Model Kapal

$$\begin{aligned}
\dot{v}' &= a'_{11}v' + a'_{12}r' + b'_1\delta' \\
\dot{r}' &= a'_{21}v' + a'_{22}r' + b'_2\delta' \\
\dot{\psi}' &= r' \\
\dot{x}' &= u'_0 \cos\psi' - v' \sin\psi' \\
\dot{y}' &= u'_0 \sin\psi' + v' \cos\psi'
\end{aligned}$$

Persamaan ini dapat ditulis menjadi

$$\dot{\mathbf{S}} = f(\mathbf{S}, \mathbf{u})$$

Dengan $S = \begin{bmatrix} v' & r' & \psi' & x' & y' \end{bmatrix}^T$. Untuk persamaan model pengukuran output diberikan sebagai berikut

$$\mathbf{h} = \mathbf{CS}$$

dengan

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Output sistem adalah sudut $yaw(\psi)$, posisi kapal pada sumbu-x (x), dan posisi kapal pada sumbu-y (y).
Lalu horizon waktu $[t_0, t_0 + T]$ diubah ke domain Chebyshev $\tau \in [-1, 1]$ dengan

$$\tau = \frac{2(t - t_0)}{T} - 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = t_0 + \frac{T}{2}(\tau + 1).$$

Turunkan t terhadap τ:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{T}{2}.$$

Dengan menggunakan aturan rantai untuk turunan terhadap τ, diperoleh

$$\frac{dS}{d\tau} = \frac{dS}{dt}\frac{dt}{d\tau} = f(S(\tau), u(\tau)) \cdot \frac{T}{2}.$$

Sehingga persamaan model $\dot{\mathbf{S}} = f(\mathbf{S}, \mathbf{u})$ menjadi $\dot{\mathbf{S}}(\tau) = \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{2}}\mathbf{f}(\mathbf{S}(\tau), \mathbf{u}(\tau))$.
Lalu $\mathbf{S}$ dan $\mathbf{U}$ diaproksimasi dengan interpolasi polinomial Langrange, yaitu

$$S(\tau) = \sum_{i=0}^{N} S_i \, \phi_i(\tau) \tag{1}$$

$$u(\tau) = \sum_{i=0}^{N} u_i \, \phi_i(\tau) \tag{2}$$

Dengan N adalah order polinomial dan ϕ_i adalah basis fungsi langrange.

$$\phi_i(\tau) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{N} \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \tag{3}$$

Dari persamaan (1) diturunkan terhadap τ, sehingga menjadi

$$\dot{S}(\tau) = \sum_{i=0}^{N} S_i \frac{d\phi_i(\tau)}{d\tau}$$

Lalu persamaan (3) terhadap τ, sehingga menjadi

$$\phi_i'(\tau) = \phi_i(\tau) \sum_{j\neq i} \frac{1}{\tau - \tau_j}$$

Sehingga diperoleh

$$\dot{S}(\tau) = \sum_{i=0}^{N} S_i \phi_i(\tau) \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{N} \frac{1}{\tau_i - \tau_j} \right)$$

Untuk $k = 1, 2, \ldots, N$ pilih titik Chebyshev-Gauss-Lobatto sebagai titik interpolasi yang diberikan oleh

$$\tau_k = \cos(\frac{\pi k}{N})$$

Design NMPC

$$J(k) = \sum_{i=1}^{N_p} \|\mathbf{h}_{\text{ref}}(k+i|k) - \mathbf{h}(k+i|k)\|^2_{Q_{(i)}} + \|\Delta\mathbf{u}(k+i-1|k)\|^2_{R_{(i)}}$$

dengan kendala

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}(k+i|k) &= \mathbf{f}_d\big(\mathbf{s}(k+i-1|k), \mathbf{u}(k+i-1|k)\big) \\
\mathbf{h}(k+i|k) &= \mathbf{C}\mathbf{s}(k+i|k) \\
\mathbf{s}_{\min} &\le \mathbf{s}(k+i|k) \le \mathbf{s}_{\max} \\
\mathbf{u}_{\min} &\le \mathbf{u}(k+i-1|k) \le \mathbf{u}_{\max} \\
\Delta\mathbf{u}_{\min} &\le \Delta\mathbf{u}(k+i-1|k) \le \Delta\mathbf{u}_{\max}
\end{aligned}$$

untuk $i = 1, 2, \ldots, N_p$. Dengan $\Delta\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1)$

Dengan Chebysev

Karena $\Delta\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1)$ dapat diaproksimasi menjadi turunan $\mathbf{u}$ yaitu berdasarkan (2), diperoleh

$$u(\tau) = \sum_{i=0}^{N} u_i \, \phi_i(\tau), \qquad \tau \in [-1, 1].$$

Turunan terhadap waktu:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \frac{du}{dt} = \frac{2}{T}\frac{du}{d\tau} \\ \left.\frac{du}{d\tau}\right|_{\tau_k} &= \sum_{i=0}^{N} D_{ki} u_i, \end{aligned}$$

Sehingga fungsi tujuan menjadi:

$$J = \frac{T}{2}\sum_{k=0}^{N} w_k \left[\|h(x_k) - h_d(\tau_k)\|_Q^2 + \left\| \frac{2}{T}\sum_{i=0}^{N} D_{ki} u_i \right\|_R^2 \right]$$

Dengan kendala

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N} D_{ki} s_i &= \frac{T}{2} f(S(\tau), u(\tau)) \\ h_k &= C s_k \\ s_{\min} \leq & s_k \leq s_{\max} \\ u_{\min} \leq & u_k \leq u_{\max} \\ \dot{u}_{\min} \leq \frac{2}{T} & \sum_{i=0}^{N} D_{ki} u_i \leq \dot{u}_{\max} \end{aligned}$$

untuk $k = 0, \ldots, N$. Dengan D_{ki} adalah evaluasi turunan pada titik kolokasi $\tau = \tau_k$ menghasilkan elemen dari matriks diferensiasi Chebyshev–Gauss–Lobatto (CGL):

$$D_{ki} = \phi_i'(\tau_k). \tag{4}$$

Matriks diferensiasi D_{ki} dapat dinyatakan secara eksplisit sebagai:

$$D_{ki} = \begin{cases} \dfrac{c_k}{c_i} \dfrac{(-1)^{k+i}}{\tau_k - \tau_i}, & k \neq i, \\ -\dfrac{\tau_k}{2(1-\tau_k^2)}, & 1 \leq k \leq N-1, \\ \dfrac{2N^2+1}{6}, & k = 0, \\ -\dfrac{2N^2+1}{6}, & k = N, \end{cases} \tag{5}$$

dengan $c_0 = c_N = 2$ dan $c_i = 1$ untuk $i = 1, 2, \ldots, N-1$.

Materi

Chebyshev-Gauss-Lobatto (CGL)

CGL adalah sekumpulan titik kolokasi (collocation points) yang digunakan dalam metode pseudospectral untuk mendiskritisasi fungsi kontinu menjadi bentuk polinomial berderajat N. CGL merupakan special case dari titik Chebyshev-Gauss (CG), tetapi dengan tambahan dua titik batas $(-1, 1)$ sehingga domainnya lengkap di interval $[-1, 1]$. Titik ini didefinisikan sebagai:

$$\tau_k = \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)$$

Note:

1. Titik kolokasi adalah sekumpulan titik diskrit di sepanjang domain waktu atau ruang tempat persamaan diferensial sistem dipaksakan berlaku secara eksak

2. Metode pseudospectral adalah metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial atau masalah kontrol optimal dengan cara:

    (a) Mengaproksimasi fungsi keadaan dan kontrol menggunakan polinomial ortogonal orde tinggi (seperti Chebyshev atau Legendre)

    (b) Menentukan turunan dan integralnya hanya di titik-titik kolokasi (biasanya titik-titik Chebyshev–Gauss–Lobatto atau Legendre–Gauss–Lobatto)