

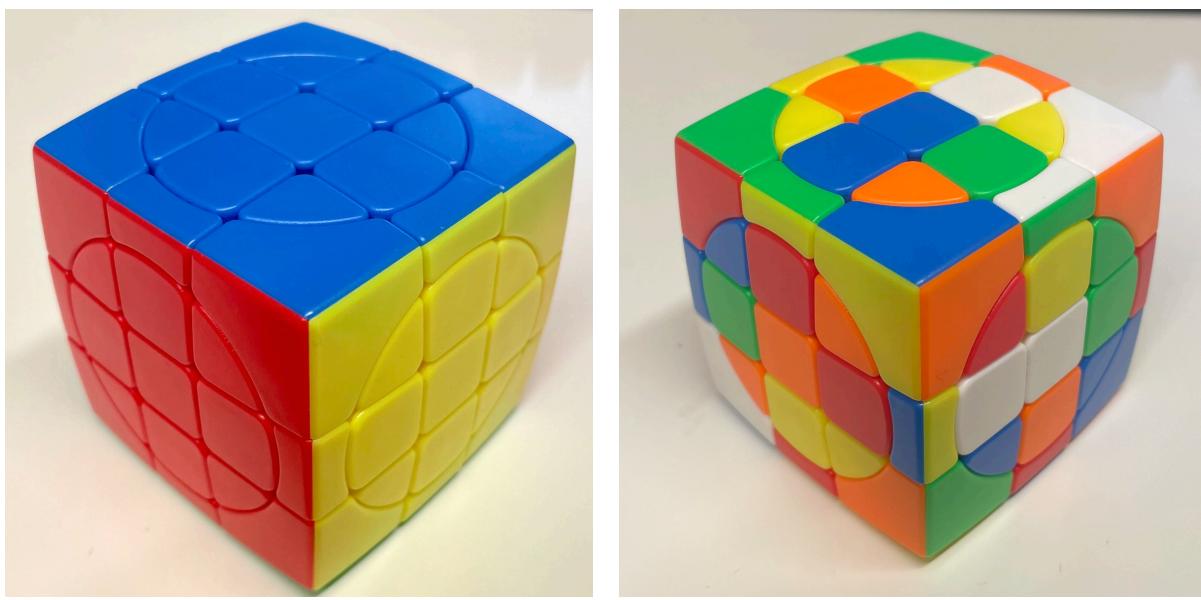
Crazy 3x3x3 II が柄付きの 3x3x3 キューブと同型という話

是川 楓季

2025 年

1 はじめに

先日, Crazy 3x3x3 II という回転パズルを購入した。見るからに難しそうだが, よく考えると, 柄付きのルービックキューブと同型なので難しくないということが分かった。ここでは、そのことについて紹介する。



(a) 完成形

(b) 混ぜた状態

図 1: Crazy 3x3x3 II

2 回転パズルの操作全体が群になること

群論の知識は必要ないが, ルービックキューブを考える際にはよく使われるので, 群について簡単に説明しておく。5 章からが本題であるが, そこでは群論の知識は必要としていない。

群とは, 次のようなものだった。

Definition 1

集合 G とその上の二項演算 $* : G \times G \rightarrow G$, G 上の変換 $\text{inv} : G \rightarrow G$, 単位元と呼ばれる G の元 $e \in G$ の4つ組 $(G, *, \text{inv}, e)$ であって, 次の性質を満たすものを, **群** と呼ぶ。

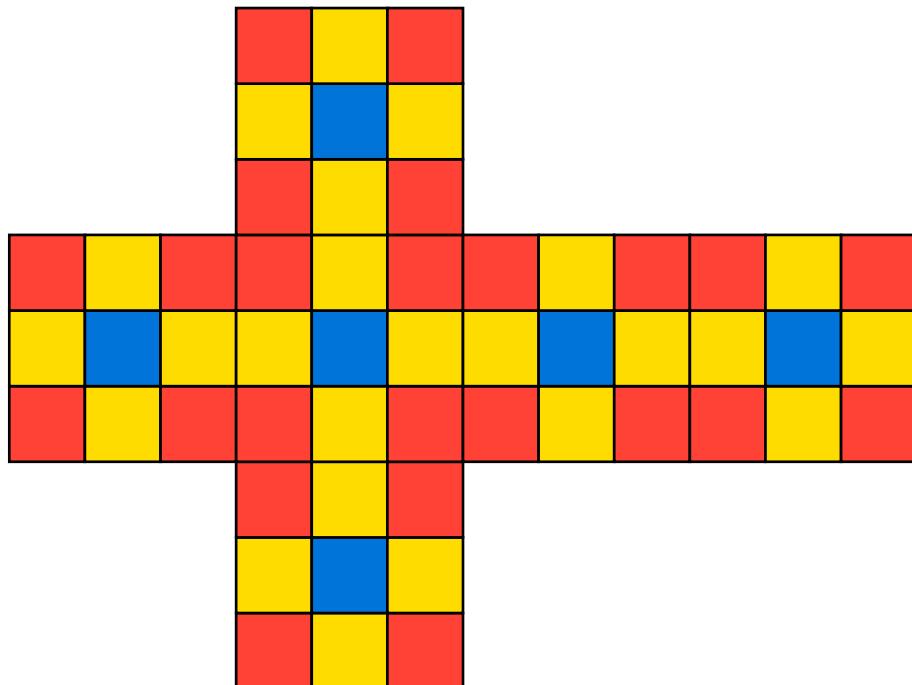
- 任意の $a, b, c \in G$ について, $(a * b) * c = a * (b * c)$.
- 任意の $a \in G$ について, $e * a = a * e = a$.
- 任意の $a \in G$ について, $a * \text{inv}(a) = \text{inv}(a) * a = e$.

また, $a * b$ は ab と, $\text{inv}(a)$ は a^{-1} と一般的に表記されるのだった。さらに, $(G, *, \text{inv}, e)$ 自体も, G と表記されることが多い。

さて, 回転パズルにおいて, ある状態から別の状態へと移る操作全体を G とする。この時, $*$ として操作の合成を, e として何もしない操作を, inv として逆操作をとることを考えると, $(G, *, \text{inv}, e)$ は群の条件を満たすことが分かる。

3 3x3x3 ルービックキューブの群

具体的に, 3x3x3 ルービックキューブの群について考える。操作全体はどのような集合で表せるだろうか。例えば, 面の置換として操作を表すことができる。

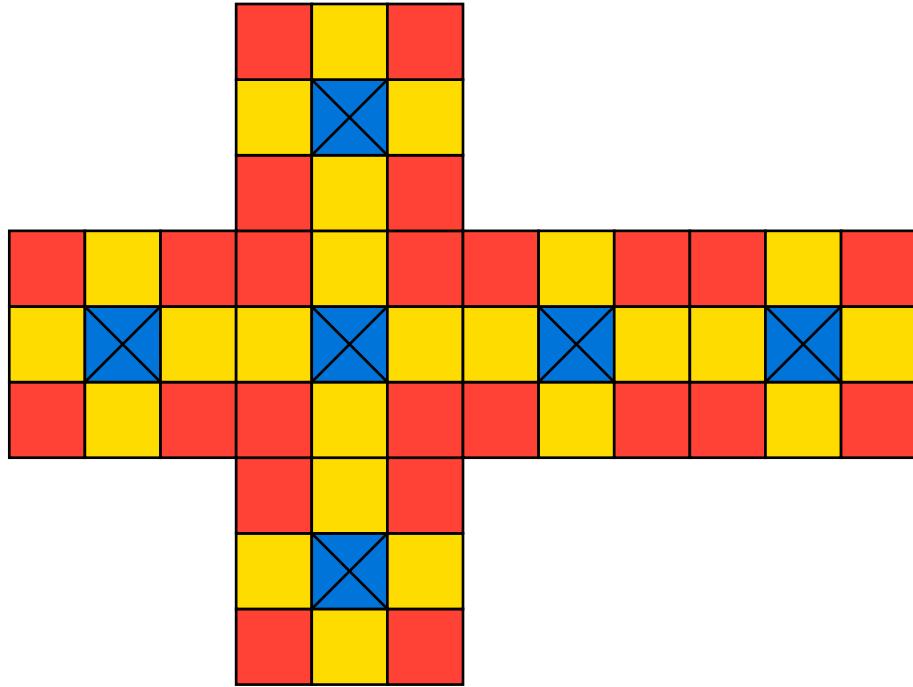


色で塗り分けたセンター・エッジ・コーナーキューブの 6 個, 24 値, 24 値の面はそれぞれ独立に動くので, ルービックキューブ群は, これらのキューブの置換と向きの組み合わせで表せる。すなわち, 3 つの対称群の直積 $S_6 \times S_{24} \times S_{24}$ のある部分群と同型になる。さらに, コーナーキューブは 3 つの面が常にグループになっているので, 8 個の置換とそれぞれ 3 種類の向きを持っていることから, コーナーキューブだけで見ると $S_8 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^8$ のある部分群と同型である。同様に, エッジキューブは 2 つの面が常にグループになっているので, 12 個の置換とそれぞれ 2 種類の向きを持っていることから, エッジキューブだけで見ると $S_{12} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{12}$ のある部分群と同型である。したがって, ルービックキューブ群は, $S_{12} \times S_8 \times S_6 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^8 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{12}$ のある部分群と同型になる。実際にはルービックキューブ群は, 位数 $43252003274489856000 = 2^{27}3^{14}5^37^211$ の有限群であることが知られている。

4 柄付きのルービックキューブの群

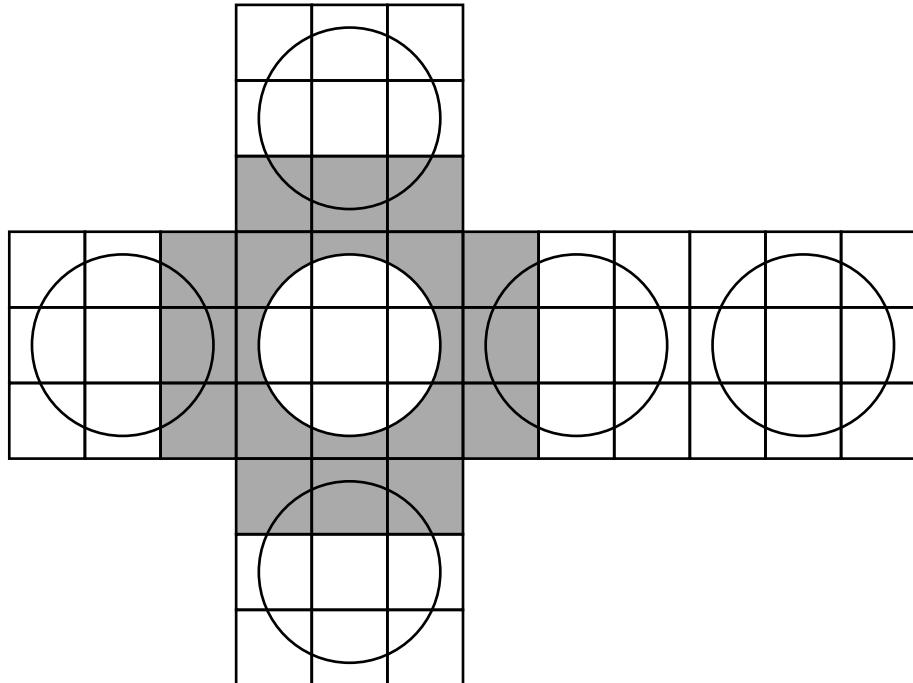
次に, 柄付きのルービックキューブの群を考える。柄がついているとセンターキューブの向きが区別されなければならない。これを置換群として表現するには, 例えばセンターキューブの面を 4 つに分割するとよい。すると, 柄付きのルービックキューブ群は, S_{24} のある部分群と同型になる。しかし, 各センターキューブの位置関係は変わらないので, センターキューブに対する操作全体の群は実際に

は $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^6$ のある部分群と同型になる。したがって、柄付きのルービックキューブ群は、 $S_{12} \times S_8 \times S_6 \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^6 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^8 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{12}$ のある部分群と同型になる。

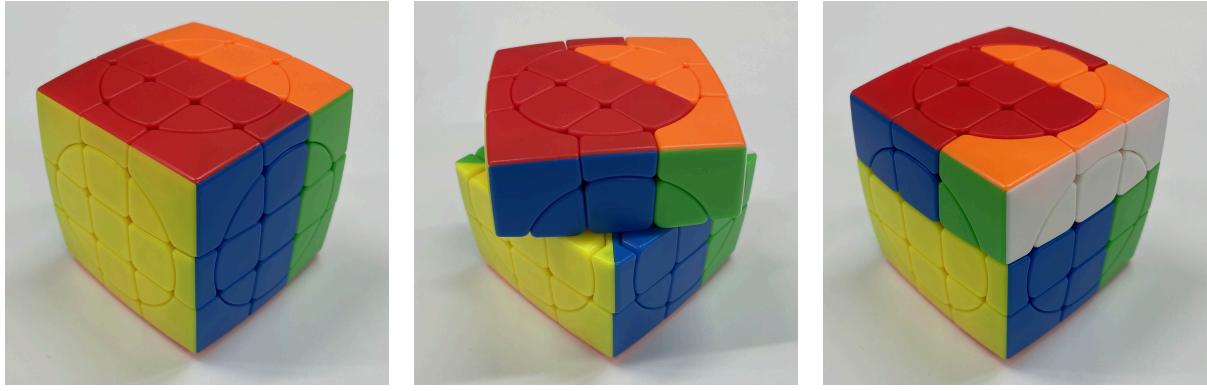


5 Crazy 3x3x3 II の動き

本題の、Crazy 3x3x3 II についてである。このキューブは特殊な動きをする。一つの面を回したときに、影響がある面を灰色で示すと次のようになる。



つまり面を回したときに、円で囲まれた部分は動かないというパズルになっている。例えば上面を回転させると、次のようになる。ただしパートの動きがわかりやすくなるよう、完成形でない形から始めている。



(a)

(b)

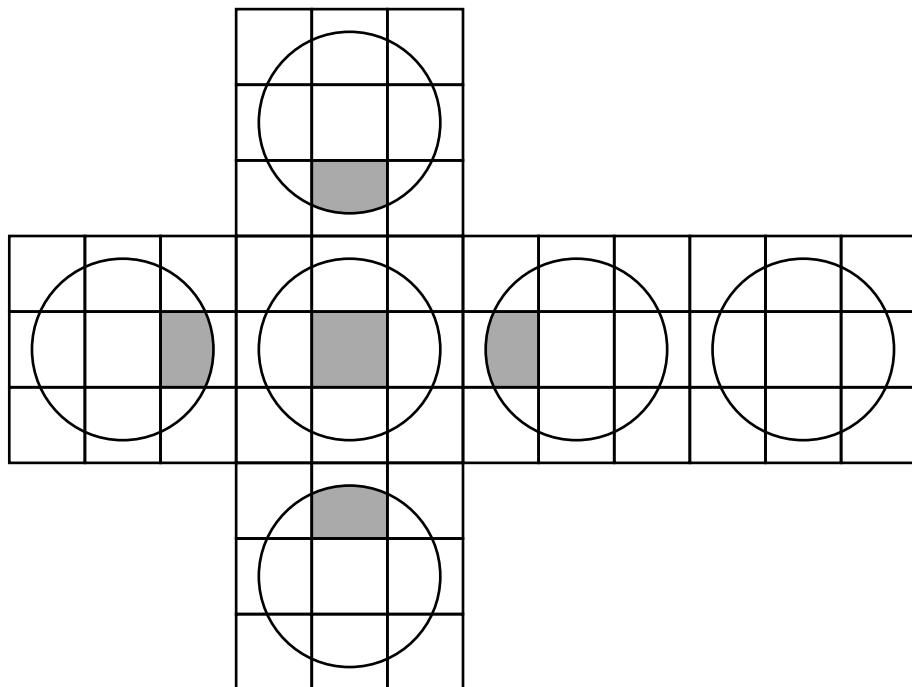
(c)

図 2: 上面を回転させる様子

6 パズルが同型であること

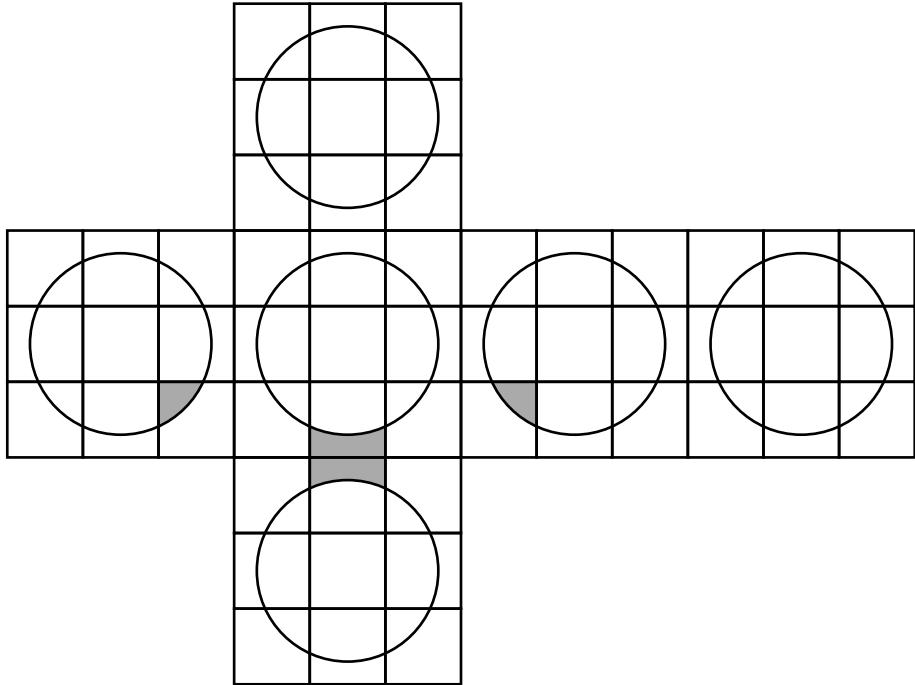
実は, Crazy 3x3x3 II の操作全体の群が柄付きのルービックキューブ群と同型であることは, 具体的に群を求めることなく理解することができる. 実際, 次のように同型を構成することができる.

まず, この 5 つのパートに注目する.



これらは一見すると別のパートだが, 実はほとんど 1 つのパートとしてふるまう. センターキューブが含まれているから, これを中心と考えよう. まずはこのセンターキューブの面で回転させたとしよう. すると周りの 4 つのパートは通常のキューブのように動く. 次に, 周りの 4 つのパートがある面で回転させたとしよう. すると, どの色のついたパートも動かないことがわかる. 裏側の面もこれらのパートには関与しないので, 結局周りの 4 つのパートを動かすことができるのは, センターキューブの面を回転させたときだけである. したがって, これら 5 つのパートは 1 つの柄付きセンターキューブとして振る舞うことが分かる.

次に, これらの 3 つのパートに注目する.



するとまた、どのように操作してもこれらのパーツの位置関係は変わらないことが分かる。実際に印をつけて操作した過程が、次の図である、どのような操作を加えても、これらのパーツの位置関係が変化していないことが確認できる。

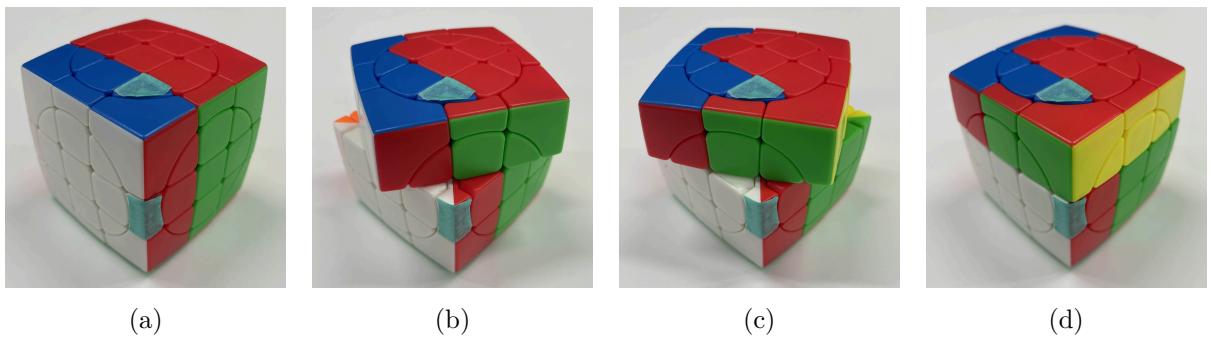


図 3: エッジと垂直な面を回転させる様子

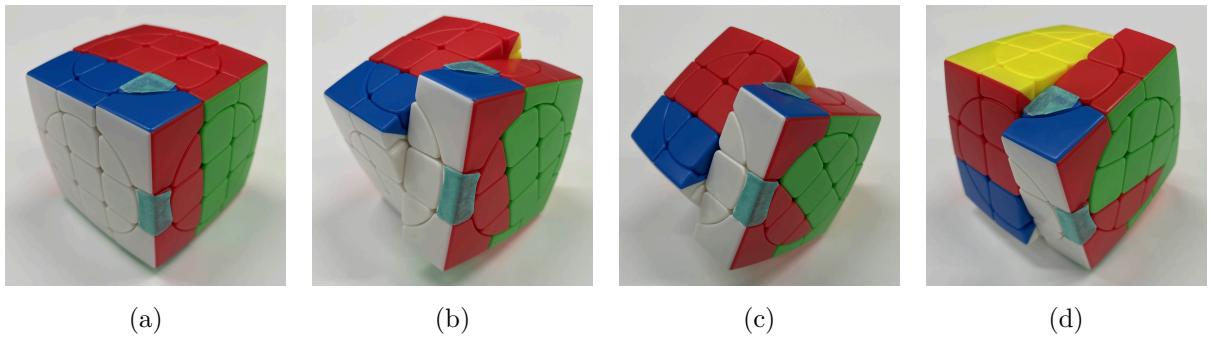
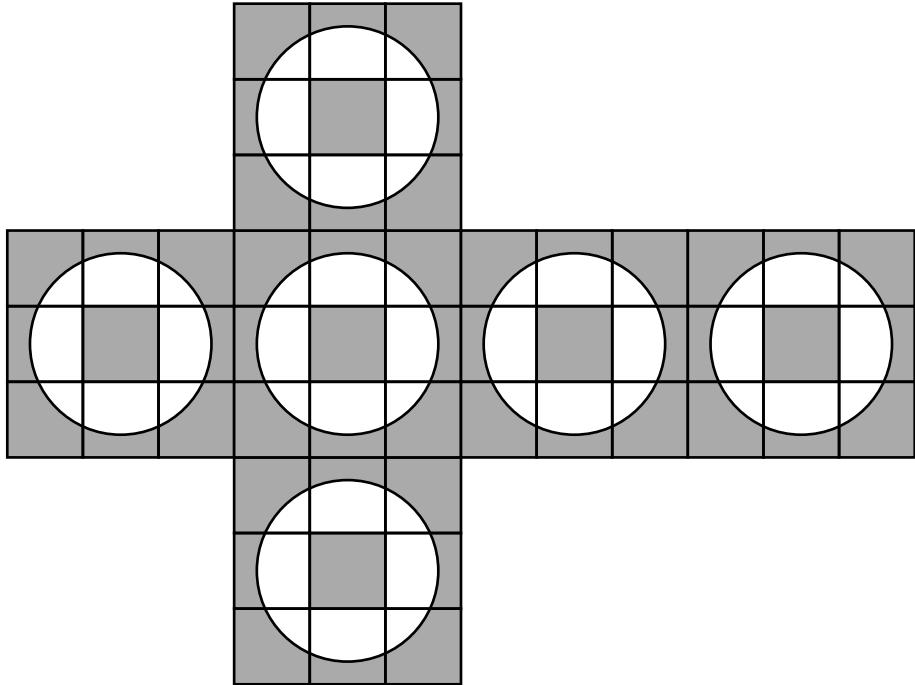


図 4: エッジと水平な面を回転させる様子

これは、円の中の扇形のような部分が、エッジキューブの位置によって完全に定まってしまうことを意味している。したがって、キューブの群を考える上ではこの扇形の部分は無視してよい。

この議論によって、センターキューブに向きを持たせれば、円の中のセンターでないパーツはすべて無視できることが分かった。つまりこの灰色の部分が残る。ただしセンターキューブには向きがある。



そしてこれは柄付きのキューブと全く同じ構造をしている。したがって、Crazy 3x3x3 II の操作全体の群は柄付きのルービックキューブ群と同型である。

7　まとめ

当時持っていたパズルより複雑そうな見た目のパズルを購入したので、1ヶ月ほどかかるかなと思っていたのだが、実際に触ってみるとものの数日で解けてしまった。そんなはずはないだろうともう一度試してみても、やはりすぐに解けてしまった。よく観察すると、このパズルはパーツの数に比べて状態の数がかなり少ないことがわかつってきた。これはとても不思議で、面白い発見だった。このようにタネがわかつてしまうと、なんて簡単なことだろう、と思ってしまうのだが、実際に気づくまではなかなかわからないものだった。

しかし実際に触れる形の 2 つのパズル(しかも全然異なって見える！)が同型であるというのは、とても面白いと感じた。

普通のルービックキューブを解けるという人は、解いて友達に自慢できるパズルとして、Crazy 3x3x3 II を買ってみてはいかがだろうか。内側の部分を気にしなければ、ほとんど解けることが分かるだろう。あとは柄付きのキューブでいうところのセンターキューブの向きを揃えるだけである。

8　参考文献・資料

[1] 水野貴裕. 群論とルービックキューブ. (<https://www.lab2.toho-u.ac.jp/sci/is/shirayanagi/lab/dl/2015/mizuno.pdf>)

[2] tribox store. ShengShou Pillowed Crazy 3x3x3 II Stickerless. (https://store.tribox.com/products/detail.php?product_id=3642) 筆者はここから購入した。