大学入試の難問の研究

BV25048 川端優太

2025 年 11 月 1 日

目次

1　今回のテーマについて、動機、やること

最初の研究として、大学入試の難問を実際に解いて、考察し、解説を自分で作ってみることにした。動機としては、たまたま本屋に行った時、数学の参考書が目に入り、見たところ面白かったので、気楽にまた入試問題をやることにした。数学 III の極限、微分積分系が一番得意で、今も数学をやっているので、新たな発想や、思考感覚を得られるかもしれないと思ったのも動機の一つ。

今回扱う参考書は、標準問題精講 III・C を扱う。II・B も良かったので迷ったが、III・C の方がまだ数学味があったので、今回はそっちを採用する。極限、微積分より抜粋。ベクトルや、複素数、式と曲線もあるが、得意ではないので割愛。

大学数学とは関係が薄く、解くのがメインになりがちになるのはご承知おきを。

2　極限

2.1　標問 7 漸化式と極限 (3)

$a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 1} - 1$ とする。$(n = 1, 2, 3, \cdots)$ (大学は表記なし)

(1) 次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$0 < a_{n+1} < a_n$$

(2) 次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$2a_n + \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 = 3$$

(3) 次の不等式が成り立つことを示して、$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

$$a_n < \sqrt{\frac{3}{n}}$$

この問題は帰納法がカギになってきそうだ。数列の証明系は帰納法が定石。a_{n+1} から証明したくなるが、$a_{k+1} > 0$ を仮定して、$a_{k+2} > 0$ を証明するも、$k + 2$ という部分が気持ち悪い。そこからやっても証明はできるが。よって、$a_n > 0$ からやる。

$n = 1$ のとき、$a_1 = 1 > 0$ よりこれは成り立つ。$a_k > 0$(k は自然数) と仮定すると、

$$a_{k+1} = \sqrt{2a_k + 1} - 1 > \sqrt{2 \cdot 0 + 1} - 1 = \sqrt{1} - 1 = 0$$

ゆえに、$a_n > 0$ は成り立つ。

$a_{n+1} < a_n$ を示すが、実は帰納法を使わずとも楽にいける。帰納法でやると少し面倒。

右の -1 を左辺に移して、両辺を 2 乗すると、ルートがきれいに消える。すると、

$$(a_{n+1} + 1)^2 = 2a_n + 1$$
$$2(a_n - a_{n+1}) = {a_{n+1}}^2$$
$${a_{n+1}}^2 > 0 \text{ だから}, a_n > a_{n+1}$$

(2) 自分は帰納法を用いて証明した。今から紹介する。

$n=1$ のとき、

$$2a_1+\sum_{k=1}^{1}{a_k}^2=3$$

$n=1$ のときは OK。$n=i$(i は自然数) の時、

$$2a_i+\sum_{k=1}^{i}{a_k}^2=3$$

が成り立つと仮定する。$n=i+1$ のとき、

$$\begin{aligned}2a_{i+1}+\sum_{k=1}^{i+1}{a_k}^2&=2(\sqrt{2a_i+1}-1)+\sum_{k=1}^{i}{a_k}^2+{a_{i+1}}^2\\&=2(\sqrt{2a_i+1}-1)+(3-2a_i)+(\sqrt{2a_i+1}-1)^2\\&=2(\sqrt{2a_i+1}-1)+(3-2a_i)+(2a_i+2-2\sqrt{2a_i+1})\\&=3(\text{証明終})\end{aligned}$$

別解はこちら。

(1) の途中で、$2(a_k-a_{k+1})={a_{k+1}}^2$ があったはず。$k=1,2,3,\cdots,n-1$ まで和をとると、

$$2(a_1-a_n)=\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2-{a_1}^2\text{である。}$$

整理すると示したい式が出てくる。

(3) は (1)(2) をいかに使えるか。前問がヒントになるのが数学の試験では硫石になっている。標準問題精講は難関大から旧帝大の問題を集めた、数学入試の中でもかなり難易度の高い参考書。ほとんどは前問が必ずヒントになっていた。今回はヒントを上手く使う練習にもなったと思う。

さて、出したい不等式に 3 が出ている。(2) が最初に使えそうだ。不等号が出ているから何かで不等式を自分で作る必要もある。

$$2a_n=3-\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2$$

と変形する。$a_n>0$ と、${a_1}^2>{a_2}^2>\cdots>{a_n}^2$ より、

$$\begin{aligned}3&>\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2={a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2\\&>{a_n}^2+{a_n}^2+\cdots+{a_n}^2=n{a_n}^2\\&\text{よって }0<a_n<\sqrt{\frac{3}{n}}\end{aligned}$$

はさみうちから、

$$lim_{n\to\infty}a_n=0$$

2.2 標問 13 図形と無限等比級数

$0 < a < 1$ とする。座標平面上で原点 A_0 から出発して x 軸の正の方向に a だけ進んだ点を A_1 とする。次に A_1 で進行方向を反時計回りに 120° 回転し a^2 だけ進んだ点を A_2 とする。以降同様に A_{n-1} で反時計回りに 120° 回転して a^n だけ進んだ点を A_n とする。このとき点列 $A_0, A_1, A_2, \cdots$ の極限の座標を求めよ。(東京工業大学)

まずは落ち着いて図を書く。そうすると、点列は三角形のような軌道で、ある点に近づいている。それに、三回ごとにある周期性が見られる。図形といえばベクトルが有効なのでベクトルで考える。

A_0, A_3, A_6, A_9 に注目する。$\overrightarrow{A_3A_6} = a^3\overrightarrow{A_0A_3}, \overrightarrow{A_6A_9} = a^3\overrightarrow{A_3A_6}$

となる。三回移ったベクトルは、三回前のベクトルの 360° 回転され、a^3 倍の長さになっているからだ。一般的に表す。

$\overrightarrow{A_{k+3}A_{k+4}} = a^3\overrightarrow{A_kA_{k+1}} (k \geq 0)$ なので、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_{3k}A_{3k+1}} &= (a^3)^k\overrightarrow{A_0A_1}\\ \overrightarrow{A_{3k+1}A_{3k+2}} &= (a^3)^k\overrightarrow{A_1A_2}\\ \overrightarrow{A_{3k+2}A_{3k+3}} &= (a^3)^k\overrightarrow{A_2A_3}\end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_{3n}} &= \sum_{k=0}^{n-1}(\overrightarrow{A_{3k}A_{3k+1}} + \overrightarrow{A_{3k+1}A_{3k+2}} + \overrightarrow{A_{3k+2}A_{3k+3}})\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a^{3k}(\overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3})\\ &= \frac{1}{1-a^3}(2a - \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{2}, \frac{\sqrt{3}a^2}{2} - \frac{\sqrt{3}a^3}{2})\\ &= \frac{a}{2(1-a^3)}(2 - a - a^2, \sqrt{3}(a - a^2)\\ &= \frac{a}{2(1-a^3)}((2+a)(1-a), \sqrt{3}a(1-a)\\ &= \frac{a}{2(1+a+a^2)}(2+a, \sqrt{3}a)\end{aligned}$$

係数は初項 1, 公比 a^3 の無限等比級数、座標は x, y ごとにまとめた。

ここでは、$\overrightarrow{A_0A_1} = (a, 0), \overrightarrow{A_1A_2} = (\frac{-a^2}{2}, \frac{\sqrt{3}a^2}{2}), \overrightarrow{A_2A_3} = (\frac{-a^3}{2}, \frac{-\sqrt{3}a^3}{2})$ を用いている。

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OA_{3n+1}} &= \overrightarrow{OA_{3n}} + \overrightarrow{A_{3n}A_{3n+1}} \\
&= \overrightarrow{OA_{3n}} + a^{3n}\overrightarrow{A_0A_1} \\
\overrightarrow{OA_{3n+2}} &= \overrightarrow{OA_{3n+1}} + \overrightarrow{A_{3n+1}A_{3n+2}} \\
&= \overrightarrow{OA_{3n+1}} + a^{3n}\overrightarrow{A_1A_2}
\end{aligned}
$$

n が限りなく大きくなれば、係数 a^{3n} の項は 0 に収束するから、

$$
\lim_{n\to\infty}\overrightarrow{OA_{3n+1}} = \lim_{n\to\infty}\overrightarrow{OA_{3n+2}} = \lim_{n\to\infty}\overrightarrow{OA_{3n}}
$$

全ての点列に関する極限の座標が求まった。答えは、

$$
\left(\frac{a(2+a)}{2(1+a+a^2)}, \frac{\sqrt{3}a^2}{2(1+a+a^2)}\right)
$$

2.3 極限　総評

1 問目は帰納法や、式変形、前問の事実を上手く使いこなせるかが重要だった。この問題はできた。2 問目はかなり難関だった。ベクトルへの帰着、各ベクトルの規則を一般化、実際に座標を求める式を立てられるかが肝であった。東京工業大学の問題をこの本で解いてみたが、どれもかなり難しかった。高度な発想力、式の組み立て、一般化が必要で、計算力も求められる。極限分野は、色々な数列の関連問題、不等式証明が多く、厳しかった。帰納法も必要だが、それ以外の工夫で割と簡単になるのが驚きだった。

3　微分、積分

3.1　標問 37 2 変数関数の最大、最小

長さ 1 の線分 OA を直径とする上半円上の動点を点 P、長さ 2 の線分 OB を直径とする下半円上の動点を Q とおく。OPQ の面積を S とする。

- (1) $\angle AOP=\theta,\angle BOP=\varphi(0<\theta<\frac{\pi}{2},0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ とするとき、S を θ と φ で表せ。
- (2)S の最大値を求めよ。

(1) 直接求めるのはかなり困難。だが、点 P,Q は直径上の点を動いているので、$\angle POQ=\angle BQO=\frac{\pi}{2}$
三角比の定義を用いて、$OP=OA\cos\theta$,$OQ=OB\cos\varphi$ である。よって、

$$S=\frac{1}{2}OP\cdot OQ\cdot\sin(\theta+\varphi)=\cos\theta\cos\varphi\sin(\theta+\varphi)$$

(2) 変数が 2 つあるのが非常に厄介。一個消すのも難しい、偏微分はまだ高校ではやっていないので、一見できなそうに見える。

しかし、固定化という発想がある。S の cos がふたつ積になっているので、加法定理より、

$$S=\frac{1}{2}[\cos(\theta+\varphi)+\cos(\theta-\varphi)]\sin(\theta+\varphi)$$

とする。$\theta+\varphi$ が二つ出てきているので、t とおく。更に 0 からπ の範囲で固定する。ちなみに、$\theta+\varphi=s$ とおくと、

$$\theta=\frac{t+s}{2},\varphi=\frac{t-s}{2}$$
$$\theta,\varphi\text{ の範囲より、}0<t\pm s<\pi$$

s,t の存在範囲は上の式の通り。θ,φ 単体から、t の範囲も出せるが、これで t のとる範囲はハッキリした。

$\cos(\theta-\varphi)$ の最大値は、$\theta=\varphi$ のときのようだ。今最大値を出したいのだから。$S=f(t)$ として、$0<t<\pi$ の範囲で微分してみる。

$$\begin{aligned}
f(t)&=\frac{1}{2}(\cos t+1)\sin t\\
f'(t)&=\frac{1}{2}(\cos t^2-\sin t^2+\cos t)\\
&=\frac{1}{2}(2\cos t^2+\cos t-1)\\
&=(\cos t-\frac{1}{2})(\cos t+1)
\end{aligned}$$

$f'(t)$ が 0 になるときは、$t = \frac{\pi}{3}$ の時でなおかつ $f(t)$ は最大になる。故に S の最大値は、

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2}(\cos t + 1)\sin t \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{8}\left(\theta = \varphi = \frac{\pi}{6}\text{のとき}\right)
\end{aligned}
$$

まずは円周角に気づけたか、固定化という発想をうまく使って、微分して最大値を求められるかがポイントだった。固定化という発想は難関大以降になるとたびたび出てくる。どこをどの範囲で固定化して、うまく微分できるか、最初に出会ったときは理解に苦しんだ。

3.2 標問 57 ベータ関数

自然数 p, q に対して、$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ と定義する。(大阪工業大学)

- (1)$q > 1$ のとき、部分積分より次の等式を証明せよ。

$$B(p,q) = \frac{q-1}{p}B(p+1, q-1)$$

- (2) (1) の結果を用いて、次の等式を証明せよ。

$$B(p,q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

(1) はただ 1 回部分積分すれば容易に出せる。

(2) (1) を繰り返し用いればよい。ただし、数が合わせにくいので注意。

$$
\begin{aligned}
B(p,q) &= \frac{q-1}{p}B(p+1, q-1) \\
&= \frac{q-1}{p}\frac{q-2}{p+1}B(p+2, q-2) \\
&= \frac{q-1}{p}\frac{q-2}{p+1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{p+q-2}B(p+q-1, 1) \\
&= \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-2)!}\int_0^1 x^{p+q-2}\,dx \\
&= \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}\text{(証明終)}
\end{aligned}
$$

(1) で示した式より、B の左側は 1 ずつ増えて、右側は 1 ずつ減少している。(2) より、分子が 1 ずつ増えて、分母は 1 ずつ減っている。$q > 1$ という条件から、B の右側は 1 まで減る。

右側を 1 まで減らした回数を x とすると、$q - 1 - x = 1$ より、$x = q - 2$

なので、分母、B の左側は最後まで $q - 2$ 増加した。これがベータ関数。

ここで応用として、

$$I=\int_a^b (x-a)^m (x-b)^n \, dx$$

を計算しよう。

$B(p,q)$ と積分区間を揃えたいので、$t=\frac{x-a}{b-a}$ とおく。

$$\begin{aligned}
&x-a=(b-a)t, \\
&x-b=(b-a)t+a-b=-(b-a)(1-t), \\
&dx=(b-a)dt \text{ とすると、} \\
&I=\int_0^1 [(b-a)t]^m[-(b-a)(1-t)]^n(b-a)\,dt \\
&=(-1)^n(b-a)^{m+n-1}B(m+1,n-1) \\
&=(-1)^n\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(b-a)^{m+n+1}
\end{aligned}$$

とくに $m=n=1$ のとき、数学 II の公式、

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx=-\frac{(b-a)^3}{6}$$

ガンマ関数 $F(n)$ とは

$$B(p,q)=\frac{F(p)F(q)}{F(p+q)}$$

という関係がある。

今後のために、ガンマ関数を取扱うことにした。微分積分の本でもみたことがあるので。I の式に関しては $m=n=1$ くらいしかあまり知らなくて、一般式だとどういう感じなのかには気になったはいたが、こんなに階乗があり、驚いた。指数もよくみたら $m+n+1$ である。

3.3 標問 60 減衰曲線が囲む図形の面積

曲線 $y=e^{-x}\sin x$ と x 軸との交点を原点 O から正の方向に順に $P_0=O, P_1, P_2\cdots$ とする。(東京女子大学)

- (1) この曲線と線分 P_nP_{n+1} とで囲まれた部分の面積を求めよ。
- (2)$\sum_{n=0}^{\infty} S_n$ を求めよ。

チャート、重要問題集などにもある、かなり有名な応用問題である。まずは面積を求める式を作る。当然積分を用いるが、交点はどこだろう。$y=0$ となる x を求めたい。$\sin x=0$ となる時は、P_n なら $n\pi$,P_{n+1} なら $(n+1)\pi$。

π の整数倍になるときである。y が負の場合もあるから、絶対値をつけて、

$$\begin{aligned}
S&=|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx| \\
&=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx
\end{aligned}$$

積分において、絶対値がついているとかなり厄介。今の積分区間では $\sin x$ の符号が判別できない。ここで、この置換を使って、なんとか絶対値を外す。

$x - n\pi = t$ とおくと、

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{\pi} e^{-n\pi - t} |\sin(t + n\pi)|\, dt \\ &= e^{-n\pi} \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t\, dt \end{aligned}$$

$\sin x$ に関しては、区間が $0 \leq t \leq \pi$ だったので、正に必ずなる。ここで、$S_0 = \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t\, dt$ を求めると、

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t\, dt &= \int_0^{\pi} (e^{-t})' \sin t\, dt \\ &= \left[-e^{-t} \sin t\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-t} \cos t\, dt \\ &= \int_0^{\pi} (e^{-t})' \cos t\, dt \\ &= \left[-e^{-t} \cos t\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-t} \sin t\, dt \\ &= e^{-\pi} + 1 - S_0 \\ S_0 &= \frac{e^{-\pi} + 1}{2} \end{aligned}$$

ゆえに答えは、

$$S_n = e^{-n\pi} S_0 = \frac{e^{-\pi} + 1}{2} e^{-n\pi}$$

(2)n が無限大になるときの S_n の和を求められている。つまり、無限級数である。$0 < e^{-\pi} < 1$ より、収束する。$e^{-n\pi}$ は初項 1, 公比が $e^{-\pi}$ の無限等比級数なので、

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n = \frac{e^{-\pi} + 1}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\pi}} = \frac{e^{\pi} + 1}{2(e^{\pi} - 1)}$$

減衰曲線という、そもそも見慣れない積分問題、絶対値、難しい置換など、レベルの非常に高かった問題と感じた。チャートでもレベル 5 の問題に分類される。下の演習問題もやってみたが、どのように置換すればいいかに混乱した。その後も、少々の工夫が必要であり、積分の置換にも興味が湧いてきた。

3.4 標問 78 定積分と不等式

n を自然数とし、

$$a_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^n}}\,dx, b_n = \int_0^1 \log(\sqrt{1+x^n}+1)\,dx$$

とおく。ただし、対数は自然対数とする。(東北大)

(1) 実数 $t \geq 1$ に対して、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\log t \leq t-1$$

(2) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 \leq b_n - \log 2 \leq \frac{1}{4(n+1)}$$

(3) $\dfrac{d}{dx}\log\left(\sqrt{1+x^n}+1\right) = \dfrac{n}{2x}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^n}}\right)$ を示せ。

(4) 以下の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} n(1-a_n)$$

(1) は簡単に示せる。(略)

(2) がかなり難関。log が出てきたり、分数が出てきたり、どうするか。a_n, b_n を直接求めるのも明らかに要領が悪い。(1) が一見ヒントに見えるが、$t = \sqrt{1+x^n}+1$ としても、$0 \leq x \leq 1$ では $t \geq 2$。(1) では $t \geq 1$ なので、評価が曖昧で使えそうにない。

(2) の $b_n - \log 2$ をうまく使って、差をとることで不等式を誘導するしかない。$\sqrt{1+x^n}+1$ は $0 \leq x \geq 1$ のとき、1 以上。つまり、$\log\sqrt{1+x^n}+1 \geq \log 2$

$$b_n = \int_0^1 \log(\sqrt{1+x^n}+1)\,dx \geq \int_0^1 \log 2\,dx \geq \log 2 \geq 0$$

これで左側は示した。残るは右側。$b_n - \log 2 = B$ は、

$$\begin{aligned} B &= \int_0^1 \log(\sqrt{1+x^n}+1)\,dx - \int_0^1 \log 2\,dx \\ &= \int_0^1 \log\frac{\sqrt{1+x^n}+1}{2}\,dx \end{aligned}$$

ここで、(1) の使い時! $t = \frac{\sqrt{1+x^n}+1}{2}$ とおくと、$x \geq 0$ であることから、$t \geq 1$ に近づく。(1) を使い、更に変形して、

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \log \frac{\sqrt{1+x^n}+1}{2}\,dx &\leq \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{1+x^n}+1}{2}-1\right)dx \\
&= \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^n}-1}{2}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^n}{2(\sqrt{1+x^n}+1)}\,dx (\text{有理化した。}\sqrt{1+x^n} \geq 1 \text{ より、}) \\
&\leq \int_0^1 \frac{x^n}{4}\,dx = \frac{1}{4(n+1)}
\end{aligned}$$

よって、

$$0 \leq b_n - \log 2 \leq \frac{1}{4(n+1)} (\text{証明終})$$

(3) はただ微分すればよい。ミスに注意。

(4)

$$1 - a_n = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^n}}\right) dx$$

(3) の両辺にインテグラルをつけると、

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+x^n}}\right) = \frac{2x}{n}\cdot\frac{d}{dx}\log\left(\sqrt{1+x^n}+1\right) \text{だから、} \\
&\int_0^1 \left(1-\frac{1}{\sqrt{1+x^n}}\right) dx = \left(\frac{2x}{n}\right)\left(\int_0^1\right)\frac{d}{dx}\log\left(\sqrt{1+x^n}+1\right)(dx)
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(1-\frac{1}{\sqrt{1+x^n}}\right) dx &= \frac{2}{n}\int_0^1 \frac{d}{dx}x\log\left(\sqrt{1+x^n}+1\right) dx \\
&\text{部分積分を用いて、} \\
&= \frac{2}{n}\left(\left[x\log\sqrt{1+x^n}+1\right]_0^1 - \int_0^1 \log\left(\sqrt{1+x^n}+1\right) dx\right) \\
&= \frac{2}{n}\left(\log\left(\sqrt{2}+1\right) - b_n\right) \\
&\text{つまり、} n(1-a_n) \text{ は} \\
&2\left(\log\sqrt{2}+1-b_n\right)
\end{aligned}$$

(2) より、$n \to \infty$ のとき、はさみうちから $b_n \to \log 2$ となるから、

$$\lim_{n\to\infty} n(1-a_n) = 2\log\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

正直言ってこれが一番難しくて、やりごたえがあったかもしれない。前問の利用、上手く問題文からアクションをつかんで、差をとって、良い感じに評価。そこそこの計算量、見事取りたい形が取れたらどんなに楽しいだろうか。

難しい積分の問題ほど、不等式評価が厳しく、評価しろといわれてもどんな感じでやればいいか見えずらい。けど、やりがいは個人的にはかなりある。

3.5　標問 84 定積分で定義された関数 (3)

(1) 自然数 m, n に対して次の式が成り立つことを示せ。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \\ \pi & (m = n \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)n を自然数とするとき、$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\, dx$ の値を求めよ。

(3)n 個の実数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対して、

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left[x - (a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx)\right]^2\, dx$$

とおく。I_n を最小にするような $a_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ の値を求めよ。(横浜国立大学)

(1) は加法定理から和と積の関係式を作る。$m \neq n$ のとき、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]\, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0\end{aligned}$$

$m = n$ のとき、

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2x)\, dx \\ &= \pi(\text{証明終})\end{aligned}$$

(2) 普通に部分積分する。

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\, dx &= 2 \int_{0}^{\pi} x \left(-\frac{\cos n\pi}{n}\right)'\, dx \\ &= 2 \left(\left[\frac{-x \cos n\pi}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos n\pi}{n}\, dx\right) \\ &= -\frac{2\pi}{n} \cos n\pi + 2 \left[\frac{\sin n\pi}{n^2}\right]_0^{\pi} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2\pi}{n}\end{aligned}$$

(3) が非常に問題。とても難解な式に見えるが、(1) を上手く利用し、$\sum$ を使えば、書く項の数を大幅に減らせる。まずは簡略化しよう。

$$(a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$$

と置ける。

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx\right)^2 = x^2 - 2x \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx\right)^2$$

さて、ここの山場としては上の式の最後の項。試しに、$k=2, k=3$ の場合で理解してみよう。

$a_1 \sin x = c_1, c_2 = a_2 \sin 2x, c_3 = a_3 \sin 3x$ とする。

$k=2$ のとき、

$$(c_1 + c_2)^2 = {c_1}^2 + c_1 c_2 + {c_2}^2$$

さて、$c_1 c_2 = a_1 a_2 \sin x \sin 2x$ である。(1) に従えば、角が同じでないと 0 なのである。よってこの項のみ消える。

$k=3$ のとき、

$$(c_1 + c_2 + c_3)^2 = {c_1}^2 + {c_2}^2 + {c_3}^2 + 2(c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_3 c_1)$$

さっき同様に、$c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_3 c_1$ は全て 0。よく見たら、k の数だけ 2 乗の項がでて、それだけは 0 にならない。添え字が違うのは全て 0。よって、

$$x^2 - 2x \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \right)^2 = x^2 - 2x \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx + \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 (\sin kx)^2$$

インテグラルをつける。(2) から、

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx = (-1)^{k+1} \frac{2\pi}{k}$$

n が k に変わっていることに気を付ける。

(1) から、

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin kx)^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin kx = \pi^2$$

従って I_n は以下のように表す。途中から、π とシグマでくくり、最小値を出すために平方完成する。計算が少々面倒。

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{2\pi^3}{3} - 2 \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{2\pi}{k} a_k + \sum_{k=1}^{n} \pi a_k \\
&= \pi \sum_{k=1}^{n} \left({a_k}^2 - (-1)^{k+1} \frac{4}{k} a_k \right) + \frac{2\pi^3}{3} \\
&= \pi \sum_{k=1}^{n} \left[\left(a_k - (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \right)^2 - \frac{4}{k^2} \right] + \frac{2\pi^3}{3} \\
&= \pi \sum_{k=1}^{n} \left(a_k - (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \right)^2 + \frac{2\pi^3}{3} - 4\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

ゆえに、I_n が最小になるのは以下の時。

$$a_k = (-1)^{k+1} \frac{2}{k} (k = 1, 2, \cdots, n)$$

補足を付け足す。I_n はインテグラルだから、0 より大きい。I_n が最小のとき、

$$I_n = \frac{2\pi^3}{3} - 4\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6}$$

バーゼル問題でも扱ったはず。I_n の最小値が n が無限大に大きくなるとき、0 となることが知られていて、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

となるようだ。横浜国立大学の問題もかなり難しいと感じる。他の問題も解いてきたが、虚をつくような問題が多い。今回みたいに、形でビビらせるみたいに。(1)(2) は簡単なのだが、(3) は難しい。まずは上手くシグマでまとめる。(1) より消去できる項がどれか、$(a_1+a_2+\cdots)^2$ の展開後の結果がどのようになるかを考えなくてはならなかった。あとは平方完成がしっかり頭にでてくるか。数学力を問う良い問題だったと思う。

3.6　微積分　総評

得意分野にも関わらず、苦戦する問題でいっぱいだった。久々に大量の問題を解いてうまく頭が回らなったのもあるが。正確に微積分の計算ができるのが第一歩で、それをどのように使っていくか、あとは不等式評価が多く、極限ともよく絡みがあった。75 番以降の問題は個人的に好き。微積分と極限の総合問題は個人的に楽しいし、やりがいがあるからだ。有名国立大学の問題だらけで、かなりの実力が問われるが、微積分の問題を解くのが好きな人は、やってみるといいだろう。

4　おわりに

入試が終わり、改めて入試問題を気楽にやってみたものの、まあ楽しかった。割と最難関大学の問題を理解できていることに驚いたし、受験時代に知らなかった発想、やりがいのある問題に出会えた。数学は発想と思考感覚が大切なんだと感じた。色々なやり方があるが、時と場合によってはベストだったりそうでなかったりする。進めるにあたって、どのような発想をすれば できるかを繰り返し考えることにやりがいを感じた。今後も色々学びつつ、発想と思考力を突き詰めていこうと思う。

参考文献

木村光一　(2024) 旺文社　標準問題精講 III・C