ラグランジュ方程式の力学的利用について

荻嶋　ここみ

2025 年 10 月 30 日

0　オイラー・ラグランジュ方程式 (数学的意味)

オイラー・ラグランジュ方程式のみでは汎関数の極小、極大がわからない。
オイラー・ラグランジュ方程式は、

$$\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dy}\left(\frac{dF}{dy}\right) \tag{1}$$

と表せる。

これは $f'(x) = 0$ で極値を出す操作と同じ。

◯ 汎関数でも使えるものを作ろう

(注意 1.1) ある関数の微分が 0 になる点 (変化がなくなる点) は**停留点**と呼ばれ、今回は汎関数なので**停留関数**と呼ばれる。

1　極値の十分条件を証明してみる

定理 1.1

$$A(x) = \begin{bmatrix} F_{yy} & F_{yy'} \\ F_{yy'} & F_{y'y'} \end{bmatrix} \tag{2}$$

で定義する。

ただし、

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \tag{3}$$

$$f_{yy'} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \, \partial y'} \tag{4}$$

$$f_{y'y'} = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \tag{5}$$

であり、(2) の右辺の行列要素に含まれる y はには、オイラー・ラグランジュ方程式の解を用いるものとし、区間 $[x_0,x_1]$ で一様に行列 A(x) が正値である。すなわち、ある正定数 C_0 が存在して、

$$\xi^T A(x)\xi \geq C_0\|\xi\|^2 \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad x_0 \leq x \leq x_1) \tag{6}$$

であるならば、オイラー・ラグランジュ方程式の解は y(x) は汎関数 $I[y]$ の極値を極値を与える。

(注意 1.2)

汎関数 $I[y]$ は以下のように定義される。

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \tag{7}$$

証明

$y(x)$ はオイラー・ラグランジュ方程式の解で境界条件を満たすものとし、それに対して $y(x)+\varepsilon\eta(x)$ を境界条件式のもとで $y(x)$ から微小分ずらした関数とする。

このとき、汎関数の変分 $I[y+\varepsilon\eta(x)]-I[y]$ を ε^2 のオーダーの項まで書き下すと、

$$
\begin{aligned}
I[y+\varepsilon\eta(x)]-I[y] &= \int_{x_0}^{x_1}\{F(x,y+\varepsilon\eta,y'+\varepsilon\eta')-F(x,y,y')\}\,dx \qquad (8)\\
&= \varepsilon\int_{x_0}^{x_1}(F_y\eta+F_{y'}\eta')\,dx\\
&\quad +\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}\left\{F_{yy}\eta^2+2F_{yy'}\eta\eta'+F_{y'y'}\eta'^2\right\}dx+O(\varepsilon^3)
\end{aligned}
$$

◯ 多変数のテイラー展開を使う

$$
\begin{aligned}
F(x,y+\varepsilon\eta,y'+\varepsilon\eta') &= F(x,y,y')+\varepsilon\left(F_y(x,y,y')\eta+F_y'(x,y,y')\eta'\right)\\
&\quad +\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{F_{yy}\eta^2+2F_{yy'}\eta\eta'+F_{y'y'}\eta'^2\right\}+O(\varepsilon^3) \qquad (9)
\end{aligned}
$$

ここで、$F(x,y+\varepsilon\eta,y'+\varepsilon\eta')$ のみテイラー展開しているのは、$\varepsilon\eta$ の挙動がよくわからず性質もよくわかっていないので、テイラー展開して出てくるこの式を基にして様々なことを調べてみたいからで、$F(x,y,y')$ はテイラー展開をする必要はない。

したがって、

$$
F(x,y+\varepsilon\eta,y'+\varepsilon\eta')-F(x,y,y') \qquad (10)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon\left(F_y(x,y,y')\eta+F_y'(x,y,y')\eta'\right)\\
&\quad +\frac{\varepsilon^2}{2}\left\{F_{yy}\eta^2+2F_{yy'}\eta\eta'+F_{y'y'}\eta'^2\right\}+O(\varepsilon^3) \qquad (11)
\end{aligned}
$$

となり、これを x_0 から x_1 まで積分したものが (8) である。

(8) 式を変形する。

(8) 式の $\varepsilon\int_{x_0}^{x_1}(F_y\eta+F_{y'}\eta')\,dx$ は部分積分をすると、

$$\int_{x_0}^{x_1} \quad F_{y'}\eta' \quad dx=[F_{y'}\eta]_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\frac{dF'_y}{dx}\eta dx \tag{12}$$

ここで　$\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$ なので

$$\int_{x_0}^{x_1} \quad F_{y'}\eta' \quad dx=-\int_{x_0}^{x_1}\frac{dF'_y}{dx}\eta dx \tag{13}$$

だから、

$$\int_{x_0}^{x_1}(F_y\eta+F_{y'}\eta')\,dx=\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{dF'_y}{dx}\right)\eta dx \tag{14}$$

となり、これはオイラー・ラグランジュ方程式の形になっているため 0 となる。

$$I[y+\varepsilon\eta(x)]-I[y]=\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{x_0}^{x_1}\left\{F_{yy}\eta^2+2F_{yy'}\eta\eta'+F_{y'y'}\eta'^2\right\}dx+O(\varepsilon^3) \tag{15}$$

となる。この形は二次形式と呼ばれている。(二次形式とは変数が 2 個ある式のことで、今回では η が二つある。)

ここでこの二次形式を以下の形に当てはめる。

$$Q(\xi)=\xi^TA\xi \tag{16}$$

$\xi=\begin{bmatrix}\eta(x) & \eta'(x)\end{bmatrix}$ と置く。

$$\begin{bmatrix}\eta(x) & \eta'(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_{yy} & F_{yy'}\\ F_{yy'} & F_{y'y'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta(x)\\ \eta'(x)\end{bmatrix}=\xi^TA\xi \tag{17}$$

よって

$$I[y+\varepsilon\eta(x)]-I[y]=\xi^TA\xi+O(\varepsilon^3) \tag{18}$$

となり、

$$\xi^TA(x)\xi\geq C_0\|\xi\|^2>0 \tag{19}$$

$\varepsilon>0$ を十分小さくとると、$I[y+\varepsilon\eta(x)]-I[y]>0$ $\eta(x)$ は任意にとることができるので、y が I の極小をあたえる。

(差が一番小さいと y になるから)

証明終了

$$\tag{20}$$

2　オイラー・ラグランジュ方程式 (力学的意味)

ラグランジュ方程式の導出をする前に、導出する過程で必要事項をまず確認する。◯ **一般化力**

デカルト座標のままでは、自由度の高い運動において応用しずらい。

そのため一般化座標 (q_j) を用いた力として記述する。

◯ **仮想変位**

時間等を動かさずに拘束を守った状態での変位。この時、拘束力を必要としないので仕事はおきない。

◯ **ダランベールの原理**

$$\sum_i (\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i - \mathbf{m}_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \tag{21}$$

これはニュートンの運動方程式からもわかる。ここでニュートンの運動方程式を確認しておく。

◯ **ニュートンの運動方程式**

$$\mathbf{m}_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i \tag{22}$$

この時の $\mathbf{R}_i$ とは、その運動の条件における拘束力である。いま行いたい

のはニュートンの運動方程式をラグランジュ方程式に変換することである。

¡導出¿

ダランベールの原理を用いる。偏微分の式

$$\frac{\partial f}{\partial x}\partial x + \frac{\partial f}{\partial y}\partial y \tag{23}$$

を用いて、

この時 $\delta \mathbf{r}_i$ は以下のように表せる。一般化座標 q，$r = r(q_1, q_2, \ldots, q_s, t)$ として，

$$\delta \mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_s}\delta q_s \tag{24}$$

$$= \sum_{j=1} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \tag{25}$$

これで $\delta \mathbf{r}_i$ が出たのでダランベールの原理に代入すると、

$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \mathbf{m}_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \tag{26}$$

$$\sum_i (\mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i - \mathbf{m}_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) = 0 \tag{27}$$

$$\sum_j \left(\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j - \sum_j \left(\sum_i \mathbf{m}_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0 \tag{28}$$

(ちなみに j は座標のナンバリングのための文字) ここで、仕事の式

$$\delta \mathbf{w} = \sum_i \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}_i \tag{29}$$

$$= \sum_i \mathbf{F}_i (\sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j) \tag{30}$$

$$= \sum_j (\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}) \delta \mathbf{q}_j \tag{31}$$

これにより $\delta \mathbf{w}$ は $\delta \mathbf{q}_j$ に比例することがわかるから、$\sum_j (\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{)}$ が一般化座標上の力である一般化力 Q_j と定義することができる。

これにより、
$\sum_j(\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j})\delta \mathbf{q}_j$ は以下のように変換できる。

$$\sum_j(\mathbf{Q}_j - \sum_i \mathbf{m}_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j})\delta \mathbf{q}_j = 0 \tag{32}$$

この式を満たすには、$\mathbf{Q}_j = \sum_i \mathbf{m}_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j}$ であればよい。

ここで運動エネルギーを T として、

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{\mathbf{r}}_i)^2 \tag{33}$$

ここで、m_i は粒子の質量、$\dot{\mathbf{r}}_i$ は粒子の速度である。

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j}\left(\frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i\right) \tag{34}$$

$$= \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} \tag{35}$$

すなわち、
$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j}$

ここで時間 t で微分すると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j}) = \mathbf{Q}_j = \sum_i \mathbf{m}_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} + \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \partial\partial t(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j}) \tag{36}$$

ここで
$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{q}_j} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j}$ を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j}\right) = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{q}_j} \tag{37}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j}\right) - \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{q}_j} = \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \tag{38}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j}\right) = \sum_i \mathbf{m}_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{q}_j} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{q}_j} \tag{39}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_j}\right) - \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{q}_j} = \mathbf{Q}_i \tag{40}$$

この形はオイラー・ラグランジュ方程式の形と同様である。

ニュートンの運動方程式からさらに一般的な方程式であるラグランジュ方程式の導出ができた。これは数学的な意味としては汎関数の極値を求める作業である。**参考文献**

・緒方　秀教　(2011)「変分法」

・柴田　正和　(2017)「変分法と変分原理」