97,5% = 100% – 2,5%	$P(\|Z\| < 1,96)$	95% = 100% – 5%

Tabela 6: Comparação entre as Probabilidades dos Intervalos Simétricos e Assimétricos

Por fim, com base no temos o seguinte conjunto de áreas.

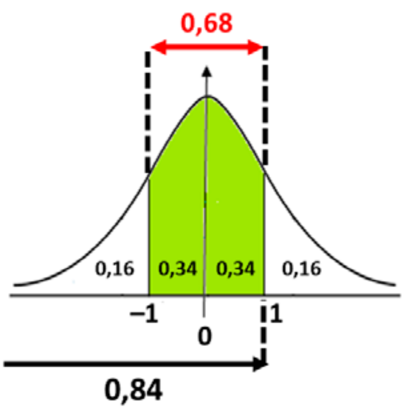


Figura 13: Áreas sob o gráfico da Normal Padrão

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Podemos, portanto, obter as probabilidades:

$$P(0 < Z < 1) = 0{,}34$$

$$P(Z > 1) = 0{,}16$$

$$P(|Z| < 1) = P(-1 < Z < 1) = 0{,}34 + 0{,}34 = 0{,}68$$

Além disso, gostaria de destacar que fizemos passo a passo as áreas sob o gráfico da Normal Padrão para que o aluno consiga repetir esse procedimento quando estiver diante de uma questão de prova. É extremamente importante.

Gostaria, finalmente, de deixar uma receita para resolver as questões envolvendo distribuição normal:

- Fazer a normalização

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- Pesquisar os valores convenientes na tabela da normal padrão ou nos dados fornecidos na prova;
- Desenhar o gráfico e entender qual a área que interessa na questão.

Direto do Concurso

038. (NC-UFPR/PREFEITURA DE CURITIBA-PR/2019/AUDITOR-FISCAL DE TRIBUTOS MUNICIPAIS) Para uma determinada profissão, sabe-se que o salário é uma variável aleatória que possui distribuição Normal com média R$ 5.000,00 e um desvio padrão de R$ 800,00. Nesse caso, qual é a probabilidade de que um salário seja maior que R$ 7400,00?

Dados: P (Z < 1) = 0,84; P (Z < 2) = 0,97725; P (Z < 3) = 0,99865.

a) menor que 0,01.
b) 0,16.
c) 0,48.
d) 0,58.
e) maior que 0,99.

Vamos realizar o procedimento de normalização a fim de transformar a variável aleatória em uma normal padrão.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{7400 - 5000}{800} = \frac{2400}{800} = 3$$

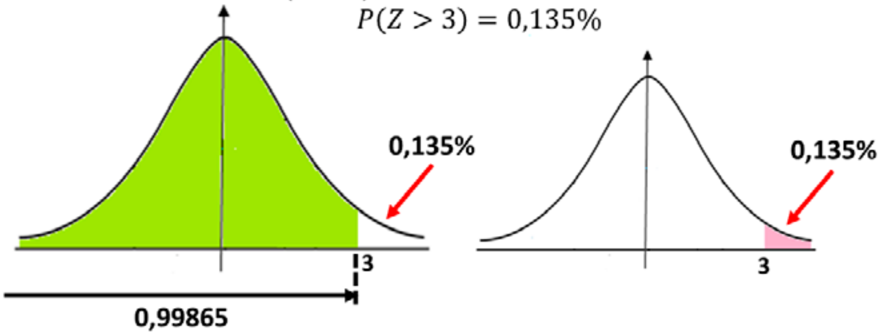
Desse modo, X = 7400 é correspondente a Z = 3 na distribuição normal. Assim, podemos comparar as probabilidades:

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

$$P\ (X > 7400) = P\ (Z > 3)$$

De acordo com o enunciado, P (Z < 3) = 0,99865. Podemos, então, obter a probabilidade desejada pela técnica de probabilidade complementar.

$$P\ (Z > 3) = 1 - 0{,}99865 = 0{,}00135$$
$$P(Z > 3) = 0{,}135\%$$



Letra a.

---

039. (UFAC/2019) Suponha que a renda de cada estudante da Universidade Federal do Acre - UFAC seja distribuída conforme uma distribuição normal com média igual a R$ 800,00 (oitocentos reais) e desvio padrão de R$ 300,00 (trezentos reais). Se aleatoriamente sortearmos um(a) discente da UFAC, a probabilidade deste aluno ter uma renda superior a R$ 1.200,00 (um mil e duzentos reais) é aproximadamente igual a:
[Utilize uma das seguintes informações se necessário: Φ (1,33) = 0,9082, Φ (1,1) = 0,8643 em que Φ representa a função de distribuição acumulada da distribuição normal padrão.]

a) 90,82%.
b) 9,18%.
c) 86,43%.
d) 13,57%.
e) 15,45%.

O primeiro passo nas questões que pedem uma probabilidade na curva normal é converter a variável aleatória em uma distribuição normal padrão. Para isso, utilizamos a expressão:

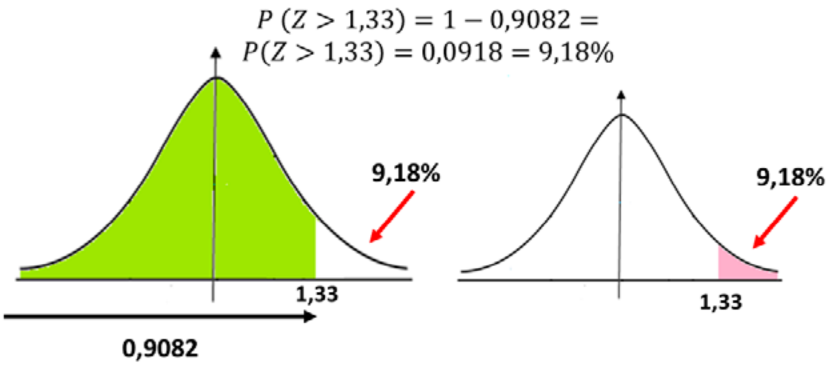
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{1200 - 800}{300} = \frac{400}{300} = 34 = 1{,}33$$

Assim, ao trocar X = 1200 por Z = 1,33, chegaremos às probabilidades distribuídas na distribuição normal, como mostrado a seguir:

$$P\ (X > 1200) = P\ (Z > 1{,}33)$$

O enunciado deu a função acumulada, então, podemos utilizar a técnica da probabilidade complementar para calcular a probabilidade desejada.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.



Letra b.

---

040. (VUNESP/EMPLASA/2014/ANALISTA DE DESENVOLVIMENTO URBANO) O tempo de vida da população de um determinado país tem distribuição normal com a média igual a 68 anos e o desvio padrão igual a 11. Considere os valores da tabela e a fórmula:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Z	Distribuição normal reduzida
0,5	0,1915
1,0	0,3413
1,5	0,4332
2,0	0,4772
2,5	0,4938

A probabilidade de uma pessoa viver mais do que 90 anos é de

a) 15,87%.
b) 6,68%.
c) 4,82%.
d) 3,36%.
e) 2,28%.

Considerando que o tempo de vida da pessoa siga uma distribuição normal, podemos normalizá-la, como mostrado a seguir. Então, vamos calcular normalizar o ponto X = 90.

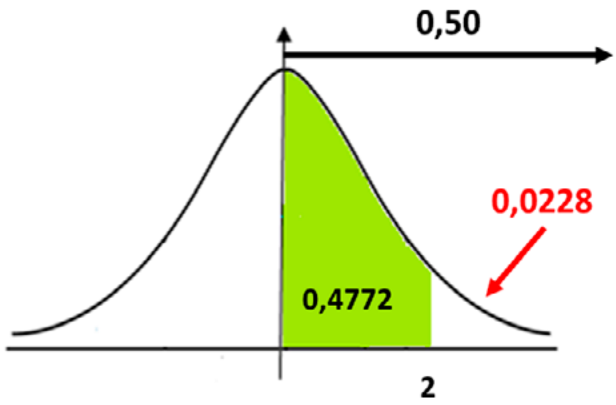
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{90 - 68}{11} = \frac{22}{11} = 2$$

Assim, a probabilidade de uma pessoa viver mais que 90 anos pode ser expressa como a probabilidade de Z > 2 na distribuição normal padrão.

$$P\,(X > 90) = P\,(Z > 2)$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Observe que o enunciado forneceu a probabilidade reduzida na distribuição normal, isto é, P (0 < Z < 2) = 0,4772. Podemos utilizar o fato de que a normal é perfeitamente simétrica em relação à origem, portanto P (Z > 0) corresponde à metade da curva.



Essa última probabilidade pode ser calculada, portanto, como a diferença entre probabilidades:

$$P\ (Z > 2) = 0{,}5000 - 0{,}4772 = 0{,}0228 = 2{,}28\%$$

Letra e.

---

041. (FCC/PREFEITURA DE MACAPÁ-AP/2018/SOCIÓLOGO) A medida de tendência central que representa o valor com maior frequência na distribuição normal de uma amostra probabilística é a

a) média amostral.
b) variância.
c) amplitude total.
d) mediana.
e) moda amostral.

Interessante essa questão. A definição trabalhada no enunciado é certamente a definição de moda, que é o valor com maior frequência.

Porém, o enunciado abre margem para outras interpretações ao utilizar a distribuição normal. Como a distribuição normal é perfeitamente simétrica, a média, a moda e a mediana são iguais. Então, a questão seria contestável e poderiam ter sido consideradas corretas também as alternativas que falam em média e mediana.

Porém, é claro que, em uma questão de prova, você deve marcar a melhor resposta, em vez de tentar uma estratégia que depende de uma contestação de gabarito futura.

Letra e.

---

042. (FCC/DPE-SP/2015/ESTATÍSTICO) Se Z tem distribuição normal padrão, então:
P(Z < 0,25) = 0,599; P(Z < 1,20) = 0,885; P(Z < 1,5) = 0,933; P(Z < 1,96) = 0,975; P(Z < 2,4) = 0,992.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

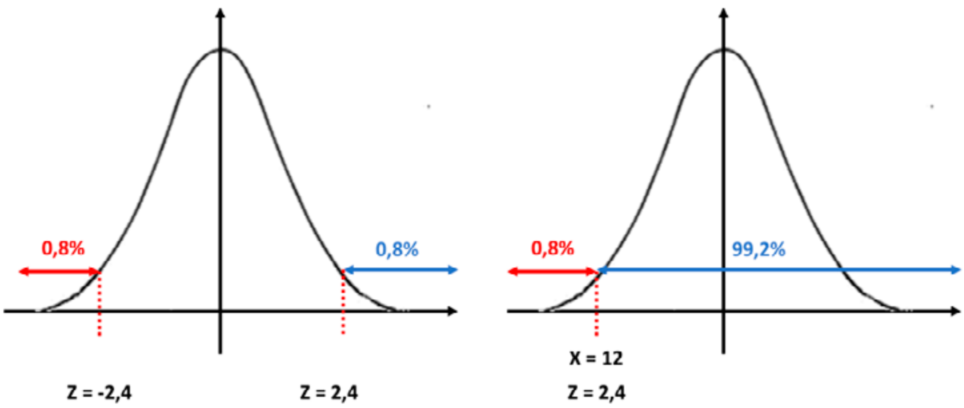
Suponha que no Estado A, a precipitação pluviométrica no mês de agosto tem distribuição normal com média μ e variância de 25 (mm)².
Sabe-se que a probabilidade da precipitação pluviométrica em A, em agosto, ser no máximo de 12 mm é igual a 0,8%. Nessas condições, o valor de μ, em mm, é igual a

a) 24.
b) 30.
c) 22.
d) 36.
e) 25.

Observe que foi oferecido o valor da variância, e não do desvio-padrão no enunciado. Por isso, podemos calcular o desvio padrão como a raiz quadrada da variância.

$$\sigma^2 = 25 \therefore \sigma = \sqrt{25} = 5\ mm$$

Observe que X = 12 mm corresponde a Z = 2,4 depois de normalizada.



Com isso, podemos utilizar a fórmula da normalização.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$-2{,}4 = \frac{12 - \mu}{5} \therefore 12 - \mu = -5.2{,}4$$

$$12 - \mu = -12 \therefore \mu = 12 + 12 = 24$$

Letra a.

---

043. (CESPE/TCE-PR/2016/ANALISTA DE CONTROLE) A variável aleatória Y segue uma distribuição normal com média 10 e desvio padrão 20, sendo P(Z ≤ 1) = 0,84, em que Z representa a distribuição normal padrão. Nesse caso, a probabilidade P(|Y| ≤ 10) é igual a:

a) 0,68
b) 0,84

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

c) 0,16
d) 0,34

Vamos desmembrar a expressão:

$$P(|Y| \leq 10) = P(-10 \leq Y \leq 10)$$

Devemos fazer a neutralização para cada um dos extremos do intervalo. Para Y = -10.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{-10 - 10}{20} = -\frac{20}{20} = -1$$

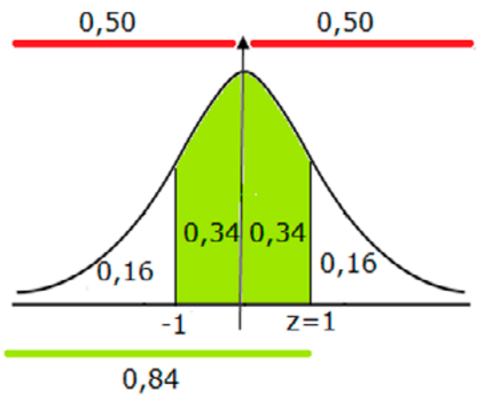
Agora, para Y = 10.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{10 - 10}{20} = -\frac{0}{20} = 0$$

Sendo assim, temos que:

$$P(|Y| \leq 10) = P(-1 \leq Z \leq 0)$$

Basta desenhar a normal, considerando o dado de que P (Z<1) = 0,84



Sendo assim, a área pedida é exatamente a primeira em verde, que vale 0,34.

Letra d.

---

044. (FCC/SEFAZ-SP/2010/ANALISTA EM PLANEJAMENTO, ORÇAMENTO E FINANÇAS PÚBLICAS) Os salários dos empregados de uma determinada categoria profissional apresentam uma distribuição normal com média igual a R$ 1.200,00 e desvio padrão igual a R$ 160,00. A proporção dos empregados com salários superiores a R$ 1.000,00 e inferiores a R$ 1.520,00 é:

a) 98%
b) 96%
c) 92%
d) 89%
e) 87%

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Dados:

z	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25
P(0<Z<z)	0,34	0,39	0,43	0,46	0,48	0,49

Mais uma vez, como temos dois extremos no intervalo, devemos converter separadamente.

Para X = 1000, temos:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1000-1200}{160} = -\frac{200}{160} = -1{,}25$$

Para X = 1520, temos:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1520-1200}{160} = \frac{320}{160} = 2$$

Temos, portanto, que a probabilidade pedida é:

$$P(-1{,}25 < Z < 2) = P(-1{,}25 < Z < 0) + P(0 < Z < 2) = 0{,}39 + 0{,}48 = 0{,}87$$
$$= 87\%$$

Letra e.

045. (FCC/SEMEF MANAUS/2019/AUDITOR-FISCAL DE TRIBUTOS MUNICIPAIS) Uma grande população formada pelos comprimentos de determinadas peças é normalmente distribuída com média μ igual a 20 centímetros. Observa-se que 84% das peças da população possuem um comprimento inferior a 25 centímetros.

Dados: Escore reduzido da curva normal padrão (**Z**) tal que a probabilidade P(0 < **Z** < z) = α.

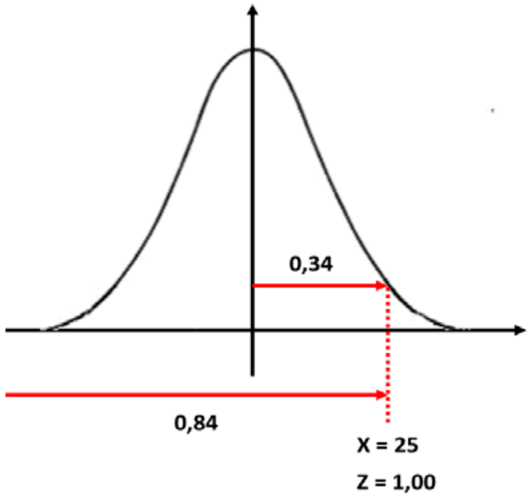
z	0,84	1,00	1,28	1,56	1,64
α	0,30	0,34	0,40	0,44	0,45

Se 90% das peças possuem um comprimento superior a x centímetros, então, x é igual a

a) 12,2.
b) 13,6.
c) 11,8.
d) 15,8.
e) 14,7.

Vamos interpretar a informação do enunciado: "84% das peças da população possuem um comprimento inferior a 25 centímetros". Podemos colocar isso em um gráfico.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.



Observe, ainda que a tabela forneceu os valores na forma P (0 < Z < z). Devido à simetria da normal, a sua parte negativa corresponde a 0,50 (ou 50%) do gráfico. Portanto, podemos desenhar o esquema acima.

Dessa forma, X = 25 cm corresponde a Z = 1. Podemos aplicar a expressão da normalização.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

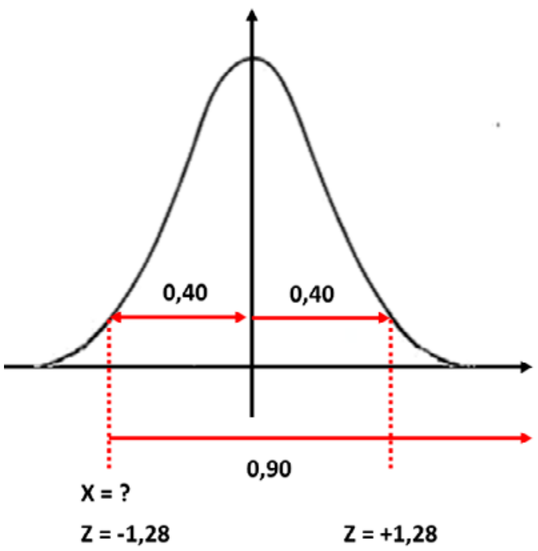
No enunciado, foi fornecida a média de 20 cm.

$$1 = \frac{25 - 20}{\sigma} = \frac{5}{\sigma}$$

Calculando o desvio padrão, temos:

$$1 = \frac{5}{\sigma} \therefore \sigma = 5.1 = 5$$

Como queremos o ponto em que 90% das peças da população sejam superiores, basta olhar novamente no gráfico. Lembre-se de que devemos usar a simetria da normal.



O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Portanto, o X desejado é aquele correspondente a Z = 1,28.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$-1{,}28 = \frac{X - 20}{5}$$

$$\therefore X - 20 = 5.(-1{,}28) = -6{,}4$$

$$X = 20 - 6{,}4 = 13{,}6$$

Letra b.

---

046. (FGV/SEAD-AP/2010/AUDITOR DA RECEITA DO ESTADO) Em relação à distribuição normal, assinale a afirmativa incorreta.

a) a função de densidade de probabilidade é simétrica em relação à média.

b) se X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2, então a variável $Z = (X - \mu)/\sigma^2$ tem distribuição normal padrão.

c) a probabilidade de que uma variável Z que tenha distribuição normal padrão seja maior do que 5 é aproximadamente igual a 0.

d) a média de uma variável aleatória que tenha distribuição normal pode ser negativa.

e) o valor da mediana é igual ao valor da média.

Vamos analisar as afirmações.

a) Essa é uma das características mais importantes da distribuição normal: é perfeitamente simétrica em relação à origem. Afirmação correta.

b) Essa é uma normalização inadequada, pois a variável deve ser dividida pelo desvio-padrão, não pela variância. Afirmação incorreta.

$$Z - \frac{X \quad \mu}{\sigma}$$

c) Os valores da distribuição normal acumulada se aproximam muito rapidamente de zero. A título de comparação, temos:

z	P (Z > z)
1	15,865%
2	2,27%
3	0,135%

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

4	0,003%
5	$2{,}9.10^{-7}$

Portanto, a probabilidade P (Z > 5) é realmente muito pequena, da ordem de 10^{-7}. Afirmação correta.

d) Sim. A média de uma variável aleatória pode ter qualquer valor. Afirmação correta.

e) Como a distribuição normal é perfeitamente simétrica, a média, a moda e a mediana são iguais. Afirmação correta.

Letra b.

7. Outras Distribuições Contínuas

Há uma grande quantidade de distribuições contínuas de probabilidade. De maneira geral, cada área do conhecimento deduz suas próprias distribuições, tendo em vista que a curva normal nem sempre se adapta bem a todos os fenômenos.

Por exemplo, a distribuição de Maxwell Boltzmann estabelece a distribuição das velocidades das partículas de um gás em função da temperatura. Na Figura 14, mostramos a distribuição em duas temperaturas diferentes.

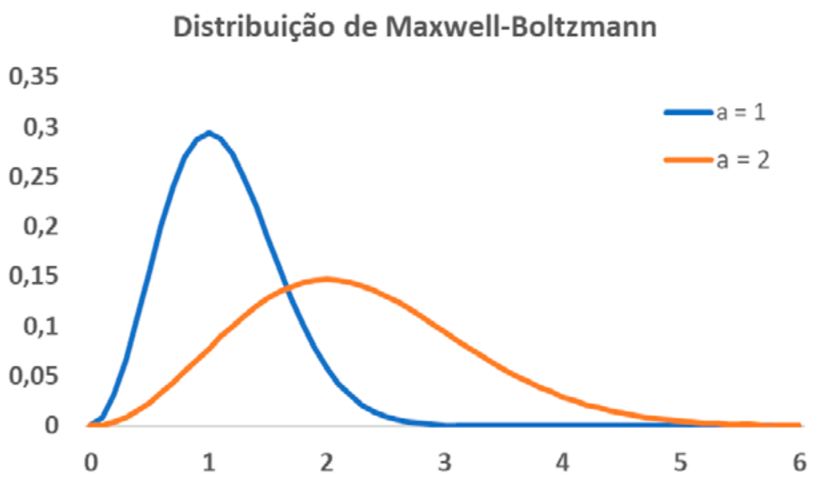


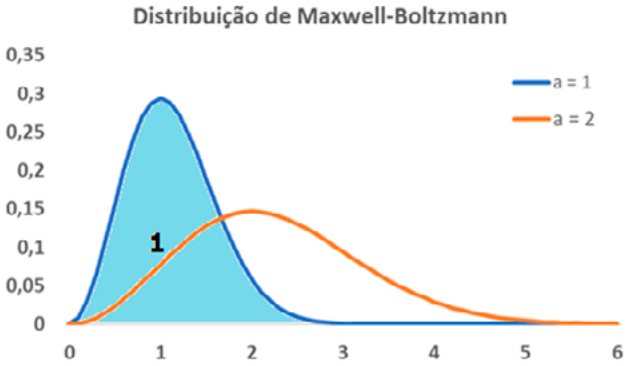
Figura 14: Distribuição de Maxwell-Boltzmann

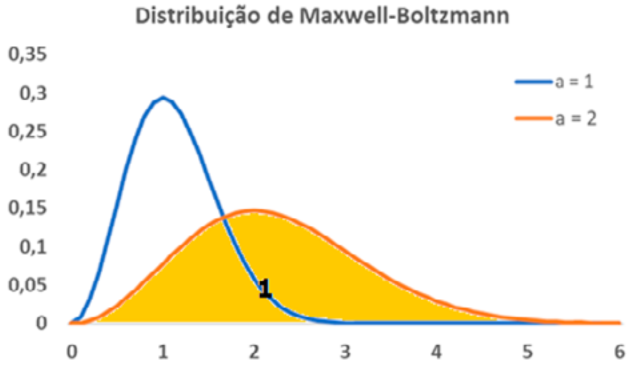
Desse modo, não é o nosso objetivo esgotar a teoria sobre todas as distribuições contínuas. Mas, aqui, vamos trabalhar alguns conceitos essenciais.

Condição de Validade: pelos axiomas de Kolgomorov, a probabilidade total, isto é, a área debaixo da curva da distribuição de velocidade é sempre igual a 1;

Por exemplo, em ambos os casos, as áreas debaixo das curvas da distribuição de Maxwell-Boltzmann é igual a 1.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.





Assimetria: embora a distribuição normal seja perfeitamente simétrica, outras distribuições contínuas podem não ser. Para identificar uma assimetria, o modo mais simples é observar a moda principal, isto é, o maior valor obtido na amostra. Lembre-se de que a assimetria se encontra no lado oposto à moda principal.

Se a moda principal estiver desviada para a esquerda, a distribuição será assimétrica à direita. Por outro lado, se a moda estiver desviada para a direita, a distribuição será assimétrica à esquerda.

Por exemplo, a distribuição de Maxwell-Boltzmann com a = 1 é um excelente exemplo de uma distribuição assimétrica à direita.

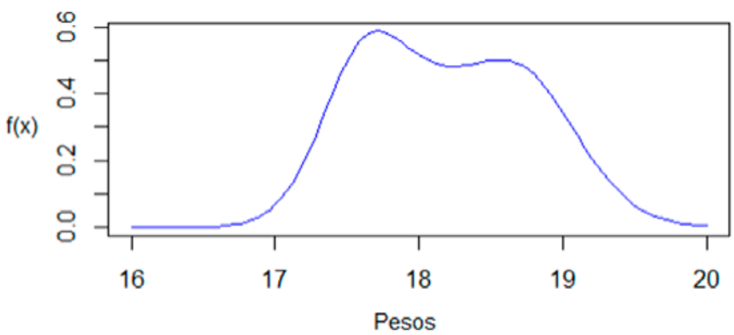
Moda: corresponde aos picos dos gráficos das distribuições. É importante notar que, no caso de uma distribuição estatística, uma moda corresponde a um pico do gráfico, não necessariamente ao pico máximo.

Média e Variância: só podem ser obtidas por cálculo integral, então, não faz parte do escopo desse material desenvolver uma teoria geral para as variáveis contínuas.

Densidade de Probabilidade Acumulada: é bastante possível que você trabalhe com uma densidade de probabilidade acumulada, desde que sejam fornecidas tabelas semelhantes às que vimos na distribuição normal. Nesse caso, o procedimento será o mesmo.

Direto do Concurso

047. (UFAC/2019/ESTATÍSTICO) Ângelo é um agricultor da Zona Rural do Município de Rio Branco. Todos os anos Ângelo retira duas safras de Melancia, em kg. A distribuição da produção da variável peso de cada melancia está representada conforme a distribuição descrita abaixo:



O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Com base nas informações da figura é correto afirmar que:

a) A distribuição é unimodal.

b) A distribuição é bimodal simétrica.

c) A distribuição é bimodal assimétrica à esquerda.

d) A distribuição é bimodal assimétrica à direita.

e) A distribuição é normal com média 18 e variância 400.

A questão é sobre análise de gráficos de distribuições.

Devemos ter em mente o seguinte:

- Para distribuições unimodais (há apenas um pico):
  - Se a cauda (parte mais achatada) está mais alongada para o lado positivo, então se trata de uma distribuição unimodal assimétrica à direita;
  - Se a cauda está mais alongada para o lado negativo, então se trata de uma distribuição unimodal assimétrica à esquerda.
- Para distribuições bimodais (há dois picos):
  - Se os dois picos estiverem concentrados para o lado direito, se trata de uma distribuição bimodal assimétrica à direita;
  - Se os dois picos estiverem concentrados mais para ao lado esquerdo, se trata de uma distribuição bimodal assimétrica à esquerda.

Com as definições acima, vemos que nosso gráfico se trata de uma distribuição bimodal assimétrica à direita.

Letra d.

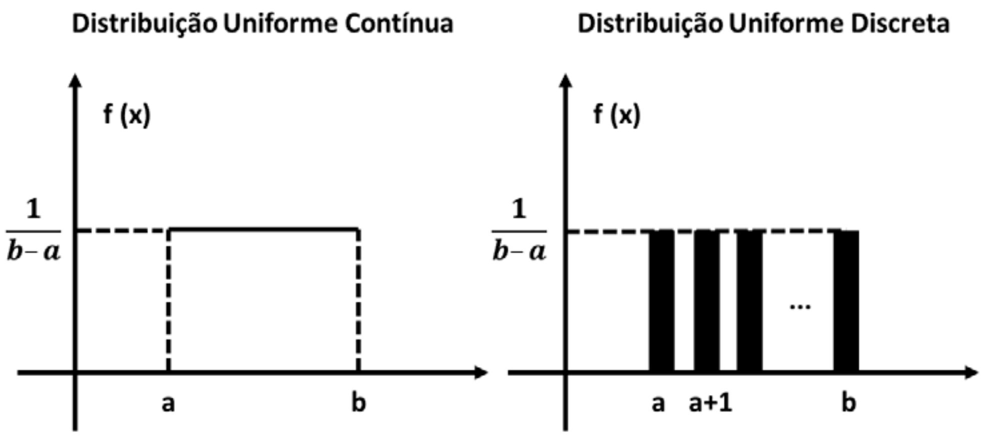
O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

7.1. Distribuição Uniforme

Na distribuição uniforme, há um conjunto de dados em um intervalo [a, b], em que todo o conjunto de dados tem a mesma densidade de probabilidades.

- **Função Densidade de Probabilidade:** ela é nula fora do intervalo [a, b] e constante dentro desse intervalo.

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, se\ a \leq x \leq b$$



- **Valor Esperado:** corresponde ao ponto médio do domínio:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

- **Variância:** depende somente da amplitude do intervalo:

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

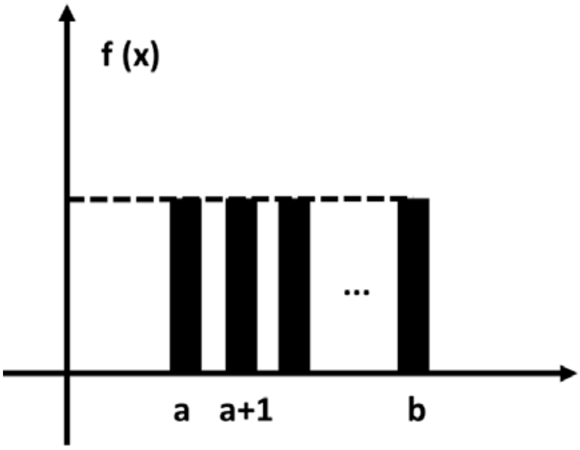
Direto do Concurso

048. (AOCP/UFGD/2014/ANALISTA ADMINISTRATIVO/ECONOMIA) A distribuição que apresenta o caso mais simples de variável aleatória discreta, em que cada valor possível ocorre com a mesma probabilidade, é a:

a) Distribuição Binomial.
b) Distribuição de Poisson.
c) Distribuição Uniforme Discreta.
d) Distribuição de Bernoulli.
e) Distribuição Tripla.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Essa é a característica chave da distribuição uniforme: todos os valores possíveis de serem observados possuem a mesma probabilidade, como mostrado a seguir:



Letra c.

---

049. (PUC-PR/TJ-MS/2017/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR) A distribuição uniforme de uma variável aleatória X definida no intervalo com a ≤ x ≤ b tem como função densidade probabilidade: f(x) = 1/(b–a).

A média dessa distribuição é:

a) E(X) = (a – b)/2

b) E(X) = (a + b)/12

c) E(X) = (a – b)/12

d) E(X) = (b – a)/3

e) E(X) = (a + b)/2

A média de uma distribuição uniforme corresponde ao ponto médio do intervalo em que ela é definida. Então:

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

Letra e.

---

050. (FCC/TRT-12ª REGIÃO-SC/2013/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Uma amostra aleatória de tamanho 5 de uma variável aleatória X com distribuição uniforme no intervalo (0, M) forneceu os seguintes valores: 1,5; 0,6; 1,4; 0,8; 1,7. O valor de M, obtido pelo método dos momentos, com base nesta amostra, é igual a

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

a) 2,8.
b) 1,7.
c) 2,4.
d) 1,4.
e) 3,4.

A estimativa da média pode ser obtida como a própria média amostral:

$$\mu = \frac{1{,}5 + 0{,}6 + 1{,}4 + 0{,}8 + 1{,}7}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

Em uma distribuição uniforme, a média pode ser avaliada como o ponto médio dos extremos. Como já sabemos um dos extremos, para calcular o outro, basta fazer:

$$1{,}2 = \frac{a + b}{2} \therefore a + b = 2.1{,}2 = 2{,}4$$

$$0 + b = 2{,}4 \therefore b = 2{,}4$$

Letra c.

051. (CESPE/TCE-PA/2016/AUDITOR DE CONTROLE EXTERNO) A respeito de uma variável aleatória contínua *U*, uniformemente distribuída no intervalo [0, 1], julgue o seguinte item.
A variância de *U* é inferior a 1/10.

A variância de uma distribuição uniforme é dada por:

$$Var = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

Essa conta é realmente inferior a 1/10, porque, quanto maior o denominador, menor o resultado da conta.
Certo.

052. (FCC/TRE-RR/2015/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Uma variável aleatória X tem distribuição uniforme contínua com média igual a 4 e variância igual a 12. Nessas condições, P(X < 7) é igual a
a) 0,45.
b) 0,75.
c) 0,25.
d) 0,60.
e) 0,67.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

A variância de uma distribuição uniforme é dada por:

$$Var = \frac{(b-a)^2}{12} = 12 \therefore (b-a)^2 = 12.12 = 144$$

$$\therefore b - a = \sqrt{144} = 12$$

Por outro lado, a média da distribuição é dada pelo ponto médio:

$$\mu = \frac{a+b}{2} = 4 \therefore a + b = 4.2 = 8$$

Chegamos a um sistema com duas equações e duas incógnitas. Ele pode ser resolvido pelo método da adição. Somando as duas equações, teremos:

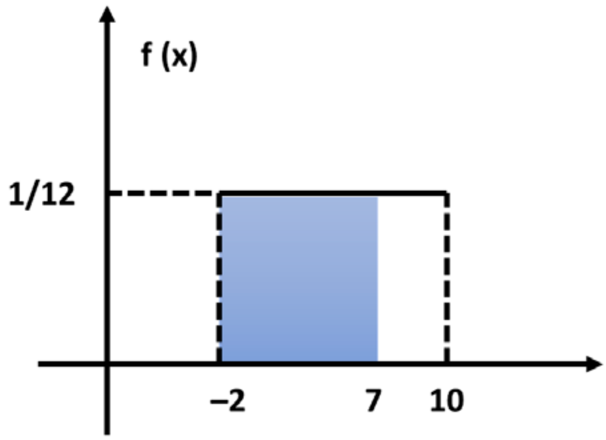
$$(a+b) + (b-a) = 8 + 12$$

$$2b = 20 \therefore b = \frac{20}{2} = 10$$

Para o coeficiente a, teremos:

$$a + b = 8 \therefore a = 8 - b = 8 - 10 = -2$$

Então, a distribuição uniforme é dada por:



Então, a probabilidade corresponde à área pedida:

$$P = \frac{1}{12} \cdot [7 - (-2)] = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Letra b.

---

053. (FGV/IBGE/2017/MÉTODOS QUANTITATIVOS) Sabe-se que o tempo de aplicação de um questionário em uma pesquisa de campo é uma variável com distribuição uniforme entre 8 e 20 minutos. Um entrevistador pretende aplicar três questionários.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Logo, é correto afirmar que:

a) a probabilidade de que todas as entrevistas durem mais do que 15 minutos é de 27/64;

b) a probabilidade de que duas das entrevistas durem mais do que a média é igual a 5/8;

c) o desvio padrão do tempo de duração de cada entrevista é igual a 2 minutos;

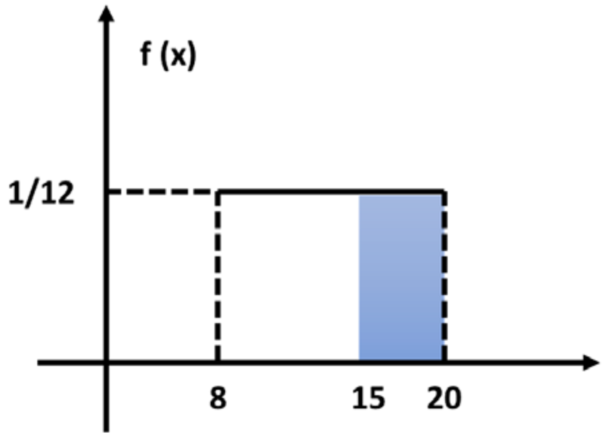
d) a probabilidade de que apenas uma das entrevistas leve menos da metade do tempo máximo é igual a 25/72;

e) a probabilidade do tempo total de entrevista exceder 40 minutos é igual a 0,5.

A densidade de probabilidade para a distribuição uniforme é dada.

$$f\ (x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{20-8} = \frac{1}{12}$$

a) A probabilidade pode ser medida pela área do gráfico a seguir da curva.



A área pintada é um retângulo, portanto, pode ser calculada como o produto bases vezes altura.

$$P\ (X > 15) = \frac{1}{12} \cdot (20-5) = \frac{5}{12}$$

Afirmação incorreta.

b) Na distribuição uniforma, a probabilidade de que uma entrevista dure mais que a média é igual a 50%. Mas, note que a entrevista dura mais que 50% ou não é uma variável de Bernoulli, porque só tem dois resultados possíveis: SUCESSO ou FRACASSO. Portanto, a probabilidade de que, dentre três entrevistas, é expressa por uma binomial.

$$P\ (Y = 2) = \binom{3}{2} \cdot (0{,}50)^2 \cdot (0{,}50)^{3-2} =$$

$$P\ (Y = 2) = \frac{3!}{2!\ 1!} \cdot (0{,}50)^2 \cdot (0{,}50)^1 = \frac{3.2!}{2!\,.1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{32}$$

Afirmação incorreta.

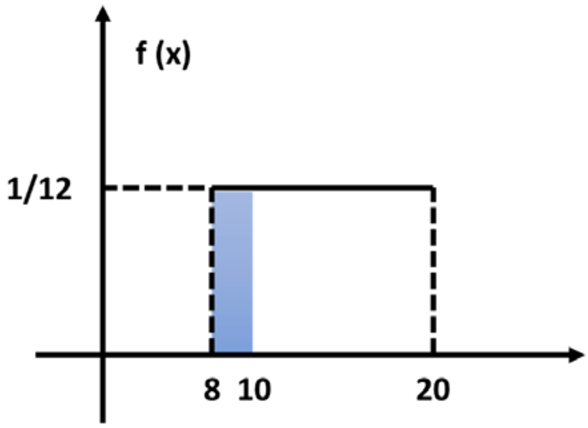
O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

c) A variância da distribuição uniforme é:

$$Var\ (X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(20-8)^2}{12} = \frac{12^2}{12} = 12$$

Portanto, o desvio padrão dessa variável aleatória pode ser obtido como a raiz quadrada de 12, e não é igual a 2. Afirmação incorreta.

d) A probabilidade de uma entrevista específica durar menos de 10 minutos é dada pela área do retângulo a seguir:



$$P\ (X < 10) = \frac{1}{12} \cdot (10-8) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Considerando que serão feitas três entrevistas, a probabilidade de que exatamente uma delas tenha um tempo inferior a 10 minutos é dada pela binomial:

$$f(1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{25}{36} = \frac{25}{6.12} = \frac{25}{72}$$

Afirmação correta.

e) Fora do intervalo de 8 a 20 minutos, a probabilidade de ocorrência de uma entrevista é igual a zero.

Letra d.

7.2. Distribuição Exponencial

A distribuição exponencial é utilizada para modelar o tempo de ocorrência entre dois eventos. Ela é a versão contínua da distribuição geométrica.

Essa distribuição possui um único parâmetro, conhecido como média da distribuição (λ):

$$X \sim Exp\ (\lambda) \rightarrow f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Também é possível demonstrar que a densidade de probabilidade acumulada é:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Vamos nos recordar que a probabilidade de um intervalo qualquer é dada pela diferença entre as funções de densidade acumuladas nos dois extremos desse intervalo:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Além disso, podemos destacar as seguintes propriedades:

- **Média:** é igual ao inverso do parâmetro. Então:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

- **Variância:** é o quadrado da média:

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Direto do Concurso

054. (NUCEPE-FMS/2019/ESTATÍSTICO) Considere o tempo de vida de 4 computadores (em anos) dados por {2,4,6,8}. Considerando que a variável tem distribuição Exponencial (λ), o estimador de máxima verossimilhança para a variância é dado por

a) 5
b) 20/3
c) 20/4
d) 20
e) 25

Pela estimativa de máxima verossimilhança, a média estimada para a variável exponencial pode ser obtida como a razão:

$$\mu = \frac{2+4+6+8}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

Na distribuição exponencial, a variância é igual ao quadrado da média, então podemos escrever:

$$Var = \mu^2 = 5^2 = 25$$

Observe que não devemos tomar a variância da distribuição como a variância amostral, que seria igual a 20/3, porque, no método dos momentos, a preferência é sempre do cálculo da média.

Letra e.

---

055. (FGV/IBGE/2017/ANALISTA CENSITÁRIO/MÉTODOS QUANTITATIVOS) Suponha que o tempo de vida útil da lâmpada de um Scanner seja distribuído exponencialmente com parâmetro β = 600 horas.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Se T representa a durabilidade da lâmpada, é correto afirmar que:

a) P (T > 600)= 0,50;

b) P (200 < T < 600) = 0,25;

c) P (T > 1500) = 1 - e^{-2};

d) P (T > 1200 | T > 300) = P(Y > 900);

e) P (T < 450) = 1 - $e^{-2/5}$.

Dados: e^{-1} = 0,37; $e^{-2,5}$ = 0,72.

A função densidade de probabilidade acumulada da exponencial é:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

O parâmetro lambda é o inverso da média, então, podemos escrever:

$$F(x) = 1 - e^{-x/600}$$

a) Vamos calcular a probabilidade:

$$P\,(T > 600) = 1 - e^{-\frac{600}{600}} = 1 - e^{-1} = 1 - 0{,}37 \cong 0{,}63$$

Afirmação incorreta.

b)

$$P\,(200 < \ T < 600) = F(600) - F(200)$$

$$F(600) - F(200) = \left(1 - e^{-\frac{600}{600}}\right) - \left(1 - e^{-\frac{200}{600}}\right)$$

$$P = (1 - e^{-1}) - \left(1 - e^{-\frac{1}{3}}\right) = e^{-\frac{1}{3}} - e^{-1} = 0{,}72 - 0{,}37 = 0{,}35$$

c)

$$P\,(\,T > 1500) = 1 - F(1500)$$

$$P\,(\,T > 1500) = 1 - e^{-\frac{1500}{600}} = 1 - e^{-2{,}5}$$

Afirmação incorreta.

d) Pela definição de probabilidade condicional, temos:

$$P\,(\,T > 1200\,|\,T > 300) = \frac{P\,(T > 1200 \cap T > 300)}{P(T > 300)} = \frac{P(T > 1200)}{P(T > 300)}$$

$$P = \frac{e^{-\frac{1200}{600}}}{e^{-\frac{300}{600}}} = \frac{e^{-2}}{e^{-0{,}5}} = e^{-2+0{,}5} = e^{-1{,}5}$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Agora, façamos a segunda parte da igualdade.

$$P\ (T > 900) = e^{-\frac{900}{600}} = e^{-1,5}$$

Afirmação correta.

e)

$$P\ (T < 450) = 1 - e^{-\frac{450}{600}} = e^{-0,75}$$

Afirmação incorreta.

Letra d.

8. Apêndice

8.1. Aproximação Binomial-Normal

Como vimos no capítulo sobre distribuição binomial, é muito complicado calcular a probabilidade de um intervalo nessa distribuição, porque isso requer que o cálculo da probabilidade em vários pontos do gráfico. Vejamos um exemplo:

Suponha que a probabilidade de uma pessoa ser favorável a um projeto de lei é igual a 40%, qual a probabilidade de, em um grupo de 100 pessoas, mais de 50 se dizerem favoráveis ao projeto?

Usando somente as técnicas que aprendemos para a distribuição binomial, a forma de fazer esse problema seria somar as probabilidades:

$$P\ (X = 51) = \binom{100}{51} \cdot (0,40)^{51} \cdot (0,60)^{49}$$

$$\ldots\ P\ (X = 100) = \binom{100}{100} \cdot (0,40)^{100} \cdot (0,60)^{0}$$

Observe que teríamos que somar 50 termos, cada um deles é bem difícil de calcular, porque envolve números binomiais e potências muito elevadas.

Por isso, é muito interessante um recurso de substituir a distribuição binomial por uma distribuição normal. Esse artifício faz bastante sentido, porque, quando olhamos o gráfico da distribuição binomial para n = 100 e p = 40%, teremos:

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

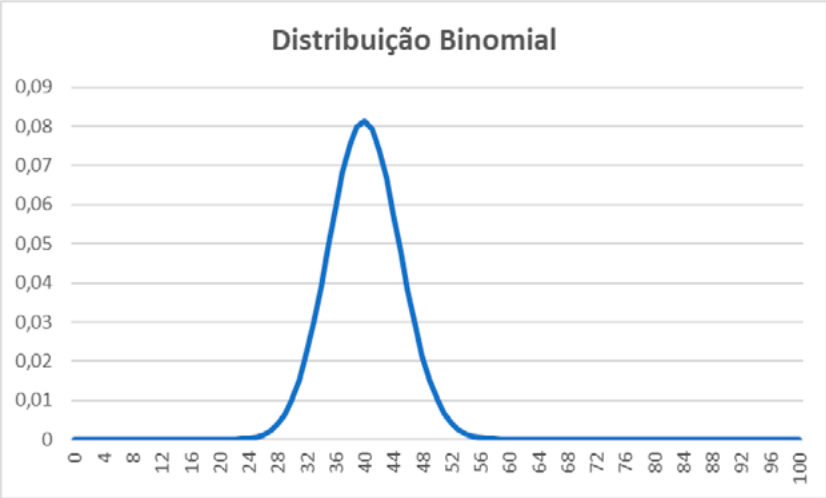


Figura 15: Distribuição Binomial para n = 100 e p = 40%

Observe que o gráfico é realmente parecido com o gráfico de uma distribuição normal. Então, a ideia é trocar a distribuição binomial por uma distribuição normal com a mesma média e variância. Matematicamente, podemos representar:

$$X \sim B(n,p) \sim N\big(np, np(1-p)\big)$$

Para a distribuição binomial, temos:

$$\mu = E[X] = np = 100.0{,}40 = 40$$

$$\sigma^2 = Var[X] = np.(1-p) = 100.0{,}40.0{,}60 = 24$$

Assim, podemos efetuar a normalização:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{50-40}{\sqrt{24}} = \frac{10}{4{,}90} \cong 2{,}04$$

Assim, a observação X = 50 na binomial é correspondente à observação Z = 2,04 na normal. Então, podemos escrever que a probabilidade mais de 50 pessoas serem favoráveis ao projeto é:

$$P(X > 50) = P(Z > 2{,}04)$$

A probabilidade P(Z < 2,04) = 0,98 é tabelada. Então, podemos calcular a probabilidade desejada pela técnica de probabilidade complementar:

$$P(X > 50) = P(Z > 2{,}04) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02 = 2\%$$

Com o auxílio de um software estatístico, podemos também calcular diretamente todos os valores da distribuição binomial e obter o valor exato, que é igual a 1,7%. Trata-se, portanto, de uma excelente aproximação para ser usada em provas.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Vale notar que a aproximação binomial-normal funciona melhor quando:

- o tamanho da amostra é muito grande, isto é, $n \to \infty$;
- a probabilidade característica é próxima de 50%.

Direto do Concurso

056. (FGV/IBGE/2017/ANALISTA CENSITÁRIO) Sejam X_1, X_2, X_3,..., X_{64} variáveis aleatórias discretas, com distribuição Binomial, todas com p = 0,25 e n = 12. Também são conhecidos valores da função distribuição acumulada da normal-padrão, mais especificamente:

$\phi(2) = 0{,}977$, $\phi(1{,}5) = 0{,}933$, $\phi(1{,}25) = 0{,}894$

No caso da extração de uma amostra (n = 64), a probabilidade (desprezando o ajuste de continuidade) de que a soma dos valores seja superior a 207 é igual a:

a) 0,023;
b) 0,046;
c) 0,067;
d) 0,106;
e) 0,134.

Para distribuições binomiais, temos as fórmulas:

$$E(X_i) = np \quad (I)$$

$$Var(X_i) = \sigma^2 = np(1-p) \quad (II)$$

Do enunciado temos os parâmetros:

$$n = 12$$

$$p = 0{,}25$$

Substituindo estes parâmetros em (I) e (II), temos:

$$E(X_i) = 12 \cdot 0{,}25 = 3$$

$$Var(X_i) = 12 \cdot 0{,}25(1 - 0{,}25) = 3 \cdot 0{,}75 = 2{,}25$$

Os valores calculados acima são válidos para cada n. O exercício no pede $n = 64$, nos resta, então, multiplicar nossos resultados por 64.

$$E(X) = 64E(X_i) = 64 \cdot 3 = 192$$

$$Var(X) = \sigma^2 = 64Var(X_i) = 64 \cdot 2{,}25 = 144$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

O exercício questiona a probabilidade do somatório ser maior que 207. Além disto, nos fornece valores da função acumulada normal-padrão. Devemos padronizar nossa função Binomial para normal-padrão, como se segue:

$$Z = \frac{X - np}{\left(np(1-p)\right)^{0.5}} = \frac{X - E(X)}{\left(Var(X)\right)^{0,5}} \quad (III)$$

Substituindo os parâmetros encontrados anteriormente em (III), tem-se:

$$Z = \frac{207 - 192}{144^{0,5}} = \frac{15}{\sqrt{144}} = \frac{15}{12} = 1,25$$

Do enunciado temos:

$$\phi(1,25) = 0,894$$

Este resultado nos dá a informação de que a probabilidade de a soma dos valores ser inferior a 207 é 89,4%. Isto é, a probabilidade de a soma dos valores ser superior a 207 é:

$$100\% - 89,4\% = 10,6\% = \frac{10,6}{100} = 0,106$$

Letra d.

8.2. Demonstração da Validade da Distribuição Normal

Essa seção é uma mera curiosidade só recomendada para alunos da área de Exatas que já estudaram integral durante a faculdade. Se você não viu integral, não se preocupe com essa demonstração: você não vai precisar dela para fazer nenhuma prova de concurso.

Vamos demonstrar agora que a distribuição normal atende ao axioma de Kolgomorov, isto é, que a integral sob toda a área da curva normal é igual a 1.

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Para isso, vamos fazer uma substituição:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

O diferencial de **t** pode ser obtido a partir diferencial de **x**.

$$dt = \frac{dx}{\sigma\sqrt{2}} \therefore dx = \sqrt{2}\sigma dt$$

Façamos a substituição de variáveis:

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(t)^2} \sigma\sqrt{2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t)^2}\, dt$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Agora, basta tomar a integral pedida. Para isso, vamos considerar uma variável auxiliar **z**:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz$$

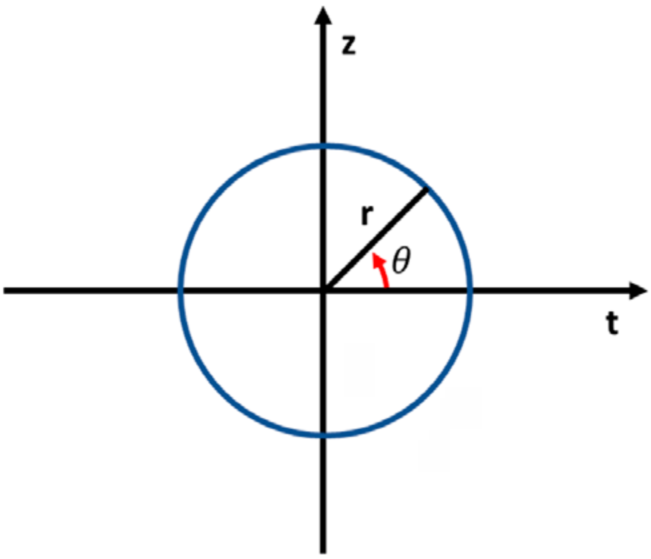
É fácil ver que essa integral também é igual à área debaixo da curva normal, que é igual a S. A utilidade, nesse caso, é que podemos multiplicar as duas integrais: a integral de **t** e a integral de **z.**

$$S^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz\right]\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt\right]$$

Ao multiplicar duas integrais, chegaremos a uma integral dupla:

$$S^2 = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}e^{-t^2}\,dtdz = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2-t^2}\,dtdz$$

Essa integral dupla pode ser resolvida com o uso de coordenadas polares, em que as variáveis **t** e **z** podem ser substituídas como mostrado a seguir:



$$t = r\cos\theta$$

$$z = r\,sen\,\theta$$

$$dA = rdrd\theta$$

Observe que **r** varia de 0 a infinito. Porém, o ângulo θ corresponde a somente uma volta no ciclo trigonométrico, portanto ele varia de 0 a 2π.

Assim, podemos escrever:

$$z^2 + t^2 = (rcos\theta)^2 + (rsen\theta)^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\,sen^2\theta = r^2.(\cos^2\theta + sen^2\,\theta)$$

Pela identidade fundamental da trigonometria, temos:

$$z^2 + t^2 = r^2$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Assim, podemos substituir na integral:

$$S^2 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2 - t^2}\, dtdz = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{2\pi} e^{-r^2} \cdot r\, drd\theta$$

A integral dupla de duas funções independentes pode ser resolvida pela técnica de separação de variáveis:

$$S^2 = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} e^{-r^2} \cdot r\, dr \cdot \int_{0}^{2\pi} d\theta$$

A segunda integral é a mais fácil:

$$\int_{0}^{2\pi} d\theta = 2\pi - 0 = 2\pi$$

A primeira integral é um pouco mais difícil e requer uma substituição de variáveis. Façamos $y = r^2$:

$$y = r^2 \therefore dy = 2r.dr$$

Assim, teremos:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-r^2} \cdot r\, dr = \int_{0}^{+\infty} e^{-y} \cdot \frac{dy}{2} = \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} e^{-y} dy$$

A exponencial de **y** pode ser resolvida:

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-r^2} \cdot r\, dr = \int_{0}^{+\infty} e^{-y} \cdot \frac{dy}{2} = \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} e^{-y} dy$$

Então, a integral desejada é:

$$S^2 = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} e^{-r^2} \cdot r\, dr \cdot \int_{0}^{2\pi} d\theta = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = 1$$

Portanto, a área debaixo da distribuição normal é igual a 1.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

QUESTÕES COMENTADAS EM AULA

001. (FCC/TRF-4ª REGIÃO/2010/ANALISTA JUDICIÁRIO/ÁREA ADMINISTRATIVA) O número de televisores vendidos diariamente em uma loja apresenta a seguinte distribuição de probabilidades de venda:

Nº de televisores	0	1	2	3	4	5
Probabilidade	x	3y	z	z	2y	x

A probabilidade de que, em um determinado dia, não seja vendido nenhum televisor é igual a 10% e de que seja vendido mais que 3 é igual a 30%. Então, a probabilidade de que em um determinado dia sejam vendidos 2 televisores é de:

a) 10%
b) 12%
c) 15%
d) 18%
e) 20%

002. (FCC/TRT-9ª REGIÃO/PR/2010/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Em uma população suponha que:

- 80% dos adultos do sexo masculino sejam alfabetizados;
- 60% dos adultos do sexo feminino sejam alfabetizados.

A proporção de adultos do sexo masculino e feminino é igual.
Sorteando-se ao acaso e com reposição uma amostra de 3 pessoas desta população, a probabilidade de se encontrar pelo menos uma alfabetizada na amostra é:

a) 0,875
b) 0,895
c) 0,927
d) 0,973
e) 0,985

003. (FCC/MPU/2007/ANALISTA DE DOCUMENTAÇÃO) Em uma livraria 4 livros didáticos com defeito foram misturados a outros 16 livros sem defeito. Um professor foi à livraria e escolheu, aleatoriamente, 4 desses livros para presentear seus alunos. A probabilidade de ter escolhido 3 livros com defeito é:

a) $\dfrac{\binom{4}{3}\binom{16}{1}}{\binom{20}{4}}$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

b) $\dfrac{\binom{16}{3}\binom{4}{1}}{\binom{20}{4}}$

c) $\binom{16}{4}(0,8)^4(0,2)^{12}$

d) $\binom{20}{4}(0,8)^4(0,2)^{16}$

e) $\binom{16}{3}(0,8)^4(0,2)^{12}$

004. (FCC/TRT-9ª REGIÃO/PR/2010/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Em um lote de 8 peças, há duas defeituosas e 6 boas. Escolhendo-se ao acaso 3 peças do lote, a probabilidade de se encontrar no máximo uma defeituosa é:

a) 13/56
b) 2/5
c) 25/28
d) 5/14
e) 15/28

005. (FCC/TRT-9ª REGIÃO/PR/2010/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Em um pequeno grupo de casais, X e Y são as variáveis aleatórias que representam a renda, em milhares de reais, do marido e de sua esposa, respectivamente. A distribuição de probabilidade conjunta de X e Y é dada na tabela abaixo:

Y \ X	3	4
2	4p	3p
3	2p	p

Seja Z = 0,7X + 0,8Y a renda do casal após a dedução de impostos. A média de Z, em milhares de reais, é:

a) 4,10
b) 4,22
c) 4,56
d) 4,84
e) 5,04

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

006. (CESPE/TCE-PA/2016/AUDITOR DE CONTROLE EXTERNO) Caso, em uma amostra aleatória de tamanho n = 4, os valores amostrados sejam A = {2, 3, 0, 1}, a estimativa de máxima verossimilhança para a variância populacional será igual a 5/3.

007. (CESPE/TCE-PA/2016/AUDITOR DE CONTROLE EXTERNO) Considere um processo de amostragem de uma população finita cuja variável de interesse seja binária e assuma valor 0 ou 1, sendo a proporção de indivíduos com valor 1 igual a p = 0,3. Considere, ainda, que a probabilidade de cada indivíduo ser sorteado seja a mesma para todos os indivíduos da amostragem e que, após cada sorteio, haja reposição do indivíduo selecionado na amostragem.
A partir dessas informações, julgue o item subsequente.
Caso, em uma amostra de tamanho n = 10, os valores observados sejam A = {1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0}, a estimativa via estimador de máxima verossimilhança para a média populacional será igual a 0,4.

008. (CS-UFG/2018/ASSESSOR TÉCNICO LEGISLATIVO/ECONOMISTA) Considere uma variável aleatória X com distribuição binomial e parâmetros p = 1/3 e n = 4. Qual é a probabilidade de X = 2?
a) 4/81
b) 1/9
c) 2/9
d) 8/27

009. (UFAC/2019/ESTATÍSTICO) Seja X uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros n e p. Então, pode-se dizer que a variância de X é dado por:
a) n.
b) np.
c) np (1 – p).
d) np^2.
e) $np^2(1 – p)$.

010. (FGV/SEFAZ-RJ/2010/AGENTE FISCAL DE RENDAS) 40% dos eleitores de uma certa população votaram, na última eleição, num certo candidato A. Se cinco eleitores forem escolhidos ao acaso, com reposição, a probabilidade de que três tenham votado no candidato A é igual a:
a) 12,48%
b) 17,58%
c) 23,04%
d) 25,78%
e) 28,64%

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

011. (CESPE/CÂMARA DOS DEPUTADOS/2012/ANALISTA) Considere que, em um estudo realizado para avaliar a disponibilidade de 40 urnas eletrônicas para uso imediato, Y seja o número dessas urnas, que apresentavam problemas técnicos e que, historicamente, a probabilidade de uma urna apresentar defeito seja igual a 0,08. Considere, ainda, que as urnas sejam mutuamente independentes e que 0,036 e 0,039 sejam os valores aproximados, respectivamente, de $0{,}92^{40}$ e $0{,}92^{39}$.

A probabilidade de haver duas ou mais urnas defeituosas é aproximadamente igual a:

a) 83%

b) 87%

c) 90%

d) 94%

e) 97%

012. (INÉDITA/2021) Um oftalmologista realiza um teste de estimulação da retina, que tem probabilidade de sucesso igual a 80%. Caso o teste não seja bem-sucedido, ele precisa realizar novamente o teste. Assim que o teste for bem-sucedido, ele poderá fazer a cirurgia. Sabendo que o médico leva 10 minutos para realizar um teste, determine:

a) A probabilidade de que precise de 3 tentativas para poder realizar a cirurgia.

b) A probabilidade de que o oftalmologista precise de mais de 40 minutos para testar a estimulação da retina antes de realizar a cirurgia.

c) O tempo médio que o cirurgião leva para fazer a estimulação da retina de seus pacientes.

013. (CESPE/TELEBRAS/2013/ESPECIALISTA EM GESTÃO DE TELECOMUNICAÇÕES/ESTATÍSTICA) O número X de realizações de determinado experimento necessárias para obter o primeiro sucesso segue a distribuição geométrica $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$. Considerando $(x_1,..., x_n)$ uma amostra de *X*, julgue o item subsequente. O estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro *p* é dado por $\hat{p} = \frac{1}{\bar{x}}$, em que $\bar{x}$ é a média amostral.

014. (FGV/DPE-RJ/2019/TÉCNICO SUPERIOR ESPECIALIZADO/ESTATÍSTICA) Para que as pessoas que aguardam atendimento em uma repartição pública fiquem acomodadas com relativo conforto, é necessário que o recinto seja dimensionado à razão de um metro quadrado de espaço para cada cidadão em espera.

Se o número de pessoas que comparece, por dia, tem distribuição geométrica, com parâmetro p = 0,2, é correto afirmar que:

a) em função da distribuição do número de pessoas, o tamanho médio ideal do recinto deve ser de 16 metros quadrados;

b) a probabilidade de que uma sala de espera com 4 metros quadrados não seja confortável em certo dia é $(0{,}2).(0{,}8)^4$;

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

c) a probabilidade de que uma sala com 3 metros quadrados fique subutilizada em certo dia é igual a 0,448;
d) considerando uma sala de espera que tem 20 metros quadrados e o fato de que 18 pessoas já estão aguardando, a probabilidade de que atinja sua lotação exata é igual a 0,16;
e) a distribuição de probabilidade do tamanho (A) de sala ideal, a cada dia, é dada por P (A = x) = $(0,2)^2.(0,8)^{2x}$ para X = 1,2,3,...

015. (FCC/TCE-RR/2015/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes com distribuição geométrica com médias dadas, respectivamente, por 3 e 4. Considere que X e Y representam o número de repetições do experimento até a ocorrência do primeiro sucesso. Nessas condições, a probabilidade denotada por $P(X \leq 2, Y = 3)$ é igual a
a) 3/25.
b) 5/48.
c) 5/64.
d) 7/64.
e) 5/32.

016. (CESPE/TELEBRAS/2013/ESPECIALISTA EM GESTÃO DE TELECOMUNICAÇÕES/ESTATÍSTICA) O número X de realizações de determinado experimento necessárias para obter o primeiro sucesso segue a distribuição geométrica $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$. Considerando $(x_1,..., x_n)$ uma amostra de *X*, julgue o item subsequente. Se, após realizadas cinco séries do experimento, cada série tiver terminado com o primeiro sucesso e os números de experimentos, em cada série, tiverem sido 4, 7, 6, 5 e 3, então o estimador de máxima verossimilhança para *p* é igual a 0,2.

017. (FCC/CNMP/2015/ESTATÍSTICA) Utilizando o método dos momentos, deseja-se obter uma estimativa do parâmetro p da distribuição geométrica $P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}$, em que x = 1, 2, 3,... Para isto, observou-se em 6 experiências quando determinado evento com probabilidade p ocorreu pela primeira vez. A tabela abaixo apresenta o resultado destas observações:
Experiência Ocorrência pela primeira vez
1 segunda
2 quarta
3 primeira
4 segunda
5 terceira
6 terceira
O valor desta estimativa, com base nestas experiências, é, em %, de

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

a) 15.
b) 30.
c) 75.
d) 60.
e) 40.

018. (FCC/TRT-19ª REGIÃO/AL/2014/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Em uma realização de 4 experiências, verificou-se que um acontecimento, cuja probabilidade é p, ocorreu, pela primeira vez, na terceira, segunda, terceira e primeira experiências, respectivamente. Com base nestas experiências e utilizando o método dos momentos, deseja-se obter uma estimativa pontual do parâmetro p da distribuição geométrica $P(X = x) = (1\text{-}p)^{x-1}\, p$ (x = 1, 2, 3...). O valor encontrado para esta estimativa é de
a) 3/4.
b) 1/2.
c) 1/3
d) 2/3.
e) 4/9.

019. (FEPESE/ISS CRICIÚMA/2017/AUDITOR-FISCAL DE RENDAS E TRIBUTOS) Considere as seguintes descrições de distribuições de probabilidade de variáveis aleatórias:
Distribuição 1: expressa a probabilidade de que uma dada quantidade de eventos ocorra em um dado intervalo de tempo, se conhecemos a taxa média de ocorrência desses eventos nesse intervalo de tempo, e se a ocorrência de um evento é independente do momento da ocorrência do evento anterior.
Distribuição 2: expressa o número de sucessos numa sequência de **n** experimentos feitos de forma que: cada experimento tem exclusivamente como resultado duas possibilidades, sucesso ou fracasso; cada experimento é independente dos demais; e a probabilidade de sucesso em cada evento é sempre a mesma.
As distribuições descritas acima são, respectivamente:
a) 1: normal • 2: qui-quadrado
b) 1: de Poisson • 2: normal
c) 1: de Poisson • 2: binomial
d) 1: qui-quadrado • 2: normal
e) 1: qui-quadrado • 2: binomial

O total diário – X – de pessoas recebidas em uma unidade de pronto atendimento (UPA) para atendimento ambulatorial, e o total diário - Y - de pessoas recebidas nessa mesma UPA para atendimento de urgência segue processos de Poisson homogêneos, com médias, respectivamente, iguais a 20 pacientes/dia e 10 pacientes/dia, e as variáveis aleatórias X e Y são

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

independentes. Sabe-se que, em média, a necessidade de cuidados hospitalares atinge 10% dos pacientes do atendimento ambulatorial e 90% dos pacientes do atendimento de urgência. A partir dessa situação hipotética, julgue o próximo item, considerando que o registro da necessidade de cuidados hospitalares seja feito no momento em que o paciente chegue à UPA e que H seja a quantidade diária registrada de pacientes com necessidades de cuidados hospitalares.

020. (CESPE/EBSERH/2018/ANALISTA ADMINISTRATIVO/ESTATÍSTICO) A média da variável aleatória H é igual a 11 pacientes/dia.

021. (CESPE/EBSERH/2018/ANALISTA ADMINISTRATIVO/ESTATÍSTICO) Considerando a equivalência 1 dia=24 horas, então o tempo médio de chegada entre dois pacientes consecutivos para o atendimento de urgência nessa UPA é inferior a 3 horas.

022. (CESPE/EBSERH/2018/ANALISTA ADMINISTRATIVO/ESTATÍSTICO) Supunha que, nessa UPA, o sistema de atendimento seja descrito por um modelo de fila simples com servidor único e baseado no processo de nascimento e morte, e que X +Y seja o total diário de pessoas atendidas na UPA. Nessa situação, o processo estará em estado de equilíbrio se a taxa de atendimento de pacientes for igual ou superior a 30 pacientes por dia.

023. (CESPE/EBSERH/2018/ANALISTA ADMINISTRATIVO/ESTATÍSTICO) A soma X + Y segue uma distribuição de Poisson com média e variância respectivamente iguais a 30 e 900.

024. (FCC/SEFAZ-BA/2019/ESTATÍSTICO) Uma variável aleatória X representa o número de contribuintes que chega a cada hora para ser atendido em um órgão público. Supõe-se que X tem distribuição de Poisson, com parâmetro λ, ou seja, , sendo e a base do logaritmo (ln) tal que ln(e) = 1. Se P(x = 2) = P(x = 3), então a probabilidade de que menos de 3 contribuintes cheguem em 1 hora é
Dados:
$e^{-1} = 0,37$,
$e^{-2} = 0,14$ e
$e^{-3} = 0,05$
a) 30,0%.
b) 42,5%.
c) 22,5%.
d) 57,5%.
e) 37,5%.

025. (FCC/DPE-SP/2015/ESTATÍSTICO/ADAPTADA) Suponha que o número mensal de prisões em flagrante, comunicadas a uma Defensoria Pública de uma determinada região, tenha

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

distribuição de Poisson com média 9. Nessas condições, a probabilidade de serem comunicadas, à Defensoria, pelo menos 3 prisões em flagrante em um período de 10 dias é igual a:

Dados:

$e^{-2} = 0,14$; $e^{-3} = 0,05$

a) 0,575.

b) 0,425.

c) 0,525.

d) 0.475.

e) 0,555.

026. (FGV/TJ-RO/2015/ESTATÍSTICO) O número de recursos em um processo é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro λ = 5. Então a probabilidade de que um processo tenha menos do que 2 recursos é:

a) $31e^{-5}$

b) $6e^{-5}$

c) $5e^{-5}$

d)$1 - 6e^{-5}$

e) $1 - 31e^{-5}$

027. (FCC/SEFAZ-PI/2015/ANALISTA DO TESOURO ESTADUAL) O número de falhas mensais de um computador é uma variável que tem distribuição de Poisson com média λ. Sabe-se que λ é igual à média de uma distribuição uniforme no intervalo [2, 4]. Nessas condições, a probabilidade de o computador apresentar exatamente duas falhas no período de 15 dias é igual a:

Dados: $e^{-3} = 0,05$; $e^{-1,5} = 0,22$.

a) 22,50%

b) 12,50%

c) 24,15%

d) 15,25%

e) 24,75%

028. (FCC/TRE-SP/2012/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Suponha que o número de eleitores que chegam a uma seção de uma Zona Eleitoral no dia de uma determinada eleição, siga a uma distribuição de Poisson com uma média de chegada de 30 eleitores por meia hora. A probabilidade de que cheguem menos de 3 eleitores em 5 minutos é:

a) $12,5\ e^{-5}$.

b) $12,5\ e^{-6}$

c)$18,5\ e^{-5}$

d) $17,5\ e^{-5}$.

e)$17,5\ e^{-6}$.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

029. (FCC/TRT-11ª REGIÃO/2017/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Suponha que:

I – A variável X, que representa o número mensal de suicídios no país A, tem distribuição de Poisson com média mensal 2.

II – A variável Y, que representa o número mensal de suicídios no país B, tem distribuição de Poisson com média mensal 4.

III – As variáveis X e Y são independentes

Nessas condições, a probabilidade de em determinado mês ocorrerem menos de 2 suicídios no país A e exatamente 2 no país B é igual a

Dados:

$e^{-1} = 0,37$

$e^{-2} = 0,135$

$e^{-4} = 0,018$

a) 4,122%

b) 5,548%

c) 5,832%

d) 3,565%

e) 4,468%

030. (FCC/INFRAERO/2011/ESTATÍSTICO) O número de passageiros que chegam a um posto de atendimento de uma empresa de aviação para fazer o check-in às quartas-feiras pela manhã tem distribuição de Poisson com taxa média de 5 passageiros por minuto. A probabilidade de chegar a esse mesmo posto, numa quarta-feira pela manhã, pelo menos 2 passageiros em 30 segundos, é de:

Dados: $e^{-1} = 0,368$; $e^{-2} = 0,135$; $e^{-2,5} = 0,082$

a) 0,575.

b) 0,682

c) 0,713.

d) 0,754.

e) 0,814.

031. (FCC/SEFAZ-SP/2009/AGENTE FISCAL DE RENDAS) O número de pessoas que chega ao guichê de uma repartição pública para autuação de processos apresenta uma distribuição de Poisson a uma taxa de duas pessoas por minuto. A probabilidade de que nos próximos 2 minutos chegue pelo menos uma pessoa neste guichê é:

a) $(e^4 - 1).e^{-4}$

b) $4.e^{-4}$

c) $(e^4 - 4).e^{-4}$

d) $2.[(e^2 - 1)].e^{-2}$

e) $(e^2 - 2).e^{-2}$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

032. (FGV/SEFAZ-RJ/2009/AGENTE FISCAL DE RENDAS) O número de clientes que buscam, em cada dia, os serviços de um renomado cirurgião tem uma distribuição de Poisson com média de 2 pacientes por dia.

Para cada cirurgia efetuada, o cirurgião recebe R$ 10.000,00. No entanto, ele consegue fazer o máximo de duas cirurgias em um dia; clientes excedentes são perdidos para outros cirurgiões.

Assinale a alternativa que indique o valor esperado da receita diária do cirurgião.

Dado: e^{-2} =0,14.

a) R$5.600,00

b) R$8.400,00

c) R$10.000,00

d) R$14.400,00

e) R$20.000,00

033. (INÉDITA/2021) Com base nos dados fornecidos na Tabela 4, determine as probabilidades sobre a distribuição normal:

a) P (1 < Z < 1,96)

b) P (0 < Z < 2,05)

c) P (1,28 < Z < 1,96)

034. (CESPE/TCE-PE/2017/Analista de Controle Externo) … ej denota o erro aleatório que segue distribuição normal com média nula e variância V. Considerando que a estimativa da variância da *V* seja igual a 6, a razão e_j/V é uma variável aleatória que segue distribuição normal com média nula e variância unitária.

035. (CESPE/POLÍCIA FEDERAL/2018/AGENTE DA POLÍCIA FEDERAL) O valor diário (em R$ mil) apreendido de contrabando em determinada região do país é uma variável aleatória *W* que segue distribuição normal com média igual a R$ 10 mil e desvio padrão igual a R$ 4 mil.

Nessa situação hipotética,

A razão ***w*-20/ √4** segue distribuição normal padrão.

036. (INÉDITA/2021) Se X é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal com média igual a 5 e variância igual a 4, determine as probabilidades.

a) P (X < 5,5)

b) P (X < 9,8)

c) P (X < 8)

Dados: Para uma distribuição normal padrão, P(Z < 0,25) = 0,599; P(Z < 1,20) = 0,885; P(Z < 1,5) = 0,933; P(Z < 1,96) = 0,975; P(Z < 2,4) = 0,992.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

037. (CESGRANRIO/BACEN/2010) Estima-se que os retornos de um determinado mercado tenham distribuição normal, com média 20% e desvio padrão 10%. A probabilidade de perdas financeiras é de, aproximadamente:

a) 1%
b) 2,3%
c) 5%
d) 10%
e) 20%

Dados: P (Z<1) = 0,85 e P (Z<2) = 0,977

038. (NC-UFPR/PREFEITURA DE CURITIBA-PR/2019/AUDITOR-FISCAL DE TRIBUTOS MUNICIPAIS) Para uma determinada profissão, sabe-se que o salário é uma variável aleatória que possui distribuição Normal com média R$ 5.000,00 e um desvio padrão de R$ 800,00. Nesse caso, qual é a probabilidade de que um salário seja maior que R$ 7400,00?

Dados: P (Z < 1) = 0,84; P (Z < 2) = 0,97725; P (Z < 3) = 0,99865.

a) menor que 0,01.
b) 0,16.
c) 0,48.
d) 0,58.
e) maior que 0,99.

039. (UFAC/2019) Suponha que a renda de cada estudante da Universidade Federal do Acre - UFAC seja distribuída conforme uma distribuição normal com média igual a R$ 800,00 (oitocentos reais) e desvio padrão de R$ 300,00 (trezentos reais). Se aleatoriamente sortearmos um(a) discente da UFAC, a probabilidade deste aluno ter uma renda superior a R$ 1.200,00 (um mil e duzentos reais) é aproximadamente igual a:

[Utilize uma das seguintes informações se necessário: Φ (1,33) = 0,9082, Φ (1,1) = 0,8643 em que Φ representa a função de distribuição acumulada da distribuição normal padrão.]

a) 90,82%.
b) 9,18%.
c) 86,43%.
d) 13,57%.
e) 15,45%.

040. (VUNESP/EMPLASA/2014/ANALISTA DE DESENVOLVIMENTO URBANO) O tempo de vida da população de um determinado país tem distribuição normal com a média igual a 68 anos e o desvio padrão igual a 11. Considere os valores da tabela e a fórmula:

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Z	Distribuição normal reduzida
0,5	0,1915
1,0	0,3413
1,5	0,4332
2,0	0,4772
2,5	0,4938

A probabilidade de uma pessoa viver mais do que 90 anos é de

a) 15,87%.
b) 6,68%.
c) 4,82%.
d) 3,36%.
e) 2,28%.

041. (FCC/PREFEITURA DE MACAPÁ-AP/2018/SOCIÓLOGO) A medida de tendência central que representa o valor com maior frequência na distribuição normal de uma amostra probabilística é a

a) média amostral.
b) variância.
c) amplitude total.
d) mediana.
e) moda amostral.

042. (FCC/DPE-SP/2015/ESTATÍSTICO) Se Z tem distribuição normal padrão, então:
$P(Z < 0,25) = 0,599$; $P(Z < 1,20) = 0,885$; $P(Z < 1,5) = 0,933$; $P(Z < 1,96) = 0,975$; $P(Z < 2,4) = 0,992$.
Suponha que no Estado A, a precipitação pluviométrica no mês de agosto tem distribuição normal com média μ e variância de 25 $(mm)^2$.
Sabe-se que a probabilidade da precipitação pluviométrica em A, em agosto, ser no máximo de 12 mm é igual a 0,8%. Nessas condições, o valor de μ, em mm, é igual a

a) 24.
b) 30.
c) 22.
d) 36.
e) 25.

043. (CESPE/TCE-PR/2016/ANALISTA DE CONTROLE) A variável aleatória Y segue uma distribuição normal com média 10 e desvio padrão 20, sendo $P(Z \le 1) = 0,84$, em que Z representa a distribuição normal padrão. Nesse caso, a probabilidade $P(|Y| \le 10)$ é igual a:

a) 0,68

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

b) 0,84
c) 0,16
d) 0,34

044. (FCC/SEFAZ-SP/2010/ANALISTA EM PLANEJAMENTO, ORÇAMENTO E FINANÇAS PÚBLICAS) Os salários dos empregados de uma determinada categoria profissional apresentam uma distribuição normal com média igual a R$ 1.200,00 e desvio padrão igual a R$ 160,00. A proporção dos empregados com salários superiores a R$ 1.000,00 e inferiores a R$ 1.520,00 é:
a) 98%
b) 96%
c) 92%
d) 89%
e) 87%

Dados:

z	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25
P(0<Z<z)	0,34	0,39	0,43	0,46	0,48	0,49

045. (FCC/SEMEF-MANAUS/2019/AUDITOR-FISCAL DE TRIBUTOS MUNICIPAIS) Uma grande população formada pelos comprimentos de determinadas peças é normalmente distribuída com média μ igual a 20 centímetros. Observa-se que 84% das peças da população possuem um comprimento inferior a 25 centímetros.

Dados: Escore reduzido da curva normal padrão (**Z**) tal que a probabilidade $P(0 < \mathbf{Z} < z) = \alpha$.

z	0,84	1,00	1,28	1,56	1,64
α	0,30	0,34	0,40	0,44	0,45

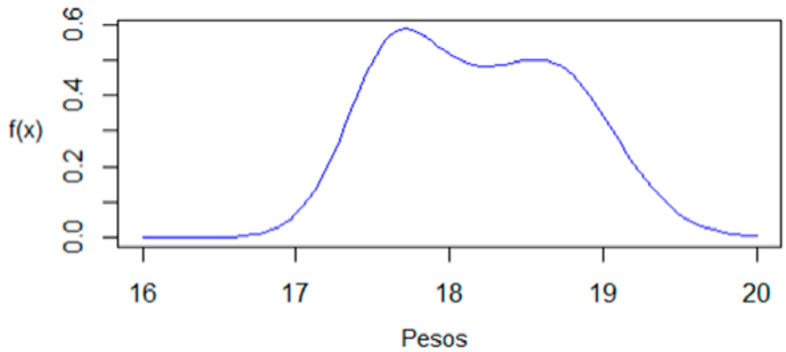
Se 90% das peças possuem um comprimento superior a x centímetros, então, x é igual a
a) 12,2.
b) 13,6.
c) 11,8.
d) 15,8.
e) 14,7.

046. (FGV/SEAD-AP/2010/AUDITOR DA RECEITA DO ESTADO) Em relação à distribuição normal, assinale a afirmativa incorreta.
a) a função de densidade de probabilidade é simétrica em relação à média.
b) se X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2, então a variável $Z = (X - \mu)/\sigma^2$ tem distribuição normal padrão.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

c) a probabilidade de que uma variável Z que tenha distribuição normal padrão seja maior do que 5 é aproximadamente igual a 0.
d) a média de uma variável aleatória que tenha distribuição normal pode ser negativa.
e) o valor da mediana é igual ao valor da média.

047. (UFAC/2019/ESTATÍSTICO) Ângelo é um agricultor da Zona Rural do Município de Rio Branco. Todos os anos Ângelo retira duas safras de Melancia, em kg. A distribuição da produção da variável peso de cada melancia está representada conforme a distribuição descrita abaixo:



Com base nas informações da figura é correto afirmar que:
a) A distribuição é unimodal.
b) A distribuição é bimodal simétrica.
c) A distribuição é bimodal assimétrica à esquerda.
d) A distribuição é bimodal assimétrica à direita.
e) A distribuição é normal com média 18 e variância 400.

048. (AOCP/UFGD/2014/ANALISTA ADMINISTRATIVO/ECONOMIA) A distribuição que apresenta o caso mais simples de variável aleatória discreta, em que cada valor possível ocorre com a mesma probabilidade, é a:
a) Distribuição Binomial.
b) Distribuição de Poisson.
c) Distribuição Uniforme Discreta.
d) Distribuição de Bernoulli.
e) Distribuição Tripla.

049. (PUC-PR/TJ-MS/2017/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR) A distribuição uniforme de uma variável aleatória X definida no intervalo com $a \le x \le b$ tem como função densidade probabilidade: $f(x) = 1/(b-a)$.
A média dessa distribuição é:
a) $E(X) = (a - b)/2$
b) $E(X) = (a + b)/12$
c) $E(X) = (a - b)/12$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

d) E(X) = (b – a)/3
e) E(X) = (a + b)/2

050. (FCC/TRT-12ª REGIÃO/SC/2013/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Uma amostra aleatória de tamanho 5 de uma variável aleatória X com distribuição uniforme no intervalo (0, M) forneceu os seguintes valores: 1,5; 0,6; 1,4; 0,8; 1,7. O valor de M, obtido pelo método dos momentos, com base nesta amostra, é igual a
a) 2,8.
b) 1,7.
c) 2,4.
d) 1,4.
e) 3,4.

051. (CESPE/TCE-PA/2016/AUDITOR DE CONTROLE EXTERNO) A respeito de uma variável aleatória contínua *U*, uniformemente distribuída no intervalo [0, 1], julgue o seguinte item.
A variância de *U* é inferior a 1/10.

052. (FCC/TRE-RR/2015/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Uma variável aleatória X tem distribuição uniforme contínua com média igual a 4 e variância igual a 12. Nessas condições, P(X < 7) é igual a
a) 0,45.
b) 0,75.
c) 0,25.
d) 0,60.
e) 0,67.

053. (FGV/IBGE/2017/MÉTODOS QUANTITATIVOS) Sabe-se que o tempo de aplicação de um questionário em uma pesquisa de campo é uma variável com distribuição uniforme entre 8 e 20 minutos. Um entrevistador pretende aplicar três questionários.
Logo, é correto afirmar que:
a) a probabilidade de que todas as entrevistas durem mais do que 15 minutos é de 27/64;
b) a probabilidade de que duas das entrevistas durem mais do que a média é igual a 5/8;
c) o desvio padrão do tempo de duração de cada entrevista é igual a 2 minutos;
d) a probabilidade de que apenas uma das entrevistas leve menos da metade do tempo máximo é igual a 25/72;
e) a probabilidade do tempo total de entrevista exceder 40 minutos é igual a 0,5.

054. (NUCEPE-FMS/2019/ESTATÍSTICO) Considere o tempo de vida de 4 computadores (em anos) dados por {2,4,6,8}. Considerando que a variável tem distribuição Exponencial (λ), o estimador de máxima verossimilhança para a variância é dado por

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

a) 5
b) 20/3
c) 20/4
d) 20
e) 25

055. (FGV/IBGE/2017/ANALISTA CENSITÁRIO/MÉTODOS QUANTITATIVOS) Suponha que o tempo de vida útil da lâmpada de um Scanner seja distribuído exponencialmente com parâmetro β = 600 horas.
Se T representa a durabilidade da lâmpada, é correto afirmar que:
a) P (T > 600)= 0,50;
b) P (200 < T < 600) = 0,25;
c) P (T > 1500) = 1 - e^{-2};
d) P (T > 1200 | T > 300) = P(Y > 900);
e) P (T < 450) = 1 - $e^{-2/5}$.
Dados: e^{-1} = 0,37; $e^{-2,5}$ = 0,72.

056. (FGV/IBGE/2017/ANALISTA CENSITÁRIO) Sejam X_1, X_2, X_3,..., X_{64} variáveis aleatórias discretas, com distribuição Binomial, todas com p = 0,25 e n = 12. Também são conhecidos valores da função distribuição acumulada da normal-padrão, mais especificamente:
$\phi(2) = 0,977$, $\phi(1,5) = 0,933$, $\phi(1,25) = 0,894$
No caso da extração de uma amostra (n = 64), a probabilidade (desprezando o ajuste de continuidade) de que a soma dos valores seja superior a 207 é igual a:
a) 0,023;
b) 0,046;
c) 0,067;
d) 0,106;
e) 0,134.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

QUESTÕES DE CONCURSO

057. (CESPE/POLÍCIA FEDERAL/2018/AGENTE DA POLÍCIA FEDERAL) O valor diário (em R$ mil) apreendido de contrabando em determinada região do país é uma variável aleatória *W* que segue distribuição normal com média igual a R$ 10 mil e desvio padrão igual a R$ 4 mil. Nessa situação hipotética,
P(*W* > R$ 10 mil) = 0,5.

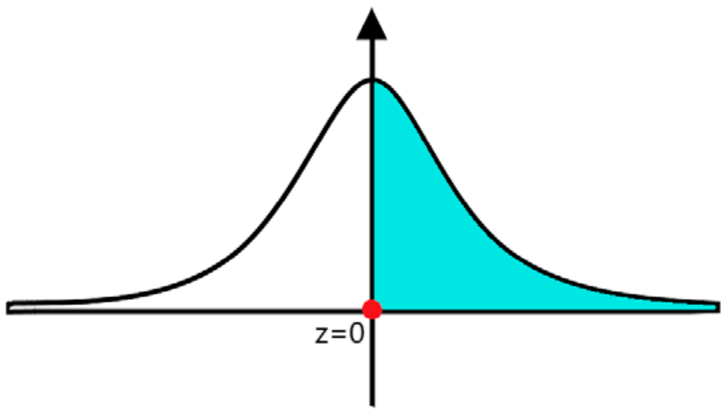
Para uma distribuição normal, a média é igual à mediana. Isto é, a probabilidade de $P(W > R\$10\ mil) = P(W < R\$\ 10\ mil) = 50\% = \frac{50}{100} = 0{,}5..$
Podemos entender o exercício pensando na padronização da distribuição normal, dada por:

$$Z = \frac{W-\mu}{\sigma} = \frac{W-10}{4} \quad (I)$$

Para W=R$ 10 mil, substituindo em (I):

$$Z = \frac{10-10}{4} = 0$$

No gráfico isto significa:



A metade do gráfico de uma função normal padrão corresponde a uma probabilidade de 50%. A afirmação está correta.
Certo.

---

058. (CESPE/ABIN/2018/OFICIAL TÉCNICO DE INTELIGÊNCIA) Em uma fábrica de ferragens, o departamento de controle de qualidade realizou testes na linha de produção de parafusos. Os testes ocorreram em dois campos: comprimento dos parafusos e frequência com que esse comprimento fugia da medida padrão. Historicamente, o comprimento médio desses parafusos é 3 cm, e o desvio padrão observado é 0,3 cm. Foram avaliados 10.000 parafusos durante uma semana. Desses, 1.000 fugiram às especificações técnicas da gerência: o comprimento do parafuso deveria variar de 2,4 cm a 3,6 cm. O chefe da linha de produção, porém, insiste em afirmar que, em média, 4% da produção de parafusos fogem às especificações. O

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

departamento de controle de qualidade assume que os comprimentos dos parafusos têm distribuição normal.
A partir dessa situação hipotética, julgue o item subsequente, considerando que Φ(1) = 0,841, Φ(1,65) = 0,95, Φ(2) = 0,975 e Φ(2,5) = 0,994, em que Φ(z) é a função distribuição normal padronizada acumulada, e que 0,002 seja valor aproximado para $\sqrt{\frac{0,0384}{10.000}}$.

Considere que o maior parafuso já encontrado na linha de produção tenha 3,75 cm de comprimento. Nesse caso, a probabilidade de que um parafuso escolhido aleatoriamente tenha comprimento maior que esse será superior a 1%.

Do enunciado, sabemos os seguintes dados:

$$\mu = 3\ cm$$

$$\sigma = 0,3\ cm$$

$$X = 3,75\ cm$$

Devemos padronizar o comprimento dos parafusos por meio da fórmula:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{3,75 - 3}{0,3} = \frac{0,75}{0,3} = \frac{75}{30} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Do enunciado, $\Phi(2,5) = 0,994$, ou seja $P(X < 3,75) = 0,994$.

$$P(X > 3,75) = 1 - 0,994 = 0,006 = \frac{0,6}{100} = 0,6\%$$

$$0,6\% < 1\%$$

Errado.

---

059. (CESPE/ABIN/2018/OFICIAL TÉCNICO DE INTELIGÊNCIA) Se *X* e *Y* forem variáveis independentes e tiverem distribuição normal com médias μ_X e μ_Y, respectivamente, e variâncias σ_X^2 e σ_Y^2, respectivamente, então a soma X + Y terá média $\mu_X + \mu_Y$ e variância $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$.

Para variáveis INDEPENDENTES que seguem a distribuição normal-padrão, a combinação linear entre X e Y gera uma variável que também segue uma distribuição normal padrão. Isso vale para suas médias e variâncias (mas não para desvios padrão), isto é:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \mu_X + \mu_Y$$

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

Certo.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

060. (CESPE/EBSERH/2018/ANALISTA ADMINISTRATIVO/ESTATÍSTICA) Considerando que X e Y sejam variáveis aleatórios mutuamente independentes que seguem distribuição normal padrão, julgue o próximo item.
A soma S= X + Y e a diferença D= X – Y seguem distribuições distintas.

Uma combinação linear de duas variáveis normais independentes resultará também em uma distribuição normal. Portanto, as variáveis S e D seguem distribuições normais.
Agora, vamos calcular a média e o desvio padrão delas. Para a média, basta utilizar a ideia de que o valor esperado é um operador linear, portanto, a média da soma é igual à soma das médias e a média da diferença é igual à diferença das médias.

$$E[S] = E[X] + E[Y] = 0 + 0 = 0$$

$$E[D] = E[X] - E[Y] = 0 - 0 = 0$$

Por outro lado, para a variância, precisamos nos lembrar que o termo que multiplica cada variável deve ser elevado ao quadrado. Então, teremos:

$$Var(S) = 1^2.Var(X) + 1^2Var(Y) = 1.1 + 1.1 = 1$$

$$Var(D) = 1^2.Var(X) + (-1)^2.Var(Y) = 1.1 + 1.1 = 1$$

Assim, tanto S como D seguem a mesma distribuição: a normal padrão.
Errado.

061. (CESPE/STM/2018/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Diversos processos buscam reparação financeira por danos morais. A tabela seguinte mostra os valores, em reais, buscados em 10 processos — numerados de 1 a 10 — de reparação por danos morais, selecionados aleatoriamente em um tribunal.

processo	valor
1	3.700
2	3.200
3	2.500
4	2.100
5	3.000
6	5.200
7	5.000
8	4.000
9	3.200
10	3.100

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

A partir dessas informações e sabendo que os dados seguem uma distribuição normal, julgue o item subsequente.
Se μ = estimativa pontual para a média dos valores buscados como reparação por danos morais no referido tribunal, então 3.000 < μ < 3.300.

μ é a média comum do valor dos processos, dada por:

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

$$\mu = \frac{3700 + 3200 + 2500 + 2100 + 3000 + 5200 + 5000 + 4000 + 3200 + 3100}{10}$$

$$\mu = \frac{35000}{10} = R\$\ 3.500{,}00$$

$$R\$\ 3.500{,}00 > R\$\ 3.300{,}00$$

Errado.

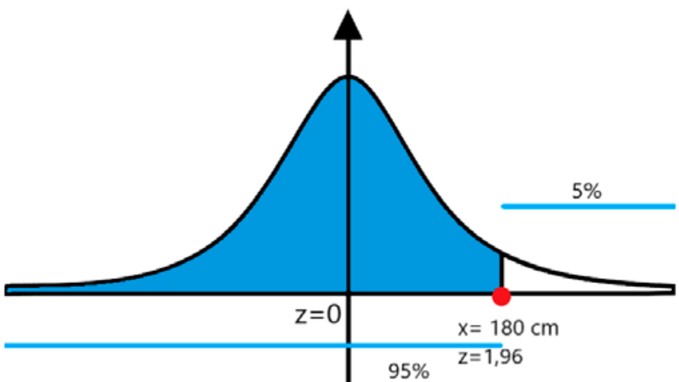
062. (FCC/TRT-2ª REGIÃO/SP/2018/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Em uma grande cidade, a população formada pela altura de seus habitantes adultos é normalmente distribuída e considerada de tamanho infinito.

Dados da curva normal padrão (Z), tal que a probabilidade P(|Z| ≤ z) = (1 − α):

z	1,64	1,75	1,96	2,24
α	10%	8%	5%	2,5%

Sabe-se que 5% destes habitantes têm altura superior a 180 cm. Se apenas 2,5% destes habitantes têm altura inferior a 162 cm, então a média desta população é de
a) 171,2 cm
b) 171,8 cm
c) 171,4 cm
d) 171,6 cm
e) 172,0 cm

As informações dadas pelo enunciado são exemplificadas com os esquemas a seguir:

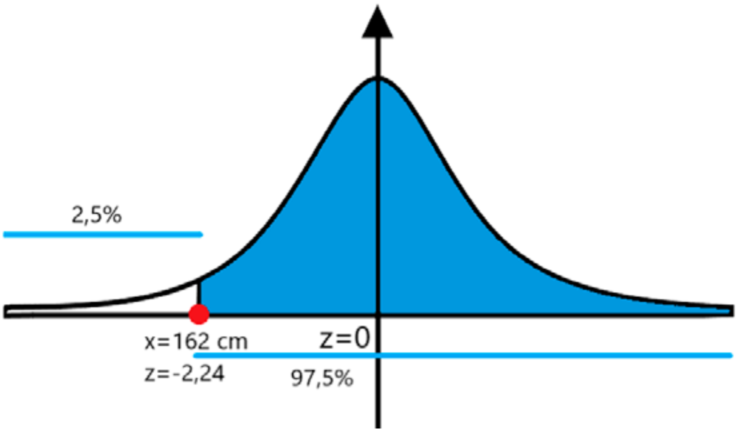


O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

A imagem acima demonstra o fato de que 5% dos habitantes possuem altura superior a 180 cm. Sabemos que para este caso z=1,96 por meio da tabela fornecida pela questão. Para $\alpha = 5\%,\ \ |z| = 1{,}96$.

Para este caso, a padronização é dada por:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \ \rightarrow \ 1{,}96 = \frac{180-\mu}{\sigma} \ \rightarrow 1{,}96\sigma = 180 - \mu \ \rightarrow \ \mu = 180 - 1{,}96\sigma \ \ (I)$$



A imagem acima demonstra o fato de que 2,5% dos habitantes possuem altura inferior a 162 cm. Sabemos que para este caso z=-2,24 por meio da tabela fornecida pela questão. Para $\alpha = 2{,}5\%,\ \ |z| = 2{,}24$.. Escolhemos o sinal negativo pois o enunciado nos fornece valores inferiores a 162 cm que possuem p menor que 0,5.

Para este caso, a padronização é dada por:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \ \rightarrow \ -2{,}24 = \frac{162-\mu}{\sigma} \ \rightarrow -2{,}24\sigma = 162 - \mu \ \rightarrow \ \mu = 2{,}24\sigma + 162 \ \ (II)$$

Pode-se perceber que (I) e (II) formam um sistema linear com duas equações e duas incógnitas. Subtraindo (I) de (II), temos:

$$\boldsymbol{\mu = 180 - 1{,}96\sigma}$$

$$(\text{-}) \quad \underline{\mu = 162 + 2{,}24\sigma}$$

$$0 = 18 - 4{,}2\sigma$$

$$\sigma = \frac{18}{4{,}2} = \frac{180 \cdot \frac{1}{6}}{42 \cdot \frac{1}{6}} = \frac{30}{7}$$

Substituindo o desvio padrão em (II), ficamos com:

$$\mu = 2{,}24 \cdot \frac{30}{7} + 162 = 9{,}6 + 162 = 171{,}6\ cm$$

Letra b.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

063. (CESPE/STM/2018/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Supondo que *Z* seja uma distribuição normal padrão, considere as seguintes transformações de variáveis aleatórias: *W* = 1 - *Z* e *V* = *Z*² - *W*² + 1. A respeito dessas variáveis aleatórias, julgue o item a seguir.
A variável aleatória *W* segue distribuição normal com variância unitária.

Vamos resolver esta questão por meio das propriedades de variância, são elas:

$$\mathrm{Var}(X + c) = \mathrm{Var}(X)$$

$$\mathrm{Var}(cX) = c^2\mathrm{Var}(X)$$

Sabemos que:

$$W = 1 - Z$$

$$Var(W) = Var(1 - Z)$$

$$Var(W) = Var(-1Z) = (-1^2)Var(Z) = Var(Z)$$

Se $Var(W) = Var(Z)$, então W também possui variância unitária.

Certo.

064. (CESPE/STM/2018/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Supondo que Z seja uma distribuição normal padrão, considere as seguintes transformações de variáveis aleatórias: *W* = 1 - *Z* e *V* = *Z*² - *W*² + 1. A respeito dessas variáveis aleatórias, julgue o item a seguir.
A variância da variável aleatória *V* é igual a 2.

Segundo o enunciado, temos as expressões (I) e (II) a seguir:

$$V = Z^2 - W^2 + 1 \quad (I)$$

$$W = 1 - Z \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I), ficamos com:

$$V = Z^2 - (1 - Z)^2 + 1$$

$$V = Z^2 - (1 + Z^2 - 2Z) + 1$$

$$V = Z^2 - 1 - Z^2 + 2Z + 1$$

$$V = 2Z$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Tomando a variância de ambos os lados da igualdade:

$$Var(V) = Var(2Z)$$

Sabemos que $Var(cX) = c^2Var(X)$, então:

$$Var(V) = 2^2Var(Z) = 4Var(Z) = 4 \cdot 1 = 4$$

$$4 \neq 2$$

Lembrando que Z segue uma distribuição normal-padrão, logo, possui variância unitária.

Errado.

---

065. (CESPE/STM/2018/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Supondo que Z seja uma distribuição normal padrão, considere as seguintes transformações de variáveis aleatórias: *W* = 1 - *Z* e *V* = *Z*² - *W*² + 1. A respeito dessas variáveis aleatórias, julgue o item a seguir.
A variável aleatória *V* segue distribuição normal.

Segundo o enunciado, temos as expressões (I) e (II) a seguir:

$$V = Z^2 - W^2 + 1 \quad (I)$$

$$W = 1 - Z \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I), ficamos com:

$$V = Z^2 - (1 - Z)^2 + 1$$

$$V = Z^2 - (1 + Z^2 - 2Z) + 1$$

$$V = Z^2 - 1 - Z^2 + 2Z + 1$$

$$V = 2Z$$

V – é uma combinação linear de Z. Se Z segue uma distribuição normal padrão, V também seguirá.

Certo.

---

066. (CESPE/STM/2018/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Supondo que Z seja uma distribuição normal padrão, considere as seguintes transformações de variáveis aleatórias: *W* = 1 - *Z* e *V* = *Z*² - *W*² + 1. A respeito dessas variáveis aleatórias, julgue o item a seguir.
A covariância entre *W* e *Z* é igual a -1.

A questão pede a covariância entre W e Z, dada por:

$$Cov(W, Z)$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

O enunciado nos deu as duas expressões a seguir:

$$W = 1 - Z \ (I)$$

$$V = Z^2 - W^2 + 1 \ (II)$$

Substituindo W por 1-Z, temos:

$$Cov\,(1 - Z, Z)$$

Algumas propriedades de covariância são úteis para este caso, como feito a seguir. A primeira é que a soma ou subtração de uma constante não afetam a covariância:

$$Cov\,(1 - Z, Z) = Cov\,(-Z, Z)$$

Outra propriedade importante é que a covariância de uma variável aleatória com ela própria é igual à sua variância:

$$Cov\,(1 - Z, Z) = Cov\,(-Z, Z) = -Cov(Z, Z) = -Var(Z)$$

Sabemos, ainda, que para uma distribuição normal padrão os seguintes parâmetros a seguir são válidos:

$$\mu = 0$$

$$\sigma = 1$$

$$\sigma^2 = 1$$

De volta a expressão (III):

$$Cov\,(W, Z) = -\,Cov\,(Z, Z) = -Var(Z) = 0 - 1$$

Certo.

---

067. (CESPE/EBSERH/2018/ANALISTA ADMINISTRATIVO/ESTATÍSTICA) Considerando que X e Y sejam variáveis aleatórios mutuamente independentes que seguem distribuição normal padrão, julgue o próximo item.
A razão R = X/Y segue uma distribuição com variância unitária.

Não existe nenhuma propriedade para a razão de variâncias de uma distribuição de probabilidades. Portanto, não podemos dizer que:

$$Var\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{Var(X)}{Var(Y)} = \frac{1}{1} = 1$$

Dessa forma, somente com as informações do enunciado, não é possível calcular a variância da distribuição X/Y. E isso é suficiente para considerar a afirmação como incorreta.
A título de curiosidade, existe uma distribuição de probabilidade dada pela razão entre duas variáveis independentes que seguem uma distribuição normal-padrão. Ela é chamada de distribuição

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

de Cauchy e é conhecida por não possuir média nem variância. Por esse motivo, ela é considerada patológica. O estudo dessa distribuição está fora do escopo do nosso curso.

Errado.

---

068. (FCC/TRT-11ª REGIÃO/AM E RR/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) **Instruções:** Considere as informações abaixo para responder à questão. Se Z tem distribuição normal padrão, então:

$P(Z < 0{,}4) = 0{,}655$; $P(Z < 0{,}67) = 0{,}75$; $P(Z < 1{,}4) = 0{,}919$; $P(Z < 1{,}6) = 0{,}945$;

$P(Z < 1{,}64) = 0{,}95$; $P(Z < 1{,}75) = 0{,}96$; $P(Z < 2) = 0{,}977$; $P(Z < 2{,}05) = 0{,}98$

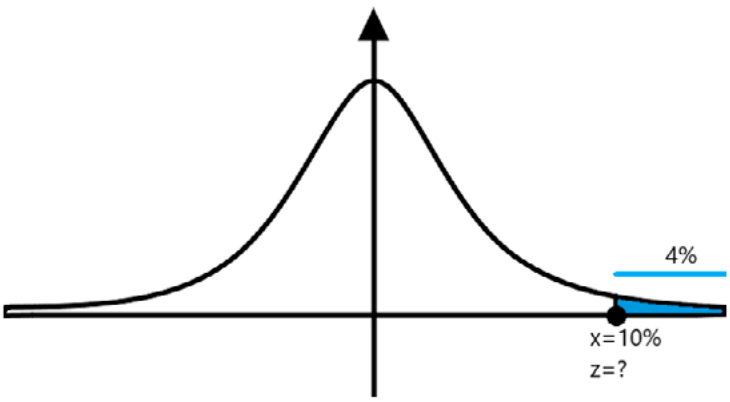
Atenção: O enunciado abaixo refere-se à questão.

A porcentagem do orçamento gasto com educação nos municípios de certo estado é uma variável aleatória X com distribuição normal com média μ(%) e variância 4(%)².

Um gasto em educação superior a 10% tem probabilidade de 4%. Nessas condições, o valor de μ é igual a

a) 5,50%
b) 6,20%
c) 7,35%
d) 6,50%
e) 7,85%

Do enunciado, temos a informação da probabilidade de um gasto com educação ser superior a 10%, conforme a seguir.



$$P(X > 10\%) = 4\% = \frac{4}{100} = 0{,}04$$

Devemos, agora, realizar a padronização da distribuição normal, como se segue:

$$P\left(Z > \frac{X - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}04$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

$$P\left(Z > \frac{10-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) = 0{,}04$$

$$P\left(Z > \frac{10-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) = 0{,}04$$

$$P\left(Z > \frac{10-\mu}{\sqrt{4}}\right) = 0{,}04$$

Dos dados da questão, temos também:

$$P(Z < 1{,}75) = 0{,}96$$

Ou seja, ao fazer a probabilidade inversa:

$$P(Z > 1{,}75) = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$$

Temos então a igualdade:

$$P\left(Z > \frac{10-\mu}{\sqrt{4}}\right) = P(Z > 1{,}75) = 0{,}04$$

Logo:

$$\frac{10-\mu}{2} = 1{,}75$$

Isolando a média, temos:

$$10 - \mu = 3{,}50$$

$$\mu = 10 - 3{,}5 = 6{,}5\%$$

Letra d.

---

069. (CESGRANRIO/TRANSPETRO/2018/ENGENHEIRO JÚNIOR/TELECOMUNICAÇÕES) Numa grande rede de hotéis, há uma central de reservas onde as linhas telefônicas ficam ocupadas 35% do tempo. Suponha que as linhas ocupadas em sucessivas chamadas sejam eventos independentes, e considere que 10 chamadas aconteçam.

A distribuição de probabilidade que permite calcular a probabilidade de que as linhas estejam ocupadas em exatamente três chamadas é a distribuição

a) binomial
b) de Bernoulli
c) geométrica
d) hipergeométrica
e) uniforme

Vamos resolver a questão por eliminação.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

a) A distribuição binomial tem por objetivo estimar a probabilidade de haver **k** sucessos em um conjunto de **n** tentativas de uma variável binomial com probabilidade de sucesso igual a **p.** Afirmação correta.

b) Uma distribuição de Bernoulli corresponde a um único evento. De fato, a probabilidade de uma linha estar ocupada ou não é descrita por uma distribuição de Bernoulli. Porém, a probabilidade de que, de 10 linhas, 3 delas estejam ocupadas é descrita pela distribuição binomial. Afirmação incorreta.

c) Uma distribuição geométrica pode ser definida como distribuições seguidas de Bernoulli, em que o evento é de falha ou sucesso. Um exemplo de distribuição geométrica é jogar uma moeda até que consigamos coroa. Não é o caso desta questão;

d) Uma distribuição hipergeométrica é definida como um modelo que descreve probabilisticamente os resultados de uma sequência de experimentos de Bernoulli dependentes. Também não é o caso do exercício;

e) A distribuição uniforme é uma distribuição contínua, portanto, não é o caso dessa questão.

Letra a.

---

070. (FCC/SEFAZ-BA/2019/AUDITOR-FISCAL/ADMINISTRAÇÃO, FINANÇAS E CONTROLE INTERNO) Durante um período de tempo, registrou-se em uma fábrica a quantidade diária de óleo (Q) em litros consumida para a produção de um produto. Concluiu-se que a população formada por estas quantidades é normalmente distribuída com média igual a 50 litros por dia. Sabe-se que 5% dos valores destas quantidades são inferiores a 41,8 litros e 90% possuem um valor de no máximo x litros. O valor de x é igual a

Dados: Valores das probabilidades P(Z ≤ z) da curva normal padrão Z.

z	1,00	1,28	1,64	1,96
P(Z ≤ z)	0,840	0,900	0,950	0,975

a) 58,2
b) 56,4
c) 59,8
d) 57,3
e) 54,2

Vamos interpretar as informações fornecidas pelo enunciado. 5% dos valores destas quantidades são inferiores a 41,8 litros. Isso significa que:

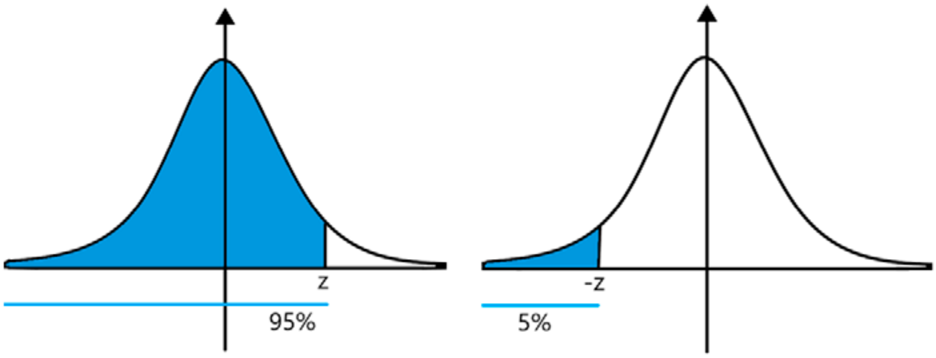
$$P(X < 41{,}8) = 0{,}05$$

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Da Tabela de valores fornecidos para a Distribuição Normal, temos que:

$$P(Z < 1{,}64) = 0{,}95$$

Pela Simetria da Normal, temos que:



Dessa forma, concluímos que:

$$P\ (Z < \ -1{,}64) = 0{,}05$$

Portanto X = 41,8 corresponde a Z = –1,64. A relação entre a variável normalizada e a variável original é dada por:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

A média foi fornecida no enunciado, que é igual a 50. Com isso, podemos calcular o desvio padrão.

$$-1{,}64 = \frac{41{,}8-50}{\sigma}$$

$$-1{,}64 = \frac{-8{,}2}{\sigma}$$

$$\therefore \sigma = \frac{8{,}2}{1{,}64} = 5$$

Por fim, queremos saber qual é o valor de x, para o qual a probabilidade seja menor de 90%. Da Tabela, temos que P (Z < 1,28) = 0,90. Portanto, queremos o X correspondente a Z = 1,28.

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$1{,}28 = \frac{X-50}{5}$$

$$\therefore 5.1{,}28 = X - 50$$

$$6{,}4 = X - 50$$

$$\therefore X = 50 + 6{,}4 = 56{,}4$$

Letra b.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

071. (FCC/ISS-SP/2012/AUDITOR-FISCAL DO MUNICÍPIO) Seja X a variável aleatória que representa o comprimento de uma peça. Sabe-se que X tem distribuição normal com média 10 cm e desvio padrão de 2 cm. As peças são classificadas pelo tamanho de acordo com a tabela abaixo:

Se (em cm)	Tamanho
$X < 8{,}32$	pequeno
$8{,}32 \leq X \leq 11{,}68$	médio
$X > 11{,}68$	grande

Três peças são selecionadas aleatoriamente e com reposição da distribuição de X. A probabilidade de pelo menos uma ser pequena é

a) 0,512.
b) 0,488.
c) 0,474.
d) 0,456.
e) 0,412.

Dados: P(Z < 0,84) = 0,80, P(Z < 1,5) = 0,933, P(Z < 1,96) = 0,975, P(Z < 2,5) = 0,994.

A probabilidade de uma peça qualquer ser pequena é dada por:

$$p = P(X < 8{,}32)$$

Essa probabilidade deve ser calculada pela normalização.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{8{,}32 - 10}{2} = -\frac{1{,}68}{2} = -0{,}84$$

Agora, podemos calcular a probabilidade de uma peça qualquer ser pequena.

$$p = P(X < 8{,}32) = P(Z < -0{,}84) = 1 - 0{,}80 = 0{,}20$$

Porém, veja que o enunciado pediu, numa amostra de 3 peças, qual a probabilidade de pelo menos uma ser pequena. Para isso, o modo mais fácil é calcular a probabilidade complementar, que seria a probabilidade de nenhuma peça ser pequena.

0,80	0,80	0,80	$=(0{,}80)^3 = 0{,}512$
Peça 1	**Peça 2**	**Peça 3**	**Total**

Sendo assim, a probabilidade pedida no enunciado corresponde a:

$$P = 1 - (0{,}80)^3 = 1 - 0{,}512 = 0{,}488$$

Letra b.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

072. (FCC/TRE-SP/2012/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) O volume líquido de frascos de xampu é uma variável aleatória com distribuição aproximadamente normal com média μ e desvio padrão 0,5 mL. O valor de μ, em mL, para que no máximo 0,2% dos frascos tenham menos do que 200 mL é:

a) 182,12.
b) 188,46.
c) 195,24.
d) 198,56.
e) 198,98.

Dados: P (Z < 2,88) = 0,998

Primeiramente, devemos identificar o P(Z) associado a 0,2% = 0,002. Usando as propriedades da normal:

$$P(Z < -2{,}88) = 1 - 0{,}998 = 0{,}002$$

O enunciado pediu que:

$$P(X < 200) = P(Z < -2{,}88) = 0{,}002$$

Temos que X = 200 corresponde a Z = -2,88. Devemos, portanto fazer a normalização.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = -2{,}88$$

$$Z = \frac{200 - \mu}{0{,}5} = -2{,}88$$

$$200 - \mu = -2{,}88.0{,}5 = -1{,}44$$

$$\therefore \mu = 200 + 1{,}44 = 201{,}44$$

Apesar disso, a banca cometeu o erro de utilizar o 2,88 com sinal positivo. Portanto, o gabarito foi que a média é igual a 200-1,44 = 198,56.

Letra d.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

GABARITO

1. c
2. d
3. a
4. c
5. b
6. E
7. C
8. d
9. c
10. c
11. a
12. 3,2%, 0,16%, t = 12,5min
13. C
14. d
15. c
16. C
17. e
18. e
19. c
20. C
21. C
22. C
23. E
24. b
25. a
26. b
27. e
28. c
29. c
30. c
31. a
32. d
33. 13,5%, 48%, 7,5%
34. E
35. E
36. 59,9%, 99,2% 93,3%
37. b
38. a
39. b
40. e
41. e
42. a
43. d
44. e
45. b
46. b
47. d
48. c
49. e
50. c
51. C
52. b
53. d
54. e
55. d
56. d
57. C
58. E
59. C
60. E
61. E
62. b
63. C
64. E
65. C
66. C
67. E
68. d
69. a
70. b
71. b
72. d

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.

Thiago Cardoso

Engenheiro eletrônico formado pelo ITA com distinção em Matemática, analista-chefe da Múltiplos Investimentos, especialista em mercado de ações. Professor desde os 19 anos e, atualmente, leciona todos os ramos da Matemática para concursos públicos.

O conteúdo deste livro eletrônico é licenciado para Maria Monica Margarida Silva Pereira - 02150260395, vedada, por quaisquer meios e a qualquer título, a sua reprodução, cópia, divulgação ou distribuição, sujeitando-se aos infratores à responsabilização civil e criminal.