El problema de la solución inicial

1 Variables artificiales

Cuando describimos el algoritmo del simplex, dejamos una cuestión pendiente, pues en el paso 1 se partía de una solución inicial factible y no siempre es inmediato encontrarla. Por otro lado, hemos visto las ventajas de partir de una base inicial que sea la identidad, pero para ello se necesita que el origen (0,...,0,...0) sea factible y no siempre ocurre, basta para ello que las variables de holgura no formen una matriz identidad.

Para conseguir el punto extremo inicial en los casos en los que el origen no sea factible podemos utilizar varias estrategias, una de la cuales es el uso de **variables artificiales.**

Las variables artificiales son de naturaleza radicalmente distinta a las de holgura y se introducen con el fin de conseguir una base identidad inicial. Nuestro objetivo, para resolver el problema, será que salgan de la base para quedarnos con un punto factible inicial. Veamos primero como se utilizan las variables artificiales y que utilidad tienen. Para ello consideremos el (PPL),

Ejemplo 1.1

$$\begin{array}{ll} \textit{Min} & x_1 - 2x_2 \\ \textit{s.a:} & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & -x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{array}$$

Como siempre, lo primero es conseguir la igualdad en las ecuaciones.

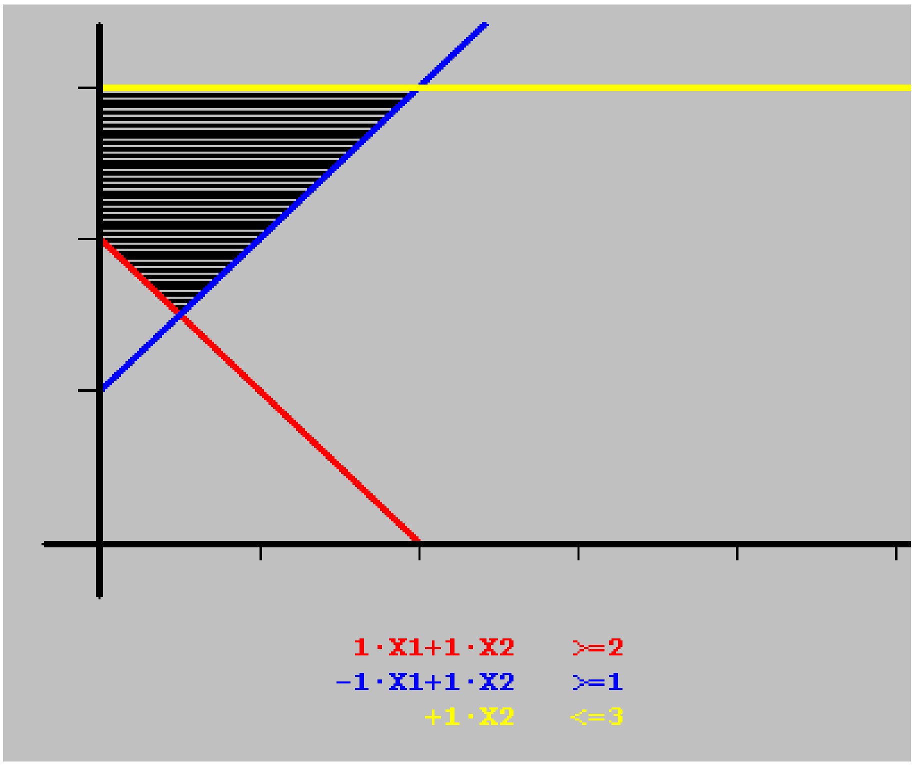
$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a:} & x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ & -x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \end{array}$$

En este caso las variables de holgura no forman una matriz identidad que nos permita obtener la primera tabla del algoritmo de forma sencilla. Es por ello, que introducimos las variables artificiales con ese fin en las dos primeras ecuaciones, pues en la tercera la variable de holgura x_5 se ajusta a nuestras necesidades.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a:} & x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 2 \\
& -x_1 + x_2 - x_4 + y_2 = 1 \\
& x_2 + x_5 = 3 \\
& x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \\
& y_i \geq 0, \quad i = 1, 2.
\end{array}
$$

Observación 1.1 *A las variables artificiales se les suele notar de diferente forma que las del problema o las de holgura para remarcar que son de naturaleza distinta.*

Al introducir las variables artificiales tenemos que las variables y_1, y_2 y x_5 forman una base y sus correspondientes columnas de la matriz A forman la identidad, como era nuestro objetivo. El punto del problema que corresponde a esa base es (0,0), que no es factible.



Observación 1.2 *Como se puede observar el origen no es factible.*

Hay dos estrategias para "*expulsar*" las variables artificiales de la base y quedarnos con un punto factible.

1. Método de las dos fases.

2. Método de la M-grande o de las penalizaciones.

En ambos métodos se utiliza el algoritmo del simplex para resolver el problema.

2 Método de las dos fases

Se descompone el problema en dos partes o fases. En la primera se eliminan las variables artificiales, determinando una solución básica factible inicial y en la segunda fase se resuelve el problema aplicando el simplex de la forma normal, a partir del punto extremo encontrado en la primera fase.

1. Fase I
   Se resuelve un problema de minimizar la suma de las variables artificiales, con las mismas restricciones del problema transformado. O sea,

$$\begin{array}{ll} Min & c^t x \\ s.a. & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ll} Min & c^t x \\ s.a. & Ax + Iy_i = b \\ & x \geq 0 \\ & y_i \geq 0. \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ll} Min & \sum_i y_i \\ s.a. & Ax + Iy_i = b \\ & x \geq 0 \\ & y_i \geq 0. \end{array}$$

   Observación 2.1 *Si el problema original es de maximizar el de la fase I también es de minimizar.*

   Veamos la primera fase en nuestro ejemplo

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & y_1 + y_2 \\ \text{s.a:} & x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 2 \\ & -x_1 + x_2 - x_4 + y_2 = 1 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \\ & y_i \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{array}$$

Aplicando el simplex.

							1	1	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	
y_1	1	1	1	-1	0	0	1	0	2
y_2	1	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	0	1	0	0	1	0	0	3
		0	2	-1	-1	0	0	0	3

Observación 2.2 *Para evitar posibles errores en la parte superior de la tabla se han colocado los nombres de las variables y los costos no nulos.*

Entra x_2 y sale y_2

							1	1	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	
y_1	1	2	0	-1	1	0	1	-1	1
x_2	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	1	0	0	1	1	0	-1	2
		2	0	-1	1	0	0	-2	1

Entra x_1 y sale y_1

							1	1	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	
x_1	0	1	0	$-1/2$	$1/2$	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
x_2	0	0	1	$-1/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$1/2$	$3/2$
x_5	0	0	0	$1/2$	$1/2$	1	$-1/2$	$-1/2$	$3/2$
		0	0	0	0	0	-1	-1	0

Estamos en el óptimo y por tanto hemos terminado la fase I.

Observación 2.3 *El punto extremo al que se ha llegado es* $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$*, que es factible.*

Observación 2.4 *Obsérvese que el problema tiene solución múltiple, lo que es lógico porque existen más puntos extremos factibles y cada uno de ellos es una solución distinta de la primera fase.*

Observación 2.5 *En el óptimo la función objetivo vale cero, que es su mínimo valor posible.*

2. Fase II

   Se retoma el problema original, pero eliminando las variables artificiales, que ya han cumplido su labor.

$$\begin{array}{ll} Min & c^t x \\ s.a. & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|ccccc|c} & & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & \\ & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline x_1 & 1 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ x_2 & -2 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 3/2 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ \hline & & 0 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 & -5/2 \end{array}$$

   Entra x_4 y sale x_1

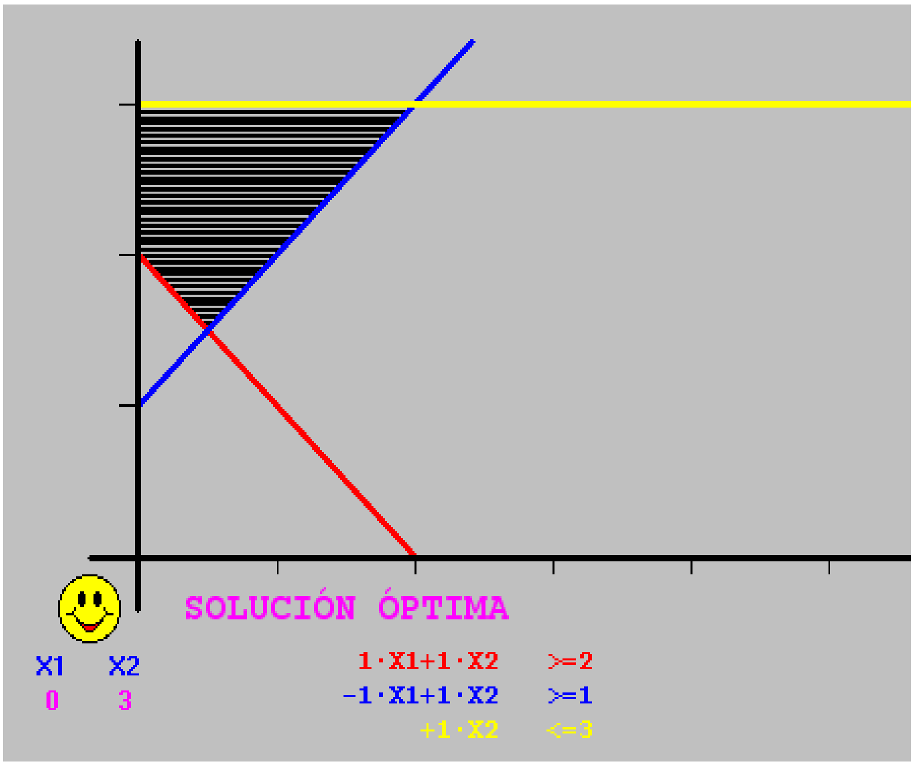
$$\begin{array}{cc|ccccc|c} & & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & \\ & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline x_4 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ x_2 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ x_5 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & & -3 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4 \end{array}$$

   Entra x_3 y sale x_5

$$\begin{array}{cc|ccccc|c} & & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & \\ & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline x_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ x_2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ x_3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}$$

   Estamos en el óptimo y la solución es (0,3).

Veamos la resolución gráfica.



Observación 2.6 *Obsérvese que en la primera fase el algoritmo se ha movido en soluciones básicas **no** factibles.*

En algunas ocasiones no es posible "*expulsar*" a las variables artificiales de la base al final de la fase I. Tenemos dos posibilidades

1. Al terminar la primera fase existe una variable artificial en la base estrictamente mayor que cero.

   Ejemplo 2.1

$$\begin{array}{ll} Min & -3x_1+4x_2 \\ s.a: & x_1+x_2\leq 4 \\ & 2x_1+3x_2\geq 18 \\ & x_i\geq 0,\quad i=1,2. \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} Min & -3x_1+4x_2 \\ s.a: & x_1+x_2+x_3=4 \\ & 2x_1+3x_2-x_4+y_1=18 \\ & x_i\geq 0,\quad i=1,2,3,4 \\ & y_1\geq 0. \end{array}$$

Planteamos la fase I

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & y_1 \\ \text{s.a:} & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_4 + y_1 = 18 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4 \\ & y_1 \geq 0. \end{array}$$

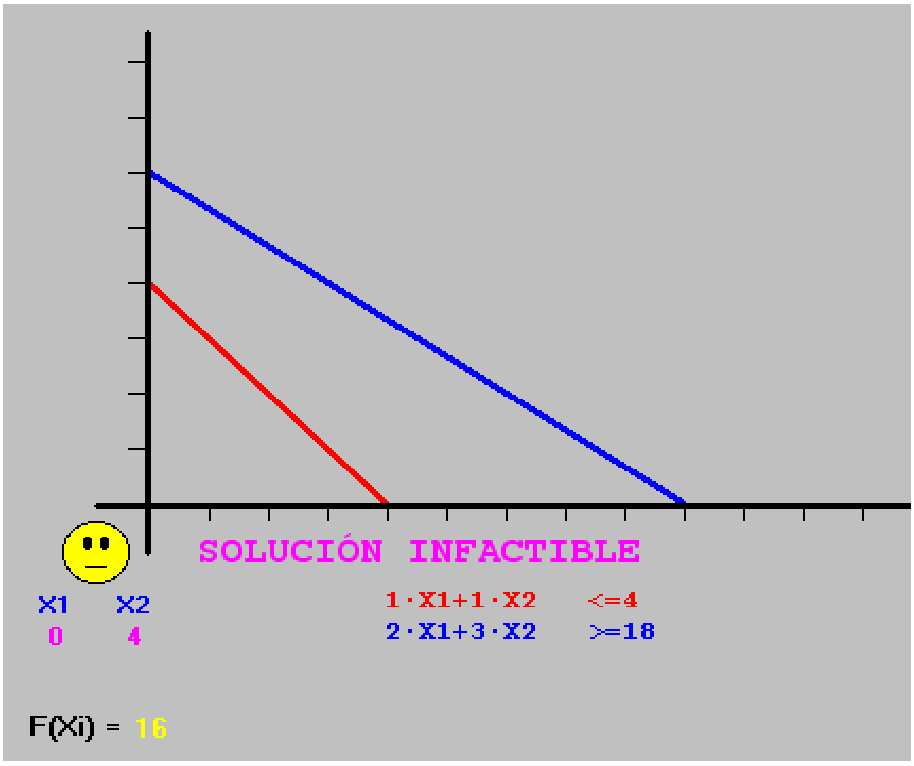
						1	
		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	
x_3	0	1	**1**	1	0	0	4
y_1	1	2	3	0	-1	1	18
		2	3	0	-1	0	18

$\Longrightarrow$

						1	
		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	
x_2	0	1	1	1	0	0	4
y_1	1	-1	0	-3	-1	1	6
		-1	0	-3	-1	0	6

Observación 2.7 *En negrita el elemento sobre el que se pivota.*

Como vemos estamos en el óptimo y la variable artificial está en la base, lo que indica que el problema original es infactible, como se ve en la gráfica.



2. Al terminar la primera fase existe una variable artificial en la base igual a cero.

Ejemplo 2.2

$$
\begin{array}{ll}
Min & -x_1 + 2x_2 - x_3 \\
s.a: & x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\
 & -x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\
 & 2x_2 + 3x_3 = 10 \\
 & x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3.
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ll}
Min & y_1 + y_2 + y_3 \\
s.a: & x_1 + x_2 + x_3 + y_1 = 6 \\
 & -x_1 + x_2 + 2x_3 + y_2 = 4 \\
 & 2x_2 + 3x_3 + y_3 = 10 \\
 & x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3 \\
 & y_i \geq 0, \quad i = 1,2,3.
\end{array}
$$

					1	1	1	
		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	
y_1	1	1	1	1	1	0	0	6
y_2	1	-1	1	**2**	0	1	0	4
y_3	1	0	2	3	0	0	1	10
		0	4	6	0	0	0	20

$\Longrightarrow$

					1	1	1	
		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	
y_1	1	**3/2**	1/2	0	1	$-1/2$	0	4
x_3	0	$-1/2$	1/2	1	0	1/2	0	2
y_3	1	3/2	1/2	0	0	$-3/2$	1	4
		3	1	0	0	-3	0	8

					1	1	1	
		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	
x_1	0	1	1/3	0	2/3	$-1/3$	0	8/3
x_3	0	0	2/3	1	1/3	1/3	0	10/3
y_3	1	0	0	0	-1	-1	1	0
		0	0	0	-2	-2	0	0

Estamos en el óptimo y tenemos una variable artificial y_3 en la base, pero como vale 0, significa que su fila es linealmente dependiente y puede quitarse de la tabla, al igual que el resto de variables artificiales.

		-1	2	-3	
		x_1	x_2	x_3	
x_1	-1	1	1/3	0	8/3
x_3	-3	0	2/3	1	10/3
		0	$-13/3$	0	$-38/3$

Estamos en el óptimo $(\frac{8}{3}, 0, \frac{10}{3})$.

Aplicando el método de las dos fases podemos encontrar cualquier tipo de solución: ilimitada, múltiple, etc.

Ejemplo 2.3

$$
\begin{array}{ll}
\mathit{Max} & 3x_1 + 2x_2 \\
\mathit{s.a:} & x_1 + x_2 \geq 5 \\
 & -3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\
 & x_2 \leq 5 \\
 & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2.
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{ll}
\mathit{Min} & y_1 \\
\mathit{s.a:} & x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 5 \\
 & -3x_1 + 4x_2 + x_4 = 12 \\
 & x_2 + x_5 = 5 \\
 & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \\
 & y_1 \geq 0.
\end{array}
$$

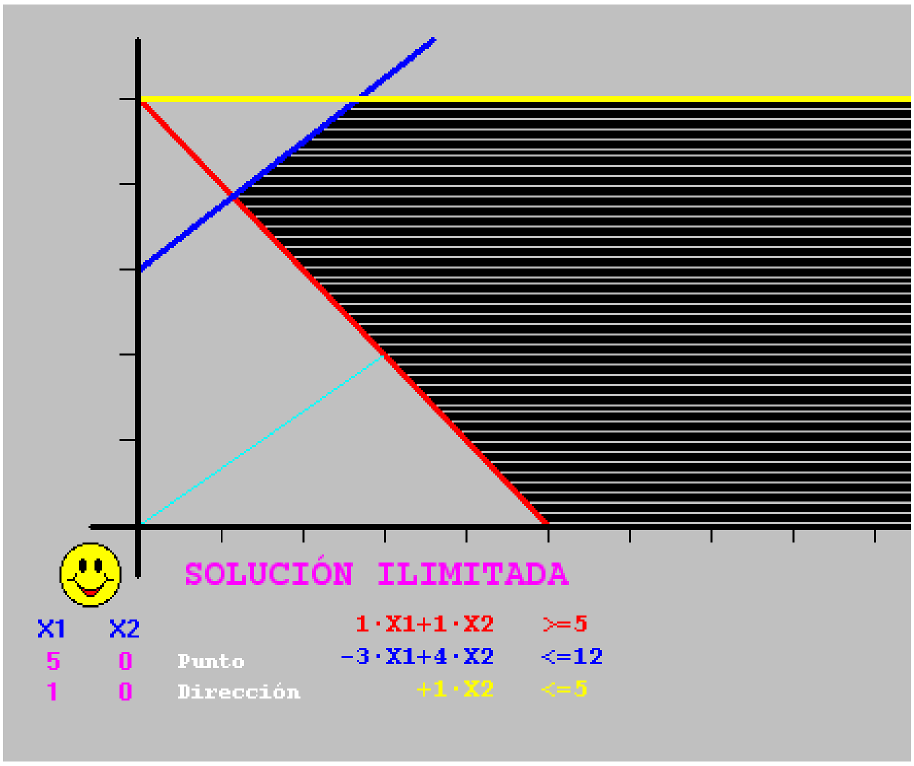
$$
\begin{array}{cc|cccccc|c}
 & & & & & & & 1 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & y_1 & \\
\hline
y_1 & 1 & \mathbf{1} & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\
x_4 & 0 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\
x_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\
\hline
 & & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{cc|cccccc|c}
 & & & & & & & 1 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & y_1 & \\
\hline
x_1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\
x_4 & 0 & 0 & 7 & -3 & 1 & 0 & 3 & 27 \\
x_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\
\hline
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{array}
$$

Fin de la primera fase. Pasamos a la segunda.

$$
\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\hline
x_1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 5 \\
x_4 & 0 & 0 & 7 & -3 & 1 & 0 & 27 \\
x_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\
\hline
 & & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 15
\end{array}
$$

Hay solución ilimitada, d_j = (1,0,1,3,0) $\Longrightarrow$ (5,0)+μ(1,0), con $\mu > 0$.

Veamos la resolución gráfica.



3 El método de la M-grande

El método está basado en introducir las variables artificiales en la función objetivo, pero muy penalizadas, para que sea el propio algoritmo del simplex el que las "*expulse*" de la base, encontrando una solución básica factible. De manera genérica, en un problema de minimizar, lo que se hace es

$$\begin{array}{ll} Min & c^t x \\ s.a. & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ll} Min & c^t x + M^t y_i \\ s.a. & Ax + I y_i = b \\ & x \geq 0 \\ & y_i \geq 0. \end{array}$$

En caso de que sea de maximizar

$$\begin{array}{ll} Max & c^t x \\ s.a. & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ll} Max & c^t x - M^t y_i \\ s.a. & Ax + I y_i = b \\ & x \geq 0 \\ & y_i \geq 0. \end{array}$$

Veamos el ejemplo usado anteriormente.

Ejemplo 3.1

$$\begin{array}{lc} \textit{Min} & x_1 - 2x_2 \\ \textit{s.a:} & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & -x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{lc} \textit{Min} & x_1 - 2x_2 \\ \textit{s.a:} & x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ & -x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \end{array}$$

Y ahora introducimos las variables artificiales en las ecuaciones para tener una base y también en la función objetivo fuertemente penalizadas. Como el problema es de minimizar se introducen sumando. El valor de M es tan grande como sea necesario de forma que sea mayor que cualquier número con el que comparemos.

$$\begin{array}{lc} \text{Min} & x_1 - 2x_2 + My_1 + My_2 \\ \text{s.a:} & x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 2 \\ & -x_1 + x_2 - x_4 + y_2 = 1 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \\ & y_i \geq 0, \quad i = 1, 2. \end{array}$$

Y ahora aplicamos el simplex en su forma habitual.

		1	-2	0	0	0	M	M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	
y_1	M	1	1	-1	0	0	1	0	2
y_2	M	-1	$\mathbf{1}$	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	0	1	0	0	1	0	0	3
		-1	$2M+2$	$-1M$	$-1M$	0	0	0	$3M$

Entra x_2 y sale y_2.

		1	-2	0	0	0	M	M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	
y_1	M	$\mathbf{2}$	0	-1	1	0	1	-1	1
x_2	-2	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	1	0	0	1	1	0	-1	2
		$2M+1$	0	$-M$	$M+2$	0	0	$-2M-2$	$M-2$

Entra x_1 y sale y_1.

		1	-2	0	0	0	M	M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	
x_1	1	1	0	$-1/2$	$\mathbf{1/2}$	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
x_2	-2	0	1	$-1/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$1/2$	$3/2$
x_5	0	0	0	$1/2$	$1/2$	1	$-1/2$	$-1/2$	$3/2$
		0	0	$1/2$	$3/2$	0	$-M-1/2$	$-M$	$-5/2$

Entra x_4 y sale x_1.

		1	-2	0	0	0	M	M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	
x_4	0	2	0	-1	1	0	1	-1	1
x_2	-2	1	1	-1	0	0	1	0	2
x_5	0	-1	0	$\mathbf{1}$	0	1	-1	0	1
		-3	0	2	0	0	$-M-2$	$-M$	-4

Entra x_3 y sale x_5.

		1	-2	0	0	0	M	M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	
x_4	0	1	0	0	1	1	0	-1	2
x_2	-2	0	1	0	0	1	0	0	3
x_3	0	-1	0	1	0	1	-1	0	1
		-1	0	0	0	-2	$-M$	$-M$	-6

Estamos en el óptimo (0,3). Repetimos los ejemplos anteriores con este nuevo método.

Ejemplo 3.2

$$\begin{array}{ll} Min & -3x_1 + 4x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1,2. \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ll} Min & -3x_1 + 4x_2 + My_1 \\ s.a: & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_4 + y_1 = 18 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4. \\ & y_1 \geq 0. \end{array}$$

		-3	4			M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	
x_3	0	1	$\mathbf{1}$	1	0	0	4
y_1	M	2	3	0	-1	1	18
		$2M+3$	$3M+4$	0	0	$-M$	$18M$

Entra x_2 sale x_3.

		-3	4			M	
		x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	
x_2	4	1	1	1	0	0	4
y_1	M	-1	0	-3	-1	1	6
		$-1M+7$	0	$-3M+4$	$-M$	0	$6M+16$

Como vemos estamos en el óptimo y la variable artificial está en la base, lo que indica que el problema inicial es infactible.

Ejemplo 3.3

$$
\begin{array}{ll}
Min & -x_1+2x_2-x_3 \\
s.a: & x_1+x_2+x_3=6 \\
 & -x_1+x_2+2x_3=4 \\
 & 2x_2+3x_3=10 \\
 & x_i \geq 0, \quad i=1,2,3.
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ll}
Min & -x_1+2x_2-x_3+My_1+My_2+My_3 \\
s.a: & x_1+x_2+x_3+y_1=6 \\
 & -x_1+x_2+2x_3+y_2=6 \\
 & 2x_2+3x_3+y_3=10 \\
 & x_i \geq 0, \quad i=1,2,3 \\
 & y_i \geq 0, \quad i=1,2,3.
\end{array}
$$

		-1	2	-3	M	M	M	
		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	
y_1	M	1	1	1	1	0	0	6
y_2	M	-1	1	$\mathbf{2}$	0	1	0	4
y_3	M	0	2	3	0	0	1	10
		1	$4M-2$	$6M+3$	0	0	0	$20M$

		-1	2	-3	M	M	M	
		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	
y_1	M	$\mathbf{3/2}$	$1/2$	0	1	$-1/2$	0	4
x_3	-3	$-1/2$	$1/2$	1	0	$1/2$	0	2
y_3	M	$3/2$	$1/2$	0	0	$-3/2$	1	4
		$3M+1/2$	$M-3/2$	0	0	$-3M$	0	$8M-3$

		-1	2	-3	M	M	M	
		x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	
x_1	0	1	$1/3$	0	$2/3$	$-1/3$	0	$8/3$
x_3	0	0	$2/3$	1	$1/3$	$1/3$	0	$10/3$
y_3	M	0	0	0	-1	-1	1	0
		0	$-13/3$	0	$-2M-5/3$	$-2M-2/3$	0	$-38/3$

Estamos en el óptimo y tenemos una variable artificial y_3 en la base, pero como vale 0, significa que su fila es linealmente dependiente y puede quitarse de la tabla, al igual que el resto de las variables artificiales.

		-1	2	-3	
		x_1	x_2	x_3	
x_1	-1	1	1/3	0	8/3
x_3	-3	0	2/3	1	10/3
		0	$-13/3$	0	$-38/3$

Estamos en el óptimo $(\frac{8}{3}, 0, \frac{10}{3})$.

Ejemplo 3.4

$$\begin{array}{ll} Max & 3x_1 + 2x_2 \\ s.a: & x_1 + x_2 \geq 5 \\ & -3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & x_2 \leq 5 \\ & x_i, \geq 0 \quad i = 1, 2. \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ll} Max & 3x_1 + 2x_2 - My_1 \\ s.a: & x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = 5 \\ & -3x_1 + 4x_2 + x_4 = 12 \\ & x_2 + x_5 = 5 \\ & x_i, \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \\ & y_1 \geq 0. \end{array}$$

		3	2				$-M$	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	
y_1	$-M$	**1**	1	-1	0	0	1	5
x_4	0	-3	4	0	1	0	0	12
x_5	0	0	1	0	0	1	0	5
		$-M-3$	$-M-2$	M	0	0	0	$-5M$

		3	2				$-M$	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	
x_1	3	1	1	-1	0	0	1	5
x_4	0	0	7	-3	1	0	3	27
x_5	0	0	1	0	0	1	0	5
		0	1	-3	0	0	$M+3$	15

Hay solución ilimitada, d_j = (1,0,1,3,0) $\Longrightarrow$ (5,0)+μ(1,0), con $\mu > 0$.