大学数学から見える問題

押川龍太　宮川直友　毛利海斗

2025 年 10 月 31 日

目次

1　一般的な大学入試問題

以下の問題を考える。
自然数 n に対して

$$S(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k-2}, R(x)=\frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}$$

とする。さらに

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

とする。このとき、つぎの問に答えよ。

(1)　等式 $\displaystyle\int_0^1 S(x)dx=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}$ が成り立つことを示せ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ の値を求めよ。

(3)　$S(x)=f(x)-R(x)$ が成り立つことを示せ。

(4)　$\displaystyle\left|\int_0^1 R(x)dx\right|\leq\frac{1}{2n+1}$ が成り立つことを示せ。

(5)　無限級数 $\displaystyle 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ の和を求めよ。

(1),(2) は高校の範囲で解くことができるので (3) から考えます。まずは必要な数学を紹介します。まずは (3) を示す。

$$\begin{aligned}&S(x)=f(x)-R(x)\\ &\iff \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k-2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}\end{aligned}$$

Proof.

$$S(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k-2}=\sum_{k=1}^{n}(-x^2)^{k-1}$$

より $S(x)$ は初項 1, 公比 $-x^2$ の等比級数の初項から第 n 項までの和であるから

$$\begin{aligned}S(x)&=\frac{1-(-x^2)^n}{1-(-x^2)}=\frac{1-(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}\\ &=\frac{1}{1+x^2}-\frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}\\ &=f(x)-R(x)\end{aligned}$$

□

次に (4) を示す。

Proof.

$$\left|\int_0^1 R(x)dx\right|\leq\int_0^1|R(x)|dx$$

であり、また

$$|R(x)|=\frac{x^{2n}}{1+x^2}\leq x^{2n}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 R(x)dx\right| &\leq \int_0^1 x^{2n}dx \\ &= \left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}\end{aligned}$$

□

最後に (5) を求める。(2),(3) より

$$\begin{aligned}\int_0^1 S(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 R(x)dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 R(x)dx\end{aligned}$$

(1)より, 求める和は $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 S(x)dx$と等しいので, 右辺において$n \to \infty$としたときの極限を求めればよい
(4)より

$$0 \leq \left|\int_0^1 R(x)dx\right| \leq \frac{1}{2n+1}$$

であり

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

であるから, はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 R(x)dx = 0$$

ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 S(x)dx = \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{\pi}{4} - \int_0^1 R(x)dx\right\} = \frac{\pi}{4}$$

これで (5) まで解くことができました。ではこの (3) から (5) にある背景を紹介しましょう。

定義 1.1. 三角関数の逆関数を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}
&y = \sin x\text{の逆関数} \implies \arcsin y\text{や}\sin^{-1} y\text{とかく}\quad (\text{但し}, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad -1 \leq y \leq 1) \\
&y = \cos x\text{の逆関数} \implies \arccos y\text{や}\cos^{-1} y\text{とかく}\quad (\text{但し}, 0 \leq x \leq \pi, \quad -1 \leq y \leq 1) \\
&y = \tan x\text{の逆関数} \implies \arctan y\text{や}\tan^{-1} y\text{とかく}\quad (\text{但し}, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < y < \infty)
\end{aligned}$$

定理 1.1. *maclaurin* の定理
関数$f(x)$が$x = 0$の近傍でn回微分可能であれば, この近傍内にあるxに対して, 次式が成立する。

$$\begin{aligned}
&f(x) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(x)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n \\
&R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n \quad (0 < \theta < 1)
\end{aligned}$$

定理 1.2. 関数$f(x)$は$(-R,R)$で無限回微分可能であるとする。xとnに無関係なMが存在して、

$$|f^n(x)| \leq M$$

が成り立てば$f(x)$はマクローリン展開可能である

これらの定義と定理を用いて今回の問題の背景を見ていこう。
まず (3) について、
$y = \arctan x$とする。では$\arctan x$の微分を考えていこう。
定義 3.1 より

$$y = \arctan x \iff x = \tan y$$

となる。これを両辺xで微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x &= \frac{d}{dx}\tan y \\ 1 &= \frac{dy}{dx}\frac{1}{\cos^2 y} \\ \frac{dy}{dx} &= \cos^2 y\end{aligned}$$

を得る。さらに三角関数の性質から

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^2 y} &= 1 + \tan^2 y \\ \cos^2 y &= \frac{1}{1+\tan^2 y} \\ &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

を得る。よって$\arctan x$の微分は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

となる。
ではこの$\arctan x$の微分が(3)とどのような関係があるのか説明していきます。
(3) はこのようなものでした

$$\begin{aligned}&S(x) = f(x) - R(x) \\ &\iff \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k-2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}\end{aligned}$$

これをさらに

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k-2} + \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}$$

と変形する。ここで$f(x)$は$\arctan x$の微分であることがわかる。よって両辺積分すると

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+x^2}dx &= \int \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k-2}dx + \int \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}dx \\ \arctan x &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}x^{2k-1} + (-1)^n \int \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx\end{aligned}$$

となる。これは定理3.1.の$maclaurin$の定理を$\arctan x$に適用したかたちなのです。(3)で証明をしたことで
$\arctan x$に$maclaurin$の定理が適用できることがわかりました。
ここで

$$R_n = (-1)^n \int \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$$

とおく。次に (4) について考える。
(4) はこのようなものでした

$$\left| \int_0^1 R(x)dx \right| \leq \frac{1}{2n+1}$$

(4)では0から1まで積分しているのでこれを(3)から示された $\arctan x$ のマクローリンの定理で0から1まで積分します。

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k-2}dx + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}dx$$
$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k-2}dx + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{1+x^2}dx$$

となる。さきほど R_n と定義したものは上記の式から $\arctan x$ のマクローリンの定理の剰余項である。
(4)を示したので。定理3.2が成り立っていることがわかる。
最後に (5) について考えます。(2),(3) より

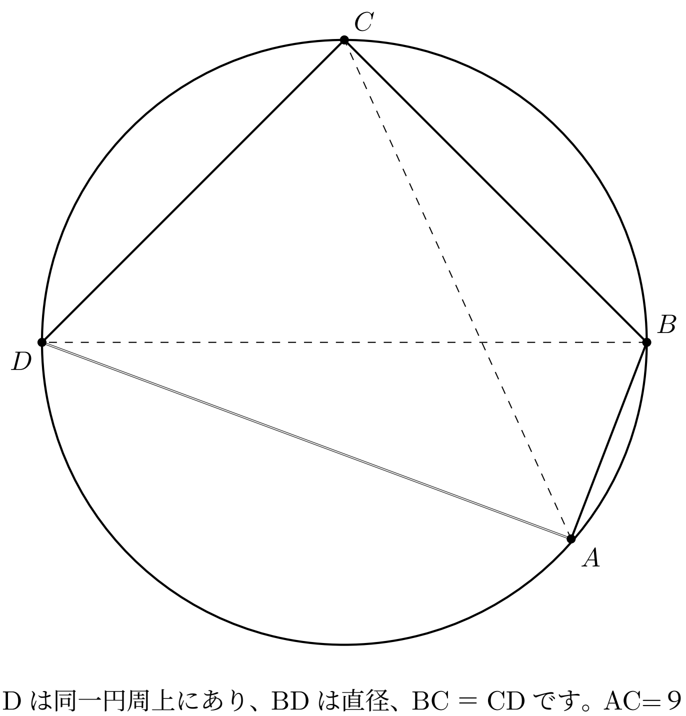
$$\int_0^1 S(x)dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 R(x)dx$$

である。(5) は $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 S(x)dx$ と等しい
(3)でマクローリンの定理, (4)で R_n の収束によりマクローリン展開できることがわかり、

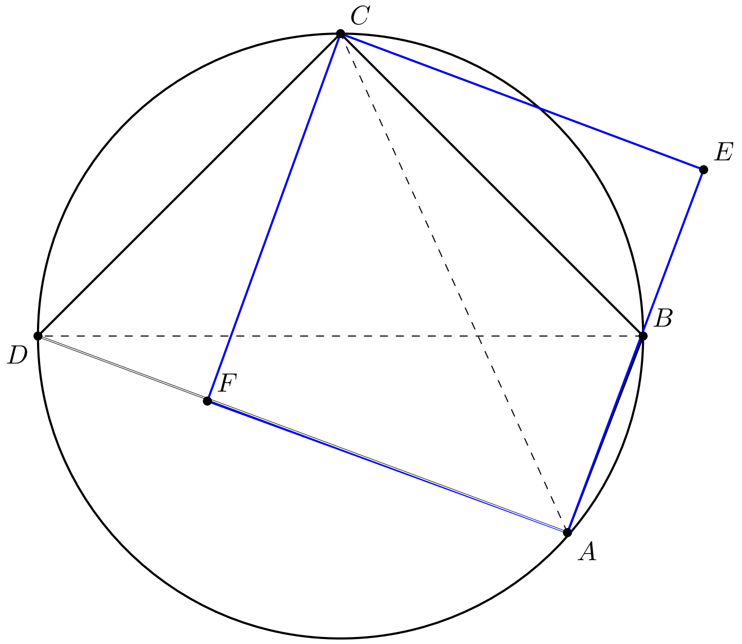
$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$$

とかけるそして0から1で積分したことから(5)の値は $\frac{\pi}{4}$ であることがわかる

2 図形問題



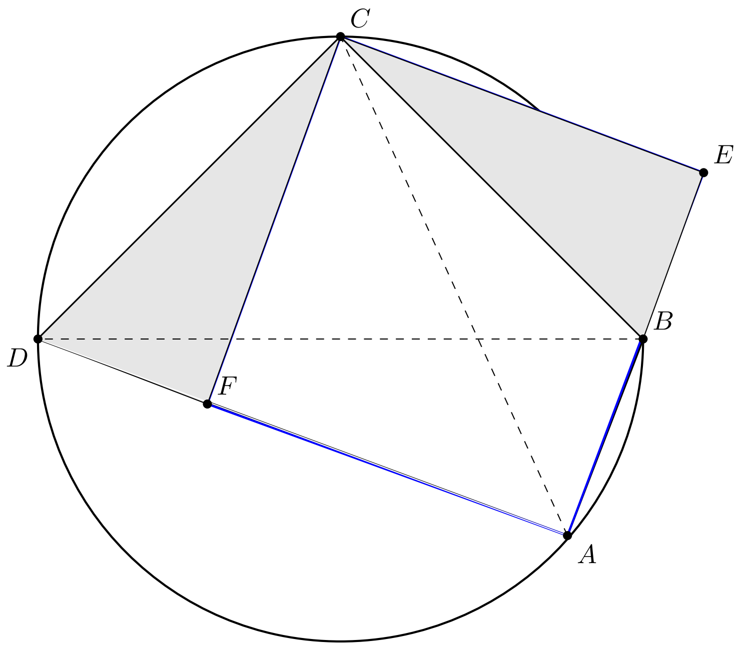
図のように４点 A、B、C、D は同一円周上にあり、BD は直径、BC ＝ CD です。AC＝９ cm のとき、四角形 ABCD の面積を求めよう。

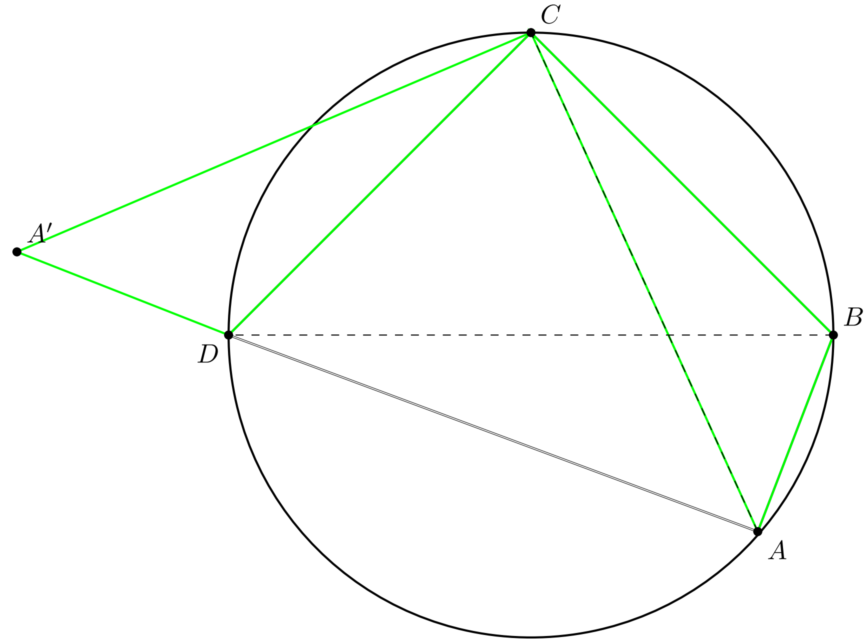


解答１

点 C から直線 AB と線分 AD に垂線をおろし、交点を E、F とする。△ CDF と△ CBE は合同である。直角三角形である。よって、求める面積は、正方形 AECF である。

$$\frac{1}{2} \times 9 \times 9 = \frac{81}{2}$$

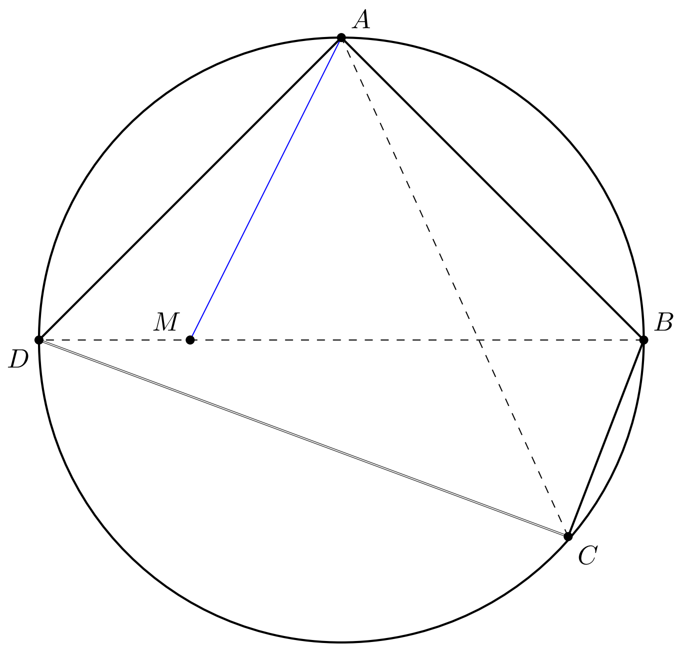




解答 2

△ ABC を点 C を中心に回転移動させて、辺 BC と DC を合わせる。3 点 A、D（B)、A’ は一直線上にある。△ CAA’ は直角二等辺三角形となり、面積を求めることができる。

$$\frac{1}{2} \times 9 \times 9 = \frac{81}{2}$$



円に内接する四角形において AB · CD+AD · BC=AC · BD が成り立つから、A C について解いてみる。$AC = \frac{AB\times CD+AD\times BD}{BD}$ となる。BC=CD より、$AC = \frac{ABBC+ADBD}{BD} AC = \frac{BC(AB+AD)}{BD}$、これを a とする。ここで、今回求める四角形の面積は△ ABD と△ CBD に分割できる。その式は、$\frac{1}{2}ABAD+\frac{1}{2}BC^2$ である。なんとなく a を二乗すると、$AC^2 = \frac{BC(AB+AD)^2}{BD^2}$、$AC^2 = \frac{BC^2(AB+AD)^2}{BD^2}$、$AC^2 = \frac{BC^2(AB^2+2ABAD+AD^2)}{BD^2}$、また、三平方の定理より、$AB^2 + AD^2 = BD^2$ が成り立つから、$AC^2 = \frac{BC^2(BD^2+2ABAD)}{BD^2}$、さらに、特別角 (比; $1:1:\sqrt{2}$) より、$\sqrt{2}BC = BD$ が成り立つ。よって、$AC^2 = \frac{BC^2(2BC^2+2ABAD)}{2BC^2}$、$AC^2 = \frac{1}{2}(2BC^2 + 2ABAD)$、

$AC^2 = BC^2 + ABAD$、$AC^2 = 2(\frac{1}{2}ABAD + \frac{1}{2}BC^2)$ となり、AC の長さだけで四角形 ABCD の面積が求められる!

$$\frac{1}{2}AC^2$$
$$\frac{1}{2} \times 9 \times 9 = \frac{81}{2}$$

定理 2.1. トレミーの定理
対角線BD上に$\angle DAM = \angle BAC$となるように点Mをとる。すると、円周角の定理より、$\angle ADM$と$\angle ACB$の角度は等しいので、三角形AMDとABCは相似。よって、$AD : AC = DM : BC$と$ADBC = ACDM(a)$が成り立つ。同様に、$\angle ABM$と$\angle ACD$の角度は等しいので、三角形ADCとAMBは相似。よって、$AB : AC = BM : CD$と$ABCD = ACBM(b)$が成り立つ。(a)と(b)を足すと、$ABCD + ADBC = AC(BM + DM) = ACBD$。

3 数列問題

最後の問題に関しては実際に大学で学ぶような数学で解いて行きます。
以下の問題について考えていく
数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(1+a_n)^2}, \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

によって定める。
(1) 各 n=1,2,3,$\cdots$ に対し $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおく。$n > 1$ のとき $b_n > 2n$ となることを示せ。
(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ を求めよ。
(3) $\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ。

(1) $\{a_n\}$ の漸化式より、

$$b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{(1+a_n)^2}{a_n}$$

ここでベルヌーイの不等式を用いる。
(ベルヌーイの不等式は大学の要素か絶妙なところがあるが許してほしい。)

定理 3.1. ベルヌーイの不等式
任意の正の整数 n と、-1 より大きくすべての符号が等しい実数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して、

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i + 1) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Proof.
数学的帰納法により、示す。
$n = 1$ のとき、どちらも $1 + x_i$ になるため、成り立つ。
$n = k - 1$ のとき

$$\prod_{i=1}^{k-1}(1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{k-1} x_i$$

と仮定して、両辺に $(1+x_k)$ をかけることにより、

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{k} &\geq \left(\sum_{i=1}^{k-1} x_i\right)(1+x_k) \\ &= 1+\sum_{i=1}^{k} x_i + x_k\left(\sum_{i=1}^{k-1} x_i\right)\end{aligned}$$

このとき、全ての符号が等しいため

$$x_k\left(\sum_{i=1}^{k-1} x_i\right) \geq 0$$

よって

$$1+\sum_{i=1}^{k} x_i + x_k\left(\sum_{i=1}^{k-1} x_i\right) \geq 1+\sum_{i=1}^{k} x_i$$

$$\therefore \quad \prod_{i=1}^{k}(1+x_i) \geq 1+\sum_{i=1}^{k} x_i$$

となり $n=k$ のときも成り立つため、この不等式は成り立つ。

□

$a_n \neq 0$ なのでベルヌーイの不等式より、

$$(1+a_n)^2 > 1+2a_n$$

なので、

$$\begin{aligned}&b_{n+1} = \frac{(1+a_n)^2}{a_n} > \frac{1+2a_n}{a_n} = b_n+2 \\ &\therefore b_{n+1} > b_n+2 \\ &\Rightarrow b_{n+1}-b_n > 2\end{aligned}$$

ここで、この不等式を $n=1$ から $n-1$ まで足していくと

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k) > \sum_{k=1}^{n-1} 2 &\Rightarrow b_n - b_1 > 2(n-1) \\ &\Rightarrow b_n > b_1 + 2(n-1)\end{aligned}$$

ここで、

$$b_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

よって、

$$b_n > b_1 + 2(n-1) = 2n$$

従って、

$$b_n > 2n$$

(2) シュトルツ・チェザロの定理を用いる。

定理 3.2. シュトルツ・チェザロの定理
$\{a_n\}$ を実数列、$\{b_n\}$ を狭義単調増加（または減少）な数列とする。
$b_n \to \infty (n \to \infty)$ または $a_n \to 0, b_n \to 0 (n \to \infty)$ のとき、

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

が存在すれば、

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

が成り立つ。

ここでこの定理を証明するために $\epsilon - N$ 論法を用いるため、数列の極限を記しておく。

定義 3.1. $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$ であるとは

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$$

が成り立つときにいう。

Proof.

$\{b_n\}$ が狭義単調増加の数列のときを示す。
$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} = b_n} = l$ が存在するとする。
シュトルツ・チェザロの定理を定義式にすると

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} = b_n} - l \right|$$

(1) より、$b_{n+1} - b_n > 0$ なので、

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - l \right| < \epsilon &\Rightarrow l - \epsilon < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - l < l + \epsilon \\ &\Rightarrow (l - \epsilon)(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < (l + \epsilon)(b_{n+1} - b_n) \end{aligned}$$

ここで、$n > N$ のもとで

$$\begin{aligned} &(l - \epsilon) \sum_{k=N+1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) < \sum_{k=N+1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) < (l + \epsilon) \sum_{k=N+1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \\ &\Rightarrow (l - \epsilon)(b_n - b_{N+1}) < a_n - a_{N+1} < (l + \epsilon)(b_n - b_{N+1}) \\ &\Rightarrow (l - \epsilon)(b_n - b_{N+1}) + a_{N+1} < a_n < (l + \epsilon)(b_n - b_{N+1}) + a_{N+1} \end{aligned}$$

ここで $\{b_n\}$ が狭義単調増加で非有界であるため、

$$\exists N' \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > N' \Rightarrow b_n > 0$$

なので $n > \max(N, N')$ のとき、b_n で割ってもいいので

$$\begin{aligned} &(l - \epsilon)(b_n - b_{N+1}) + a_{N+1} < a_n < (l + \epsilon)(b_n - b_{N+1}) + a_{N+1} \\ &\Rightarrow (l - \epsilon) \left(1 - \frac{b_{N+1}}{b_n} \right) + \frac{a_{N+1}}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < (l + \epsilon) \left(1 - \frac{b_{N+1}}{b_n} \right) + \frac{a_{N+1}}{b_n} \\ &\Rightarrow l - \epsilon + \frac{a_{N+1} - (l - \epsilon) b_{N+1}}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < l + \epsilon + \frac{a_{N+1} - (l + \epsilon) b_{N+1}}{b_n} \end{aligned}$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
{c_n}^{(+)} &= \frac{a_{N+1}-(l-\epsilon)b_{N+1}}{b_n} = \frac{a_{N+1}-lb_{N+1}}{b_n} - \frac{b_{N+1}}{b_n}\epsilon \\
{c_n}^{(-)} &= \frac{a_{N+1}-(l+\epsilon)b_{N+1}}{b_n} = \frac{a_{N+1}-lb_{N+1}}{b_n} + \frac{b_{N+1}}{b_n}\epsilon
\end{aligned}
$$

とおく。
$a_{N+1}-lb_{N+1}, b_{N+1}$ が定数であり、$\{b_n\}$ が狭義単調増加で非有界なので

$$
\begin{aligned}
&\forall\epsilon>0, \exists N_{(+)}\in\mathbb{N} \quad s.t. \quad \forall n\in\mathbb{N}, n>N_{(+)} \Rightarrow |c_n^{(+)}|<\epsilon \\
&\forall\epsilon>0, \exists N_{(-)}\in\mathbb{N} s.t. \forall n\in\mathbb{N}, n>N_{(-)} \Rightarrow |c_n^{(-)}|<\epsilon
\end{aligned}
$$

$n>\max(N, N', N_{(+)}, N_{(-)})$ とすれば

$$
l-2\epsilon < l-\epsilon+c_n^{-} < \frac{a_n}{b_n} < l+\epsilon+c_n^{(+)} < l+2\epsilon
$$

$\epsilon'=2\epsilon$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&l-2\epsilon < l-\epsilon+c_n^{-} < \frac{a_n}{b_n} < l+\epsilon+c_n^{(+)} < l+2\epsilon \\
&\Rightarrow -\epsilon' < \frac{a_n}{b_n}-l < \epsilon' \\
&\Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n}-l\right| < \epsilon'
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
&\forall\epsilon'>0, n>\max(N, N', N_{(+)}, N_{(-)}) \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n}-l\right| < \epsilon' \\
&\to \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l
\end{aligned}
$$

□

(1) より、$b_n>2n\to\infty(n\to\infty)$ なので、$\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$
よって、$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=0$
$b_n=n$ として (2) にシュトルツ・チェザロの定理を用いると、

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}+\sum_{k=1}^n a_n-\sum_{k=1}^n a_n}{n+1-n} \\
&= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{(1+a_n)^2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

補足

α に収束する数列 $\{a_n\}$ に対して、

$$
c_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}
$$

をチェザロ平均といい、そして

$$
\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n=\alpha
$$

が成り立つ。

(2) のようにシュトルツ・チェザロの定理から導き出すこともできるが、
$\epsilon-N$ 論法からも証明することができる。

(3) シュトルツ・チェザロの定理より、

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{b_n}} = \frac{1}{2}$$

4 おわりに

今回は高校入試、大学入試を大学レベルの数学で解いたり、考えてみました。今回紹介したものだけではなく大学の数学をやればやるほど昔やったなってなるものが出で来るのでそこにも注目してこれからの大学の勉強をしていきたい。

参考文献

[1] 佐久間正樹,「取扱注意！ 高校数学を大学数学で解く「チート解法」」, エール出版社, 2024.

[2] マスオ, 近藤真治, でーちー,” ベルヌーイの不等式” 高校数学の美しい物語,2022/04/08,https://manabitimes.jp/math/877(2025/10/29)

[3] マルチーズ先生,”【高校生向け解説】 ε -N 論法を用いてシュトルツ チェザロの定理を証明”,hatena blog,2024/1/16,https://prof-maltese.hatenablog.com/entry/2024/01/16/202717(2025/10/29)