

米田の補題とその応用について

BV21064 山下泰平

2023 年 10 月 31 日

目 次

1	研究背景	1
2	圏論の基本知識	1
3	米田の補題とその応用	3
3.1	米田の補題	3
3.2	米田の補題の応用例	4
4	今後の課題	5

1 研究背景

1940 年代に Samuel Eilenberg と Saunders Mac Lane によって確立された圏論は、非常に抽象的な数学理論であり、その抽象性から数学の基盤を形成する理論とされている。近年、圏論はその抽象性ゆえ、数学に限らず自然科学から社会科学まで幅広い分野に応用され、その重要性が増している。したがって、研究の動機としては圏論を学ぶことで、今後の研究範囲が大いに広がる可能性を感じたためである。

2 圏論の基本知識

定義 2.1. 圏 (category) は

- 対象 (object) X, Y, Z, \dots のあつまり¹
- 射 (morphism) f, g, h, \dots のあつまり

からなり、これらは次を満たす。

- 各射は始域 (domain) と終域 (codomain) の対象をもち、 $f: X \rightarrow Y$ は始域が X 、終域が Y である射を表す。
- 各対象に対して、恒等射 (identity morphism) $1_X: X \rightarrow X$ がある。
- 射 f の終域が射 g の始域に等しい各射の組 f, g に対して、 f の始域に等しく、 g の終域に等しい合成射 (composite morphism) gf がある。つまり、

$$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z \rightsquigarrow gf: X \rightarrow Z.$$

さらに、この条件は以下の公理に従う。

- 各 $f: X \rightarrow Y$ に対して、 $1_Y f = f 1_X = f$ 。
- 合成可能な²3 つの射の組 f, g, h に対して、 $h(gf) = (hg)f$ 。

例 2.2. 群 G (より一般にモノイド) は一つの対象 c からなる圏 **BG** を定義する。圏 **BG** で群 G の元は **BG** の射であり、各群の元は c から c への射を表し、合成射は群 G の元の積によって得られ、 G の単位元 e は恒等射として振舞う。

定義 2.3. 圏 \mathcal{C} から圏 \mathcal{D} の関手 (functor) とは次のものからなる。

- \mathcal{C} の各対象 c に対する \mathcal{D} の対象 Fc 。
- 各射 $f: c \rightarrow c'$ に対する射 $Ff: Fc \rightarrow Fc'$ 。

さらに次の関手性公理 (functoriality axioms) を満たす。

- \mathcal{C} で合成可能な各組 f, g に対して、 $Fg \cdot Ff = F(g \cdot f)$ 。
- \mathcal{C} の各対象 c に対して、 $F(1_c) = 1_{Fc}$ 。

関手の定義を見直してみると、もとの圏の始域と終域、合成、恒等性を関手で移した先の圏で保っていることがわかる。つまり、関手はもとの圏の構造を保つような対象間の射と射の間の射からなると言える。

例 2.4. G を群とする。 **BG** の唯一の対象を \mathcal{C} の対象 X に送り、 **BG** の射 g 、つまり群 G の元 g を自己射 $g_*: X \rightarrow X$ に送る $X: \mathbf{BG} \rightarrow \mathcal{C}$ は関手性公理

- 任意の $g, h \in G$ に対して、 $h_* g_* = (hg)_*$ 。

¹「あつまり」はクラス (class) と解釈してもよい。

²英語で composable といい、上から 5 番目の条件を満たすことである。

- 単位元 $e \in G$ に対して, $e_* = 1_X$.

を満たし, 関手である. さらに, この関手性公理は群 G の左作用が満たす条件そのものである. ゆえに, 関手 $X: \mathbf{BG} \rightarrow \mathcal{C}$ は \mathcal{C} の対象 X 上での群 G の左作用を定める. 同様に, $X: \mathbf{BG}^{op} \rightarrow \mathcal{C}$ は関手性公理

- 任意の $g, h \in G$ に対して, $h^* g^* = (gh)^*$.
- 単位元 $e \in G$ に対して, $e^* = 1_X$.

を満たし, \mathcal{C} の対象 X 上の群 G の右作用を定める.

$\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ のとき, このような作用が与えられた対象 X を G -集合 (G -set) という. $\mathcal{C} = \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ のとき, このような作用が与えられた対象 X を G -表現 (G -representation) という. $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ のとき, このような作用が与えられた対象 X を G -空間 (G -space) という.

次に関手の間の射である自然変換を定義する.

定義 2.5. 圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} と関手 $F, G: \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}$ を与えたとき, 自然変換 $\alpha: F \Rightarrow G$ は次のものからなる.

- \mathcal{C} の各対象 c に対する \mathcal{D} の射 $\alpha_c: Fc \rightarrow Gc$ で, α_c の集まりは自然変換の成分 (component) を定め, \mathcal{C} の射 $f: c \rightarrow c'$ に対する \mathcal{D} の射の四角図

$$\begin{array}{ccc} Fc & \xrightarrow{\alpha_c} & Gc \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ Fc' & \xrightarrow{\alpha_{c'}} & Gc' \end{array}$$

が可換になる.

自然同型 (natural isomorphism) はすべての成分 α_c が同型である自然変換 $\alpha: F \Rightarrow G$ のことである.

例 2.6. 関手 $X, Y: \mathbf{BG} \Rightarrow \mathcal{C}$ の間の自然変換について考える. $\alpha: X \Rightarrow Y$ とすると, \mathbf{BG} はひとつしか対象をもたないから α は \mathcal{C} の射 $\alpha: X \rightarrow Y$ で構成される. よって, 各 $g \in G$ に対して, 図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y \\ g_* \downarrow & & \downarrow g_* \\ X & \xrightarrow{\alpha} & Y \end{array}$$

が可換になるものである. この $\alpha: X \rightarrow Y$ を G -同変 (G -equivariant) という.

次に, 関手 $G, X: \mathbf{BG} \rightarrow \mathbf{Set}$ に対する自然変換 $\phi: G \Rightarrow X$ が定義できることを見ていこう.

例 2.7. 自然変換 $\phi: G \Rightarrow X$ は例 2.6 より, G -同変写像 $\phi: G \rightarrow X$ である. ϕ を定義するには, 任意の $g \in G$ に対して $\phi(g) \in X$ でなければならない. ここで, ϕ の自然性から, $\phi(g \cdot h) = g \cdot \phi(h)$ であることが要求される. よって, G の単位元 e を h に代入すれば, $\phi(g) = g \cdot \phi(e)$ である. ゆえに, $\phi(g) \in X$ になるには, $\phi(e) \in X$ となるように $\phi(e)$ を選択すれば良い. さらに, G 上の群 G の左作用は自由であるから, 異なる G の元 k, h に対して $g = k \cdot e = h \cdot e$ となる単位元 e が存在しない. すなわち, 異なる元に対して ϕ は同じ結果を返さないため, $\phi(e) \in X$ は任意に選択できる.

例 2.7 より次の命題が証明できた.

命題 2.8. G -同変写像 $\phi: G \rightarrow X$ は X の元 $\phi(e)$ と一対一対応する.

この命題は米田の補題の一端が垣間見える. つまり, 米田の補題は自然変換と関手の像の対応関係を記述したものである. このことを念頭において次節に進もう.

定義 2.9. \mathcal{C} と \mathcal{D} が局所小圏であるとする。このとき、関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が

- 充満 (full) とは、 \mathcal{C} の各 x, y に対して、射 $\mathcal{C}(x, y) \rightarrow \mathcal{D}(Fx, Fy)$ が全射であることをいう。
- 忠実 (faithful) とは、 \mathcal{C} の各 x, y に対して、射 $\mathcal{C}(x, y) \rightarrow \mathcal{D}(Fx, Fy)$ が単射であることをいう。
- 対象に対して、本質的に全射 (essentially surjective) とは、すべての \mathcal{D} の対象 d に対して、 d が Fc と同型であるような \mathcal{C} の c があることをいう。

3 米田の補題とその応用

3.1 米田の補題

定理 3.1. (米田の補題) \mathcal{C} を局所小圏とし、各関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ と \mathcal{C} の各対象 c に対して、自然変換 $\alpha: \mathcal{C}(c, -) \Rightarrow F$ を $\alpha_c(1_c) \in Fc$ に対応させるような全単射

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{C}(c, -), F) \cong Fc$$

が存在する。さらに、この対応は c と F で自然である。

証明. まず、全単射性を証明する。 $\Phi: \mathrm{Hom}(\mathcal{C}(c, -), F) \rightarrow Fc$ を次のように定義する。

$$\Phi: \mathrm{Hom}(\mathcal{C}(c, -), F) \rightarrow Fc \quad \Phi(\alpha) = \alpha_c(1_c).$$

実際、 $\alpha_c: \mathcal{C}(c, c) \rightarrow Fc$ であるから $\alpha_c(1_c) \in Fc$ である。

次に $x \in Fc$ を $\Psi(x): \mathcal{C} \Rightarrow F$ に移す $\Psi: Fc \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{C}(c, -), F)$ を定義する。そのために、まずは $f: c \rightarrow d$ に対して $\Psi(x)$ が自然性を満たすように定義することに注意する。つまり、 $f: c \rightarrow d$ に対する図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(c, c) & \xrightarrow{\Psi(x)_c} & Fc \\ f_* \downarrow & & \downarrow Ff \\ \mathcal{C}(c, d) & \xrightarrow{\Psi(x)_d} & Fd \end{array}$$

が \mathcal{C} で可換になるように定義しなければならない。 $1_c \in \mathcal{C}(c, c)$ として、 $\Psi(x)_d(f_*(1_c)) = \Psi(x)_d(f) \in Fd$ であり、 $Ff(\Psi(x)_c(1_c)) = Ff(\Psi(x)_c)$ である。ここで、 $\Phi\Psi(x) = x$ が成り立つように、 $\Psi(x)_c(1_c) = \Psi(x)_c = x$ と定める。よって、 $f: c \rightarrow d$ に対する自然性は

$$\Psi: Fc \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{C}(c, -), F) \quad \Psi(x)_d(f) = Ff(x)$$

を定義する。さらに、 $x \in Fc$ に対して $\Psi(x)$ が自然変換であることを示す。 \mathcal{C} での射 $g: d \rightarrow e$ とする。このとき、図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(c, d) & \xrightarrow{\Psi(x)_d} & Fd \\ g_* \downarrow & & \downarrow Fg \\ \mathcal{C}(c, e) & \xrightarrow{\Psi(x)_e} & Fe \end{array}$$

は \mathcal{C} で可換である。実際、 $\Psi(x)_e(g_*(f)) = \Psi(x)_e(gf) = F(gf)(x)$ 、 $Fg(\Psi(x)_d(f)) = Fg(Ff(x)) = F(gf)(x)$ であるから可換である。したがって、 $\Psi(x): \mathcal{C}(c, -) \Rightarrow F$ は自然変換である。ゆえに、 $\Psi: Fc \rightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{C}(c, -), F)$ が定義された。

$\Phi\Psi(x) = x$ および $\Psi\Phi(\alpha) = \alpha$ となることを確認する。 $\Phi\Psi(x) = x$ は作り方から容易にわかる。 $\Psi\Phi(\alpha) = \alpha$ について $\Psi(\alpha_c(1_c)) = \alpha$ を示せばよい。 $\Psi(\alpha_c(1_c))_d(f) = Ff(\alpha_c(1_c))$ である。 $\alpha: \mathcal{C}(c, -) \Rightarrow F$ の自然性から、図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}(c, c) & \xrightarrow{\alpha_c} & Fc \\
f_* \downarrow & & \downarrow Ff \\
\mathcal{C}(c, d) & \xrightarrow{\alpha_d} & Fd
\end{array}$$

は \mathcal{C} で可換である．よって、 $\alpha_d(f_*(1_c)) = \alpha_d(f) = Ff(\alpha_c(1_c))$ で $\Psi(\alpha_c(1_c))_d = \alpha_d$ となる． $\Psi(\alpha_c(1_c)) = \alpha$ で $\Psi\Phi(\alpha) = \alpha$ が示せた．したがって、全単射

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{C}(c, -), F) \xrightarrow{\cong} Fc$$

がある．

最後に F と c において全単射 Φ が自然であることを示す． $c \in \mathcal{C}$ を固定して、自然変換 $\beta: F \Rightarrow G$ に対する \mathbf{Set} での図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(\mathcal{C}(c, -), F) & \xrightarrow{\Phi_F} & Fc \\
\beta_* \downarrow & & \downarrow \beta_c \\
\mathrm{Hom}(\mathcal{C}(c, -), G) & \xrightarrow{\Phi_G} & Gc
\end{array}$$

について、 $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{C}(c, -), F)$ とし、垂直合成の定義³を用いれば、

$$\begin{aligned}
\Phi_G(\beta_*(\alpha)) &= \Phi_G(\beta\alpha) = (\beta\alpha)_c(1_c) = \beta_c(\alpha_c) \\
\beta_c(\Phi_F(\alpha)) &= \beta_c(\alpha_c(1_c)).
\end{aligned}$$

よって、上の図式は \mathbf{Set} で可換である．一方、関手 F を固定して、射 $f: c \rightarrow d$ に対する図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(\mathcal{C}(c, -), F) & \xrightarrow{\Phi_c} & Fc \\
(f^*)^* \downarrow & & \downarrow Ff \\
\mathrm{Hom}(\mathcal{C}(d, -), F) & \xrightarrow{\Phi_d} & Fd
\end{array}$$

について、垂直合成の定義を用いれば

$$\begin{aligned}
\Phi_d((f^*)^*(\alpha)) &= \Phi_d(\alpha f^*) = (\alpha f^*)_d(1_d) = \alpha_d(f^*)_d(1_d) = \alpha_d(f) \\
Ff(\Phi_c(\alpha)) &= Ff(\alpha_c).
\end{aligned}$$

よって、上の図式は \mathbf{Set} で可換である．したがって、全単射 Φ の F と c における自然性を示すことができた．□

ここでひとつの到達点である米田の補題が示せたわけであるが、普遍性 (universal property) の定式化や極限や余極限の定義にも使われる重要な補題である．

3.2 米田の補題の応用例

この節では前節で示した米田の補題の応用例について述べる．まず米田の補題から即座に導かれる系として米田埋め込み (Yoneda embedding) がある．米田埋め込みは表現可能関手の間の自然変換の特徴付けであり、局所小圏 \mathcal{C} は $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ の充満部分圏と同型であるというものである．

系 3.2. (米田埋め込み) \mathcal{C} は局所小圏とする．このとき、関手

³垂直合成は 2 つの自然変換 $\alpha: F \Rightarrow G, \beta: G \Rightarrow H$ に対して、自然変換 $\beta\alpha: F \Rightarrow H$ があり、その成分 $(\beta\alpha)_c = \beta_c\alpha_c$ が α と β の成分の合成で定義される．なお、 $\beta\alpha$ の自然性は容易に示せる．

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C} & \xrightarrow{y} & \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}} \\
c & \longmapsto & \mathcal{C}(-, c) \\
\downarrow f & \longmapsto & \downarrow f_* \\
d & \longmapsto & \mathcal{C}(-, d)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}^{op} & \xrightarrow{y} & \mathbf{Set}^{\mathcal{C}} \\
c & \longmapsto & \mathcal{C}(c, -) \\
\downarrow f & \longmapsto & \uparrow f^* \\
d & \longmapsto & \mathcal{C}(d, -)
\end{array}$$

は充満で忠実な埋め込みを定義する.⁴

証明. 米田の補題より, 全単射

$$\Phi: \mathcal{C}(c, d) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(\mathcal{C}(-, c), \mathcal{C}(-, d)) \quad (3.1)$$

$$\Phi: \mathcal{C}(c, d) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(\mathcal{C}(d, -), \mathcal{C}(c, -)) \quad (3.2)$$

がある. このとき, 異なる射 $c \xrightarrow{f} d$ は異なる自然変換 f_*, g_* および f^*, g^* を誘導するから, 関手 y は忠実である. 次に関手 y が充満であることを示す. また, 自然変換 $\alpha: \mathcal{C}(-, c) \Rightarrow \mathcal{C}(-, d)$ および $\alpha: \mathcal{C}(d, -) \Rightarrow \mathcal{C}(c, -)$ は (3.1), (3.2) より $\mathcal{C}(c, d)$ および $\mathcal{C}(d, c)$ の元と対応する. つまり, $\alpha_c(1_c) = f \in \mathcal{C}(c, d)$ および $\alpha_d(1_d) = f \in \mathcal{C}(c, d)$ である. 一方, f_*, f^* は

$$f_{*c}(1_c) = f1_c = f \quad (3.3)$$

$$f^*_d(1_d) = 1_d f = f \quad (3.4)$$

であるから, $\Phi(\alpha) = \Phi(f_*)$ および $\Phi(\alpha) = \Phi(f^*)$ で $\alpha = f_*$ および $\alpha = f^*$ である. よって, 関手 y は充満である. したがって, 関手 y は充満で忠実な埋め込みを定義する. \square

系 3.3. (Cayley の定理) 任意の群 G は対称群⁵ $\mathrm{Sym}(G)$ の部分群と同型である.

証明. 群 G を対象がひとつの圏 \mathbf{BG} とみなす. このとき, 例より共変米田埋め込み $\mathbf{BG} \hookrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{BG}^{op}}$ は \mathbf{BG} の対象 G を右 G -集合 G を定める関手 G に送る. 系 3.2 より, 右 G -集合 G の G -同変自己射は G の固定元 g の左乗法で定義される写像である. さらに, G の元 g は圏 \mathbf{BG} で自己同型射であるから, 各 G の G -同変自己射は自己同型射である. したがって, 米田埋め込みによって群 G の元と関手 G の間の自然変換の一対一対応がある. ここで忠実な忘却関手 $U: \mathbf{Set}^{\mathbf{BG}^{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ を米田埋め込みに合成することで, 群 G と集合 G の自己同型群 $\mathrm{Sym}(G)$ の部分群の間の同型を得る. \square

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{BG} & \xrightarrow{y} & \mathbf{Set}^{\mathbf{BG}^{op}} & \xrightarrow{U} & \mathbf{Set} \\
c & \longmapsto & G & \longmapsto & G \\
\downarrow g & \longmapsto & \downarrow g_* & \longmapsto & \downarrow U g_* = g \\
c & \longmapsto & G & \longmapsto & G
\end{array}$$

4 今後の課題

今回の研究では米田の補題という圏論のひとつの到達点までまとめることができた. 今後, 圏論の基本的な道具である極限や随伴について学習し, Kan 拡張についてまとめたいと思う. また, 代数的整数論における圏論の活用例についても調べていきたい.

⁴充満性や忠実性を用いているので, 厳密には $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ や $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$ が局所小圏であることを示さなければならない.

⁵群 G に対する対称群 $\mathrm{Sym}(G)$ は自己同型 $f: G \rightarrow G$ がなす群のことである.

参考文献

- [1] Emily Riehl, *Category Theory in Context*. Cambridge University Press, 2014.
- [2] Tom Leinster. *Basic category theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2014.