

# 月最大降雨量の確率密度関数

芝浦工業大学 システム理工学部 数理科学科 2 年  
BV24029 白玻璃空

2025 年 10 月 29 日

## 目次

1	はじめに	2
2	降雨データとデータの性質	2
2.1	降雨資料の調査年数・調査年数 . . . . .	2
2.2	降雨ごとの確率分布 . . . . .	2
3	確率密度関数	4
3.1	採用した確率密度関数 . . . . .	4
3.2	適合性の検討 . . . . .	5
4	確率密度関数の統合化	8
4.1	降雨の基準化 . . . . .	8
4.2	数正規分布による確率雨量の統合化 . . . . .	8
5	終わりに	9

## 1 はじめに

今回の研究では、日本で長期間の降雨資料を得られている 6 地点を選び、月ごとの最大降雨量の確率密度関数を検討した。そして、より適合度の良い関数を抽出すると共に、降雨量の基準化によって、降雨の時間・場所に関わらず適用できる関数を導出した。

## 2 降雨データとデータの性質

### 2.1 降雨資料の調査年数・調査年数

研究で採用した降雨資料は気象庁の各観測地点のデータから入手したもので、博多・神戸・名古屋・さいたま・仙台・札幌の 6 地点で行った。また、月最大降雨量は 2003 年 1 月から 2024 年 3 月の 21 年間の資料を用いた。

### 2.2 降雨ごとの確率分布

次に、月最大降雨量の確率分布を、各地点からまとめた。

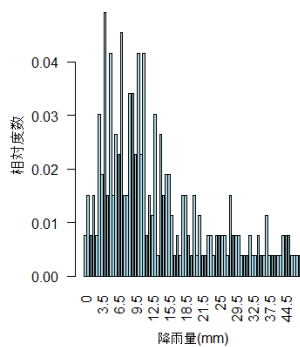


図 1 博多での相対度数分布

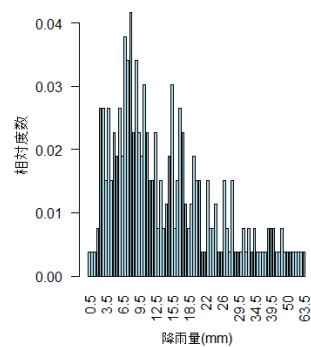


図 2 神戸での相対度数分布

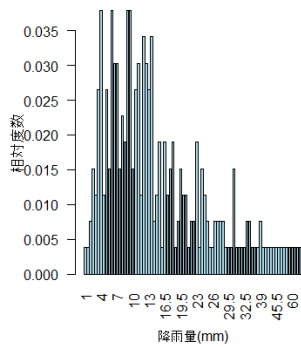


図3 名古屋での相対度数分布

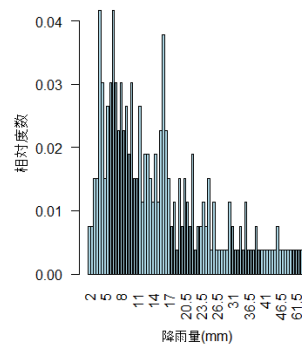


図4 さいたまでの相対度数分布

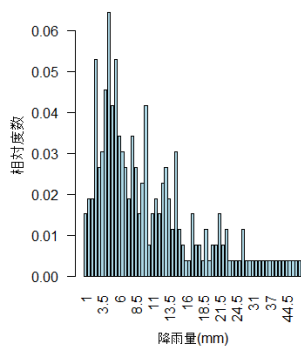


図5 仙台での相対度数分布

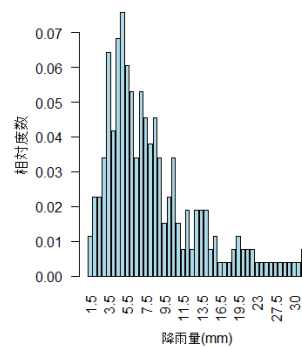


図6 札幌での相対度数分布

図1 から図6 に示すように、どの地点でも月最大降雨量の確率分布では、対称性が失われ、平均値より小さいところに最頻値を持つ非対称分布になることが分かる。

### 3 確率密度関数

#### 3.1 採用した確率密度関数

ここで扱っているように、極値（まれにしか生じない値）の確率密度関数の形は様々なものが提案されている。正規分布や、対数変換によって正規分布に近似する方法が良く用いられている。従って、ここでは対数変換を基にしていく。

ここで採用した確率分布は、正規・対数正規・改良型対数正規・3 母数対数正規及び改良型 3 母数対数正規の 5 種類である。また、正規分布以外は何いずれの分布型も、降雨を対数正規し、正規分布型に持ち込んで活用する。

$f(x)$  を確率密度関数とすると、確率指標  $t$  は次式で定義される  $F(x)$  の逆関数値で表される。

$$\int_{-\infty}^x f(t)dt$$

または

$$\int_x^{\infty} f(t)dt \quad (1)$$

ただし、 $f(t)$  が正規分布の場合は、

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad (2)$$

となる。従って、 $t$  の値としてどのような関数を使用するかによって、上述のような各種のパターンを表現できる。それをまとめると表 2 のようになるが、実数値  $x$  の変形という意味で (2) 式の  $t$  とは別の  $X$  を用いている。

表 1 正規分布の指標  $X$  の関数表示

形式	名称	$X$ の関数型	備考
1	正規分布	$X = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$	$\mu: x_i$ の平均, $\sigma: x_i$ の標準偏差
2	対数正規分布	$X = \frac{\log x_i - \mu}{\sigma}$	$\mu: \log(x_i)$ の平均, $\sigma: \log(x_i)$ の標準偏差
3	改良型対数正規分布	$X = \left(\frac{\log x_i - \mu}{\sigma}\right)^n$	$\mu: \log(x_i)$ の平均, $\sigma: \log(x_i)$ の標準偏差
4	3 母数対数正規分布	$X = \left(\frac{\log(x_i + b) - \mu}{\sigma}\right)$	$\mu: \log(x_i + b)$ の平均, $\sigma: \log(x_i + b)$ の標準偏差
5	改良型 3 母数対数正規分布	$X = \left(\frac{\log(x_i + b) - \mu}{\sigma}\right)^n$	$\mu: \log(x_i + b)$ の平均, $\sigma: \log(x_i + b)$ の標準偏差

一般的に、パラメータの数を増価させれば、式の適合度が良くなることは当然である。そこで、できるだけ少ないパラメータ、精度よく確率密度関数が表現できる関数型が良い関数型ということになる。

確率密度関数が非対称であることから、少なくとも、2 型は採用せざるを得ない。適合度を高めるためのパラメーターは 3 型は  $n$ 、4 型では、 $b$  の各 1 個であり、パラメータの数という点では同等の関数型と言える。

また、各関数型の適合度は次のように予測値 (計算値)  $h_i$  と実測値  $x_i$  からの変換値  $X_i$  の差の 2 乗平均誤差 (3) 式によって評価することにする.

$$\epsilon_r = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \epsilon_i^2} \quad (3)$$

$i$ : 降水の観測値の順位

$N$ : 降水の観測月数

ただし、 $\epsilon_i$  は次のように定義する.

$$\epsilon_i = h_i - X_i \quad (4)$$

$h_i$ : 正規分布の逆関数値

$X_i$ : ヘージンプロットの逆関数値

また、ヘージンプロットのプロットングポジション  $P(x_i)$  は次の (5) 式によって定めた.

$$P(x_i) = \frac{2i - 1}{2N} \quad (5)$$

記号は (3) 式と同じである. また、表 1 に示した指標  $X$  に含まれるパラメータ  $n, b$  は (3) 式の  $\epsilon_r$  が最小になるように定めた. ただし、対数値が負となる場合は絶対値をとり、マイナスをつけた.

## 3.2 適合性の検討

### 3.2.1 月最大降雨量の分析

博多・神戸・名古屋・さいたま・仙台・札幌の各地点における月雨量の適合度を (3) 式によって評価した結果表 2 のようになった.

表 2 2 乗平均誤差 ( $\epsilon_r$ )

形式	1	2	3	4	5
博多	5.502	1.573	0.985	1.160	0.985
神戸	4.693	3.013	1.106	1.260	1.089
名古屋	5.425	1.106	0.567	0.664	0.520
さいたま	4.342	4.167	1.245	1.431	1.253
仙台	4.704	1.916	0.730	1.432	0.730
札幌	3.270	1.248	0.654	0.655	0.655

表3 パラメーター一覧

形式	3 型 (n)	4 型 (b)	5 型 (b)	5 型 (n)
博多	1.151	3.173	0.043	1.149
神戸	1.215	5.049	1.060	1.177
名古屋	1.078	1.861	0.723	1.053
さいたま	1.286	6.369	0.654	1.253
仙台	1.089	6.369	-0.167	1.099
札幌	0.934	-1.089	-1.093	1.000

これによると、各観測地とも1型よりも2型、2型よりも3・4・5型の順に、適合度が向上しており、この点は予想通りであった。また、パラメータの数と同じである3型と4型では、定数 $b$ を加えた4型よりも、指数 $n$ を付加した3型の方は適合性がやや良いようであった。従って、4型よりも3型の方が良いことになる。

### 3.2.2 $\chi^2$ 検定による評価

次に、 $\chi^2$  法によって、2型から5型の理論頻度分布と実測頻度分布の誤差を求め、その結果を表4に示した。

表4  $\chi^2$  検定における上側確率と適合性一覧表

	1 型	2 型	3 型	4 型	5 型
博多	0.000	0.266	0.126	0.126	0.171
神戸	0.000	0.211	0.112	0.112	0.032
名古屋	0.000	0.584	0.324	0.324	0.108
さいたま	0.000	0.326	0.064	0.637	0.438
仙台	0.000	0.346	0.147	0.147	0.189
札幌	0.000	0.264	0.291	0.291	0.250

誤差5%で判定すると、1型とみなせないもの100%、2・3・4型とみなせないもの0%、5型とみなせないもの16%となり、2・3・4型の適合度が最もよく、5型も適合度が良いことが示された。これは、すでに述べた(3)式による2乗平均誤差による判定結果とさほど矛盾しない。

これまで検討してきたのは、過去の観測地に最もよく合致する関数、あるいはできるだけ少ないパラメータで過去の観測地によく合致する関数型を求めることであった。ここでは、資料をパラメータの同定期間と予測機期間に2分し、同定時の平均と標準偏差を用いて、予測値を計算し、これを予測期間の資料と2乗平均誤差によって比較した。

表 5 同定時の誤差

	1 型	2 型	3 型	4 型	5 型
博多	0.460	0.080	0.072	0.072	0.172
神戸	0.348	0.120	0.120	0.120	0.120
名古屋	0.469	0.069	0.069	0.069	0.069
さいたま	0.385	0.192	0.192	0.192	0.192
仙台	0.440	0.100	0.100	0.100	0.100
札幌	0.522	0.113	0.113	0.113	0.113

表 6 予測時の誤差

	1 型	2 型	3 型	4 型	5 型
博多	0.370	0.115	0.121	0.121	0.121
神戸	0.545	0.198	0.198	0.198	0.198
名古屋	0.367	0.119	0.119	0.119	0.119
さいたま	0.412	0.240	0.240	0.240	0.240
仙台	0.561	0.203	0.203	0.203	0.203
札幌	0.494	0.144	0.144	0.144	0.144

その結果によると、2 から 5 型の誤差が等しくなり、かつ最小となった。これは、2 型から 5 型の誤差が非常に近くなる、またはパラメータの最適値によるためだと思われる。

以上のことから、パラメータの個数が異なる関数型で最適な係数を定めても、予測の視点からは同じ精度になる場合もあることを示している。

## 4 確率密度関数の統合化

### 4.1 降雨の基準化

任意の集計時間に対する降雨量  $x_i$  を次の式によって基準化し、統一的に扱いやすいように変数変換した。  $x_i$  を任意の集計時間に対するある年の最大降雨量とし、  $x_m$  をその平均降雨量とする。

$$X_i = \log x_i - \log x_m \quad (6)$$

$x_i$ : 任意の集計時間に対するある年の最大降雨量

$x_m$ :  $m$  時系列の平均降雨量

### 4.2 数正規分布による確率雨量の統合化

第3章で分析したように、単純な対数正規分布でも、かなり良い適合性が得られた。この分布はパラメータを含まず、これによって、統合化ができる可能性がある。

ここからは、観測場所に対する統合を考える。これまで得られた各6地点の直線を重ね合わせたのが図7である。さらに、この全観測値を用いて、最小2乗法により、直線の型をはめたのが図7、平均である。この直線は確率指標  $Y$  との間に次の関係がある。

$$Y = 0.952Z + 3.47 \times 10^{-15} \quad (7)$$

ただし、

$$Z = \frac{\log x_i - \log x_m}{\sigma}$$

である。



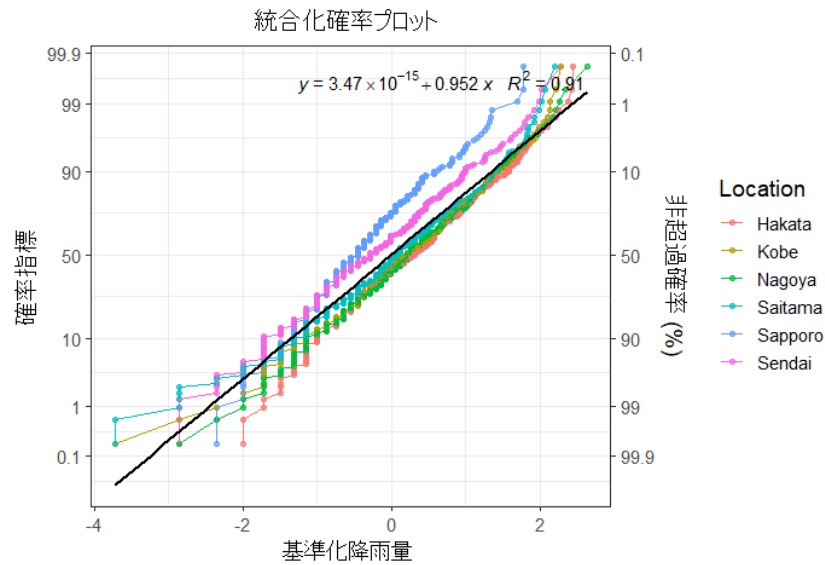


図 7 月最大降雨量統合化の確率分布

このように、観測場所に関わらず、一つの直線に統合化できた。改良型対数正規分布 (3 型)、3 母数対数正規分布 (4 型)、及び改良型 3 母数対数正規分布 (5 型) を適用すれば、さらに制度のよい統合化が可能であるが、 $b$  や  $n$  のパラメータが必要となり、実用性に欠ける。

## 5 終わりに

今回は、博多、神戸、名古屋、さいたま、仙台、札幌の 6 地点の月最大降雨量の頻度分布を用いて、その確率密度関数の検討を行った。その要点は以下の通りである。

- 2 乗平均誤差  $\epsilon_r$  による評価では、パラメータ数の増加に伴い、1 型から 2 型、2 型から 3・4・5 型の順に適合度が向上した。また、パラメータ数が同じ 3 型と 4 型では、定数  $b$  を加える 4 型よりも、指数  $n$  を付加した 3 型の方が適合性がやや良いという結果が得られた。
- $\chi^2$  検定による評価では、2 型・3 型・4 型の適合度が最も高く、5 型も良い適合度を示した。
- 資料を同定期間と予測期間に分けて検討した結果、2 型から 5 型までの誤差が等しくなり、かつ最小となった。これは、パラメータの個数が異なっても、予測の視点からは同じ精度になる場合があることを示している。
- パラメータを含まない単純な対数正規分布 (2 型) に基づく基準化によって、観測場所 (6 地点) に関わらず、一つの直線に統合化することができた。また、改良型 3 型や 4 型を適用すれば、さらに精度向上は可能だが、追加のパラメータ ( $b$  や  $n$ ) が必要となり、実用性に欠けると結論付けた。この結果から、比較的シンプルな対数正規分布 (2 型) を適用し、降雨量を基準化することで、観測場所を問わず適用できる確率雨量の統合化が達成されたことが示された。

## 参考文献

- [1] 日本大学生物資源科学部: 劉剛・石川重雄・長坂貞郎, 石川県農業短期大学: 丸山利輔, 水文・水資源学会誌