懸賞問題 (中学 · 高校生向け)

$$A_1 = \frac{2}{3},\ \ A_2 = \frac{2}{7},\ \ A_3 = \frac{2}{31},\ \ A_4 = x$$

x に当てはまる実数は何か.

解答

$$x = \frac{2}{127}$$

解説

A_1, A_2, A_3 より

$$x = \frac{2}{2^k - 1}\ \ (k \text{ は自然数})$$

と予想される.

$$A_1 = \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6},\ \ A_2 = \frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28},\ \ A_3 = \frac{2}{31} = \frac{1}{16} + \frac{1}{496}$$

と分解できる.

A_n を分解したとき, それぞれ小さい方から数えて n 番目の完全数が分母にある分数があるから, A_4 のとき $n = 4$ で 8128 となる.

また, A_n の分母は n 番目の完全数について, 2 以外の素因数であるから

$$8128 = 2^6 \times 127$$

となり

$$A_4 = \frac{2}{127}$$

懸賞問題 (高校生向け)

2 次関数 $y = f(x)$ は 2 点 $(0, 0)$, $(2p, 0)$ を通り $(p > 0)$, 曲線 $y = e^x$ 上に頂点をもつとする.

1. $f(x)$ の x^2 の係数を p で表せ.
2. 曲線 $y = f(x)$ と $y = e^x$ が x 軸, および 2 直線 $x = 0$, $y = p$ で囲まれた図形をそれぞれ F_1, F_2 とする. さらに F_1, F_2 を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積をそれぞれ V_1, V_2 とする. このとき V_1, V_2 の値を, p を用いて表せ.
3. $\displaystyle\lim_{p\to+0}(\frac{V_1}{V_2})$ を求めよ.

解説

1. $y = f(x)$ のグラフは 2 点 $(0, 0), (2p, 0)$ を通るので, x^2 の係数 a とおくと,
$$f(x) = ax(x - 2p)$$
条件より, 頂点は (p, e^p) となるので,
$$e^p = a \cdot p(p - 2p) = -ap^2,\ \ a = \frac{-e^p}{p^2}$$

2.
$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^p a^2x^2(x-2p)^2 dx \\ &= \pi a^2 \int_0^p (x^4 - 4px^3 + 4p^2x^2)dx) \\ &= \pi a^2 (\frac{p^5}{5} - p \cdot p^4 + \frac{4}{3}p^2 \cdot p^3) = \frac{8}{15}\pi a^2 p^5 \\ &= \frac{8}{15}\pi p^5 \cdot \frac{e^{2p}}{p^4} = \frac{8}{15}\pi p e^{2p} \qquad (1) \end{aligned}$$
また
$$V_2 = \pi \int_0^p (e^x)^2 dx = \frac{\pi}{2}(e^{2p} - 1) \qquad (2)$$

3. 式 (1), (2) より $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{\frac{8}{15}\pi p e^{2p}}{\frac{\pi}{2}(e^{2p}-1)} = \dfrac{8}{15} \cdot \dfrac{2p}{e^{2p-1}} \cdot e^{2p}$ と変形すると,
$$\lim_{p\to+0}(\frac{V_1}{V_2}) = \lim_{p\to+0} \frac{8}{15} \cdot \frac{2p}{e^{2p}-1} \cdot e^{2p} = \frac{8}{15}$$

注

$\lim_{h\to 0)} \frac{e^{h-1}}{h} = 1$ という e の定義を使う.

懸賞問題 (高校生向け)

日本人の二人に一人ががんに罹患するといわれている. その中で胃がんは毎年約 10 万人に 140 人の割合で新たに発見される. 現在日本で行われている胃がんの検査法の一つとして, バリウムを飲んだ後に X 線をあてて写真を撮る検査法である胃 X 線検査がある. この検査の精度はおよそ 7〜9 割といわれているが, ここでは精度を 9 割として計算する. つまり, この検査は胃がんの人が受けると 90 %で「陽性」, そうでない人が受けると 10 %で「陽性」という結果が出る. では, この検査を受け, 「陽性」と診断された場合, 被験者が本当に胃がんを患っている確率を求めよ.

解説

$$
\begin{aligned}
(\text{本当に胃がんに罹患している}) &= \frac{(\text{胃がんで陽性})}{(\text{陽性と診断される})} \\
&= \frac{(\text{胃がんで陽性})}{(\text{胃がんで陽性}) + (\text{胃がんではないが陽性})}
\end{aligned}
$$

より,

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{140}{100000}\frac{9}{10}}{\frac{140}{100000}\frac{9}{10} + \frac{100000-140}{100000}\frac{1}{10}} &= \frac{\frac{126}{100000}}{\frac{10112}{100000}} \\
&= \frac{63}{5056}
\end{aligned}
$$

これが解答また, これを小数にすると, $0.01246\cdots$ となり, 丸めて百分率を用いて表すと 1.25% となる.

懸賞問題 (大学 1 年生向け)

1. 「関数 $h(t)$ が $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能，$h(a)=h(b)$ を満たす時，f $'(c)=0$ を満たす c が $a<c<b$ で存在する．」ことを用いて
   「$f(t)$，$g(t)$ が共に $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能，$f'(c)\neq 0$ を満たす時,
   $\dfrac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}=\dfrac{g'(c)}{f'(c)}$ を満たす c が $a<c<b$ で存在する」ことを示せ.
   ただし関数 $h(t)$ について $h(t)=\dfrac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}(f(t)-f(a))-(g(t)-g(a))$ として用いてもよい.

2. 「$f(x),g(x)$ が (a,b) で微分可能，$f'(x)\neq 0$，$\displaystyle\lim_{x\to a+0}g(x)=\lim_{x\to a+0}g(x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在する時，$\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{g'(x)}{f'(x)}$ が成立する」ことを示せ.
   ただし $f(a)=0,g(a)=0$ と定義し，$f(x)$ と $g(x)$ は $[a,b)$ で連続とみなしてよい.

3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$ を求めよ.
   ただし，問 2 で示した式を変形した式 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{g'(x)}{f'(x)}$ を用いてもよい.

解説

1. $t=a$ の時，$h(a)=0$ $t=b$ の時，$h(b)=0$ よって $h(a)=h(b)$
   条件より

$$h'(c)=0 \tag{1}$$

また,

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}(f(t)-0)-(g(t)-0) \\ h'(t) &= \frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}f(t)-g(t) \end{aligned}$$

t=c を代入して

$$h'(c)=\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}f(c)-g(c) \tag{2}$$

(1)(2) より

$$\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}f(c)-g(c)=0$$

したがって

$$\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{g'(c)}{g'(c)}$$

2. $a<d<b$ となる d について考える. この時 a と d の間では $f(x)$ と $g(x)$ は共に $[a,d]$ で連続, (a,b) で微分可能である.
問題 1 より

$$\frac{g(d)-g(a)}{f(d)-f(a)}=\frac{g'(c)}{g'(c)}$$

を満たす c が $a<c<d$ で存在する.
したがって

$$\begin{aligned}\frac{g(d)-g(a)}{f(d)-f(a)}&=\frac{g'(c)}{g'(c)}\\ \frac{g(d)}{f(d)}&=\frac{g'(c)}{g'(c)}\end{aligned}$$

x に置き換えると

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g'(x)}{g'(x)}$$

3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)'}{(x)'}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\\ &= 0\end{aligned}$$

以上は大学一年で学習するロピタルの定理（問題 2 で証明した命題）を利用した解法である. 高校の知識では置換方法を暗記していなければ解けないこのような問題も, 大学の知識で暗記なしに解くことができることを紹介する目的で作った問題. 実際に記述式の問題で使用することは避けるべきであるが, このような内容を知っておくだけで高校レベルの内容を一つ高い視点から見ることができ, 変に気張らず大学受験用のテクニックはテクニックでと割り切って使えるようになると思う.
以下に高校の知識のみで解く方法を書いておく. 大学受験で知っておく

べき内容なので是非目を通しておいてほしい.

$x = e^t$とおくと $t = \log x$ $x \to \infty$ より $t \to \infty$

$$(\text{与式}) = \lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^t}$$

ここで t は十分大きく $t > 0$ としてよいので, $0 < t < 2^t$
これより

$$0 \leq \lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^t} \leq \lim_{t \to \infty} (\frac{2}{e})^t$$

(右辺) について, $0 < \dfrac{2}{e} < 1$ より (右辺) $= 0$
したがってはさみうちの定理より

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^t} = 0$$

t を x に置き換えて

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

懸賞問題 (高校生向け)

以下の文章内の空欄$\boxed{(ア)}$〜$\boxed{(オ)}$に当てはまる語句や数式を書け.

多項式に含まれる因数を見抜くのに, 因数分解という方法がある. 例えば,
$a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$ という式を因数分解すると, $\boxed{(ア)}$となる. これには, 大きく分けて二通りの解答方針がある.
また, $\boxed{(ア)}$において, $2s=a+b+c$ とおき, 括弧内を簡単にすると,

$$\boxed{(イ)} \tag{1}$$

という式が得られる.

今度は, $BC=a, CA=b, AB=c(a,b,c$ は定数) である三角形 ABC の面積について考えよう. 三角形は, その三辺の長さがわかれば, 形と大きさがただ1 つに定まるから, 面積も定まるはずである. 三角形 ABC の面積が,

$$\frac{1}{2}ABAC\sin A$$

と表せることを思い出して, この三角形の面積を S とすると, 面積 S は, a,b,c を用いて,

$$\boxed{(ウ)}$$

と表すことができる. さらにこれを, $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とおくことによって,

$$S=\boxed{(エ)} \tag{2}$$

と簡潔に表すことができる. これは, $\boxed{(オ)}$の公式と呼ばれる式であるが, この公式の高校数学における実用的価値は, 意外に乏しい.
以上の (1), (2) より, (1) には重要な幾何学的意味があることがわかる.

解説

$\boxed{(ア)}$

（解法 1）

a の 4 乗の多項式とみて因数分解する．

$$
\begin{aligned}
&a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2\\
&=a^4-2a^2(b^2+c^2)+(b^2+c^2)^2-4b^2c^2\\
&=\{a^2-(b^2+c^2)\}^2-4b^2c^2\\
&=\{a^2-(b^2+c^2)+2bc\}\{a^2-(b^2+c^2)-2bc\}\\
&=\{a^2-(b^2-2bc+c^2)\}\{a^2-(b^2+2bc+c^2)\}\\
&=\{a^2-(b-c)^2\}\{a^2-(b+c)^2\}\\
&=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c) \qquad \cdots\text{（答）}
\end{aligned}
$$

（解法 2）

$(a^2-b^2-c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2b^2c^2-2a^2b^2-2c^2a^2$ を利用する．

$$
\begin{aligned}
&a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2\\
&=(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2\\
&=(a^2-b^2-c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2-2bc)\\
&=\{a^2-(b^2-2bc+c^2)\}\{a^2-(b^2+2bc+c^2)\}\\
&=\{a^2-(b-c)^2\}\{a^2-(b+c)^2\}\\
&=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)\cdots\text{（答）}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{(イ)}}$

$2s=a+b+c$ より，

$a+b=2s-c, c=2s-a-b, b+c=2s-a$ を得る．これらを $\boxed{\text{(ア)}}$ に代入すれば，

$$
\begin{aligned}
&2s(2s-2c)(2s-2b)(2a-2s)\\
&=-2s(2s-2c)(2s-2b)(2s-2c)\\
&=-16s(s-a)(s-b)(s-c)\cdots\text{（答）}
\end{aligned}
$$

$\boxed{(ウ)}$

余弦定理より，

$$
\begin{aligned}
\cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\
\sin A &= \sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{-(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2)}}{2bc}
\end{aligned}
$$

$\boxed{(ア)}$の（答）より，

$(\text{上式}) = \dfrac{\sqrt{-(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)}}{2bc}$ であるから，

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}ABAC\sin A \\
&= \frac{1}{2}bc\frac{\sqrt{-(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)}}{2bc} \\
&= \frac{\sqrt{-(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)}}{4} \text{（答）}
\end{aligned}
$$

$\boxed{(エ)}$

$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ は，$2s = a+b+c$ と同じなので，
$\boxed{(ウ)}$の（答）より，

$$
S = \frac{\sqrt{-(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)}}{4}
$$

$\boxed{(イ)}$の（答）より，
$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c) = -16s(s-a)(s-b)(s-c)$ なので，

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{\sqrt{-(-16s(s-a)(s-b)(s-c))}}{4} \\
&= \frac{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{4} \\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \cdots \text{（答）}
\end{aligned}
$$

$\boxed{(オ)}$ $\cdots$ヘロン

懸賞問題 (中学生向け)

今カードが 2 枚伏せてあるとする, どちらも A か B のカードで, A のカードである確率はどちらも $\frac{1}{2}$ である, さて, 少なくとも一方が A であるなら, もう一方が A である確率は？

解説

2 枚のカードの組み合わせは

$$\{AA, AB, BA, BB\}$$

の 4 通りで, この結果はどれも同じ程度に起こると期待できるから, 少なくなくとも一方が A であるとき, もう一方が A である確率は $\frac{1}{3}$ である,

懸賞問題 (中学 · 高校生向け)

王様は 1000 本のワインをもっています, 1000 本のワインのうち 1 本だけ毒入りのワインがあることがわかりました, 毒は 22～23 時間後に効果がでて, 飲んだ人は死んでしまいます, 王様は一日後（24 時間後）にワインが飲みたいと言いました, 王様は奴隷に飲ませ, 確かめました. 最低何人の奴隷が必要でしょうか？(1 人何回でも飲むことができる,)

解答

10 人

解説

まず, 2 人の時, 1 人目が 1 本を飲み, 2 人目が 2 本目を飲み, 1 人目と 2 人目が 3 本目を飲む, 4 本目は飲まない, このように 2 人の場合 4 本確かめることができ, 3 人の場合 8 本まで確かめることができる.

4 人の時 16 本, 5 人の時 32 本, 6 人の時 64 本, 7 人の時 128 本, 8 人の時 256 本. 9 人の時 512 本, 10 人の時 1024 本確かめることができる. （2 進法を使い解く）

懸賞問題 (中学・高校生向け)

次の a, b, c, d に当てはまる数字を答えろ.

1. $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ a,\ 36,\ 49,\ \cdots$
2. $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ b,\ 8,\ 13,\ 21,\ \cdots$
3. $1,\ 3,\ 6,\ 11,\ c,\ 29,\ 42,\ 59,\ \cdots$
4. $$\begin{array}{llllll} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ 1 & 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & \mathrm{d} & 3 & 1 \end{array}$$

解答

1. 25
2. 5
3. 18
4. 2

解説

1. 階差数列が $2n+1$ の数列, もしくは自然数の二乗の数列
2. フィボナッチ数列
3. 階差数列が素数の数列
4. ひとつ下の段はひとつ上の段の数字の個数を説明している.
   （例：上から 4 段目は 3 段目の 1 が 1 個, 2 が 1 個と説明している)

懸賞問題 (中学 · 高校生向け)

5 人でジャンケンをするとき, あいこになる確率を求めよ. (ただし, ジャンケンをするのは一度のみである.)

解答

$$\frac{17}{27}$$

解説

あいこにならない確率を求めて 1 から引けばよい. 全員の手の出し方は全部で 3^5 通り. あいこにならないのは全員の出した手がちょうど 2 種類であるとき. どの 2 種類かで 3 通り（「全員がグーとチョキ」, 「全員がチョキとパー」, 「全員がパーとグー」）その各々に対して考えられる場合の数は $2^5 - 2$ 通り（例えば「全員がグーまたはチョキ」という場合に数は 2^5 通りだが「全員がグー」または「全員がチョキ」という 2 通りを除外する必要がある）以上より求める確率は

$$1 - \frac{3(2^5 - 2)}{3^5} = \frac{17}{27}$$

懸賞問題 (中学生向け)

小町算（こまちざん）は数の遊びである数学パズルの一種.

$$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 = 100$$

という数式の $\square$ の中に, $+$, $-$, $\times$, $\div$, 空白のいずれかを一つずつ入れて正しい数式を完成させるというものである. 小町の名称は小野小町に由来するが, 小野小町のように美しい数式という意味など諸説ある. 一般的な解法が存在しないのでトライ&エラーが肝心である.

$$\text{（例題）} 1+2+3-4+5+6+78+9=100$$
$$1\times2\times3\times4+5+6\times7\times8+9=100$$

大宮祭懸賞問題　小町算 10 題 !!!

$$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 = 100 \quad (1)$$
$$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 = 250 \quad (2)$$
$$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 = 303 \quad (3)$$
$$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 = 711 \quad (4)$$
$$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 = 369 \quad (5)$$
$$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 = 608 \quad (6)$$
$$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 = 392 \quad (7)$$
$$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 = 481 \quad (8)$$
$$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 = 621 \quad (9)$$
$$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 = 504 \quad (10)$$

解説

一般的な解法が存在しないので, とにかく記号と空白を当てはめていくしかない. 下に解答例を示したが, このほかにも考えられる.

$$1+2+3+4+5+6+7+8\times 9=100 \tag{1}$$

$$12+34\times 5+67-8+9=250 \tag{2}$$

$$12+3\times 45+67+89=303 \tag{3}$$

$$12-34-56+789=711 \tag{4}$$

$$12-34+56\times 7+8-9=369 \tag{5}$$

$$123+4+56\times 7+89=608 \tag{6}$$

$$1+23\times 4+5\times 6\times 7+89=392 \tag{7}$$

$$1-23+456+7\times 8-9=481 \tag{8}$$

$$1-2-34+567+89=621 \tag{9}$$

$$1+23+456+7+8+9=504 \tag{10}$$

懸賞問題 (中学・高校生向け)

下の表 1 のように縦 8 マス横 8 マスの正方形で囲まれた図から左上と右下の正方形を切り取った. このとき, 表 2 のような正方形が二つくっついている図形を表 1 にすべてはまるように敷き詰めようと思う. これは可能だろうか, 不可能だろうか？可能な場合敷き詰め方を, 不可能な場合それを証明せよ

表 1: $8 \times 8 - 2$ の正方形

$\ddots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$							
$\vdots$							
$\vdots$							
$\vdots$							
$\vdots$							
$\vdots$							
$\vdots$							$\ddots$

表 2: 2 枚の正方形

$\cdots$	$\cdots$

解説

表 3: $8 \times 8 - 2$ の正方形

$\ddots$	$\times$		$\times$		$\times$		$\times$
$\times$		$\times$		$\times$		$\times$	
	$\times$		$\times$		$\times$		$\times$
$\times$		$\times$		$\times$		$\times$	
	$\times$		$\times$		$\times$		$\times$
$\times$		$\times$		$\times$		$\times$	
	$\times$		$\times$		$\times$		$\times$
$\times$		$\times$		$\times$		$\times$	$\ddots$

表 3 のように等間隔ごとに印をつける. 敷き詰めるには表 4 のように敷き詰めていくことになるが, このとき敷き詰めるには, $\times$ 印と無印の正方形が等

表 4: 2 枚の正方形

$\times$	$\cdots$

しく必要である. しかし, 表 3 の印を数えてみると $\times$ 印と無印はそれぞれ 32 個と 30 個である. 従って敷き詰めることは不可能である.

懸賞問題 (高校生向け)

次の 1〜3 を求めよう.

1. $\int \tan x dx$
2. $\int \log x dx$
3. $\int \dfrac{1}{\cos x} dx$

解説

1. （与式）$= -\log(|\cos x|) + C(\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ と考える)
2. (与式) $= x \log x - x + C$(部分積分を利用)
3. (与式) $= \dfrac{1}{2} \log \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} + C(\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{\cos^{2x}}$ とし $\sin x = t$ と置換する)

懸賞問題 (小学生向け)

3×3 の正方形の中に, $1 \sim 9$ の数字が 1 つずつ入っているように, 下の表を埋めてください. そして, 以下の計算をしてください.

表 5: 良い例

9	5	1	9
6	2	3	6
8	7	4	8
9	5	1	9

表 6: 悪い例

5	4	2	1
9	1	6	3
3	7	8	4
4	5	2	9

1					2
		A	B		
		C	D		
3					4

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{D} =$$

解答

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{D} = 10$$

解説

同じ数字が 2 マス離れていれば良い.

例

1	7	2	1	7	2
5	8	6	5	8	6
3	9	4	3	9	4
1	7	2	1	7	2
5	8	6	5	8	6
3	9	4	3	9	4

よって，

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\mathrm{D}=10$$

懸賞問題 (中学生向け)

1 人が 1 ～ 100 まで数字を決めてもう 1 人がその数字を当てる数当てゲームをする.

数を当てる人は最低何回質問をすれば数を当てることができるか.
(ただし, 質問で直接答えを聞くことを禁止します.)

解答

7 回

解説

当てる数を例えば 14 とする.
まず 1 ～ 50 か 51 ～ 100 を質問する. (この場合 1 ～ 50 と答える)
次に 1 ～ 25 か 26 ～ 50 を質問する. (この場合 1 ～ 25 と答える)
次に 1 ～ 13 か 14 ～ 25 を質問する. (この場合 14 ～ 25 と答える)
次に 14 ～ 19 か 20 ～ 25 を質問する. (この場合 14 ～ 19 と答える)
次に 14 ～ 16 か 17 ～ 19 を質問する. (この場合 14 ～ 16 と答える)
次に 14 ～ 15 か 16 を質問する. (この場合 14 ～ 15 と答える)
最後に 14 か 15 を質問する. (この場合 14 と答える)
以上より 7 回質問すれば必ず当てられる.

懸賞問題 (高校生向け)

$2=1$ の証明を以下に記した. しかし, 以下の式変形には正しくない部分が存在する. どこに正しくない部分があるか答えよ.

$a=b$ とおく.

$$a=b$$

両辺に a を両辺にかける.

$$a^2=ab$$

両辺から b^2 を引く.

$$a^2-b^2=ab-b^2$$

左辺の因数分解をし, 右辺を b でまとめる.

$$(a+b)(a-b)=b(a-b)$$

両辺を $(a-b)$ で割る.

$$a+b=b$$

a に b を代入する.

$$2b=b$$

両辺を b で割る.

$$2=1$$

解説

仮定としておいた $a=b$ は式変形をすると $a-b=0$ となる.$(a-b)$ で割るとは 0 で割ることになるのでそこが間違えです.

懸賞問題 (中学生向け)

ここにロウソクがあります. ただし, このロウソクは両端から火をつけられるようになっています.

このロウソクの片方に火をつけ, ロウソクが全部燃えてしまうまでの時間はちょうど 1 時間です.

しかし, 燃える速度は一定ではありません.

例えば, 半分までは 10 分で燃えてしまい, 残りの半分に 50 分かかるというロウソクもあるかもしれません.

そういった燃え方はロウソクによってバラバラです.

ただし, 全部燃えきる時間は必ず 1 時間です.

このロウソクを使って 45 分を計測してください.

なお, ロウソクは何本使ってもかまいません.

解答

まず, 二本のロウソクを準備します.
一本目のロウソクには, 片側だけに火をつけます.
もう一つのロウソクには, 両端に火をつけます.
これらの火をつけるタイミングはすべて同時です.
両端に火をつけたロウソクがすべて燃え終わったら, はじめに片側だけ火をつけたロウソクの
もう片側にも火をつけます.

解説

はじめに両端から火をつけたロウソクが燃えるまで 30 分,
そこから片側だけに火をつけていたロウソクに両端から火をつけ 15 分,
よってすべてのロウソクが燃え尽きるのは 30 分+15 分=45 分となり,
45 分が計測できます.

懸賞問題 (高校生向け)

次のパスワードを解け.

暗号鍵　BUILD(12 33 19 23 14)

CONSTANT　TH → 25 59 44 54 46 23 58 51 55 32

password　31 58 51 38 31 41 44 42 47 28 23

A	B	C	D	E	F	G	H	I
J	K	L	M	N	O	P	Q	R
S	T	U	V	W	X	Y	Z	num

解答

A.

$BUILD$ の中身は図にある英字の行と列を表している.B は 1 行目 2 列 ,U は 3 行目 3 列.$CONSTANTTH$ は暗号鍵を使い解く.C は $25-12=13$,O は $59-33=26$, という風に引き算をしていけば.各々の答えが英字の行と列に一致する.これを使いパスワードを解くと,$INTEGRALMDA$ となる.中学生までならここまでで正解とする.

INTEGRALMDA を積分 (Integrarl の翻訳)MdA のように分解すると, C を積分定数として

$$\int MdA = MA + C$$

となる. この C に CONSTANT(定数) TH を加えて

$$MA + TH = MATH$$

答えは MATH(数学)

懸賞問題

4 つの数字と四則演算 $(+, -, \times, \div)$ とカッコのみを使って答えを 10 にしてください. ただし, 2 つ以上の数字をくっつけて 1 つの数字にしてはいけません. また, べき乗も使ってはいけません.
(例: 2 3 3 4 $\to (3 \div 3 + 4) \times 2 = 10$)

1. 2 5 6 9
2. 5 7 7 7
3. 6 7 9 9
4. 9 9 9 9
5. 1 3 6 8
6. 3 3 3 9
7. 7 8 9 9
8. 1 1 5 8
9. 1 1 9 9
10. 3 4 7 8

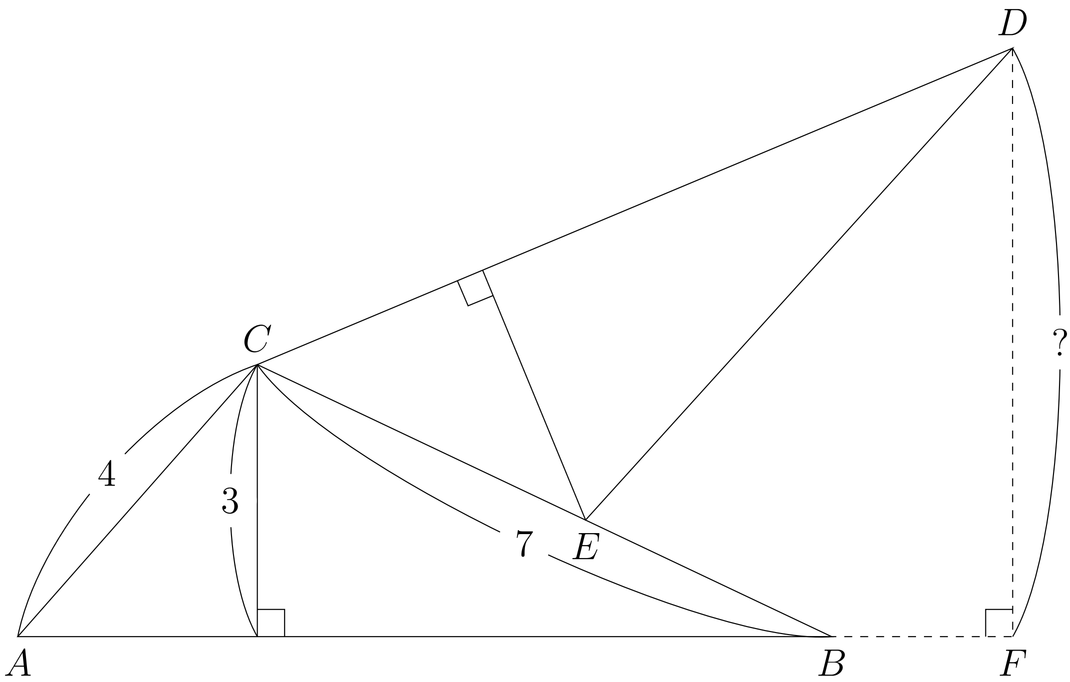
解答

A.

1. 2 5 6 9 $\to 2 + 5 - 6 + 9$
2. 5 7 7 7 $\to 5 \times (7 + 7) \div 7$
3. 6 7 9 9 $\to 7 + (9 + 9) \div 6$
4. 9 9 9 9 $\to (9 \times 9 + 9) \div 9$
5. 1 3 6 8 $\to 6 \div 3 \times 1 + 8$
6. 3 3 3 9 $\to (3 \times 9 + 3) \div 3$
7. 7 8 9 9 $\to (9 - 7) \times 9 - 8$
8. 1 1 5 8 $\to 8 \div (1 - 1 \div 5)$
9. 1 1 9 9 $\to (1 + 1 \div 9) \times 9$
10. 3 4 7 8 $\to (3 - 7 \div 4) \times 8$

懸賞問題

$\triangle ABC$ と $\triangle CDE$ は合同である. 線分 DF の長さを求めよ.



解答

A. $\frac{183}{28}$

解説

AC と ED が平行
AB と ED の交点を G, C から AB に下ろした垂線の交点を H とする
$\triangle ABC \sim \triangle GBE$ と $BE = 3$ より $GE = 12/7, GD = 61/7$
$\triangle AHC \sim \triangle GFD$ より $DF = 183/28$

懸賞問題

3 の倍数は各位の和が 3 の倍数であることが条件である。3 桁の場合

3 桁の整数を 100a+10b+c とすると

$$100a + 10b + c = 3(33a + 3b) + a + b + c$$

と変形できる。よってこの 3 桁の整数が 3 で割れるための条件は a+b+c、つまり各位の和が 3 の倍数であることである。

では 11 の倍数は各位がどのような場合であるか。

解答

A.(偶数の位の和)-(奇数の位の和) が 11 の倍数の時。

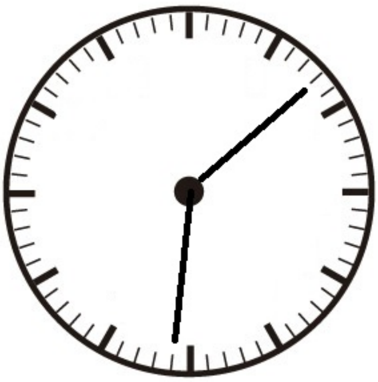
解説

4 桁の整数の場合
4 桁の整数を 1000a+100b+10c+d とすると

$$\begin{aligned} 1000a + 100b + 10c + d &= 11(90a + 10b + d) + 10a - 10b + 10c - 10d \\ &= 11(90a + 10b + d) + 10(a - b + c - d) \end{aligned}$$

と変形できるため a-b+c-d が 11 の倍数ならば元の整数は 11 の倍数となる。よって各偶数の位の和と各奇数の和との差が 11 の倍数となることが条件である。

懸賞問題



図のような, 長針と短針の区別がつかなくて, どこが 12 時なのかも分からない時計があります. この時計は何時何分か答えてください.

解答

2 時 36 分

解説

長針は一時間で 60 目盛, 短針は 5 目盛進む. 上のほうを向いている針を長針と仮定すると, 短針は 1 目盛進んでいるので長針は 12 分を指しているはずである. 今. 長針は 3 分, 8 分, 13 分, 18 分,... のうちどれかを指しているのでこれは長針ではない. 上のほうを向いている針を短針と仮定すると, 短針は 3 目盛進んでいるので長針は 36 分を指しているはずである. 今, 長針は 1 分, 6 分, ... のどれかを指しているので, 現在時刻は 36 分であると確定する. 長針が 36 分になるように時計を傾けると短針は 2 時のところにある. よって 2 時 36 分である.

問題

以下の表をすべて埋めよ．ただし，同じ行と列には同じ文字を入れてはいけない．

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	e	c	d	b
b	b		e		
c	c			e	
d	d				e

解答

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	e	c	d	b
b	b	d	e	a	c
c	c	b	d	e	a
d	d	c	a	b	e

解説

この表を見ると, 集合 $\{e, a, b, c, d\} = G$ は表のような演算を入れたとき群になると考えてしまう. しかし, それは間違いである. なぜなら, $(ab)d$ と $a(bd)$ をそれぞれ計算すると,

$$\begin{aligned}(ab)d &= cd = a,\\ a(bd) &= ac = d\end{aligned}$$

となり, $(ab)d \neq a(bd)$ となるからである. つまり, 集合 G は表のような演算に関して結合則を満たさないからである.

群の分類についての知識, ここでは, 有限群は位数によって構造がある程度特定されることを知っていると, 位数 5 の群は C_5(位数 5 の巡回群) に同型なものしか存在しないことが思い出される. しかし, 上の表では, 単位元以外の元はすべて位数 2 であり, C_5 と同型ではないことがわかる. 実際, 同型写像 $f : G \to C_5$ を $f(e) = 0$, $f(a) = \alpha$ $(\alpha \in \{1, 2, 3, 4\})$ がとれるとすると,

$$\begin{aligned}f(aa) &= f(e) = 0,\\ &= f(a)f(a) = \alpha^2 \neq 0\end{aligned}$$

となり, 矛盾する. よって, 表のような演算を入れても群は作れないことがわかる.

問題

(1) $1 < s$ とすると,

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \dots$$

が収束することを示せ.

(2) $f(x) = \sqrt{x} - \log x$ とする. $x \geq 1$ のとき $f(x) \geq 0$ を示せ.

(3) 級数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n(n-1)}$$

が収束することを示せ.

解答

(1) $s<1$ のとき, $x>1$ なら $\frac{1}{x^s}$ は単調減少するから面積に関して,

$$\int_{n}^{n+1}\frac{1}{x^s}\ dx<\frac{1}{n^s}<\int_{n-1} n\frac{1}{x^s}\ dx$$

という不等式が成り立つ. 従って,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}\frac{1}{n^s}&<\int_2^3\frac{1}{x^s}\ dx+\int_3^4\frac{1}{x^s}\ dx+\cdots+\int_{n-1}^{m}\frac{1}{x^s}\ dx+1\\&=\int_2^m\frac{1}{x^s}\ dx+1\\&<\int_2^\infty\frac{1}{x^s}\ dx+1=\frac{s}{s-1}>0\end{aligned}$$

となる. よって, $\zeta(s)$ は収束する.

(2) $f(x)$ を微分すると,

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2x}(\sqrt{x}-1)>0\quad(x\geq 1)$$

となり, $f(x)$ は単調増加関数である. さらに, $f(1)=1$ であるから, $f(x)\geq 0$ となる.

(3) (2) より, $\log x\leq\sqrt{x}$ となる. これより,

$$\frac{\log n}{n(n-1)}\leq\frac{\sqrt{n}}{n(n-1)}=\frac{1}{\sqrt{n}(n-1)}\leq\frac{1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}}$$

がいえるから, (1) より,

$$\sum_{n=2}\frac{\log n}{n(n-1)}\leq\sum_{n=2}\frac{1}{(n-1)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=1}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

となり, 収束することがわかる.

素数定理の証明から適当にとってきました. ごめんなさい.