Model Kapal

$$\begin{aligned}
\dot{v}' &= a'_{11}v' + a'_{12}r' + b'_1\delta' \\
\dot{r}' &= a'_{21}v' + a'_{22}r' + b'_2\delta' \\
\dot{\psi}' &= r' \\
\dot{x}' &= u'_0\cos\psi' - v'\sin\psi' \\
\dot{y}' &= u'_0\sin\psi' + v'\cos\psi'
\end{aligned}$$

Persamaan ini dapat ditulis menjadi

$$\dot{\mathbf{S}} = f(\mathbf{S}, \mathbf{u})$$

Dengan $S = \begin{bmatrix} v' & r' & \psi' & x' & y' \end{bmatrix}^T$. Untuk persamaan model pengukuran output diberikan sebagai berikut

$$\mathbf{h} = \mathbf{CS}$$

dengan

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Output sistem adalah sudut $yaw(\psi)$, posisi kapal pada sumbu-x (x), dan posisi kapal pada sumbu-y (y).
Lalu horizon waktu $[t_0, t_0 + T]$ diubah ke domain Chebyshev $\tau \in [-1, 1]$ dengan

$$\tau = \frac{2(t - t_0)}{T} - 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = t_0 + \frac{T}{2}(\tau + 1).$$

Turunkan t terhadap τ:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{T}{2}.$$

Dengan menggunakan aturan rantai untuk turunan terhadap τ, diperoleh

$$\frac{dS}{d\tau} = \frac{dS}{dt}\frac{dt}{d\tau} = f(S(\tau), u(\tau)) \cdot \frac{T}{2}.$$

Sehingga persamaan model $\dot{\mathbf{S}} = f(\mathbf{S}, \mathbf{u})$ menjadi $\dot{\mathbf{S}}(\tau) = \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{2}}\mathbf{f}(\mathbf{S}(\tau), \mathbf{u}(\tau))$.

Lalu $\mathbf{S}$ dan $\mathbf{U}$ diaproksimasi dengan interpolasi polinomial Langrange, yaitu

$$S(\tau) = \sum_{i=0}^{N} S_i\,\phi_i(\tau) \tag{1}$$

$$u(\tau) = \sum_{i=0}^{N} u_i\,\phi_i(\tau) \tag{2}$$

Dengan N adalah order polinomial dan ϕ_i adalah basis fungsi langrange.

$$\phi_i(\tau) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{N} \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \tag{3}$$

Dari persamaan (1) diturunkan terhadap τ, sehingga menjadi

$$\dot{S}(\tau) = \sum_{i=0}^{N} S_i \frac{d\phi_i(\tau)}{d\tau}$$

Lalu persamaan (3) terhadap τ, sehingga menjadi

$$\phi_i'(\tau) = \phi_i(\tau) \sum_{j\neq i} \frac{1}{\tau - \tau_j}$$

Sehingga diperoleh

$$\dot{S}(\tau) = \sum_{i=0}^{N} S_i \phi_i(\tau) \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{N} \frac{1}{\tau - \tau_j} \right)$$

Untuk $k = 1, 2, \ldots, N$ pilih titik Chebyshev-Gauss-Lobatto sebagai titik interpolasi yang diberikan oleh

$$\tau_k = \cos(\frac{\pi k}{N})$$

Design NMPC

$$J(k) = \sum_{i=1}^{N_p} \|\mathbf{h}_{\text{ref}}(k+i|k) - \mathbf{h}(k+i|k)\|^2_{Q_{(i)}} + \|\Delta\mathbf{u}(k+i-1|k)\|^2_{R_{(i)}}$$

dengan kendala

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}(k+i|k) &= \mathbf{f}_d\big(\mathbf{s}(k+i-1|k), \mathbf{u}(k+i-1|k)\big) \\
\mathbf{h}(k+i|k) &= \mathbf{C}\mathbf{s}(k+i|k) \\
\mathbf{s}_{\min} &\leq \mathbf{s}(k+i|k) \leq \mathbf{s}_{\max} \\
\mathbf{u}_{\min} &\leq \mathbf{u}(k+i-1|k) \leq \mathbf{u}_{\max} \\
\Delta\mathbf{u}_{\min} &\leq \Delta\mathbf{u}(k+i-1|k) \leq \Delta\mathbf{u}_{\max}
\end{aligned}$$

untuk $i = 1, 2, \ldots, N_p$. Dengan $\Delta\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1)$

Dengan Chebysev

Karena $\Delta \mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1)$ dapat diaproksimasi menjadi turunan $\mathbf{u}$ yaitu berdasarkan (2), diperoleh

$$u(\tau) = \sum_{i=0}^{N} u_i \, \phi_i(\tau), \qquad \tau \in [-1, 1].$$

Turunan terhadap waktu:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \frac{du}{dt} = \frac{2}{T} \frac{du}{d\tau} \\ \left.\frac{du}{d\tau}\right|_{\tau_k} &= \sum_{i=0}^{N} D_{ki} u_i, \end{aligned}$$

Sehingga fungsi tujuan menjadi:

$$J = \frac{T}{2} \sum_{k=0}^{N} w_k \left[\|h(x_k) - h_d(\tau_k)\|_Q^2 + \left\| \frac{2}{T} \sum_{i=0}^{N} D_{ki} u_i \right\|_R^2 \right]$$

Dengan kendala

$$\begin{aligned} \frac{2}{T} \sum_{i=0}^{N} D_{ki} s_i &= \frac{T}{2} f(S(\tau), u(\tau)) \\ h_k &= C s_k \\ s_{\min} \leq & s_k \leq s_{\max} \\ u_{\min} \leq & u_k \leq u_{\max} \\ \dot{u}_{\min} \leq \frac{2}{T} & \sum_{i=0}^{N} D_{ki} u_i \leq \dot{u}_{\max} \end{aligned}$$

untuk $k = 0, \ldots, N$. Dengan D_{ki} adalah evaluasi turunan pada titik kolokasi $\tau = \tau_k$ menghasilkan elemen dari matriks diferensiasi Chebyshev–Gauss–Lobatto (CGL):

$$D_{ki} = \phi_i'(\tau_k). \tag{4}$$

Matriks diferensiasi D_{ki} dapat dinyatakan secara eksplisit sebagai:

$$D_{ki} = \begin{cases} \dfrac{c_k}{c_i} \dfrac{(-1)^{k+i}}{\tau_k - \tau_i}, & k \neq i, \\ -\dfrac{\tau_k}{2(1-\tau_k^2)}, & 1 \leq k \leq N-1, \\ \dfrac{2N^2+1}{6}, & k = 0, \\ -\dfrac{2N^2+1}{6}, & k = N, \end{cases} \tag{5}$$

dengan $c_0 = c_N = 2$ dan $c_i = 1$ untuk $i = 1, 2, \ldots, N-1$.

$$\phi_i'(\tau) = \phi_i(\tau) \sum_{j \neq i} \frac{1}{\tau - \tau_j}.$$

$$D_{ki} = \phi_i'(\tau_k) = \begin{cases} \dfrac{c_k}{c_i} \dfrac{(-1)^{k+i}}{\tau_k - \tau_i}, & k \neq i, \\ -\dfrac{\tau_k}{2(1-\tau_k^2)}, & 1 \leq k \leq N-1, \\ \dfrac{2N^2+1}{6}, & k = 0, \\ -\dfrac{2N^2+1}{6}, & k = N, \end{cases} \quad c_0 = c_N = 2,\ c_i = 1.$$