MATEMÁTICA

Funções e Gráficos do 2º Grau

Livro Eletrônico

GRAN CURSOS ONLINE

SUMÁRIO

FUNÇÕES E GRÁFICOS DO 2º GRAU

Olá, aluno(a), seja bem-vindo(a) a mais uma aula de Matemática. Nessa aula, trataremos as Equações e Funções do 2º Grau.

Aqui, você precisa saber muito bem a fórmula de Bhaskara e dominar o coeficiente líder, porque ele é o principal fator que influencia o gráfico da função.

1. Equações do Segundo Grau

A função do segundo grau é definida por um polinômio do segundo grau.

$$y = ax^2 + bx + c, com\ a \neq 0$$

É importante que o coeficiente a não seja nulo. Caso contrário, a função se reduziria a uma função do primeiro grau.

O gráfico de uma função do segundo grau é uma parábola.

1.1. Raízes da Função

As raízes da função do segundo grau são aquelas que igualam o valor da função a zero. Ou seja.

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Não é demais repetir que, na equação do segundo grau, os termos *a*, *b* e *c* são números constantes. Por exemplo:

$$2x^2 + 4x + 1 \therefore a = 2, b = 4, c = 1$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x \therefore a = 1, b = -\frac{3}{2}, c = 0$$

$$-3x^2 + 7x + 2 \therefore a = -3, b = 7, c = 2$$

1.1.1. Fórmula de Bhaskara

A solução da Equação do Segundo Grau é dada pela Fórmula de Bhaskara. Apresentaremos essa expressão e, a seguir, mostraremos a demonstração.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

É interessante notar que o termo dentro da raiz quadrada é denominado discriminante e determina o número de soluções da equação do segundo grau.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Se $\Delta > 0$: a equação tem duas soluções reais.

Se $\Delta = 0$: a equação tem apenas uma solução real.

Se $\Delta < 0$: a equação não tem soluções reais, porque a raiz quadrada de um número negativo não é real.

Vejamos um exemplo para você entender melhor:

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.3}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

As duas soluções para essa equação são, portanto:

$$x_1 = \frac{-4 + 2}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-4 - 2}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

1.1.2. Soma e Produto das Raízes

A soma e o produto das raízes de uma equação do segundo grau podem ser calculadas diretamente a partir dos coeficientes.

$$\boldsymbol{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$$

Essas expressões podem ser bastante úteis, porque, em algumas situações, você poderá resolver mais rápido algumas equações do segundo grau.

Por exemplo, considere a equação.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

A soma e o produto das raízes pode ser calculado rapidamente.

$$\boldsymbol{S = x_1 + x_2} = -\frac{(-5)}{1} = 5 \qquad \boldsymbol{P = x_1 x_2} = \frac{6}{1} = 6$$

Podemos imaginar dois números, cuja soma é igual a 5 e cujo produto é igual a 6? Tente.

Já tentou?

Conseguiu?

Podemos notar que 2 e 3 são dois números, cuja soma é igual a 5 e cujo produto é igual a 6. Portanto, são essas as duas raízes da equação.

Sendo assim, em algumas equações, você poderá conseguir calcular as raízes de cabeça. Caso seja possível, ótimo. Se não, fique tranquilo. Basta utilizar a fórmula de Bhaskara.

Direto do Concurso

001. (FGV/PREFEITURA DE OSASCO-SP/2014/ATENDENTE) Há dois valores de x que satisfazem a equação do segundo grau $5x^2 - 26x + 5 = 0$. Sobre esses valores, é verdadeiro afirmar que:

a) sua soma é 26 e seu produto é 5;
b) sua soma é 5 e seu produto é 26;
c) sua soma é um número inteiro;
d) seu produto é um número racional, porém não inteiro;
e) seu produto é 1.

A soma das raízes é dada pelo coeficiente **b.**

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{(-26)}{5} = \frac{26}{5}$$

O produto das raízes é dado pelo coeficiente **c.**

$$P = \frac{c}{a} = \frac{5}{5} = 1$$

Portanto, a soma das raízes é igual a 26/5, que é um número racional, porém, não inteiro. Já o produto das raízes é igual a 1, que é um número inteiro.

Letra e.

---

002. (FUNDATEC/PREFEITURA DO SAPUCAIA DO SUL-RS/2019/SECRETÁRIO DE ESCOLA) As raízes da equação do segundo grau $3x^2 - 21x + 30 = 0$ são:

a) x = 1 e x = 4
b) x = 2 e x = 5
c) x = 3 e x = 6
d) x = 4 e x = 7
e) x = 5 e x = 8

Parte inferior do formulário

Note que a equação pode ser simplificada por 3.

$$3x^2 - 21x + 30 = 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

Vamos identificar os coeficientes da equação.

a	**é o termo que acompanha** x^2	**1**
b	é o termo que acompanha x	-7
c	é o termo sozinho	10

Como o enunciado já deu possíveis raízes, podemos utilizar o artifício da Soma e Produto das Raízes com facilidade através dos coeficientes da equação.

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{(-7)}{1} = 7$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{10}{1} = 10$$

Agora, basta procurar um par de números, cuja soma seja igual a 7 e o produto igual a 10. Você consegue?

Observe que a soma 2 + 5 = 7 e que o produto 2.5 = 10. Portanto, as raízes da equação do segundo grau são $x_1 = 2$ e $x_2 = 5$.

Outra solução possível para o problema é usar a Equação de Bhaskara. Primeiramente, calcularemos o descriminante.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4.1.31 = 49 - 40 = 9$$

Agora, vamos calcular as raízes.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2.1} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

Agora, podemos calcular as duas raízes separadamente.

$$x_1 = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Letra b.

---

003. (VUNESP/PREFEITURA DE RIBEIRÃO PRETO/2018/TÉCNICO EM PROCESSAMENTO DE DADOS) A equação $x^2 + 5x - 14 = 0$ tem duas raízes reais. Subtraindo-se a menor da maior obtém-se

a) −9.
b) −5.
c) 5.
d) 7.
e) 9.

Vamos identificar os termos da equação do segundo grau fornecida.

a	**é o termo que acompanha** x^2	**1**
b	é o termo que acompanha x	5
c	é o termo sozinho	-14

Podemos utilizar a Equação de Bhaskara para resolvê-la. Para isso, podemos também calcular o determinante.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4.1.(-14) = 25 + 56 = 81$$

Aplicando na Equação de Bhaskara, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2.1} = \frac{-5 \pm 9}{2}$$

Agora, vamos calcular as raízes separadamente.

$$x_1 = \frac{-5+9}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-5-9}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

Portanto, a diferença entre as raízes é:

$$D = x_1 - x_2 = 2 - (-7) = 9$$

Letra e.

---

004. (CESPE/CRPM/2016/TÉCNICO EM GEOCIÊNCIAS/HIDROLOGIA) Considerando-se os 365 dias de um ano, numerados sequencialmente de 1 a 365, a função y = -0,1x^2 + 40x, em que *x* = 1, 2,..., 365, estima-se a quantidade de litros de água desperdiçados no dia *x* em vazamentos na rede de distribuição de determinada cidade. Nesse caso, o desperdício equivalente a 3 m^3 ocorreu em um dia do mês de

a) janeiro e um dia do mês de dezembro.
b) janeiro e em um dia do mês de julho.
c) fevereiro e em um dia do mês de setembro.
d) abril e em um dia do mês de novembro.
e) abril e em um dia do mês de outubro.

Primeiramente, devemos observar que 3 m³ = 3000 litros. Feito isso, queremos encontrar as soluções para a seguinte equação do segundo grau.

$$-0{,}1x^2 + 40x = 3000$$

Chegamos à equação:

$$-0{,}1x^2 + 40x - 3000 = 0$$

Vamos calcular o descriminante.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 40^2 - 4.(-0{,}1).(-3000) = 1600 - 1200 = 400$$

Agora, vamos transferir para a Fórmula de Bhaskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-40 \pm \sqrt{400}}{2.(-0{,}1)} = \frac{-40 \pm 20}{-0{,}2}$$

Vamos calcular as raízes separadamente.

$$x_1 = \frac{-40 + 20}{-0{,}2} = \frac{-20}{-0{,}2} = 100$$

$$x_2 = \frac{-40 - 20}{-0{,}2} = \frac{-60}{-0{,}2} = 300$$

Agora, vamos encontrar os meses do ano correspondentes.

Mês	Quantidade de Dias	Números
Janeiro	31	1 a 31
Fevereiro	28	32 a 59
Março	31	60 a 90
Abril	**30**	**91 a 120**
Maio	31	121 a 151
Junho	30	142 a 181
Julho	31	182 a 212
Agosto	31	213 a 243
Setembro	30	244 a 273
Outubro	**31**	**274 a 303**

Portanto, a quantidade de chuvas pedida aconteceu em um dia do mês de Abril e outro dia do mês de Outubro.

Letra e.

2. Funções do Segundo Grau

2.1. Sinais

Na função do segundo, o coeficiente "a" domina o sinal quando a variável x é muito positiva ou muito negativa. Ou seja, à medida que a função vai andando no sentido das infinidades, o sinal dela será o mesmo do coeficiente a.

Quando a função apresenta duas raízes reais, a única região em que a função apresenta sinal diferente desse coeficiente é **a região entre as raízes.**

Sendo assim:

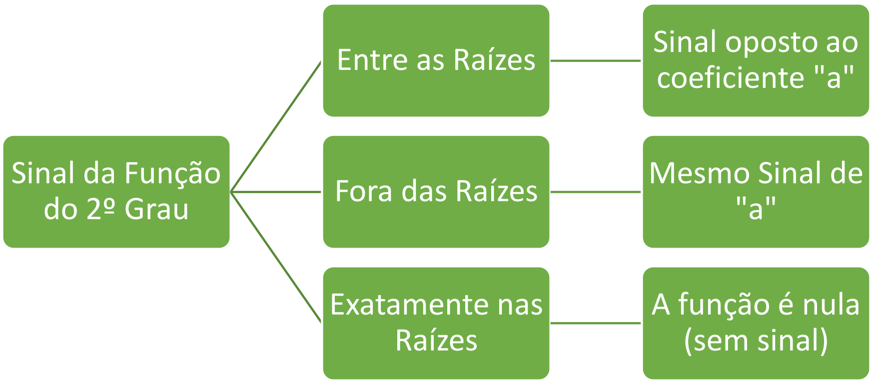


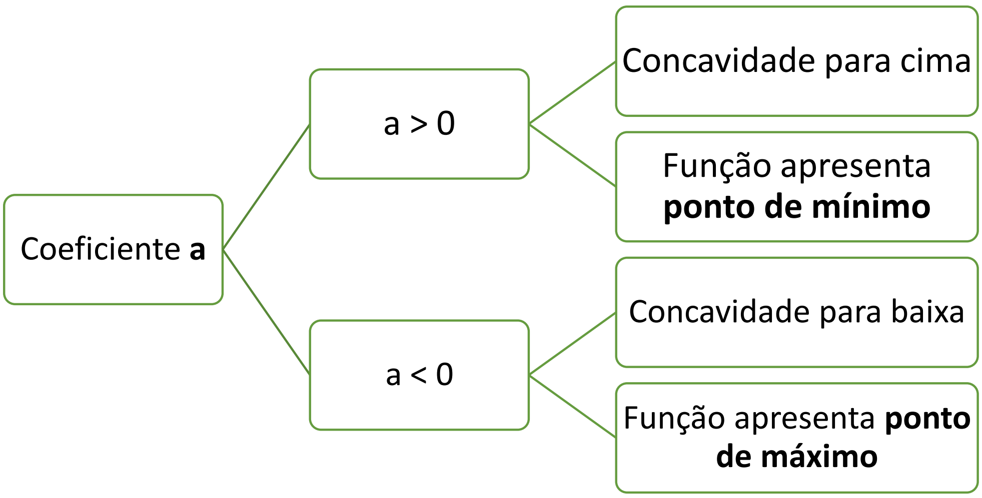
Figura 1: Sinal da Função do Segundo Grau

É importante lembrar que o zero não possui sinal. Portanto, exatamente nas raízes, a função não apresenta sinal, pois é nula.

2.1.1. O Coeficiente Líder

O coeficiente **a** é o termo mais importante para o desenho do gráfico do uma função do segundo grau.

Temos algumas observações importantes a respeito do seu sinal:



Com base nessas informações, vamos observar a influência do coeficiente **a** no gráfico da função do segundo grau.

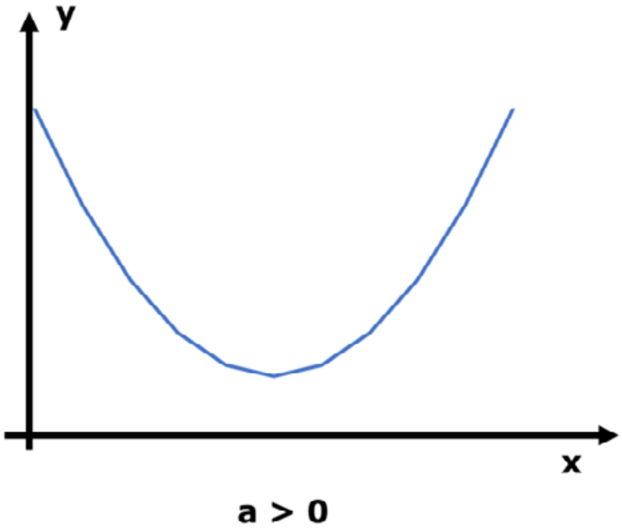


Figura 2: Influência do Coeficiente a no Gráfico da Função

2.1.2. Funções com Δ > 0

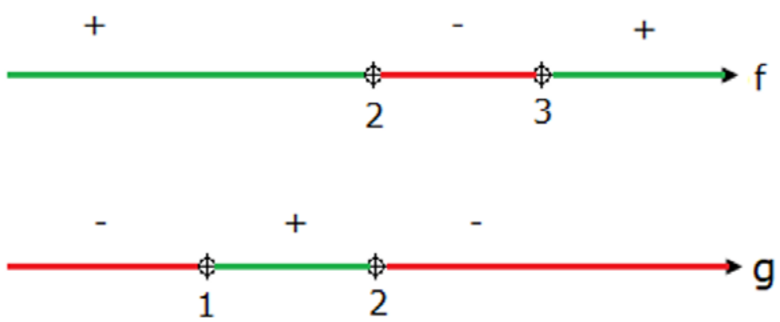
Vejamos como exemplo duas funções com raízes reais distintas, mudando o sinal do coeficiente “a”.

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 \quad g(x) = -x^2 + 3x - 2$$

A primeira coisa a se fazer é calcular as raízes dessas funções. Aplicando a Fórmula de Bhaskara, podemos obter que são elas:

$f(x) = x^2 - 5x + 6$	$g(x) = -x^2 + 3x - 2$
2 e 3	1 e 2

Podemos, de antemão, prever os sinais dessas funções, aplicando o princípio delineado na Figura 1.



Agora, vamos confirmar esses sinais previstos plotando os gráficos de ambas as funções no Excel.

Podemos destacar os sinais previstos.

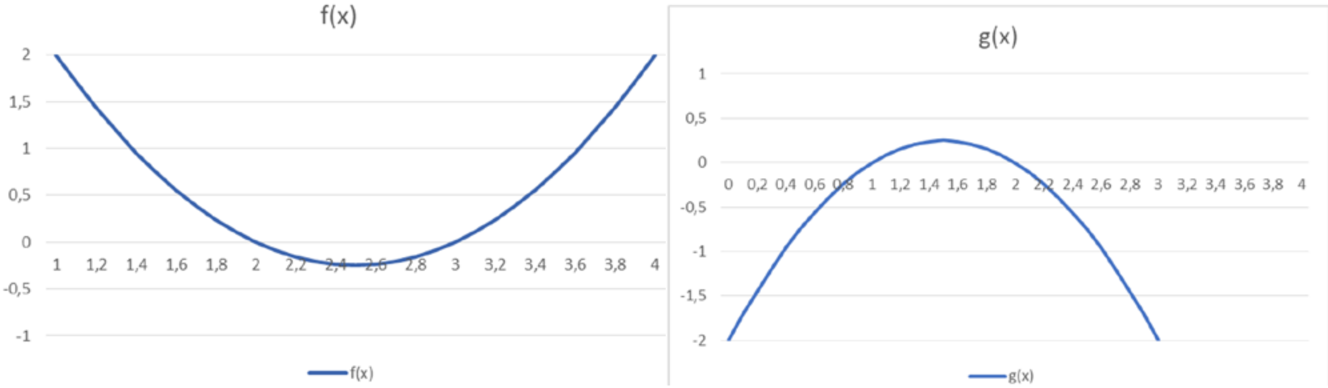


Figura 3: Gráficos de Funções do Segundo Grau com Δ>0

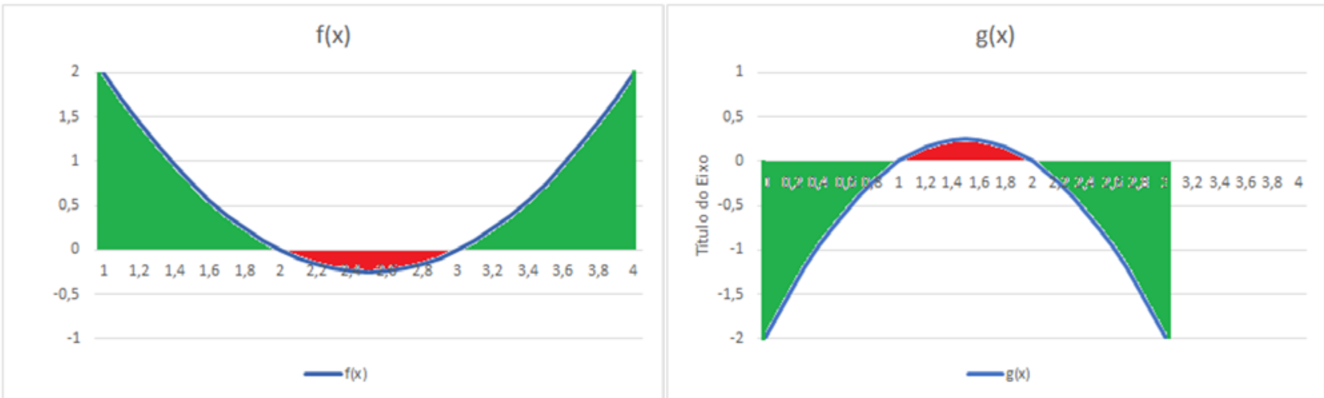


Figura 4: Ilustração dos Sinais de duas Funções do Segundo Grau com Δ > 0

2.1.3. Funções com Δ < 0

E se a função não tiver raízes reais?

Nesse caso, ela sempre apresentará o sinal do coeficiente a. Vejamos dois exemplos.

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x} + 1 \qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}^2 + 3\boldsymbol{x} + 2$$

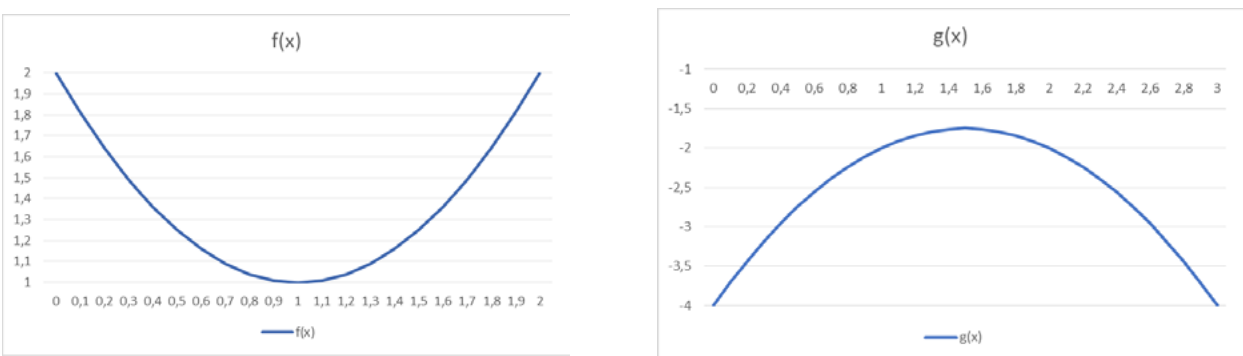


Figura 5: Gráficos de Funções do Segundo Grau com $\Delta < 0$

Observe que o primeiro gráfico é sempre positivo, enquanto que o segundo é sempre negativo. Isso acontece, porque ambas as funções não possuem raízes reais.

Os sinais dessas funções podem ser resumidos graficamente pelo esquema que aprendemos anteriormente, mostrando

Figura 6: Sinais das Funções f e g com $\Delta < 0$

2.1.4. Funções com Δ = 0

Finalmente, temos um último caso. O que acontece quando a função do segundo grau possui exatamente uma raiz real? Ou seja, quando o delta da equação é igual a zero.

Nesse caso, a função não tem sinal, ou seja, é nula exatamente na raiz real. Em todos os outros pontos, ela assumirá o mesmo sinal do coeficiente a.

Vejamos, como exemplo, as funções.

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad g(x) = -x^2 + 4x - 4$$

Primeiramente, desenharemos a representação esquemática dos sinais dessa função.

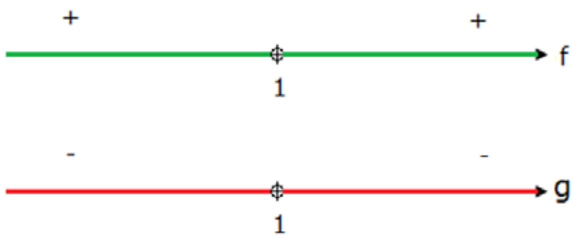


Figura 7: Sinais de Funções do Segundo com Δ = 0

A fins de visualização, também podemos plotar os gráficos de ambas as funções.

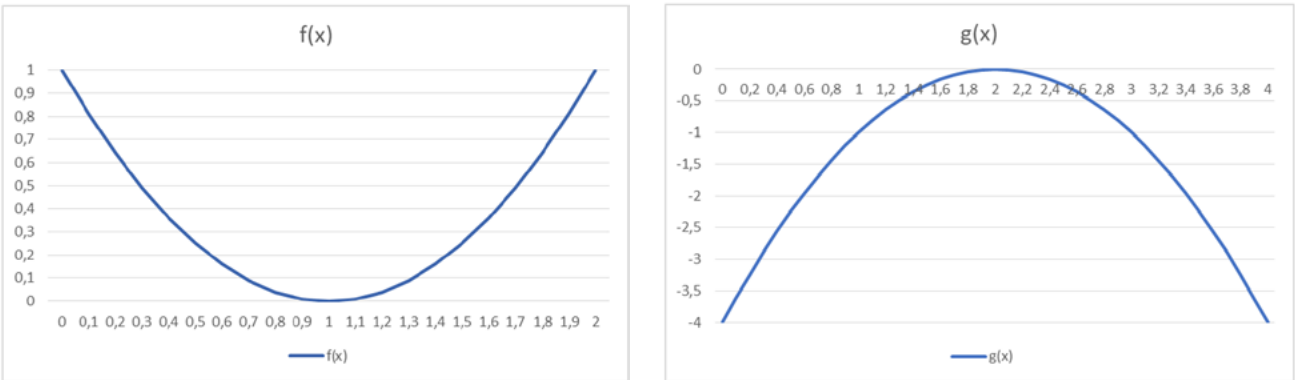


Figura 8: Gráficos de Funções do Segundo Grau com Δ = 0

Então, vamos resumir o que você precisa fazer para traçar o gráfico ou, pelo menos, saber os sinais de uma função do segundo grau:

- Calcular as raízes;
- O sinal da função será o mesmo do coeficiente a no espaço fora das raízes;
- Se houver raízes, a única região em que o sinal da função será oposto ao do coeficiente a será no intervalo entre elas.

2.2. Vértice

Como vimos, o gráfico de uma função do segundo grau é uma parábola. Essa parábola apresenta um vértice que pode ser um ponto de máximo ou mínimo.

Primeiramente, você deve entender por que o vértice é tão importante.

Suponha que você tem uma fábrica de chocolates. E o seu lucro é dado em função da quantidade de chocolates produzidos (x):

$$y = -x^2 + 4x - 4 = 0$$

Ao longo das questões, veremos várias tentativas de modelar processos físicos de interessante por meio de funções do segundo grau. Em Matemática Aplicada, trata-se de um ramo bastante importante. O objetivo é tentar descrever um fenômeno da vida real por meio de equações matemáticas.

Você deseja maximizar o seu lucro, não é? Então, você quer saber qual é o valor máximo dessa função.

Duas perguntas são naturais:

- Quantos chocolates eu devo produzir?
- Qual é o maior lucro que se pode obter nessas condições?

Traduzindo essas perguntas para a linguagem matemática, temos o seguinte:

Tabela 1: Tradução de Problemas Reais em Problemas Matemáticos

Quantos chocolates eu devo produzir?	Qual é o valor de x_v que maximiza a função?
Qual é o maior lucro que se pode obter nessas condições?	Qual é o maior valor de y que é o valor máximo possível da função? Em outras palavras, $y = f(x_v)$?

Um ponto importante a se comentar é que nem sempre as funções do segundo grau apresentam máximos e mínimos. Na verdade, fora das raízes, essas funções escapam indefinidamente – crescem infinitamente quando a > 0 ou decrescem infinitamente quando a < 0.

Dessa maneira, tem-se que:

- **a > 0:** a função apresenta um ponto de mínimo;
- **a < 0:** a função apresenta um ponto de máximo;

Em ambos os casos, as coordenadas do vértice podem ser calculadas pelas expressões:

Tabela 2: Coordenadas Numéricas do Vértice de uma Função do Segundo Grau

$$\boldsymbol{x_v = -\frac{b}{2a} \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a}}$$

Para provar a coordenada do x_v, devemos recorrer ao Cálculo Diferencial, portanto, está fora do escopo desse curso.

Porém, há algo interessante a se comentar: o x do vértice corresponde à média aritmética das raízes.

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Por outro lado, a coordenada y do vértice pode ser calculada de posse de x_v. Vejamos:

$$y_v = f(x_v) = ax_v^2 + bx_v + c$$

$$y_v = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b.\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2}{4a} + c = c - \frac{b^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$\therefore y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

2.2.1. Função em termos do Vértice

Uma função do segundo grau pode escrita de maneira muito simples em função dos parâmetros do vértice.

$$y = f(x) = a.(x - x_V)^2 + y_V$$

O coeficiente **a** é o mesmo coeficiente da forma geral y = ax² + bx + c.

Essa forma é muito útil, pois explicita as coordenadas do vértice, e isso facilita bastante o desenho do gráfico da função.

Vejamos um exemplo.

Considere a função do 2º Grau:

$$y = x^2 + x + 1$$

Essa é uma função bem interessante que nem apresenta raízes reais. Nessa função, temos a = 1.

Podemos calcular as coordenadas do vértice pelas fórmulas apresentadas na seção anterior.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2.1} = -\frac{1}{2}$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{1^2 - 4.1.1}{4.1} = -\frac{1-4}{4} = \frac{3}{4}$$

Portanto, a função pode ser escrita da seguinte forma:

$$y = x^2 + x + 1 = 1.\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Dessa forma, conseguimos desenhar o gráfico da função com facilidade, pois sabemos que:

- **a > 0**, logo a função apresenta concavidade virada para cima, portanto, o vértice é o ponto de mínimo da função;
- **Vértice:** o ponto de mínimo da função acontece em x = –1/2 em que se obtém y = 3/4.

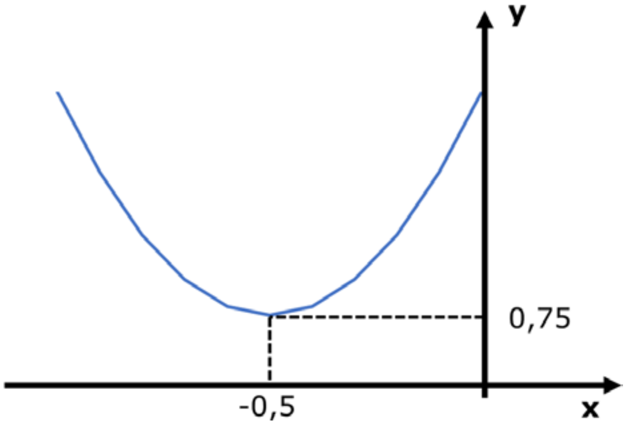
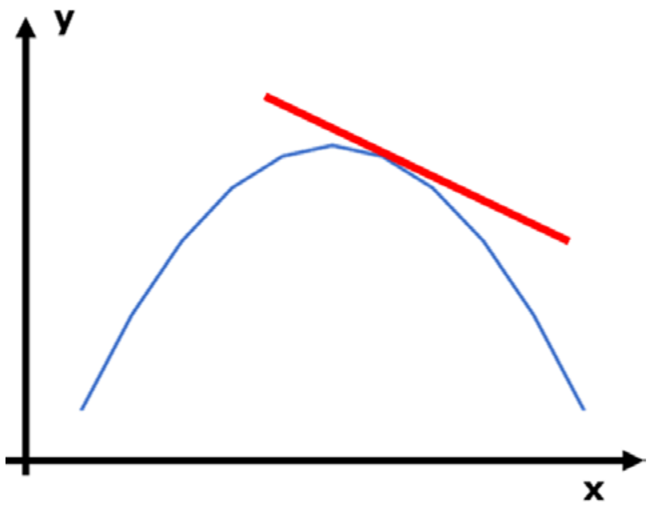


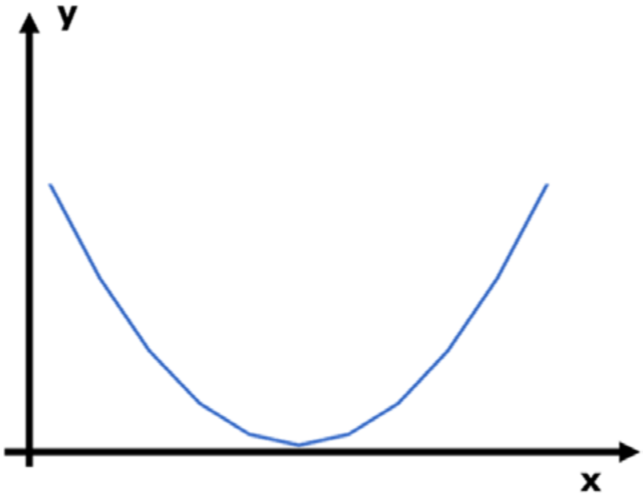
Figura 9: Gráfico da Função y = x² + x + 1

2.3. Reta Tangente à Parábola

Uma reta é tangente à parábola quando elas possuem um único ponto em comum.



O caso mais simples de tangência acontece quando a parábola é tangente ao eixo **x**. O eixo **x** é caracterizado pela equação y = 0.

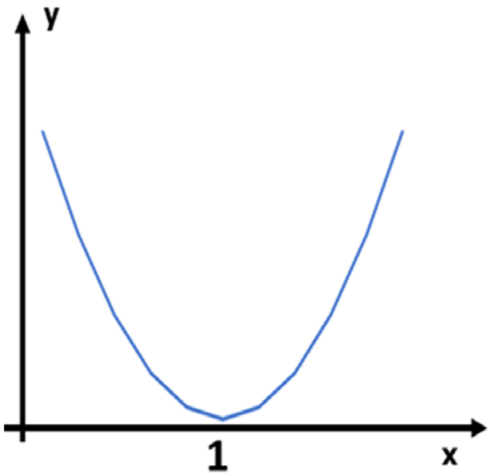


Desse modo, basta, portanto, que a equação do segundo grau tenha uma única raiz real. Para isso, basta impor que a equação tenha discriminante Δ = 0.

Por exemplo, considere a função do segundo grau $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Calculemos o discriminante.

$$\Delta = (-2)^2 - 4.1.1 = 4 - 4 = 0$$

Isso significa que a equação possui apenas uma raiz real x = 1.



Tendo em mente que a equação geral da reta é y = ax + b, o procedimento geral para calcular a reta tangente à parábola em um ponto qualquer x envolve dois passos.

- O coeficiente de inclinação da reta "a" é igual à derivada da função do segundo grau no ponto x.

O polinômio derivado é obtido por da seguinte forma:

   – O coeficiente ax

- E

Direto do Concurso

005. (FGV/AL-RO/2018/ANALISTA LEGISLATIVO) A reta y = ax + b é tangente ao gráfico da função f(x) = x² + 3x + 1 no ponto de abscissa x =1.
O valor de 2a + b é
a) 5.
b) 6.
c) 10.
d) 12.
e) 13.

Primeiramente, calculemos a derivada de f em x = 1.

$$f(x) = x^2 + 3x + 1 \therefore f'(x) = 2x + 3$$

Dessa forma, a derivada em x = 1 é:

$$f'(1) = 2.1 + 3 = 5$$

O coeficiente de inclinação da reta tangente deve ser exatamente igual à derivada da função do segundo grau. Portanto, podemos escrever:

$$y = ax + b = 5x + b$$

Como a reta tangente deve passar também pelo exato mesmo ponto da função do segundo grau, devemos impor que y (1) = f (1). Para isso, calculemos o valor da função do segundo grau em x = 1.

$$f(1) = 1^2 + 3.1 + 1 = 1 + 3 + 1 = 5$$

Agora, basta fazer y(1) = 5 na equação da reta tangente.

$$y = 5x + b$$

$$y(1) = 5 = 5.1 + b$$

$$5 = 5 + b \therefore b = 0$$

Dessa forma, a soma pedida no enunciado é: 2a + b = 2.5 + 0 = 10.
Letra c.

006. (CESPE/TJ-PA/2020/ANALISTA JUDICIÁRIO – PROGRAMADOR) Considere que, em determinado dia, um computador seja ligado às 5 horas e desligado às 19 horas e que, nesse intervalo de tempo, a porcentagem da memória desse computador que esteja sendo utilizada na hora x seja dada pela expressão P(x) = -5/4x² + 30x – 100.

Nessa situação, no intervalo de tempo considerado, na hora em que a memória do computador estiver sendo mais demandada, a porcentagem utilizada será igual a:

a) 12%.
b) 20%.
c) 70%.
d) 80%.
e) 100%.

O ponto de máximo uso da memória é dado pelo y do vértice da parábola.

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a} = -\frac{30^2 - 4 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot (-100)}{4 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)} = -\frac{900 - 500}{-5} = \frac{400}{5} = 80$$

Letra d.

---

007. (CESPE/SEFAZ-RS/2018/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO FAZENDÁRIO) Pela venda diária de x unidades de determinado produto, um comerciante fatura, líquidos, L(x) = 300 + 40x – x² reais, podendo esse faturamento ser interpretado como lucro, como prejuízo ou como empate, isto é, L(x) = 0 reais.

Para que o faturamento seja caracterizado como lucro, o comerciante deverá vender, diariamente,

a) menos de 5 unidades do produto.
b) mais de 5 e menos de 10 unidades do produto.
c) mais de 10 e menos de 30 unidades do produto.
d) mais de 30 e menos de 35 unidades do produto.
e) mais de 35 unidades do produto.

Precisamos obter o sinal da função lucro. Vamos calcular as raízes.

$$300 + 40x - x^2 = 0$$

As raízes podem ser calculadas pela Equação de Bhaskara.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (40)^2 - 4.300.(-1) = 1600 + 1200 = 2800$$

Vamos usar o valor do descriminante na Equação de Bhaskara.

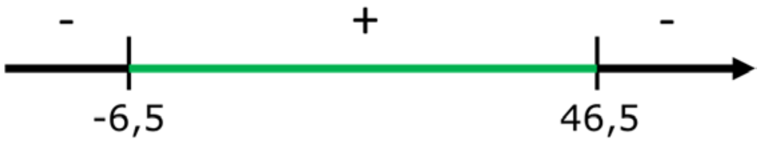
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-40 \pm \sqrt{2800}}{2.(-1)} \cong \frac{-40 \pm 53}{-2}$$

A raiz de 2800 não é exata. Mas, podemos aproximar para 53, pois 53² = 2809.

$$x_1 = \frac{-40+53}{-2} = \frac{13}{-2} = -6{,}5$$

$$x_2 = \frac{-40-53}{-2} = \frac{-93}{-2} = 46{,}5$$

Agora que temos os valores aproximados das raízes, podemos usar a teoria sobre sinais da Função do 2º Grau. A Função do 2º Grau tem o mesmo sinal do coeficiente a no intervalo fora das raízes. No intervalo dentro das raízes, ela assume o sinal oposto.



Portanto, a função lucro L(x) assume valores positivos entre –6,5 e 46,5 unidades. Essa conta está incoerente com todas as afirmações do enunciado. E, por isso, a questão foi anulada. Uma pena, pois a intenção inicial da questão era muito interessante.
Anulada.

---

008. (FGV/SEDUC-SP/2013/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Há dois valores reais de m para os quais o gráfico da função f (x) = 25x² + mx + 17x + 9 tangencia o eixo-x.
A soma desses valores é:
a) -34.
b) -17.
c) -1.
d) 26.
e) 29.

Vamos obter a função desejada.

$$f(x) = 25x^2 + mx + 17x + 9 = 25x^2 + (17+m)x + 9$$

Dessa forma, temos a = 25, b = m + 17 e c = 9.
A função tangencia o eixo **x** quando ela possui uma única raiz real.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (m+17)^2 - 4.25.9 = 0$$

$$(m+17)^2 - 900 = 0$$

$$(m+17)^2 = 900$$

Extraindo a raiz quadrada, temos:

$$m + 17 = \pm 30$$

$$m = 17 \pm 30$$

Logo, são dois valores possíveis para m.

$$m_1 = 17 + 30 = 47$$

$$m_2 = 17 - 30 = -13$$

A soma desses valores é 47 – 13 = 4.

Certo.

---

009. (CESPE/BNB/2018/ANALISTA BANCÁRIO) O menor valor de f(x) = $-3x^2 + 9x - 6$ ocorre em x = 3/2.

Como essa função tem coeficiente líder negativo (a = –3 < 0), essa função admite um ponto de máximo, e não um ponto de mínimo.

Errado.

---

010. (CESPE/SEFAZ-RS/2018/TÉCNICO DA RECEITA ESTADUAL) Para a função f(x) = $ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são constantes reais, tem-se que: f(0) = 0, f(10) = 3 e f(30) = 15. Nesse caso, f(60) é igual a

a) 18.
b) 30.
c) 48.
d) 60.
e) 108.

Vamos considerar uma função genérica do segundo grau.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Para x = 0, temos:

$$0 = a.0^2 + b.0 + c$$

$$\therefore c = 0$$

Para x = 10, temos:

$$3 = a.10^2 + b.10$$

$$3 = 100a + 10b$$

Para x = 30, temos:

$$15 = a.30^2 + b.30$$

$$900a + 30b = 15$$

Temos, portanto, um sistema de duas equações e duas incógnitas. Podemos resolvê-lo pelo método da adição.

(I) $100\boldsymbol{a} + 10\,\boldsymbol{b} = 3$

(II) $900a + 30b = 15$

Podemos multiplicar a primeira equação por 3 para facilitar.

(I) $300\boldsymbol{a} + 30\,\boldsymbol{b} = 9$

(II) $900a + 30b = 15$

Agora, podemos subtrair (II) – (I):

(I) $300\boldsymbol{a} + 30\,\boldsymbol{b} = 9$

(II) $900a + 30b = 15$

(III) $900a - 300a = 15 - 9$

Resolvendo o sistema, temos:

$$600a = 6 \therefore a = \frac{6}{600} = 0{,}01$$

Podemos calcular também o coeficiente b, usando a equação (I), por exemplo:

$$100.a + 10.b = 3$$

Substituindo o valor calculado para a, temos:

$$100.0{,}01 + 10.b = 3$$

$$1 + 10.b = 3$$

$$10b = 3 - 1 = 2$$

$$b = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

Agora, temos a função do segundo grau com todos os seus coeficientes calculados.

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = 0{,}01x^2 + 0{,}2x$$

Basta calcular f(60).

$$f(60) = 0{,}01.60^2 + 0{,}2.60$$

$$f(60) = 36 + 12 = 48$$

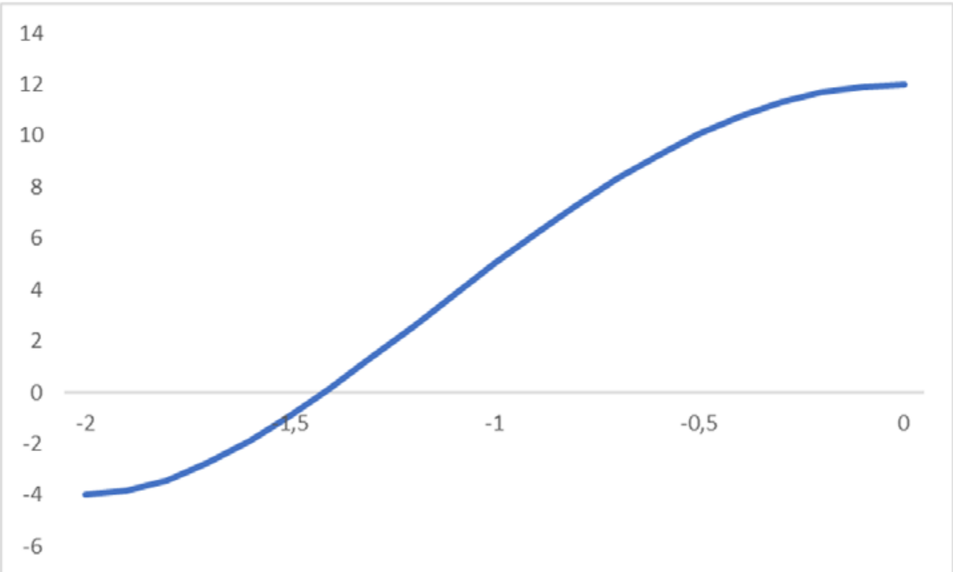
Letra c.

011. (CESPE/PGE-PE/2019/ANALISTA ADMINISTRATIVO DE PROCURADORIA – CALCULISTA) A respeito da função $f(x) = x^4 - 8x^2 + 12$, em que $-\infty < x < \infty$, julgue o item a seguir.
No intervalo $-2 < x < 0$, essa função é crescente.

O modo mais fácil que a maioria dos alunos tentaria na hora da prova seria chutar alguns valores para **x** no intervalo pedido e verificar se realmente a função está crescente.

x	$f(x) = x^4 - 8x^2 + 12$
−2	−4
-1	5
0	12

Concluímos que realmente a função é crescente. Embora seja uma ideia rápida para se fazer na hora da prova, ela não é matematicamente correta, até porque, o **x** do vértice da função poderia estar escondido no meio dos dados da tabela.
Para fins de ilustração, vamos mostrar o gráfico da função em **x**.



$y = f(x) = x^4 - 8x^2+12$
Vamos mostrar uma solução que seria mais matematicamente adequada.
Foi dada uma chamada função biquadrada. Ou seja, podemos tomar $z = x^2$. Nesse caso, teremos:

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 12$$

$$f(z) = z^2 - 8z + 12$$

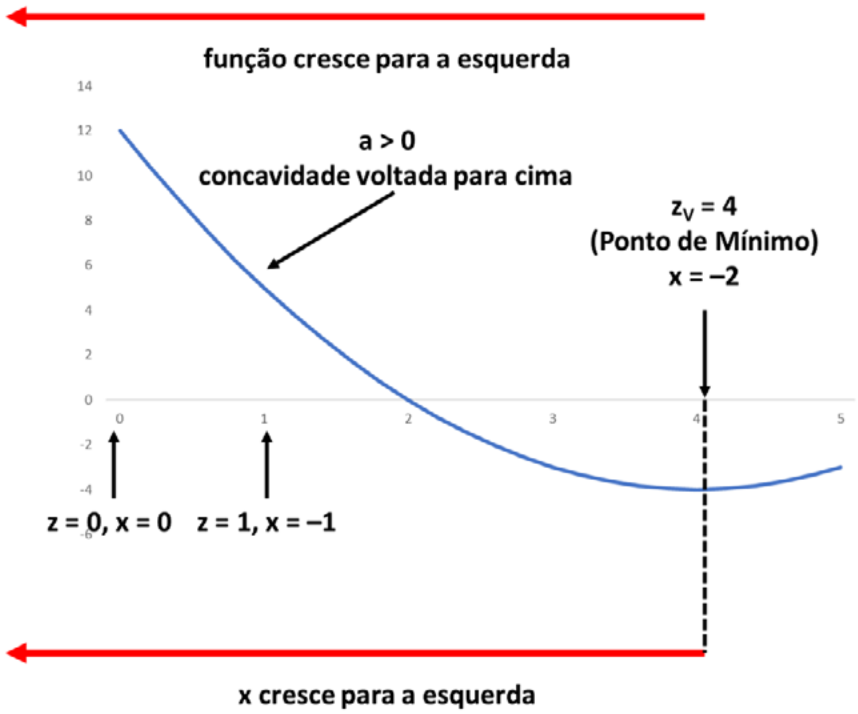
Além disso, o intervalo pedido no enunciado foi transformado.

x	z = x²
-2	4
-1	1
0	0

Vamos agora calcular o **z** do vértice para a função pedida no enunciado.

$$z_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-8)}{2.1} = 4$$

Portanto, a função em **z** assume o seguinte comportamento.



y = z² – 8z + 12

Observe que a função **f** é decrescente em relação a **z**, porém, é crescente em relação a **x.**

Certo.

---

012. (CESPE/FUB/2018/ASSISTENTE EM ADMINISTRAÇÃO) O valor de máximo para a função f(x) = –2x² + 96x + 440 ocorre em x = 28.

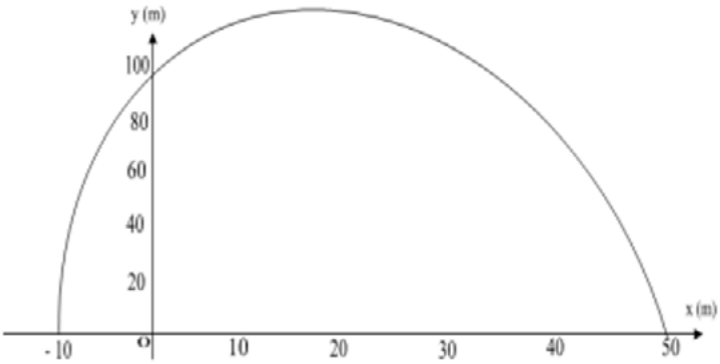
A questão pediu o x do vértice, que pode ser calculado pela expressão conhecida.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{96}{2.(-2)} = \frac{96}{4} = 24$$

Portanto, o máximo da função acontece para x = 24, não para x = 28.

Errado.

013. (INAZ DO PARÁ/PREFEITURA DE SÃO JOÃO DO ARAGUAIA/2018/PROCURADOR MUNICIPAL) Um jogador amador de golfe realizou uma tacada em que a trajetória da bola descreveu uma parábola representada pelo gráfico a seguir.



Qual a lei da função quadrática que descreve corretamente o gráfico acima?

a) f (x) = - 2/5x² + 4x + 100
b) y = - 2/5x² - 4x + 100
c) f (x) = - 1/5x² - 8x + 100
d) y = - 1/5x² + 8x + 100

Considere uma função genérica do segundo grau.

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

Podemos resumir as informações fornecidas pelo enunciado sobre a função.

- As raízes são x = -10 e x = 50;
- No ponto x = 0, tem-se y = f(0) = 100.

Pelas informações do enunciado, temos que f(0) = 100.

$$y = f(0) = a.0^2 + b.0 + c$$

$$100 = c$$

Agora, vamos utilizar as informações das raízes. O produto das raízes pode ser calculado pelo coeficiente c.

$$P = x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

$$(-10).50 = \frac{100}{a}$$

$$-500 = \frac{100}{a}$$

$$\therefore a = -\frac{100}{500} = -\frac{1}{5}$$

Por outro lado, a soma das raízes pode ser calculada pelo coeficiente b.

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$-10 + 50 = -\frac{b}{-1/5}$$

$$40 = 5b$$

$$\therefore b = \frac{40}{5} = 8$$

Portanto, temos a seguinte função.

$$y = f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 8x + 100$$

Letra d.

014. (CESPE/FUB/2016/ASSISTENTE EM ADMINISTRAÇÃO) Em determinado dia, a quantidade Q de serviços administrativos demandados por usuários de determinado departamento da UnB, às t horas, pôde ser modelada pela função quadrática Q(t) = $at^2 + bt + c$, em que a, b e c são constantes reais e a ≠ 0. Nesse departamento, o expediente inicia-se às 8 horas da manhã e, nesse dia, a demanda máxima ocorreu às 11 horas da manhã, com o atendimento de $Q_{máx}$ = 54 usuários. Com referência a esse modelo, julgue o próximo item.
De acordo com o modelo, se, nesse dia, no início do expediente não havia nenhuma demanda de usuários por serviços administrativos nesse departamento, então às 13 horas também não havia nenhum serviço administrativo sendo demandado.

Essa questão pode ser resolvida rapidamente, se o aluno estiver bem atento aos conceitos da matéria.
Como fornecido pelo enunciado, a demanda máxima ocorreu às 11 horas da manhã, portanto, o x do vértice é igual a 11.

$$x_V = 11$$

Se a demanda foi nula às 8 horas, quando o departamento abriu, podemos concluir que x_1 = 8 é uma das raízes da Equação do 2º Grau.
Sabendo que o x do vértice é a média aritmética das raízes, podemos calcular a outra raiz.

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 11$$

$$\frac{8 + x_2}{2} = 11$$

$$\therefore 8 + x_2 = 2.11 = 22$$

$$x_2 = 22 - 8 = 14$$

Portanto, a demanda seria nula também às 14 horas, e não às 13 horas como preconizado pelo enunciado.

Errado.

015. (CESPE/FUB/2016/ASSISTENTE EM ADMINISTRAÇÃO) Em determinado dia, a quantidade Q de serviços administrativos demandados por usuários de determinado departamento da UnB, às t horas, pôde ser modelada pela função quadrática Q(t) = at² + bt + c, em que a, b e c são constantes reais e a ≠ 0. Nesse departamento, o expediente inicia-se às 8 horas da manhã e, nesse dia, a demanda máxima ocorreu às 11 horas da manhã, com o atendimento de Qmáx = 54 usuários. Com referência a esse modelo, julgue o próximo item.
Na situação apresentada, o coeficiente *a* é, necessariamente, negativo.

Como a demanda apresenta um ponto de máximo, necessariamente o coeficiente a é negativo. Se o coeficiente a fosse positivo, a demanda apresenta um ponto de mínimo.
Certo.

016. (CESPE/FUB/2016/ASSISTENTE EM ADMINISTRAÇÃO) Em determinado dia, a quantidade Q de serviços administrativos demandados por usuários de determinado departamento da UnB, às t horas, pôde ser modelada pela função quadrática Q(t) = at² + bt + c, em que a, b e c são constantes reais e a ≠ 0. Nesse departamento, o expediente inicia-se às 8 horas da manhã e, nesse dia, a demanda máxima ocorreu às 11 horas da manhã, com o atendimento de $Q_{máx}$ = 54 usuários. Com referência a esse modelo, julgue o próximo item.
Segundo o modelo apresentado, se, nesse dia, no início do expediente, havia a demanda de usuários por quatro serviços administrativos, então Q(t) = 50/9.(t-11)² + 54.

Nessa situação, o coeficiente a é necessariamente negativo, pois a demanda apresenta um ponto de máximo.
Portanto, a questão está errada.
Mesmo assim, para fins de treinar, vamos determinar os valores dos coeficientes da função.
Como x_V = 11, podemos escrever a função do seguinte formato.

$$y = f(x) = a(x - 11)^2 + y_V$$

Foi fornecido no enunciado o valor máximo da demanda. Ou seja, y_V = Q_{MAX}= 54. Logo, temos:

$$y = f(x) = a(x - 11)^2 + 54$$

Para x = 8, temos y = 4.

$$4 = a(8 - 11)^2 + 54$$

$$4 = a.(-3)^2 + 54$$

$$4 - 54 = 9a$$

$$-50 = 9a$$

$$\therefore a = -\frac{50}{9}$$

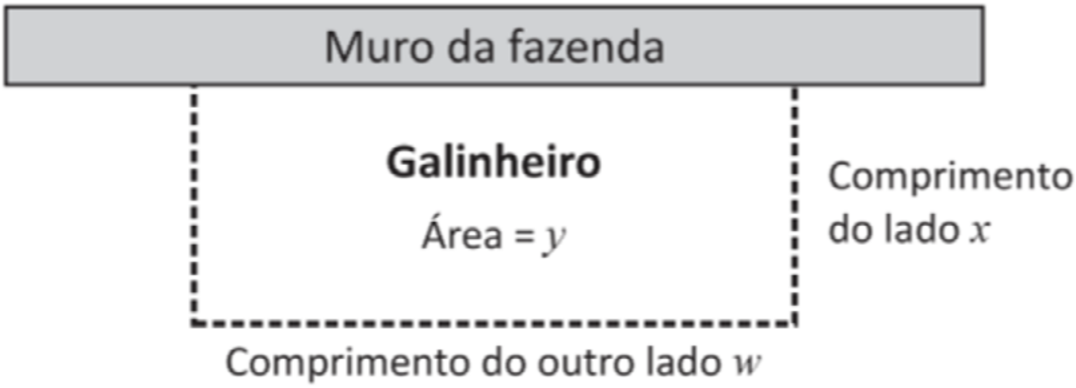
Dessa forma, temos que a função:

$$y = f(x) = -\frac{50}{9} \cdot (x - 11)^2 + 54$$

Errado.

---

017. (FGV/SME-SP/2016/PROFESSOR DE ENSINO MÉDIO DE MATEMÁTICA) José resolveu construir um galinheiro retangular e encontrou, para cercá-lo, apenas 10 m de tela. Sua casa é muito longe do comércio e ele tem urgência de construir o galinheiro. José quer que o galinheiro tenha a maior área possível. Para economizar tela, pretende usar o muro da fazenda como uma das paredes do galinheiro.



A solução para o problema será encontrada pelo:
a) mínimo da função y = 2x² – 10x + 10.
b) mínimo da função y = 10w² – 2w – 10.
c) máximo da função y = 2x² – 10x.
d) máximo da função y = 10x – 2x².
e) máximo da função y = 10x² – 2x.
Parte inferior do formulário

José deverá maximizar a área do galinheiro utilizando apenas 10 metros de cerca. Como o galinheiro é um retângulo, a sua área é dada por:

$$S = wx$$

A relação entre w e x é obtida a partir do perímetro da cerca gasta, temos que:

$$2x + w = 10 \therefore w = 10 - 2x$$

Agora, podemos calcular a área em função do lado x.

$$S = (10 - 2x).x = 10x - 2x^2$$

Portanto, a área do galinheiro deve ser calculada como o máximo dessa função. Esse raciocínio está expresso na **letra d.**

Infelizmente, a questão não pediu nem qual é o valor de x que maximiza a área nem qual é a maior área possível a ser obtida pelo galinheiro. No entanto, já sabemos como calcular ambos os valores.

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2(-2)} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Já a área máxima do galinheiro será:

$$w = 10 - 2x = 10 - 2.2{,}5 = 10 - 5 = 5$$

$$\therefore S = 2x = 5.2{,}5 = 12{,}5$$

Letra d.

---

018. (FCC/SEDU-ES/2016/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Na soma 1 + 2 + 3 podemos trocar um sinal de "adição" por um sinal de "igual" de forma que apareça uma igualdade verdadeira; veja: 1 + 2 = 3. Investigando esse curioso fato, um estudante se perguntou se o mesmo fato curioso ocorreria com a soma 1 + 2 + 3 + 4 +... +78 + 79 + 80. O professor sugeriu que o estudante tentasse encontrar a resposta por conta própria usando a "fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética" e, em seguida, a "fórmula de resolução de equação do 2º grau". Se o estudante percorreu corretamente o encaminhamento sugerido pelo professor, ele concluiu que o curioso fato não ocorre na nova sequência investigada porque

a) 80 não é um quadrado perfeito.
b) 80 não é um número primo.
c) $-1+\sqrt{3240}$ não é um número natural.
d) $(-1+\sqrt{12961})/2$ não é um número natural.
e) $(-1+\sqrt{12959})/2$ não é um número natural.

Devemos encontrar um número natural N tal qual possamos dividir a soma em duas partes.

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 80 = (1 + 2 + \cdots + N) + (N + 1 + \cdots 80)$$

A soma de todos os 80 primeiros números naturais é dada pela expressão conhecida para as progressões aritméticas.

$$S = \frac{80 + 1}{2}.80 = 81.40 = 3240$$

Queremos que as duas partes da soma que separamos sejam iguais, portanto, a soma até N deve ser a metade de 3240.

$$\frac{S}{2} = 1 + 2 + \cdots + N = \frac{3240}{2} = 1620$$

$$\frac{N(N+1)}{2} = 1620$$

Na minha visão, existem formas melhores de resolver tal equação do que simplesmente aplicar a fórmula de Bhaskara. Porém, as alternativas nos induzem a fazê-lo.

$$\therefore N(N+1) = 2.1620 = 3240$$

$$\therefore N^2 + N = 3240 \therefore N^2 + N - 3240 = 0$$

$$N = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4.3240}}{2.1} = \frac{-1 \pm \sqrt{12961}}{2}$$

Sendo assim, não conseguimos dividir a soma citada, porque o número acima encontrado não é natural.

Letra d.

---

019. (FGV/SEDU-ES/2016/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Seja a função quadrática g(x) = −x² + 5x + 24, definida com domínio R e contra-domínio R. A quantidade de números naturais do domínio que apresentam imagens positiva nessa função é igual a:

a) 12
b) 11
c) 7
d) 9
e) 8

Como o coeficiente a é negativo, a = -1 < 0, temos que a função somente apresentará sinal positivo no intervalo entre as duas raízes.

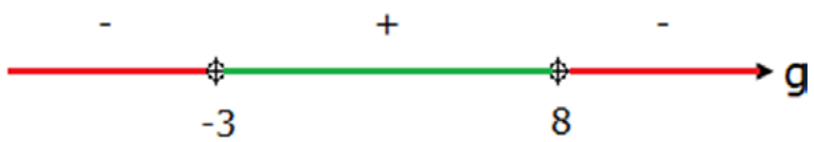
Então, precisamos calculá-las.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.(-1).24}}{2.(-1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+96}}{-2} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{-2}$$

$$x = \frac{-5 \pm 11}{-2}$$

$$\therefore x_1 = \frac{-5+11}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$$

$$\therefore x_2 = \frac{-5-11}{-2} = \frac{-16}{-2} = 8$$



Como a questão pediu apenas os números naturais que apresentam imagem positiva, ela se refere aos números {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. São, portanto, 8 números.

É bom deixar claro que essa questão é passível de recurso, tendo em vista que há grande divergência na Matemática se “0” é ou não um número natural. Posso citar, por exemplo, que os grandes livros de Análise, área estudada em nível superior, praticamente nunca citam o “0” como um número natural. Porém, os livros de Álgebra geralmente se referem a ele como número natural.

Minha visão é que, nas provas de concurso, devemos adotar o entendimento de que “0” é, sim, natural. Foi o caso dessa questão.

Letra e.

---

020. (CESPE/MCT/2012) Uma creperia vende, em média, 500 crepes por semana, a R$ 20,00 a unidade. O proprietário estima que, para cada real de aumento no preço unitário de venda dos crepes, haverá redução de dez unidades na média semanal de vendas. Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.

Caso o proprietário aumente em x reais o preço unitário de venda dos crepes, então o faturamento médio semanal será de 10.000 + 500x – 10x^2 reais.

O faturamento da creperia é dado pelo produto do número de unidades vendidas pelo preço da unidade.

Se houver um aumento de x reais, o preço do crepe passará a ser de:

$$P(x) = 20 + x$$

Por outro lado, segundo as estimativas do proprietário, ele deixará de vender 10 unidades de crepe a cada aumento de x reais. Portanto, o número de crepes vendidos será:

$$N(x) = 500 - 10x$$

Dessa maneira, o faturamento semanal do proprietário é dado por:

$$F(x) = N(x).P(x) = (500 - 10x).(20 + x) = 10000 - 200x + 500x - 10x^2$$

$$F(x) = 10000 + 300x - 10x^2$$

Errado.

---

021. (CESPE/MCT/2012) Uma creperia vende, em média, 500 crepes por semana, a R$ 20,00 a unidade. O proprietário estima que, para cada real de aumento no preço unitário de venda dos crepes, haverá redução de dez unidades na média semanal de vendas. Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.

Para obter o maior faturamento possível, o preço do crepe deveria ser de R$35,00.

Vamos maximizar a função faturamento. Calcularemos o x do vértice.

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-300}{2.(-10)} = \frac{300}{20} = 15$$

É importante lembrar que o x corresponde ao aumento do preço, não ao preço em si. O preço do crepe é dado por:

$$P(x) = 20 + x = 20 + 15 = 35$$

Certo.

---

022. (ESAF/AFRFB/2012) Sabendo-se que o conjunto X é dado por $X = \{x \in R\ x^2 - 9 = 0\ ou\ 2x - 1 = 9\}$ e que o conjunto Y é dado por $Y = \{y \in R\ 2y + 1 = 0\ e\ 2y^2 - y - 1 = 0\}$, onde R é o conjunto dos números reais. Então pode-se afirmar que:

a) $X \cup Y = \{-3; -0{,}5; 1; 3; 5\}$
b) $X - Y = \{-3; 3\}$
c) $X \cup Y = \{-3; -0{,}5; 3; 5\}$
d) $Y = \{-0{,}5; 1\}$
e) $Y = \{-1\}$

Precisamos obter individualmente cada um dos conjuntos. Para obter o conjunto X, precisamos resolver as equações:

$$x^2 - 9 = 0 \therefore x^2 = 9 \therefore x = \pm 3$$

Ou: essa palavra é importante, pois indica a união dos dois conjuntos.

$$2x - 1 = 9 \therefore 2x = 9 + 1 = 10 \therefore x = 5$$

Portanto, o conjunto X é formado pela união entre os dois conjuntos citados.

$$X = \{-3{,}3\} \cup \{5\} = \{-3{,}3{,}5\}$$

Por sua vez, o conjunto Y é obtido resolvendo-se as equações. Temos que:

$$2y + 1 = 0 \therefore 2y = -1 \therefore y = -\frac{1}{2}$$

E: essa palavra é importante, pois indica a intersecção dos dois conjuntos.

$$2y^2 - y - 1 = 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4.2.(-1)}}{2.2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$\therefore y_1 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\therefore y_2 = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Agora, façamos a intersecção das soluções.

$$Y = \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cap \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Podemos, portanto, calcular tanto a união como a intersecção dos dois conjuntos.

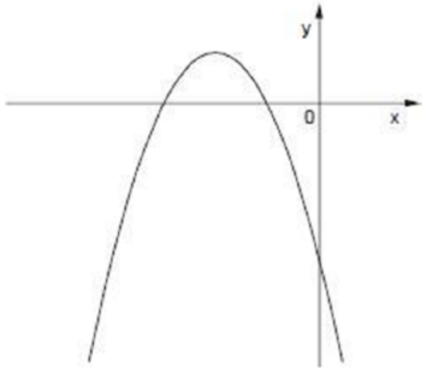
$$X \cup Y = \{-3{,}3{,}5\} \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\} = \left\{-3, -\frac{1}{2}, 3, 5\right\}$$

$$X - Y = X \backslash Y = \{-3{,}3{,}5\} \backslash \left\{-\frac{1}{2}\right\} = \{-3, 3, 5\}$$

Letra c.

---

023. (FCC/AL-SP/2010/AGENTE TÉCNICO LEGISLATIVO ESPECIALIZADO) O gráfico a seguir representa a função f, de domínio real, dada pela lei f(x) = ax² + bx + c.



Sabendo que a, b e c são constantes, é correto concluir que:

a) a < 0, b < 0 e c < 0
b) a < 0, b < 0 e c > 0
c) a < 0, b > 0 e c < 0
d) a < 0, b > 0 e c > 0
e) a > 0, b < 0 e c < 0

O primeiro ponto que devemos perceber é que, fora das raízes, a função tem o mesmo sinal do coeficiente a. Portanto, a < 0.

Agora, podemos perceber que ambas as raízes são negativas. Isso significa que a soma delas é negativa e que o produto é positivo.

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \therefore b = -aS$$

Como a < 0 e S < 0, segue que b < 0, pois é o produto de três números negativos – o sinal de menos, o sinal de a e o sinal de S.

O produto das raízes é positivo, porque o produto de dois números negativos é positivo.

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0 \therefore c = aP$$

Como a < 0 e P > 0, temos que c < 0, pois é o produto de um número negativo por um positivo.

Concluímos que todos os três coeficientes da função são negativos.

Letra a.

(CESPE/HEMOBRÁS/2008/Auxiliar Administrativo) O custo para a produção mensal de x milhares de unidades de certo produto é de $x^2 + 2x$ reais. O preço de venda de x milhares desse produto é de 4x + 24 reais. Nessas condições, julgue os itens a seguir.

024. A empresa terá prejuízo se produzir mais que 6.000 unidades do produto por mês

025. O lucro máximo da empresa será obtido com a produção e venda de 1.000 unidades do produto.

O lucro da empresa é a diferença entre o preço de venda e o custo da produção mensal.

$$L(x) = (4x + 24) - (x^2 + 2x) = -x^2 + 2x + 24$$

Para conhecer o gráfico da função, devemos calcular primeiramente as raízes.
Perceba que a soma das raízes é igual a 2 e o produto é igual a -24. Podemos perceber que essas raízes só podem ser 6 e -4. Caso você não tenha percebido pela soma e produto, você pode aplicar a Fórmula de Bhaskara.

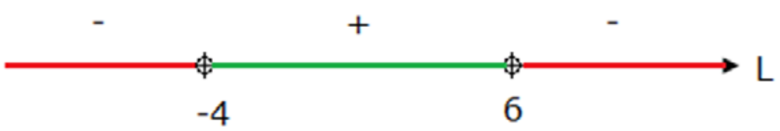
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.(-1).24}}{2.(-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{-2} = \frac{-2 \pm 10}{-2}$$

Temos, portanto, as raízes:

$$x_1 = \frac{-2 + 10}{-2} = \frac{8}{-2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-2 - 10}{-2} = \frac{-12}{-2} = 6$$

Sendo assim, podemos estabelecer os sinais da função. Lembre-se que, no intervalo entre as raízes, a função apresenta sinal oposto ao coeficiente a, portanto, sinal positivo. Fora das raízes, a função apresenta o mesmo sinal, portanto, sinal negativo.



Portanto, de fato, a empresa sofre prejuízo quando vende mais de 6 mil unidades.
Por outro lado, o lucro máximo será obtido com a venda de x_v unidades, em que x_v corresponde à média aritmética das raízes.

$$x_v = \frac{-4 + 6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Certo, Certo.

---

026. (CESPE/MDIC/2014/AGENTE ADMINISTRATIVO) Com relação aos sistemas de equações lineares e às funções de 1º e de 2º graus, julgue os itens que se seguem.

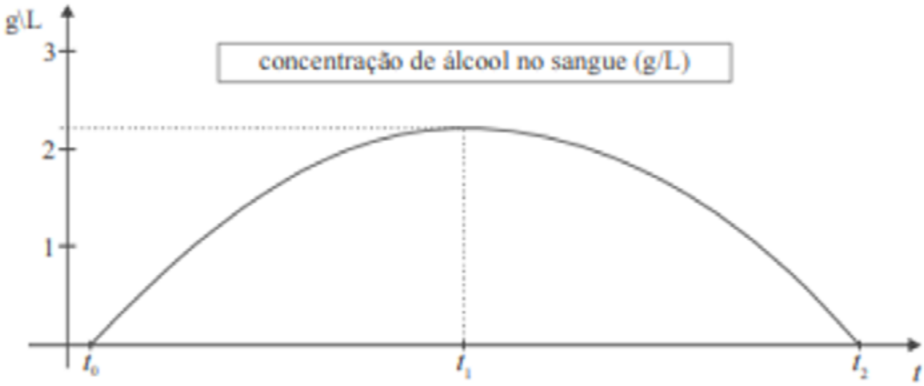
Caso a quantidade diária de camisetas produzidas por uma indústria entre x -1 e x horas do dia seja expressa por f(x) = - 4x² + 100x - 400, em que 7 ≤ x ≤ 18, então a quantidade máxima de camisetas produzida por essa indústria ocorrerá entre 13 e 14 horas.

A quantidade máxima de camisetas produzida ocorrerá exatamente no x do vértice.

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-100}{2.(-4)} = \frac{100}{8} = 12{,}5h = 12h30$$

Errado.

(CESPE/PRF/2013) Considere que o nível de concentração de álcool na corrente sanguínea, em g/L, de uma pessoa, em função do tempo t, em horas, seja expresso por $N = -0{,}008(t^2 - 35t + 34)$. Considere, ainda, que essa pessoa tenha começado a ingerir bebida alcoólica a partir de $t = t_0$ $(N(t_0) = 0)$, partindo de um estado de sobriedade, e que tenha parado de ingerir bebida alcoólica em $t = t_1$, voltando a ficar sóbria em $t = t_2$.



Considere, por fim, a figura acima, que apresenta o gráfico da função N(t) para t ϵ $[t_0, t_2]$. Com base nessas informações e tomando 24,3 como valor aproximado de $\sqrt{589}$, julgue os itens que se seguem.

027. O nível de concentração mais alto de álcool na corrente sanguínea da referida pessoa ocorreu em $t = t_1$ com $t_1 > 18$ horas.

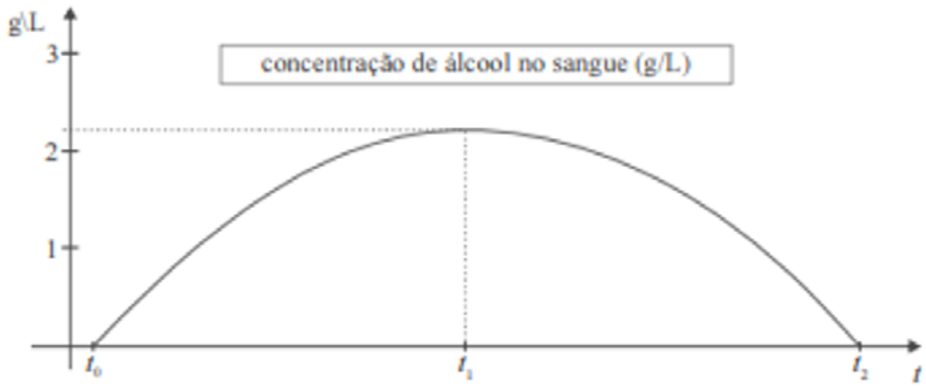
O nível de concentração mais alto acontece exatamente no t do vértice.

$$t_1 = t_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-0{,}008).(-35)}{2.(-0{,}008)} = \frac{35}{2} = 17{,}5 < 18$$

Errado.

(CESPE/PRF/2013) Considere que o nível de concentração de álcool na corrente sanguínea, em g/L, de uma pessoa, em função do tempo t, em horas, seja expresso por

$N = -0{,}008(t^2 - 35t + 34)$. Considere, ainda, que essa pessoa tenha começado a ingerir bebida alcoólica a partir de $t = t_0$ $(N(t_0) = 0)$, partindo de um estado de sobriedade, e que tenha parado de ingerir bebida alcoólica em t = t_1, voltando a ficar sóbria em t = t_2.



Considere, por fim, a figura acima, que apresenta o gráfico da função N(t) para t ϵ [t_0, t_2]. Com base nessas informações e tomando 24,3 como valor aproximado de $\sqrt{589}$, julgue os itens que se seguem.

028. O nível de concentração de álcool na corrente sanguínea da pessoa em questão foi superior a 1 g/L por pelo menos 23 horas.

Precisamos agora saber quando a concentração de álcool no sangue foi superior a 1.

$$N(t) = -0{,}008(t^2 - 35t + 34) > 1$$

$$-t^2 + 35t - 34 > \frac{1}{0{,}008} = \frac{1000}{8} = 125$$

$$-t^2 + 35t - 34 - 125 > 0$$

$$-t^2 + 35t - 159 > 0$$

Para avaliar o sinal dessa função, devemos calcular as raízes.

$$t = \frac{-35 \pm \sqrt{35^2 - 4.(-1).(-159)}}{2.(-1)} = \frac{-35 \pm \sqrt{1225 - 4.159}}{-2}$$

$$t = \frac{-35 \pm \sqrt{1225 - 636}}{-2} = \frac{-35 \pm \sqrt{590}}{-2} = \frac{-35 \pm 24{,}3}{-2}$$

Podemos calcular as raízes:

$$t_1 = \frac{-35 + 24{,}3}{-2} = \frac{10{,}7}{2} = 5{,}35$$

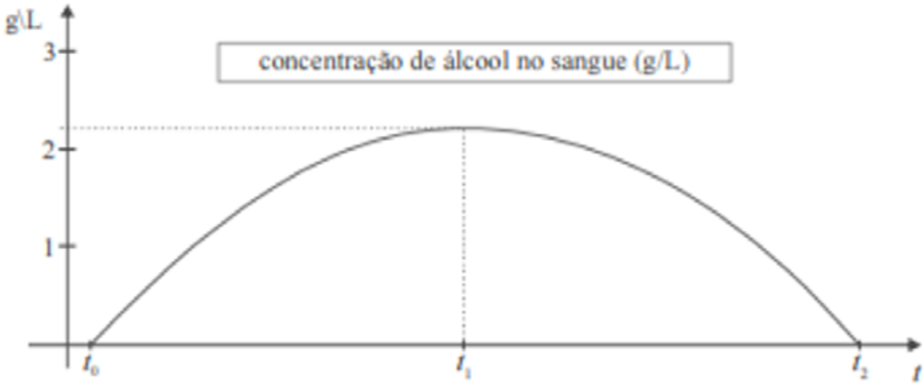
$$t_2 = \frac{-35 - 24{,}3}{-2} = \frac{59{,}3}{2} = 29{,}65$$

Portanto, a pessoa permaneceu com níveis de álcool no sangue superior a 1 g/L no espaço de tempo compreendido entre as raízes.

$$\Delta t = 29{,}65 - 5{,}35 = 24{,}3h > 23h$$

Certo.

(CESPE/PRF/2013) Considere que o nível de concentração de álcool na corrente sanguínea, em g/L, de uma pessoa, em função do tempo t, em horas, seja expresso por $N = -0{,}008(t^2 - 35t + 34)$. Considere, ainda, que essa pessoa tenha começado a ingerir bebida alcoólica a partir de $t = t_0$ $(N(t_0) = 0)$, partindo de um estado de sobriedade, e que tenha parado de ingerir bebida alcoólica em t = t_1, voltando a ficar sóbria em t = t_2.



Considere, por fim, a figura acima, que apresenta o gráfico da função N(t) para t ϵ [t_0, t_2]. Com base nessas informações e tomando 24,3 como valor aproximado de $\sqrt{589}$, julgue os itens que se seguem.

029. O valor de t_2 é inferior a 36.

Por fim, para saber o t_2, o tempo em que a pessoa volta a ficar sóbria, devemos calcular as raízes da função original.

$$N = -0{,}008(t^2 - 35t + 34) = 0$$

$$\therefore -0{,}008(t^2 - 35t + 34) = 0$$

$$t^2 - 35t + 34 = 0$$

Podemos calcular as raízes. Uma maneira relativamente fácil é perceber que o produto das raízes é 34 e a soma é 35, portanto, essas raízes só podem ser 1 e 34. Caso você não tenha percebido isso, vamos à Fórmula de Bhaskara.

$$t = \frac{35 \pm \sqrt{35^2 - 4.1.34}}{2.1} = \frac{35 \pm \sqrt{1225 - 136}}{2} = \frac{35 \pm \sqrt{1089}}{2} = \frac{35 \pm 33}{2}$$

Podemos calcular as duas raízes.

$$t_1 = \frac{35 - 33}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$t_2 = \frac{35 + 33}{2} = \frac{68}{2} = 34 < 36$$

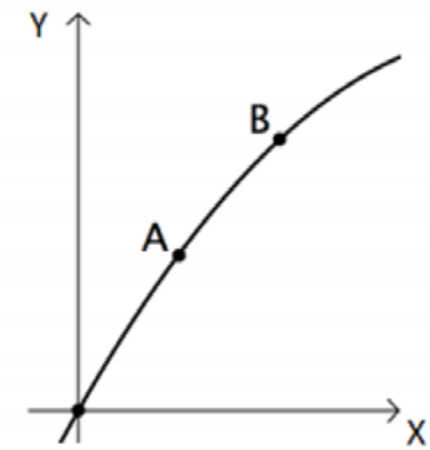
Portanto, a pessoa voltará a ficar sóbria em 34 horas.

Certo.

---

030. (FGV/SEE-PE/2016/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) A figura a seguir mostra um uma parte do gráfico de uma função quadrática. Dois pontos do gráfico são dados: A = (2, 15) e B = (4, 26).

O gráfico encontrará novamente o eixo X no ponto de abscissa:



a) 16
b) 17
c) 18
d) 19
e) 20

Uma função do segundo grau é dada de maneira geral por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

São dados três pontos. Além dos dois comentados no enunciado, temos que a origem (0,0) também faz parte do gráfico dessa função.

$$f(0) = 0 \therefore a.0 + b.0 + c = 0 \therefore c = 0$$

Sabendo que c é igual a zero, podemos calcular os demais coeficientes da função.

$$f(2) = a.2^2 + b.2 = 4a + 2b = 15$$

$$f(2) = a.4^2 + b.4 = 16a + 4b = 26$$

Podemos multiplicar por dois a primeira equação e resolver o sistema pelo método da adição.

$$8a + 4b = 30$$

$$16a + 4b = 26$$

$$\therefore 16a - 8a = 26 - 30 \therefore 8a = -4 \therefore a = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Podemos substituir em qualquer uma das equações para encontrar o coeficiente b.

$$4a + 2b = 15 \ \therefore 2b = 15 - 4a = 15 - 4.(-0{,}5) = 15 + 2 = 17$$

$$\therefore b = \frac{17}{2} = 8{,}5$$

Sendo assim, temos que a função representada no gráfico é:

$$f(x) = -0{,}5x^2 + 8{,}5x$$

Podemos encontrar a outra raiz igualando a zero.

$$f(x) = -0{,}5x^2 + 8{,}5x = 0 \therefore x(-0{,}5x + 8{,}5) = 0$$

$$\therefore -0{,}5x + 8{,}5 = 0 \therefore x = \frac{8{,}5}{0{,}5} = \frac{8{,}5.2}{0{,}5.2} = \frac{17}{1} = 17$$

Letra b.

---

031. (CESPE/PRF/2013/AGENTE ADMINISTRATIVO) Considerando as tabelas acima, que apresentam, respectivamente, o peso e a estatura da criança A, desde o nascimento (0 ano) até o 3º ano de vida, bem como o peso da criança B, desde o nascimento (0 ano) até o 2º ano de vida, julgue os itens a seguir.

criança A				
idade (em anos completos)	0	1	2	3
peso (em kg)	3,3	10,1	13,0	15,5
estatura (em cm)	50	70	86	98

criança B				
idade (em anos completos)	0	1	2	3
peso (em kg)	3,9	10,6	13,4	*

Considere que, no plano cartesiano xOy, a variável x seja o tempo, em anos, e a variável y seja a altura, em centímetros. Considere, ainda, que exista uma função quadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, cujo gráfico passa pelos pontos (x, y) correspondentes às alturas no nascimento no 1º, 2º e 3º anos de vida da criança A. Em face dessas informações, é correto afirmar que $|b/a| < 10$.

Foram fornecidos os três pontos da parábola. Para x = 0, temos:

$$f(0) = a.0^2 + b.0 + c = 50 \therefore c = 50$$

Para x = 1:

$$f(1) = a.1^2 + b.1 + c = a + b + 50 = 70 \therefore a + b = 70 - 50 = 20$$

Para x = 2:

$$f(2) = a.2^2 + b.2 + c = 4a + 2b + 50 = 86 \therefore 4a + 2b = 86 - 50 = 36$$

Agora, basta resolver o sistema de duas equações e duas incógnitas (a e b):

$$a + b = 20$$

$$4a + 2b = 36$$

Podemos, por exemplo, multiplicar a primeira equação por 2 e subtrair da segunda.

$$2a + 2b = 40$$

$$4a + 2b = 36$$

$$\therefore 4a - 2a = 36 - 40$$

$$\therefore 2a = -4 \therefore a = -\frac{4}{2} = -2$$

Agora, basta substituir na primeira equação para encontrar o valor de b:

$$a + b = 20 \therefore b = 20 - a = 20 + 2 = 22$$

Queremos o módulo (ou valor absoluto) da razão b/a, que corresponde a essa razão sem o sinal.

$$\frac{b}{a} = \frac{22}{-2} = -11 \therefore \left|\frac{b}{a}\right| = 11 > 10$$

Errado.

(FME/2013) Na equação do 2º grau 2x² - 5x + 1 = 0 de raízes x_1 e x_2, calcule:

032. $1/x_1 + 1/x_2$

033. $x_1^2 + x_2^2$

034. $x_2/x_1 + x_1/x_2$

O Fundamentos de Matemática Elementar é uma excelente coleção de Matemática e sempre nos traz vários problemas que nos fazem pensar um pouco além do tradicional.

Já sabemos a soma e o produto das raízes, aqui precisaremos também calcular outras expressões. Vejamos:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-b/a}{c/a}=-\frac{b}{a}.\frac{a}{c}=-\frac{b}{c}=-\frac{(-5)}{1}=5$$

Agora, podemos aprender também a soma dos quadrados das raízes usando um produto notável. Tome:

$$S=x_1^2+x_2^2$$

Agora, notemos que:

$$(x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=S+2x_1x_2$$

$$\left(-\frac{b}{a}\right)^2=S+\frac{2c}{a}$$

$$\frac{b^2}{a^2}=S+\frac{2c}{a}\therefore S=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}=\frac{(-5)^2-2.2.1}{2^2}=\frac{25-4}{4}=\frac{21}{4}$$

Finalmente, a última expressão pode ser calculada por:

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(b^2-2ac)/a^2}{c/a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}.\frac{a}{c}$$
$$=\frac{b^2-2ac}{ac}=\frac{b^2}{ac}-2=\frac{(-5)^2}{2.1}-2=\frac{25}{2}-2=\frac{25-4}{2}=\frac{21}{2}$$

5
21/4
21/2

---

035. (INÉDITA/2021) Determine m, de modo que a equação (m – 1)x² + mx +(m-1) = 0 tenha duas raízes reais.

Para que a equação tenha duas raízes reais, devemos ter que o delta deve ser positivo.

$$\Delta=b^2-4ac>0$$

$$m^2-4.(m-1).(m-1)>0$$

$$m^2-4.(m-1)^2>0$$

Vamos agora utilizar o produto notável (a – b)² = a² - 2ab + b².

$$m^2-4(m^2-2m+1)>0$$

$$m^2-4m^2+8m-4>0$$

$$-3m^2+8m-4>0$$

Perceba que temos uma inequação do segundo grau em m. Para avaliar o sinal dessa função, devemos primeiramente calcular as raízes.

$$m=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4.(-3).(-4)}}{2.(-3)}=\frac{-8\pm\sqrt{64-48}}{-6}=\frac{-8\pm\sqrt{16}}{-6}=\frac{-8\pm 4}{-6}$$

Podemos obter as raízes.

$$m_1=\frac{-8+4}{-6}=-\frac{4}{-6}=\frac{2}{3}$$

$$m_2=\frac{-8-4}{-6}=\frac{-12}{-6}=2$$

Para obter o sinal da função, devemos nos lembrar que, fora das raízes, o sinal é o mesmo do coeficiente a, que, no caso, é a = -3 < 0. Portanto, fora das raízes, a função é negativa. Dentro das raízes, a função é positiva.

É importante citar que não podemos incluir as raízes, pois, exatamente nos pontos m = 2/3 ou m = 2, a função apresenta somente uma raiz real.

2/3 < m < 2

---

036. (FME/2013/DESAFIO) Determinar m na equação mx² - 2(m-1)x + m = 0 para que se tenha $x_1/x_2 + x_2/x_1 = 4$, onde x_1 e x_2 são as raízes da equação.

Uma boa questão do Fundamentos de Matemática Elementar.

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=4$$

$$\therefore \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=4\ (I)$$

Já sabemos calcular o produto das raízes em função dos coeficientes. Basta agora aprender a calcular a soma dos quadrados. Mas, vejamos, um interessante produto notável.

Chamemos:

$$S=x_1^2+x_2^2$$

Agora, notemos que:

$$(x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=S+2x_1x_2$$

$$\left(-\frac{b}{a}\right)^2=S+\frac{2c}{a}$$

$$\frac{b^2}{a^2}=S+\frac{2c}{a}\therefore S=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

Basta, portanto, substituir na expressão (I):

$$(I): \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{\frac{b^2 - 2ac}{a^2}}{\frac{c}{a}} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} . \frac{a}{c} = \frac{b^2 - 2ac}{ac} = 4$$

$$\therefore \frac{b^2}{ac} - 2 = 4 \therefore \frac{b^2}{ac} = 6 \therefore b^2 = 6ac$$

Agora, substituiremos em função dos coeficientes da equação.

$$[-2(m-1)]^2 = 6.m.m$$

$$4(m^2 - 2m + 1) = 6m^2$$

$$4m^2 - 8m + 4 = 6m^2$$

$$\therefore 2m^2 + 8m - 4 = 0$$

$$m = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4.(2).(-4)}}{2.(2)} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 32}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{96}}{4} = \frac{8}{4} \pm \sqrt{\frac{96}{16}} = 2 \pm \sqrt{6}$$

Ambas as soluções são possíveis.

2+√6 ou 2 - √6

Chegamos ao final de mais uma aula.

QUESTÕES COMENTADAS EM AULA

001. (FGV/PREFEITURA DE OSASCO-SP/2014/ATENDENTE) Há dois valores de x que satisfazem a equação do segundo grau $5x^2 - 26x + 5 = 0$. Sobre esses valores, é verdadeiro afirmar que:

a) sua soma é 26 e seu produto é 5;
b) sua soma é 5 e seu produto é 26;
c) sua soma é um número inteiro;
d) seu produto é um número racional, porém não inteiro;
e) seu produto é 1.

002. (FUNDATEC/PREFEITURA DO SAPUCAIA DO SUL-RS/2019/SECRETÁRIO DE ESCOLA) As raízes da equação do segundo grau $3x^2 - 21x + 30 = 0$ são:

a) $x = 1$ e $x = 4$
b) $x = 2$ e $x = 5$
c) $x = 3$ e $x = 6$
d) $x = 4$ e $x = 7$
e) $x = 5$ e $x = 8$

003. (VUNESP/PREFEITURA DE RIBEIRÃO PRETO/2018/TÉCNICO EM PROCESSAMENTO DE DADOS) A equação $x^2 + 5x - 14 = 0$ tem duas raízes reais. Subtraindo-se a menor da maior obtém-se

a) −9.
b) −5.
c) 5.
d) 7.
e) 9.

004. (CESPE/CRPM/2016/TÉCNICO EM GEOCIÊNCIAS/HIDROLOGIA) Considerando-se os 365 dias de um ano, numerados sequencialmente de 1 a 365, a função $y = -0{,}1x^2 + 40x$, em que $x = 1, 2,..., 365$, estima-se a quantidade de litros de água desperdiçados no dia x em vazamentos na rede de distribuição de determinada cidade. Nesse caso, o desperdício equivalente a 3 m3 ocorreu em um dia do mês de

a) janeiro e um dia do mês de dezembro.
b) janeiro e em um dia do mês de julho.
c) fevereiro e em um dia do mês de setembro.
d) abril e em um dia do mês de novembro.
e) abril e em um dia do mês de outubro.

005. (FGV/AL-RO/2018/ANALISTA LEGISLATIVO) A reta y = ax + b é tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2 + 3x + 1$ no ponto de abscissa x =1.
O valor de 2a + b é
a) 5.
b) 6.
c) 10.
d) 12.
e) 13.

006. (CESPE/TJ-PA/2020/ANALISTA JUDICIÁRIO – PROGRAMADOR) Considere que, em determinado dia, um computador seja ligado às 5 horas e desligado às 19 horas e que, nesse intervalo de tempo, a porcentagem da memória desse computador que esteja sendo utilizada na hora x seja dada pela expressão $P(x) = -5/4x^2 + 30x – 100$.
Nessa situação, no intervalo de tempo considerado, na hora em que a memória do computador estiver sendo mais demandada, a porcentagem utilizada será igual a:
a) 12%.
b) 20%.
c) 70%.
d) 80%.
e) 100%.

007. (CESPE/SEFAZ-RS/2018/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO FAZENDÁRIO) Pela venda diária de x unidades de determinado produto, um comerciante fatura, líquidos, $L(x) = 300 + 40x – x^2$ reais, podendo esse faturamento ser interpretado como lucro, como prejuízo ou como empate, isto é, L(x) = 0 reais.
Para que o faturamento seja caracterizado como lucro, o comerciante deverá vender, diariamente,
a) menos de 5 unidades do produto.
b) mais de 5 e menos de 10 unidades do produto.
c) mais de 10 e menos de 30 unidades do produto.
d) mais de 30 e menos de 35 unidades do produto.
e) mais de 35 unidades do produto.

008. (FGV/SEDUC-SP/2013/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Há dois valores reais de m para os quais o gráfico da função $f(x) = 25x^2 + mx + 17x + 9$ tangencia o eixo-x.
A soma desses valores é:
a) -34.
b) -17.
c) -1.

d) 26.
e) 29.

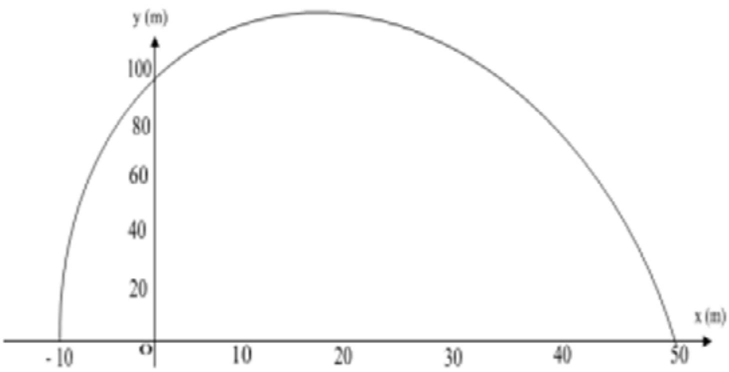
009. (CESPE/BNB/2018/ANALISTA BANCÁRIO) O menor valor de f(x) = -3x2 + 9x -6 ocorre em x = 3/2.

010. (CESPE/SEFAZ-RS/2018/TÉCNICO DA RECEITA ESTADUAL) Para a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são constantes reais, tem-se que: f(0) = 0, f(10) = 3 e f(30) = 15. Nesse caso, f(60) é igual a
a) 18.
b) 30.
c) 48.
d) 60.
e) 108.

011. (CESPE/PGE-PE/2019/ANALISTA ADMINISTRATIVO DE PROCURADORIA – CALCULISTA) A respeito da função $f(x) = x4 - 8x^2 + 12$, em que $-\infty < x < \infty$, julgue o item a seguir.
No intervalo $-2 < x < 0$, essa função é crescente.

012. (CESPE/FUB/2018/ASSISTENTE EM ADMINISTRAÇÃO) O valor de máximo para a função $f(x) = –2x^2 + 96x + 440$ ocorre em x = 28.

013. (INAZ DO PARÁ/PREFEITURA DE SÃO JOÃO DO ARAGUAIA/2018/PROCURADOR MUNICIPAL) Um jogador amador de golfe realizou uma tacada em que a trajetória da bola descreveu uma parábola representada pelo gráfico a seguir.



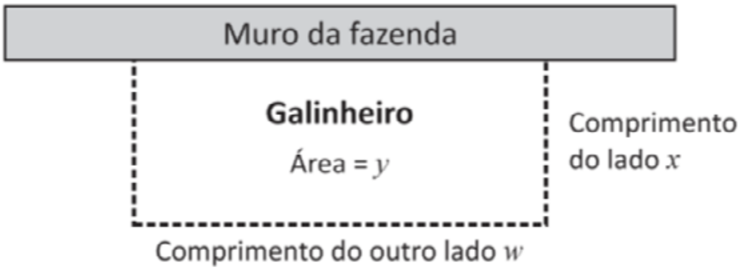
Qual a lei da função quadrática que descreve corretamente o gráfico acima?
a) $f(x) = -2/5x^2 + 4x + 100$
b) $y = -2/5x^2 - 4x + 100$
c) $f(x) = -1/5x^2 - 8x + 100$
d) $y = -1/5x^2 + 8x + 100$

014. (CESPE/FUB/2016/ASSISTENTE EM ADMINISTRAÇÃO) Em determinado dia, a quantidade Q de serviços administrativos demandados por usuários de determinado departamento da UnB, às t horas, pôde ser modelada pela função quadrática Q(t) = at2 + bt + c, em que a, b e c são constantes reais e a ≠ 0. Nesse departamento, o expediente inicia-se às 8 horas da manhã e, nesse dia, a demanda máxima ocorreu às 11 horas da manhã, com o atendimento de Qmáx = 54 usuários. Com referência a esse modelo, julgue o próximo item.
De acordo com o modelo, se, nesse dia, no início do expediente não havia nenhuma demanda de usuários por serviços administrativos nesse departamento, então às 13 horas também não havia nenhum serviço administrativo sendo demandado.

015. (CESPE/FUB/2016/ASSISTENTE EM ADMINISTRAÇÃO) Em determinado dia, a quantidade Q de serviços administrativos demandados por usuários de determinado departamento da UnB, às t horas, pôde ser modelada pela função quadrática $Q(t) = at^2 + bt + c$, em que a, b e c são constantes reais e a ≠ 0. Nesse departamento, o expediente inicia-se às 8 horas da manhã e, nesse dia, a demanda máxima ocorreu às 11 horas da manhã, com o atendimento de Qmáx = 54 usuários. Com referência a esse modelo, julgue o próximo item.
Na situação apresentada, o coeficiente a é, necessariamente, negativo.

016. (CESPE/FUB/2016/ASSISTENTE EM ADMINISTRAÇÃO) Em determinado dia, a quantidade Q de serviços administrativos demandados por usuários de determinado departamento da UnB, às t horas, pôde ser modelada pela função quadrática $Q(t) = at^2 + bt + c$, em que a, b e c são constantes reais e a ≠ 0. Nesse departamento, o expediente inicia-se às 8 horas da manhã e, nesse dia, a demanda máxima ocorreu às 11 horas da manhã, com o atendimento de Qmáx = 54 usuários. Com referência a esse modelo, julgue o próximo item.
Segundo o modelo apresentado, se, nesse dia, no início do expediente, havia a demanda de usuários por quatro serviços administrativos, então $Q(t) = 50/9.(t-11)^2 + 54$.

017. (FGV/SME-SP/2016/PROFESSOR DE ENSINO MÉDIO DE MATEMÁTICA) José resolveu construir um galinheiro retangular e encontrou, para cercá-lo, apenas 10 m de tela. Sua casa é muito longe do comércio e ele tem urgência de construir o galinheiro. José quer que o galinheiro tenha a maior área possível. Para economizar tela, pretende usar o muro da fazenda como uma das paredes do galinheiro.



A solução para o problema será encontrada pelo:

a) mínimo da função $y = 2x^2 - 10x + 10$.

b) mínimo da função $y = 10w^2 - 2w - 10$.

c) máximo da função $y = 2x^2 - 10x$.

d) máximo da função $y = 10x - 2x^2$.

e) máximo da função $y = 10x^2 - 2x$.

Parte inferior do formulário

018. (FCC/SEDU-ES/2016/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Na soma 1 + 2 + 3 podemos trocar um sinal de "adição" por um sinal de "igual" de forma que apareça uma igualdade verdadeira; veja: 1 + 2 = 3. Investigando esse curioso fato, um estudante se perguntou se o mesmo fato curioso ocorreria com a soma 1 + 2 + 3 + 4 +... +78 + 79 + 80. O professor sugeriu que o estudante tentasse encontrar a resposta por conta própria usando a "fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética" e, em seguida, a "fórmula de resolução de equação do 2º grau". Se o estudante percorreu corretamente o encaminhamento sugerido pelo professor, ele concluiu que o curioso fato não ocorre na nova sequência investigada porque

a) 80 não é um quadrado perfeito.

b) 80 não é um número primo.

c) $-1+\sqrt{3240}$ não é um número natural.

d) $(-1+\sqrt{12961})/2$ não é um número natural.

e) $(-1+\sqrt{12959})/2$ não é um número natural.

019. (FGV/SEDU-ES/2016/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Seja a função quadrática $g(x) = -x^2 + 5x + 24$, definida com domínio R e contra-domínio R. A quantidade de números naturais do domínio que apresentam imagens positiva nessa função é igual a:

a) 12

b) 11

c) 7

d) 9

e) 8

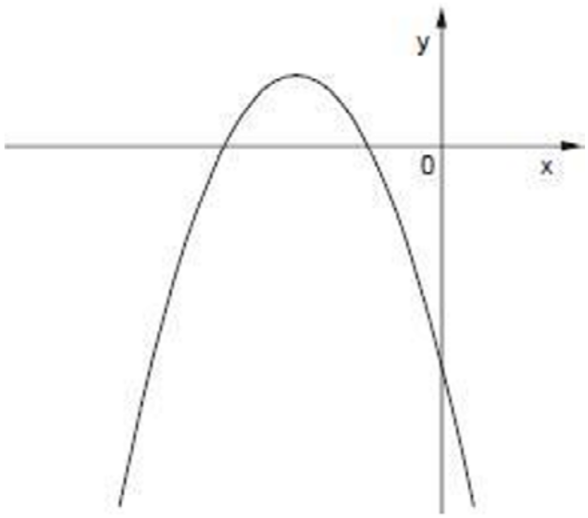
020. (CESPE/MCT/2012) Uma creperia vende, em média, 500 crepes por semana, a R$ 20,00 a unidade. O proprietário estima que, para cada real de aumento no preço unitário de venda dos crepes, haverá redução de dez unidades na média semanal de vendas. Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.

Caso o proprietário aumente em x reais o preço unitário de venda dos crepes, então o faturamento médio semanal será de 10.000 + 500x – 10x2 reais.

021. (CESPE/MCT/2012) Uma creperia vende, em média, 500 crepes por semana, a R$ 20,00 a unidade. O proprietário estima que, para cada real de aumento no preço unitário de venda dos crepes, haverá redução de dez unidades na média semanal de vendas. Com base nessas informações, julgue os itens seguintes.
Para obter o maior faturamento possível, o preço do crepe deveria ser de R$35,00.

022. (ESAF/AFRFB/2012) Sabendo-se que o conjunto X é dado por $X = \{x, \in R\ x^2 - 9 = 0\ ou\ 2x - 1 = 9\}$ e que o conjunto Y é dado por $Y = \{y, \in R\ 2y + 1 = 0\ e\ 2y^2 - y - 1 = 0\}$, onde R é o conjunto dos números reais. Então pode-se afirmar que:
a) $X \cup Y = \{-3; -0{,}5; 1; 3; 5\}$
b) $X - Y = \{-3; 3\}$
c) $X \cup Y = \{-3; -0{,}5; 3; 5\}$
d) $Y = \{-0{,}5; 1\}$
e) $Y = \{-1\}$

023. (FCC/AL-SP/2010/AGENTE TÉCNICO LEGISLATIVO ESPECIALIZADO) O gráfico a seguir representa a função f, de domínio real, dada pela lei f(x) = ax² + bx + c.



Sabendo que a, b e c são constantes, é correto concluir que:
a) a < 0, b < 0 e c < 0
b) a < 0, b < 0 e c > 0
c) a < 0, b > 0 e c < 0
d) a < 0, b > 0 e c > 0
e) a > 0, b < 0 e c < 0

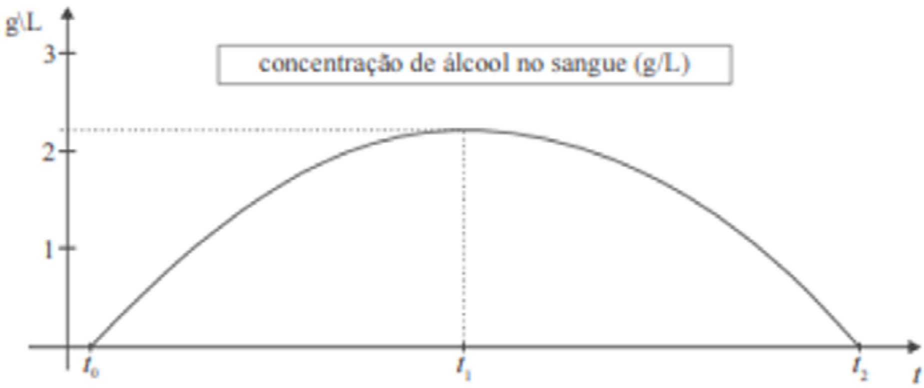
(CESPE/HEMOBRÁS/2008/Auxiliar Administrativo) O custo para a produção mensal de x milhares de unidades de certo produto é de $x^2 + 2x$ reais. O preço de venda de x milhares desse produto é de 4x + 24 reais. Nessas condições, julgue os itens a seguir.

024. 24. A empresa terá prejuízo se produzir mais que 6.000 unidades do produto por mês

025. O lucro máximo da empresa será obtido com a produção e venda de 1.000 unidades do produto.

026. (CESPE/MDIC/2014/AGENTE ADMINISTRATIVO) Com relação aos sistemas de equações lineares e às funções de 1º e de 2º graus, julgue os itens que se seguem.
Caso a quantidade diária de camisetas produzidas por uma indústria entre x -1 e x horas do dia seja expressa por f(x) = - 4x2 + 100x - 400, em que 7 ≤ x ≤ 18, então a quantidade máxima de camisetas produzida por essa indústria ocorrerá entre 13 e 14 horas.

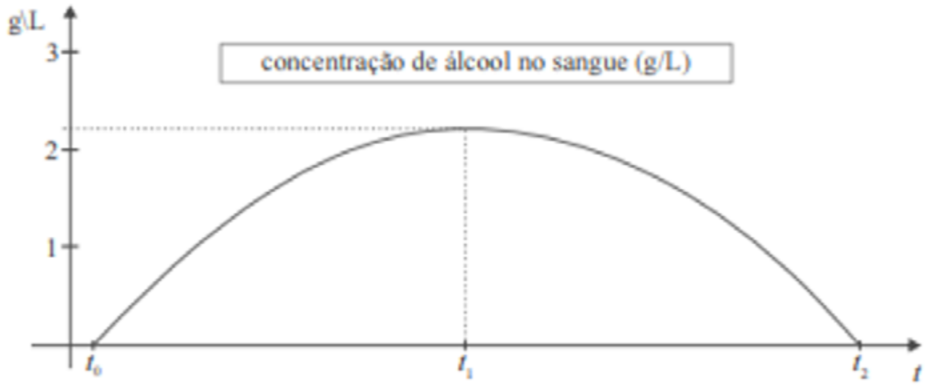
(CESPE/PRF/2013) Considere que o nível de concentração de álcool na corrente sanguínea, em g/L, de uma pessoa, em função do tempo t, em horas, seja expresso por $N = -0{,}008(t^2 - 35t + 34)$. Considere, ainda, que essa pessoa tenha começado a ingerir bebida alcoólica a partir de $t = t_0\ (N(t_0) = 0)$, partindo de um estado de sobriedade, e que tenha parado de ingerir bebida alcoólica em $t = t_1$, voltando a ficar sóbria em $t = t_2$.



Considere, por fim, a figura acima, que apresenta o gráfico da função N(t) para $t \in [t_0, t_2]$. Com base nessas informações e tomando 24,3 como valor aproximado de $\sqrt{589}$, julgue os itens que se seguem.

027. O nível de concentração mais alto de álcool na corrente sanguínea da referida pessoa ocorreu em $t = t_1$ com $t_1 > 18$ horas.

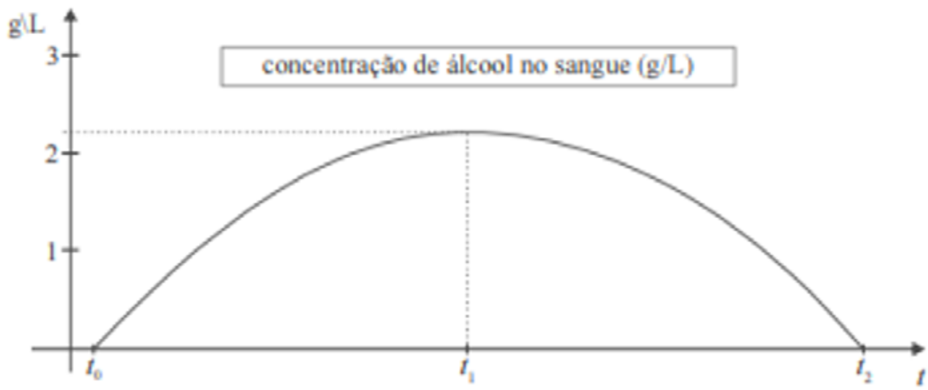
(CESPE/PRF/2013) Considere que o nível de concentração de álcool na corrente sanguínea, em g/L, de uma pessoa, em função do tempo t, em horas, seja expresso por $N = -0{,}008(t^2 - 35t + 34)$. Considere, ainda, que essa pessoa tenha começado a ingerir bebida alcoólica a partir de $t = t_0$ $(N(t_0) = 0)$, partindo de um estado de sobriedade, e que tenha parado de ingerir bebida alcoólica em t = t_1, voltando a ficar sóbria em t = t_2.



Considere, por fim, a figura acima, que apresenta o gráfico da função N(t) para t ϵ [t_0, t_2]. Com base nessas informações e tomando 24,3 como valor aproximado de $\sqrt{589}$, julgue os itens que se seguem.

028. O nível de concentração de álcool na corrente sanguínea da pessoa em questão foi superior a 1 g/L por pelo menos 23 horas.

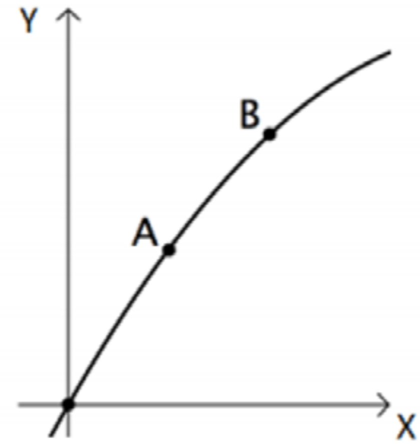
(CESPE/PRF/2013) Considere que o nível de concentração de álcool na corrente sanguínea, em g/L, de uma pessoa, em função do tempo t, em horas, seja expresso por $N = -0{,}008(t^2 - 35t + 34)$. Considere, ainda, que essa pessoa tenha começado a ingerir bebida alcoólica a partir de $t = t_0$ $(N(t_0) = 0)$, partindo de um estado de sobriedade, e que tenha parado de ingerir bebida alcoólica em t = t_1, voltando a ficar sóbria em t = t_2.



Considere, por fim, a figura acima, que apresenta o gráfico da função N(t) para t ϵ [t_0, t_2]. Com base nessas informações e tomando 24,3 como valor aproximado de $\sqrt{589}$, julgue os itens que se seguem.

029. O valor de t_2 é inferior a 36.

030. (FGV/SEE-PE/2016/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) A figura a seguir mostra um uma parte do gráfico de uma função quadrática. Dois pontos do gráfico são dados: A = (2, 15) e B = (4, 26).
O gráfico encontrará novamente o eixo X no ponto de abscissa:



a) 16
b) 17
c) 18
d) 19
e) 20

031. (CESPE/PRF/2013/AGENTE ADMINISTRATIVO) Considerando as tabelas acima, que apresentam, respectivamente, o peso e a estatura da criança A, desde o nascimento (0 ano) até o 3º ano de vida, bem como o peso da criança B, desde o nascimento (0 ano) até o 2º ano de vida, julgue os itens a seguir.

criança A				
idade (em anos completos)	0	1	2	3
peso (em kg)	3,3	10,1	13,0	15,5
estatura (em cm)	50	70	86	98

criança B				
idade (em anos completos)	0	1	2	3
peso (em kg)	3,9	10,6	13,4	*

Considere que, no plano cartesiano xOy, a variável x seja o tempo, em anos, e a variável y seja a altura, em centímetros. Considere, ainda, que exista uma função quadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, cujo gráfico passa pelos pontos (x, y) correspondentes às alturas no nascimento no 1º, 2º e 3º anos de vida da criança A. Em face dessas informações, é correto afirmar que $|b/a| < 10$.
(FME/2013) Na equação do 2º grau $2x^2 - 5x + 1 = 0$ de raízes x_1 e x_2, calcule:

032. $1/x_1 + 1/x_2$

033. $x_1^2+x_2^2$

034. $x_2/x_1 + x_1/x_2$

035. (INÉDITA/2021) Determine m, de modo que a equação $(m - 1)x^2 + mx +(m-1) = 0$ tenha duas raízes reais.

036. (FME/2013/DESAFIO) Determinar m na equação $mx^2 - 2(m-1)x + m = 0$ para que se tenha $x_1/x_2 + x_2/x_1 = 4$, onde x_1 e x_2 são as raízes da equação.

QUESTÕES DE CONCURSO

037. (CEBRASPE/2018/IFF/PROFESSOR - ENGENHARIA) Em uma fábrica de componentes eletrônicos, a venda de q componentes fabricados proporciona uma receita, em reais, de $R(q) = 2q^2 + 200q$. O custo de produção desses q componentes, também em reais, é $C(q) = 40q + 1.400$.

Nesse caso, a empresa terá lucro

a) positivo se vender 70 componentes eletrônicos.
b) nulo se vender 2 componentes eletrônicos.
c) negativo se vender 10 componentes eletrônicos.
d) máximo quando vender 40 componentes eletrônicos.
e) máximo e igual a R$ 1.500.

Vamos analisar cada alternativa individualmente. Devemos lembrar que o lucro é dado pela diferença do custo pela receita.

$$L(q) = R(q) - C(q) = 2q^2 + 200q - (40q + 1400) = 2q^2 + 160q - 1400$$

Alternativa a) Ao substituir q=70 em L(q), obtemos a expressão a seguir.

$$L(70) = 2(70)^2 + 160(70) - 1400 = 2 \cdot 4900 + 11200 - 1400 = 19600$$

Alternativa "a" correta.

Alternativa b) Ao substituir q=2 em L(q), obtemos a expressão a seguir.

$$L(2) = 2(2)^2 + 160(2) - 1400 = 2 \cdot 4 + 320 - 1400 = -1072$$

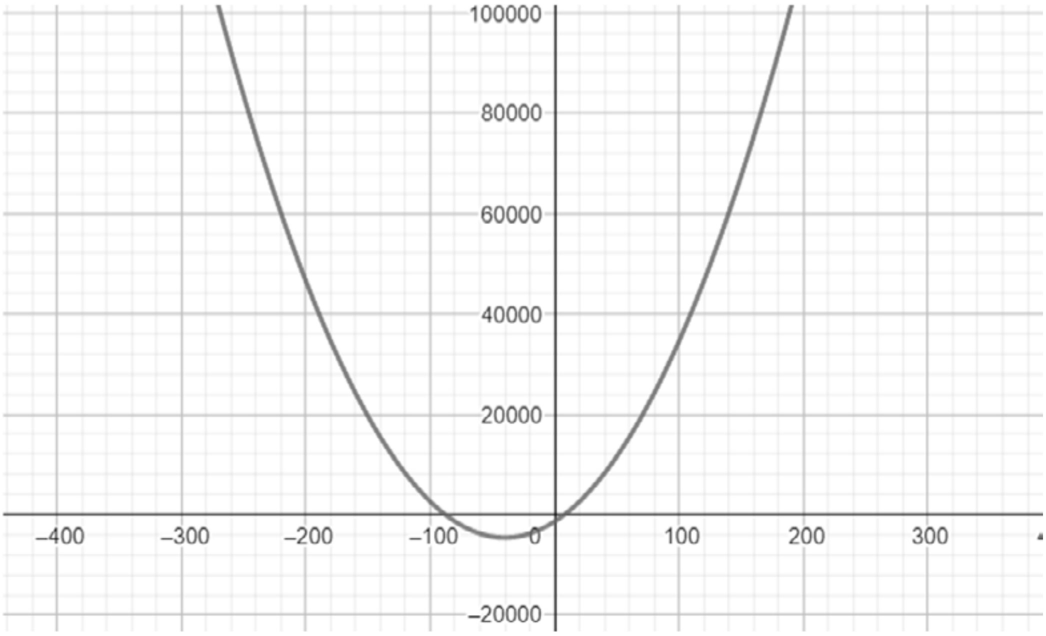
Alternativa "b" incorreta.

Alternativa c) Ao substituir q=10 em L(q), obtemos a expressão a seguir.

$$L(10) = 2(10)^2 + 160(10) - 1400 = 2 \cdot 100 + 1600 - 1400 = 400$$

Alternativa "c" incorreta.

Alternativa d e e) A função L(x) não possui valor máximo pois a>0, ou seja, sua concavidade é voltada para cima.



Alternativas "d" e "e" incorretas.

Houve um equívoco da banca quanto ao gabarito. Acredita-se que um erro de sinal na formulação das funções tenha causado o problema. Assim, mesmo que a banca afirme que a alternativa d esteja correta, a "a" é àquela sem erros.

Letra d.

---

038. (CEBRASPE/2019/PREFEITURA DE SÃO CRISTÓVÃO-SE/PROFESSOR DE EDUCAÇÃO BÁSICA - MATEMÁTICA) Tendo como referência as funções $f(x) = x^2 - 5x + 4$ e $g(x) = x^2 - 3$, em que $-\infty < x < +\infty$, julgue o item que se segue.

No sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, os gráficos das funções y = f(x) e y = g(x) se interceptam no ponto de coordenadas (7/5, −26/25).

A interceptação dos gráficos é encontrada a partir do sistema entre f(x) e g(x) abaixo.

I	$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 5x + 4}$
II	$g(x) = x^2 - 3$

Igualando (I) e (II) temos a expressão que se segue.

$$x^2 - 5x + 4 = x^2 - 3$$

Ao isolar x, temos:

$$-5x = -7$$

$$x = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5}$$

Em g(x), substituímos $x = \frac{7}{5}$.

$$y = g(x) = \left(\frac{7}{5}\right)^2 - 3 = \frac{49}{25} - 3 = \frac{49}{25} - \frac{75}{25} = -\frac{26}{25}$$

g(x) e f(x) se interceptam em $\left(\frac{7}{5}, -\frac{26}{25}\right)$.

Certo.

---

039. (CEBRASPE/2019/PREFEITURA DE SÃO CRISTÓVÃO-SE/PROFESSOR DE EDUCAÇÃO BÁSICA - MATEMÁTICA) Tendo como referência as funções $f(x) = x^2 - 5x + 4$ e $g(x) = x^2 - 3$, em que $-\infty < x < +\infty$, julgue o item que se segue.

No intervalo $1 \le x < \sqrt{3}, \frac{f(x)}{g(x)} \le 0$.

Devemos encontrar as raízes das duas funções para desenhar seus gráficos.

Para f(x):

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Por Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = 4 \; ou \; 1$$

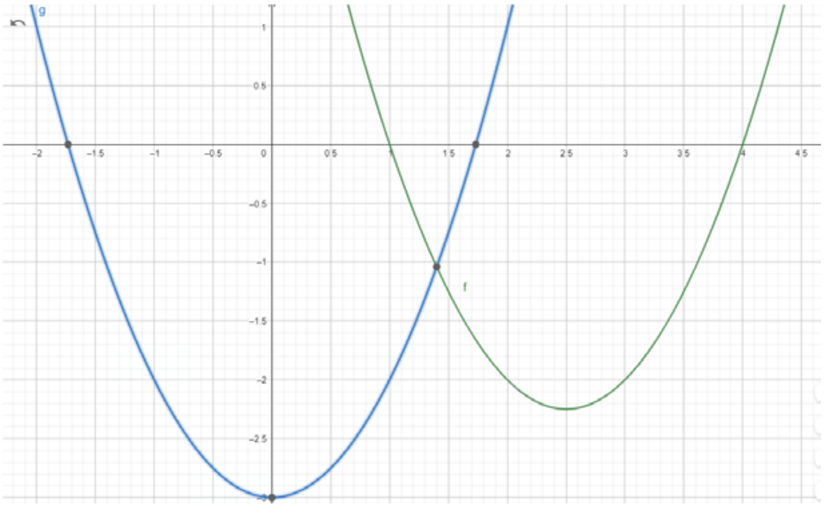
Para g(x):

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

Os gráficos são dados abaixo.



$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \leftrightarrow Os\ sinais\ das\ funções\ são\ diferentes\ ou\ f(x) = 0$$

$$-\sqrt{3} < x \leq 1\ ou\ x > \sqrt{3}$$

O intervalo $1 \leq x < \sqrt{3}$ não está contido nos intervalos listados. Deste modo, a afirmação está errada.

Errado.

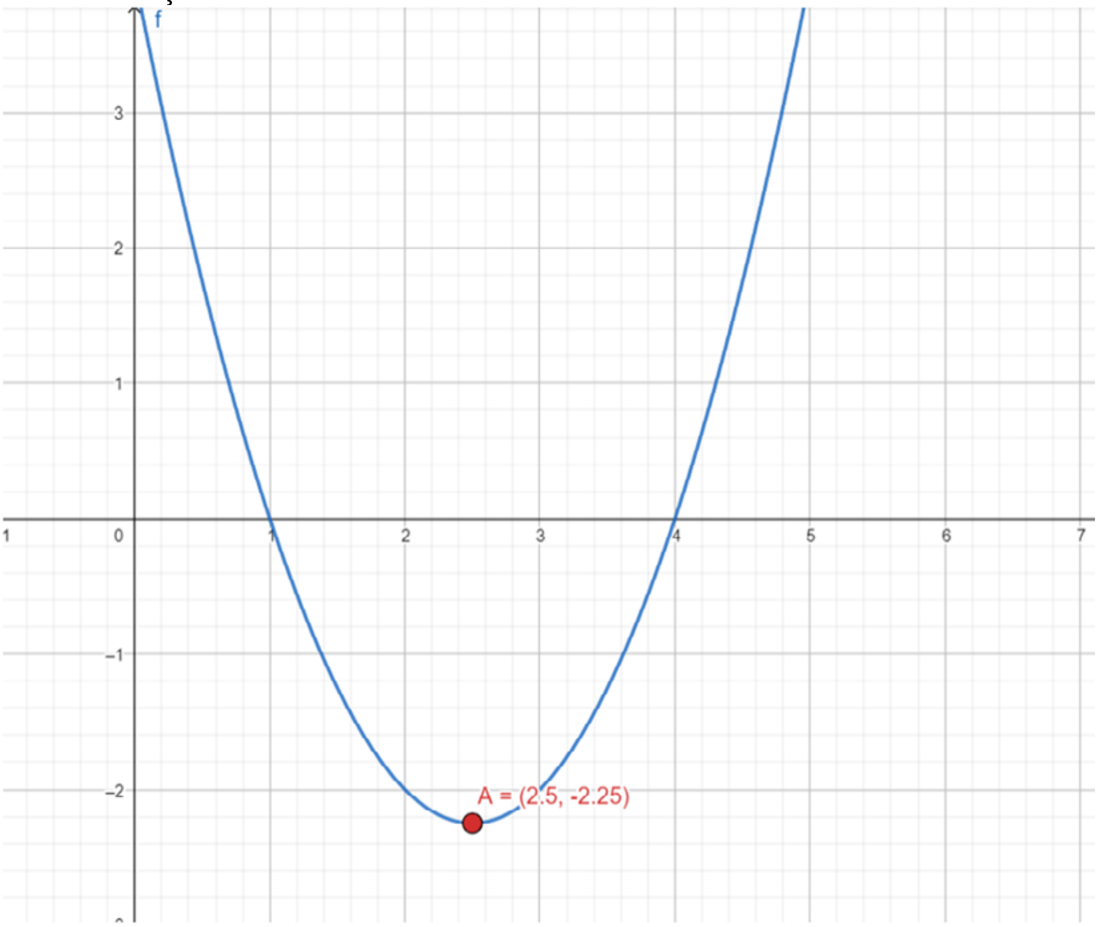
---

040. (CEBRASPE/2019/PREFEITURA DE SÃO CRISTÓVÃO-SE/PROFESSOR DE EDUCAÇÃO BÁSICA - MATEMÁTICA) Tendo como referência as funções $f(x) = x^2 - 5x + 4$ e $g(x) = x^2 - 3$, em que $-\infty < x < +\infty$, julgue o item que se segue

A função f(x) é decrescente no intervalo (−∞, 5/2] e crescente no intervalo [5/2, +∞).

A função f(x) possui concavidade voltada para cima, pois a=1>0.

A parte direita do $x_{vértice}$ é crescente, enquanto a parte esquerda é decrescente. A figura abaixo demonstra a afirmação.



Isto é, para $]-\infty;\ 2{,}5]$ f(x) é decrescente e para $[2{,}5\ \infty[$ f(x) é crescente.

Lembrando que

$$\frac{5}{2} = 2{,}5$$

Certo.

---

041. (CESPE/2020/TJ-PA/ANALISTA JUDICIÁRIO - PROGRAMADOR) Considere que, em determinado dia, um computador seja ligado às 5 horas e desligado às 19 horas e que, nesse intervalo de tempo, a porcentagem da memória desse computador que esteja sendo utilizada na hora x seja dada pela expressão $P(x) = -\frac{5}{4}x^2 + 30x - 100$.
Nessa situação, no intervalo de tempo considerado, na hora em que a memória do computador estiver sendo mais demandada, a porcentagem utilizada será igual a

a) 12%.
b) 20%.
c) 70%.
d) 80%.
e) 100%.

A função P(x) possui $a = -\frac{5}{4} < 0$. Deste modo, sua concavidade é virada para baixo, possuindo $y_{máx}$. O yvertice é o momento em que o computador possui maior porcentagem de memória requerida.

$$y_{vértice} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad (I)$$

De P(x) temos os coeficientes abaixo.

$$a = -\frac{5}{4}$$

$$b = 30$$

$$c = -100$$

Os coeficientes acima são substituídos em (I).

$$y_{vértice} = -\frac{30^2 - 4 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot (-100)}{4 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)} = -\frac{900 - 500}{-5} = \frac{400}{5} = 80$$

Quando memória do computador estiver sendo mais demandada, a porcentagem utilizada será igual a 80%.

Letra d.

---

042. (CESPE/2020/TJ-PA/ANALISTA JUDICIÁRIO - ANÁLISE DE SISTEMAS (DESENVOLVIMENTO)) A quantidade de tentativas mensais de invasão virtual a uma rede de computadores vem sendo registrada durante certo tempo e, no último mês, essa quantidade foi igual ao maior valor de x que satisfaz a desigualdade $-x^2 + 70x - 600 \geq 0$.

Nessa situação hipotética, a quantidade de tentativas de invasão virtual registradas no último mês foi igual a

a) 10.
b) 35.
c) 60.
d) 625.
e) 2.500.

Para encontrar os valores de x que satisfazem $-x^2 + 70x - 600 \geq 0$, devemos primeiramente encontrar as raízes da expressão.

$$-x^2 + 70x - 600 \geq 0$$
$$a = -1$$
$$b = 70$$
$$c = -600$$

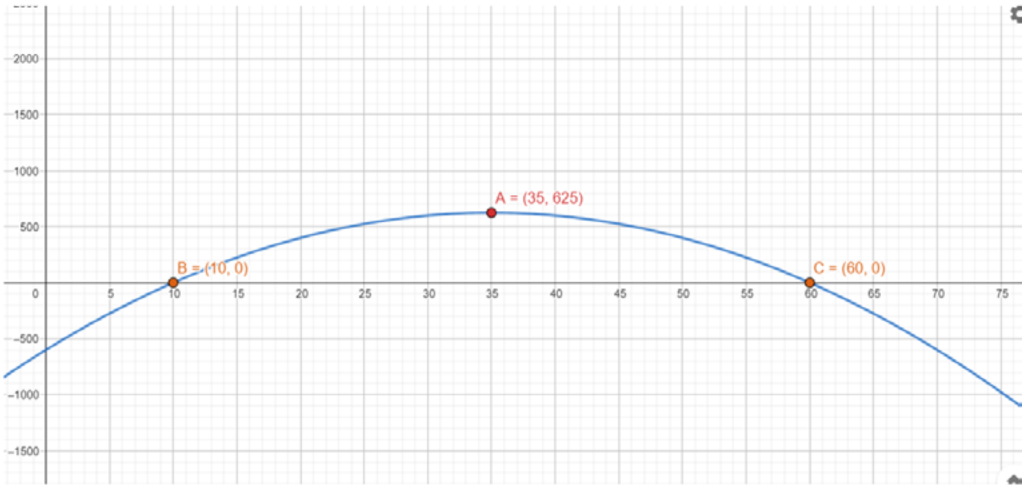
Por Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-70 \pm \sqrt{70^2 - 4(-1)(-600)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-70 \pm \sqrt{4900 - 2400}}{-2} = \frac{-70 \pm \sqrt{2500}}{-2} = \frac{-70 \pm 50}{-2}$$

$$x = 60 \ ou \ 10$$

A parábola está desenhada na figura abaixo. Desejamos saber os valores que sejam MAIORES ou iguais a zero.



O intervalo de x que contém os valores positivos é $[10, 60]$. Neste intervalo, o maior valor de x que o satisfaz é x=60.

Letra c.

043. (CESPE/2018/FUB/ASSISTENTE EM ADMINISTRAÇÃO) Julgue o item subsequente, relativo a função e matemática financeira.

O valor de máximo para a função $f(x) = -2x^2 + 96x + 440$ ocorre em $x = 28$.

O valor x em que f(x) é máximo é dado pela expressão abaixo.

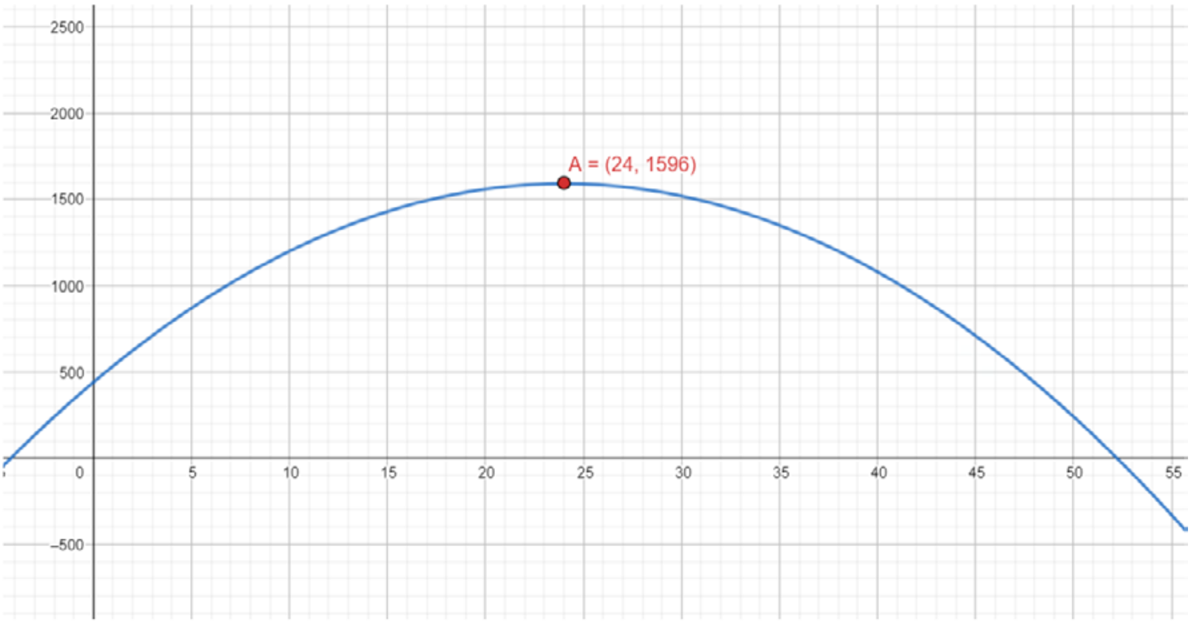
$$x_{máx} = -\frac{b}{2a}\ (I)$$

Para $f(x) = -2x^2 + 96x + 440$, $a = -2, b = 96, c = 440$. Substituindo os coeficientes em (I), temos:

$$x_{máx} = -\frac{b}{2a} = -\frac{96}{2(-2)} = \frac{96}{4} = 24$$

$$24 \neq 28$$

A figura abaixo mostra o máximo de f(x).



Errado.

044. (CESPE/2018/SEFAZ-RS/TÉCNICO TRIBUTÁRIO DA RECEITA ESTADUAL - PROVA 1) Para a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são constantes reais, tem-se que: $f(0) = 0, f(10) = 3\ e\ f(30) = 15$. Nesse caso, $f(60)$ é igual a

a) 18.

b) 30

c) 48.

d) 60.

e) 108.

Para encontrar f(60) precisamos, primeiramente, saber a equação da parábola.
Se f(0)=0, temos:

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0$$

$$c = 0$$

Ao substituirmos os pontos $f(10) = 3$ e $f(30) = 15$, temos as expressões abaixo.

$$f(10) = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 = 3$$

$$100a + 10b = 3\ (I)$$

$$f(30) = a \cdot 30^2 + b \cdot 30 = 15$$

$$900a + 30b = 15\ (II)$$

As equações (I) e (II) representam um sistema linear. Sua resolução pode ser dada com o método da adição/subtração.

(I)	$100a + 10b = 3$
3(I)	$300a + 30b = 9$
(II)	$900a + 30b = 15$
(II)-3(I)	$600a = 6\ (III)$

A equação (III) nos permite encontrar o parâmetro a.

$$600a = 6$$

$$a = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

Substituindo “a” em (I), temos:

$$100 \cdot 0{,}01 + 10b = 3$$

$$1 + 10b = 3$$

$$10b = 2$$

$$b = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

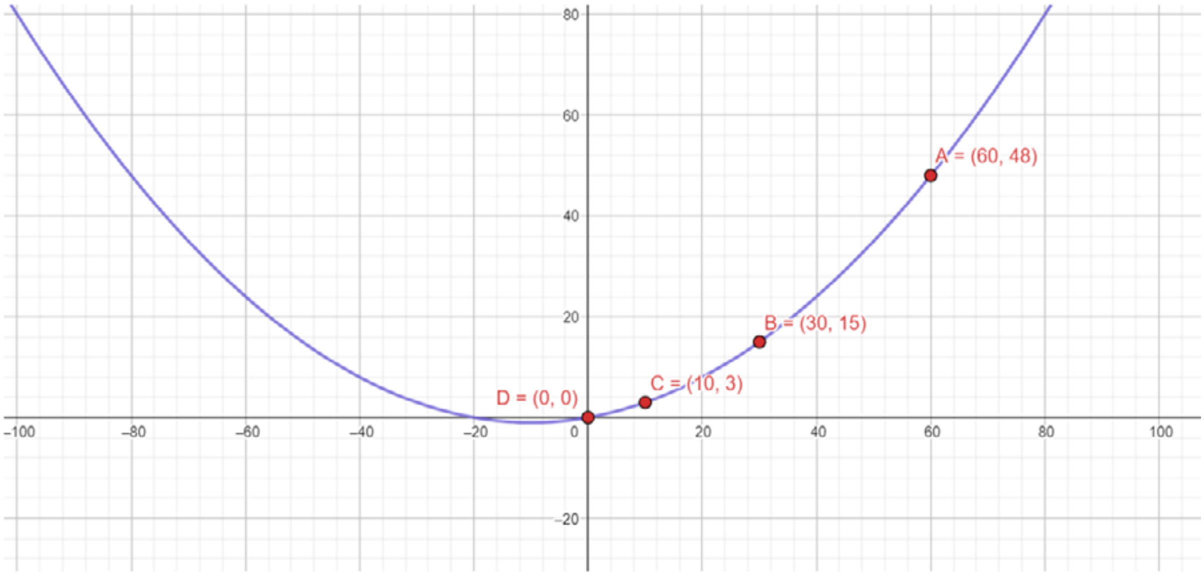
A equação da parábola é dada abaixo:

$$f(x) = 0{,}01x^2 + 0{,}2x$$

$f(60)$ é, portanto:

$$f(60) = 0{,}01 \cdot 60^2 + 0{,}2 \cdot 60 = 0{,}01 \cdot 3600 + 12 = 36 + 12 = 48$$

A figura abaixo mostra f(x) e seus pontos.

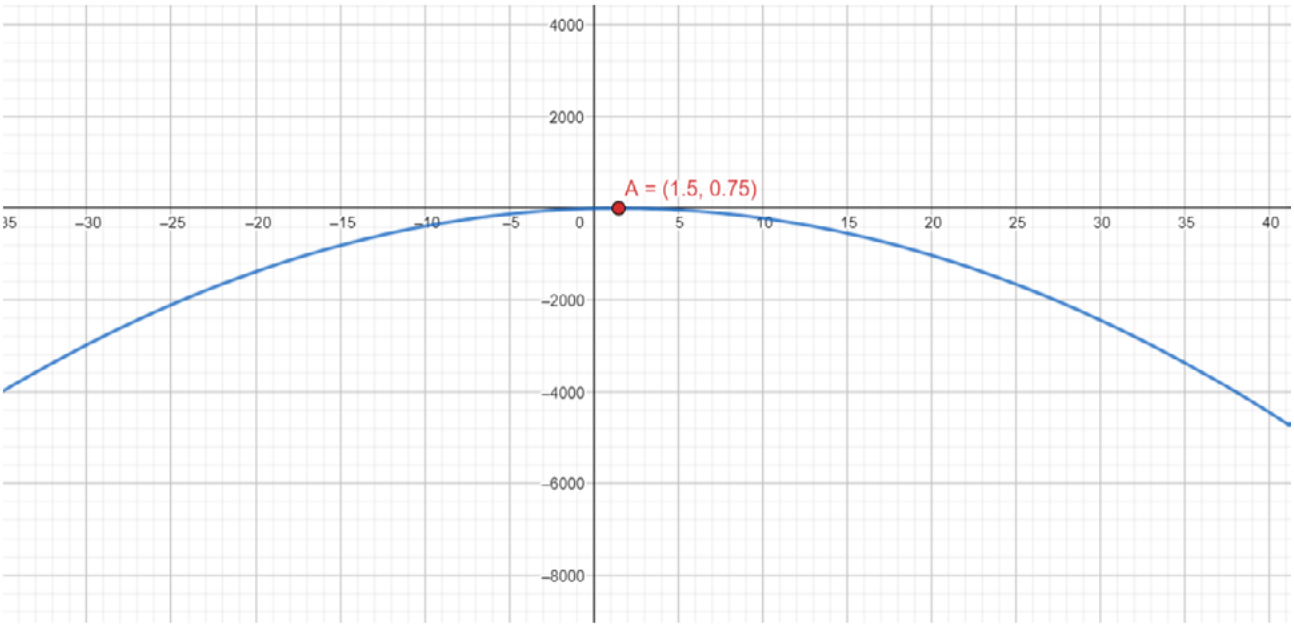


Letra c.

---

045. (CESPE/2018/BNB/ANALISTA BANCÁRIO) A respeito de números reais e de funções de variáveis reais, julgue o item que se segue.
O menor valor de $f(x) = -3x^2 + 9x - 6$ ocorre em $x = 3/2$.

A função $f(x) = -3x^2 + 9x - 6$ possui $a = -3 < 0$, deste modo é uma parábola com concavidade virada para baixo. Portanto, f(x) não possui valor mínimo, mas sim, valor máximo, mostrado na figura abaixo.



Errado.

---

046. (CESPE/2018/SEDUC-AL/PROFESSOR - MATEMÁTICA) Cada j = 0, 1, ..., 11 representa um mês do ano de 2017, isto é, j = 0 = janeiro, j = 1 = fevereiro, e assim sucessivamente. Se o mês j tem d dias, então j + 1/d representa o dia 1º do mês j; j + 2/d representa o dia 2 do mês j, e assim sucessivamente, j + d/d = j + 1 representa o dia d do mês j. Dessa forma, cada dia do ano de 2017 pode ser representado por um número x do intervalo [0, 12]. Considere que, nessa representação, em cada dia x do ano de 2017, a porcentagem de água acumulada em relação à capacidade máxima do reservatório de determinada represa seja expressa pelo valor da função $f(x) = x^2 - 10x + 60$.
A partir dessas informações, julgue o item que se segue.
Em 2017, a quantidade de água acumulada no reservatório ficou acima de 51% de sua capacidade máxima em dias de exatamente 4 meses.

Sabe-se que f(x) representa a porcentagem de água acumulada do reservatório. Deste modo, se o objetivo é saber em quantos dias a capacidade ficou acima de 51%, temos:

$$f(x) = x^2 - 10x + 60 > 51$$

$$x^2 - 10x + 9 > 0$$

Para resolver a inequação, entramos primeiro as raízes da igualdade.

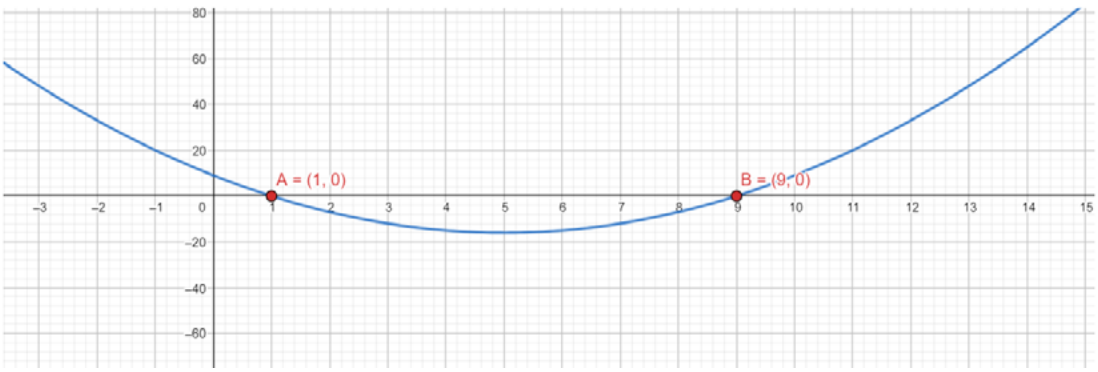
$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

Por Bhaskara, $a = 1, b = -10, c = 9$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$x = \frac{10 \pm 8}{2} = 9 \; ou \; 1$$

A figura abaixo mostra a função e suas raízes.



Se queremos valores positivos, a resolução da inequação é:

$$x < 1 \; ou \; x > 9$$

Os meses inclusos são 0, 10, 11 e 12. Quatro meses no total.

Certo.

047. (FCC/2018/SEDU-ES/PROFESSOR MAPB ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO - MATEMÁTICA) Um taxista verificou que o seu lucro y, em reais, obedecia a função $y = \frac{-x^2 + 36x}{4}$,sendo x o número de quilômetros rodados com algum cliente. Certo dia ele fez uma corrida de 2 km com um cliente e outra de 4 km com outro. Seu lucro na maior dessas corridas superou o da menor em

a) R$ 17,00.
b) R$ 23,00.
c) R$ 18,00.
d) R$ 24,00.
e) R$ 8,00.

Para encontrar os lucros referentes às duas corridas, devemos substituir x=2 e x=4 na função dada, conforme abaixo.

Para x=2:

$$y = \frac{-(2^2) + 36 \cdot 2}{4} = \frac{-4 + 72}{4} = \frac{68}{4} = R\$\ 17{,}00$$

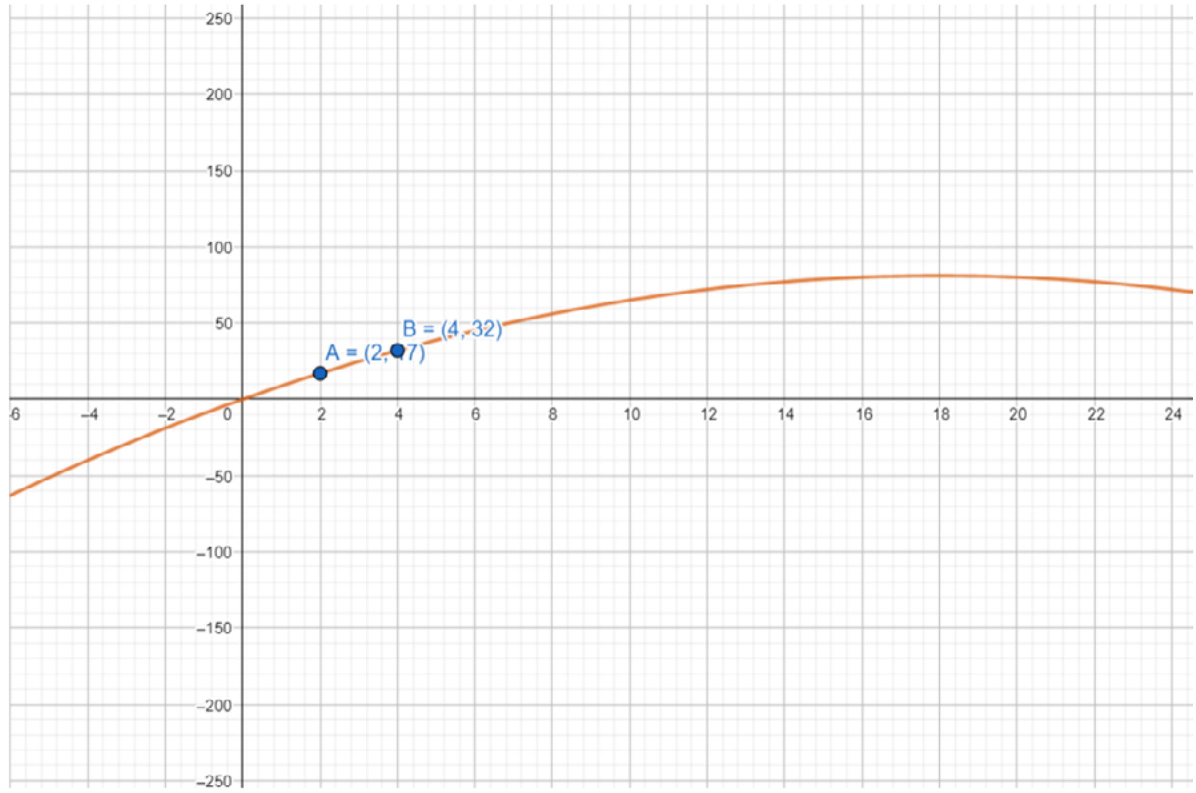
Para x=4:

$$y = \frac{-(4^2) + 36 \cdot 4}{4} = \frac{-16 + 144}{4} = \frac{128}{4} = R\$\ 32{,}00$$

A diferença dos lucros é:

$$32{,}00 - 17{,}00 = R\$\ 15{,}00$$

Apesar de a banca afirmar que a resposta é R$ 17,00, não há evidências de que isto esteja correto. A diferença entre os lucros das duas corridas realizadas pelo taxista é de R$ 15,00.



Letra a.

---

048. (FCC/2018/SEDU-ES/PROFESSOR MAPB ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO - MATEMÁTICA) Inicialmente o domínio da função y = - x² + 2x + 15 é o conjunto dos números reais e essa função será chamada de função J. Uma outra função, K, também dada por y = −x² + 2x + 15, tem como domínio o conjunto {−4,−3,−2,3,4,5,6,7}. A diferença entre a maior imagem da função J e a menor imagem da função K, nessa ordem, é igual a

a) 18.
b) 41.
c) 36.
d) 4.
e) 15.

A maior imagem da função J é seu $y_{máx}$, dado pela expressão abaixo.

$$y_{máx} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \ (I)$$

Para J temos:

$$y = -x^2 + 2x + 15$$

$$a = -1$$

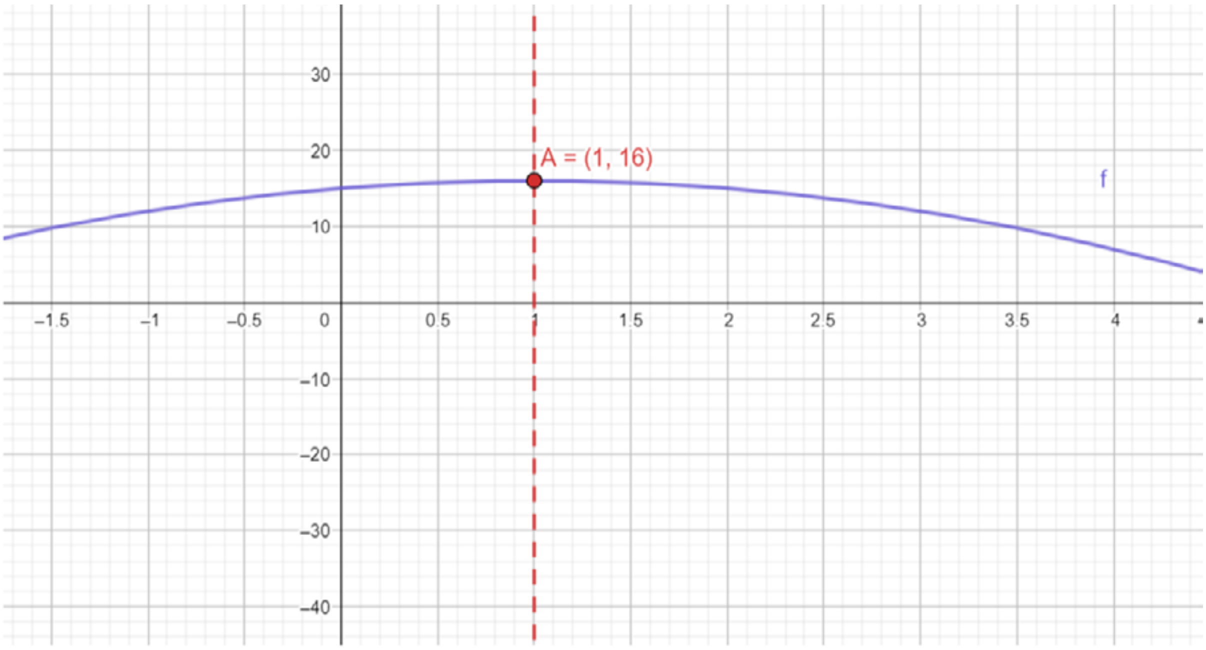
$$b = 2$$

$$c = 15$$

Substituindo os coeficientes acima em (I), temos:

$$y_{máx} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{2^2 - 4(-1)(15)}{4(-1)} = \frac{4 + 60}{4} = \frac{64}{4} = 16$$

$$x_{máx} = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-1)} = 1$$



J e K possui x=1 como eixo de simetria. Isto significa que conforme x se afasta de 1, y se torna cada vez menor. Como 7 é mais distante de 1 do que -4 é distante de 1, a menor imagem de K é:

$$K(7) = -x^2 + 2x + 15 = -(7^2) + 2 \cdot 7 + 15 = -49 + 14 + 15 = -49 + 29 = -20$$

A diferença entre a maior imagem de J e a menor imagem de K é:

$$16 - (-20) = 36$$

Letra c.

---

049. (FCC/2018/SEDU-ES/PROFESSOR MAPB ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO - MATEMÁTICA) O período de oscilação de um pêndulo, denotado por t, é o tempo, em segundos, que o pêndulo leva de uma extremidade a outra em seu percurso. A relação entre o comprimento C de um pêndulo, em polegadas, e t é dada, aproximadamente, por d = 9,8t². Se uma polegada equivale, aproximadamente, à 2,5 centímetros, o período de oscilação de um pêndulo de comprimento igual a 122,5 centímetros é, aproximadamente, igual a

a) 7 segundos.
b) $\sqrt{5}$ segundos.
c) 3 segundos.

d) $\sqrt{6}$ segundos.
e) $\sqrt{7}$ segundos.

Sabendo que $1\ pol = 2{,}5\ cm$, temos que 122,5 cm equivalem a:

$$\frac{122{,}5}{2{,}5} = 49\ pol$$

Substituindo $d = 49\ pol$ na equação do período abaixo, temos:

$$d = 9{,}8t^2$$

$$49 = 9{,}8t^2$$

$$t^2 = \frac{49}{9{,}8} = 5$$

$$t = \sqrt{5}$$

Letra b.

---

050. (INSTITUTO CONSULPLAN/2019/PREFEITURA DE PITANGUEIRAS-SP/MÉDICO PEDIATRA) Obuseiro é uma peça de artilharia parecida com um canhão e que dispara em trajetória parabólica. Considerando que a trajetória percorrida por um projétil disparado por um obuseiro seja representada pela equação $h = -\frac{1}{10} d^2 + 2d$, sendo h a altura, em quilômetros, atingida pelo projétil e d, a distância, em quilômetros, alcançada pelo projétil. A distância máxima, na horizontal, em quilômetros, que o projétil pode atingir é:
a) 10
b) 20
c) 30
d) 40

A distância horizontal máxima é dada por $2x_{máx}$. $x_{máx}$ por sua vez, é dado pela expressão abaixo.

$$x_{máx} = -\frac{b}{2a}\ (I)$$

Pela função abaixo, podemos encontrar os coeficientes.

$$h = -\frac{1}{10} d^2 + 2d$$

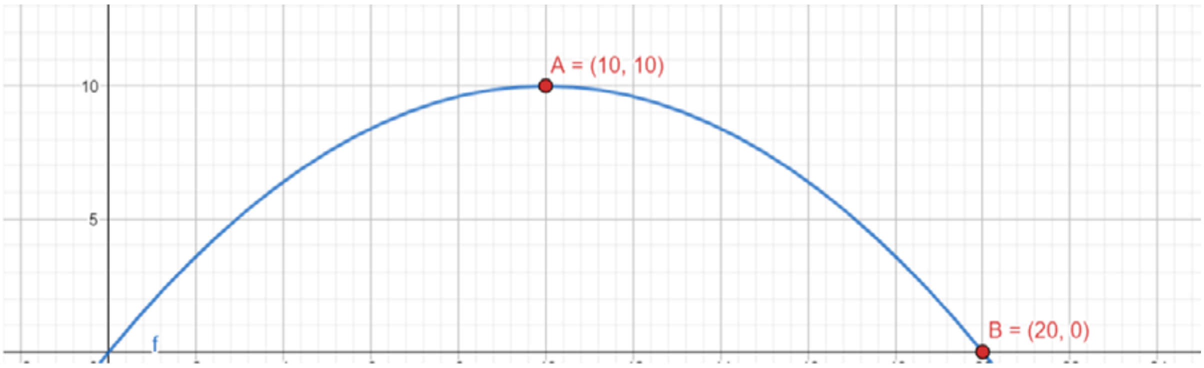
$$a = -\frac{1}{10} = -0{,}1$$

$$b = 2$$

$$c = 0$$

Substituindo os coeficientes em (I), temos:

$$x_{máx} = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-0{,}1)} = \frac{2}{0{,}2} = \frac{20}{2} = 10$$



A distância horizontal máxima é:

$$2x_{máx} = 2 \cdot 10 = 20$$

Letra b.

---

051. (IMPARH/2019/PREFEITURA DE FORTALEZA-CE/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Sabendo que a equação do 2º grau $mx^2 + 4x + 2 = 0$, tem raízes reais e iguais, podemos assumir que o valor de m é:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.

Para uma função do segundo grau possui duas raízes reais e iguais, Δ=0, isto é:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0\ (I)$$

Para a função do enunciado, temos os coeficientes:

$$a = m$$

$$b = 4$$

$$c = 2$$

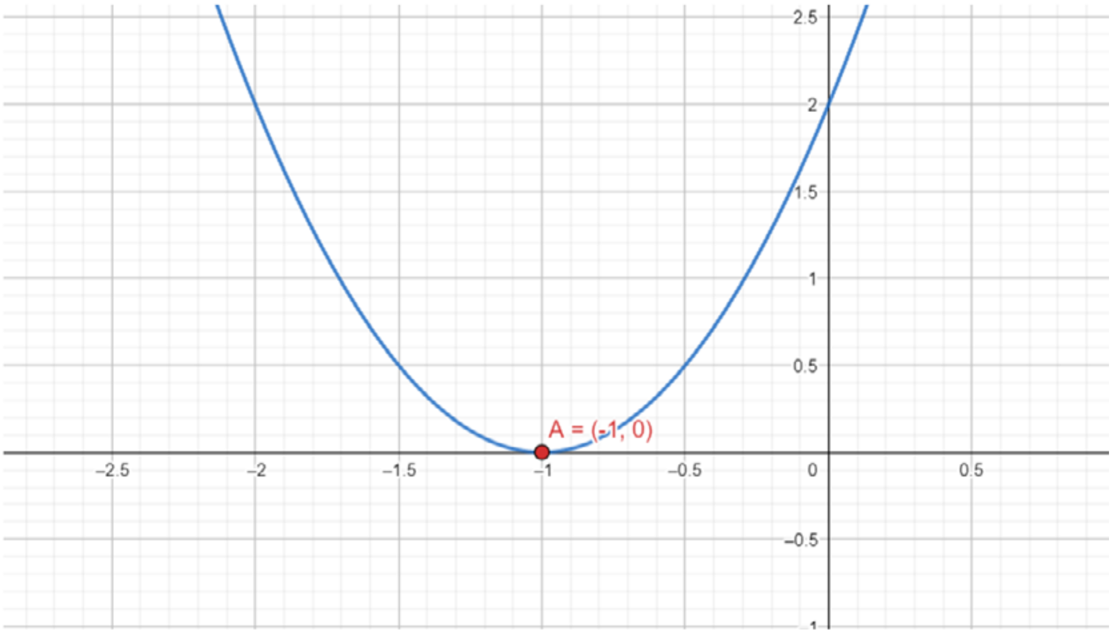
Substituindo os coeficientes acima em (I), temos:

$$\Delta = 4^2 - 4m \cdot 2 = 16 - 8m = 0$$

$$8m = 16$$

$$m = \frac{16}{8} = 2$$

A figura abaixo mostra as raízes reais e igual (-1).



Letra b.

---

052. (FAFIPA/2019/PREFEITURA DE ARAUCÁRIA-PR/GUARDA MUNICIPAL) Após analisar cada um dos itens abaixo sobre equações do segundo grau, assinale a alternativa CORRETA:

I – A equação: 4x² + 12x – 16 = 0 possui duas raízes reais distintas, sendo que uma dessas raízes possui um valor positivo e a outra possui um valor negativo.

II – Se o discriminante de uma equação for maior que zero, essa equação terá duas raízes reais distintas.

III – O produto da raiz x1 pela raiz x2 da equação: 3C² - 15C + 12 = 0 é igual a 5 e seus coeficientes são, respectivamente, a = 3, b = 15 e c = 12.

a) Somente os itens I e II estão corretos.
b) Somente o item II está correto.
c) Somente os itens II e III estão corretos.
d) Nenhum item está correto.

Vamos analisar cada uma das afirmativas para verificar sua veracidade.

Afirmativa (I): Para uma função do segundo grau possuir duas raízes reais e distintas, seu delta deve ser maior que zero. Vamos calculá-lo.

Para $4x^2 + 12x - 16 = 0$, temos os coeficientes:

$$a = 4$$

$$b = 12$$

$$c = -16$$

O delta é dado por:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-16) = 144 + 256 = 400 > 0$$

Afirmativa (I): Verdadeira.
Afirmativa (II): Se um discriminante (Δ) for maior que zero, então a função apresenta duas raízes reais e distintas. A afirmativa é verdadeira.
Afirmativa (III): Os coeficientes da equação são a = 3, b = -15 e c = 12. b é negativo. A afirmativa é falsa.
Corretas: (I) e (II).
Letra a.

---

053. (INSTITUTO CONSULPLAN/2019/PREFEITURA DE PITANGUEIRAS-SP/PSICÓLOGO) Uma empresa elaborou um relatório econômico no qual constava uma função matemática que representava o lucro mensal "L" em função do número de funcionários "x", dada por: L(x) = $-x^2+42x+250$. Qual o número de funcionários que a empresa deverá contratar para que o seu lucro seja o maior possível?

a) 21
b) 42
c) 125
d) 250

A função L(x) possui $a = -1 < 0$, deste modo, sua concavidade é virada para baixo e a função possui valor máximo. $x_{máx}$ é dado pela expressão abaixo.

$$x_{máx} = -\frac{b}{2a} \ (I)$$

Para $L(x) = -x^2 + 42x + 250$, temos os coeficientes abaixo.

$$a = -1$$

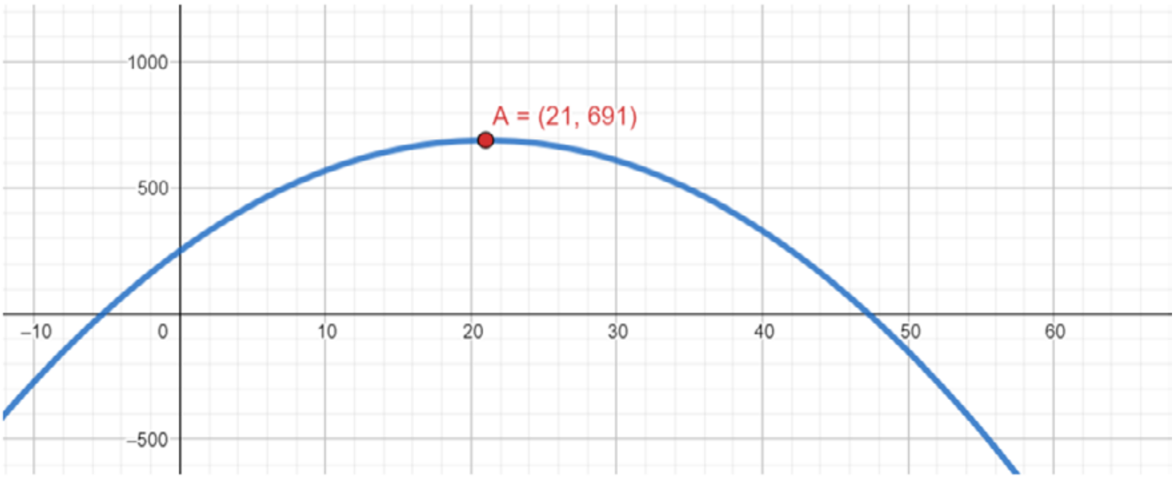
$$b = 42$$

$$c = 250$$

Substituindo os coeficientes em (I), temos:

$$x_{máx} = -\frac{b}{2a} = -\frac{42}{2(-1)} = \frac{42}{2} = 21$$

A figura abaixo mostra o valor de x para L(x) máximo.



Letra a.

---

054. (FUNDATEC/2020/PREFEITURA DE SANANDUVA-RS/FISCAL) O valor mínimo da função de segundo grau $f(x) = x^2 - 4x + 1$ é:

a) -10.
b) -7.
c) -6.
d) -5.
e) -3.

O valor mínimo de f(x) é dado pela expressão abaixo.

$$y_{mín} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad (I)$$

Para $f(x) = x^2 - 4x + 1$, temos os coeficientes:

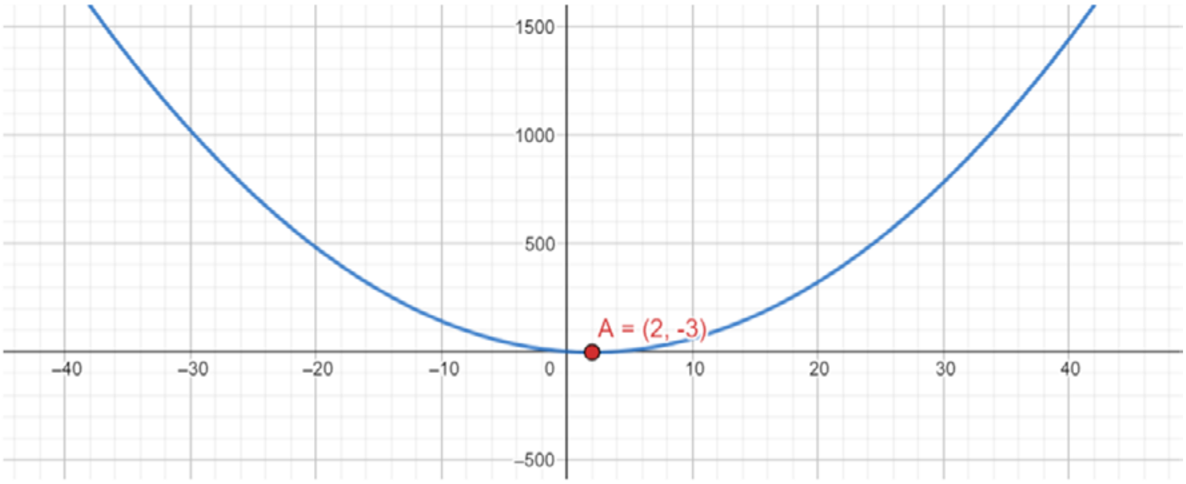
$$a = 1$$

$$b = -4$$

$$c = 1$$

Substituindo os coeficientes acima em (I), temos:

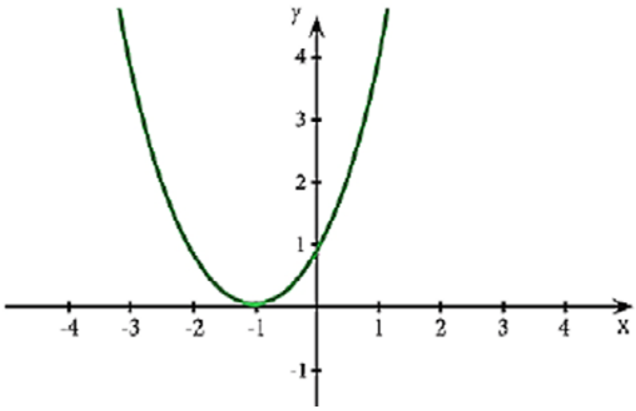
$$y_{mín} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}{4 \cdot 1} = -\frac{16 - 4}{4} = -\frac{12}{4} = -3$$



Letra e.

---

055. (CETREDE/2019/PREFEITURA DE JUAZEIRO DO NORTE-CE/ENFERMEIRO PLANTONISTA CAPS AD) Para o gráfico de uma equação de segundo grau a seguir, assinale a afirmação verdadeira relativo ao seu valor de delta Δ.



a) Δ = indeterminado.
b) $\Delta = 1$.
c) $\Delta < 0$.
d) $\Delta = 0$.
e) $\Delta > 0$.

O gráfico do enunciado possui duas raízes reais e iguais. Para isto acontecer, delta deve, necessariamente, ser zero.

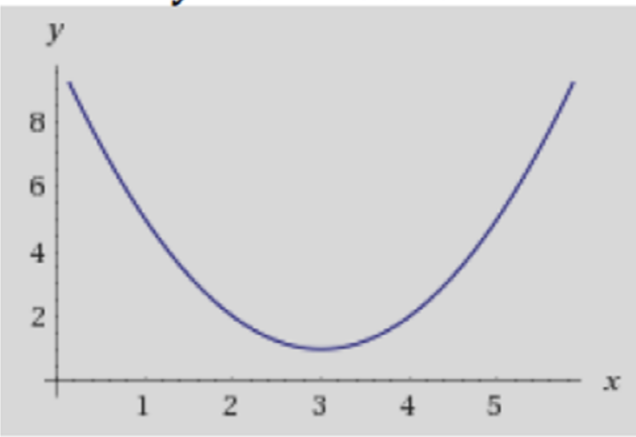
$$\Delta = 0$$

Letra d.

---

056. (INSTITUTO EXCELÊNCIA/2019/PREFEITURA DE CANOINHAS - SC/TÉCNICO DE ENFERMAGEM - SAMU) A equação do segundo grau recebe esse nome pelo fato de o grau da função (expoente de maior valor) ser igual a dois. Considere a seguinte equação e o seu gráfico plotado:

$$y = x^2 - 6x + 10$$



Avalie agora as seguintes proposições:

I – A função apresenta duas raízes reais.

II – O ponto de mínimo da função é (3, 1).

III – A função não apresenta valores negativos (y < 0) para todo o domínio de x.

É/são CORRETA(S) somente a(s) proposição(ões):

a) I.

b) II.

c) III.

d) II e III.

e) I e II.

Vamos analisar cada uma das afirmativas separadamente.

Afirmativa (I): Pelo gráfico, vemos que a função não corta o eixo x em nenhum ponto, logo, não possui raízes reais. Afirmativa falsa.

Afirmativa (II): Vamos realizar o cálculo de $x_{vértice}$ para encontrar o mínimo da função.

$$x_{mín} = -\frac{b}{2a}$$

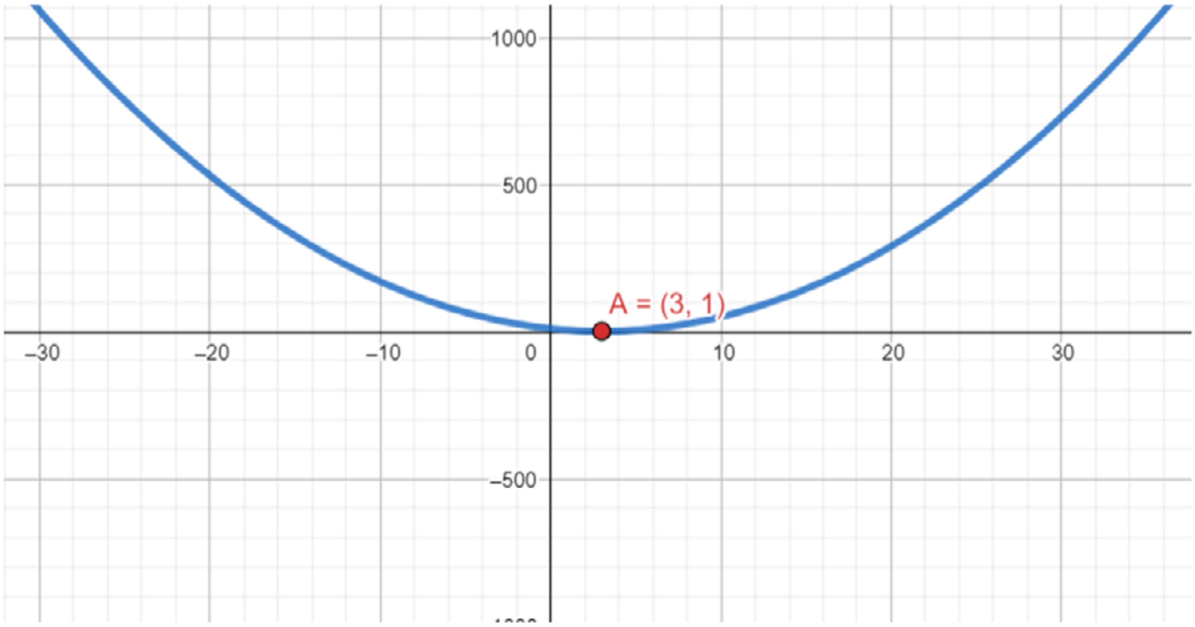
Se $a = 1 \ e \ b = -6$,então:

$$x_{mín} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

Substituindo $x_{mínimo}$, encontramos $y_{mínimo}$.

$$y_{mín} = x^2 - 6x + 10 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 10 = 9 - 18 + 10 = 19 - 18 = 1$$

Deste modo, o ponto mínimo da função é (3, 1). Afirmativa verdadeira.



Afirmativa (III): Pelo gráfico é possível perceber que não há valores negativos de y para qualquer número real de x. Afirmativa verdadeira.
Corretas: (II) e (III).
Letra d.

---

057. (GUALIMP/2019/PREFEITURA DE LAJE DO MURIAÉ-RJ/AUXILIAR ADMINISTRATIVO) Marque a alternativa abaixo que apresenta a expressão algébrica da função do 2º grau que passa pelos três pontos: A(2,9); B(1,5); C(0,7).

a) $f(x) = 2x^2 - x + 7$.
b) $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$.
c) $f(x) = x^2 - 3x + 7$.
d) $f(x) = x^2 - x + 7$.

Devemos substituir cada um dos pontos na fórmula padrão de uma função de segundo grau: $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Para o ponto C(0, 7):

$$f(x) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 7$$

$$c = 7$$

Para o ponto B (1, 5):

$$f(x) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 7 = 5$$

$$a + b + 7 = 5$$

$$a + b = -2\ (I)$$

Para o ponto A(2, 9):

$$f(x) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 7 = 9$$

$$4a + 2b = 2 \quad \rightarrow \div 2$$

$$2a + b = 1 \ \ (II)$$

As equações (I) e (II) representam um sistema linear 2x2 que pode ser resolvido pelo método da adição/subtração.

(I)	$a + b = -2$
(II)	$2a + b = 1$
(II)-(I)	$a = 3$

Substituindo o valor de a em (I), temos:

$$a + b = -2$$

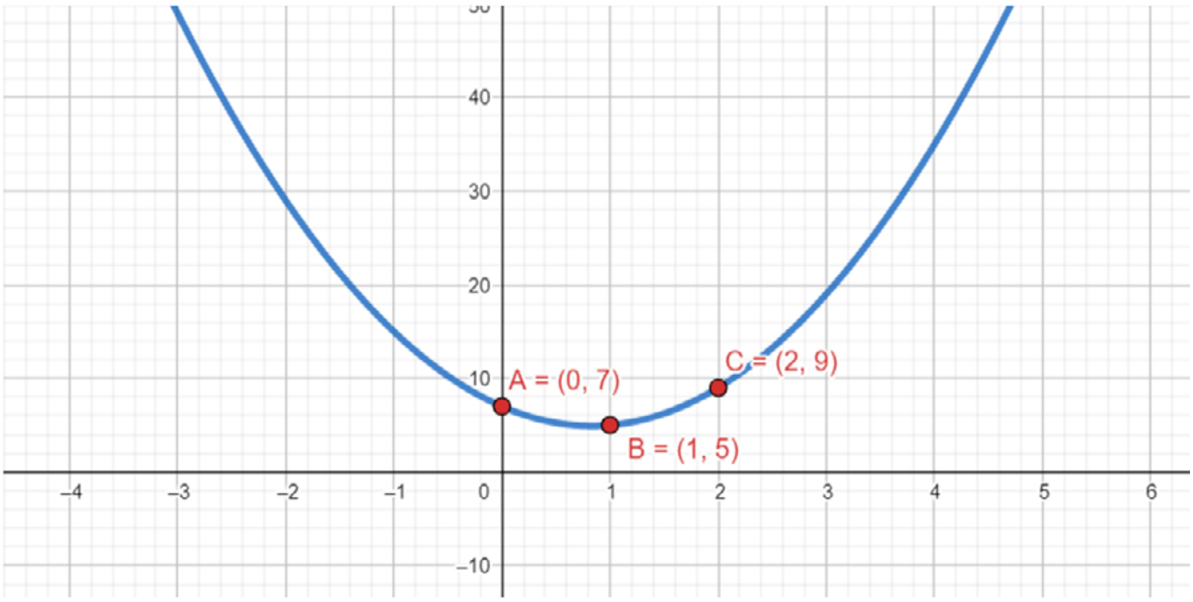
$$3 + b = -2$$

$$b = -2 - 3 = -5$$

A função f(x) que possui os pontos A, B e C é:

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 7$$

A figura abaixo mostra a função com os três pontos contidos.



Letra b.

058. (GUALIMP/2020/PREFEITURA DE CONCEIÇÃO DE MACABU - RJ - TÉCNICO DE ENFERMAGEM) Um canhão de guerra lançou uma bola para frente, onde a bola fez uma trajetória parabólica descrita pela função $S(t) = 30t - t^2$, onde S(t) representa a altura atingida pela bola, em metros, e t representa o tempo, em segundos. Qual foi a altura máxima atingida pela bola?

a) 30 m.
b) 125 m.
c) 225 m.
d) 300 m.

A altura máxima da bola de canhão é dada pelo $S_{máx}$, cujo valor é dado pela expressão abaixo.

$$S_{máx} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad (I)$$

A função $S(t) = 30t - t^2$ possui como coeficientes:

$$a = -1$$

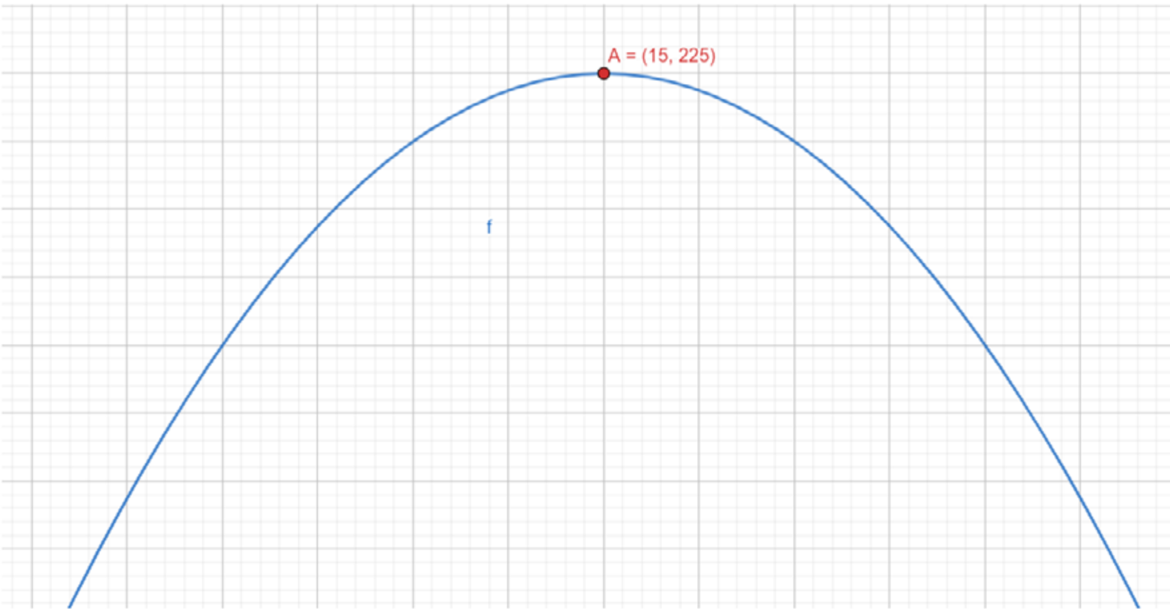
$$b = 30$$

$$c = 0$$

Substituindo os coeficientes acima em (I), temos:

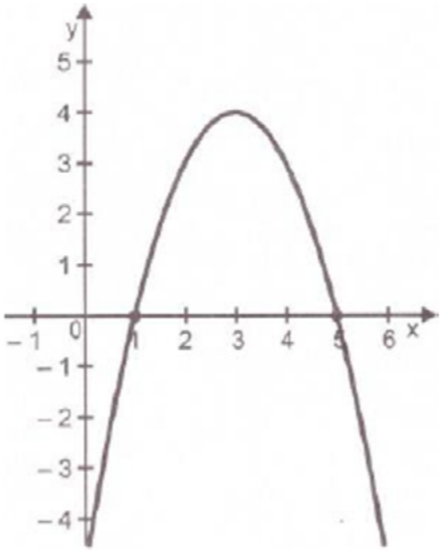
$$S_{máx} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{30^2 - 4(-1)(0)}{4(-1)} = \frac{900}{4} = 225\ m$$

A figura abaixo mostra a altura máxima atingida pela bola de canhão.



Letra c.

059. (GUALIMP/2020/PREFEITURA DE CONCEIÇÃO DE MACABU - RJ - AUXILIAR ADMINISTRATIVO) Na figura abaixo, está esboçado um gráfico de uma função f(x) do 2º grau.



Qual é a lei de formação dessa função?

a) $f(x) = x^2 + 6x - 5.$

b) $f(x) = -x^2 + 6x - 5.$

c) $f(x) = x^2 - 6x - 5.$

d) $f(x) = -x^2 - 6x - 5.$

Pelo gráfico, é possível perceber que a concavidade da parábola é virada para baixo, isto é, a<0. Esta afirmação já elimina as alternativas "a" e "c". A só pode ser -1.

A lei de formação de uma função do segundo grau é dada abaixo.

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

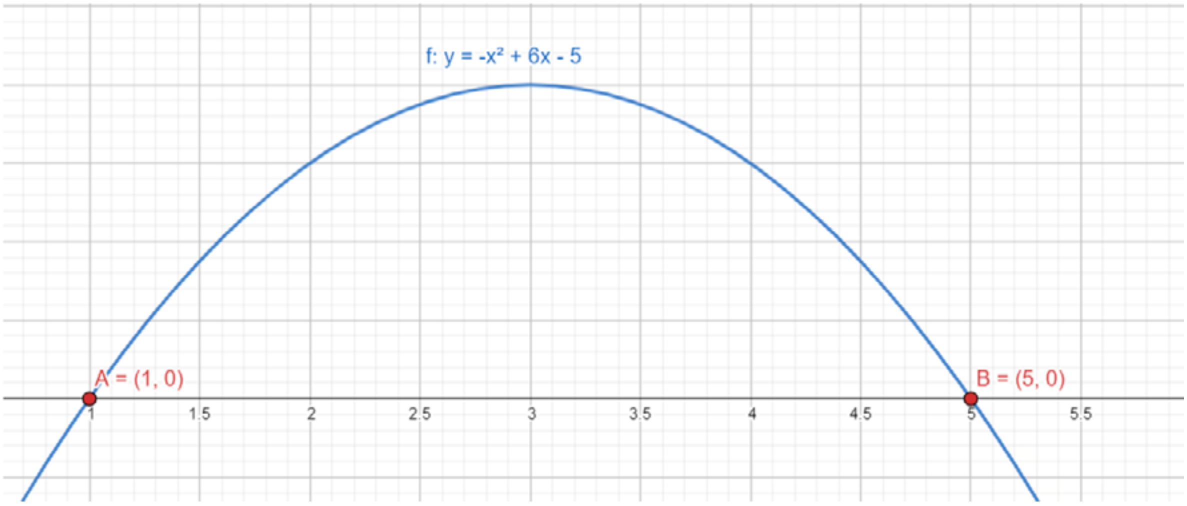
Onde x_1 e x_2 são as raízes da função.

A figura deixa claro que as raízes são x_1=1 e x_2=5, pois são os valores de x em que a função corta este eixo. Assim, como a=-1, temos que f(x) vale:

$$f(x) = -1(x - 1)(x - 5)$$

Realizando a multiplicação distributiva, temos:

$$f(x) = -[x^2 - 5x - x + 5] = -x^2 + 6x - 5$$



Letra b.

---

060. (FUNDATEC/2020/PREFEITURA DE IMBÉ-RS/ENGENHEIRO CIVIL) A função $f(x) = -3x^2 - 72x + 84$ tem como característica o gráfico de uma parábola com imagem no intervalo

a) [−1212,+∞[
b) [516,+∞[
c)]-∞, 516]
d)]-∞, 864]
e)]-∞, 1212]

A imagem é o conjunto de valores que y pode assumir. Para encontrá-lo, devemos calcular o $y_{vértice}$ de f(x).

f(x) possui a=-3<0. Deste modo, sua concavidade é virada para baixo e seu $y_{vértice}=y_{máx}$, e são calculados abaixo.

$$y_{máx} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad (I)$$

Se $f(x) = -3x^2 - 72x + 84$, então:

$$a = -3$$

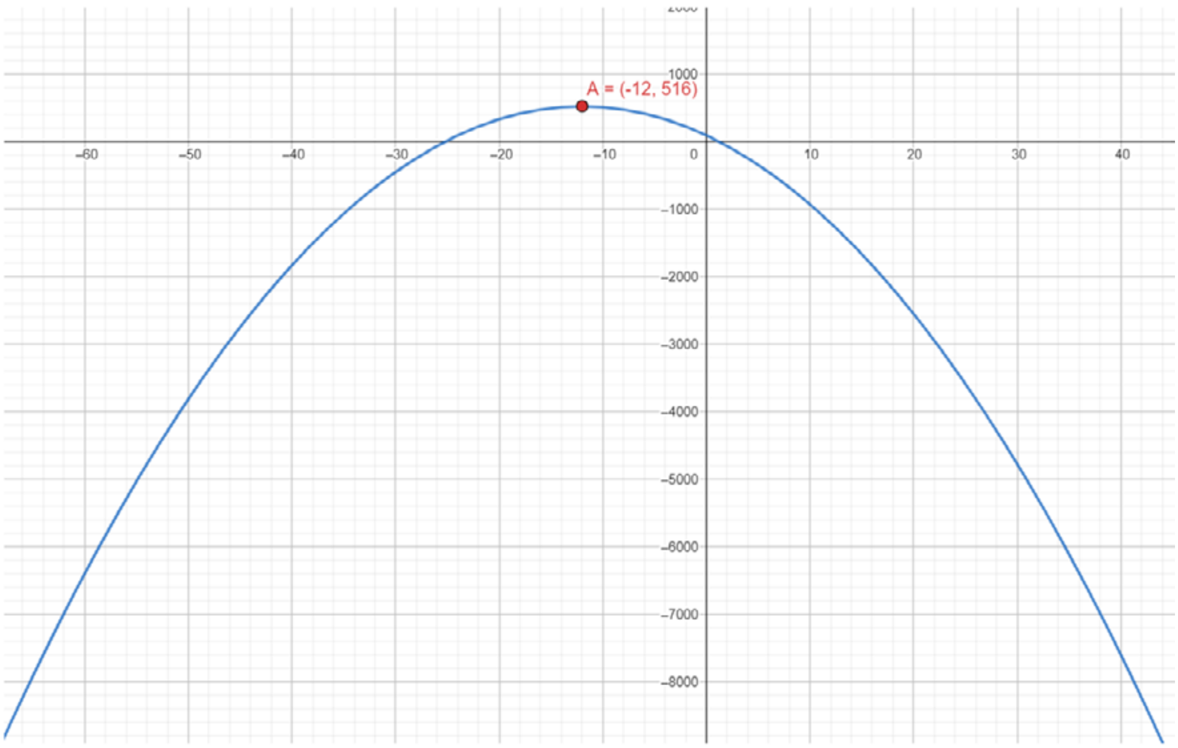
$$b = -72$$

$$c = 84$$

De volta a (I) com a substituição dos coeficientes, temos:

$$y_{máx} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-72)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 84}{4 \cdot (-3)} = \frac{5184 + 1008}{12} = \frac{6192}{12} = 516$$

A figura abaixo mostra o gráfico de f(x) com seu máximo.



Assim, é possível perceber que a imagem de f(x) é $]-\infty, 516]$.

Letra c.

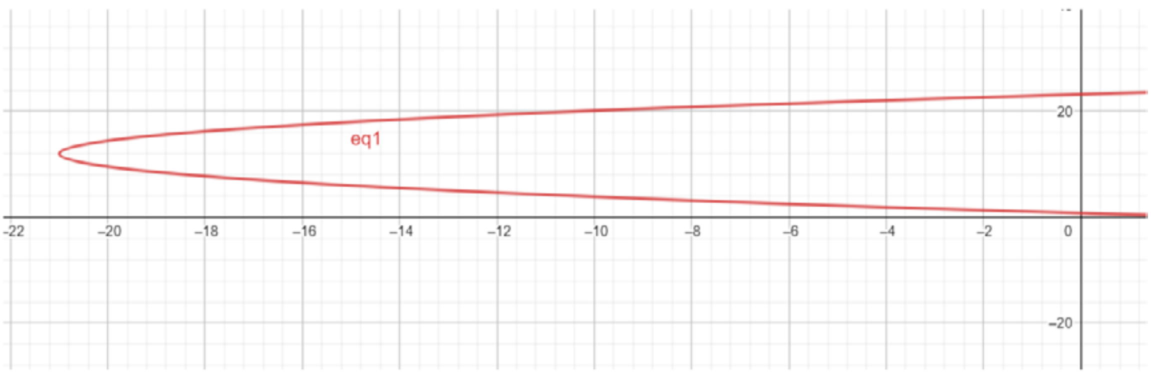
---

061. (CEV-URCA/2019/PREFEITURA DE BREJO SANTO-CE/AUDITOR FISCAL) Dada a parábola de equação $x = \frac{1}{6}y^2 - 4y + 3$ encontre a ordenada do vértice da parábola.

a) 6
b) 4
c) 10
d) 8
e) 12

A ordenada do vértice é o $y_{vértice}$.

A parábola está rotacionada 90º para o sentido horário, conforme figura abaixo.



Por este motivo, nosso $y_{vértice}$ é representado pela fórmula do conhecido $x_{vértice}$, isto é:

$$y_{vértice} = -\frac{b}{2a}\ (I)$$

Nesta parábola, os coeficientes são:

$$a = \frac{1}{6}$$

$$b = -4$$

$$c = 3$$

De volta a (I) com os coeficientes substituídos, temos:

$$y_{vértice} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\cdot\frac{1}{6}} = \frac{4}{\frac{1}{3}} = 4\cdot\frac{3}{1} = 12$$

Letra e.

---

062. (NOSSO RUMO/2020/PREFEITURA DE ITANHAÉM-SP/PROFESSOR SUBSTITUTO I) Assinale a alternativa que apresenta os valores de x e o vértice da parábola na equação abaixo.

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

a) S = {2, −5}, abertura para cima.
b) S = {−2, 5}, abertura para baixo.
c) S = {−2, −5}, abertura para baixo.
d) S = {−2, 5}, abertura para cima.
e) S = {2, −5}, abertura para baixo.

A parábola do enunciado possui a=1>0, isto significa que sua concavidade é virada para cima. As alternativas “b”, “c” e “e” já estão descartadas.
Por interpretação, quando a questão nos pede os valores de x, ela está se referindo às raízes da parábola. Para encontrá-las, vamos usar a fórmula de Bhaskara, com os coeficientes abaixo.

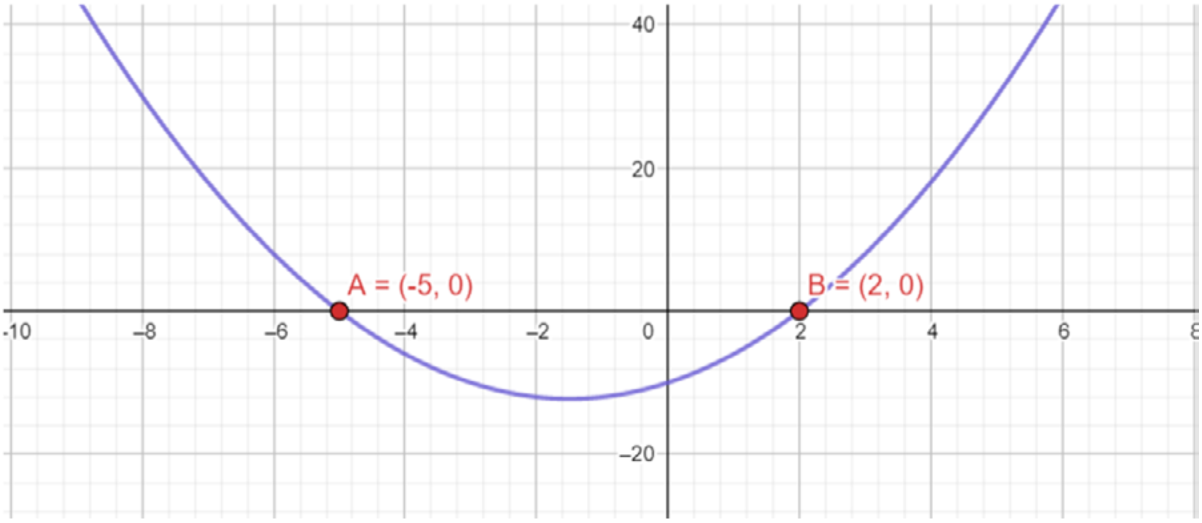
$$a = 1$$

$$b = 3$$

$$c = -10$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1\cdot(-10)}}{2\cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = 2\ ou - 5$$

As raízes da parábola são x=2 ou x=-5.



Letra a.

GABARITO

1. e
2. b
3. e
4. e
5. c
6. d
7. Anulada
8. C
9. E
10. c
11. C
12. E
13. d
14. E
15. C
16. E
17. d
18. d
19. e
20. E
21. C
22. c
23. a
24. C
25. C
26. E
27. E
28. C
29. C
30. b
31. E
32. 5
33. 21/4
34. 21/2
35. $2/3 < m < 2$
36. $2+\sqrt{6}$ ou $2 - \sqrt{6}$
37. d
38. C
39. E
40. C
41. d
42. c
43. E
44. c
45. E
46. C
47. a
48. c
49. b
50. b
51. b
52. a
53. a
54. e
55. d
56. d
57. b
58. c
59. b
60. c
61. e
62. a

Thiago Cardoso

Engenheiro eletrônico formado pelo ITA com distinção em Matemática, analista-chefe da Múltiplos Investimentos, especialista em mercado de ações. Professor desde os 19 anos e, atualmente, leciona todos os ramos da Matemática para concursos públicos.