多様体の基礎を読んで Part1

数理科学科２年　BV24060 野口詠都

2025 年 10 月 30 日

目 次

0 初めに

この文書は「多様体の基礎」で紹介されていた定義, 定理の紹介, 私が本を読んで思ったことなどを書いたものです. 研究というよりは読書感想文のようなものなので, 時間が有り余っている方以外はぜひほかのメンバーの研究を見て上げてほしいです. また, 精読する時間のないまま作っているため, ひどいミスがあると思います.

1 多様体の気持ち

私たちが 2 次元平面を考えるときに x 軸 y 軸といった xy 座標を考えるのと同じように, もっと一般的な n 次元空間についても座標を考えたいというところに多様体を考える始まりがある. ユークリッド平面について, 私たちは全体に張られた座標軸を考えるが, ねじ曲がったような n 次元空間についてそのような全体を覆う座標軸を考えることは難しい. 球面上に座標軸を考えると, 左右上下に伸びていく座標軸はどこかで交差してしまい面倒なことになってしまう. そのようなことを避けるため, ある程度制限した区間について座標を考え, そのようなものを局所座標系と呼んでいる. 多様体は, どこでも好きなところに局所座標系を考えることができるような空間のことである.

2 距離と位相

2 次元平面で 2 点間の距離というものを考えるとき, 以下のようなものを高校時代に見たことと思う.$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ に対して

$$d(x, y) = \sqrt{(x1 - y1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

あるいは n 次元空間について $d(x, y)$ は $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$ に対して

$$d(x, y) = \sqrt{(x1 - y1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

を考えることができる. 一般的に距離を考えるときには以下の三条件を重視する.

- $d(x, y) \geq 0$　等号成立条件は $x = y$ の時
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

実際に上で考えた距離について三条件が成り立っていることを確認できる.

このような距離を用いて $\mathbb{R}^n$ に開集合を考えることができる. ε 近傍 $N(a,\varepsilon)$ は以下のように定義される.(授業をリスペクトし, 本とは異なる表記を使っている)

定義 1. a を $\mathbb{R}^n$ の一点,ε を小さい正数とすると,

$$N(a,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) < \varepsilon\}$$

この ε 近傍を用い,U が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることは以下のように定義される.

定義 2. U に含まれる任意の a について, 十分小さな ε が取れて,

$$N(a,\varepsilon) \subset U$$

が成り立つことである.

例えばこの開集合について適当な添え字集合 Λ を考えれば, 集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を考えることができる. ここで考える U_λ はすべて $\mathbb{R}^n$ の部分集合なので $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は $\mathbb{R}^n$ の部分集合族という.

本ではこの後ベクトル空間, 連続写像と C^r 級関数について触れているが一旦スキップする.

3　位相空間

私は位相空間というものの意味はあまり分かっていないが, 多様体を考えるうえで必要であるのでまとめておく. 位相空間を考える気持ちとしては, 一般的な空間を扱う上で空間の概念をはっきりさせる必要があるからだそう.

先の章で触れた集合族というものについて,$\mathbb{R}^n$ のすべての開集合からなる集合族を考え, それを $\mathcal{O}^n$ と表す. 位相空間とは組 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}^n)$ を集合 X とその開集合族について一般化したものである.

定義 3. 集合 X の部分集合族 $\mathcal{O}$ が次の三条件を満たすとき,$\mathcal{O}$ を X の位相と呼び, 組 $(X,\mathcal{O})$ を位相空間と呼ぶ.

1. $X \in \mathcal{O}$ かつ $\emptyset \in \mathcal{O}$
2. 有限個の開集合 $U_1, U_2, \ldots, U_k \in \mathcal{O}$ について,$\bigcap_{i=1}^{k} U_i \in \mathcal{O}$
3. 任意の開集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について,$U_\lambda \in \mathcal{O}(\forall\lambda \in \Lambda)$ ならば $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$

上で考えた $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}^n)$ が定義を満たしていることは簡単に確認できる. 特に $\mathcal{O}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の自然な位相と呼ばれる.

R^n での写像の連続性は点列の収束を用いて定義することができるが, 位相空間について連続写像を考えるときは以下のような定義である.

定義 4. *$f : X \to Y$ が連続写像であるとは Y の任意の開集合 U について, その逆像 $f^{-1}(U)$ が X になることである.*

今 X, Y を R^n, R^m と考え, 両者に自然な位相を入れることを考える. すなわち X, Y を位相空間 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ とみなすと, 二つの連続性の概念は一致していることが確認できる. (証明は長いので本参照. 都合の良い εやδ がとってこれることを利用する)
連続写像について強い関係である同相写像を以下のように考えることができる.

定義 5. *$(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. 写像 $f : X \to Y$ 外貨の条件を満たすとき f を同窓写像という.*

1. *$f : X \to Y$ は全単射である.*

2. *$f : X \to Y$ とその逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ がともに連続写像である.*

このような写像についての性質は多様体について考えるときにその前提になっていることが多い概念である.
次に位相空間から簡単に作ることのできる位相について紹介する.
$(X, \mathcal{O})$ を位相空間,A を X 任意の部分集合としたとき, 開集合族を以下のように考えると,A は位相空間になる.

$$\mathcal{O}_A = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$$

これは X の開集合 U と A との共通部分を全部集めてきたような集合族になっており, 位相の三条件は容易に確かめることができる.$\mathcal{O}_A$ は A の相対位相と呼ばれ, 位相区間 $(A, \mathcal{O}_A)$ は $(X, \mathcal{O})$ の部分空間と呼ばれる.

位相空間 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ の直積 $X \times Y$ についても積位相という位相を考えることができる. 開集合族を $U \times V$(ただし,$U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y$) の任意この和集合で作ることで,$X \times Y, \mathcal{O}_{X \times Y}$ は位相空間になる. この位相空間についても位相の 3 条件を確かめることができる. 今回二つの位相空間の積集合を考えたが, 同様の議論を繰り返すことで有限個の直積については, 同様に定義することができ, それぞれ

位相空間になっている.

本ではほかに商位相が紹介されているが省略.

次にハウスドルフ空間について紹介する. これは多様体を作るときに課される条件のうちの一つになるものでもある. このハウスドルフ空間という縛りは, 位相空間の定義が広すぎるがために入ってしまった異質な位相空間を議論から排除するために設けるものという感じ.

定義 6. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の任意の 2 点 $p, q (p \neq q)$ について, 開集合 U, V $(p \in U, q \in V)$ が $U \cap V = \emptyset$ が存在するときハウスドルフ空間という.

もちろんすべての位相空間について成り立つわけではないが,$\mathbb{R}^m$ とその自然な位相からつくられる位相空間については成り立つが,$\mathbb{R}$ についてはハウスドルフ空間でないものもある. ハウスドルフ空間について成り立つ性質として, ハウスドルフ空間の部分空間やハウスドルフ空間同士の積空間はハウスドルフ空間になる.

本では閉集合についての議論があるが省略. 閉集合は開集合の補集合として与えられるので, 連続写像や同相写像について閉集合を用いることでも考えられるといった内容など.

4　多様体の定義

まず, 多様体の気持ちのところで触れた局所座標系について定義を述べる.

定義 7. 位相空間 X の開集合 U から,$\mathbb{R}^m$ の開集合 U' 同相写像

$$\phi : U \to U'$$

が存在するとき,(U, ϕ) を m 次元座標近傍といい,ϕ を U 上の座標近傍系という.

この定義からは X 上に直接座標軸が張り付けられている感がないかもしれない. ほかの説明として,ϕ でゆがめたレンズを通して U を見ているといったものがあった気がする. 個人的には U に m 次元の網があるようなイメージが好き.

X に座標近傍 (U, ϕ) があるとすると,U 内の任意の点 p に対し $\phi(p)$ は $\mathbb{R}^m$ の点なので, 以下のような表現ができる.

$$\phi(p) = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

これは p の局所座標という. あまり幾何学 2 の授業でこの表現を使っていない気がするが個人的には $\mathbb{R}^m$ に移っている感があってわかりやすいと思っている.

定義 8. 位相空間 M が次の条件を満たすとき M を m 次元位相多様体という.

1. M はハウスドルフ空間である.
2. M の任意の点 p について, その点を含む m 次元座標近傍 (U, ϕ) が存在する.

多様体の好きなところに局所座標系が書けるという表現が定義に含まれているのがわかると思う.

多様体上には複数の座標近傍を考えることができる.m 次元位相多様体 M の二つの座標近傍 $(U, \phi), (V, \psi)$ が交わっているところを考えることができる. 二つの共通部分 $U \cap V$ に含まれる点 p の局所座標は,

$$\phi(p) = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad \psi(p) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

と表現される.ϕ, ψ の定義域地域を考えると

$$(y_1, y_2, \ldots, y_m) = \psi(\phi^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_m))$$

という関係が成り立つ. ここで考えた写像 $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ は二つの座標近傍の関係を表しており,(U, ϕ) から (V, ψ) への座標変換と呼ばれている. ψ, ϕ^{-1} がそれぞれ同相写像なので合成した $\psi \circ \phi^{-1}$ も同相写像になっている. また,ψ と ϕ を入れ替えた $\phi \circ \psi^{-1}$ も同相写像になっている.

直感的には,$U \cap V$ 上には二種類の m 次元の網が張られており,$(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ と $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ の二種類の座標の書き方があるととらえることができる. 一方を決めれば他方が決まるため, 座標変換は

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ y_2 &= y_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ &\vdots \\ y_m &= y_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) \end{aligned}$$

と表される. この表現は直交座標 (x, y) と極座標 (r, θ) の関係が一般的に

$$x = rcos\theta$$
$$y = rsin\theta$$

と表されており, これを一般化したものが上の表現であるということを理解できると思う.

先ほど考えた同相写像 $\psi \circ \phi^{-1}$ は $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ への写像であり, この写像の上では今まで考えていたような微分を考えることができる. この同相写像に微分可能性を要求した多様体を C^∞ 級微分多様体と呼び, 正確には以下のように定義される.

定義 9. *r を 1 以上の自然数または無限大とする. 位相空間 M が次の条件を満たすとき M を m 次元 C^r 級微分多様体という.*

1. *M はハウスドルフ空間である*
2. *M は m 次元の座標近傍により被覆される. すなわち M の座標近傍からなる族 $\{U_a, \phi_a\}_{a \in \Lambda}$ があり*
$$M = \bigcup_{a \in \Lambda} U_\alpha$$
が成り立つ
3. *$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ となる任意の $\alpha, \beta \in \Lambda$ について座標変換*
$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap V_\beta)$$
は C^∞ 級写像である

二つ目の条件は M の任意の点に対して座標近傍を考えることができる, と読み替えることもできる. また,C^r 級微分多様体を単に C^r 級多様体と呼ぶ.

本ではこの後 m 次元球面 S^m が m 次元 C^r 級微分多様体であることなどを紹介している.S^m を $2m$ 個の座標で被覆する方法や, 立体射影を用いた方法が紹介されている.

5　C^r 級関数と C^r 級写像

C^r 級関数は多様体 M から $\mathbb{R}$ への関数,C^r 級写像は多様体 M から多様体 N への写像といった定義域や値域が良くわからないものになっている. 本ではこれらの定義以外に様々な例や定理, 系を紹介しているがとりあえず後の説明で使う定義だけ説明する.

定義 10. *m 次元 C^r 級多様体 M 上の関数 $f : M \to \mathbb{R}$ が C^r 級関数であるとは, 任意の座標近傍 (U_α, ϕ_α) について,*

$$f \circ \phi_\alpha^{-1} : U'_\alpha \to \mathbb{R}$$

が U'_α 上の C^r 級関数になることである.

$f \circ \phi_\alpha^{-1}$ は $\mathbb{R}^m$ の開集合 U'_α から $\mathbb{R}$ への関数なので, この関数が C^r 級であるかという議論は意味を成している.

定義 11. *M を m 次元 C^m 級多様体,N を n 次元 C^n 級多様体とする. 連続写像 $f : M \to N$ について,$f(U) \subset V$ を満たすような $C^r k$ 級座標近傍 $(U; x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $(V; y_1, y_2, \ldots, y_n)$ を考える. 定義域を U に制限した写像は, 座標表示を用いて,*

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

と書くことができ, これを f の局所座標表示という. この局所座標表示が $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ について C^r 級なら C^r 級であるという。

この定義は上の C^r 級関数の自然な拡張になっている. また, ほとんど同じ定義で M 上の点 p にについて,C^r 級であることを考えることができる.

6　接ベクトル空間

$\mathbb{R}^m$ 上で媒介変数表示された関数について, 速度ベクトルを考えることができるが, これを多様体上ではどのように考えればよいかということがこの章の話である. ただ, 多様体上では局所座標系の取り方によって変化してしまうので, 局所座標系に関係ないものとして微分操作を考えようとしている.

$\mathbb{R}^m$ 上の点 p の開近傍 U で定義された任意の C^r 級関数を考える.$(1 \leq r \leq \infty)$. 曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ と $f : U \to \mathbb{R}$ の合成関数 $f(c(t))$ を考える. これは,1 変数の関数と考えることができ, いつもの意味での微分係数を対応させることができる.

$$f \mapsto \left.\frac{df(c(t))}{dt}\right|_{t=0}$$

これを c に沿う方向微分と呼び v_c と表す. 曲線 c によらない, 抽象化された点 p における方向微分 v は以下の性質を持つ.

定義 12. *1.* f, g が点 p の開近傍で定義された C^r 級関数で, 十分小さな開近傍上で,$f = g$ ならば $v(f) = v(g)$

2. v は線形写像である

3. 同様の f, g について次の式が成り立つ $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$

点 p における, 方向微分すべての集合 $D_p^r(M)$ を考えると, これは $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になる.

幾何学 2 の授業でも同様の方向微分を扱ったが, その授業の定義では,f, g が点 p の開近傍で定義された C^r 級関数に 1 つ目の条件をすでに組み込むという C^r 級関数の定義を採用していた.

定義 13. 多様体 M の点 p の開近傍 U で定義された方向微分 $v_p : C^\infty \to \mathbb{R}$ について, 点 p 周りの C^∞ 関数全体 $C^\infty(p)$ は以下のように定義される.

$$C^\infty(p) := \coprod_{p \in (U)} C^\infty(U)/\sim$$

ただし, 同値関係は $f : U \to \mathbb{R} \ \sim \ g : V \to \mathbb{R} \Leftrightarrow f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}$
接ベクトル v_p は $\mathbb{R}$ 上線形で,$v_p(fg) = v_p(f)g(p) + f(p)v_p(g)$ が成り立つ.

この定義では同値関係の中に $f = g$ ならば $v(f) = v(g)$ という部分が入っており, 一気に定義されている.

点 p における, 方向微分すべての集合 $D_p^r(M)$ を考えると, これは $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になる.

p の近傍の局所座標系 $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ を一つ選ぶと,

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right) \right\rangle$$

が基底になるベクトル空間 $T_m(p)$ を考えることができ, これを接ベクトル空間という.