

1 Bimbingan

1.1 Metodologi

1.1.1 Pengkajian Model Kapal

Pada tahap ini akan menghasilkan model kapal tak linier, yaitu:

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{f}(\mathbf{s}, u)$$

dan model pengukuran

$$\mathbf{h} = \mathbf{Cs}$$

1.1.2 Pengubahan domain waktu menjadi domain standar

Pada tahap ini, waktu yang awalnya pada $[t_0, t_f]$, diubah menjadi domain standar $\tau \in [-1, 1]$. Hubungan antara waktu sebenarnya dan waktu terstandar diberikan oleh transformasi linear:

$$\tau = \frac{2(t - t_0)}{t_f - t_0} - 1$$

Sehingga model kapal yang sebelumnya masih berdomain waktu akan diubah menjadi domain standar τ , dengan

$$\tau = \frac{2(t - t_0)}{t_f - t_0} - 1 \quad \iff \quad t = t_0 + \frac{t_f - t_0}{2}(\tau + 1).$$

Turunkan t terhadap τ :

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{t_f - t_0}{2}.$$

Dengan menggunakan aturan rantai untuk turunan terhadap τ , diperoleh

$$\frac{d\mathbf{s}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \mathbf{f}(\mathbf{s}(\tau), u(\tau)) \cdot \frac{t_f - t_0}{2}.$$

Sehingga persamaan model $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{f}(\mathbf{s}, u)$ menjadi $\dot{\mathbf{s}}(\tau) = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{f}(\mathbf{s}(\tau), u(\tau))$.

1.1.3 Aproksimasi fungsi dengan polinomial Langrange

Fungsi $s(\tau)$ dapat diaproksimasi dengan **polinomial Lagrange**⁽²⁾ yaitu

$$s(\tau) = \sum_{i=0}^N s_i \phi_i(\tau)$$

Dengan N adalah order polinomial ϕ_i adalah basis fungsi Lagrange yaitu

$$\phi_i(\tau) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}$$

⁽²⁾Pendekatan dengan menggunakan fungsi Lagrange dilakukan karena fungsi basis Lagrange secara langsung memastikan nilai aproksimasi melewati setiap titik kolokasi yang telah ditentukan.

1.1.4 Kolokasi di Titik Chebyshev-Gauss-Lobatto

Disinilah inti dari Metode Chebyshev Pseudospectral, sebab titik kolokasi yang digunakan adalah titik Chebyshev–Gauss–Lobatto, yaitu:

$$\tau_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right), \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Dengan persaman model adalah

$$\dot{\mathbf{s}}(\tau_i) = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{f}(\mathbf{s}(\tau_i), u(\tau_i))$$

1.1.5 Diferensiasi via Matriks Chebyshev

$$\dot{\mathbf{s}}(\tau_i) \approx \sum_{j=0}^N D_{ij} \mathbf{s}(\tau_j)$$

Elemen **Chebyshev differentiation matrix** D untuk node CGL:

$$D_{ij} = \begin{cases} \frac{c_i(-1)^{i+j}}{c_j(\tau_i - \tau_j)}, & i \neq j, \\ -\frac{\tau_j}{2(1 - \tau_j^2)}, & i = j, j = 1, \dots, N-1, \\ \frac{2N^2 + 1}{6}, & i = j = 0, \\ -\frac{2N^2 + 1}{6}, & i = j = N, \end{cases}$$

dengan $c_0 = c_N = 2$, dan $c_j = 1$ untuk lainnya.

Sehingga model kapal menjadi

$$\sum_{j=0}^N D_{ij} \mathbf{s}(\tau_j) = \frac{t_f - t_0}{2} \mathbf{f}(\mathbf{s}(\tau_i), u(\tau_i))$$

1.1.6 Kuantifikasi Integral (Quadrature) NMPC Secara Umum

Integral pada $[-1, 1]$ diganti jumlah berbobot (aturan Chebyshev–Gauss–Lobatto):

$$\int_{-1}^1 g(\tau) d\tau \approx \sum_{i=0}^N w_i g(\tau_i).$$

Sehingga fungsi tujuan yang awalnya adalah

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t)) dt$$

menjadi:

$$J \approx \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{i=0}^N w_i L(x(\tau_i), u(\tau_i)).$$

1.1.7 Chebyshev NMPC

Fungsi tujuan NMPC yaitu:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\|h_{\text{ref}}(t) - h(t)\|_{Q(t)}^2 + \|u(t)\|_{R(t)}^2 + \phi_{\text{COLREGS}} \right) dt$$

dengan kendala

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{s}} &= \mathbf{f}(\mathbf{s}, u) \\ \mathbf{h} &= C\mathbf{s} \\ \mathbf{s}_{\min} &\leq \mathbf{s}(t) \leq \mathbf{s}_{\max} \\ \mathbf{u}_{\min} &\leq \mathbf{u}(t) \leq \mathbf{u}_{\max} \\ \Delta \mathbf{u}_{\min} &\leq \Delta \mathbf{u}(t) \leq \Delta \mathbf{u}_{\max}\end{aligned}$$

Dengan $\Delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t-1)$

Karena $\Delta \mathbf{u}(t)$ merupakan perubahan input terhadap waktu, maka perubahan input dapat dituliskan sebagai turunan terhadap waktu, yaitu

$$\Delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t-1) \approx \dot{\mathbf{u}}(t)$$

Dengan cara yang sama dengan untuk diferensiasi state, maka turunan input dapat diaproksimasi dengan matriks diferensiasi Chebyshev, yaitu

$$\dot{\mathbf{u}}(\tau_i) \approx \sum_{j=0}^N D_{ij} \mathbf{u}(\tau_j)$$

Sehingga fungsi tujuan Chebyshev NMPC menjadi:

$$J = \frac{T}{2} \sum_{i=0}^N w_i \left[\|h_{\text{ref},i} - h_i\|_Q^2 + \|u_i\|_R^2 + \phi_{\text{COLREGS},i} \right]$$

dengan kendala

$$\begin{aligned}\frac{2}{T} \sum_{j=0}^N D_{kj} s_j &= f(s_k, u_k) \\ h_k &= C s_k \\ s_{\min} &\leq s_k \leq s_{\max} \\ u_{\min} &\leq u_k \leq u_{\max} \\ \dot{u}_{\min} &\leq \frac{2}{T} \sum_{j=0}^N D_{kj} u_j \leq \dot{u}_{\max}\end{aligned}$$

untuk $k = 0, \dots, N$. Untuk N genap, w_k adalah

$$w_0 = w_N = \frac{1}{N^2 - 1},$$

$$w_k = \frac{2}{N} \left[\gamma(0, k) + \gamma\left(\frac{N}{2}, k\right) + 2 \sum_{i=1}^{N/2-1} \gamma(i, k) \right],$$

untuk $k = 1, \dots, N - 1$, dan untuk N ganjil adalah

$$w_0 = w_N = \frac{1}{N^2},$$

$$w_k = \frac{2}{N} \left[\gamma(0, k) + 2 \sum_{i=1}^{(N-1)/2} \gamma(i, k) \right],$$

dengan

$$\gamma(i, k) = \frac{1}{1 - 4i^2} \cos\left(\frac{2\pi ik}{N}\right).$$

1.2 Apa itu metode pseudospectral Method

Pseudospectral Method (PSM) adalah metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan mengaproksimasi fungsi menggunakan polinomial ortogonal (biasanya Chebyshev atau Legendre).

Berbeda dengan metode numerik konvensional (seperti Euler atau Runge-Kutta) yang mendiskritisasi waktu secara seragam, PSM menggunakan **titik kolokasi nonuniform**⁽¹⁾ yang mengikuti distribusi akar atau ekstrem dari polinomial ortogonal. Tujuannya adalah untuk mencapai akurasi sangat tinggi (eksponensial) dengan jumlah titik yang jauh lebih sedikit.

PSM tidak menghitung turunan secara simbolik, tetapi mendefinisikan turunan fungsi pada sejumlah titik kolokasi menggunakan matriks diferensiasi yang dibangun dari basis polinomial. Dengan cara ini, PSM mengubah persamaan diferensial menjadi sistem aljabar yang dapat diselesaikan dengan metode numerik standar.

⁽¹⁾ Titik kolokasi adalah titik-titik tertentu dalam domain waktu (atau ruang) di mana persamaan diferensial dianggap “benar” secara eksak.

Kalau begitu apa bedanya dengan diskritisasi?

Jawab: Diskritisasi adalah proses **membagi domain waktu** menjadi titik-titik diskret untuk menghitung solusi numerik lokal, sedangkan kolokasi adalah **memilih titik diskret khusus** untuk memaksa persamaan diferensial “benar” pada titik-titik itu, lalu membangun solusi global berbasis polinomial.

Disiniyah letak mengapa diperlukan PSM pada NMPC, sebab PSM membuat NMPC lebih cepat karena ia mengganti integrasi langkah demi langkah dengan aproksimasi polinomial global berorde tinggi yang langsung bisa dimasukkan ke dalam optimasi nonlinear.

1.3 Polinomial Chebyshev

Polinomial Chebyshev adalah dua deret polinomial ortogonal yang berhubungan dengan fungsi kosinus dan sinus, dinotasikan sebagai $T_n(x)$ dan $U_n(x)$. Dengan

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

$$U_n(\cos(\theta)) \sin \theta = \sin((n+1)\theta)$$

Artinya jika $x = \cos \theta$, maka

$$T_0 = 1, \quad T_1 = \cos(\theta), \quad T_2 = \cos(2\theta), \quad T_3 = \cos(3\theta)$$

Dengan contoh polinomial pertama yaitu:

n	$T_n(x)$
0	1
1	x
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$

1.4 Chebyshev Pseudospectral Method

Metode Chebyshev Pseudospectral adalah salah satu dari PSM yang menggunakan Chebyshev–Gauss–Lobatto (CGL) sebagai titik-titik kolokasi. Titik ini berasal dari ekstrem (maksimum dan minimum) polinomial Chebyshev $T_n(x)$. Berikut adalah langkah-langkah memperoleh Chebyshev–Gauss–Lobatto (CGL). Definisi dasar Chebyshev:

$$T_n(x) = \cos(n\theta), \quad x = \cos(\theta)$$

Langkah 1: Cari titik ekstrem (maksimum dan minimum)

Titik ekstrem diperoleh saat turunan terhadap x bernilai nol:

$$\frac{dT_n(x)}{dx} = 0$$

Karena $x = \cos \theta$, gunakan turunan rantai:

$$\frac{dT_n(x)}{dx} = \frac{dT_n}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

Kita tahu:

$$T_n(x) = \cos(n\theta) \Rightarrow \frac{dT_n}{d\theta} = -n \sin(n\theta)$$

dan

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Sehingga:

$$\frac{dT_n}{dx} = \frac{n \sin(n\theta)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Langkah 2: Syarat ekstrem \rightarrow nolkan turunan

$$\frac{dT_n}{dx} = 0 \Rightarrow \sin(n\theta) = 0$$

Solusi:

$$n\theta_i = i\pi, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow \theta_i = \frac{i\pi}{n}$$

Langkah 3: Kembalikan ke x

$$x_i = \cos(\theta_i) = \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Nah, inilah rumus **Chebyshev–Gauss–Lobatto nodes**.

Disebut Chebyshev–Gauss–Lobatto karena berasal teori quadrature (integrasi numerik):

1. Gauss quadrature = metode integrasi numerik berbasis akar polinomial ortogonal (misal, Chebyshev atau Legendre).
2. Lobatto = modifikasi Gauss quadrature yang juga menyertakan titik ujung domain (-1 dan +1).

1.5 Polinomial Lagrange

Polinomial Lagrange adalah metode interpolasi polinomial yang digunakan untuk membangun polinomial yang melewati sekumpulan titik data tertentu. Misalkan terdapat $N + 1$ titik data $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$, maka polinomial Lagrange $P(x)$ yang melewati semua titik tersebut dapat dituliskan sebagai:

$$P(x) = \sum_{i=0}^N y_i L_i(x)$$

dengan basis fungsi Lagrange $L_i(x)$ didefinisikan sebagai:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Dimana $L_i(x)$ memiliki sifat bahwa $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ (delta Kronecker), yang berarti $L_i(x)$ bernilai 1 pada titik x_i dan 0 pada semua titik data lainnya. Dengan demikian, polinomial Lagrange memastikan bahwa $P(x_i) = y_i$ untuk setiap titik data.

Disinilah alasan mengapa pada Chebyshev Pseudospectral Method digunakan polinomial Lagrange, yaitu karena **fungsi basis Lagrange secara langsung memastikan nilai aproksimasi melewati setiap titik kolokasi yang telah ditentukan**, sehingga memudahkan perhitungan nilai fungsi dan turunannya di setiap node tanpa perlu menghitung koefisien ortogonal polinomial Chebyshev secara eksplisit.

1.6 Matriks Differensiasi D_{ki}

$$s(\tau) = \sum_{i=0}^N s_i \phi_i(\tau)$$

Dengan N adalah orde polinomial dan ϕ_i adalah basis fungsi Lagrange yaitu

$$\phi_i(\tau) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}.$$

Dari persamaan $s(\tau)$ diturunkan terhadap τ , sehingga menjadi

$$\dot{s}(\tau) = \sum_{i=0}^N s_i \frac{d\phi_i(\tau)}{d\tau}.$$

Matriks differensiasi D didefinisikan sebagai nilai turunan basis Lagrange pada titik kolokasi, yaitu

$$D_{ki} = \left. \frac{d\phi_i(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_k},$$

sehingga untuk setiap titik kolokasi τ_k diperoleh

$$\dot{s}(\tau_k) = \sum_{i=0}^N s_i D_{ki}.$$

Lalu bagaimana mencari D_{ki} ?

Diketahui jika

$$\phi_i(\tau) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}.$$

Jika menaruh $\tau = \tau_k$, maka akan terdapat dua kemungkinan, yaitu

1. Jika $k \neq i$, maka

$$\phi_i(\tau_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\tau_k - \tau_j}{\tau_i - \tau_j},$$

di dalam produk terdapat faktor dengan $j = k$ sehingga

$$\frac{\tau_k - \tau_k}{\tau_i - \tau_k} = 0$$

dan akibatnya $\phi_i(\tau_k) = 0$.

2. Jika $k = i$, maka

$$\phi_i(\tau_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\tau_i - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} = 1.$$

Akan dicari $D_{ki} = \dot{\phi}_i(\tau_k)$ untuk $k \neq i$ dan $k = i$.

Kasus 1: $k \neq i$

$\phi_i(\tau)$ difaktorkan sedemikian rupa sehingga memisahkan faktor $(\tau - \tau_k)$:

$$\phi_i(\tau) = \frac{\tau - \tau_k}{\tau_i - \tau_k} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i, k}}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} =: A(\tau) B(\tau),$$

dengan

$$A(\tau) = \frac{\tau - \tau_k}{\tau_i - \tau_k}, \quad B(\tau) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i, k}}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}.$$

Turunan terhadap τ adalah

$$\frac{d\phi_i(\tau)}{d\tau} = A'(\tau)B(\tau) + A(\tau)B'(\tau).$$

Evaluasi pada $\tau = \tau_k$ memberikan

$$A(\tau_k) = 0, \quad A'(\tau_k) = \frac{1}{\tau_i - \tau_k},$$

sehingga

$$D_{ki} = \dot{\phi}_i(\tau_k) = \frac{1}{\tau_i - \tau_k} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i, k}}^N \frac{\tau_k - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}, \quad k \neq i.$$

Inilah elemen off-diagonal dari matriks diferensiasi D untuk titik kolokasi umum.

Kasus 2: $k = i$

Untuk elemen diagonal, digunakan aturan turunan produk pada $\phi_i(\tau)$:

$$\frac{d\phi_i(\tau)}{d\tau} = \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^N \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i, j \neq m}}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \cdot \frac{1}{\tau_i - \tau_m} \right).$$

Evaluasi pada $\tau = \tau_i$ menghasilkan

$$D_{ii} = \phi_i(\tau_i) = \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^N \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i, j \neq m}}^N \frac{\tau_i - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \cdot \frac{1}{\tau_i - \tau_m} \right).$$

Karena

$$\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i, j \neq m}}^N \frac{\tau_i - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} = 1,$$

maka

$$D_{ii} = \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^N \frac{1}{\tau_i - \tau_m}.$$

Dengan demikian, elemen-elemen matriks diferensiasi D dinyatakan sebagai

$$D_{ki} = \begin{cases} \frac{1}{\tau_i - \tau_k} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i, k}}^N \frac{\tau_k - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}, & k \neq i, \\ \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^N \frac{1}{\tau_i - \tau_m}, & k = i. \end{cases}$$

Untuk mempersingkat notasi, didefinisikan terlebih dahulu

$$d_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N (\tau_i - \tau_j), \quad w_i = \frac{1}{d_i} = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N (\tau_i - \tau_j)},$$

dengan w_i dikenal sebagai *barycentric weight* pada titik kolokasi τ_i .

Rumus off-diagonal yang diperoleh pada Kasus 1 dapat ditulis ulang sebagai

$$D_{ki} = \frac{1}{\tau_i - \tau_k} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i, k}}^N \frac{\tau_k - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} = \frac{d_k}{d_i} \frac{1}{\tau_k - \tau_i}, \quad k \neq i.$$

Dengan menggunakan $w_i = 1/d_i$, rumus tersebut menjadi sangat ringkas:

$$D_{ki} = \frac{w_i}{w_k(\tau_k - \tau_i)}, \quad k \neq i.$$

Untuk elemen diagonal, dari sifat dasar basis Lagrange berlaku

$$\sum_{i=0}^N \phi_i(\tau) \equiv 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^N \phi'_i(\tau_k) = 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^N D_{ki} = 0,$$

sehingga

$$D_{kk} = - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^N D_{ki}.$$

Persamaan ini ekivalen dengan ekspresi eksplisit pada Kasus 2 dan sering lebih nyaman digunakan dalam implementasi numerik.

Matriks diferensiasi Chebyshev–Gauss–Lobatto

Untuk Chebyshev Pseudospectral Method, titik kolokasi dipilih sebagai titik Chebyshev–Gauss–Lobatto (CGL)

$$\tau_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right), \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Pada titik-titik ini barycentric weight w_i memiliki bentuk tertutup yang sangat sederhana:

$$w_i = \frac{(-1)^i}{c_i}, \quad c_i = \begin{cases} 2, & i = 0, N, \\ 1, & 1 \leq i \leq N-1. \end{cases}$$

Mensubstitusikan $w_i = (-1)^i/c_i$ ke dalam rumus barycentric $D_{ki} = \frac{w_i}{w_k(\tau_k - \tau_i)}$ menghasilkan

$$D_{ki} = \frac{c_k}{c_i} \frac{(-1)^{k+i}}{\tau_k - \tau_i}, \quad k \neq i.$$

Untuk elemen diagonal interior ($1 \leq k \leq N-1$) diperoleh secara analitik dengan menjumlahkan elemen off-diagonal tanpa k , maka akan diperoleh

$$D_{kk} = -\frac{\tau_k}{2(1-\tau_k^2)}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1,$$

sedangkan untuk titik ujung digunakan limit khusus sehingga

$$D_{00} = \frac{2N^2 + 1}{6}, \quad D_{NN} = -\frac{2N^2 + 1}{6}.$$

Dengan demikian, matriks diferensiasi Chebyshev–Gauss–Lobatto dapat dituliskan secara ringkas sebagai

$$D_{ki} = \begin{cases} \frac{c_k}{c_i} \frac{(-1)^{k+i}}{\tau_k - \tau_i}, & k \neq i, \\ -\frac{\tau_k}{2(1 - \tau_k^2)}, & 1 \leq k \leq N-1, \\ \frac{2N^2 + 1}{6}, & k = 0, \\ -\frac{2N^2 + 1}{6}, & k = N. \end{cases}$$

Rumus ini adalah bentuk standar matriks diferensiasi Chebyshev yang digunakan pada Chebyshev Pseudospectral Method dan menjadi dasar dalam diskretisasi turunan terhadap τ dalam formulasi NMPC berbasis Chebyshev.

1.7 Lagrange + CGL VS Chebysev

Aspek	Lagrange + CGL (Nodal)	Chebyshev Murni (Modal T_n)
Representasi	Nilai fungsi di titik node	Koefisien polinomial a_n
Variabel dalam NLP	s_k, u_k langsung	Perlu transformasi modal ke nodal
Matriks diferensiasi	Dihitung sekali, langsung digunakan	Dibangun dari $V_d V^{-1}$
Ekspresi kendala	Sangat mudah (langsung pada node)	Rumit (harus dikonversi ke domain nodal)
Implementasi	Implementasi sangat sederhana	Implementasi jauh lebih kompleks
Stabilitas numerik	Sangat baik (CGL optimal)	Sangat baik (basis ortogonal)
Kecepatan komputasi	Lebih cepat, tidak ada transformasi	Lebih lambat (modal–nodal transform)
Cocok untuk NMPC	Ya, standar industri	Tidak cocok untuk NMPC
Digunakan di literatur	GPOPS-II, Chebyshev PS Methods	Lebih sering pada teori analitik
Kelebihan utama	Kode simpel, langsung kompatibel dengan constraint	Basis polinomial elegan secara teori
Kekurangan utama	Tidak elegan secara modal	Kendala dan dinamika lebih sulit dituliskan

Table 1: Perbandingan metode Lagrange + CGL (nodal) vs Chebyshev murni (modal).

1.8 Contoh Penggunaan Polinomial Chebysev

Berikut adalah perbandingan polinomial Chebysev dan ode45 dalam menyelesaikan persamaan differensial $\dot{x} = x$.

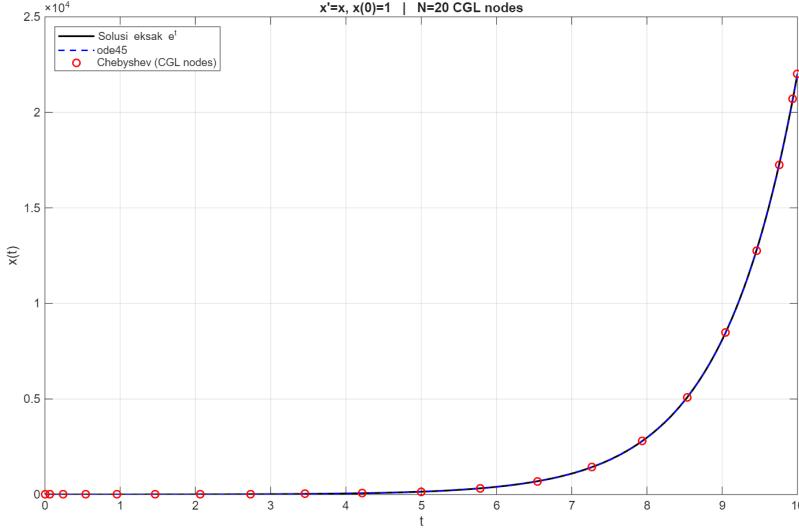


Figure 1: Perbandingan polinomial Chebysev dan ode45

1.9 Fungsi tujuan di NMPC apakah diskrit atau kontinu?

Fungsi tujuan NMPC pada dasarnya bersifat kontinu. Hanya saja, untuk keperluan komputasi numerik, fungsi tujuan harus dalam bentuk diskrit (sigma). Sumber buku:

5.4.2 Continuous-Time Models

For continuous-time systems, we consider here nonlinear models represented as differential equations of the general form

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (5.17)$$

A controller is sought which minimizes some performance index

$$J = \phi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t] dt \quad (5.18)$$

(a) Fungsi Objektif Kontinu

5.4.1 Discrete-Time Models

In this section, we consider the solution of MPC problems posed solely in discrete time. Since the computational issues discussed here are primarily concerned with solving the open-loop, constrained control problem, we will temporarily abandon the double time index. The model is given by Equations 5.1 and 5.2 and the objective function is given by

$$J = \|g(x_N) - y_{ref}\|_Q^2 + \sum_{j=0}^{N-1} (\|g(x_j) - y_{ref}\|_Q^2 + \|u_j - u_{ref}\|_R^2 + \|\Delta u_j\|^2) \quad (5.15)$$

(b) Fungsi Objektif Diskrit

1.10 τ itu apa dan bagaimana?

Variabel τ merupakan waktu terstandar (domain komputasi) yang digunakan pada metode Chebyshev. Semua polinomial Chebyshev didefinisikan dan bersifat ortogonal pada interval $[-1, 1]$, sehingga domain ini menjadi ruang dasar untuk aproksimasi dan kolokasi dalam Chebyshev Pseudospectral Method. Berikut adalah contoh perubahan domain waktu biasa dan τ pada menggambar fungsi.

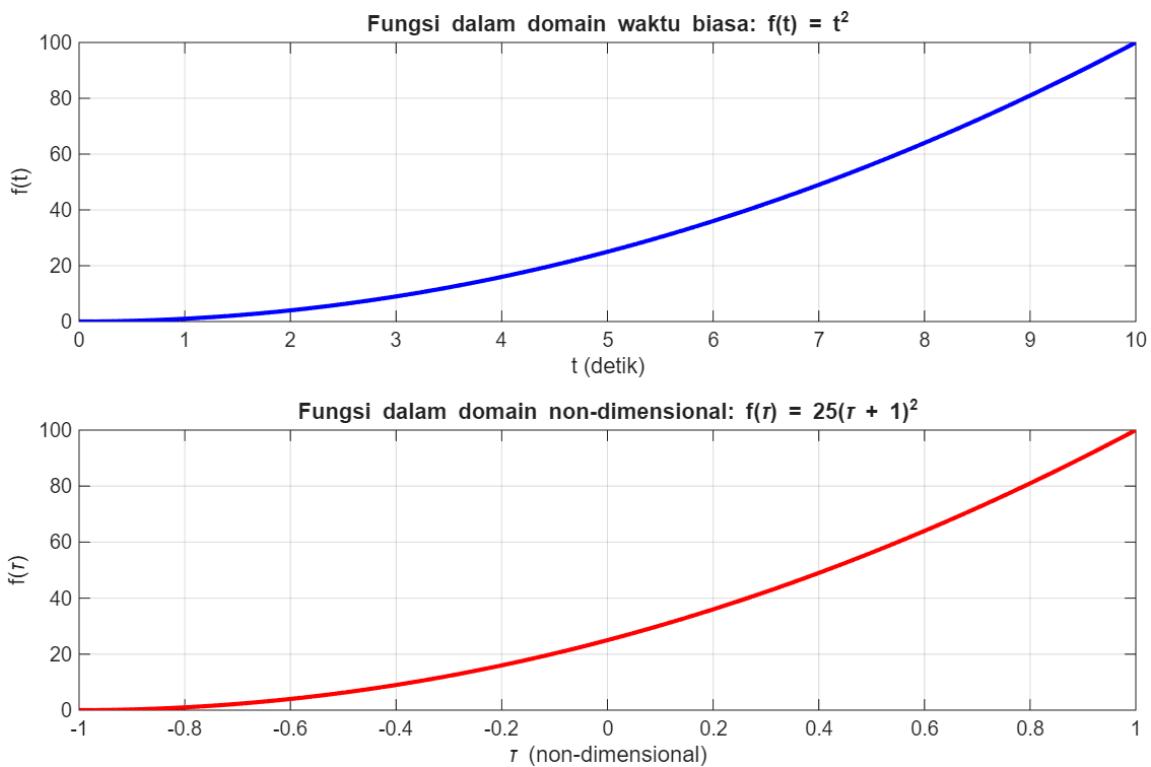


Figure 3: Perbandingan waktu biasa vs τ

1.11 Alasan kenapa polinomial Chebyshev digunakan? Bisa bandingin dengan Laguerre dan Langrange

Ada beberapa kelebihan dari Polinomial Chebyshev yaitu

1. Akurasi tinggi (eksponensial konvergen)
2. Lebih sedikit titik kolokasi dibanding metode grid uniform

Dibalik kelebihan, terdapat kekurangan dari Polinomial Chebyshev, yaitu

1. Kurang cocok untuk horizon sangat panjang (clustering di ujung)
2. Butuh transformasi domain untuk tiap horizon

Jika dibandingan dengan polinomial legendre dan Laguerre:

Aspek	Chebyshev PSM	Legendre PSM	Laguerre PSM
Basis polinomial	$T_n(\tau) = \cos(n \arccos \tau)$	$L_n(\tau)$ (Legendre polynomial)	$L_n(x)$ (Laguerre polynomial)

Lanjutan dari halaman sebelumnya

Aspek	Chebyshev PSM	Legendre PSM	Laguerre PSM
Domain definisi	$[-1, 1]$ (finite horizon)	$[-1, 1]$ (finite horizon)	$[0, \infty)$ (infinite horizon)
Titik kolokasi	Chebyshev–Gauss–Lobatto: $\tau_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right)$ (eksplisit)	Legendre–Gauss–Lobatto: akar $(1 - \tau^2)L'_N(\tau) = 0$ (implisit)	Laguerre–Gauss: akar $L'_N(x) = 0$ di $[0, \infty)$
Perhitungan node	Langsung dari fungsi cos	Perlu solusi numerik akar polinomial	Perlu solusi numerik + domain tak hingga
Bobot integrasi (quadrature)	Bentuk tertutup, sederhana	Lebih kompleks, dihitung numerik	Bobot menurun eksponensial e^{-x}
Distribusi titik	Padat di ujung domain, jarang di tengah	Merata di tengah	Padat di dekat nol, jarang di jauh (meluruh)
Akurasi	Eksponensial untuk fungsi halus di domain terbatas	Eksponensial juga, lebih stabil di tengah	Eksponensial untuk fungsi yang meluruh di domain tak hingga
Kelebihan utama	Node dan D -matrix eksplisit, komputasi cepat	Simetri dan cocok untuk fungsi interior	Ideal untuk horizon tak hingga dan fungsi meluruh
Kelemahan utama	Kurang efisien untuk horizon panjang (cluster di tepi)	Perlu komputasi akar polinomial	Tidak cocok untuk horizon terbatas, sulit normalisasi waktu
Sifat ortogonalitas	Terhadap bobot $1/\sqrt{1 - \tau^2}$	Terhadap bobot 1	Terhadap bobot e^{-x}
Aplikasi umum	NMPC, optimasi lintasan kapal/pesawat	Aerospace dan finite-time benchmark (NASA)	Infinite-horizon control, adaptif, sistem termal
Keterkaitan domain	Perlu transformasi linear $t \leftrightarrow \tau$	Sama, domain tetap terbatas	Tidak perlu transformasi (semi-tak hingga)
Kemudahan implementasi	Sangat mudah, $O(N^2)$ matrix analitik	Sedang, butuh akar numerik	Paling sulit, domain tak hingga dan bobot eksponensial
Kesesuaian NMPC untuk	Sangat cocok untuk finite horizon, cepat dan stabil	Cocok juga tapi komputasi lebih berat	Tidak cocok untuk NMPC finite horizon (domain tak hingga)

Sehingga dapat disimpulkan Metode NMPC berbasis Chebyshev Pseudospectral Method dipilih karena memiliki kemampuan tinggi dalam menyelesaikan permasalahan kontrol optimal pada sistem dengan dinamika nonlinear kompleks seperti kapal, dengan keunggulan utama berupa akurasi tinggi, efisiensi komputasi, dan kestabilan numerik yang sangat baik.

1.12 Sifat Orthogonalitas berpengaruh dimana?

Sifat ortogonalitas polinomial Chebyshev menyebabkan setiap basis fungsi bekerja secara independen, sehingga menghindari interferensi antar komponen aproksimasi. Dalam Pseudospectral Method, hal ini meningkatkan kestabilan numerik dan mempercepat konvergensi. Akibatnya, pada implementasi Nonlinear Model Predictive Control (NMPC), prediksi lintasan menjadi lebih akurat dan penyelesaian optimasi lebih efisien.

Secara sederhana, jika menggunakan **polinomial biasa (non-ortogonal)**, perubahan pada satu koefisien aproksimasi dapat mempengaruhi seluruh fungsi aproksimasi, sehingga memperumit perhitungan dan mengurangi akurasi. Dengan **polinomial ortogonal** seperti Chebyshev, setiap koefisien hanya mempengaruhi bagian tertentu dari fungsi, sehingga memudahkan optimasi dan meningkatkan performa NMPC.

1.13 Fungsi COLREGS di Chebyshev

Fungsi COLREGS adalah fungsi taklinear. Tujuannya adalah memberikan pembobotan pada posisi kapal relatif terhadap halangan. Fungsi COLREGS didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\phi_{\text{COLREGS}} = & \sum_{i \in \text{GW}} w_{\text{GW}} F_{\text{GW}}(p_{\text{rel}}(k + j|k)) + \\ & \sum_{i \in \text{HO}} w_{\text{HO}} F_{\text{HO}}(p_{\text{rel}}(k + j|k)) + \\ & \sum_{i \in \text{OT}} w_{\text{OT}} F_{\text{OT}}(p_{\text{rel}}(k + j|k))\end{aligned}$$

dengan:

i : setiap halangan yang terdeteksi

$w_{\text{OT}}, w_{\text{HO}}, w_{\text{GW}}$: nilai pembobot

$F_{\text{OT}}, F_{\text{HO}}, F_{\text{GM}}$: fungsi lapangan potensial

$p_{\text{rel}}(k + j|k)$: prediksi posisi titik tengah kapal relatif pada koordinat sumbu kapal halangan untuk $t = k + j$ pada saat $t = k$.

Perhitungan posisi titik tengah kapal relatif terhadap halangan adalah sebagai berikut:

$$p_{\text{rel}}(k + j|k) = R(\psi_{\text{TS}}(k + j|k)) [p_{\text{pos}}(k + j|k) - p_{\text{TS}}(k + j|k)]$$

dengan

$$R(\psi_{\text{TS}}(k + j|k)) = \begin{bmatrix} \cos(\psi_{\text{TS}}(k + j|k)) & \sin(\psi_{\text{TS}}(k + j|k)) \\ -\sin(\psi_{\text{TS}}(k + j|k)) & \cos(\psi_{\text{TS}}(k + j|k)) \end{bmatrix}$$

dimana:

$p_{\text{pos}}(k + j|k)$: posisi titik tengah kapal sendiri (own-ship)

$p_{\text{TS}}(k + j|k)$: posisi titik tengah kapal halangan (target-ship).

Fungsi lapangan potensial $F_{\text{OT}}, F_{\text{HO}}, F_{\text{GW}}$ dirancang agar kapal dapat melakukan manuver untuk menghindari tabrakan dengan mengacu kepada *COLREGS*. Rancangan fungsi lapangan potensial diberikan sebagai berikut:

$$F_{\text{GW}} = 0.5 \times f(\alpha_{x1} x_{\text{rel}}(k + j|k)) \times (1 + f(\alpha_{y1} (y_{\text{rel}}(k + j|k) - y_{0,\text{GW}})))$$

$$F_{\text{HO}} = 0.5 \times f(\alpha_{y2} y_{\text{rel}}(k + j|k)) \times (1 + f(\alpha_{x2} (x_{0,\text{HO}} - x_{\text{rel}}(k + j|k))))$$

$$F_{\text{OT}} = 0.5 \times f(\alpha_{x3} (x_{0,\text{OT}} - x_{\text{rel}}(k + j|k))) \times f(\alpha_{y3} (y_{\text{rel}}(k + j|k) - y_{0,\text{OT}}))$$

dengan $\alpha_{x1}, \alpha_{x2}, \alpha_{x3}, \alpha_{y1}, \alpha_{y2}, \alpha_{y3}$ merupakan parameter untuk menentukan kemiringan dari fungsi lapangan potensial. Parameter $y_{0,\text{GW}}, x_{0,\text{HO}}, x_{0,\text{OT}}, y_{0,\text{OT}}$ menentukan pergeseran untuk menyesuaikan fungsi potensial.

Fungsi f merupakan fungsi taklinier sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Untuk gambaran fungsi COLREGS dapat dilihat pada gambar berikut:

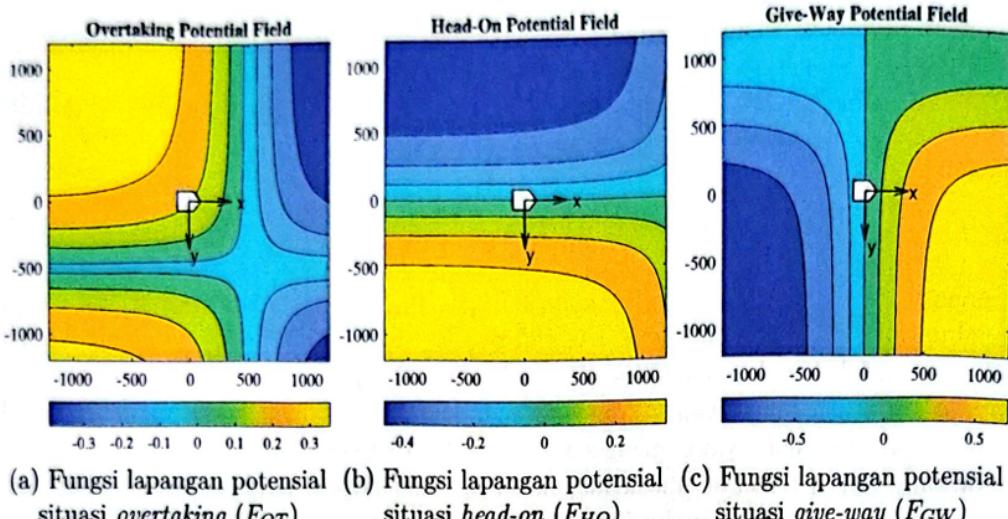


Figure 4: Gambaran Fungsi COLREGS

Nilai positif pada fungsi lapangan potensial menunjukkan area bahaya yang harus dihindari oleh kapal sendiri. Sedangkan nilai negatif menunjukkan area aman untuk dilalui kapal sendiri.

Fungsi COLREGS tidak diubah menjadi dalam domain Chebyshev karena fungsi ini hanya berfungsi sebagai penalti pada fungsi tujuan NMPC. Sehingga fungsi COLREGS tetap dalam domain waktu biasa.

Model Kapal

$$\begin{aligned}\dot{v}' &= a'_{11}v' + a'_{12}r' + b'_1\delta' \\ \dot{r}' &= a'_{21}v' + a'_{22}r' + b'_2\delta' \\ \dot{\psi}' &= r' \\ \dot{x}' &= u'_0 \cos \psi' - v' \sin \psi' \\ \dot{y}' &= u'_0 \sin \psi' + v' \cos \psi'\end{aligned}$$

Persamaan ini dapat ditulis menjadi

$$\dot{\mathbf{S}} = f(\mathbf{S}, \mathbf{u})$$

Dengan $S = [v' \ r' \ \psi' \ x' \ y']^T$. Untuk persamaan model pengukuran output diberikan sebagai berikut

$$\mathbf{h} = \mathbf{CS}$$

dengan

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Output sistem adalah sudut $yaw(\psi)$, posisi kapal pada sumbu-x (x), dan posisi kapal pada sumbu-y (y).

Lalu horizon waktu $[t_0, t_0 + T]$ diubah ke domain Chebyshev $\tau \in [-1, 1]$ dengan

$$\tau = \frac{2(t - t_0)}{T} - 1 \quad \iff \quad t = t_0 + \frac{T}{2}(\tau + 1).$$

Turunkan t terhadap τ :

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{T}{2}.$$

Dengan menggunakan aturan rantai untuk turunan terhadap τ , diperoleh

$$\frac{dS}{d\tau} = \frac{dS}{dt} \frac{dt}{d\tau} = f(S(\tau), u(\tau)) \cdot \frac{T}{2}.$$

Sehingga persamaan model $\dot{\mathbf{S}} = f(\mathbf{S}, \mathbf{u})$ menjadi $\dot{\mathbf{S}}(\tau) = \frac{T}{2}\mathbf{f}(\mathbf{S}(\tau), \mathbf{u}(\tau))$.

Lalu \mathbf{S} dan \mathbf{U} diaproksimasi dengan interpolasi polinomial Langrange, yaitu

$$S(\tau) = \sum_{i=0}^N S_i \phi_i(\tau) \tag{1}$$

$$u(\tau) = \sum_{i=0}^N u_i \phi_i(\tau) \tag{2}$$

Dengan N adalah order polinomial dan ϕ_i adalah basis fungsi langrange.

$$\phi_i(\tau) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \quad (3)$$

Dari persamaan (1) diturunkan terhadap τ , sehingga menjadi

$$\dot{S}(\tau) = \sum_{i=0}^N S_i \frac{d\phi_i(\tau)}{d\tau}$$

Lalu persamaan (3) terhadap τ , sehingga menjadi

$$\phi'_i(\tau) = \phi_i(\tau) \sum_{j \neq i} \frac{1}{\tau - \tau_j}$$

Sehingga diperoleh

$$\dot{S}(\tau) = \sum_{i=0}^N S_i \phi_i(\tau) \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{\tau_i - \tau_j} \right)$$

Untuk $k = 1, 2, \dots, N$ pilih titik Chebyshev-Gauss-Lobatto sebagai titik interpolasi yang diberikan oleh

$$\tau_k = \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)$$

Design NMPC

Objective Function 1

$$J(k) = \sum_{i=1}^{N_p} \|\mathbf{h}_{\text{ref}}(k+i|k) - \mathbf{h}(k+i|k)\|_{Q_{(i)}}^2 + \|\Delta \mathbf{u}(k+i-1|k)\|_{R_{(i)}}^2$$

dengan kendala

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(k+i|k) &= \mathbf{f}_d(\mathbf{s}(k+i-1|k), \mathbf{u}(k+i-1|k)) \\ \mathbf{h}(k+i|k) &= \mathbf{Cs}(k+i|k) \\ \mathbf{s}_{\min} &\leq \mathbf{s}(k+i|k) \leq \mathbf{s}_{\max} \\ \mathbf{u}_{\min} &\leq \mathbf{u}(k+i-1|k) \leq \mathbf{u}_{\max} \\ \Delta \mathbf{u}_{\min} &\leq \Delta \mathbf{u}(k+i-1|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{\max} \end{aligned}$$

untuk $i = 1, 2, \dots, N_p$. Dengan $\Delta \mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1)$

Dengan Chebyshev

Karena $\Delta \mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1)$ dapat diaproksimasi menjadi turunan \mathbf{u} yaitu berdasarkan (2), diperoleh

$$u(\tau) = \sum_{i=0}^N u_i \phi_i(\tau), \quad \tau \in [-1, 1].$$

Turunan terhadap waktu:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \frac{du}{dt} = \frac{2}{T} \frac{du}{d\tau} \\ \left. \frac{du}{d\tau} \right|_{\tau_k} &= \sum_{i=0}^N D_{ki} u_i, \end{aligned}$$

Sehingga fungsi tujuan menjadi:

$$J = \frac{T}{2} \sum_{k=0}^N w_k \left[\|h(x_k) - h_d(\tau_k)\|_Q^2 + \left\| \frac{2}{T} \sum_{i=0}^N D_{ki} u_i \right\|_R^2 \right]$$

Dengan kendala

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N D_{ki} s_i &= \frac{T}{2} f(S(\tau), u(\tau)) \\ h_k &= C s_k \\ s_{\min} &\leq s_k \leq s_{\max} \\ u_{\min} &\leq u_k \leq u_{\max} \\ \dot{u}_{\min} &\leq \frac{2}{T} \sum_{i=0}^N D_{ki} u_i \leq \dot{u}_{\max} \end{aligned}$$

untuk $k = 0, \dots, N$. Untuk N genap, w_k adalah

$$w_0 = w_N = \frac{1}{N^2 - 1},$$

$$w_k = \frac{2}{N} \left[\gamma(0, k) + \gamma\left(\frac{N}{2}, k\right) + 2 \sum_{i=1}^{N/2-1} \gamma(i, k) \right],$$

untuk $k = 1, \dots, N-1$, dan untuk N ganjil adalah

$$w_0 = w_N = \frac{1}{N^2},$$

$$w_k = \frac{2}{N} \left[\gamma(0, k) + 2 \sum_{i=1}^{(N-1)/2} \gamma(i, k) \right],$$

dengan

$$\gamma(i, k) = \frac{1}{1 - 4i^2} \cos \left(\frac{2\pi ik}{N} \right).$$

Dan D_{ki} adalah evaluasi turunan pada titik kolokasi $\tau = \tau_k$ menghasilkan elemen dari matriks diferensiasi Chebyshev–Gauss–Lobatto (CGL):

$$D_{ki} = \phi'_i(\tau_k) \quad (4)$$

Matriks diferensiasi D_{ki} dapat dinyatakan secara eksplisit sebagai:

$$D_{ki} = \begin{cases} \frac{c_k}{c_i} \frac{(-1)^{k+i}}{\tau_k - \tau_i}, & k \neq i, \\ -\frac{\tau_k}{2(1 - \tau_k^2)}, & 1 \leq k \leq N-1, \\ \frac{2N^2 + 1}{6}, & k = 0, \\ -\frac{2N^2 + 1}{6}, & k = N, \end{cases} \quad (5)$$

dengan $c_0 = c_N = 2$ dan $c_i = 1$ untuk $i = 1, 2, \dots, N-1$.

Simulasi NMPC dengan CASADI hasil ChatGPT

Catatan

N : Orde polinomial Chebyshev

i : indeks indeks titik basis Lagrange (atau node tempat state/variabel disimpan)

k : indeks titik kolokasi tempat turunan sistem dipaksakan berlaku

```

MISSION COMPLETE at iter 238 (dist_min=48.82 m)
== NMPC TIME ==
Total : 15.444211 s
Iterasi : 237
Rata2 : 0.065165 s/iter
Min-Max : [0.022099  0.366392] s/iter
Warning: The video's width and height has
been padded to be a multiple of two as
required by the H.264 codec.

k =
    131

k =
    260

```

(a) Simulasi NMPC dengan Chebyshev

```

main_loop_time =
58.2598

distance_to_destination =
3.5884

average_mpc_time =
0.2398

```

(b) Simulasi NMPC konvensional

Figure 5: Perbandingan hasil simulasi antara NMPC Chebyshev dan NMPC biasa.

Coret-Coret

Dengan $s = [v' \ r' \ \psi' \ x' \ y']^\top$, kendali $u' = \delta'$, dan kecepatan surge konstan u'_0 , model takliniernya:

$$\dot{s} = f(s, u') \equiv \begin{bmatrix} -0.6174 v' - 0.1036 r' + 0.01 u' \\ -5.0967 v' - 3.4047 r' + u' \\ r' \\ u'_0 \cos \psi' - v' \sin \psi' \\ u'_0 \sin \psi' + v' \cos \psi' \end{bmatrix}.$$

Ambil titik CGL untuk $N = 4$ dan $T = 5$:

$$\tau_0 = 1, \quad \tau_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tau_2 = 0, \quad \tau_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tau_4 = -1,$$

dan tulis $S_i := S(\tau_i) = [v'_i \ r'_i \ \psi'_i \ x'_i \ y'_i]^\top$, $u'_i := u'(\tau_i)$.

Persamaan kolokasi. Untuk setiap $k = 0, \dots, 4$ berlaku

$$\sum_{i=0}^4 D_{ki} S_i = \frac{T}{2} f(S_k, u'_k) = 5 f(S_k, u'_k),$$

yang komponen-per-komponen menjadi

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^4 D_{ki} v'_i &= 5 \left(-0.6174 v'_k - 0.1036 r'_k + 0.01 u'_k \right), \\ \sum_{i=0}^4 D_{ki} r'_i &= 5 \left(-5.0967 v'_k - 3.4047 r'_k + u'_k \right), \\ \sum_{i=0}^4 D_{ki} \psi'_i &= 5 r'_k, \\ \sum_{i=0}^4 D_{ki} x'_i &= 5 \left(u'_0 \cos \psi'_k - v'_k \sin \psi'_k \right), \\ \sum_{i=0}^4 D_{ki} y'_i &= 5 \left(u'_0 \sin \psi'_k + v'_k \cos \psi'_k \right).\end{aligned}$$

Matriks diferensiasi CGL ($N = 4$).

$$D = \begin{bmatrix} 5.50000000 & -6.82842712 & 2.00000000 & -1.17157288 & 0.50000000 \\ 1.70710678 & -0.70710678 & -1.41421356 & 0.70710678 & -0.29289322 \\ -0.50000000 & 1.41421356 & 0.00000000 & -1.41421356 & 0.50000000 \\ 0.29289322 & -0.70710678 & 1.41421356 & 0.70710678 & -1.70710678 \\ -0.50000000 & 1.17157288 & -2.00000000 & 6.82842712 & -5.50000000 \end{bmatrix}.$$

maka persamaan menjadi

(1) Komponen v' :

$$\begin{aligned}5.5v'_0 - 6.8284v'_1 + 2v'_2 - 1.1716v'_3 + 0.5v'_4 &= 5(-0.6174v'_0 - 0.1036r'_0 + 0.01u'_0), \\ 1.7071v'_0 - 0.7071v'_1 - 1.4142v'_2 + 0.7071v'_3 - 0.2929v'_4 &= 5(-0.6174v'_1 - 0.1036r'_1 + 0.01u'_1), \\ -0.5v'_0 + 1.4142v'_1 - 1.4142v'_3 + 0.5v'_4 &= 5(-0.6174v'_2 - 0.1036r'_2 + 0.01u'_2), \\ 0.2929v'_0 - 0.7071v'_1 + 1.4142v'_2 + 0.7071v'_3 - 1.7071v'_4 &= 5(-0.6174v'_3 - 0.1036r'_3 + 0.01u'_3), \\ -0.5v'_0 + 1.1716v'_1 - 2v'_2 + 6.8284v'_3 - 5.5v'_4 &= 5(-0.6174v'_4 - 0.1036r'_4 + 0.01u'_4).\end{aligned}$$

(2) Komponen r' :

$$\begin{aligned}5.5r'_0 - 6.8284r'_1 + 2r'_2 - 1.1716r'_3 + 0.5r'_4 &= 5(-5.0967v'_0 - 3.4047r'_0 + u'_0), \\ 1.7071r'_0 - 0.7071r'_1 - 1.4142r'_2 + 0.7071r'_3 - 0.2929r'_4 &= 5(-5.0967v'_1 - 3.4047r'_1 + u'_1), \\ -0.5r'_0 + 1.4142r'_1 - 1.4142r'_3 + 0.5r'_4 &= 5(-5.0967v'_2 - 3.4047r'_2 + u'_2), \\ 0.2929r'_0 - 0.7071r'_1 + 1.4142r'_2 + 0.7071r'_3 - 1.7071r'_4 &= 5(-5.0967v'_3 - 3.4047r'_3 + u'_3), \\ -0.5r'_0 + 1.1716r'_1 - 2r'_2 + 6.8284r'_3 - 5.5r'_4 &= 5(-5.0967v'_4 - 3.4047r'_4 + u'_4).\end{aligned}$$

(3) Komponen ψ' :

$$\begin{aligned} 5.5\psi'_0 - 6.8284\psi'_1 + 2\psi'_2 - 1.1716\psi'_3 + 0.5\psi'_4 &= 5r'_0, \\ 1.7071\psi'_0 - 0.7071\psi'_1 - 1.4142\psi'_2 + 0.7071\psi'_3 - 0.2929\psi'_4 &= 5r'_1, \\ -0.5\psi'_0 + 1.4142\psi'_1 - 1.4142\psi'_3 + 0.5\psi'_4 &= 5r'_2, \\ 0.2929\psi'_0 - 0.7071\psi'_1 + 1.4142\psi'_2 + 0.7071\psi'_3 - 1.7071\psi'_4 &= 5r'_3, \\ -0.5\psi'_0 + 1.1716\psi'_1 - 2\psi'_2 + 6.8284\psi'_3 - 5.5\psi'_4 &= 5r'_4. \end{aligned}$$

(4) Komponen x' :

$$\begin{aligned} 5.5x'_0 - 6.8284x'_1 + 2x'_2 - 1.1716x'_3 + 0.5x'_4 &= 5(u'_0 \cos \psi'_0 - v'_0 \sin \psi'_0), \\ 1.7071x'_0 - 0.7071x'_1 - 1.4142x'_2 + 0.7071x'_3 - 0.2929x'_4 &= 5(u'_0 \cos \psi'_1 - v'_1 \sin \psi'_1), \\ -0.5x'_0 + 1.4142x'_1 - 1.4142x'_3 + 0.5x'_4 &= 5(u'_0 \cos \psi'_2 - v'_2 \sin \psi'_2), \\ 0.2929x'_0 - 0.7071x'_1 + 1.4142x'_2 + 0.7071x'_3 - 1.7071x'_4 &= 5(u'_0 \cos \psi'_3 - v'_3 \sin \psi'_3), \\ -0.5x'_0 + 1.1716x'_1 - 2x'_2 + 6.8284x'_3 - 5.5x'_4 &= 5(u'_0 \cos \psi'_4 - v'_4 \sin \psi'_4). \end{aligned}$$

(5) Komponen y' :

$$\begin{aligned} 5.5y'_0 - 6.8284y'_1 + 2y'_2 - 1.1716y'_3 + 0.5y'_4 &= 5(u'_0 \sin \psi'_0 + v'_0 \cos \psi'_0), \\ 1.7071y'_0 - 0.7071y'_1 - 1.4142y'_2 + 0.7071y'_3 - 0.2929y'_4 &= 5(u'_0 \sin \psi'_1 + v'_1 \cos \psi'_1), \\ -0.5y'_0 + 1.4142y'_1 - 1.4142y'_3 + 0.5y'_4 &= 5(u'_0 \sin \psi'_2 + v'_2 \cos \psi'_2), \\ 0.2929y'_0 - 0.7071y'_1 + 1.4142y'_2 + 0.7071y'_3 - 1.7071y'_4 &= 5(u'_0 \sin \psi'_3 + v'_3 \cos \psi'_3), \\ -0.5y'_0 + 1.1716y'_1 - 2y'_2 + 6.8284y'_3 - 5.5y'_4 &= 5(u'_0 \sin \psi'_4 + v'_4 \cos \psi'_4). \end{aligned}$$

Materi

Chebyshev-Gauss-Lobatto (CGL)

CGL adalah sekumpulan titik kolokasi (collocation points) yang digunakan dalam metode pseudospectral untuk mendiskritisasi fungsi kontinu menjadi bentuk polinomial berderajat N. CGL merupakan special case dari titik Chebyshev-Gauss (CG), tetapi dengan tambahan dua titik batas $(-1, 1)$ sehingga domainnya lengkap di interval $[-1, 1]$. Titik ini didefinisikan sebagai:

$$\tau_k = \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)$$

Note:

1. Titik kolokasi adalah sekumpulan titik diskrit di sepanjang domain waktu atau ruang tempat persamaan diferensial sistem dipaksakan berlaku secara eksak
2. Metode pseudospectral adalah metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial atau masalah kontrol optimal dengan cara:
 - (a) Mengaproksimasi fungsi keadaan dan kontrol menggunakan polinomial ortogonal orde tinggi (seperti Chebyshev atau Legendre)
 - (b) Menentukan turunan dan integralnya hanya di titik-titik kolokasi (biasanya titik-titik Chebyshev–Gauss–Lobatto atau Legendre–Gauss–Lobatto)

Pembuktian D_{ki}

Kita mulai dari definisi fungsi basis Lagrange untuk titik-titik kolokasi $\{\tau_j\}_{j=0}^N$:

$$\phi_i(\tau) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}, \quad \phi_i(\tau_k) = \delta_{ik}. \quad (6)$$

Turunan terhadap τ diberikan oleh

$$\phi'_i(\tau) = \phi_i(\tau) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{\tau - \tau_j}. \quad (7)$$

Evaluasi pada titik kolokasi $\tau = \tau_k$ memberikan elemen matriks diferensiasi:

$$D_{ki} = \phi'_i(\tau_k). \quad (8)$$

Bentuk Umum dengan Bobot Barisentrис

Untuk sebarang himpunan titik kolokasi, definisikan bobot barisentrис sebagai:

$$w_i = \frac{1}{\prod_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^N (\tau_i - \tau_m)}. \quad (9)$$

Dengan bobot tersebut, turunan fungsi basis pada titik-titik kolokasi dapat dinyatakan sebagai

$$D_{ki} = \begin{cases} \frac{w_i}{w_k} \frac{1}{\tau_k - \tau_i}, & k \neq i, \\ - \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^N D_{km}, & k = i. \end{cases} \quad (10)$$

Khusus untuk Titik Chebyshev–Gauss–Lobatto (CGL)

Untuk titik-titik Chebyshev-Gauss-Lobatto yang didefinisikan sebagai

$$\tau_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right), \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (11)$$

bobot barisentrисnya memiliki bentuk proporsional sebagai berikut:

$$w_j \propto (-1)^j c_j, \quad c_0 = c_N = \frac{1}{2}, \quad c_j = 1 \text{ untuk } j = 1, \dots, N-1. \quad (12)$$

Substitusi ke dalam Persamaan (10) menghasilkan

$$D_{ki} = \frac{c_k}{c_i} \frac{(-1)^{k+i}}{\tau_k - \tau_i}, \quad k \neq i. \quad (13)$$

Untuk elemen diagonal diperoleh dengan memanfaatkan sifat baris-jumlah-nol $\sum_{m=0}^N D_{km} = 0$, sehingga

$$D_{kk} = - \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^N D_{km}. \quad (14)$$

Setelah disederhanakan menggunakan identitas trigonometri $\tau_k = \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)$, bentuk eksplisitnya adalah

$$D_{kk} = \begin{cases} -\frac{\tau_k}{2(1 - \tau_k^2)}, & 1 \leq k \leq N-1, \\ \frac{2N^2 + 1}{6}, & k = 0, \\ -\frac{2N^2 + 1}{6}, & k = N. \end{cases} \quad (15)$$

Hasil Akhir

Maka, matriks diferensiasi Chebyshev–Gauss–Lobatto dapat dinyatakan secara lengkap sebagai:

$$D_{ki} = \begin{cases} \frac{c_k}{c_i} \frac{(-1)^{k+i}}{\tau_k - \tau_i}, & k \neq i, \\ -\frac{\tau_k}{2(1 - \tau_k^2)}, & 1 \leq k \leq N-1, \\ \frac{2N^2 + 1}{6}, & k = 0, \\ -\frac{2N^2 + 1}{6}, & k = N. \end{cases} \quad (16)$$

Bentuk inilah yang digunakan sebagai *differentiation matrix* D_{ki} dalam metode *Chebyshev pseudospectral*, yang merepresentasikan turunan fungsi kontinu terhadap variabel τ pada titik-titik kolokasi $\tau_k \in [-1, 1]$.