

## CONCOURS ESIM Entrepreneur Industrie - Session 2002

## Filière MP

## EPREUVE DE MATHEMATIQUES II

Durée : 3 heures  
Calculatrices interdites

## Préliminaire

- 1- Soit  $f : t \mapsto \frac{t \sin(t)}{1 - \cos(t)}$ ,  $t$  appartenant à  $]0, \pi]$ .

Etudier la limite de  $f$  en 0.

En déduire l'existence de  $I = \int_0^{\pi} f(t) dt$ .

- 2- Soit  $\alpha$  un réel n'appartenant pas à  $\mathbb{Z}$  et soit  $g$  une application  $2\pi$  périodique vérifiant  $\forall x \in ]-\pi, \pi[$ ,  $g(x) = \cos(\alpha x)$ .  
Déterminer la série de Fourier de  $g$ .  
En déduire une expression de  $\cotan(\theta)$  comme somme d'une série de fonctions.

## Partie I

- 1- Montrer que  $u \mapsto \ln(\sin(u))$  et  $u \mapsto \ln(\cos(u))$  sont intégrables sur  $]0, \pi/2[$ .

- 2- On note  $K = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u)) du$  et  $L = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(u)) du$

a- Montrer que  $K = L$

b- En exprimant  $K + L$  de deux manières différentes, déduire la valeur de  $K$ .

- 3- Exprimer  $I$  en fonction de  $K$ . En déduire la valeur de  $I$ .

## Partie II

On rappelle la formule de Stirling :  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Tournez la page S.V.P.

1- Soit  $v_n = 1 - n \ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)$ . Quelle est la nature de la série de terme général  $v_n$  ?

2- Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  la suite de fonctions définies par :

$$u_n(x) = \frac{2x^2}{x^2 - n^2} \text{ pour } x \text{ appartenant à } [0, \frac{1}{2}]$$

Montrer que la série de fonctions de terme général  $u_n(x)$  est normalement convergente sur  $[0, \frac{1}{2}]$

On note  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  et  $\Sigma = \int_0^{1/2} S(x) dx$  .

Justifier l'existence de  $\Sigma$ .

3- -a- Ecrire  $\Sigma$  sous forme d'une série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  .

-b- On note  $\Sigma_N$  la somme partielle  $\sum_{n=1}^N a_n$  . Simplifier l'expression de  $\Sigma_N$  . En déduire la valeur de  $\Sigma$

4- A l'aide du préliminaire, trouver une relation liant  $\Sigma$  et  $I$ . Retrouver la valeur de  $I$ .

### Partie III

Soit  $h$  la fonction  $(x, t) \mapsto \frac{xt \sin(t)}{x^2 - 2x \cos(t) + 1}$  .

1- Montrer que l'application  $H : x \mapsto \int_0^\pi \frac{xt \sin(t)}{x^2 - 2x \cos(t) + 1} dt$  est continue sur  $[0, 1]$ .

2- Déterminer les suites  $s = (s_n)_{n \geq 0}$  vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, s_{n+2} - 2 \cos(t) s_{n+1} + s_n = 0$$

$t$  étant un réel donné de  $]0, \pi[$ .

3- Prouver sans calcul que l'application  $x \mapsto h(x, t)$ ,  $t \in [0, \pi]$ , est développable en série entière au voisinage de 0.

Soit  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t) x^n$  le développement en série entière et  $R$  le rayon de convergence. En

utilisant la relation :

$$(1 - 2 \cos(t) x + x^2) h(x, t) = t \sin(t) x$$

déterminer l'expression de  $a_n(t)$ . Que peut-on dire de  $R$  ?

4- Soit  $x$  un réel fixé dans  $[0, 1[$ .

-a- Montrer que la série  $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t)x^n$  converge normalement sur  $[0, \pi]$ .

-b- En déduire que  $H$  est développable en série entière au voisinage de 0.

-c- Exprimer  $H(x)$  à l'aide de fonctions élémentaires pour  $x$  appartenant à  $[0, 1[$ , et retrouver la valeur de l'intégrale  $I$ .

#### Partie IV

1- Soit (E) l'équation différentielle :

$$(E) : x y'(x) + y(x) = -\frac{1}{x(1+x)} + \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Résoudre (E) sur  $]0, 1[$ .

2- Existe-t-il une solution de (E) se prolongeant par continuité sur  $[0, 1]$  ?

3- Soit  $\phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{t \sin(t)}{1-x \cos(t)} dt$ .

-a- Montrer que  $\phi$  est une application continue sur  $[0, 1]$ , dérivable sur  $]0, 1[$

-b- Montrer que  $\phi$  est solution sur  $]0, 1[$  de (E).

-c- Retrouver la valeur de  $I$ .

\_\_\_\_\_ Fin de l'énoncé \_\_\_\_\_