セルバーグ跡公式への道筋

物質化学課程 環境・物質工学コース AC24083 手塚利公

2025 年 11 月 4 日

1　ポアソン和公式の拡張

Thm 1. ポアソン和公式

ある関数列の無限和とその関数列をフーリエ変換したものの無限和が等しい。

フーリエ変換を次で定義する。

$$\mathcal{F}[f](s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi isx}dx \tag{1.1}$$

このとき、以下が成立する。

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \tilde{f}(m) \tag{1.2}$$

Proof. 証明略

この公式は非常に面白い。例えば、ゼータ関数の関数等式などもこれに由来して現れる。このような強力で面白い等式が発見されれば、その一般化が気になるのは自然だろう。

フーリエ変換は積分作用素の一種だ。そこで、一般に積分作用素について、同様の公式が成立しないかを探る。次のような積分作用素 I を考える。

$$[I_f\phi](x) := \int_X f(y)\phi(xy)dy$$

この作用素 I は、ϕ について線形である。

$$I_f(\phi+\psi) = I_f(\phi) + I_f(\psi)$$

I_f は無限次元の線形写像である。積分作用素にもトレースがうまく定義できるはずだ。

というモチベで、以降、積分作用素にトレースを定義する準備をする。

1.1 積分を考える集合は位相群であるとする。

Definition 1. 位相群

位相群 G とは、位相空間でもある群であり、次を満たすものである

1. 写像 $G \times G \to G; (g,h) \to gh$ が連続である
2. 写像 $G \to G; g \to g^{-1}$ が連続である

位相群がコンパクト空間である場合、左移動不変[*1]なハール測度が本質的一意に定まる。なお、コンパクトでなくても左移動不変な測度が定まることはある。

G を左移動不変な測度が定められた位相群とし、G 上の関数 $\phi : G \to \mathbb{C}$ について作用素 $R(f)$ を次のように定める。

$$[R(f)\phi](x) = \int_G f(y)\phi(xy)dy \tag{1.3}$$

更に、Γ を G の離散部分群とし、$\phi(\gamma x) = \phi(x)$ というある種の周期性があるものとする。ここで、γx はあくまでも群の演算であり、通常の掛け算とは限らないことに注意されたい。

例えば、$G = \mathbb{R}, \Gamma = \mathbb{Z}$ と取れば、$G/\Gamma = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ となる。これは実数を割ったものでだから、位相群として円周群 T に同型になる。[*2]

この上の関数 $R(f)$ は周期関数と言えるだろう。また、これらは加法についての群なので、$\phi(n + x) = \phi(x)$ という単なる平行移動に一致する。

この作用素のトレースを定義するにあたり、これは正規直交基底をもつ関数空間の作用素であると都合がいい。

$R(f)$ を $L^2(G/\Gamma)$ 上の作用素であるとすると、これはヒルベルト空間であるから正規直交

[*1] $\mu(S) = \mu(gS)$、あえて言うなら $dx = d(gx)$ となる測度である。これは実解析における $dx = d(a + x)$ に対応するため移動という。

[*2] 集合としては $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0, 1)$ であるが、これは位相を無視した記述だ。位相とは、集合の繋がり方である。今、$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は 0 と 1 が繋がっているために、位相も含めた同型を考えねばならない。

基底 $\{\phi_n(x)\}$ が取れる[*3]ので、トレースを次で計算できる。

$$\mathrm{tr}(R(f)) = \sum_n \langle R(f)\phi_n, \phi_n \rangle$$

また、$R(f)$ の定義を少し計算すると

$$\begin{aligned}
\int_G f(y)\phi(xy)dy &= \int_{xG} f(x^{-1}y)\phi(y)d(x^{-1}y) \\
&= \int_G f(x^{-1}y)\phi(y)dy \\
&= \int_{\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(G/\Gamma)} f(x^{-1}y)\phi(y)dy \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{\gamma(G/\Gamma)} f(x^{-1}y)\phi(y)dy \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{G/\Gamma} f(x^{-1}\gamma y)\phi(\gamma y)d(\gamma y) \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{G/\Gamma} f(x^{-1}\gamma y)\phi(y)dy \\
&= \int_{G/\Gamma} \left(\sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma y) \right) \phi(y)dy
\end{aligned}$$

一旦 $K(x, y) = \displaystyle\sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma y)$ として考察する。

$K(x, y)$ は x を固定すれば y を変数として G/Γ 上の関数である。もし、これが $L^2(G/\Gamma)$ に含まれるのであれば、

$$K(x, y) = \sum_n \lambda_n(x)\phi_n(y)$$

なる形に分解されることが期待できる。ところで、関数列 $\{\lambda_n(x)\}$ もまた $L^2(G/\Gamma)$ に含まれれば、更に

$$K(x, y) = \sum_{n,k} \lambda_{n,k}\phi_k(x)\phi_n^*(y)$$

[*3] ここの話はもう少し慎重にすべきではあるのだが、そもそも跡公式の導出はなんの証明にもならず、具体的な G と Γ に対して都度厳密な議論を展開しなければならないことを考慮し割愛する。

と分解できそうだ。[*4] このとき、$R(f)$ の対角和を計算すると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(R(f)) &= \sum_n \langle R(f)\phi_n, \phi_n \rangle \\
&= \sum_n \left\langle \int_{G/\Gamma} K(x,y)\phi_n(y)dy, \phi_n \right\rangle \\
&= \sum_n \int_{G/\Gamma} \phi_n^*(x) \int_{G/\Gamma} K(x,y)\phi_n(y)dydx \\
&= \sum_n \int_{G/\Gamma} \phi_n^*(x) \int_{G/\Gamma} \sum_{m,k} \lambda_{m,k}\phi_k(x)\phi_m^*(y)\phi_n(y)dydx \\
&= \sum_n \sum_{m,k} \lambda_{m,k} \int_{G/\Gamma} \phi_n^*(x)\phi_k(x)dx \int_{G/\Gamma} \phi_m^*(y)\phi_n(y)dy \\
&= \sum_n \lambda_{n,n} \\
&= \int_{G/\Gamma} \sum_{n,k} \lambda_{n,k}\phi_k(x)\phi_n^*(x)dx \\
&= \int_{G/\Gamma} \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma y)dx
\end{aligned}
$$

となることが分かる。[*5] K を f で戻して計算を進める。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(R(f)) &= \int_{G/\Gamma} K(x,x)dx \\
&= \int_{G/\Gamma} \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma x)dx
\end{aligned}
$$

ここで集合 Γ を分解していく。共役類 $\gamma^\Gamma = \{g^{-1}\gamma g | g \in \Gamma\}$ を考え、その代表元の集合を $\{\Gamma\}$ と書けば、$\Gamma = \bigcup_{\gamma\in\{\Gamma\}} \gamma^\Gamma$ と直和分解される。よって

$$
\sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma x) = \sum_{\gamma\in\{\Gamma\}} \sum_{\tau\in\gamma^\Gamma} f(x^{-1}\tau x)
$$

ところで τ と γ が与えられたとき、$\tau = g^{-1}\gamma g$ となる g は一意に定まるだろうか。

$$
g^{-1}\gamma g = h^{-1}\gamma h
$$

[*4] というか $\{\phi_k(x)\cdot\phi_n^*(y)\}$ は実際に $L^2((G/\Gamma)^2)$ の正規直交基底になっている。

[*5] 実は、導出のために色々おいた仮定は過剰で、結論の式についてはかなり一般的に成り立つ。

$$hg^{-1}\gamma = \gamma hg^{-1}$$

より、γ と交換可能な元 δ を用いて $\delta g = h$ と出来る時に限り、一致してしまうため一意にならない。しかし、それは同時に、g が同値類 $\Gamma_\gamma = \{g \in \Gamma | g\gamma = \gamma g\}$ の代表元であるとすれば一意になることを意味している。よって

$$\sum_{\gamma\in\{\Gamma\}}\sum_{\tau\in\gamma^\Gamma} f(x^{-1}\tau x) = \sum_{\gamma\in\{\Gamma\}}\sum_{\delta\in\Gamma/\Gamma_\gamma} f(x^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta x)$$

つまり

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(R(f)) &= \int_{G/\Gamma}\sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma x)dx \\
&= \int_{G/\Gamma}\sum_{\gamma\in\{\Gamma\}}\sum_{\delta\in\Gamma/\Gamma_\gamma} f(x^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta x)dx \\
&= \sum_{\gamma\in\{\Gamma\}}\sum_{\delta\in\Gamma/\Gamma_\gamma}\int_{\delta(G/\Gamma)} f(x^{-1}\gamma x)d(\delta^{-1}x) \\
&= \sum_{\gamma\in\{\Gamma\}}\int_{\bigcup_{\delta\in\Gamma/\Gamma_\gamma}\delta(G/\Gamma)} f(x^{-1}\gamma x)dx \\
&= \sum_{\gamma\in\{\Gamma\}}\int_{G/\Gamma_\gamma} f(x^{-1}\gamma x)dx
\end{aligned}$$

ここで、G のうち γ と交換可能である元の集合を $G_\gamma = \{g \in G | \gamma g = g\gamma\}$ とすれば

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\gamma\in\{\Gamma\}}\int_{\bigcup_{y\in G_\gamma/\Gamma_\gamma} y(G/G_\gamma)} f(x^{-1}\gamma x)dx \\
&= \sum_{\gamma\in\{\Gamma\}}\int_{G_\gamma/\Gamma_\gamma}\int_{y(G/G_\gamma)} f(x^{-1}\gamma x)dxdy \\
&= \sum_{\gamma\in\{\Gamma\}}\int_{G_\gamma/\Gamma_\gamma}\int_{G/G_\gamma} f(x^{-1}y^{-1}\gamma yx)d(yx)dy \\
&= \sum_{\gamma\in\{\Gamma\}}\int_{G_\gamma/\Gamma_\gamma}\int_{G/G_\gamma} f(x^{-1}\gamma x)dxdy \\
&= \sum_{\gamma\in\{\Gamma\}}\int_{G_\gamma/\Gamma_\gamma}dy\int_{G/G_\gamma} f(x^{-1}\gamma x)dx \\
&= \sum_{\gamma\in\{\Gamma\}}\mathrm{vol}(G_\gamma/\Gamma_\gamma)\int_{G/G_\gamma} f(x^{-1}\gamma x)dx
\end{aligned}$$

以上より、セルバーグ跡公式が導かれる。

$$\sum_n \langle R(f)\phi_n, \phi_n\rangle = \sum_{\gamma\in\{\Gamma\}} \mathrm{vol}(G_\gamma/\Gamma_\gamma) \int_{G/G_\gamma} f(x^{-1}\gamma x)dx$$

Example 1. ポアソン和公式
セルバーグ跡公式について、$G=\mathbb{R},\ \Gamma=\mathbb{Z}$ とすれば、ポアソン和公式そのもの。

Proof. ϕ は $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = L^2([0,1))$ の元である。

$L^2([0,1))$ の正規直交基底は $\{e^{2\pi inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ である。左辺について考えると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(R(f)) = \sum_n \langle R(f)\phi_n, \phi_n\rangle &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle R(f)e^{2\pi inx}, e^{2\pi inx}\right\rangle \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{2\pi in(x+y)}dy, e^{2\pi inx}\right\rangle \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle e^{2\pi inx} \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{2\pi iny}dy, e^{2\pi inx}\right\rangle \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{f}(n)\left\langle e^{2\pi inx}, e^{2\pi inx}\right\rangle \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{f}(n)
\end{aligned}$$

同様に右辺についても計算してあげて、

$$\mathrm{tr}(R(f)) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} \mathrm{vol}(\mathbb{R}_\gamma/\mathbb{Z}_\gamma) \int_{\mathbb{R}/\mathbb{R}_\gamma} f(yx^{-1}\gamma x)dx$$

今、$\mathbb{R},\mathbb{Z}$ の演算は加法であり、可換群であるから、$\mathbb{R}_\gamma = \mathbb{R}$ ($\mathbb{Z}$ も同様) である。
乃ち、$\mathrm{vol}(\mathbb{R}_\gamma/\mathbb{Z}_\gamma) = \mathrm{vol}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = 1$ ということだ。更に、$y^{-1}\gamma y = \gamma$ であるので、

$$\mathrm{tr}(R(f)) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} f(\gamma) \int_{\{0\}} dy = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} f(\gamma) \tag{1.4}$$

ここで、自明群 $\{0\}$ の不変測度は 1 という結果を用いている。以上で確認が完了した。

以下なんか知り合いに問われて書いた、消すのめんどい領域。

シュワルツ空間 $\mathcal{S}$ の双対空間 $\mathcal{S}^*$ は、シュワルツ空間から実数への線形写像の集合である。

$\mathcal{S}^*$ の元の一部は、内積によって S と同一視できる。

$$\mathcal{S} \ni g \to \int_{\mathbb{R}} f(x)g^*(x)dx \in \mathcal{S}^*$$

ただし、収束性の話から、$f \in \mathcal{S}$ である必要はない。ゆるく増加していても問題にならない。そして、次のような関数 g に対してある $x \in \mathbb{R}$ を代入するような写像もまた線形写像である。

$$g \to g(x) \in \mathcal{S}^*$$

よって、$\mathcal{S}^*$ は $\mathcal{S}$ よりも真に大きい。

ところで、$g \to \langle f, g \rangle$ と表せるような線形汎関数は、連続である。

極限 $\lim\limits_{g' \to g}$ は $\langle g', g \rangle \to 0$ のことなので

$$\begin{aligned}
\lim_{g' \to g} \langle f, g' \rangle &= \lim_{\langle g, g' \rangle \to 0} \langle f, g' \rangle \\
\langle f, g \rangle - \langle g, g' \rangle \leqq \langle f, g' \rangle &\leqq \langle f, g \rangle + \langle g, g' \rangle \\
\langle f, g \rangle \leqq \lim_{g' \to g} \langle f, g' \rangle &\leqq \langle f, g \rangle \\
\therefore \lim_{g' \to g} \langle f, g' \rangle &= \langle f, g \rangle
\end{aligned}$$

そこで、$\mathcal{S}^*$ に連続写像であるということを要請すると、緩増加関数空間 $\mathcal{S}'$ が定義される。

ところで、$t \in \mathbb{R}$ を代入して返すような汎関数は連続写像であるので、緩増加関数に含まれる。これを関数による積分変換として表すことは出来ないが、逆にこの様な写像を積分変換で表現しうる「関数のようなもの」を定義できそうだ。

これこそが超関数 $\delta(x-t)$ である。つまり、超関数というのはシュワルツ関数 φ との内積 $\langle \delta, \varphi \rangle$ が矛盾なく定まるものとして導入される。