

# 2024 年度 芝浦祭 チャレンジ問題

数理科学研究会

## 問題 1 (★★★★★☆☆☆☆)

2024 年度 芝浦祭 懸賞問題の問 5 と同条件下のゲームを考える.

- 横向きに並んだ  $n$  マスを考える.
- いくつかのマスにはカエルが乗っている.
- カエルたちは右端に進みたいと考えている.
- 自分の前のマスに別のカエルがいてその先のマスが空いていた場合にのみ, 前のカエルを飛び越えて 2 マス先に進むことができる.
- 初期の状態から上手くカエルを動かして右端に寄せることが出来るときに, 動かす前の元の盤面を良い盤面と呼ぶことにする.

ここで, 良い盤面の個数を  $n$  を用いて表しなさい.

## 問題 2 (★★★★★☆☆☆☆)

次の極限値を求めなさい.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^e)^{i\pi(2n!)}$$

## 問題 3 (★★★★★☆☆☆☆)

次の極限値を求めなさい.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} - \frac{2}{e}x \right\}$$

## 問題 4 (★★★★★☆☆☆☆)

$n$  次元単位超立方体を,  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$  で定まる  $n - 1$  次元超平面で切った断面積を  $S_n$  とおく. このとき極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めなさい.

## 問題 5 (★★★★★☆☆☆☆)

0 より大きく  $\pi^2$  未満であるような有理数のうち, その既約分数の分母が  $n$  以下であるものの総積を  $P_n$  とする. このとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} (P_n)^{\frac{1}{n^2}}$  を求めなさい.