

1 Bimbingan

1.1 Apa itu metode pseudospectral Method

Pseudospectral Method (PSM) adalah metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan mengaproksimasi fungsi menggunakan polinomial ortogonal (biasanya Chebyshev atau Legendre).

Berbeda dengan metode numerik konvensional (seperti Euler atau Runge-Kutta) yang mendiskritisasi waktu secara seragam, PSM menggunakan **titik kolokasi nonuniform⁽¹⁾** yang mengikuti distribusi akar atau ekstrem dari polinomial ortogonal. Tujuannya adalah untuk mencapai akurasi sangat tinggi (eksponensial) dengan jumlah titik yang jauh lebih sedikit.

⁽¹⁾ Titik kolokasi adalah titik-titik tertentu dalam domain waktu (atau ruang) di mana persamaan diferensial dianggap “benar” secara eksak.

Kalau begitu apa bedanya dengan diskritisasi?

Jawab: Diskritisasi adalah proses **membagi domain waktu** menjadi titik-titik diskret untuk menghitung solusi numerik lokal, sedangkan kolokasi adalah **memilih titik diskret khusus** untuk memaksa persamaan diferensial “benar” pada titik-titik itu, lalu membangun solusi global berbasis polinomial.

Disinilah letak mengapa diperlukan PSM pada NMPC, sebab PSM membuat NMPC lebih cepat karena ia mengganti integrasi langkah demi langkah dengan aproksimasi polinomial global berorde tinggi yang langsung bisa dimasukkan ke dalam optimasi nonlinear.

1.2 Polinomial Chebyshev

Polinomial Chebyshev adalah dua deret polinomial ortogonal yang berhubungan dengan fungsi kosinus dan sinus, dinotasikan sebagai $T_n(x)$ dan $U_n(x)$. Dengan

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

$$U_n(\cos(\theta)) \sin \theta = \sin((n+1)\theta)$$

Artinya jika $x = \cos \theta$, maka

$$T_0 = 1, \quad T_1 = \cos(\theta), \quad T_2 = \cos(2\theta), \quad T_3 = \cos(3\theta)$$

Dengan contoh polinomial pertama yaitu:

n	$T_n(x)$
0	1
1	x
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$

1.3 Chebyshev Pseudospectral Method

Metode Chebyshev Pseudospectral adalah salah satu dari PSM yang menggunakan Chebyshev–Gauss–Lobatto (CGL) sebagai titik-titik kolokasi. Titik ini berasal dari ekstrem (maksimum dan minimum) polinomial Chebyshev $T_n(x)$. Berikut adalah langkah-langkah memperoleh Chebyshev–Gauss–Lobatto (CGL). Definisi dasar Chebyshev:

$$T_N(x) = \cos(N\theta), \quad x = \cos(\theta)$$

Langkah 1: Cari titik ekstrem (maksimum dan minimum)
Titik ekstrem diperoleh saat turunan terhadap x bernilai nol:

$$\frac{dT_N(x)}{dx} = 0$$

Karena $x = \cos \theta$, gunakan turunan rantai:

$$\frac{dT_N(x)}{dx} = \frac{dT_N}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

Kita tahu:

$$T_N(x) = \cos(N\theta) \Rightarrow \frac{dT_N}{d\theta} = -N \sin(N\theta)$$

dan

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Sehingga:

$$\frac{dT_N}{dx} = \frac{N \sin(N\theta)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Langkah 2: Syarat ekstrem \rightarrow nolkan turunan

$$\frac{dT_N}{dx} = 0 \Rightarrow \sin(N\theta) = 0$$

Solusi:

$$N\theta_i = i\pi, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$\Rightarrow \theta_i = \frac{i\pi}{N}$$

Langkah 3: Kembalikan ke x

$$x_i = \cos(\theta_i) = \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right), \quad i = 0, 1, \dots, N$$

Nah, inilah rumus **Chebyshev–Gauss–Lobatto nodes**.

Disebut Chebyshev–Gauss–Lobatto karena berasal teori quadrature (integrasi numerik):

1. Gauss quadrature = metode integrasi numerik berbasis akar polinomial ortogonal (misal, Chebyshev atau Legendre).
2. Lobatto = modifikasi Gauss quadrature yang juga menyertakan titik ujung domain (-1 dan +1).

1.4 Langkah-langkah Chebyshev Pseudospectral Method (CPM) secara umum

1.4.1 Aproksimasi Fungsi

Misalkan $x(t)$ adalah fungsi keadaan kontinu pada interval waktu $[t_0, t_f]$. CPM mendekati fungsi tersebut menggunakan deret polinomial Chebyshev $T_k(\tau)$ yang didefinisikan pada domain standar $\tau \in [-1, 1]$. Hubungan antara waktu sebenarnya dan waktu terstandar diberikan oleh transformasi linear:

$$\tau = \frac{2(t - t_0)}{t_f - t_0} - 1, \quad \text{sehingga} \quad \frac{d}{dt} = \frac{2}{t_f - t_0} \frac{d}{d\tau}$$

Dengan demikian, fungsi keadaan dapat diaproksimasi sebagai:

$$x(\tau) \approx \sum_{k=0}^N a_k T_k(\tau)$$

di mana $T_k(\tau) = \cos(k \arccos \tau)$ merupakan polinomial Chebyshev jenis pertama dan a_k adalah koefisien yang akan ditentukan.

1.4.2 Kolokasi di Titik Chebyshev–Gauss–Lobatto

Dalam CPM, persamaan diferensial tidak dihitung secara simbolik, melainkan dipaksa benar pada sejumlah titik kolokasi nonuniform yang dikenal sebagai *Chebyshev–Gauss–Lobatto (CGL) nodes*. Titik-titik ini diambil dari ekstrem polinomial Chebyshev $T_N(\tau)$, yaitu:

$$\tau_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right), \quad i = 0, 1, \dots, N$$

Titik-titik ini termasuk batas domain -1 dan $+1$, dan lebih rapat di ujung interval untuk mengurangi fenomena osilasi (Runge phenomenon).

Persamaan dinamik sistem kontinu:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

akan dikolokasikan menjadi:

$$\frac{2}{t_f - t_0} \dot{x}(\tau_i) = f(x(\tau_i), u(\tau_i))$$

1.4.3 Diferensiasi via Matriks Chebyshev

Turunan dari fungsi yang diaproksimasi menggunakan polinomial Chebyshev dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks diferensiasi Chebyshev (D):

$$\dot{x}(\tau_i) \approx \sum_{j=0}^N D_{ij} x(\tau_j)$$

dengan elemen-elemen matriks D_{ij} diberikan oleh:

$$D_{ij} = \begin{cases} \frac{c_i}{c_j} \frac{(-1)^{i+j}}{\tau_i - \tau_j}, & i \neq j, \\ -\frac{\tau_j}{2(1 - \tau_j^2)}, & i = j \neq 0, N, \\ \frac{2N^2 + 1}{6}, & i = j = 0, \\ -\frac{2N^2 + 1}{6}, & i = j = N \end{cases}$$

dengan $c_0 = c_N = 2$ dan $c_j = 1$ untuk $j = 1, \dots, N-1$.

1.4.4 Formulasi Kolokasi Diskrit

Dengan menggunakan transformasi waktu dan matriks diferensiasi, persamaan dinamik kontinu dapat ditulis dalam bentuk kolokasi aljabar:

$$\frac{2}{t_f - t_0} DX = F(X, U)$$

dengan $X = [x(\tau_0), x(\tau_1), \dots, x(\tau_N)]^T$ dan $U = [u(\tau_0), u(\tau_1), \dots, u(\tau_N)]^T$.

Persamaan ini menghubungkan semua titik keadaan secara global dan menjadi constraint utama dalam formulasi optimasi Nonlinear Programming (NLP).

1.4.5 Kuantifikasi Integral (Quadrature)

Integral dari fungsi objektif dalam domain $[-1, 1]$ dapat dihitung menggunakan bobot integrasi Chebyshev (*quadrature weights*):

$$\int_{-1}^1 g(\tau) d\tau \approx \sum_{i=0}^N w_i g(\tau_i)$$

dengan w_i ditentukan dari aturan integrasi Chebyshev–Gauss–Lobatto.

1.4.6 Formulasi Masalah Optimal Diskrit

Dengan demikian, masalah kontrol optimal kontinu:

$$\min_{u(\cdot)} J = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t)) dt$$

dengan constraint $\dot{x} = f(x, u)$ dapat ditransformasikan menjadi bentuk diskrit:

$$\min_{X, U} J = \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{i=0}^N w_i L(x_i, u_i)$$

subject to:

$$\frac{2}{t_f - t_0} DX = F(X, U), \quad x_0 = x(t_0)$$

yang kemudian diselesaikan menggunakan solver Nonlinear Programming (misalnya `fmincon`, IPOPT, atau CasADI).

1.5 Bagaimana Chebyshev mengubah fungsi objektif dan kendala?

1.6 Fungsi tujuan di NMPC apakah diskrit atau kontinu?

Fungsi tujuan NMPC pada dasarnya bersifat kontinu. Hanya saja, untuk keperluan komputasi numerik, fungsi tujuan harus dalam bentuk diskrit (sigma). Sumber buku:

5.4.2 Continuous-Time Models

For continuous-time systems, we consider here nonlinear models represented as differential equations of the general form

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (5.17)$$

A controller is sought which minimizes some performance index

$$J = \phi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t] dt \quad (5.18)$$

(a) Fungsi Objektif Kontinu

5.4.1 Discrete-Time Models

In this section, we consider the solution of MPC problems posed solely in discrete time. Since the computational issues discussed here are primarily concerned with solving the open-loop constrained control problem, we will temporarily abandon the double time index. The model is given by Equations 5.1 and 5.2 and the objective function is given by

$$J = \|g(x_N) - y_{ref}\|_2^2 + \sum_{j=0}^{N-1} (\|g(x_j) - y_{ref}\|_2^2 + \|u_j - u_{ref}\|_2^2 + \|\Delta u_j\|_2^2) \quad (5.15)$$

(b) Fungsi Objektif Kontinu

1.7 τ itu apa dan bagaimana?

Variabel τ merupakan waktu terstandar (domain komputasi) yang digunakan pada metode Chebyshev. Semua polinomial Chebyshev didefinisikan dan bersifat ortogonal pada interval $[-1, 1]$, sehingga domain ini menjadi ruang dasar untuk aproksimasi dan kolokasi dalam Chebyshev Pseudospectral Method.

- 1.8 Alasan kenapa polinomial Chebyshev digunakan? Bisa bandingin dengan Laguerre dan Langrange
- 1.9 Bagaimana aturan dari Diskrit ke kontinu dan bagaimana jika kontinu ke diskrit

Model Kapal

$$\begin{aligned}\dot{v}' &= a'_{11}v' + a'_{12}r' + b'_1\delta' \\ \dot{r}' &= a'_{21}v' + a'_{22}r' + b'_2\delta' \\ \dot{\psi}' &= r' \\ \dot{x}' &= u'_0 \cos \psi' - v' \sin \psi' \\ \dot{y}' &= u'_0 \sin \psi' + v' \cos \psi'\end{aligned}$$

Persamaan ini dapat ditulis menjadi

$$\dot{\mathbf{S}} = f(\mathbf{S}, \mathbf{u})$$

Dengan $S = [v' \ r' \ \psi' \ x' \ y']^T$. Untuk persamaan model pengukuran output diberikan sebagai berikut

$$\mathbf{h} = \mathbf{CS}$$

dengan

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Output sistem adalah sudut $yaw(\psi)$, posisi kapal pada sumbu-x (x), dan posisi kapal pada sumbu-y (y).

Lalu horizon waktu $[t_0, t_0 + T]$ diubah ke domain Chebyshev $\tau \in [-1, 1]$ dengan

$$\tau = \frac{2(t - t_0)}{T} - 1 \quad \iff \quad t = t_0 + \frac{T}{2}(\tau + 1).$$

Turunkan t terhadap τ :

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{T}{2}.$$

Dengan menggunakan aturan rantai untuk turunan terhadap τ , diperoleh

$$\frac{dS}{d\tau} = \frac{dS}{dt} \frac{dt}{d\tau} = f(S(\tau), u(\tau)) \cdot \frac{T}{2}.$$

Sehingga persamaan model $\dot{\mathbf{S}} = f(\mathbf{S}, \mathbf{u})$ menjadi $\dot{\mathbf{S}}(\tau) = \frac{T}{2} \mathbf{f}(\mathbf{S}(\tau), \mathbf{u}(\tau))$. Lalu \mathbf{S} dan \mathbf{U} diaproksimasi dengan interpolasi polinomial Langrange, yaitu

$$S(\tau) = \sum_{i=0}^N S_i \phi_i(\tau) \quad (1)$$

$$u(\tau) = \sum_{i=0}^N u_i \phi_i(\tau) \quad (2)$$

Dengan N adalah order polinomial dan ϕ_i adalah basis fungsi langrange.

$$\phi_i(\tau) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \quad (3)$$

Dari persamaan (1) diturunkan terhadap τ , sehingga menjadi

$$\dot{S}(\tau) = \sum_{i=0}^N S_i \frac{d\phi_i(\tau)}{d\tau}$$

Lalu persamaan (3) terhadap τ , sehingga menjadi

$$\phi'_i(\tau) = \phi_i(\tau) \sum_{j \neq i} \frac{1}{\tau - \tau_j}$$

Sehingga diperoleh

$$\dot{S}(\tau) = \sum_{i=0}^N S_i \phi_i(\tau) \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{\tau_i - \tau_j} \right)$$

Untuk $k = 1, 2, \dots, N$ pilih titik Chebyshev-Gauss-Lobatto sebagai titik interpolasi yang diberikan oleh

$$\tau_k = \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)$$

Design NMPC

Objective Function 1

$$J(k) = \sum_{i=1}^{N_p} \|\mathbf{h}_{\text{ref}}(k+i|k) - \mathbf{h}(k+i|k)\|_{Q_{(i)}}^2 + \|\Delta \mathbf{u}(k+i-1|k)\|_{R_{(i)}}^2$$

dengan kendala

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}(k+i|k) &= \mathbf{f}_d(\mathbf{s}(k+i-1|k), \mathbf{u}(k+i-1|k)) \\
\mathbf{h}(k+i|k) &= \mathbf{C}\mathbf{s}(k+i|k) \\
\mathbf{s}_{\min} &\leq \mathbf{s}(k+i|k) \leq \mathbf{s}_{\max} \\
\mathbf{u}_{\min} &\leq \mathbf{u}(k+i-1|k) \leq \mathbf{u}_{\max} \\
\Delta \mathbf{u}_{\min} &\leq \Delta \mathbf{u}(k+i-1|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{\max}
\end{aligned}$$

untuk $i = 1, 2, \dots, N_p$. Dengan $\Delta \mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1)$

Dengan Chebyshev

Karena $\Delta \mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1)$ dapat diaproksimasi menjadi turunan \mathbf{u} yaitu berdasarkan (2), diperoleh

$$u(\tau) = \sum_{i=0}^N u_i \phi_i(\tau), \quad \tau \in [-1, 1].$$

Turunan terhadap waktu:

$$\begin{aligned}
\dot{u}(t) &= \frac{du}{dt} = \frac{2}{T} \frac{du}{d\tau} \\
\frac{du}{d\tau} \Big|_{\tau_k} &= \sum_{i=0}^N D_{ki} u_i,
\end{aligned}$$

Sehingga fungsi tujuan menjadi:

$$J = \frac{T}{2} \sum_{k=0}^N w_k \left[\|h(x_k) - h_d(\tau_k)\|_Q^2 + \left\| \frac{2}{T} \sum_{i=0}^N D_{ki} u_i \right\|_R^2 \right]$$

Dengan kendala

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^N D_{ki} s_i &= \frac{T}{2} f(S(\tau), u(\tau)) \\
h_k &= C s_k \\
s_{\min} &\leq s_k \leq s_{\max} \\
u_{\min} &\leq u_k \leq u_{\max} \\
\dot{u}_{\min} &\leq \frac{2}{T} \sum_{i=0}^N D_{ki} u_i \leq \dot{u}_{\max}
\end{aligned}$$

untuk $k = 0, \dots, N$. Untuk N genap, w_k adalah

$$w_0 = w_N = \frac{1}{N^2 - 1},$$

$$w_k = \frac{2}{N} \left[\gamma(0, k) + \gamma\left(\frac{N}{2}, k\right) + 2 \sum_{i=1}^{N/2-1} \gamma(i, k) \right],$$

untuk $k = 1, \dots, N-1$, dan untuk N ganjil adalah

$$w_0 = w_N = \frac{1}{N^2},$$

$$w_k = \frac{2}{N} \left[\gamma(0, k) + 2 \sum_{i=1}^{(N-1)/2} \gamma(i, k) \right],$$

dengan

$$\gamma(i, k) = \frac{1}{1 - 4i^2} \cos\left(\frac{2\pi ik}{N}\right).$$

Dan D_{ki} adalah evaluasi turunan pada titik kolokasi $\tau = \tau_k$ menghasilkan elemen dari matriks diferensiasi Chebyshev–Gauss–Lobatto (CGL):

$$D_{ki} = \phi'_i(\tau_k) \quad (4)$$

Matriks diferensiasi D_{ki} dapat dinyatakan secara eksplisit sebagai:

$$D_{ki} = \begin{cases} \frac{c_k}{c_i} \frac{(-1)^{k+i}}{\tau_k - \tau_i}, & k \neq i, \\ -\frac{\tau_k}{2(1 - \tau_k^2)}, & 1 \leq k \leq N-1, \\ \frac{2N^2 + 1}{6}, & k = 0, \\ -\frac{2N^2 + 1}{6}, & k = N, \end{cases} \quad (5)$$

dengan $c_0 = c_N = 2$ dan $c_i = 1$ untuk $i = 1, 2, \dots, N-1$.

Simulasi NMPC dengan CASADI hasil ChatGPT

Catatan

N : Orde polinomial Chebyshev

i : indeks indeks titik basis Lagrange (atau node tempat state/variabel disimpan)

k : indeks titik kolokasi tempat turunan sistem dipaksakan berlaku

```

MISSION COMPLETE at iter 238 (dist_min=48.82 m)
== NMPC TIME ==
Total : 15.444211 s
Iterasi : 237
Rata2 : 0.065165 s/iter
Min-Max : [0.022099  0.366392] s/iter
Warning: The video's width and height has
been padded to be a multiple of two as
required by the H.264 codec.

k =
    131

k =
    260

```

(a) Simulasi NMPC dengan Chebyshev

```

main_loop_time =
    58.2598

distance_to_destination =
    3.5884

average_mpc_time =
    0.2398

```

(b) Simulasi NMPC konvensional

Figure 2: Perbandingan hasil simulasi antara NMPC Chebyshev dan NMPC biasa.

Coret-Coret

Dengan $s = [v' \ r' \ \psi' \ x' \ y']^\top$, kendali $u' = \delta'$, dan kecepatan surge konstan u'_0 , model takliniernya:

$$\dot{s} = f(s, u') \equiv \begin{bmatrix} -0.6174 v' - 0.1036 r' + 0.01 u' \\ -5.0967 v' - 3.4047 r' + u' \\ r' \\ u'_0 \cos \psi' - v' \sin \psi' \\ u'_0 \sin \psi' + v' \cos \psi' \end{bmatrix}.$$

Ambil titik CGL untuk $N = 4$ dan $T = 5$:

$$\tau_0 = 1, \quad \tau_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tau_2 = 0, \quad \tau_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tau_4 = -1,$$

dan tulis $S_i := S(\tau_i) = [v'_i \ r'_i \ \psi'_i \ x'_i \ y'_i]^\top$, $u'_i := u'(\tau_i)$.

Persamaan kolokasi. Untuk setiap $k = 0, \dots, 4$ berlaku

$$\sum_{i=0}^4 D_{ki} S_i = \frac{T}{2} f(S_k, u'_k) = 5 f(S_k, u'_k),$$

yang komponen-per-komponen menjadi

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^4 D_{ki} v'_i &= 5 \left(-0.6174 v'_k - 0.1036 r'_k + 0.01 u'_k \right), \\ \sum_{i=0}^4 D_{ki} r'_i &= 5 \left(-5.0967 v'_k - 3.4047 r'_k + u'_k \right), \\ \sum_{i=0}^4 D_{ki} \psi'_i &= 5 r'_k, \\ \sum_{i=0}^4 D_{ki} x'_i &= 5 \left(u'_0 \cos \psi'_k - v'_k \sin \psi'_k \right), \\ \sum_{i=0}^4 D_{ki} y'_i &= 5 \left(u'_0 \sin \psi'_k + v'_k \cos \psi'_k \right).\end{aligned}$$

Matriks diferensiasi CGL ($N = 4$).

$$D = \begin{bmatrix} 5.50000000 & -6.82842712 & 2.00000000 & -1.17157288 & 0.50000000 \\ 1.70710678 & -0.70710678 & -1.41421356 & 0.70710678 & -0.29289322 \\ -0.50000000 & 1.41421356 & 0.00000000 & -1.41421356 & 0.50000000 \\ 0.29289322 & -0.70710678 & 1.41421356 & 0.70710678 & -1.70710678 \\ -0.50000000 & 1.17157288 & -2.00000000 & 6.82842712 & -5.50000000 \end{bmatrix}.$$

maka persamaan menjadi

(1) Komponen v' :

$$\begin{aligned}5.5v'_0 - 6.8284v'_1 + 2v'_2 - 1.1716v'_3 + 0.5v'_4 &= 5(-0.6174v'_0 - 0.1036r'_0 + 0.01u'_0), \\ 1.7071v'_0 - 0.7071v'_1 - 1.4142v'_2 + 0.7071v'_3 - 0.2929v'_4 &= 5(-0.6174v'_1 - 0.1036r'_1 + 0.01u'_1), \\ -0.5v'_0 + 1.4142v'_1 - 1.4142v'_3 + 0.5v'_4 &= 5(-0.6174v'_2 - 0.1036r'_2 + 0.01u'_2), \\ 0.2929v'_0 - 0.7071v'_1 + 1.4142v'_2 + 0.7071v'_3 - 1.7071v'_4 &= 5(-0.6174v'_3 - 0.1036r'_3 + 0.01u'_3), \\ -0.5v'_0 + 1.1716v'_1 - 2v'_2 + 6.8284v'_3 - 5.5v'_4 &= 5(-0.6174v'_4 - 0.1036r'_4 + 0.01u'_4).\end{aligned}$$

(2) Komponen r' :

$$\begin{aligned}5.5r'_0 - 6.8284r'_1 + 2r'_2 - 1.1716r'_3 + 0.5r'_4 &= 5(-5.0967v'_0 - 3.4047r'_0 + u'_0), \\ 1.7071r'_0 - 0.7071r'_1 - 1.4142r'_2 + 0.7071r'_3 - 0.2929r'_4 &= 5(-5.0967v'_1 - 3.4047r'_1 + u'_1), \\ -0.5r'_0 + 1.4142r'_1 - 1.4142r'_3 + 0.5r'_4 &= 5(-5.0967v'_2 - 3.4047r'_2 + u'_2), \\ 0.2929r'_0 - 0.7071r'_1 + 1.4142r'_2 + 0.7071r'_3 - 1.7071r'_4 &= 5(-5.0967v'_3 - 3.4047r'_3 + u'_3), \\ -0.5r'_0 + 1.1716r'_1 - 2r'_2 + 6.8284r'_3 - 5.5r'_4 &= 5(-5.0967v'_4 - 3.4047r'_4 + u'_4).\end{aligned}$$

(3) Komponen ψ' :

$$\begin{aligned} 5.5\psi'_0 - 6.8284\psi'_1 + 2\psi'_2 - 1.1716\psi'_3 + 0.5\psi'_4 &= 5r'_0, \\ 1.7071\psi'_0 - 0.7071\psi'_1 - 1.4142\psi'_2 + 0.7071\psi'_3 - 0.2929\psi'_4 &= 5r'_1, \\ -0.5\psi'_0 + 1.4142\psi'_1 - 1.4142\psi'_3 + 0.5\psi'_4 &= 5r'_2, \\ 0.2929\psi'_0 - 0.7071\psi'_1 + 1.4142\psi'_2 + 0.7071\psi'_3 - 1.7071\psi'_4 &= 5r'_3, \\ -0.5\psi'_0 + 1.1716\psi'_1 - 2\psi'_2 + 6.8284\psi'_3 - 5.5\psi'_4 &= 5r'_4. \end{aligned}$$

(4) Komponen x' :

$$\begin{aligned} 5.5x'_0 - 6.8284x'_1 + 2x'_2 - 1.1716x'_3 + 0.5x'_4 &= 5(u'_0 \cos \psi'_0 - v'_0 \sin \psi'_0), \\ 1.7071x'_0 - 0.7071x'_1 - 1.4142x'_2 + 0.7071x'_3 - 0.2929x'_4 &= 5(u'_0 \cos \psi'_1 - v'_1 \sin \psi'_1), \\ -0.5x'_0 + 1.4142x'_1 - 1.4142x'_3 + 0.5x'_4 &= 5(u'_0 \cos \psi'_2 - v'_2 \sin \psi'_2), \\ 0.2929x'_0 - 0.7071x'_1 + 1.4142x'_2 + 0.7071x'_3 - 1.7071x'_4 &= 5(u'_0 \cos \psi'_3 - v'_3 \sin \psi'_3), \\ -0.5x'_0 + 1.1716x'_1 - 2x'_2 + 6.8284x'_3 - 5.5x'_4 &= 5(u'_0 \cos \psi'_4 - v'_4 \sin \psi'_4). \end{aligned}$$

(5) Komponen y' :

$$\begin{aligned} 5.5y'_0 - 6.8284y'_1 + 2y'_2 - 1.1716y'_3 + 0.5y'_4 &= 5(u'_0 \sin \psi'_0 + v'_0 \cos \psi'_0), \\ 1.7071y'_0 - 0.7071y'_1 - 1.4142y'_2 + 0.7071y'_3 - 0.2929y'_4 &= 5(u'_0 \sin \psi'_1 + v'_1 \cos \psi'_1), \\ -0.5y'_0 + 1.4142y'_1 - 1.4142y'_3 + 0.5y'_4 &= 5(u'_0 \sin \psi'_2 + v'_2 \cos \psi'_2), \\ 0.2929y'_0 - 0.7071y'_1 + 1.4142y'_2 + 0.7071y'_3 - 1.7071y'_4 &= 5(u'_0 \sin \psi'_3 + v'_3 \cos \psi'_3), \\ -0.5y'_0 + 1.1716y'_1 - 2y'_2 + 6.8284y'_3 - 5.5y'_4 &= 5(u'_0 \sin \psi'_4 + v'_4 \cos \psi'_4). \end{aligned}$$

Materi

Chebyshev-Gauss-Lobatto (CGL)

CGL adalah sekumpulan titik kolokasi (collocation points) yang digunakan dalam metode pseudospectral untuk mendiskritisasi fungsi kontinu menjadi bentuk polinomial berderajat N. CGL merupakan special case dari titik Chebyshev-Gauss (CG), tetapi dengan tambahan dua titik batas $(-1, 1)$ sehingga domainnya lengkap di interval $[-1, 1]$. Titik ini didefinisikan sebagai:

$$\tau_k = \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)$$

Note:

1. Titik kolokasi adalah sekumpulan titik diskrit di sepanjang domain waktu atau ruang tempat persamaan diferensial sistem dipaksakan berlaku secara eksak
2. Metode pseudospectral adalah metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial atau masalah kontrol optimal dengan cara:
 - (a) Mengaproksimasi fungsi keadaan dan kontrol menggunakan polinomial ortogonal orde tinggi (seperti Chebyshev atau Legendre)
 - (b) Menentukan turunan dan integralnya hanya di titik-titik kolokasi (biasanya titik-titik Chebyshev-Gauss-Lobatto atau Legendre-Gauss-Lobatto)

Pembuktian D_{ki}

Kita mulai dari definisi fungsi basis Lagrange untuk titik-titik kolokasi $\{\tau_j\}_{j=0}^N$:

$$\phi_i(\tau) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}, \quad \phi_i(\tau_k) = \delta_{ik}. \quad (6)$$

Turunan terhadap τ diberikan oleh

$$\phi'_i(\tau) = \phi_i(\tau) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{\tau - \tau_j}. \quad (7)$$

Evaluasi pada titik kolokasi $\tau = \tau_k$ memberikan elemen matriks diferensiasi:

$$D_{ki} = \phi'_i(\tau_k). \quad (8)$$

Bentuk Umum dengan Bobot Barisentrис

Untuk sebarang himpunan titik kolokasi, definisikan bobot barisentrис sebagai:

$$w_i = \frac{1}{\prod_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^N (\tau_i - \tau_m)}. \quad (9)$$

Dengan bobot tersebut, turunan fungsi basis pada titik-titik kolokasi dapat dinyatakan sebagai

$$D_{ki} = \begin{cases} \frac{w_i}{w_k} \frac{1}{\tau_k - \tau_i}, & k \neq i, \\ - \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^N D_{km}, & k = i. \end{cases} \quad (10)$$

Khusus untuk Titik Chebyshev–Gauss–Lobatto (CGL)

Untuk titik-titik Chebyshev-Gauss-Lobatto yang didefinisikan sebagai

$$\tau_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right), \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (11)$$

bobot barisentrисnya memiliki bentuk proporsional sebagai berikut:

$$w_j \propto (-1)^j c_j, \quad c_0 = c_N = \frac{1}{2}, \quad c_j = 1 \text{ untuk } j = 1, \dots, N-1. \quad (12)$$

Substitusi ke dalam Persamaan (10) menghasilkan

$$D_{ki} = \frac{c_k}{c_i} \frac{(-1)^{k+i}}{\tau_k - \tau_i}, \quad k \neq i. \quad (13)$$

Untuk elemen diagonal diperoleh dengan memanfaatkan sifat baris-jumlah-nol $\sum_{m=0}^N D_{km} = 0$, sehingga

$$D_{kk} = - \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^N D_{km}. \quad (14)$$

Setelah disederhanakan menggunakan identitas trigonometri $\tau_k = \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)$, bentuk eksplisitnya adalah

$$D_{kk} = \begin{cases} -\frac{\tau_k}{2(1 - \tau_k^2)}, & 1 \leq k \leq N-1, \\ \frac{2N^2 + 1}{6}, & k = 0, \\ -\frac{2N^2 + 1}{6}, & k = N. \end{cases} \quad (15)$$

Hasil Akhir

Maka, matriks diferensiasi Chebyshev–Gauss–Lobatto dapat dinyatakan secara lengkap sebagai:

$$D_{ki} = \begin{cases} \frac{c_k}{c_i} \frac{(-1)^{k+i}}{\tau_k - \tau_i}, & k \neq i, \\ -\frac{\tau_k}{2(1 - \tau_k^2)}, & 1 \leq k \leq N-1, \\ \frac{2N^2 + 1}{6}, & k = 0, \\ -\frac{2N^2 + 1}{6}, & k = N. \end{cases} \quad (16)$$

Bentuk inilah yang digunakan sebagai *differentiation matrix* D_{ki} dalam metode *Chebyshev pseudospectral*, yang merepresentasikan turunan fungsi kontinu terhadap variabel τ pada titik-titik kolokasi $\tau_k \in [-1, 1]$.