MATEMÁTICA

Números Inteiros

Livro Eletrônico

GRAN CURSOS ONLINE

SUMÁRIO

1. Operações Fundamentais 3
1.1. Adição 4
1.2. Subtração 7
1.3. Multiplicação 8
1.4. Divisão 15
1.5. Potenciação 24
1.6. Radiciação 27
2. Números Inteiros 34
2.1. Números Naturais 34
2.2. Propriedades do Conjunto de Números Naturais 36
2.3. Números Inteiros 37
3. Números Primos 38
3.1. Como reconhecer se um número é primo? 42
3.2. Decomposição em Fatores Primos 44
3.3. MMC e MDC 55
3.4. Produtos Notáveis 76
3.5. Teorema de Euclides 77
Questões de Concurso 79
Gabarito 86

Olá! Sejam bem-vindos a mais uma aula de Matemática. Nesta aula, vamos falar das Operações Fundamentais e de Conjuntos Numéricos.

Esse é um assunto que se pode considerar de Matemática Básica, ou seja, não precisa estar presente no edital para que seja cobrado. Qualquer prova pode cobrar adição, subtração, números primos etc.

Além disso, quando está presente no edital, é muito difícil aparecer uma questão de prova versando unicamente sobre um tema da nossa aula. Em vez disso, os conceitos desta aula serão úteis para resolver problemas de qualquer outra parte da Matemática.

A única exceção fica por conta dos números primos, do MMC e MDC. Esses assuntos são extremamente importantes e cobrados nas provas que cobram expressamente Conjuntos Numéricos no seu edital.

Além disso, eu gostaria de te lembrar que estou sempre disponível no fórum de dúvidas para sanar todas as suas dúvidas sobre a matéria.

Feitas essas orientações iniciais, vamos juntos explorar essa parte da matéria?

1. Operações Fundamentais

Começaremos esse estudo pelas operações fundamentais: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

Comentaremos aqui sobre as propriedades e conceitos básicos a respeito dessas operações, com foco nas três últimas que são as mais cheias de detalhes que podem ser úteis em estudos posteriores da matéria.

Gostaria de acrescentar que é pouco provável que uma questão de prova verse unicamente sobre essa parte da matéria. Em virtude de ser muito básico, esse assunto costuma aparecer entrelaçado a outras questões envolvendo outros assuntos.

1.1. Adição

A operação de adição, comumente chamada de soma, combina dois números, conhecidos como parcelas, termos ou somandos.

A adição é uma operação a + b = c que satisfaz às seguintes propriedades:

- **Comutativa:** a ordem das parcelas não altera a soma.

Ex.: se 2 + 3 = 5, então 3 + 2 = 5.

- **Associativa:** o agrupamento das parcelas não altera o resultado.

Ex.: se (2 + 3) + 1 = 6, então 2 + (3 + 1) = 6.

- **Fechamento:** a adição de números pertencentes a um conjunto A deve ser um elemento pertencente ao mesmo conjunto A. Se estamos falando do conjunto de números naturais, a adição de dois números naturais deve ser também natural. Se estamos falando do conjunto de números reais, a adição de dois números reais deve ser também real.
- **Elemento Neutro:** existe um elemento que, somado a qualquer número, resulta nesse próprio número. No caso da adição convencional, o elemento neutro é o 0.

Ex.: 2 + 0 = 0 + 2 = 2; 3 + 0 = 3.

- **Elemento Oposto:** para cada número, existe um elemento que, quando somado a ele, produz o elemento neutro.

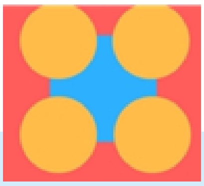
Ex.: 2 + (-2) = 0, portanto (-2) é o elemento oposto a 2; 3 + (-3) = 0, portanto, (-3) é o elemento oposto a 3.

Atenção!

É possível que o problema defina outras formas para a operação de adição diferentes da adição convencional. No entanto, a operação de adição sempre deve satisfazer às cinco propriedades acima.

A operação de adição convencional não possui uma definição matemática precisa, logo deve ser entendida como um conceito intuitivo.

Por exemplo, suponha que você tem algumas bolas amarelas. Supondo que existam duas bolas em cima e duas bolas em baixo. Quantas bolas você tem no total?



O total corresponde à soma 2 + 2 = 4. Isso pode ser verificado pela contagem das bolas acima.

Caso você esteja desacostumado, é interessante estudar o algoritmo da adição. Por exemplo, suponha que queiramos somar 37 + 79 + 125 =?

Para isso, devemos escrever os três números em uma coluna de cima para baixo (em qualquer ordem), mas com os algarismos das unidades ocupando a mesma coluna, os algarismos das dezenas ocupando a mesma coluna e, assim, por diante.

		3	7
		7	9
+	1	2	5
	Centenas	**Dezenas**	**Unidades**

A adição deve começar sempre pelos algarismos das unidades. Somamos todos eles e vemos que 7 + 9 + 5 = 21. Na nossa soma, escrevemos 1 e o 2 é transferido para o algarismo das dezenas.

		+2	
		3	7
		7	9
+	1	2	5
			1

Continuamos o mesmo procedimento no algarismo das dezenas, lembrando-nos que o 2 foi transferido para lá. Temos que 2 + 3 + 7 + 2 = 14. Portanto, escrevemos 4 e o 1 é transferido para as centenas.

	+1	+2	
		3	7
		7	9
+	1	2	5
		4	**1**

Nas centenas, temos que 1 + 1 = 2. Por isso, fechamos a soma:

	+1	+2	
		3	7
		7	9
+	1	2	5
	2	**4**	**1**

Concluímos que 37 + 79 + 125 = 241.

1.2. Subtração

Tecnicamente, a subtração não é uma operação básica, mas sim uma operação derivada da adição. A subtração a – b consiste em somar a com o oposto de b.

Exemplos: 5 – 4 = 1, porque 4 + 1 = 5.

73 – 29 = 44, porque 29 + 44 = 73.

15 – 18 = -3, porque 18 + (-3) = 15.

Quando se tem uma soma de vários números misturados entre positivos e negativos, convém fazer o seguinte:

- Some todos os números positivos e os negativos separadamente;
- Subtraia os números negativos dos positivos.

Exemplo: 12 + 8 – 9 + 14 – 3 + 2 =?

Façamos a separação: (12+8+14+2)-(9+3)=36-12=24.

O algoritmo da subtração é muito semelhante ao da adição, porém só deve ser utilizado para a subtração de dois números. Vejamos, por exemplo, a subtração 125 – 36.

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 5 \\ - & & 3 & 6 \\ \hline \end{array}$$

Devemos subtrair primeiramente os algarismos das unidades. Note que 5 é menor que 6. Por isso, o jeito mais fácil é pegar uma unidade emprestada do algarismo das dezenas. Assim, o algarismo das dezenas é diminuído para 1 e o algarismo das unidades passa a ser 15.

Agora, fazemos 15 – 6 = 9

		-1	
	1	2	5
-		3	6
			9

Mais uma vez, 2 é inferior à soma 3 + 1 = 4. Por isso, tomamos emprestado o algarismo das dezenas. Agora, vemos que 12 – 3 – 1 = 12 – 4 = 8.

	-1	-1	
	1	2	5
-		3	6
		8	9

Portanto, o resultado da subtração desejada é 89.

1.3. Multiplicação

A multiplicação é uma operação binária que consiste em multiplicar dois termos. O resultado da multiplicação é conhecido como **produto.**

A multiplicação é uma operação a.b = c, que deve satisfazer às seguintes propriedades:

- **Associativa:** o agrupamento das parcelas não altera o resultado.

Ex.: se (2.3).4 = 24, então 2.(3.4) = 24.

- **Distributiva:** trata da importante relação entre soma e multiplicação. O produto:

$$a.(b+c) = a.b + a.c$$

- **Fechamento:** a adição de números pertencentes a um conjunto A deve ser um elemento pertencente ao mesmo conjunto A. Se estamos falando do conjunto de números naturais, a adição de dois números naturais deve ser também natural. Se estamos falando do conjunto de números reais, a adição de dois números reais deve ser também real.

- **Elemento Neutro:** existe um elemento que, multiplicado a qualquer número, resulta nesse próprio número. No caso da multiplicação convencional, o elemento neutro é o 1.

Ex.: 2.1 = 1.2 = 2; 3.1 = 3.

- **Elemento Nulo:** existe um elemento x que, multiplicado a qualquer número, resulta sempre em x. No caso da multiplicação convencional, o elemento nulo é o 0.

Ex.: 2.0 = 0; 12.0 = 0.

Assim como dissemos para a adição, é possível que o problema defina uma operação de multiplicação diferente da convencional que nós estamos acostumados a usar no dia a dia. Mas, para isso, essa operação deve atender às seis propriedades delineadas acima.

A multiplicação convencional consiste em uma forma prática de adicionar várias vezes o mesmo número.

Por exemplo:

2.3 = 3 + 3 (soma-se o 3 duas vezes);

5.7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 (soma-se o 7 cinco vezes).

E, assim, por diante.

Um fato importante a se comentar é que a multiplicação convencional, além das cinco propriedades anteriores, também atende à propriedade comutativa:

- **Comutativa:** a ordem dos fatores não altera o produto.

Ex.: se 2.3 = 6, então, 3.2 = 6.

Atenção!

Nem toda operação de multiplicação segue a propriedade comutativa. Um dos exemplos mais importantes é a multiplicação de matrizes.

Podemos visualizar, por meio do esquema a seguir, que a multiplicação convencional atende às propriedades anteriores, inclusive a comutativa. Vejamos:

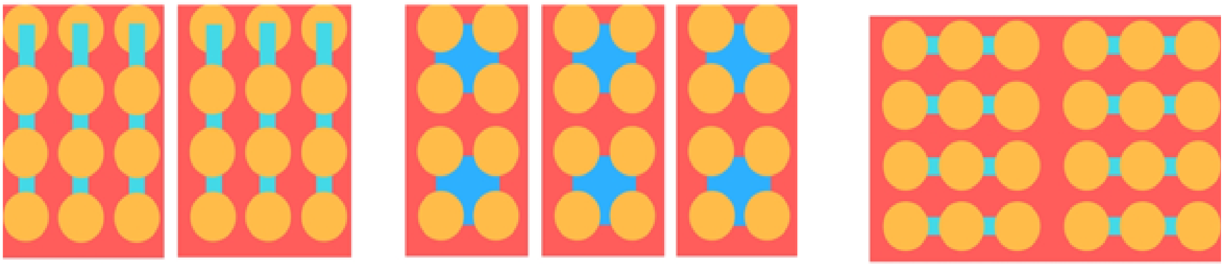


Figura 1: Esquemas com 24 bolinhas exemplificando as propriedades da multiplicação

Na Figura 1, podemos ver que todas as três figuras são compostas por 24 bolinhas – basta contar.

Porém, na figura mais à esquerda, temos 2 grupos formados cada um por 4 grupos de 3 bolinhas. Ou seja, temos:

$$2.3.4 = 24$$

Na figura central, temos 3 grupos formados cada um por 2 grupos de 4 bolinhas. Ou seja, temos:

$$3.2.4 = 24$$

Por fim, na figura à direita, temos 2 grupos formados cada um por 4 grupos de 3 bolinhas. Ou seja, temos:

$$2.4.3 = 24$$

Com isso, mostramos a propriedade comutativa, ou seja:

$$2.3.4 = 3.2.4 = 2.4.3 = 24$$

Também podemos visualizar a propriedade distributiva.

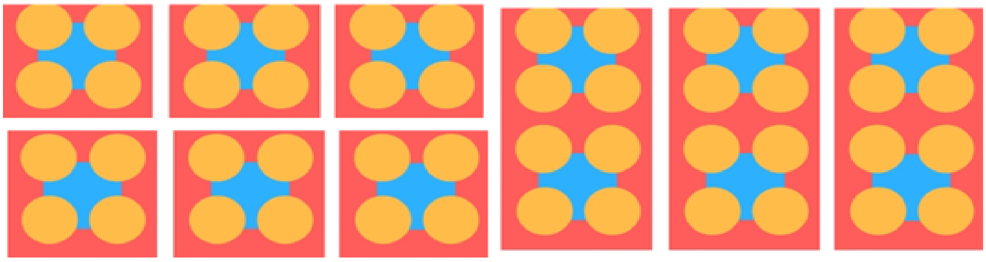


Figura 2: Ilustração da Propriedade Distributiva e Associativa

Na Figura 2, temos que o desenho à esquerda é composto por 3 grupos formados cada um por um grupo de 4 bolinhas mais outro grupo de 4 bolinhas. Ou seja:

$$3.(4 + 4) = 24$$

Já o desenho à direita é composto por 3 grupos formados cada um por um grupo de 8 bolinhas (4 +4 = 8). Ou seja:

$$3.(8) = 24$$

Por isso, concluímos que:

$$3.(4 + 4) = 3.8 = 24$$

Por fim, podemos visualizar a propriedade distributiva. É só ver que outra forma de organizar as quatro bolinhas é formando 2 grupos cada um formado por 3 grupos de 4 bolinhas.

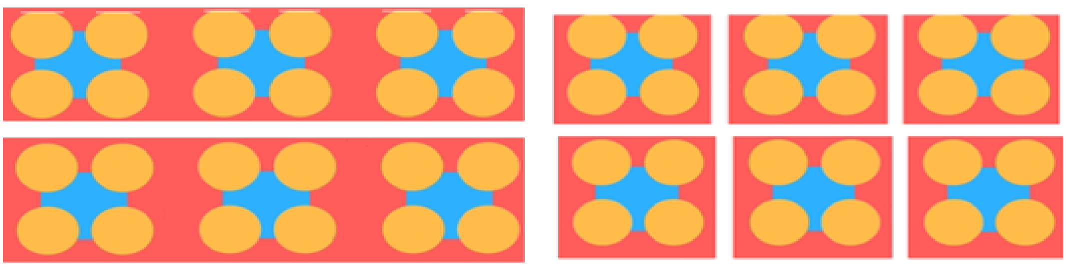


Figura 3: Ilustração da Propriedade Associativa

Dessa maneira, temos:

$$3.4 + 3.4 = 24$$

Dessa forma, visualizamos que:

$$3.(4 + 4) = 3.4 + 3.4 = 24$$

Bom, minha intenção com esses gráficos era só fazer você visualizar que realmente existem essas famosas propriedades, conhecidas como comutativa, associativa e distributiva, ok?

Agora, vamos falar brevemente sobre o algoritmo da multiplicação que também é bastante semelhante ao da adição, mas é mais comumente utilizado para multiplicar dois elementos. Por exemplo, façamos o produto 26.34 =?

- **Primeiro Passo:** organizamos os fatores da multiplicação, de modo que algarismo das unidades fique abaixo dos algarismos das unidades, dezenas junto das dezenas e, assim, por diante.

$$\begin{array}{ccc} & 2 & 6 \\ \text{X} & 3 & 4 \end{array}$$

- **Segundo Passo:** façamos as multiplicações referentes ao algarismo das unidades do número embaixo. No caso, o 4. Façamos 4.6 = 24. Dessa forma, escrevemos o 4 e vai 2 para o algarismo das dezenas.

$$\begin{array}{ccc} & +2 & \\ & 2 & 6 \\ \text{X} & 3 & 4 \\ \hline & & 4 \end{array}$$

Agora, façamos 4.2 = 8. Como já temos um 2 a ser somado, temos 8 +2 = 10. Dessa maneira, escrevemos o 0 nas dezenas e o 1 passa para o algarismo das centenas.

	+1		
		2	6
X		3	4
	1	0	4

Façamos o mesmo com o algarismo das dezenas do número 34, no caso, o 3. Só que, nesse caso, devemos nos lembrar de que, como o 3 está nas dezenas, o resultado da multiplicação deve ser anotado a partir desse algarismo.

No caso, 3.6 = 18, por isso, escrevemos o 8 nas dezenas e o 1 passa para as centenas. Vejamos:

		+1	
		2	6
X		3	4
	1	0	4
		8	

Continuamos. Agora, 3.2 = 6. Como já havia sobrado 1 para as centenas, temos que 6 + 1 = 7.

		+1	
		2	6
X		3	4
	1	0	4
	7	8	

- **Terceiro Passo:** Depois de terminar todas as multiplicações, façamos a soma.

		+1	
		2	6
X		3	4
	1	0	4
+	7	8	
	8	8	4

Assim, concluímos que 26.34 = 884.

1.3.1. Multiplicação Envolvendo Números Negativos

Quando temos uma multiplicação ou divisão envolvendo números com sinais diferentes, deve-se fazer a multiplicação dos sinais separadamente.

Para isso, precisamos saber que o produto dos sinais é o seguinte:

(+).(+) = (+)

(+).(-) = (-)

(-).(+) = (-)

(-).(-) = (+)

Com isso, podemos estabelecer que **o produto de termos com sinais iguais é sempre positivo.** Já o produto de termos com sinais diferentes é sempre negativo.

Isso pode ser dito de outra forma:

(+).(+) = (+)	Mais com mais é igual a mais.
(+).(-) = (-)	Mais com menos é igual a menos.
(-).(+) = (-)	Menos com mais é igual a menos.
(-).(-) = (+)	Menos com menos é igual a mais.

É importante destacar que essa mesma regra é válida para a divisão.

1.4. Divisão

A operação de divisão é a mais importante de todas e você precisará saber muito bem o algoritmo para entender o assunto de Raciocínio Sequencial.

A divisão é caracterizada por alguns elementos:

- **Dividendo:** é o número que está sendo dividido por outro;
- **Divisor:** é o número que divide o dividendo;
- **Quociente:** é a parte inteira do resultado;
- **Resto:** é o que sobra da divisão.

Vejamos o nosso velho conhecido algoritmo da divisão:

$$\begin{array}{rl} 23 & \big|\underline{\;\;5\;\;} \end{array}$$

Nesse caso, temos que 23 é o dividendo, enquanto que 5 é o divisor. Continuemos o algoritmo.

Qual é o maior número que, quando multiplicado por 5, não excede 23?

Vejamos. 5 vezes 4 é igual a 20, que é menor que 23. Ok. Porém, 5 vezes 5 é igual a 24, que já excede 23. Portanto, não podemos usar 5. Precisamos usar 4.

Como 5 vezes 4 é igual a 20, devemos subtrair esse número de 23. Temos o seguinte:

$$\begin{array}{rl} 23 & \big|\underline{\;\;5\;\;} \\ -20 & \;\;\;4 \\ = (3) & \end{array}$$

23 menos 20 é igual a 3. Não é possível dividir 3 por 5, porque 3 é menor que 5. Por isso, 3 será o **resto** da divisão.

A consequência mais importante do algoritmo da divisão é que se pode escrever que:

Obs.: $Dividendo = Quociente.Divisor + Resto$

No nosso exemplo, temos que:

$$23 = 4.5 + 3$$

Agora, preste atenção à seguinte definição.

Obs.: **Definição:** Um número (dividendo) é **divisível** por outro (divisor) quando o resto da divisão **é igual a zero.**

Já vimos que 23 não é divisível por 5, porque o resto da divisão é igual 3. Em outras palavras, 23 dividido por 5 é igual a 4 e deixa resto 3.

Por outro lado, 30 é divisível por 6. Vejamos:

$$\begin{array}{c|c} 30 & 6 \\ \cline{2-2} -30 & 5 \\ = (0) & \end{array}$$

30 é divisível por 6, porque 30 dividido por 6 é igual a 5 e deixa resto 0.

É bem importante você entender o mecanismo da divisão para as questões de Raciocínio Sequencial.

Por isso, vamos a um exemplo prático.

Suponha que você tem 23 moedas que podem ser guardadas em cofres em que cabem apenas 5. Como 23 dividido por 5 é igual a 4 e deixa resto 3, isso significa que:
Você poderá encher 4 cofres – totalizando 20 moedas e sobrarão 3 moedas.

Dessa maneira, podemos dizer que as 23 moedas são suficientes para encher 4 cofres (o quociente da divisão) e ainda restarão 3 moedas.

Agora, prestemos atenção que isso pode ser cobrado de duas formas em questões de provas.

- Qual o número mínimo de cofres necessários para guardar as 23 moedas?
- Qual o número máximo de cofres que podem ser enchidos com as 23 moedas?

Perceba que as duas respostas são diferentes.

Precisamos de, pelo menos, 5 cofres para guardas as 23 moedas: 4 ficarão cheios e um deles ficará com apenas 3 moedas.

Por outro lado, o número máximo de cofres que podemos encher é igual a 4, o quociente da divisão.

1.4.1. Resto da Divisão

Nessa seção, faremos a seguinte notação para o resto da divisão de b por a.

$$r_a(b)$$

Dessa maneira, temos:

$r_3(10) = 1$, porque 10 dividido por 3 é igual a 3 e deixa resto 1;

$r_4(15) = 3$, porque 15 dividido por 4 é igual a 3 e deixa resto 3;

$r_7(9) = 2$, porque 9 dividido por 7 é igual a 1 e deixa resto 2;

Dessa maneira, dizemos que *b* é divisível por *a* quando $r_a(b) = 0$. Em outras palavras, *b* é divisível por *a* quando o resto da divisão é igual a 0, como já foi definido na seção anterior.

Podemos anotar algumas propriedades do resto da divisão. Vejamos:

- **Resto da Soma:** é igual ao resto da soma dos restos.

$$r_a(b + c) = r_a[r_a(b) + r_a(c)]$$

Pode parecer estranha essa propriedade, mas é bem útil. Vejamos:

Qual o resto da divisão de 98 + 309 na divisão por 3. Em vez de fazer uma soma e obter números complicados, podemos notar o seguinte:

96 é divisível por 3, porque a soma 9 + 6 = 15. Portanto, $r_3(96) = 0$. Agora, podemos escrever que:

$$r_3(98) = r_3(96 + 2) = 0 + 2 = 2$$

Por outro lado, 309 é divisível por 3, porque a soma 3 + 0 + 9 = 12. Portanto, temos que:

$$r_3(98 + 309) = r_3(98) + r_3(309) = 2 + 0 = 2$$

Olha só, não precisamos fazer nenhuma divisão para obter o resto. Entendeu como essa propriedade é muito útil?

- **Resto do Produto:** é igual ao resto do produto dos restos.

$$r_a(bc) = r_a[r_a(b).r_a(c)]$$

Na minha visão, essa é a propriedade mais útil do resto da divisão. Por exemplo, qual o resto da divisão de 98.310 na divisão por 3?

Convenhamos que fazer a conta 98.310 e depois dividir por 3 em uma prova de concurso público é algo bem fora de questão, não acha?

Porém, podemos fazer o seguinte.

$r_3(98) = 2$, porque 96 é divisível por 3 e 98 = 96 + 2.

$r_3(311) = 2$, porque 309 é divisível por 3 e 311 = 309 + 2.

Portanto, temos que o resto do produto é:

$$r_3(98.310) = 2.2 = 4$$

Como 4 é maior que 3 devemos pegar o resto da divisão de 4 por 3.

$$r_3(98.310) = r_3(4) = 1$$

Bem melhor do que morrer fazer contas, não acha?

1.4.2. Divisão por Zero

É importante destacar que não é possível dividir por zero, ou seja, nunca teremos 0 como divisor.

Isso acontece porque o produto de 0 por qualquer número é igual a 0. Sendo assim, não é possível obter um quociente.

Uma das consequências mais importantes acontece quando temos uma equação. Vejamos:

$$x^2 - 4x = 0$$

Essa equação do segundo grau pode ser resolvida levando em contas as propriedades do zero na divisão. Vejamos:

$$x^2 - 4x = 0 \therefore x^2 = 4x$$

$$\therefore x.x = 4x$$

Como $x^2 = 4x$, temos duas opções: perceba que temos x de ambos os lados da equação. Podemos ter que x = 0, pois 0 multiplicado por qualquer número é igual a zero. Então, teremos:

$$0.0 = 4.0 = 0$$

Outra opção é simplesmente cortar o x. Mas é importante deixar claro que, quando cortamos o x, estamos supondo que x é diferente de zero.

$$se\ x \neq 0, x.x = 4x \therefore x = 4$$

De fato, $x = 4 \neq 0$; por isso, essa solução também é possível. Basta testar:

$$x^2 = 4x \therefore 4^2 = 4.4 \therefore 16 = 16$$

Podemos sintetizar da seguinte forma:

$$x.x = 4x \rightarrow x = 0\ ou\ corta\ o\ x$$

Outra equação do segundo grau que podemos resolver usando as propriedades da divisão por zero é a seguinte.

$$x^2 - 4 = 0$$

Usando o produto notável $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, teremos que:

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x+2)(x-2) = 0$$

Temos que o produto de dois números é igual a zero. Portanto, necessariamente, um deles tem que ser igual a zero.

$$(x+2)(x-2) = 0$$

$$\rightarrow x + 2 = 0\ ou\ x - 2 = 0$$

$$\rightarrow x = -2\ ou\ x = +2$$

Portanto, as duas soluções possíveis para essa equação do segundo grau são +2 e -2.

1.4.3. Regras de Divisibilidade

É muito interessante você reconhecer rapidamente se um número é divisível por outros. Isso é extremamente importante para facilitar a simplificação de frações.

Vejamos as regras mais comuns. Um número é divisível:

- **Por 2:** quando **é par**, ou seja, termina em 2, 4, 6, 8 ou 0.

Exemplos: 18, 1096 e 230 são divisíveis por 2; já 13, 17 e 69 não são divisíveis por 2;

- **Por 3:** quando a soma dos seus algarismos é um número divisível por 3.

Exemplos: 198 (1 + 9 + 8 = 18) é divisível por 3, porque 18 é divisível por 3;
264 é divisível por 3, porque 2 + 6 + 4 = 12 que é divisível por 3;
390 é divisível por 3, porque 3 + 9 + 0 = 12 que é divisível por 3;
221 não é divisível por 3, porque 2 + 2 + 1 = 5 que não é divisível por 3.

- **Por 4:** quando os seus dois últimos algarismos formam um número que é divisível por 4.

Exemplos: 200 é divisível por 4, porque 00 é divisível por 4;
3048 é divisível por 4, porque 48 é divisível por 4;
2094 não é divisível por 4, porque 94 não é divisível por 4 (faça o teste – 94 dividido por 4 é igual a 23 e deixa resto 2).

- **Por 5:** quando termina em 0 ou 5.

Exemplos: 200 é divisível por 5, porque termina em 0;
305 é divisível por 5, porque termina em 5;
12 não é divisível por 5, porque não termina em 0 nem em 5.

- **Por 9:** quando a soma dos seus algarismos é um número divisível por 9.

Exemplos: 198 é divisível por 9, porque 1 + 9 + 8 = 18 que é divisível por 9;

333 é divisível por 9, porque 3 + 3 + 3 = 9 que é divisível por 9;

204 não é divisível por 9, porque 2 + 0 + 4 = 6 que não é divisível por 9.

- **Por 10:** quando termina em 0;

Exemplos: 500 é divisível por 10, porque termina em 0;

95 não é divisível por 10, porque não termina em 0.

Existem também regras de divisibilidade por 7 e por 11. Porém, elas são tão complicadas que é preferível fazer a conta mesmo.

Direto do concurso

Questão 1 (FGV/PREFEITURA DE CUIABÁ/TÉCNICO EM ADMINISTRAÇÃO ESCOLAR/2015) Rogério cria galinhas para a produção de ovos e, certo dia, ele coletou 165 ovos. Arrumando esses ovos em caixas de uma dúzia, o número máximo de caixas completas que ele conseguiu foi:

a) 12.

b) 13.

c) 14.

d) 15.

e) 16.

Comentário

Letra b.

Uma rara questão que foi bem direta no conceito de divisão. Aproveitemos para treinar e eliminar quaisquer eventuais dúvidas sobre o assunto.

165	12
-12	13
45	
-36	
(9)	

Portanto, os 165 ovos são suficientes para encher 13 caixas e ainda restam 9 que ficarão em uma caixa que não ficará completa. Portanto, serão necessárias 14 caixas.

QUESTÃO 2 (IBFC/POLÍCIA CIENTÍFICA-PR/PERITO CRIMINAL/2017) Dentre os números descritos nas alternativas, o único que não é divisível por 9 é:

a) 1359.

b) 21744.

c) 8766.

d) 123456.

e) 23130.

Comentário

Letra d.

Para saber se um número é divisível por 9, devemos pegar a soma dos seus algarismos.

1359: 1 + 3 + 5 + 9 = 18 é divisível por 9.

21744: 2 + 1 + 7 + 4 + 4 = 18 é divisível por 9.

8766: 8 + 7 + 6 + 6 = 27 é divisível por 9.

123456: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 não é divisível por 9.

23130: 2 + 3 + 1 +3 + 0 = 9 é divisível por 9.

1.5. Potenciação

A potenciação a^b é uma operação que apresenta os seguintes termos:

- **Base:** é o número a;
- **Expoente:** é o b.

A potenciação consiste em multiplicar a base "a" por ela própria "b" vezes. Vejamos alguns exemplos:

Exemplos: $3^4 = 3.3.3.3 = 81$ (3 multiplicado por ele próprio 4 vezes);

$5^3 = 5.5.5 = 125$ (5 multiplicado por ele próprio 3 vezes);

$2^8 = 2.2.2.2.2.2.2.2 = 256$ (2 multiplicado por ele próprio 8 vezes).

A potenciação apresenta algumas propriedades importantes:

- **Produto de Potências de mesma base:** conserva-se a base e soma-se os expoentes;

Exemplo:

$2^{5+3} = 2^5.2^3$	$= (2.2.2.2.2).(2.2.2) = 32.8 = 256$ – de fato, já vimos que $2^{5+3} = 2^8$.

- **Divisão de Potências de mesma base:** conserva-se a base e subtraem-se os expoentes;

Exemplo:

$2^{5-3} = 2^5/2^3$	$= (2.2.2.2.2)/(2.2.2) = 32/8 = 4$ – de fato, $2^{5-3} = 2^2= 4$

- **Produto (ou divisão) de Potências de mesmo expoente:** conserva-se o índice e multiplica-se (ou divide-se) as bases. Vejamos:

Exemplo: $18^3/9^3 =(18/9)^3=2^3=8$

Facilitou bastante a conta, não?

- **Potência de Potência:** conserva-se a base e multiplica-se os expoentes;

Exemplo:

$(2^3)^2 = 2^{3.2} = 2^6 = 64$ – de fato, $2^3 = 8$ e $8^2 = 64$.

É muito comum, principalmente em informática, a notação da potência com uma seta. Essa notação é conhecida como notação de setas de Knuth. Quando não é possível escrever uma seta, utiliza-se, ainda, o circunflexo ^.

$$3 \uparrow 2 = 3\text{^}2 = 3^2 = 9$$

$$4 \uparrow 3 = 4^3 = 4^3 = 4.4.4 = 64$$

1.5.1. Potências de Números Negativos

Precisamos ter cuidado com potências de números negativos. Devemos usar o princípio de que (-) multiplicado por (-) dará sinal (+).

Dessa maneira, sempre que temos uma potência par de um número negativo, o resultado será positivo. Vejamos:

$$(-2)^4 = +(2)^4 = 16$$

Por outro lado, quando a potência for ímpar, o resultado será negativo. Como temos três sinais negativos, teremos (-).(-).(-) = (+).(-) = (-).

$$(-3)^3 = (-3).(-3).(-3) = -(3)^3 = 27$$

Sendo assim, lembre-se de:

1.5.2. Torres de Potência

Embora não seja muito comuns em questões de prova, é importante deixar claro que **a potenciação não segue a propriedade comutativa.**

Em outras palavras, em geral, $a^b \neq b^a$. Um dos raros casos que eu conheço de comutatividade nas potências é $2^4 = 4^2 = 16$.

Tenho, inclusive, um grande amigo e jamais me esqueci sua data de aniversário porque ele nasceu no dia 16/02 – olha só: 16 é exatamente o único número que eu conheço que é o resultado de uma potenciação comutativa que tem justamente base 2.

Porém, a regra geral é que a potenciação não comute. Por conta disso, é possível que apareçam as chamadas torres de potência que podem ser representadas pela notação de Knuth com duas setas para cima.

Quando temos $2 \uparrow\uparrow 3$, temos uma torre de potências de 2 elevado a 2 a elevado a 2 três vezes.

Vejamos alguns exemplos de torres de potência:

$$2 \uparrow\uparrow 3 = 2 \uparrow 2 \uparrow 2 = 2^{2^2} = 2^4 = 16$$

$$2 \uparrow\uparrow 4 = 2 \uparrow 2 \uparrow 2 \uparrow 2 = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16} = 65536.$$

$$3 \uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow 3 \uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7.625.597.484.987.$$

Perceba que as torres de potência crescem muito rapidamente. Mesmo com números bem pequenos, nós chegamos a resultados extremamente elevados.

É importante que você note a diferença entre uma torre de potências e uma potência de potência. Vejamos:

$$(2^2)^2 = 2^{2.2} = 2^4 = 16$$

$$((2^2)^2)^2 = 2^{2.2.2} = 2^8 = 256.$$

$$(3^3)^3 = 3^{3.3} = 3^9 = 19.683$$

1.6. Radiciação

Corresponde à operação inversa da potenciação. Vejamos:

$\sqrt[3]{64} = 4$, porque $4^3 = 64$.
$\sqrt[5]{32} = 2$, porque $2^5 = 32$.
$\sqrt[3]{125} = 5$, porque $5^3 = 125$.

Quando o expoente do radical não está expresso, subentende-se que é igual a 2, a famosa raiz quadrada. Vejamos:

$\sqrt{36} = 6$, porque $6^2 = 36$.

A exemplo da potência, a radiciação tem algumas propriedades. Vejamos:

- **Conversão de Radiciação em Potência:** a radiciação corresponde a uma potência em que o expoente é o inverso do índice.

Exemplos: $\sqrt[3]{64} = 64^{1/3}$. $\sqrt{36} = 36^{1/2}$

- **Produto de Raízes de Mesmo Índice:** é possível conservar os índices e multiplicar (ou dividir) os radicandos. Vejamos:

Exemplos: $\sqrt{8}.\sqrt{2} = \sqrt{8.2} = \sqrt{16} = 4.$

$\sqrt{250}\sqrt{10} = \sqrt{250.10} = \sqrt{2500} = 50$.

- **Radiciação de Potência:** sempre que temos uma raiz de potência, podemos dividir o expoente pelo índice.

Exemplos: $\sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{2^{3.2}} = 2^{\frac{3.2}{3}} = 2^2 = 4.$

$$\sqrt[3]{125^2} = \sqrt[3]{(5^3)^2} = \sqrt[3]{5^{3.2}} = 5^{\frac{3.2}{3}} = 5^2 = 25$$

1.6.1. Radiciação em Números Negativos

A radiciação somente se aplica para números negativos quando o índice for ímpar.

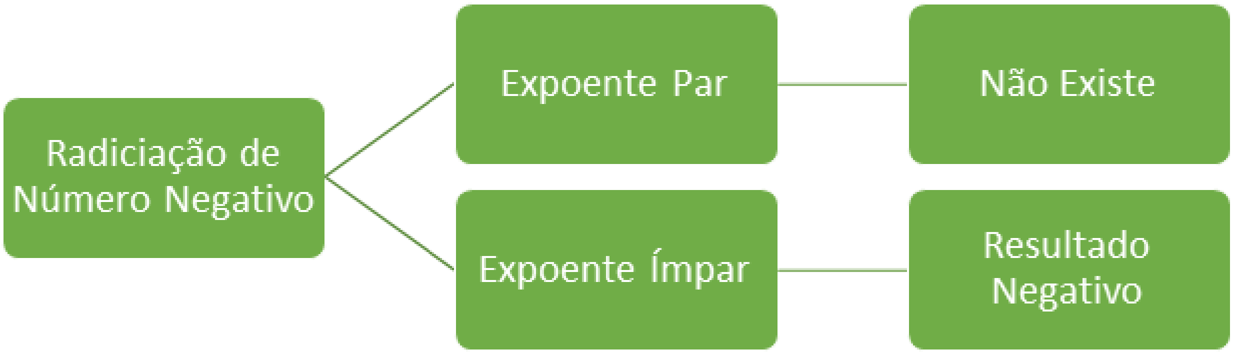
A raiz quadrada – índice par – de um número negativo **não será um número real**, porque o quadrado de qualquer número real será positivo.

$$\sqrt{-4}\ não\ é\ real$$

Por outro lado, podemos falar em uma raiz cúbica: índice ímpar.

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \leftrightarrow (-2)^3 = -8$$

A raiz cúbica de -8 é igual a -2, porque (-2)³ = -8. Não há problemas nisso.



1.6.2. Como Extrair Raízes Quadradas

A forma mais comum de extrair raízes quadradas é por meio da fatoração que será estudada mais adiante.

No entanto, existe um algoritmo que pode facilitar muito a sua vida para obter raízes exatas.

Para entender melhor esse algoritmo, é interessante que você saiba os quadrados dos números até 10. É preciso atenção especial ao algarismo das dezenas dos respectivos quadrados, por isso colocamos em negrito.

Dica: perceba que, quando a soma de dois números é igual a 10, o quadrado deles termina no mesmo algarismo das unidades. Por exemplo, 1 + 9 = 10; 2 + 8 = 10; 3 + 7 = 10.

$0^2 = \mathbf{0}$	
$1^2 = \mathbf{1}$	$9^2 = 8\mathbf{1}$
$2^2 = \mathbf{4}$	$8^2 = 6\mathbf{4}$
$3^2 = \mathbf{9}$	$7^2 = 4\mathbf{9}$
$4^2 = 1\mathbf{6}$	$6^2 = 3\mathbf{6}$
$5^2 = 2\mathbf{5}$	

Não é preciso decorar, pois essa lista pode ser rapidamente obtida durante uma prova. Agora, vamos ao nosso algoritmo.

Por exemplo, suponha que você quer calcular a raiz quadrada de 9216.

Você pode fazê-lo seguindo os passos:

- **Primeiro Passo:** separe o número de duas em duas unidades começando da direita.

92.16

É importante entender o que queremos dizer com começando da direita. Vejamos outro exemplo para esclarecer, por exemplo, 10.816.

1.08.16

- **Segundo Passo:** pegue o primeiro grupo à esquerda, no caso o "92", e tome o número cujo quadrado ainda não excede 92.

Nesse caso, $9^2 = 81$. Por isso, tomaremos 9. Agora, calculamos $9^2 = 81$ e subtraímos de 92.

92	.16	9
-81		
11	.16	

- **Terceiro Passo:** dobramos o número que está no resultado.

92	.16	9
-81		
11	.16	18

- **Quarto Passo:** procurarmos um número x tal que possa ser colocado após o 18, de modo que o produto (18x).x seja igual a 1116.

92	.16	9
-81		
11	.16	18x .x

Quando queremos calcular uma raiz inversa, podemos nos lembrar de que somente 4^2 e 6^2 terminam em 6. Portanto, só temos duas tentativas a fazer.

Note que 184.4 = 736 e que 186.6 = 1116. Com isso, o 6 será promovido a raiz.

92	.16	96
-81		
11	.16	186 .6
-11	.16	1116
	(0)	

Assim, temos que a raiz quadrada de 9216 é igual a 96. De fato, você pode ver que $96^2 = 9216$.

1.7. Expressões Numéricas

Torço para que um dia esse assunto seja eliminado da Matemática. Até hoje, eu não conheço nada que faça as pessoas mais errarem contas.

As expressões numéricas são da forma:

$$2 + 3.\{1 + 4.[3 + 2.(1 + 3)^2 + 4.(3 - 2)^3]\}$$

As questões especificamente de expressões numéricas são muito simples, porém você precisa tomar muito cuidado quando uma expressão desse tipo aparecer no meio da resolução de uma questão de outro assunto. Tudo bem.

Por hora, tudo o que você precisa saber é que há uma ordem para fazer as contas:

- Parênteses;
- Colchetes;
- Chaves;
- Potências e Radicais;
- Multiplicações e Divisões;
- Somas e Subtrações.

Vejamos a expressão que fornecemos no exemplo. Comecemos pelos parênteses.

$$2 + 3.\{1 + 4.[3 + 2.(1 + 3)^2 + 4.(3 - 2)^3]\} =$$

$$2 + 3.\{1 + 4.[3 + 2.(4)^2 + 4.(1)^3]\} =$$

$$2 + 3.\{1 + 4.[3 + 2.16 + 4.1]\} =$$

Veja que, dentro dos colchetes, há operações de multiplicação e soma. Precisamos fazer primeiro a operação de multiplicação.

$$2 + 3.\{1 + 4.[3 + 32 + 4]\} =$$

Agora, façamos a soma dentro dos colchetes.

$$2 + 3.\{1 + 4.[39]\} =$$

$$2 + 3.\{1 + 156\} =$$

$$2 + 3.157 = 2 + 471 = 473$$

É só tomar cuidado que você não vai se perder.

1.7.1. Forma Polonesa Inversa (RPN)

Agora, eu gostaria de te apresentar um assunto que não vai cair na sua prova, porém pode ser muito útil para agilizar os seus estudos. Chama-se a Forma Polonesa Inversa (RPN).

A RPN é uma forma de fazer contas que elimina a necessidade de parênteses, colchetes e chaves. Com isso, torna-se praticamente impossível você errar contas. Além disso, fica muito mais rápido. No começo, será um pouco estranho, mas isso vai te ajudar com o tempo.

Para usar a RPN, você precisa ter uma calculadora científica. Por isso, caso você utilize uma calculadora comum, é provável que ela não dê suporte a essa forma.

Mas, caso você tenha uma calculadora científica, vale muito a pena aprender. Tomemos como exemplo essa expressão.

$$2 + 3.\{1 + 4.[3 + 2.(1 + 3)^2 + 4.(3 - 2)^3]\} =$$

Se você fosse resolvê-la com uma calculadora científica usando a forma normal, você teria que digitar tudo isso no visor – e provavelmente cometeria um erro. Se fosse resolvê-la com uma calculadora comum, isso te daria bastante trabalho, como o que fizemos nesse material.

A forma normal consiste em escrever:

NÚMERO 1;

OPERAÇÃO;

NÚMERO 2;

ENTER.

Exemplo: digitamos "2 + 2 = "e obtemos 4.

Porém, na RPN, a ideia é que você vai escrever:

NÚMERO 1;

NÚMERO 2;

OPERAÇÃO.

Exemplo: digitamos "2 2 +" e obtemos 4.

Pode parecer estranho à primeira vista, porém, após você se acostumar e utilizar a notação RPN, você verá que ela tem uma grande vantagem: elimina o uso de parênteses.

Os parênteses são as principais fontes de erros quando digitamos fórmulas numa calculadora ou em um programa de computador. Por isso, a RPN facilita muito a sua vida ao escrever uma conta ou fórmula muito complicada.

Portanto, quando você for adquirir uma nova calculadora, vale muito a pena procurar uma que tenha a função RPN.

2. Números Inteiros

O conjunto de números inteiros é um dos mais importantes. Antes de começar a nos aprofundar sobre ele, devemos estudar os números naturais.

2.1. Números Naturais

São os números utilizados para **contar.**

Essa é a principal dica para você entender quem são eles. Pense que você vai contar o número de alunos em uma sala de aula.

Você pode contar 1 aluno, 2 alunos, 3 alunos, 4 alunos. Mas não pode contar 4,5 alunos – não existe metade de um aluno, certo?

Por isso, o conjunto de números naturais é formado pelos números:

$$\mathbb{N} = \{1,2,3, \ldots, \}$$

Obs.: Existe uma séria discussão na Matemática se o número 0 pertence ou não ao conjunto de números naturais. Eu me alinho com a corrente que defende que 0 não é um número natural, porque não se pode contar com ele. Porém, eu acho muito difícil que uma questão de prova exija algum tipo de posicionamento de sua parte quanto a essa discussão.

Matematicamente, a definição de números naturais é bastante sofisticada. Porém, aqui, contaremos com o seu bom senso para saber o que é um número natural e o que não é.

Basicamente, são os números que não possuem nenhuma casa depois da vírgula.

Tabela 1: Números Naturais e Números não Naturais

São Números Naturais	Não são Números Naturais
3	3,2
1.098	1,098
1.048.753	1.048,753

2.2. Propriedades do Conjunto de Números Naturais

O conjunto de números naturais é bem definido em relação às operações de adição e multiplicação. Ou seja, a soma de dois números naturais é sempre um número natural e o produto de dois números naturais é sempre natural.

Em Matemática, costuma-se dizer que o Conjunto dos Números Naturais **é fechado quanto à adição e quanto à multiplicação.**

Vejamos alguns exemplos:

1	+ 1	= 2
Natural	Natural	Natural

37	+24	=61
Natural	Natural	Natural

12	. 3	= 36
Natural	Natural	Natural

Porém, o mesmo não se pode dizer em relação às operações de subtração e divisão.

A subtração de dois números naturais "a – b" só será outro natural quando a for maior que b. Vejamos alguns exemplos:

2	- 1	= 1
Natural	Natural	Natural
24	-37	=-13
Natural	Natural	Não é natural

2.3. Números Inteiros

O conjunto dos números inteiros é mais amplo do que o conjunto dos números naturais, incluindo também o zero e os números negativos.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \}$$

Alguns subconjuntos importantes dos números inteiros são:

Inteiros positivos: são os inteiros maiores que zero;

$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \dots, \}$$

Convém destacar que zero não possui sinal, portanto não pode ser enquadrado como um número positivo ou negativo.

Na notação, o * significa que excluímos o zero do conjunto de números inteiros.

Inteiros não negativos: são os inteiros maiores ou iguais a zero;

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots, \}$$

Não confunda. A notação Z_+ inclui o {0}, por isso não podemos chamar esse conjunto de inteiros positivos.

Acredito que muito dificilmente uma questão de prova te trará uma pegadinha desse gênero, mas saiba que Z_+ se refere aos inteiros não negativos, o que é diferente de inteiros positivos.

- **Inteiros negativos:** são os inteiros menores que zero;

$$\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots, -3, -2 - 1\}$$

- **Inteiros não positivos:** são os inteiros menores ou iguais a zero;

$$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -3, -2, -1{,}0\}$$

Mais uma vez, tome cuidado com a confusão, pois Z_- se refere aos **inteiros não positivos,** portanto inclui o zero. Quando queremos excluir o {0} do nosso conjunto, devemos ser explícitos e assinalar o asterisco.

- **Inteiros não nulos:** exclui o zero, representado por um asterisco;

$$\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1{,}1{,}2{,}3, \ldots,\}$$

3. Números Primos

Um número é primo quando só é divisível por 1 e por ele próprio.

Como exemplos, temos o número 2. 2 é divisível apenas por 1 e por 2.

É muito importante memorizar os primeiros números primos, pois eles são muito úteis para a simplificação de frações. Mais adiante, veremos como isso funcionará.

Mas, por hora, vamos aprender um algoritmo bem simplificado para obter todos os números primos até 100. Esse procedimento já foi cobrado em prova, por isso estamos mostrando nesse material.

Para isso, sigamos alguns passos:

- Escreva todos os números de 1 a 100 na forma de uma tabela 10x10;

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Corte o 1 e circule o 2:

~~1~~	**2**	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Corte todos os números da tabela de 2 em 2.

Ou seja, 2 + 2 = 4 (corte o 4), 4 + 2= 6 (corte o 6). E, assim, por diante.

~~1~~	**2**	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

- Circule o próximo elemento que não foi cortado. No caso, o 3. E corte todos os elementos de 3 em 3.

Nesse caso, 3 + 3 = 6 (já foi cortado). Então, 6 +3 = 9 (corte o 9). E, assim, por diante.

~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

- Repita o procedimento. Ou seja, circule o próximo elemento que não foi cortado. No caso, o 5. E corte todos os elementos de 5 em 5.

Nesse caso, 5 + 5 = 10 (já foi cortado). Então, 10 + 5 = 15 (já foi cortado). 15 + 5 = 20 (já foi cortado). 20 + 5 = 25 (corte o 25). E, assim, por diante.

Fique tranquilo. Esse procedimento só precisa ser feito com os números da primeira linha.

~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

- Repita o procedimento. Ou seja, circule o próximo elemento que não foi cortado. No caso, o 7. E corte todos os elementos de 7 em 7.

Perceba que fica mais difícil cortar.

7 + 7 = 14 (já cortado)

14 + 7 = 21 (já cortado)

21 + 7 = 28 (já cortado)

28 + 7 = 35 (já cortado)

35 + 7 = 42 (já cortado)

42 + 7 = 49 (corte o 49)

49 + 7 = 56 (já cortado)

56 + 7 = 63 (já cortado)

63 + 7 = 70 (já cortado)

70 + 7 = 77 (corte o 77, ufa!)

77 + 7 = 84 (já cortado)

84 + 7 = 91 (corte o 91)

91 + 7 = 98 (já cortado)

~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

- Agora, todos os números que ainda não foram cortados são primos.

~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	**67**	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Portanto, anotemos todos os números primos até 100:

$$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97\}$$

3.1. Como reconhecer se um número é primo?

É possível que uma questão nos pergunte se determinado número é primo ou não. Para isso, devemos nos recordar da definição do que é um número primo.

Obs.: **Def.:** Um número é primo quando é divisível apenas pela unidade e por ele próprio.

Portanto, uma maneira simples de saber se um número qualquer é primo é testando os números primos anteriores a ele.

Além disso, não precisamos testar um grande número de primos – podemos parar na raiz quadrada daquele número.

167 é primo?

Vejamos. $13^2 = 169 > 167$. Por isso, só precisamos testar os primos até 13.

Agora, só precisamos testar os primos até 13. No caso, 2, 3, 5, 7 e 11.

167 não é divisível por 2, porque não é par.

Não é divisível por 3, porque a soma 1 + 6 + 7 = 14 que não é divisível por 3.

Não é divisível por 5, porque não termina nem em 0 nem em 5.

Não é divisível por 7. Bom, nesse caso, precisamos fazer a conta.

16’7	7		16’7	7
-14	2		-14	23
2		Desce o 7	27	
			-21	
			(6)	

Olha só, 167 dividido por 7 é igual a 23 e deixa resto 6. Como existe resto, 167 não é divisível por 7.

Por fim, tentemos dividir 167 por 1.

16’7	11		16’7	7
-11	1		-11	15
5		Desce o 7	57	
			-55	
			(2)	

Olha só, 167 dividido por 11 é igual a 15 e deixa resto 2.

Como 167 não é divisível por nenhum dos primos anteriores, temos que 167 é também um número primo.

3.2. Decomposição em Fatores Primos

A grande utilidade do conceito de números primos é que **qualquer número natural** pode ser decomposto em fatores primos, ou seja, um número qualquer N pode ser decomposto da seguinte forma:

$$N = p_1^{n_1} . p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$

Os termos p_1, p_2, ..., p_k são os chamados **fatores primos.** Ou seja, são os números primos que dividem (ou fatoram) n.

Esse procedimento é chamado de **fatoração.**

A seguir, apresentaremos o procedimento para determinar a fatoração de um número N qualquer.

Para isso, precisamos saber, pelo menos, os primeiros números primos. Repetiremos os primos até 100:

$$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,45,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97\}$$

Por exemplo, vamos fator o número 360.

- Tente dividir 360 pelo primeiro primo (no caso, 2). Faça a divisão por 2 enquanto for possível e vá anotando o número 2 na coluna à direta sempre que for dividindo. Vejamos:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & \end{array}$$

Como 180 é divisível por 2, continue o procedimento.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & \end{array}$$

Como 90 é divisível por 2, continue dividindo por 2.

360	2
180	2
90	2
45	

Agora, 45 não é divisível por 2, por isso vamos ao próximo passo.

- Divida pelo próximo primo. Faça isso sucessivamente até chegar a 1. Vejamos: 45 é divisível por 3 (dá 15). 15 é divisível por 3 e resulta em 5. 5 é primo, então só pode ser divisível por 5.

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

- Anote os números da coluna à direita. Os expoentes correspondem ao número de vezes que o primo apareceu na fatoração. Vejamos:

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	$=2^3.3^2.5$

Dessa maneira, chegamos à fatoração do número 360.

$$360 = 2^3.3^2.5$$

Essa fatoração é importantíssima para obter o MMC e o MDC, que são, certamente, o assunto mais importante e cobrado dessa parte da matéria.

3.2.1. Conjunto de Divisores

O conjunto de divisores de um número qualquer pode ser obtido também a partir de sua decomposição em fatores primos.

Vejamos o conjunto de divisores de 72. Primeiramente, façamos sua fatoração:

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	$=2^3.3^2$

Agora, para obter o conjunto de divisores, devemos construir uma pequena tabela em que aparecem os primos 2 e 3 até suas potências obtidas na fatoração, começando de 0. Ou seja:

2	**3**
2^0	3^0
2^1	3^1
2^2	3^2
2^3	

Agora, façamos uma atualização da tabela, ou seja, calcularemos os valores dessas potências. Devemos lembrar que qualquer número elevado a zero é igual a 1.

2	**3**
1	1
2	3
4	9
8	

Basta fazer todas as combinações. Podemos começar da coluna à esquerda pelo 1. Vejamos:

2		**3**	**Divisores**
1	->	1	= 1.1 = 1
2	->	3	= 1.3 = 3
4	->	9	= 1.9 = 9
8			

Todos os números obtidos na coluna da direita são divisores de 72. Para encontrar os demais, basta continuar com as demais linhas da coluna à esquerda. Por exemplo, o 2:

2		**3**	**Divisores**
1	->	1	= 2.1 = 2
2	->	3	= 2.3 = 6
4	->	9	= 2.9 = 18
8			

Agora, façamos o mesmo para o 4:

2		**3**	**Divisores**
1	->	1	= 4.1 = 4
2	->	3	= 4.3 = 12
4	->	9	= 4.9 = 36
8			

E, por fim, para o 8:

2		**3**	**Divisores**
1	->	1	= 8.1 = 8
2	->	3	= 8.3 = 24
4	->	9	= 8.9 = 72
8			

Pronto, basta anotar todos os números encontrados. De preferência, em ordem crescente:

$$D_{72} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$$

Uma pergunta importante em termos de questões de provas é o tamanho desse conjunto. Ou seja, quantos divisores tem um número natural qualquer?

Para isso, pensemos no 72. Observe que a tabela foi construída da seguinte maneira. Vimos que $72 = 2^3.3^2$. E, por isso, construímos uma coluna com 4 linhas para 2 (desde 2^0 a 2^3) e uma coluna 3 linhas para 3 (desde 3^0 a 3^2).

Vejamos a seguir:

2	**3**
1	1
2	3
4	9
8	

Para encontrar um divisor qualquer de 72, podemos pegar qualquer uma das 4 linhas da coluna à esquerda e qualquer das 3 linhas da coluna da direita. Por isso, temos 4.3 = 12 possibilidades.

Podemos generalizar essa conta da seguinte maneira.

Seja N e sua decomposição em fatores primos:

$$N = p_1^{n_1} . p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$$

O número de divisores de N é dado por:

$$\frac{n_1 + 1}{p_1} \times \frac{n_2 + 1}{p_2} \times \cdots \frac{n_k + 1}{p_k}$$

A demonstração dessa fórmula requer o estudo de Análise Combinatória.

Para saber o número de divisores de N, basta multiplicar:

$$\#D = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots (n_k + 1)$$

Ou seja, basta multiplicar todos os expoentes da decomposição em fatores primos somados a 1.

Já vimos que essa fórmula funciona para 72. Podemos contar 12 divisores para 72, que estão expressos a seguir.

$$D_{72} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$$

Porém, poderíamos ter calculado a quantidade de divisores da seguinte maneira:

$$72 = 2^3 . 3^2 \therefore \#D_{72} = (3 + 1).(2 + 1) = 4.3 = 12$$

Vejamos mais alguns exemplos.

Quantos divisores possui o número 360?

Façamos a decomposição de 360 em fatores primos.

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	$=2^3.3^2.5$

Agora, temos que o número de divisores de 360 é:

$$\#D_{360} = (3+1).(2+1)(1+1) = 4.3.2 = 24$$

Pela quantidade de divisores de 360, não me parece razoável que uma questão de prova exija que você obtenha todos os divisores desse número.

3.2.2. Divisores Próprios

O conjunto de divisores próprio de um número qualquer corresponde a todos os seus divisores, exceto ele próprio.

Por exemplo, os divisores próprios de 72 são:

$$D_{72}^{*} = \{1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36\}$$

Ou seja, são os mesmos divisores, porém excluímos o número 72.

Com base no conceito de divisores próprios, temos dois conceitos de números bastante místicos: os números perfeitos e os números amigos.

Encare a leitura sobre esses tópicos como uma curiosidade – a Matemática é linda e pode ser bastante mística.

- **Números perfeitos:** quando a soma dos seus divisores próprios é igual ao próprio número.

Vejamos como exemplo o número 28.

28	2
14	2
7	7
1	$=2^2.7$

Vimos a decomposição em fatores primos de $28 = 2^2.7$. Portanto, podemos obter o seu conjunto de divisores próprios.

2	**7**
1	1
2	7
4	

Façamos agora as combinações possíveis. Mas, por questão de simplicidade, façamos o procedimento começando pela coluna do 7, começando pelo 1.

Divisores	**2**		**7**
=1.1 = 1	1	<-	**1**
=2.1 = 2	2	<-	7
=4.1 = 4	4	< -	

E, agora, vamos ao 7.

Divisores	**2**		**7**
=1.7 = 7	1	<-	1
=2.7 = 14	2	<-	**7**
=4.7 = 28	4	< -	

Portanto, o conjunto de divisores de 28 é:

$$D_{28} = \{1,2,4,7,14,28\}$$

Já o conjunto de divisores próprios é:

$$D_{28}^{*} = \{1,2,4,7,14\}$$

Portanto, a soma dos divisores próprios de 28 é:

$$S = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$$

Logo, 28 é um número perfeito.

- **Números amigos:** quando a soma dos divisores próprios de um número é igual ao outro.

Dizemos que 284 e 220 são números amigos. Vejamos por quê. Primeiramente, faremos as suas fatorações em fatores primos.

284	2
142	2
71	71
1	$=2^2.71$

220	2
110	2
55	5
11	11
1	$=2^2.5.11$

Agora, vamos obter os divisores próprios de cada um desses números, começando por 284.

2	**71**
1	1
2	71
4	

Façamos, agora, as combinações possíveis. Mas, por questão de simplicidade, façamos o procedimento começando pela coluna do 71, começando pelo 1.

Divisores	**2**		**71**
=1.1 = 1	1	<-	**1**
=2.1 = 2	2	<-	71
=4.1 = 4	4	< -	

E, agora, vamos ao 71.

Divisores	**2**		**71**
=1.71 = 71	1	<-	1
=2.71 = 142	2	<-	**71**
=4.71 = 284	4	< -	

Portanto, o conjunto de divisores de 284 é:

$$D_{28} = \{1,2,4,71,142,284\}$$

Portanto, o conjunto de divisores próprios será:

$$D_{28}^{*} = \{1,2,4,71,142\}$$

E a soma dos divisores próprios será:

$$S = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$$

Olha só, a soma dos divisores próprios de 284 é igual a 220. E o que podemos dizer da soma dos divisores próprios de 220?

Vamos nos lembrar de que a sua decomposição em fatores primos é $220 = 2^2.5.11$.

2	**5**	**11**
1	1	1
2	5	11
4		

Pegamos a primeira linha da coluna do 2 e do 5.

2	**5**		**11**	**Divisores**
1	**1**	->	1	= 1.1.1 =1
2	5	->	11	= 1.1.11 = 11
4				

Agora, vamos variando. Pegamos a primeira linha da coluna do 2 (1) e a segunda linha do 5. E, assim, por diante.

2	**5**		**11**	**Divisores**
1	1	->	1	= 1.5.1 =5
2	**5**	->	11	= 1.5.11 = 55
4				

2	**5**		**11**	**Divisores**
1	**1**	->	1	= 2.1.1 = 2
2	5	->	11	= 2.1.11 = 22
4				

2	**5**		**11**	**Divisores**
1	1	->	1	= 2.5.1 = 10
2	**5**	->	11	= 2.5.11 = 110
4				

2	**5**		**11**	**Divisores**
1	**1**	->	1	= 4.1.1 = 4
2	5	->	11	= 4.1.11 = 44
4				

2	**5**		**11**	**Divisores**
1	1	->	1	= 4.5.1 = 20
2	**5**	->	11	= 4.5.11 = 220
4				

Anotemos, portanto, os divisores de 220. Como queremos somente a soma, não vamos nos importar com a ordem:

$$D_{220} = \{1, 11, 5, 55, 2, 22, 10\ , 110, 4, 44, 20, 220\}$$

O conjunto dos divisores próprios exclui o 220:

$$D_{220}^{*} = \{1, 11, 5, 55, 2, 22, 10\ , 110, 4, 44, 20\}$$

Agora, tomemos a soma:

$$S = 1 + 11 + 5 + 55 + 2 + 22 + 10 + 110 + 4 + 44 + 20 = 284$$

Olha só, que coisa interessante, a soma dos divisores próprios de 284 é igual a 220. E a soma dos divisores próprios de 220 é igual a 284. Por isso, eles são números amigos.

Desde a época da Grécia Antiga, existia muita magia em torno desses números, representando papel importante na magia, feitiçaria, na astrologia e na determinação de horóscopos.

Esse assunto é mais aprofundado em temas de Numerologia.

3.3. MMC E MDC

MMC e MDC são as siglas, respectivamente, para Mínimo Múltiplo Comum e Máximo Divisor Comum. Então, não confunda.

Atenção!

- **MMC:** Mínimo Múltiplo Comum.
- **MDC:** Máximo Divisor Comum.

O MMC e o MDC são muito úteis em questões. Existem várias formas de o enunciado cobrar MMC e MDC e você precisará entender pelo contexto da questão. Faremos vários exercícios sobre isso para que você fique afiado.

Vejamos como obter o MMC e o MDC entre dois números. Existem duas formas:

- **Fatorações separadas:** por exemplo, o MMC e o MDC entre 72 e 90.

72	2		90	2
36	2		45	3
18	2		15	3
9	3		5	5
3	3		1	$=2.3^2.5$
1	$=2^3.3^2$			

O MMC é dado pelos máximos expoentes encontrados, já o MDC é dado pelos mínimos expoentes encontrados para cada fator primo.

Observe que o máximo expoente do 2 é 2^3 em 72 e o menor é 2^1 em 90. Para o 5, o maior expoente é 5^1 (em 90) e o menor é 5^0 (pois o 5 não aparece na fatoração de 72).

Sendo assim, temos:

$$MMC(72,90) = 2^3.3^2.5 = 8.9.5 = 360$$

$$MDC(72,90) = 2^1.3^2.5^0 = 2.9.1 = 18$$

A vantagem de fazer a fatoração separada é que obtemos o MMC e o MDC ao mesmo tempo.

- **Fatoração Conjunta:** Nesse caso, vamos fatorar os dois números ao mesmo tempo.

Para obter o MMC, fazemos as divisões sempre que for possível dividir, pelo menos, um dos dois números.

Vejamos:

72, 90	2
36, 45	

Observe que 36 é divisível por 2, por isso continuaremos a divisão por esse fator primo. Como 45 não é divisível por 2, não faremos nenhuma divisão desse número.

72, 90	2
36, 45	2
18, 45	2
9, 45	3
3, 15	3
1, 5	5
1, 1	$=2^3.3^2.5$

Chegamos, portanto, ao MMC que é igual a $2^3.3^2.5 = 360$ como já havíamos encontrado anteriormente.

Para obter o MDC, devemos fazer a fatoração somente enquanto todos os números forem divisíveis pelo fator primo. Vejamos:

72, 90	2
36, 45	

Note que 36 é divisível por 2, mas 45 não. Como estamos obtendo o MDC, não continuaremos a fatoração por 2. Passemos para o próximo primo, no caso, 3.

72, 90	2
36, 45	3
12, 15	3
4, 5	

Observe que não é possível mais fazer a fatoração, porque não existe nenhum fator primo em comum entre 4 e 5. Ou seja, não podemos mais fatorar por 3, porque nem 4 nem 5 são divisíveis por 3. Também não podemos fatorar por 5, porque 4 não é divisível por 5.

Por isso, encerramos aqui nossa fatoração e já encontramos o MDC.

72, 90	2
36, 45	3
12, 15	3
4, 5	$=2.3^2$

$$MDC = 2.3^2 = 2.9 = 18$$

Um fato interessante que precisa ser notado é que os números que sobraram na decomposição fatorial conjunta de 72 e 90 podem ser multiplicados ao MDC e encontraremos exatamente o MMC.

$$MMC = 18.4.5 = 18.20 = 360$$

Essa é uma relação interessante que pode ser útil em alguns casos quando você já sabe o MDC entre dois números.

3.3.1. Números Primos entre si

Dois números são primos entre si quando o MDC entre eles é igual a 1.

Por exemplo, 4 e 15 são primos entre si. Eles não possuem nenhum fator primo em comum. Note que:

$$4 = 2^2$$

$$15 = 3.5$$

Como 4 e 15 não possuem fatores primos em comum, o MDC entre eles é igual a 1. Observe que nenhum desses números é primo, porém eles são primos entre si.

Atenção!

Quando dizemos que dois números são primos entre si, isso não significa que nenhum deles seja primo.

Por exemplo, 4 e 15 são primos entre si, mas nenhum deles é primo.

Direto do concurso

Questão 3 (FGV/SEE-PE/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2016) O número de três algarismos: n = 68D é primo.

O algarismo D, das unidades, é:

a) 1.

b) 3.

c) 5.

d) 7.

e) 9.

Resolução

Letra b.

Uma boa quantidade de alternativas pode ser eliminada pelo uso de simples regras de divisibilidade.

Vejamos: o algarismo das unidades não poderia ser par, porque, nesse caso, o número seria divisível por 2.

Não pode ser 5, porque, nesse caso, o número seria divisível por 5.

Além disso, também não poderia ser 1 nem 7, pois tanto 681 (6+8+1 = 15) como 687 (1+8+7 = 21) são divisíveis por 3.

Resta-nos, portanto, testar os números 683 e 689.

A raiz quadrada de 689 é inferior a 27, pois $27^2 = 729 > 689$. Portanto, só precisamos testar os primos até 27; no caso, 23 é o maior primo. Lembremos dos primos até 23: {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23}.

Já vimos que nem 683 nem 689 são divisíveis por 2, por 3 nem por 5.

Tentemos por 7. Nenhum dos números é divisível por 7.

Tentemos por 11. Nenhum dos números é divisível por 11.

Tentemos por 13. Opa! 689 dividido por 13 é igual a 53.

Sendo assim, 689 não é primo. Resta-nos, portanto, marcar 683.

Podemos continuar as divisões por 17, 19 e 23 para descobrir que realmente 683 é primo, pois não é divisível por nenhum desses números primos.

QUESTÃO 4 (VUNESP/PREFEITURA DE MARÍLIA-SP/AUXILIAR DE ESCRITA/2017) José estuda japonês a cada 4 dias e estuda francês a cada 6 dias. No dia 20 de outubro de 2017, ele estudou essas duas línguas. Desse dia até o último dia do ano de 2017, o número de vezes que José terá estudado, no mesmo dia, francês e japonês, incluindo o dia 20 de outubro, é

a) 5.

b) 6.

c) 7.

d) 8.

e) 9.

Resolução

Letra c.

José estuda japonês a cada 4 dias, ou seja, nos múltiplos de quatro dias. Por exemplo, se ele estudou no dia 20 de outubro de 2017, ele estudará novamente nos dias 24 e 28 de outubro.

Note que José estudará japonês em um determinado dia quando a distância desse dia ao dia 20 de outubro de 2017 for um múltiplo de 4 dias. Ele estudará japonês 4 dias depois, 8 dias depois, 12 dias depois e, assim, por diante.

O mesmo pode se dizer a respeito do francês. José estudará francês a cada múltiplo de 6 dias, ou seja, estudará depois de 6 dias, 12 dias, 18 dias e, assim, por diante.

Sendo assim, os dias em que ele estudará ambas as línguas ocorrerão no mínimo múltiplo comum entre 4 e 6. Façamos essa conta:

4, 6	2
2,3	2
1,3	3
1,1	$=2^2.3=12$

Portanto, José estudará as duas línguas no mesmo dia a cada 12 dias. Podemos calcular, então, quantos dias faltam para o final do ano.

20/10 a 20/11: 31 dias

20/11 a 20/12: 30 dias

20/12 a 31/12: 11 dias

Portanto, passaram-se 72 dias. Basta dividir por 12 e teremos 6.

Sendo assim, assumindo que 0 será o dia 20 de outubro e que 72 será o dia 31 de dezembro, tem-se que José estudará as duas línguas nos dias: 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72. São 7 dias, portanto.

Questão 5 (CESPE/TJ-RR/AUXILIAR ADMINISTRATIVO/2012) Considere as seguintes definições:

I – os divisores próprios de um número inteiro positivo n são todos
os divisores inteiros positivos de n, exceto o próprio n;

II – um número n será perfeito se a soma de seus divisores próprios
for igual a n;

III – dois números serão números amigos se cada um deles for igual
à soma dos divisores próprios do outro.

Com base nessas definições, julgue os itens que seguem.

Se um número é maior que 1, então o conjunto dos seus divisores próprios tem, pelo menos, 2 elementos.

Resolução

Errado.

Os números primos possuem apenas dois divisores: a unidade e eles próprios. Porém, o próprio número não é considerando um divisor próprio. Portanto, os números primos possuem um único divisor próprio.

Questão 6 (CESPE/TJ-RR/AUXILIAR ADMINISTRATIVO/2012) Nenhum número primo é perfeito.

Comentário

Certo.

O único divisor próprio de um número primo é a unidade. Portanto, a soma dos divisores próprios de qualquer número primo é igual. Como 1 não é um número primo, podemos dizer que nenhum número primo será perfeito.

Questão 7 (CESPE/TJ-RR/AUXILIAR ADMINISTRATIVO/2012) 28 é um número perfeito.

Comentário

Certo.

Já feita no material.

Questão 8 (CESPE/TJ-RR/AUXILIAR ADMINISTRATIVO/2012) 220 e 284 são números amigos.

Comentário

Certo.

Já feita no material.

Questão 9 (VUNESP/PM-SP/2017) Um escritório comprou uma caixa de envelopes e irá dividi-los em pequenos pacotes, cada um deles com o mesmo número de envelopes. Se em cada pacote forem colocados ou 8 envelopes, ou 9 envelopes, ou 12 envelopes, não restará envelope algum na caixa. Sabendo-se que, nessa caixa, há menos de 400 envelopes, então o número máximo de envelopes dessa caixa é:

a) 256.

b) 288.

c) 342.

d) 360.

e) 385.

Resolução

Letra d.

Se o número de envelopes pode ser guardado em pacotes de 8, 9 ou 12, isso significa que esse número de envelopes é um múltiplo comum a esses números.

Sendo assim, vamos extrair o mínimo múltiplo comum.

8, 9, 12	2
4, 9, 6	2
2, 9, 3	2
1, 9, 3	3
1, 3, 1	3
1, 1, 1	$= 2^3.3^2=72$

Sendo assim, o número de envelopes na caixa é um múltiplo de 72. A maneira mais fácil de obter o maior múltiplo de 72 inferior a 400 é simplesmente dividindo 400 por 72. Vejamos.

400	72
-360	5
(4)	

O quociente da divisão de 400 por 72 é 5. Portanto, 72.5 = 360 é a nossa resposta.

Nessa questão, é interessante observar que a Vunesp facilitou bastante a vida do candidato chutador. Você poderia ter testado as alternativas.

385 não é divisível por 8, claramente, afinal é ímpar.

Portanto, bastaria testar 360 e você poderia ver que realmente é divisível tanto por 8, como por 9 como por 12.

QUESTÃO 10 (VUNESP/SAP-SP/2009) Em um presídio há 400 detentos, sendo 240 no setor X e 160 no setor Y. Para realizar atividades na oficina de artes, o total de detentos foi dividido em grupos com o mesmo número de integrantes, sendo esse número o maior possível, sem deixar nenhum detento de fora e sem misturar os detentos dos dois setores. Dessa forma, foram formados:

a) 5 grupos.

b) 8 grupos.

c) 10 grupos.

d) 12 grupos.

e) 13 grupos.

Resolução

Letra a.

Os 240 detentos do setor X foram divididos em x grupos de N detentos. Já os 160 detentos do setor Y foram divididos em y grupos de N detentos.

Para que isso seja possível, N deverá ser um divisor comum entre 240 e 160. Obteremos, portanto, o MDC entre esses dois números.

240, 160	2
120, 80	2
60, 40	2
30, 20	2
15, 10	5
3, 2	$= 2^4.5 = 80$

Sendo assim, os detentos foram divididos em grupos de 80. Podemos calcular agora a quantidade de grupos.

$$x = \frac{240}{80} = 3 \quad y = \frac{160}{80} = 2 \therefore x + y = 3 + 2 = 5$$

Os detentos do grupo X foram divididos em 3 grupos, os detentos do grupo Y foram divididos em 2 grupos. Portanto, o total de grupos em que eles foram divididos é igual a 5 grupos.

Questão 11 (IBFC/EMBASA/ASSISTENTE DE LABORATÓRIO/2017) Um marceneiro possui duas barras de ferro, uma com 1,40 metros de comprimento e outra com 2,45 metros de comprimento. Ele pretende cortá-las em barras de tamanhos iguais, de modo que cada pedaço tenha a maior medida possível. Nessas circunstâncias, o total de pedaços que o marceneiro irá cortar, utilizando as duas de ferro, é:

a) 9.

b) 11.

c) 12.

d) 13.

Resolução

Letra b.

Essa questão nos mostra que o conceito de MDC pode se aplicar também a números racionais com certa criatividade.

Para isso, transformaremos os números fornecidos em números inteiros multiplicando por 100. Assim, temos 140 e 245. Vamos tomar o MDC entre esses dois números.

140, 245	5
28, 49	7
4, 7	= 5.7 = 35

Note que os termos que restaram correspondem exatamente aos números de pedaços de madeira que serão cortados (4 e 7). Portanto, o total de pedaços cortados será 4 + 7 = 11.

Questão 12 (VUNESP/MPE-SP/OFICIAL DE PROMOTORIA/2016) No aeroporto de uma pequena cidade chegam aviões de três companhias aéreas. Os aviões da companhia A chegam a cada 20 minutos, da companhia B a cada 30 minutos e da companhia C a cada 44 minutos. Em um domingo, às 7 horas, chegaram aviões das três companhias ao mesmo tempo, situação que voltará a se repetir, nesse mesmo dia, às:

a) 16h30 min.

b) 17h30 min.

c) 18h30 min.

d) 17 horas.

e) 18 horas.

Resolução

Letra e.

O avião A chegará depois de 20 minutos, depois de 40 minutos, depois de 60 minutos. Ou seja, a cada múltiplo de 20.

O avião B chegará depois 30 minutos, depois de 60 minutos, depois de 90 minutos. Ou seja, a cada múltiplo de 30.

Da mesma forma, o avião C chegará depois de 44 minutos, depois de 88 minutos, depois de 132 minutos. Ou seja, a cada múltiplo de 44 minutos.

Se todos os aviões chegaram juntos às 7 horas, eles chegarão juntos novamente no MMC entre 20, 30 e 44.

20, 30, 44	2
10, 15, 22	2
5, 15, 11	3
5, 5, 11	5
1, 1, 11	11
1, 1, 1	$= 2^2.3.5.11 = 660$

Ou seja, a situação se repetirá depois de 660 minutos, ou seja, depois de 11 horas. Sendo assim, se os aviões chegaram juntos a 7 horas, portanto, chegarão juntos novamente às 18 horas.

Questão 13 (VUNESP/UNESP/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO/2016) Sejam x e y dois números naturais tais que MDC(x,105) = 1, o MMC(x,21) = 168 e o MDC (x, y) = 4. Então, sabendo que y é maior que x, porém é menor que o dobro de x, pode-se afirmar que y é igual a:

a) 4.

b) 8.

c) 12.

d) 16.

e) 20.

Resolução

Letra c.

Essa é uma questão bem interessante para você pensar a respeito de alguns conceitos.

Quando a questão nos diz que MDC (x, 105) = 1, isso significa que x e 105 são primos entre si. Portanto, não possuem fatores primos comuns.

A decomposição de 105 em fatores primos é:

105	3
35	5
7	7
1	= 3.5.7

Portanto, os fatores primos de 105 são 3, 5 e 7.

O MMC entre x e 21 é igual a 168. Vejamos os fatores primos de 168.

168	2
84	2
42	2
21	$= 2^3.21$

Observe que x e 21 são primos entre si, porque 21 = 3.7 e x não pode ter nem 3 nem 7 como fatores primos.

Dessa maneira, concluímos que $x = 2^3 = 8$.

Agora, temos que o MDC entre x e y é igual a 4. Como y é maior que 8 e menor que 16 (pelo enunciado), podemos testar y = 12.

8, 12	2
4, 6	2

2, 3	$= 2^3.21$

De fato, o MDC entre 8 e 12 é igual a 4. Portanto, y = 12.

QUESTÃO 14 (MPE-GO/SECRETÁRIO AUXILIAR/2017) Três vigias fazem rondas noturnas em um determinado prédio, cada um em seu setor. O primeiro tem que acionar o relógio de controle do seu setor a cada 36 minutos; o segundo, a cada 24 minutos, e o terceiro, a cada 18 minutos. Dessa maneira, pode-se afirmar que eles acionam simultaneamente o relógio de controle de seus respectivos setores a cada:

a) 1h00 min.

b) 1h06 min.

c) 1h12 min.

d) 1h18 min.

e) 1h24 min.

Resolução

Letra c.

Cada vigia acionará o relógio de controle após um múltiplo do tempo em que eles programados para fazer.

Portanto, devemos tomar o MMC entre 18, 24 e 36.

18, 24, 36	2
9, 12, 18	2
9, 6, 9	2
9, 3, 9	3
3, 1, 3	3
1, 1, 1	$= 2^3.3^2 = 72$

Dessa Forma, eles acionarão o relógio de controle juntos a cada 72 minutos. Como o enunciado pediu o tempo em horas e minutos e como 1 hora é igual a 60 minutos, devemos dividir 72 por 60.

$$\begin{array}{r|l} 72 & 60 \\ \cline{2-2} -60 & 1 \\ (12) & \end{array}$$

O significado da divisão é que 72 dividido por 60 é capaz de completar 1 hora e deixa resto de 12 minutos. Sendo assim, 72 minutos equivalem a 1 hora completa e 12 minutos.

QUESTÃO 15 (VUNESP/CÂMARA DE SUMARÉ-SP/ESCRITURÁRIO/2017) Se, numa divisão, o divisor e o quociente são iguais, e o resto é 10, sendo esse resto o maior possível, então o dividendo é:

a) 131.

b) 121.

c) 120.

d) 110.

e) 101.

Resolução

Letra a.

Precisamos relembrar o significado do quociente e do resto em uma divisão.

$$\begin{array}{r|l} N & x \\ \cline{2-2} -x^2 & x \\ (10) & \end{array}$$

Temos que:

$$N = x^2 + 10$$

A questão nos informou que o resto da divisão é igual a 10 e que esse é o maior valor possível. Sendo assim, o divisor é igual a 11, porque o maior resto possível na divisão por 11 é exatamente igual a 10.

$$N = x^2 + 10 = 11^2 + 10 = 121 + 10 + 131$$

Questão 16 (VUNESP/CÂMARA DE SUMARÉ-SP/ESCRITURÁRIO/2017) No depósito de uma loja de doces, há uma caixa contendo n bombons. Para serem vendidos, devem ser repartidos em pacotes iguais, todos com a mesma quantidade de bombons. Com os bombons dessa caixa, podem ser feitos pacotes com 5, ou com 6, ou com 7 unidades cada um, e, nesses casos, não faltará nem sobrará nenhum bombom. Nessas condições, o menor valor que pode ser atribuído a n é

a) 280.

b) 265.

c) 245.

d) 230.

e) 210.

Resolução

Letra e.

Não estranhe a quantidade de questões da Vunesp nessa parte da matéria. Acontece que é justamente essa banca a que mais explora o assunto diretamente.

Outras bancas, como a FCC, a FGV e o Cespe, sempre que cobram o assunto de números primos e MMC ou MDC, geralmente o fazem no meio de questões de outros assuntos.

De qualquer modo, os bombons podem encher pacotes com 5, 6 ou 7. Portanto, o número de bombons na caixa é um múltiplo desses três números. Tomemos, então, o MMC entre eles.

O MMC é mais facilmente calculado se o aluno perceber que 5, 6 e 7 são todos primos entre si. Sendo assim, MMC = 5.6.7 = 210.

QUESTÃO 17 (FEPESE/CELESC/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO/2016) João trabalha 5 dias e folga 1, enquanto Maria trabalha 3 dias e folga 1. Se João e Maria folgam no mesmo dia, então quantos dias, no mínimo, passarão para que eles folguem no mesmo dia novamente?

a) 8.

b) 10.

c) 12.

d) 15.

e) 24.

Resolução

Letra c.

Questão interessante. Note que, se João folgar no dia 0, ele terá:

F	T	T	T	T	T	F
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Portanto, se ele folgar no dia 0, ele somente voltará a folgar 6 dias depois, porque ele precisará trabalhar 5 dias. Sendo assim, João folgará no dia 0, 6, 12, 18 e, assim, por diante.

Raciocínio análogo é válido para Maria. Se ela folga no dia 0, ela somente voltará a folgar 4 dias depois. Sendo assim, Maria folgará nos dias 0, 4, 8, 12 e, assim, por diante.

Precisamos, portanto, achar o mínimo múltiplo comum entre 6 e 4 que é 12.

4, 6	2
2, 3	2
1, 3	3
1, 1	$= 2^2.3 = 12$

Logo, eles somente voltarão a folgar juntos depois de 12 dias.

(CESPE/TRT16ª REGIÃO-MA/AUXILIAR JUDICIÁRIO/2005) Considere que foram gastos R$ 1.563,00 para abastecer com café e açúcar a copa de um escritório de advocacia. Sabendo-se que cada pacote de 500 g de café custou R$ 5,85 e que cada pacote de 5 kg de açúcar custou R$ 4,25 e ainda que as quantidades de pacotes de açúcar e de pacotes de café estão, nessa ordem, na proporção 2/3, julgue os itens seguintes.

QUESTÃO 18 O máximo divisor comum entre os números que representam as quantidades de pacotes de café e de açúcar é superior a 50.

Resolução

Certo.

Façamos um lote de café e açúcar como tendo 2 pacotes de açúcar e 3 pacotes de café que é exatamente a proporção citada no enunciado. O preço de um lote será:

$$L = 2.4{,}25 + 3.5{,}85 = 26{,}05$$

Como foram gastos R$1.563,00, temos que a quantidade de lotes comprados foi:

$$n = \frac{1563}{26{,}05} = 60$$

Observe que, como 2 e 3 são primos entre si, o MDC entre a quantidade de pacotes de café e de açúcar é exatamente igual a 60.

Como cada lote tem 2 pacotes de açúcar e 3 pacotes de café, então foram comprados 120 pacotes de açúcar e 180 pacotes de café.

O MDC entre 120 e 180 é exatamente igual a 60 > 50.

Questão 19 O mínimo múltiplo comum entre os números que representam as quantidades de pacotes de café e de açúcar é inferior a 300.

Resolução

Errado.

Já vimos que o MMC corresponde ao produto do MDC pelos termos que sobraram na decomposição, no caso exatamente 2 e 3. Portanto:

$$MMC = 60.2.3 = 360 > 300$$

Outra forma de calcular o MMC é diretamente.

120, 180	2
60, 90	2
30, 45	2

15, 45	3
5, 15	3
5, 5	5
1, 1	$=2^3.3^2.5 = 8.9.5 = 360$

De qualquer forma, o MMC obtido é igual a 360 que é superior a 300, ao contrário do que foi afirmado no enunciado.

3.4. Produtos Notáveis

Os produtos notáveis são fatorações muito úteis em questões. É mais fácil que eles sejam cobrados misturados em questões de outros assuntos.

- Quadrado da Soma: $\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

Demonstração:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$= a.a + a.b + b.a + b.b = a^2 + 2ab + b^2$$

- Quadrado da Diferença: $\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

Demonstração:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$

$$= a.a - a.b - b.a + b.b = a^2 - 2ab + b^2$$

- Soma pela diferença: $\boldsymbol{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

Demonstração:

$$(a+b)(a-b) = (a+b)(a-b)$$

$$= a.a - a.b + b.a - b.b = a^2 - b^2$$

- $$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 - (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{4ab}$$

Demonstração: Usando o produto notável anterior, temos que:

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = [(a + b) + (a - b)][(a + b) - (a - b)]$$

$$= [2a][2b] = 4ab$$

Produtos Notáveis

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

3.5. Teorema de Euclides

Perceba que os números primos vão ficando cada vez mais raros. Entre os 10 primeiros números naturais, temos 4 primos (2, 3, 5 e 7). Entre 90 e 100, só temos 1 primo (97).

Diante disso, é natural que as pessoas se questionem: será que o conjunto de números primos tem fim? Em outras palavras, será que existe o maior número primo?

A resposta é que não. Existem infinitos números primos. E isso pode ser demonstrado pelo conceito de redução ao absurdo.

Obs.: A redução ao absurdo consiste em supor que uma tese é verdadeira e chegar a uma contradição. Quando chegamos a uma contradição, provamos que a tese é, na verdade, falsa.

Suponha que exista um conjunto finito de números primos: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Considere, então, o número N o produto de todos esses números primos.

$$N = p_1 p_2 \ldots p_n$$

Agora, tomemos o número N + 1:

$$N + 1 = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$$

Perceba que o resto da divisão de N + 1 por qualquer um dos números primos conhecidos: $p_1, p_2, \ldots, p_n$ é igual a 1. Portanto, (N + 1) não é divisível por nenhum dos números primos anteriores. Sendo assim, (N + 1) é primo.

Perceba que chegamos a um absurdo. Isso significa que a nossa suposição inicial era falsa. Ou seja, não existe um conjunto finito de números primos p_n. Portanto, o conjunto de números primos é infinito.

Aqui, acreditamos que você não precisa saber essa demonstração. No entanto, precisa saber que existem infinitos números primos, porque isso pode ser cobrado numa questão de prova.

Chegamos ao final de mais uma aula.

Forte abraço!

Thiago Cardoso.

QUESTÕES DE CONCURSO

Questão 1 (FGV/PREFEITURA DE CUIABÁ/TÉCNICO EM ADMINISTRAÇÃO ESCOLAR/2015) Rogério cria galinhas para a produção de ovos e, certo dia, ele coletou 165 ovos. Arrumando esses ovos em caixas de uma dúzia, o número máximo de caixas completas que ele conseguiu foi:

a) 12.

b) 13.

c) 14.

d) 15.

e) 16.

Questão 2 (IBFC/POLÍCIA CIENTÍFICA-PR/PERITO CRIMINAL/2017) Dentre os números descritos nas alternativas, o único que não é divisível por 9 é:

a) 1359.

b) 21744.

c) 8766.

d) 123456.

e) 23130.

Questão 3 (FGV/SEE-PE/PROFESSOR DE MATEMÁTICA/2016) O número de três algarismos: n = 68D é primo.

O algarismo D, das unidades, é:

a) 1.

b) 3.

c) 5.

d) 7.

e) 9.

QUESTÃO 4 (VUNESP/PREFEITURA DE MARÍLIA-SP/AUXILIAR DE ESCRITA/2017) José estuda japonês a cada 4 dias e estuda francês a cada 6 dias. No dia 20 de outubro de 2017, ele estudou essas duas línguas. Desse dia até o último dia do ano de 2017, o número de vezes que José terá estudado, no mesmo dia, francês e japonês, incluindo o dia 20 de outubro, é

a) 5.

b) 6.

c) 7.

d) 8.

e) 9.

(CESPE/TJ-RR/AUXILIAR ADMINISTRATIVO/2012) Considere as seguintes definições:

I – os divisores próprios de um número inteiro positivo n são todos os divisores inteiros positivos de n, exceto o próprio n;

II – um número n será perfeito se a soma de seus divisores próprios for igual a n;

III – dois números serão números amigos se cada um deles for igual à soma dos divisores próprios do outro.

Com base nessas definições, julgue os itens que seguem.

QUESTÃO 5 Se um número é maior que 1, então o conjunto dos seus divisores próprios tem, pelo menos, 2 elementos.

QUESTÃO 6 Nenhum número primo é perfeito.

QUESTÃO 7 28 é um número perfeito.

Questão 8 220 e 284 são números amigos.

Questão 9 (VUNESP/PM-SP/2017) Um escritório comprou uma caixa de envelopes e irá dividi-los em pequenos pacotes, cada um deles com o mesmo número de envelopes. Se em cada pacote forem colocados ou 8 envelopes, ou 9 envelopes, ou 12 envelopes, não restará envelope algum na caixa. Sabendo-se que, nessa caixa, há menos de 400 envelopes, então o número máximo de envelopes dessa caixa é:

a) 256.

b) 288.

c) 342.

d) 360.

e) 385.

Questão 10 (VUNESP/SAP-SP/2009) Em um presídio há 400 detentos, sendo 240 no setor X e 160 no setor Y. Para realizar atividades na oficina de artes, o total de detentos foi dividido em grupos com o mesmo número de integrantes, sendo esse número o maior possível, sem deixar nenhum detento de fora e sem misturar os detentos dos dois setores. Dessa forma, foram formados:

a) 5 grupos.

b) 8 grupos.

c) 10 grupos.

d) 12 grupos.

e) 13 grupos.

Questão 11 (IBFC/EMBASA/ASSISTENTE DE LABORATÓRIO/2017) Um marceneiro possui duas barras de ferro, uma com 1,40 metros de comprimento e outra com

2,45 metros de comprimento. Ele pretende cortá-las em barras de tamanhos iguais, de modo que cada pedaço tenha a maior medida possível. Nessas circunstâncias, o total de pedaços que o marceneiro irá cortar, utilizando as duas de ferro, é:

a) 9.

b) 11.

c) 12.

d) 13.

Questão 12 (VUNESP/MPE-SP/OFICIAL DE PROMOTORIA/2016) No aeroporto de uma pequena cidade chegam aviões de três companhias aéreas. Os aviões da companhia A chegam a cada 20 minutos, da companhia B a cada 30 minutos e da companhia C a cada 44 minutos. Em um domingo, às 7 horas, chegaram aviões das três companhias ao mesmo tempo, situação que voltará a se repetir, nesse mesmo dia, às:

a) 16h30 min.

b) 17h30 min.

c) 18h30 min.

d) 17 horas.

e) 18 horas.

Questão 13 (VUNESP/UNESP/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO/2016) Sejam x e y dois números naturais tais que MDC(x,105) = 1, o MMC(x,21) = 168 e o MDC (x, y) = 4. Então, sabendo que y é maior que x, porém é menor que o dobro de x, pode-se afirmar que y é igual a:

a) 4.

b) 8.

c) 12.

d) 16.

e) 20.

Questão 14 (MPE-GO/SECRETÁRIO AUXILIAR/2017) Três vigias fazem rondas noturnas em um determinado prédio, cada um em seu setor. O primeiro tem que acionar o relógio de controle do seu setor a cada 36 minutos; o segundo, a cada 24 minutos, e o terceiro, a cada 18 minutos. Dessa maneira, pode-se afirmar que eles acionam simultaneamente o relógio de controle de seus respectivos setores a cada:

a) 1h00 min.

b) 1h06 min.

c) 1h12 min.

d) 1h18 min.

e) 1h24 min.

Questão 15 (VUNESP/CÂMARA DE SUMARÉ-SP/ESCRITURÁRIO/2017) Se, numa divisão, o divisor e o quociente são iguais, e o resto é 10, sendo esse resto o maior possível, então o dividendo é:

a) 131.

b) 121.

c) 120.

d) 110.

e) 101.

Questão 16 (VUNESP/CÂMARA DE SUMARÉ-SP/ESCRITURÁRIO/2017) No depósito de uma loja de doces, há uma caixa contendo n bombons. Para serem vendidos, devem ser repartidos em pacotes iguais, todos com a mesma quantidade de bombons. Com os bombons dessa caixa, podem ser feitos pacotes com 5, ou com 6, ou com 7 unidades cada um, e, nesses casos, não faltará nem sobrará nenhum bombom. Nessas condições, o menor valor que pode ser atribuído a n é

a) 280.

b) 265.

c) 245.

d) 230.

e) 210.

Questão 17 (FEPESE/CELESC/ASSISTENTE ADMINISTRATIVO/2016) João trabalha 5 dias e folga 1, enquanto Maria trabalha 3 dias e folga 1. Se João e Maria folgam no mesmo dia, então quantos dias, no mínimo, passarão para que eles folguem no mesmo dia novamente?

a) 8.

b) 10.

c) 12.

d) 15.

e) 24.

(CESPE/TRT16ª REGIÃO-MA/AUXILIAR JUDICIÁRIO/2005) Considere que foram gastos R$ 1.563,00 para abastecer com café e açúcar a copa de um escritório de advocacia. Sabendo-se que cada pacote de 500 g de café custou R$ 5,85 e que cada pacote de 5 kg de açúcar custou R$ 4,25 e ainda que as quantidades de pacotes de açúcar e de pacotes de café estão, nessa ordem, na proporção 2/3, julgue os itens seguintes.

Questão 18 O máximo divisor comum entre os números que representam as quantidades de pacotes de café e de açúcar é superior a 50.

Questão 19 O mínimo múltiplo comum entre os números que representam as quantidades de pacotes de café e de açúcar é inferior a 300.

GABARITO

1. b
2. d
3. b
4. c
5. E
6. C
7. C
8. C
9. d
10. a
11. b
12. e
13. c
14. c
15. a
16. e
17. c
18. C
19. E

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES


LEI Nº 8.666/1993 - LICITAÇÃO
Avaliação
Comentário
Seu feedback é valioso. Você gostaria de deixar um comentário e assim nos ajudar a melhorar nossos produtos e serviços?
Obs: A avaliação da aula em pdf é exclusivamente pedagógica. Clique aqui para relatar problemas técnicos, pois serão desconsiderados deste canal.
Sim, salvar comentário.
Não, obrigado.
NÃO SE ESQUEÇA DE AVALIAR ESTA AULA!
SUA OPINIÃO É MUITO IMPORTANTE PARA MELHORARMOS AINDA MAIS NOSSOS MATERIAIS.
ESPERAMOS QUE TENHA GOSTADO DESTA AULA!
PARA AVALIAR, BASTA CLICAR EM LER A AULA E, DEPOIS, EM AVALIAR AULA.
AVALIAR