2025 年 芝浦祭 懸賞問題解答

芝浦工業大学 数理科学研究会

1　解答

問題 1**：** 180°
問題 2**：** 59
問題 3**：** 176 **日**
問題 4**：** 29
問題 5**：** 144 **通り**
問題 6**：** 252 **通り**
問題 7**：** 245 : 27

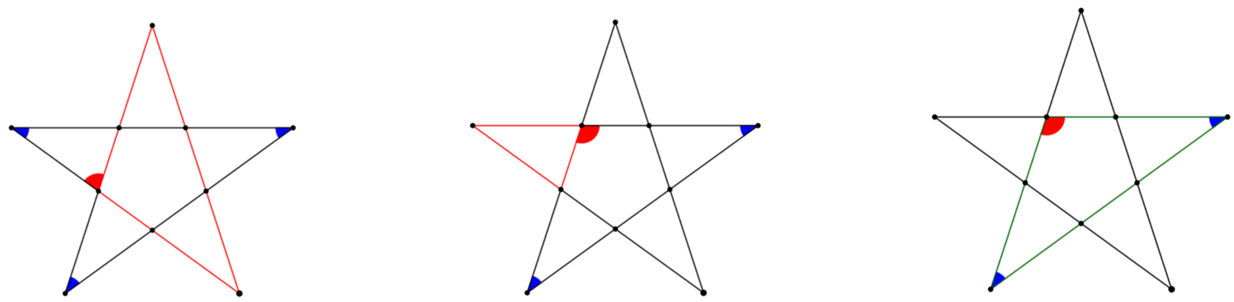
8	11	13	22	28
9	16	21	18	27
18	13	22	20	28
22	19	18	26	25
29	24	22	27	29

図 1　**問題** 4 **の解答の図**

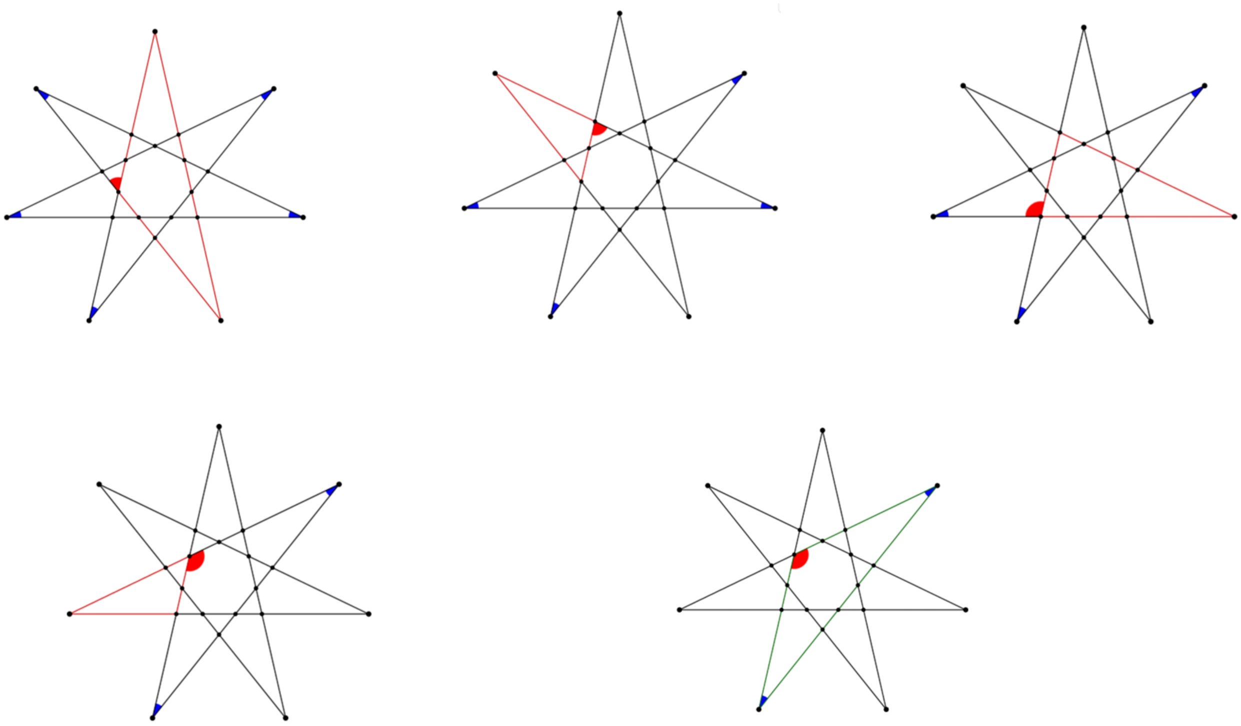
2　解説

問題 1

三角形の外角は、隣にない内角 2 つ分を合わせた大きさになる．
まずは左の図形について考える．赤い三角形に注目すると，赤い角の大きさは A と C の和になります．同じことを各図について考えると最後の図の赤い角度にまとまる．緑の三角形に注目すると，内角の和が 180 度になることから，色のついた角度の和が 180 度になることがわかる．



同様に右の図形についても考える．赤い三角形に注目すると，赤い角の大きさは A と C の和になります．同じことを各図について考えると最後の図の赤い角度にまとまる．緑の三角形に注目すると，内角の和が 180 度になることから，色のついた角度の和が 180 度になることがわかる．



問題 2

負でない整数 a と正の整数 m に対して，a を m で割ったあまりというのは，0 以上 m 未満の整数 n のうち，$a-n$ が m の倍数になるものを指すのでした．ここで，条件をよく読むと，a は別に負でない整数でなくとも問題ないことがわかります．そこで，負の a に対してもあまりを同様に定義してしまいます．例えば -2 を 5 で割ったあまりは 3，という風にです．
ここで，-1 は問題の条件を全て満たしていることを確認できます．-1 の次に大きく，問題の条件を満たしているような数は，-1 よりちょうど $2,3,4,5,6$ の最小公倍数だけ大きいです．$2,3,4,5,6$ の最小公倍数は 60 なので、答えは $-1+60=59$ となります．

問題 3

まず，3 の倍数となる条件は，「数字の各桁の和が 3 の倍数である」ことです．したがって，月と日をつなげた数の各桁の和を調べることで判定できます．
この条件を満たす日数を月ごとに数えると，次の表のようになります．

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
日数	10	10	10	10	11	10	10	11	10	10	10	10

よって，3 の倍数となる日は

$$10+10+10+10+11+10+10+11+10+10+10+10=122$$

すなわち 122 日です．
次に，「3 のつく数字の日」は，日付が $3,13,23,30,31$ のいずれかである場合です．これを各月の日数の範囲内で数えると，次のようになります．

$$3 \quad 13 \quad 23 \quad 30 \quad 31$$

従って 1 月から 12 月までで以下の日数あります．

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
日数	5	3	31	4	5	4	5	5	4	5	4	5

したがって，「3 のつく日」は合計

$$5+3+31+4+5+4+5+5+4+5+4+5=80$$

すなわち 80 日です．
ここで，「3 の倍数であり，かつ 3 のつく日」は重複して数えられているため，それらの重複日数を引く必要があります．月ごとの重複は次の通りです．

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
日数	1	1	10	1	2	2	1	2	2	1	1	2

これを合計すると

$$1+1+10+1+2+2+1+2+2+1+1+2=26$$

すなわち 26 日です．
以上より，求める日数は次のように計算されます．

$$122+80-26=176$$

したがって，芝浦君が勉強する日は 176 日間です．

問題 4

この問題は，それぞれのマスに到達するために必要な最小の体力を記録していくことで解くことができる．
まず，斜め移動ができないマスについて考える．
これらのマスは，スタート地点から右または下にしか移動できないため，左または上のマスに書かれた最小体力値に，現在のマスの値を加えることで求められる．
例えば，$(2,1)$ 成分（2 行 1 列目）は，左から来ることができないため，上のマス $(1,1)$ の値 8 に，自身のマスの値 1 を加えて，$8+1=9$ となる．
したがって，次のような表が得られる．

8	11	13	22	28
9				
18				
22				
29				

次に，斜め移動が可能なマスについて考える．
この場合，到達可能な 3 方向は「上」「左」「左上」の 3 通りである．
これらのマスに書かれている値について，上のマス・左のマス・左上のマスのうち，それぞれの到達体力に次のような補正を加えて比較します：

- 上または左から移動する場合：そのままの値を使う
- 左上から移動する場合：2 を加えて比較する

これら 3 つの候補のうち，最も小さい値を選び，その最小値に現在のマスの数字を加えたものが，そのマスまでに必要な最小の体力となります．
例えば，$(2,2)$ 成分では，上が 11，左が 9，左上が 8 なので，斜め方向には $8+2=10$ の体力が必要です．この中で最小は 9 であるため，$9+7=16$ となります．
この結果，次のような表が得られ，最小体力は 29 と求まる．

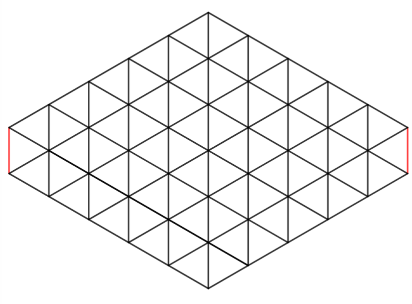
8	11	13	22	28
9	16	21	18	27
18	13	22	20	28
22	19	18	26	25
29	24	22	27	29

最後に，右下のマスまでの最小体力を求めることで，豊洲くんが最も体力を消費しない経路を求めることができる．実際に通るマスの経路は，次の図のようになる．

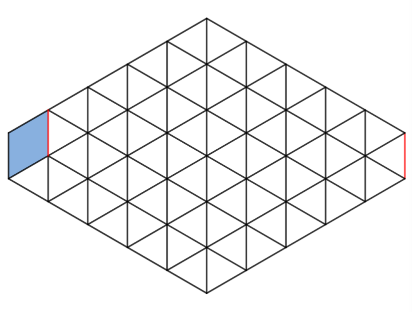
8	11	13	22	28
9	16	21	18	27
18	13	22	20	28
22	19	18	26	25
29	24	22	27	29

問題 5

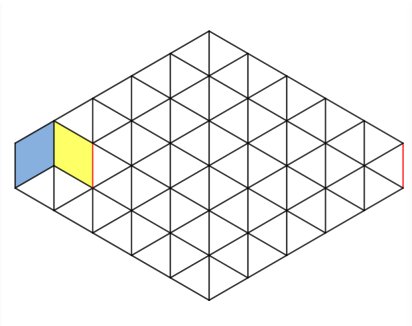
以下の図のように赤く塗った，縦向きの辺に注目します．



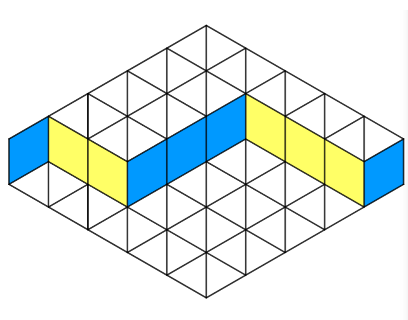
この辺に接する位置に置かれるのは横に長い菱形ではないので，左の辺には例えば以下の図のように青い菱形が配置されます．



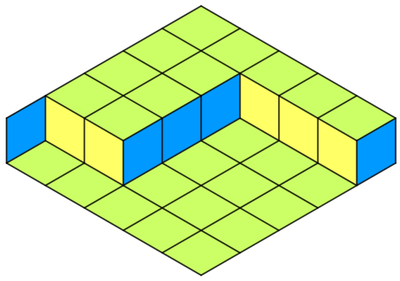
すると，配置した菱形の対辺に新たに縦向きの辺が現れます．同様に，この辺に接する位置に置ける菱形は斜めのものなので，例えば以下の図のような青い菱形の隣には黄色い菱形が配置されます．



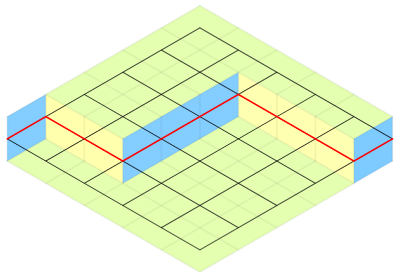
これを繰り返すと，どのような選択をしたとしても，以下の図のように最終的に左右の縦向きの辺は青い菱形と黄色い菱形でつながります．



以下の図のから，残った領域には横向きの菱形で敷き詰める以外に方法がないことがわかります．



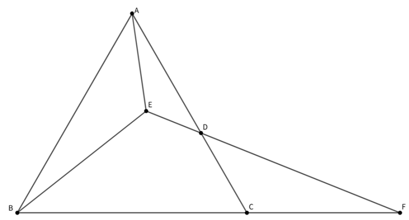
これで，あり得る敷き詰めの 1 通りが得られました．
さて，あり得る敷き詰めは以上の手続きで得られるもので全てです．ほかの敷き詰め方を作るには，青と黄色の菱形をどの順番で配置するかを変更すればよいです．
ここで以下の図のように線を書き入れると，青と黄色の菱形の並びは，左端の点から右端の点への最短経路と 1 対 1 に対応しています．



よってこの問題の答えは書き入れた 5×5 の格子上の，最短経路の数と等しくなります．これは 2 項係数によって求めることができ， ${}_{10}C_5 = 252$ となります．パスカルの三角形のように，あり得る最短経路の数を書き入れていっても求めることができます．

問題 6

図のように，ED と BC を延長し，それらの交点を F とします．



三角形 ABC は正三角形なので，$\angle EAD + \angle EAB = \angle EBA + \angle EBF = 60^\circ$ です．
また，三角形 EDA の内角の和を考えると $\angle EDA + \angle EAD = 60^\circ$，三角形 EAB の内角の和を考えると $\angle EAB + \angle EBA = 60^\circ$ がそれぞれわかります．ここから，$\angle EDA = \angle EAB = \angle EBF$ がわかります．
頂点 E に集まる角はすべて 120° だったので，$\triangle EDA,\ \triangle EAB,\ \triangle EBF$ は相似です．さらに，$\triangle EDA = \triangle CDF$ と $\triangle DCF = 120^\circ$ もわかるので，$\triangle CDF$ もこれら 3 つの三角形と相似です．
いま $AD : DC = 3 : 2$ だったので，$DE : AB = 3 : 5$ です．ゆえに，$\triangle EDA$ と $\triangle EAB$ の相似比は $3 : 5$ になります．よって，$ED : EA = 3 : 5$ です．
さらに $\triangle EDA$ と $\triangle EAB$ の相似から，$EA : EB = 3 : 5$ になります．
これらの条件から辺の比を計算すると，
$ED : EA : EB : CD = 9 : 15 : 25 : 14$ となります．よって面積比は，$\triangle ABC : \triangle AED = 9^2 + 15^2 + 25^2 - 14^2 : 9^2 = 245 : 27$ と計算することができます．

問題 7

まず，正しい九九の表におけるすべてのマスの合計値を求める．
各行の和は次のように表される．

$$
\begin{gathered}
1\times1+1\times2+\cdots+1\times9=1\times(1+2+\cdots+9)\\
2\times1+2\times2+\cdots+2\times9=2\times(1+2+\cdots+9)\\
\vdots\\
9\times1+9\times2+\cdots+9\times9=9\times(1+2+\cdots+9)
\end{gathered}
$$

したがって，全体の合計は

$$(1+2+\cdots+9)^2=45^2=2025$$

となる．
次に，誤って 1 行目と 1 列目の数字のうちそれぞれ 1 つずつを，1 小さい数または 1 大きい数に書き間違えたとする．このとき，行・列それぞれの誤りが表全体に掛け算の形で影響するため，表全体の合計値は，行の和と列の和の積と表される．
本来の正しい場合は $45\times45=2025$ であったが，誤って合計が 2024 になったとき，積の値が 1 だけ小さくなるような組 (x,y) を考えると，

$$x\times y=2024$$

を満たす整数のうち，45 に最も近いものは

$$x=44,\quad y=46$$

である．したがって，行の合計が 1 減り，列の合計が 1 増えるような組み合わせ，またはその逆（行が 1 増，列が 1 減）であることが分かる．
次に，そのような誤りの起こり方を数える．ここでは，行番号を縦方向の数字，列番号を横方向の数字とする．
まず初めに 1 の行の場合を考える．
1 の行はもともと $(1,2,\ldots,9)$ の値を持つ．0 は使えないため，「1 を 2 に書き間違える」場合しかない．その場合，表の積が 1 増える方向に働くため，列では 1 小さい数を書く必要がある．列番号として 1 は選べないので，列の選び方は 8 通りである．
次に 2〜9 の行の場合を考える．
たとえば 2 の行では，数字を 1 小さく（1 に）または 1 大きく（3 に）書き間違えることができる．
もし 1 小さくした場合，列側は 1 大きい数を書く必要があり，9 通りのうち 9 は選べないため 8 通り．
またもし 1 大きくした場合，列側は 1 小さい数を書く必要があり，1 は選べないため 8 通り．
したがって，それぞれ $8+9=17$ 通りとなる．この関係は 2〜9 の行で同様に成り立つため，全体で $17\times8=136$ 通りである．
以上より，1 の行の場合の 8 通りを加えると，

$$136+8=144$$

となる．
したがって，書き間違え方は 144 通りである．