解析力学
最小作用の原理 (ハミルトンの原理)

システム理工学部 数理科学科
BV24041　内田晴

2025 年 10 月 29 日

目次

1　はじめに

量子力学の勉強のために学んでおくべき学問として，「解析力学」の名をきき，
最小作用の原理という色々な物理系の一般化のようなものを学びたいと思い，この研究をした．
この研究は，「解析力学 入門」(石川健三 著) を使用して，
最小作用の原理 (ハミルトンの原理) について述べるものである．

2　保存力

保存力とは，空間の位置で決まり，座標 $\boldsymbol{x}$ における力のベクトルが，
一つの空間座標の関数 $U(\boldsymbol{x})$ から関係式

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U(x) \tag{1}$$

で決まるものである．つまり，一つの関数 $U(x)$ の**勾配**として導かれる力である．
デカルト座標で勾配の成分は，単純な偏微分で

$$F_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} U(x) \tag{2}$$

となっている．自然界にある基本的な力は，保存力であることが多い．

2.1　保存力とエネルギー

保存力が働いている質点の運動では，運動エネルギーとポテンシャル (位置)
エネルギーの和である力学的エネルギーは時間とともに変化せずに一定に保たれる．
つまり，力学的エネルギー

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\right)^2 + U(x) \tag{3}$$

の時間微分は

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E &= \frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\right)^2 + U(x)\right\} \\
&= \frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\right)^2\right\} + \frac{d}{dt}U(x) \\
&= m\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\cdot\left(\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}(t)\right) + \nabla U(x)\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) \\
&= \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\left(m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}(t) + \nabla U\right) \\
&= 0 \ \ (\because \text{式 } (2))
\end{aligned}$$

2.2 仕事と保存力

質点が力 $\boldsymbol{F}$ のために $d\boldsymbol{x}$ 変位したとき，力がする**力学的仕事**は，

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x} \tag{4}$$

である．三次元空間で，ある経路に沿って有限の距離変位したときは，
仕事の総量は上の仕事を積分した

$$W = \int_{x_1}^{x_2} dW = \int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x} \tag{5}$$

である．この物理的な仕事は，普遍的な意味を持つ．
それをみるために，保存力がする仕事を考えてみる．
保存力である場合は，積分が簡単に実行できる．結果として，仕事が

$$\begin{aligned} W &= -\int_{x_1}^{x_2} \nabla U \cdot d\boldsymbol{x} \\ &= -(U(\boldsymbol{x_1}) - U(\boldsymbol{x_2})) \end{aligned}$$

と求まり，途中の経路に依存しないで，終点と始点の位置だけで決まる大きさをもつことが分かる．
逆に，ある始点から終点までの仕事が，途中の経路に依らないならば，保存力である．
このことを示す．異なる経路 l_1 と l_2 をとる積分

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_{l_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x} \\ W_2 &= \int_{l_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

が同じ値であるとき，二つの差は l_1 と l_2 を結ぶ閉経路に沿う積分で，

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x} = 0 \tag{6}$$

零となる．この結果は，任意の経路に対して成立することに注意しておこう．
ところで，ベクトル場の閉経路に沿う線積分は，ストークスの定理

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x} = \int \nabla \times \boldsymbol{F} d\boldsymbol{S} \tag{7}$$

から，ベクトル積の面積分になる．面積分の積分領域は，領域の端が線積分の経路である．
よって，この面積分は，任意の面の積分で零になる．
これは，被積分関数が零になるとき実現するので，

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = 0 \tag{8}$$

となり，力のベクトルは回転をもたない．さらに，回転を持たないベクトルは，

あるスカラー場の勾配

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U(\boldsymbol{x}) \tag{9}$$

となる．このように，経路に沿って物体を移動させるときの仕事が経路に依らない力は保存力である．

3　最小作用の原理 (ハミルトンの原理)

最小作用の原理は**ラグランジアン**と**作用**で表される．
ラグランジアンは位置 $\boldsymbol{x}(t)$ と速度 $\boldsymbol{v}(t)$ の関数である．
位置が時間の関数として与えられたとき，この関数の時間についての微分から
速度が決まり，さらに速度から運動エネルギーが決まる．
また，この位置からポテンシャルエネルギーが決まる．
運動エネルギーからポテンシャルエネルギーを差し引いたものが，**ラグランジアン**であり，
ラグランジアンを時間で積分した汎関数が**作用積分**で

$$S[\boldsymbol{x}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L dt \tag{10}$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\right)^2 - U(\boldsymbol{x}) \tag{11}$$

と表せる．
積分は時刻の上限並びに下限，それから積分領域内のすべての t における $\boldsymbol{x}(t)$ に依存して値を変える．
この作用積分が停留的となるのは，ちょうど $\boldsymbol{x}(t)$ が運動の解になっているときである．
このことを次に示そう．
$\boldsymbol{x}(t)$ が微小変化したとき，作用積分は微小変化

$$\delta S[\boldsymbol{x}(t)] = S[\boldsymbol{x}(t) + \delta\boldsymbol{x}(t)] - S[\boldsymbol{x}(t)] \tag{12}$$

する．変分は微少量 $\delta\boldsymbol{x}(t)$ の一次までの項をとって，

$$\begin{aligned}
\delta S[\boldsymbol{x}(t)] &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2}\left(\frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}(t) + \delta\boldsymbol{x}(t))\right)^2 - U(\boldsymbol{x}(t) + \delta\boldsymbol{x}(t))\right] dt \\
&\quad - \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2}\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\right)^2 - U(x)\right] dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[m\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{x}(t)\right) - \delta\boldsymbol{x}(t)\nabla U(\boldsymbol{x}(t))\right]
\end{aligned}$$

と計算される．

$$\int_{t_1}^{t_2} m\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{x}(t)\right) dt = \left[m\delta\boldsymbol{x}(t)\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}(t)\delta\boldsymbol{x}(t)\ dt$$

より，

$$\delta S[\boldsymbol{x}(t)] = -\int_{t_1}^{t_2} \delta\boldsymbol{x}(t)\left(m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}(t) + \nabla U(\boldsymbol{x}(t))\right)\,dt + \left[m\delta\boldsymbol{x}(t)\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\right]_{t_1}^{t_2} \tag{13}$$

と分かれる．よって，作用積分が停留的となるのは，作用の変分が零となるとき，
すなわち

$$m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}(t) + \nabla U(\boldsymbol{x}(t)) = 0 \ \ (t_1 \le t \le t_2) \tag{14}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = 0 \ \ (t = t_1, t_2) \tag{15}$$

が満たされるときである．上式で一つ目は，積分領域内部での**オイラー・ラグランジ方程式**

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \tag{16}$$

である．実際に，$L = \dfrac{m}{2}\left(\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\right)^2 - U(x)$ として，式 (16) に代入すると，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} = -\nabla U(\boldsymbol{x}(t)) \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = \frac{d}{dt}\left(m\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\right) = m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}(t)
\end{aligned}$$

なので，

$$-\nabla U(\boldsymbol{x}(t)) - m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}(t) = 0 \Leftrightarrow m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}(t) + \nabla U(\boldsymbol{x}(t)) = 0 \tag{17}$$

となり，式 (14) に一致する．二つ目は端の境界条件である．
式 (17) の**オイラー・ラグランジアン方程式**は $-\nabla U$ を力とするニュートン方程式に一致する．
だから，作用積分に基礎を置く変分原理からニュートンの運動方程式が導かれることがわかる．

4　ラグランジアンの性質と一般化座標とその例

4.1　ラグランジアンの性質

1. ラグランジアンが変数で完全に分離した項の和で表されるとき
   つまり，

   $$L = L_1(q_1, \dot{q_1}) + L_2(q_2, \dot{q_2})$$

   である場合を考える．
   オイラー・ラグランジアン方程式に代入すると，

   $$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}} = \sum_{i=1}^{i=2}\left(\frac{\partial L_i}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L_i}{\partial \dot{q_i}}\right) = 0$$

となり，それぞれの変数について独立な運動方程式が得られる．

$$\frac{\partial L_1}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q_1}} = 0$$
$$\frac{\partial L_2}{\partial q_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q_2}} = 0$$

2. ラグランジアンに関全微分項が付け加わるとき
   つまり，

$$L = L(q_i, \dot{q}_i) + \frac{d}{dt}f(q_i, t)$$

である場合を考える．
オイラー・ラグランジアン方程式に代入すると，

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}} = \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}}\right) + \dot{q}_j\frac{\partial f}{\partial q_j} - \dot{q}_j\frac{\partial f}{\partial q_j} = 0$$

となり，運動方程式はもとの形を変えない．このとき作用は

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i) + \frac{d}{dt}f(q_i, t)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i)dt + [f(q_i, t)]_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$

となる．ラグランジアンに加わった関全微分項の影響は端の時間にだけ依存することがわかる．

4.2 点変換と一般化座標

変数 x_i の代わりに変換した変数 Q_i を使いラグランジアンを表そう．
いま，変数 x_i と新たな変数 Q_i の関係が

$$x_i = x_i(Q_i) \tag{18}$$

であるとする．すると x_i の時間微分は

$$\dot{x_i} = \frac{\partial x_i(Q_i)}{\partial Q_j}\dot{Q}_j \tag{19}$$

となる．このためラグランジアンは，新しい変数を使い

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}\sum(\dot{x_i})^2 - U(x_i) \\ &= \frac{m}{2}\sum_{ij} g_{ij}\dot{Q}_i\dot{Q}_j - \tilde{U}(Q_j) \end{aligned} \tag{20}$$

$$g_{ij} = \sum_l \frac{\partial x_l}{\partial Q_i} - \frac{\partial x_l(Q_l)}{\partial Q_j} \tag{21}$$

$$\tilde{U}(Q_j) = U(q_i(Q)) \tag{22}$$

と表せる．ここで，一般にメトリック g_{ij} は力学変数 Q_i の関数である．
次に g_{ij} が力学変数 Q_i の関数であることを考慮に入れて，オイラー・ラグランジアン方程式を導く．
ラグランジアンを時間積分した作用積分は

$$S = \int \left(\frac{m}{2} \sum_{ij} g_{ij} \dot{Q}_i \dot{Q}_j - \tilde{U}(Q_j) \right) dt \tag{23}$$

である．このラグランジアンや作用から Q_i を力学変数としたオイラー・ラグランジアン方程式

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} = 0$$

を求めれば，欲しい微分方程式が得られる．
左辺第一項には，g_{ij} が力学変数 Q_i に依存するために現れる項が加わり，運動方程式は

$$\frac{m}{2} \frac{\partial g_{ij}(Q)}{\partial Q_l} \dot{Q}_i \dot{Q}_j - \frac{\partial}{\partial Q_l} \tilde{U}(Q) - \frac{d}{dt}(m g_{il}(Q) \dot{Q}_i) = 0$$

と求まる．
以上をまとめて，デカルト座標の運動方程式

$$m \frac{d^2}{dt^2} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U(\boldsymbol{x})$$

は，作用

$$S = \int L \, dt$$
$$L = \frac{m}{2} \left(\frac{d}{dt} \boldsymbol{x}(t) \right)^2 - U(\boldsymbol{x})$$

が停留的になっていることと同等である．
他の変数の作用は，デカルト座標からの変数変換で得られる．この座標は，**一般化座標**と呼ぶ．

4.3 回転座標系による運動

点変換の応用として，**加速度系**における質点の運動を考えよう．
慣性系における座標を $\tilde{x_i}(t)$ とすると，両変数は

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \tilde{x_1}(t)\cos\omega t + \tilde{x_2}(t)\sin\omega t \\
x_2(t) &= -\tilde{x_1}(t)\sin\omega t + \tilde{x_2}(t)\cos\omega t
\end{aligned}
$$

と関係している．両辺を時間で微分して，

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x_1(t) &= \frac{d}{dt}\tilde{x_1}(t)\cos\omega t - \omega\tilde{x_1}(t)\sin\omega t \\
&\quad + \frac{d}{dt}\tilde{x_2}(t)\sin\omega t + \omega\tilde{x_2}(t)\cos\omega t \\
\frac{d}{dt}x_2(t) &= \frac{d}{dt}\tilde{x_1}(t)\sin\omega t - \tilde{x_1}(t)\omega\cos\omega t \\
&\quad + \frac{d}{dt}\tilde{x_2}(t)\cos\omega t - \tilde{x_2}(t)\omega\sin\omega t
\end{aligned}
$$

が得られる．ラグランジアンに両変数の関係式を代入して，

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{m}{2}(\dot{x}_i(t))^2 - U(\tilde{x_i}(t)) \\
&= \frac{m}{2}\left[\left(\frac{d}{dt}\tilde{x_i}(t)\right)^2 + \omega^2(\tilde{x_1}^2 + \tilde{x_2}^2)\right] + m\omega(\dot{\tilde{x_1}}\tilde{x_2} - \dot{\tilde{x_2}}\tilde{x_1}) - U(\tilde{x_i}(t))
\end{aligned}
$$

となる新たな変数に対するラグランジアンを得る．
この式の右辺は，第一項目の通常の運動エネルギー，第二項目の**遠心力ポテンシャル**，
に加えて第三項目の**コリオリ力**の項をもつ．これより，運動方程式

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2}{dt^2}\tilde{x_1}(t) + 2m\omega\frac{d}{dt}\tilde{x_2}(t) - m\omega^2 x_1(t) + \frac{\partial}{\partial\tilde{x_1}}U = 0 \\
m\frac{d^2}{dt^2}\tilde{x_2}(t) - 2m\omega\frac{d}{dt}\tilde{x_1}(t) - m\omega^2 x_2(t) + \frac{\partial}{\partial\tilde{x_2}}U = 0
\end{aligned}
$$

が得られる．
回転座標系での運動は，慣性系での力以外に，遠心力やコリオリの力が加わった方程式で記述される．

4.4　磁場中の荷電粒子の作用

通常の保存力は，場の勾配で与えられる．
ところで，磁場 $\boldsymbol{B}$ 中の荷電粒子が受ける力である**ローレンツ力** $\boldsymbol{F}$,

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

は速度ベクトルに依存する力であり，スカラー場の勾配の形をしていない．
しかし，保存系と同様な性質を持ち，磁場ベクトルと，

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

と関係しているベクトルポテンシャルを使うことにより，ラグランジアン

$$L = \frac{m}{2}\boldsymbol{v}^2 + q\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}$$

から作られる作用で記述される．このラグランジアンからのオイラー・ラグランジアン方程式は,
位置座標に関する微分と，速度座標に関する微分,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_i} &= q\boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\boldsymbol{A} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v} + qA_i) \\
&= m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x} + q\left(v_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)
\end{aligned}$$

から

$$m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

となる．オイラー・ラグランジアン方程式は,
磁場によるローレンツ力を受けている質点のニュートンの運動方程式に一致する．

参考文献

「解析力学入門」 石川健三 著 出版社 培風館