固有値による2次曲線の分類

AC24044 松島浩

2025年10月30日

目次

1　研究動機

正方行列の固有値と固有ベクトルを決定する問題を一般に固有値問題（eigenvalue problem）と呼ぶ。筆者は材料工学を専攻している。その中で物理系の工学や量子論の問題特有の正方行列の固有値と固有ベクトルを決定することがその問題を解決することに直結する。固有値問題の有効性を認識するのに良い題材として 2 次曲線の分類を選択した。

2　2 次曲線

楕円、放物線、双曲線を一括して 2 次曲線あるいは円錐曲線と呼ぶ。それらの標準系として、

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (楕円)}$$

$$y^2 = 4px \text{ (放物線)} \tag{2.1}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (双曲線)}$$

が知られている。

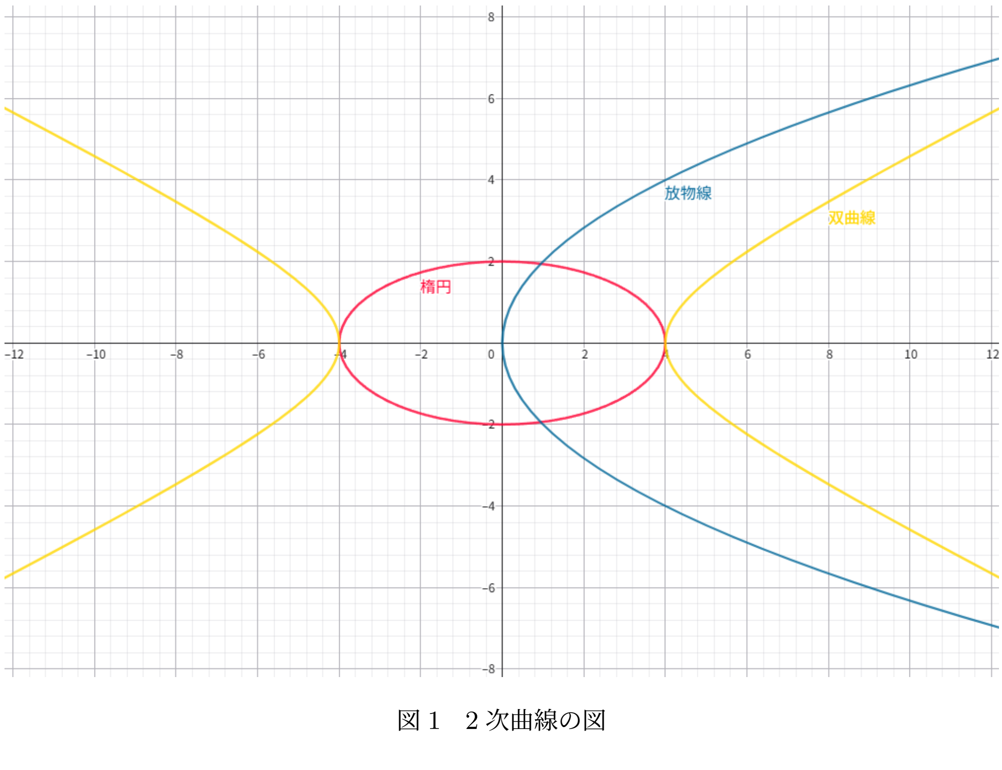

図 1　2 次曲線の図

これらは中心や頂点が座標原点に一致している場合の方程式である。これら 2 次曲線が座標平面内に自由に配置している際の方程式は、一般に x,y の 2 次式

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + lx + my + n = 0 \tag{2.2}$$

となる。

3　2 次曲線の分類

係数 a,b,c,l,m,n に具体的な数値を代入した個々の方程式 (2.2) が楕円、放物線、双曲線のいずれかであるかをただちに判断することは、例外を除いて難しい。ちなみに、式 (2.1) の a,b と式 (2.2) の a,b は別物である。式 (2.2) を行列・ベクトル表示

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + n = 0 \tag{3.1}$$

を用いると、以下の実対称行列である係数行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

の二つの固有値の符号の組合せに注目するだけで、2 次曲線 (3.1) が楕円、放物線、双曲線のいずれかであるかを判別できる。実対称行列は直交行列 P により対角化可能である。2 次対称行列は、その固有値 λ_1,λ_2（重根である場合も含む）に対応する規格化されたベクトル x_1,x_2 を列ベクトルとした 2 次直交行列

$$P_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

により次のように対角化できる。

$$P_2^t A P_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

一般に直交行列の行列式は ± 1 である。その中で行列式が $+1$ の 2 次直交行列は回転行列

$$P_2 = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

の形で表すことができる。ゆえに直交行列 P_2^t により変数変換

$$\begin{aligned} z &= \begin{pmatrix} z \\ \omega \end{pmatrix} \\ &= P_2^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.6}$$

を行うと、x-y 座標軸を反時計回りに θ 回転し z- ω 座標軸とすると、2 次形式 $x^t Ax$ は新しい変数 (z, ω) 式 (3.6) に関して

$$\begin{aligned} x^t Ax &= x^t P_2 P_2^t A P_2 P_2^t x \\ &= z^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} z \\ &= \lambda_1 z^2 + \lambda_2 \omega^2 \end{aligned}$$

となり、2 変数の積の項が消滅する。残りの 1 次の項は

$$\begin{pmatrix} l & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + n = \begin{pmatrix} l & m \end{pmatrix} P_2 \begin{pmatrix} z \\ \omega \end{pmatrix} + n$$

と、新しい変数 (3.6) に関して 1 次式となる。z- ω についてそれぞれ適当な距離だけ原点に平行移動することにより、式 (3.1) は標準系 (2.1) となる。係数行列 A の固有値方程式

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} &= \lambda^2 - (a+c)\lambda + (ac - b^2) \\ &= \lambda^2 - trA \cdot \lambda + detA = 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

の解であるから、2 次方程式 (3.7) の解と係数の関係 ($\lambda_1\lambda_2 = detA$) を用いて表 (3.8) を得る。

表 3.8 2 次曲線の分類

固有値	$\det A = ac - b^2$	2 次曲線
二つの固有値が同符号	正	楕円
二つの固有値が異符号	負	双曲線
一つの固有値が 0	0	放物線

つまり、式 (3.1) のうち 2 次曲線の型を決定するのは、2 次形式

$$x^t Ax = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の係数行列 A の固有値であった。

4 参考文献

参考文献

[1] 科学者・技術者のための基礎線形代数と固有値問題, 柴田正和著.

[2] 線形代数学初歩からジョルダン標準形へ, 三宅敏恒著.