

2025 年 芝浦祭 懸賞問題 上級編

芝浦工業大学 数理科学研究会
豊洲キャンパス 教室棟 510 教室

問題 1

数理君は漢なので『ヨット』というゲームで「ヨット」しか狙いません。

『ヨット』のルールは以下の通りです。

5 個のサイコロを振るゲームです。1 回のターンで最大 3 投することができ、1 投目・2 投目では好きな出目をキープして、残りを振り直せます。出目の組合せでさまざまな「役」をつくり、それに応じて点数を得ます。

各役は 1 ゲーム中に 1 回しか使えません。今回狙う役は次の役です。

「ヨット」: 同じ出目が 5 個揃ったとき

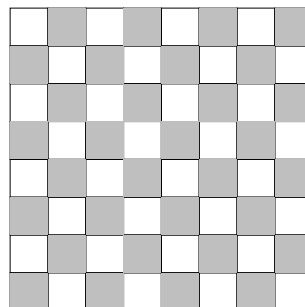
次の問に答えましょう。

- (1) サイコロを 1 投して 2 個以上揃う確率はいくつですか。
- (2) 1 投目である出目 a をキープしたとき、2 投目で振りなおした 4 個のサイコロが互いにすべて異なり、かつどれも a と異なる確率はいくつですか。
- (3) 1 投目で a の目を 1 個キープしたとき、何らかの出目が 2 個以上揃う確率はいくつですか。
- (4) 1 投目で 1 個も揃わなかったとき、以下の戦略 A, B はどちらが「漢ヨット狙い」に有利ですか。あるいは、どちらの戦略も変わりませんか。
A: 全サイコロを振りなおす。
B: どれか好きな目を 1 個キープして、それ以外のサイコロを全て振りなおす。

なお「漢のヨット狙い」とは「ヨット」しか狙わない戦略のことです。

問題 2

以下のような 8×8 のようなチェス盤について考えます。



チェス盤にビショップ 14 個を、「全ての駒が互いの行動を妨げない」ように配置する方法は何通りありますか。ただし、ビショップとは、斜め 45° の方向に任意の距離だけ移動できる駒のことです。また 1 つのマスには複数の駒を置けません。

問題 3

石の山が 2 個あり，山 1 には 13 個の石が，山 2 には 8 個の石が積まれています．2 人のプレイヤーが交互に次の操作を行います．

- 山 1 か山 2 を選ぶ．
- 山 1 を選んだ場合は，5 個または 7 個の石を取る．
- 山 2 を選んだ場合は，3 個または 5 個の石を取る．

操作を行えなくなったプレイヤーの負けとします．すなわち，どの山からも規則に従って石を取ることができなくなった時点で，そのプレイヤーは敗北します．ただし両者最善手を取るとします．

このとき，次の問に答えましょう．

- (1) 先手と後手どちらが勝ちますか．
- (2) 勝敗を逆転させるためには，山 1 に最小何個の石を追加すればいいですか．

問題 4

- (1) $\frac{\frac{a_3}{a_2}}{\frac{a_1}{a_2}}$ と $\frac{\frac{a_3}{a_2}}{a_1}$ は，ともに「 a_1 分の a_2 分の a_3 」と読みますが，

$$\frac{\frac{a_3}{a_2}}{\frac{a_1}{a_2}} = \frac{a_1 a_3}{a_2}, \quad \frac{\frac{a_3}{a_2}}{a_1} = \frac{a_1}{a_2 a_3}$$

のように，異なる式です．このように，読み方が同じでも異なる式になっているものの個数を数えたいです．「 a_1 分の a_2 分の ... 分の a_{2025} 」と読める式のうち，式として異なるものはいくつありますか．例えば，読み方も式も同じものとして

$$\frac{a_4}{\frac{\frac{a_3}{a_2}}{\frac{a_1}{a_2}}} = \frac{\frac{\frac{a_4}{a_3}}{\frac{a_2}{a_3}}}{a_1} = \frac{a_2 a_4}{a_1 a_3}$$

などがありますが，このようなものは，1 つとして数えます．

- (2) 上の設問で求めた個数を n 個とします．この n 個の式それぞれに， $a_1 = \sqrt{1}, a_2 = \sqrt{2}, \dots, a_{2025} = \sqrt{2025}$ を代入します．このとき得られる n 個の値の総和を X とすると， X^2 は整数になることが示せます．では， X^2 は 2 で何回割り切れませんか．