発表日 2025 年 11 月 01 日

クリフォード代数の定義

2025 年度 研究発表

学籍番号　BV24044
所属　数理科学研究会
学年　2 年
氏名　古寺 爽楽

Contents

1. はじめに

実クリフォード代数の定義と，分類を行うために，テンソル代数・外積代数についての定義を与える．

2. テンソル代数

$\mathbb{R}$上の有限次元ベクトル空間V, Wに対して，以下を満たすベクトル空間$V \otimes W$を構成できる．

- $v \in V, w \in W$に対して，テンソル積$v \otimes w \in V \otimes W$が定義される．
- そのテンソル積は$a, b \in \mathbb{R}$に対して以下の双線形性を満たす．

$$(av_1 + bv_2) \otimes w = a(v_1 \otimes w) + b(v_2 \otimes w)$$
$$v \otimes (aw_1 + bw_2) = a(v \otimes w_1) + b(v \otimes w_2)$$

- $V \otimes W$の次元$\dim(V \otimes W)$は$\dim(V) \times \dim(W)$となる．

Def 2.1: 写像$B : V \times W \to \mathbb{R}$が双線形形式であるとは，以下を満たすことである．

$$B(av_1 + bv_2, w) = aB(v_1, w) + bB(v_2, w)$$
$$B(v, aw_1 + bw_2) = aB(v, w_1) + bB(v, w_2)$$

すなわち，各成分について線形性が成立する．さらに，$V \times W$上の双線形形式全体を

$$B_{V,W} \coloneqq \{B \mid B : V \times W \to \mathbb{R} \text{ は双線形形式}\}$$

とすれば，$B_{V,W}$は$\mathbb{R}$上ベクトル空間となる．

Def 2.2: $V \times W$上の双線形形式全体のベクトル空間$B_{V,W}$の双対空間を
$V \otimes W \coloneqq \left(B_{V,W}\right)^*$と書き，$V, W$のテンソル積空間とよぶ．
また$v \in V, w \in W$に対して，積$v \otimes v \in V \otimes W$を次で定義する．

$$(v \otimes w)(B) \coloneqq B(v, w), \quad \left(B \in B_{V,W}\right)$$

Rem: R上の線形空間Uに対して以下を，ベクトル空間Uの双対空間という．

$$U^* \coloneqq \{f : U \to \mathbb{R} \mid \text{f は線形写像}\}$$

Prop 2.1: ベクトル空間のテンソル積には以下の同型が成立する．
1. $V \otimes W \cong W \otimes V$
2. $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$
3. $V \otimes (W_1 \oplus W_2) \cong (V \otimes W_1) \oplus (V \otimes W_2)$
4. $\mathbb{R} \otimes V \cong V \otimes \mathbb{R} \cong V$

prop2.1 よりテンソル積空間は結合的であるということが分かる．すなわち以下が成り立つ．

$$V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$$

そこでベクトル空間Vのp階テンソル積を考える．

$$T^p(V) \coloneqq \otimes^p V = \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{\text{p 個}}$$

したがって$T^p(V)$の基底として以下を取ることができる．

$$\left\{ v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_p} \mid 1 \leq i_1, i_2, \cdots, i_p \leq n \right\}$$

すなわち，$\dim(T^p(V)) = n^p$となる．

Rem：V上のp重線形形式

$$B' : V \times V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$$

の全体はn^p次のベクトル空間となり，その双対空間が$T^p(V)$である．

またテンソル積を使って$\mathbb{R}$上代数を作ることができる．

Def 2.3：Vを$\mathbb{R}$上有限次元ベクトル空間とし，Vのp階テンソル積空間の直和を考える．

$$T^*(V) \coloneqq \bigoplus_{p=0}^{\infty} T^p(V) \quad (T^0(V) = \mathbb{R})$$

この無限次元ベクトル空間$T^*(V)$をVに対するテンソル代数という．

また$\mathbb{R}$上代数構造として，

$$\varphi = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_p \in T^p(V) \quad \psi = w_1 \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_q \in T^q(V)$$

これらに対して，

$$\varphi \otimes \psi = v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_q \in T^{p+q}(V)$$

を考える．またVの基底を$\{v_1, \cdots, v_n\}$とすると，$T^*(V)$は$\{v_1, \cdots, v_n\}$から生成される．

Rem：$\mathbb{R}$上代数とは，双線形かつ結合的な乗法が定義されている代数のことである．

3. 外積代数

テンソル積に交代性を課すことにより外積代数を構成する．

Def 3.1: Vを$\mathbb{R}$上n次元ベクトル空間として，$v_1, \cdots v_n$をVの基底とする．

このとき，演算$\wedge$を以下のように考える．

$$v_i \wedge v_j = -v_j \wedge v_i \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

$\{v_1, \cdots v_n\}$を生成元として，演算$\wedge$とした$\mathbb{R}$上代数を外積代数といい，$\Lambda^*(V)$と書く．

上のような定義では，Vの基底の取り方に依存しているので普遍的な定義を与える．

Vのテンソル代数$T^*(V)$の部分集合

$$S = \{v \otimes v \mid v \in V\}$$

から生成される両側イデアル$I(V)$を考える．

Def 3.2: Vを$\mathbb{R}$上n次元ベクトル空間とする．ここでVの外積代数とは以下で定義する．

$$\Lambda^*(V) \coloneqq T^*(V)/I(V)$$

また自然な射影$\pi : T^*(V) \to \Lambda^*(V)$として，$\Lambda^p(V) \coloneqq \pi(\otimes^p V)$を$V$の$p$次交代テンソル積空間と呼ぶ．また，$\alpha = \pi(a) \in \Lambda^p(V), \beta = \pi(b) \in \Lambda^q(V)$に対して，

$$\alpha \wedge \beta = \pi(a \otimes b)$$

を外積や交代テンソル積と呼ぶ．

Rem: 外積という演算には，同じ要素の外積が0になるという結果を期待したい．

そのために，Def3.2 ではSから生成される両側イデアルでの商代数を考えたのである．

イメージとしては, $\mathbb{Z}$のイデアルである, $3\mathbb{Z}$での商代数$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$を考えると, 3の倍数は0になるのと同じである．

射影πの線形性や，テンソル積の線形性や結合性から，以下の関係式が成り立つ．

$$(a\alpha_1 + b\alpha_2) \wedge \beta = a(\alpha_1 \wedge \beta) + b(\alpha_2 \wedge \beta)$$
$$\alpha \wedge (a\beta_1 + b\beta_2) = a(\alpha \wedge \beta_1) + b(\alpha \wedge \beta_2)$$
$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

Rem: また$I(V)$はSから生成されるイデアルであり，Sは$v \otimes v$を考えていたため，$\Lambda^0(V), \Lambda^1(V)$には影響しない．すなわち$\Lambda^0(V) = \mathbb{R}, \Lambda^1(V) = V$である．

いま，$\Lambda^2(V) = \pi(\otimes^2 V)$について考える．$v = \pi(v)\ v \in V$に対して，$v \wedge v = \pi(v \otimes v)$となるが，$v \otimes v \in I(V)$であるため，$v \wedge v = 0$となる．

すなわち，2次元テンソル積空間において，同じ要素の外積は0となる．

次に，$v, w \in V$に対して，$(v + w) \wedge (v + w)$は以下のようになる．

$$(v + w) \wedge (v + w) = \pi((v + w) \otimes (v + w)) \in I(V)$$

ここで以下の式が成り立つ．

$$(v + w) \wedge (v + w) = v \wedge v + v \wedge w + w \wedge v + w \wedge w = v \wedge w + w \wedge v = 0$$

従って以下が成り立つ.

$$v \wedge w = -w \wedge v$$

この，$v \wedge v = 0, v \wedge w = -w \wedge v$は先ほどの定義と一致している.

これらのことから外積代数に期待した性質が満たされるように定義できた.

4. クリフォード代数

ベクトル空間Vで内積を考えられるときに，内積と外積を両方含む代数としてクリフォード代数を定義できる．以下ではベクトル空間Vに正定値内積，$\langle \cdot, \cdot \rangle$が定義されているとする．

Rem：正定値内積は特に以下の性質を満たしているものである．

- 線形性：$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle \quad \langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle \quad \langle rx, sy \rangle = rs \langle x, y \rangle$
- 対称性：$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- 正定値性：$\langle x, x \rangle \geq 0$であり，等号成立は$x = 0$のときに限る．

Def 4.1：Vを$\mathbb{R}$上n次元ベクトル空間として，正規直交基底を$\{e_1, \cdots, e_n\}$とする．

このとき，以下のような関係式を考える．

$$e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i = -2\delta_{ij} = -2\langle e_i, e_j \rangle \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

$\{e_1, \cdots, e_n\}$を生成元として，この関係式を満たす$\mathbb{R}$上代数をクリフォード代数といい，$Cl(V)$と書く．

外積代数の場合と同様に，上の定義はVの基底に依存しているので普遍的な定義を与える．

Def 4.2：Vを$\mathbb{R}$上n次元内積空間とする．ここで以下の集合S'を考える．

$$S' = \{v \otimes v + \langle v, v \rangle 1 \mid v \in V\} \subset T^*(V)$$

ここで，S'から生成される両側イデアル$J(V)$を用いて，以下を考える．

$$Cl(V) \coloneqq T^*(V) / J(V)$$

この$Cl(V)$をクリフォード代数と呼ぶ．

また自然な射影$\pi : T^*(V) \to Cl(V)$として，$\alpha = \pi(a), \beta = \pi(b)$に対して，

$$\alpha\beta = \pi(a \otimes b)$$

をクリフォード代数における積と定義する．

テンソル積の線形性と結合性から，クリフォード代数の積における以下の関係式が得られる．

$$(a\alpha_1 + b\alpha_2)\beta = a(\alpha_1\beta) + b(\alpha_2\beta)$$
$$\alpha(a\beta_1 + b\beta_2) = a(\alpha\beta_1) + b(\alpha\beta_2)$$
$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

すなわち，$Cl(V)$は$\{v \mid v \in V\}$から生成され，以下の関係式を満たす$\mathbb{R}$上代数である．

$$vw + wv = -2\langle v, w \rangle \quad (\forall v, w \in V)$$

Proof：この関係式は以下のように導出できる．

まず，$v, w \in V$に対して，以下が成り立つ．

$$(v + w) \otimes (v + w) + \langle v + w, v + w \rangle 1 \in J(V)$$

これを展開して以下が得られる．

$$v \otimes v + w \otimes w + v \otimes w + w \otimes v + \langle v, v \rangle 1 + 2\langle v, w \rangle 1 + \langle w, w \rangle 1 = 0$$

ここで，$v \otimes v + \langle v, v \rangle 1 = 0, w \otimes w + \langle w, w \rangle 1 = 0$であるため，

$$v \otimes w + w \otimes v + 2\langle v, w\rangle 1 = 0$$

すなわち，

$$vw + wv = -2\langle v, w\rangle$$

□

たしかに，Def4.2 は Def4.1 と一致している．

Prop 4.1: Wを結合法則を満たし，1をもつ$\mathbb{R}$上の代数として，線形写像$f : V \to W$が以下を満たす．

$$f(v)f(v) = -\langle v, v\rangle 1 \quad (v \in V)$$

このとき，代数準同型$F : Cl(V) \to W$で，$F|_V = f$となるものが唯一つ存在する．

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & W \\ Cl(V) \arrow[ur, dashed, hook, "F"'] & \end{tikzcd}$$

以下では，クリフォード代数と同型について考えていく．

まずはクリフォード代数と複素数$\mathbb{C}$の同型について考える．

Ex: $\dim V = 1$すなわち，Vを1次元の内積空間とし，正規直交基底をe_1とする．

このとき$Cl(V)$は$\{1, e_1\}$から生成され，以下の関係式が成り立つ．

$$e_1^2 = -1$$

ここで，線形写像$f : V \to \mathbb{C}$を以下のように定める．

$$f(e_1) = \sqrt{-1}$$

すると以下が成立する．

$$f(e_1)f(e_1) = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1 = -\langle e_1, e_1\rangle 1$$

したがって，$Cl(V)$から$\mathbb{C}$への代数準同型$F : Cl(V) \to \mathbb{C}$が存在する．

この写像は同型であるため，$Cl(V) \cong \mathbb{C}$となる．

Def 4.3: 以下のように四元数全体の集合$\mathbb{H}$を定義する．

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid (a, b, c, d \in \mathbb{R})\}$$

ただし，i, j, kは以下の関係式を満たすものとする．

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j$$

次に，クリフォード代数と四元数$\mathbb{H}$の同型について考える．

Ex: $\dim V=2$すなわち，Vを2次元の内積空間とし，正規直交基底をe_1,e_2とする．

このとき，$Cl(V)$は$\{1,e_1,e_2,e_1e_2\}$から生成され，以下の関係式が成り立つ．

$$e_1^2=-1 \quad e_2^2=-1 \quad e_1e_2=-e_2e_1$$

ここで，線形写像$f:V\to\mathbb{H}$を以下のように定める．

$$f(e_1)=i, \quad f(e_2)=j$$

すると以下が成立する．

$$f(e_1)f(e_1)=i^2=-1=-\langle e_1,e_1\rangle 1 \quad f(e_2)f(e_2)=j^2=-1=-\langle e_2,e_2\rangle 1$$

したがって，$Cl(V)$から$\mathbb{H}$への代数準同型$F:Cl(V)\to\mathbb{H}$が存在する．

また，$Cl(V)$の生成元は以下を満たす．

$$1\to 1 \quad e_1\to i \quad e_2\to j \quad e_1e_2\to ij=k$$

このことから，Fは同型であるため，$Cl(V)\cong\mathbb{H}$となる．

Ex: $\dim V=3$すなわち，Vを3次元の内積空間とし，正規直交基底をe_1,e_2,e_3とする．

このとき，$Cl(V)$は$\{1,e_1,e_2,e_3,e_1e_2,e_2e_3,e_3e_1,e_1e_2e_3\}$から生成され, 以下の関係式が成り立つ．

$$e_i^2=-1 \quad (1\leq i\leq 3) \quad e_ie_j=-e_je_i \quad (1\leq i,j\leq 3, i\neq j)$$

ここで，線形写像$f:V\to\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$を以下のように定める．

$$f(e_1)=(i,-i) \quad f(e_2)=(j,-j) \quad f(e_3)=(k,-k)$$

すると以下が成立する．

$$f(e_1)f(e_1)=(i,-i)(i,-i)=(i^2,(-i)^2)=(-1,-1)$$
$$f(e_2)f(e_2)=(j,-j)(j,-j)=(j^2,(-j)^2)=(-1,-1)$$
$$f(e_3)f(e_3)=(k,-k)(k,-k)=(k^2,(-k)^2)=(-1,-1)$$

よって，$f(e_i)f(e_i)=(-1,-1)$が成立する．また以下も成り立つ．

$$f(e_1)f(e_2)=(i,-i)(j,-j)=(ij,(-i)(-j))=(k,k)$$
$$f(e_2)f(e_1)=(j,-j)(i,-i)=(ji,(-j)(-i))=(-k,-k)$$

したがって，$f(e_1)f(e_2)=-f(e_2)f(e_1)$も成立する．

このことから，$Cl(V)$から$\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$への代数準同型$F:Cl(V)\to\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$が存在する．

これは同型であるため，$Cl(V)\cong\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$となる．

V_1,V_2を$\mathbb{R}$上内積空間としたときに，その直和$V=V_1\oplus V_2$のクリフォード代数$Cl(V_1\oplus V_2)$と$Cl(V_1),Cl(V_2)$の関係について考える．そこで$\mathbb{Z}_2$次数付きテンソル積を以下で定義する．

Def 4.4: $\mathbb{R}$上代数Wが$\mathbb{Z}_2$次数付き代数であるとは，Wをベクトル空間として,$W = W^0 \oplus W^1$と直和分解出来て，積に関して$W^i W^j \subset W^{i+j}$が成り立つことを言う.

また，W, Vを$\mathbb{Z}_2$次数付き代数として，$\mathbb{Z}_2$次数付きテンソル積を次で定義する.
- $A \hat{\otimes} B$はベクトル空間としては$A \otimes B$と同じである.
- $\mathbb{Z}_2$次数付きの積を次で定義する.

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (-1)^{\deg(a')\deg(b)} aa' \otimes bb'$$

- $A \hat{\otimes} B$の$\mathbb{Z}_2$次数付きの積は次で定義する.

$$(A \hat{\otimes} B)^0 = A^0 \otimes B^0 \oplus A^1 \otimes B^1 \quad (A \hat{\otimes} B)^1 = A^0 \otimes B^1 \oplus A^1 \otimes B^0$$

A, B, Cを$\mathbb{Z}_2$次数付き代数とするとき，以下が成り立つ.

$$(A \hat{\otimes} B) \hat{\otimes} C \cong A \hat{\otimes} (B \hat{\otimes} C)$$

Rem: $\deg(a)$とは，aの最高次数のことを指す.

Prop 4.2: 以下の同型が成り立つ.

$$Cl(V_1 \oplus V_2) \cong Cl(V_1) \hat{\otimes} Cl(V_2)$$

また，ベクトル空間としての次元は以下が成立する.

$$\dim(Cl(V_1 \oplus V_2)) = \dim(Cl(V_1)) \times \dim(Cl(V_2))$$

先ほどまでは, 正定値内積が定義されたベクトル空間に対して, クリフォード代数を定義していた. 正定値内積の入ったn次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^n$から構成したクリフォード代数をCl_nや$Cl_{(n,0)}$と書くことにする. $Cl(V) \cong Cl_n$となるので，以下では負定値内積を持つベクトル空間に対してもクリフォード代数を定義する.

Rem: 負定値内積は特に以下の性質を満たしているものである.
- 線形性：$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle \quad \langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle \quad \langle rx, sy \rangle = rs \langle x, y \rangle$
- 対称性：$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- 負定値性：$\langle x, x \rangle \geq 0$であり，等号成立は$x = 0$のときに限る.

すなわち正定値内積の正定値性が負定値性に変わったものである.

Def 4.5: 符号数が(p, q)の内積$\langle \cdot, \cdot \rangle_{(p,q)}$を以下のように定義する.

$$\langle v, w \rangle_{(p,q)} = v_1 w_1 + \cdots + v_p w_p - v_{p+1} w_{p+1} \cdots - v_{p+q} w_{p+q} \quad (v, w \in \mathbb{R}^{p+q})$$

この内積を定義した実ベクトル空間$\mathbb{R}^{p+q}$に対して以下の関係式を満たしているとする.

$$vw + wv = -2 \langle v, w \rangle_{(p,q)} \quad (v, w \in \mathbb{R}^{p+q})$$

この関係式から作られるクリフォード代数を$Cl_{(p,q)}$と書く.

以下では$Cl_{(n,0)}$と，$Cl_{(0,n)}$が行列環と$\mathbb{R}$上代数として同型であることを示す.

Def 4.6: $K=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$とする．各成分が$K$の元であるような$n\times n$行列を$K(n)$と表す．
行列の積によって，$K(n)$は単位行列を持つK上代数となり，これを行列環と呼ぶ．
$K(n)$はK上代数であるので，特に$\mathbb{R}$上代数でもある．
直和$K(n)\oplus K(n)$は$(A,B)(C,D)=(AC,BD)$と積を定義すると，K上代数となる．
また，$K(n)\otimes K(m)$は$(A\otimes B)(C\otimes D)=(AC,BD)$と積を定義すると，$K$上代数となる．

Ex: ベクトル空間$\mathbb{R}^{0,1}$について考える．このとき正規直交基底をe_1と取ると，

$$e_1^2=-\langle e_1,e_1\rangle_{(0,1)}=-(-1)=1$$

ここで線形写像$f:\mathbb{R}^{0,1}\to R\oplus R$を以下で定める．

$$f(1)=(1,1)\quad f(e_1)=(1,-1)$$

とすると，以下が成立する．

$$f(e_1)f(e_1)=(1,-1)(1,-1)=(1,-1)^2=(1,1)$$

よって代数同型$F:Cl_{0,1}\to R\oplus R$が存在する．
Ex: ベクトル空間$\mathbb{R}^{0,2}$を考える．このとき，正規直交基底をe_1,e_2と取ると，

$$e^{1^2}=-\langle e_1,e_1\rangle_{(0,2)}=-(-1)=1\quad e_2^2=-\langle e_2,e_2\rangle_{(0,2)}=-(-1)=1$$

また$e_1e_2=-e_2e_1$が成り立つので，$(e_1e_2)^2=e_1e_2e_1e_2=-e_1^2e_2^2=-1$
ここで線形写像$f:\mathbb{R}^{0,2}\to R(2)$を以下で定める．

$$1\to\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad e_1\to\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\quad e_2\to\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad e_1e_2\to\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

すると以下が成立する．

$$f(e_1)^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$f(e_2)^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

よって代数同型$F:Cl_{0,2}\to R(2)$が存在する．

Lem 4.1: $\mathbb{R}$上代数として以下の同型が成立する．

$$Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2} \cong Cl_{0,n+2} \quad Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0} \cong Cl_{n+2,0}$$

まずは$Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2} \cong Cl_{0,n+2}$を証明する．

Proof: $\mathbb{R}^{0,n+2}$の正規直交基底を, $e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}, e_{n+2}$とし, $\mathbb{R}^{n,0}$の基底を$e_{1'}, \cdots, e_{n'}$とし, , $\mathbb{R}^{0,2}$の基底を$e_{1''}, e_{2''}$とする．このとき，線形写像fを以下のように定める．

$$f(e_i) = \begin{cases} e'_i \otimes e''_1 e''_2 & (1 \leq i \leq n) \\ 1 \otimes e''_{i-n} & (i = n+1, n+2) \end{cases}$$

すると，$1 \leq i, j \leq n$に対して，

$$\begin{aligned} f(e_i)f(e_j) + f(e_j)f(e_i) &= (e'_i \otimes e''_1 e''_2)(e'_j \otimes e''_1 e''_2) + (e'_j \otimes e''_1 e''_2)(e'_i \otimes e''_1 e''_2) \\ &= e'_i e'_j \otimes e''_1 e''_2 e''_1 e''_2 + e'_j e'_i \otimes e''_1 e''_2 e''_1 e''_2 \\ &= -e'_i e'_j \otimes e''_1 e''_1 e''_2 e''_2 - e'_j e'_i \otimes e''_1 e''_1 e''_2 e''_2 \\ &= -e'_i e'_j \otimes 1 - e'_j e'_i \otimes 1 \\ &= 2\delta_{ij} \end{aligned}$$

また，e_{n+1}, e_{n+2}に対して，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} f(e_{n+1})f(e_i) + f(e_i)f(e_{n+1}) &= (1 \otimes e''_1)(e'_i \otimes e''_1 e''_2) + (e'_i \otimes e''_1 e''_2)(1 \otimes e''_1) \\ &= e'_i \otimes e''_1 e''_1 e''_2 + e'_i \otimes e''_1 e''_2 e''_1 \\ &= e'_i \otimes e''_2 - e'_i \otimes e''_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(e_{n+2})f(e_i) + f(e_i)f(e_{n+2}) &= (1 \otimes e''_2)(e'_i \otimes e''_1 e''_2) + (e'_i \otimes e''_1 e''_2)(1 \otimes e''_2) \\ &= e'_i \otimes e''_2 e''_1 e''_2 + e'_i \otimes e''_1 e''_2 e''_2 \\ &= -e'_i \otimes e''_1 + e'_i \otimes e''_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ここで，$i, j = n+1, n+2$に対して以下を得ることができる．

$$f(e_i)f(e_j) = 2\delta_{ij}$$

このことから，代数準同型$F : Cl_{0,n+2} \to Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}$が存在する．また，基底の対応から同型であることが分かる． □

同様にして，$Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0} \cong Cl_{n+2,0}$も示せる．

この補題より例えば以下のことが成り立つ.

$$Cl_{4,0} \cong Cl_{0,2} \otimes Cl_{0,2} \cong R(2) \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{H}(2)$$

この補題により, $Cl_{1,0}, Cl_{2,0}, Cl_{0,1}, Cl_{0,2}$が何と同型なのかということが分かっていると, $Cl_{3,0}$などの同型を考えることができる.

これらを考えてクリフォード代数の分類を行うと以下のようになる.

$Cl_{1,0}$	$\mathbb{C}$	$Cl_{0,1}$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$
$Cl_{2,0}$	$\mathbb{H}$	$Cl_{0,2}$	$\mathbb{R}(2)$
$Cl_{3,0}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$Cl_{0,3}$	$\mathbb{C}(2)$
$Cl_{4,0}$	$\mathbb{H}(2)$	$Cl_{0,4}$	$\mathbb{H}(2)$
$Cl_{5,0}$	$\mathbb{C}(4)$	$Cl_{0,5}$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$
$Cl_{6,0}$	$\mathbb{R}(8)$	$Cl_{0,6}$	$\mathbb{H}(4)$
$Cl_{7,0}$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$Cl_{0,7}$	$\mathbb{C}(8)$
$Cl_{8,0}$	$\mathbb{R}(16)$	$Cl_{0,8}$	$\mathbb{R}(16)$

5. 参考文献

1. 泰史本間：『スピン幾何学:スピノール場の数学』，森北出版，2016
2. 斎藤正彦：『線型代数入門』，東京大学出版，2020