$\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ のいろいろな積分

テーマ

題名にある積分を、様々な方法で積分することを試みる.

今回の研究で出した積分の結果はすべて

$$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

に等しいはずである.

1 $x = atant, x \in R, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \int \frac{dt}{a(1 + \tan^2 t)(\cos^2 t)} && (1) \\
&= \frac{1}{a} \int dt && (2) \\
&= \frac{t}{a} && (3) \\
&= \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C && (4)
\end{aligned}
$$

2　複素数の指数関数について

複素数 z=x+yi に対し、$e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y)$ と指数関数 e^z を定義する.
(「入門複素関数/川平友規」より)
すると

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z \tag{5}$$

より e^z は周期 $2\pi i$ をもつ.
そこで、z を $-\pi < \arg(e^z) \leq \pi$、すなわち $-\pi < Im(z) \leq \pi$ となるように制限したいという思想になる.
(Im(z) は z の虚部、すなわち $e^z = e^{x+yi}$ の偏角 y)

3　複素対数について

0 でない複素数 A に対して、$e^z = A$ を満たす複素数 z を A の複素対数といい、$logA$ で表す.
一般に 0 でない複素数 A が

$$A = re^{i\theta} = e^{\log r + (\theta + 2m\pi)i}(m \in Z) \tag{6}$$

と表せるとき、

$$\log A = \log r + (\theta + 2m\pi)i(m \in Z) \tag{7}$$

となる. 再び周期 $2\pi i$ をもつので、$-\pi < Im(logA) \leq \pi$ をみたすものがただひとつ定まる.
これを対数 $logA$ の主値といい、$LogA$ と書く.

4　部分分数分解,$x \in R$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \int \frac{dx}{a^2 - (-x^2)} && (8) \\
&= \int \frac{dx}{a^2 - (ix)^2} && (9) \\
&= \int \frac{dx}{2(a + ix)} + \int \frac{dx}{2(a - ix)} && (10) \\
&= \tfrac{1}{2i} \log(a + ix) - \tfrac{1}{2} \log(a - ix) && (11) \\
&= \tfrac{1}{2i} Log\left(\frac{1 + ix}{1 - ix}\right) + C && (12)
\end{aligned}$$

主値をとらないと、一周、二周... して、同じ点なのに値が異なってしまう。それが不都合らしい。
周期に応じて積分定数を変えてはいけないのか。それをすると関数ではなくなるのではという感覚はある。

5 $ix = a\tanh t,\ dx = -ia(1-\tanh^2 t)dt$ $x \in R$,t は虚数

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dx}{a^2-(-x^2)} \tag{13}$$
$$= \int \frac{dx}{a^2-(ix)^2} \tag{14}$$
$$= \int \frac{-ia(1-\tanh^2 t)dt}{a^2-a^2\tanh^2 t} \tag{15}$$
$$= -\frac{i}{a}\int dt \tag{16}$$
$$= -\frac{i}{a}t \tag{17}$$
$$= -\frac{i}{a}\operatorname{arctanh}\left(\frac{ix}{a}\right)+C \tag{18}$$
$$= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{a}{x}\right)+C \tag{19}$$

１と同じ結果になったので、 $x \in R, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ だろう.
式 (18) から (19) の変形は入門複素関数から.

6 未完成シリーズ. $x = a\sinh t,\ dx = a\cosh t dt, x \in R, t \in R$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{a\cosh t\, dt}{a^2+a^2\sinh^2 t} \tag{20}$$
$$= \frac{1}{a}\int \frac{\cosh t\, dt}{1+\sinh^2 t} \tag{21}$$
$$= \frac{1}{a}\int \frac{\cosh t\, dt}{\cosh^2 t} \tag{22}$$
$$= \frac{1}{a}\int \frac{dt}{\cosh t} \tag{23}$$

追記:

$$= \frac{1}{a}\int \frac{dt}{\cosh t} \tag{24}$$
$$= \frac{1}{a}\int \frac{\cosh t\, dt}{\cosh^2 t} \tag{25}$$
$$= \frac{1}{a}\int \frac{\cosh t\, dt}{1+\sinh^2 t} \tag{26}$$
$$= \frac{1}{a}\int \frac{\cosh t\, dt}{1-(i\sinh t)^2} \tag{27}$$
$$= \frac{1}{a}\int \frac{\cosh t\, dt}{(1-i\sinh t)(1+i\sinh t)} \tag{28}$$
$$= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{\cosh t\, dt}{1-i\sinh t} + \frac{\cosh t\, dt}{1+i\sinh t}\right) + C \tag{29}$$
$$= \frac{1}{2a}\left(-i\log(1-i\sinh t) + i\log(1+i\sinh t)\right) + C \tag{30}$$
$$= \frac{i}{2a}\log\left(\frac{1+i\sinh t}{1-i\sinh t}\right) + C \tag{31}$$
$$= \frac{i}{2a}\log\left(\frac{1+\frac{ix}{a}}{1-\frac{ix}{a}}\right) + C \tag{32}$$
$$= \frac{i}{2a}Log\left(\frac{a+ix}{a-ix}\right) + C \tag{33}$$

7 未完成シリーズ２.

$x = ae^t,\ dx = ae^t dt, x \in (0,\infty), t \in R$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{ae^t dt}{a^2+a^2e^{2t}} \tag{34}$$
$$= \frac{1}{a}\int \frac{e^t dt}{1+e^{2t}} \tag{35}$$
$$= \frac{1}{a}\int \frac{dt}{e^t+e^{-t}} \tag{36}$$
$$= \frac{2}{a}\int \frac{dt}{\cosh t} \tag{37}$$

追記:

$$= \frac{2}{a}\int\frac{dt}{\cosh t} \tag{38}$$
$$= \frac{2}{a}\int\frac{\cosh t\, dt}{\cosh^2 t} \tag{39}$$
$$= \frac{2}{a}\int\frac{\cosh t\, dt}{1+\sinh^2 t} \tag{40}$$
$$= \frac{2}{a}\int\frac{\cosh t\, dt}{1-(i\sinh t)^2} \tag{41}$$
$$= \frac{2}{a}\int\frac{\cosh t\, dt}{(1-i\sinh t)(1+i\sinh t)} \tag{42}$$
$$= \frac{1}{a}\left(\int\frac{\cosh t\, dt}{1-i\sinh t}+\frac{\cosh t\, dt}{1+i\sinh t}\right)+C \tag{43}$$
$$= \frac{1}{a}\left(-i\log(1-i\sinh t)+i\log(1+i\sinh t)\right)+C \tag{44}$$
$$= \frac{i}{a}\log\left(\frac{1+i\sinh t}{1-i\sinh t}\right)+C \tag{45}$$
$$= \frac{i}{a}Log\left(\frac{1+i\sinh(\log(\frac{x}{a}))}{1-i\sinh(\log(\frac{x}{a}))}\right)+C \tag{46}$$

8　あとがき

次はもっと長く遊べるテーマを考えてみたい。

(出典) 川平友規「入門複素関数」裳華房,2019