# Model Kapal

$$
\begin{aligned}
\dot{v}' &= a'_{11}v' + a'_{12}r' + b'_1\delta' \\
\dot{r}' &= a'_{21}v' + a'_{22}r' + b'_2\delta' \\
\dot{\psi}' &= r' \\
\dot{x}' &= u'_0 \cos\psi' - v' \sin\psi' \\
\dot{y}' &= u'_0 \sin\psi' + v' \cos\psi'
\end{aligned}
$$

Persamaan ini dapat ditulis menjadi

$$\dot{\mathbf{S}} = f(\mathbf{S}, \mathbf{u})$$

Dengan $S = \begin{bmatrix} v' & r' & \psi' & x' & y' \end{bmatrix}^T$. Untuk persamaan model pengukuran output diberikan sebagai berikut

$$\mathbf{h} = \mathbf{CS}$$

dengan

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Output sistem adalah sudut $yaw(\psi)$, posisi kapal pada sumbu-x ($x$), dan posisi kapal pada sumbu-y ($y$).
Lalu horizon waktu $[t_0, t_0 + T]$ diubah ke domain Chebyshev $\tau \in [-1, 1]$ dengan

$$\tau = \frac{2(t - t_0)}{T} - 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = t_0 + \frac{T}{2}(\tau + 1).$$

Turunkan $t$ terhadap $\tau$:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{T}{2}.$$

Dengan menggunakan aturan rantai untuk turunan terhadap $\tau$, diperoleh

$$\frac{dS}{d\tau} = \frac{dS}{dt}\frac{dt}{d\tau} = f(S(\tau), u(\tau)) \cdot \frac{T}{2}.$$

Sehingga persamaan model $\dot{\mathbf{S}} = f(\mathbf{S}, \mathbf{u})$ menjadi $\dot{\mathbf{S}}(\tau) = \frac{\mathbf{T}}{\mathbf{2}}\mathbf{f}(\mathbf{S}(\tau), \mathbf{u}(\tau))$.
Lalu $\mathbf{S}$ dan $\mathbf{U}$ diaproksimasi dengan interpolasi polinomial Langrange, yaitu

$$S(\tau) = \sum_{i=0}^{N} S_i \, \phi_i(\tau) \tag{1}$$

$$u(\tau) = \sum_{i=0}^{N} u_i \, \phi_i(\tau) \tag{2}$$

Dengan N adalah order polinomial dan $\phi_i$ adalah basis fungsi langrange.

$$\phi_i(\tau) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N} \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \tag{3}$$

Dari persamaan (1) diturunkan terhadap $\tau$, sehingga menjadi

$$\dot{S}(\tau) = \sum_{i=0}^{N} S_i \frac{d\phi_i(\tau)}{d\tau}$$

Lalu persamaan (3) terhadap $\tau$, sehingga menjadi

$$\phi_i'(\tau) = \phi_i(\tau) \sum_{j \neq i} \frac{1}{\tau - \tau_j}$$

Sehingga diperoleh

$$\dot{S}(\tau) = \sum_{i=0}^{N} S_i \phi_i(\tau) \left( \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N} \frac{1}{\tau_i - \tau_j} \right)$$

Untuk $k = 1, 2, \ldots, N$ pilih titik Chebyshev-Gauss-Lobatto sebagai titik interpolasi yang diberikan oleh

$$\tau_k = \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)$$

# Design NMPC

## Objective Function 1

$$J(k) = \sum_{i=1}^{N_p} \|\mathbf{h}_{\text{ref}}(k+i|k) - \mathbf{h}(k+i|k)\|^2_{Q_{(i)}} + \|\Delta\mathbf{u}(k+i-1|k)\|^2_{R_{(i)}}$$

dengan kendala

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}(k+i|k) &= \mathbf{f}_d\big(\mathbf{s}(k+i-1|k), \mathbf{u}(k+i-1|k)\big) \\
\mathbf{h}(k+i|k) &= \mathbf{C}\mathbf{s}(k+i|k) \\
\mathbf{s}_{\min} &\leq \mathbf{s}(k+i|k) \leq \mathbf{s}_{\max} \\
\mathbf{u}_{\min} &\leq \mathbf{u}(k+i-1|k) \leq \mathbf{u}_{\max} \\
\Delta\mathbf{u}_{\min} &\leq \Delta\mathbf{u}(k+i-1|k) \leq \Delta\mathbf{u}_{\max}
\end{aligned}$$

untuk $i = 1, 2, \ldots, N_p$. Dengan $\Delta\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1)$

### Dengan Chebysev

Karena $\Delta\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1)$ dapat diaproksimasi menjadi turunan $\mathbf{u}$ yaitu berdasarkan (2), diperoleh

$$u(\tau) = \sum_{i=0}^{N} u_i\,\phi_i(\tau), \qquad \tau \in [-1, 1].$$

Turunan terhadap waktu:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \frac{du}{dt} = \frac{2}{T}\frac{du}{d\tau} \\ \left.\frac{du}{d\tau}\right|_{\tau_k} &= \sum_{i=0}^{N} D_{ki} u_i, \end{aligned}$$

Sehingga fungsi tujuan menjadi:

$$J = \frac{T}{2}\sum_{k=0}^{N} w_k \left[ \|h(x_k) - h_d(\tau_k)\|_Q^2 + \left\| \frac{2}{T}\sum_{i=0}^{N} D_{ki} u_i \right\|_R^2 \right]$$

Dengan kendala

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N} D_{ki} s_i &= \frac{T}{2} f(S(\tau), u(\tau)) \\ h_k &= C s_k \\ s_{\min} \leq & s_k \leq s_{\max} \\ u_{\min} \leq & u_k \leq u_{\max} \\ \dot{u}_{\min} \leq \frac{2}{T} & \sum_{i=0}^{N} D_{ki} u_i \leq \dot{u}_{\max} \end{aligned}$$

untuk $k = 0, \ldots, N$. Untuk $N$ genap, $w_k$ adalah

$$w_0 = w_N = \frac{1}{N^2 - 1},$$

$$w_k = \frac{2}{N}\left[ \gamma(0, k) + \gamma\left(\frac{N}{2}, k\right) + 2\sum_{i=1}^{N/2-1} \gamma(i, k) \right],$$

untuk $k = 1, \ldots, N-1$, dan untuk $N$ ganjil adalah

$$w_0 = w_N = \frac{1}{N^2},$$

$$w_k = \frac{2}{N}\left[\gamma(0,k) + 2\sum_{i=1}^{(N-1)/2}\gamma(i,k)\right],$$

dengan

$$\gamma(i,k) = \frac{1}{1-4i^2}\cos\left(\frac{2\pi i k}{N}\right).$$

Dan $D_{ki}$ adalah evaluasi turunan pada titik kolokasi $\tau = \tau_k$ menghasilkan elemen dari matriks diferensiasi Chebyshev–Gauss–Lobatto (CGL):

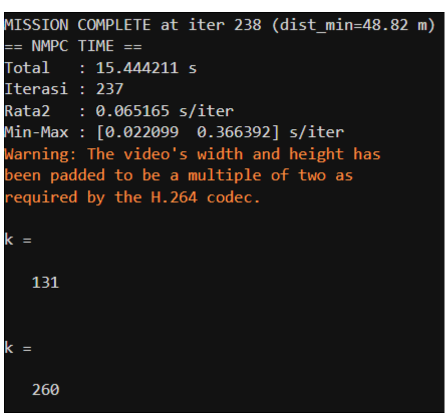
$$D_{ki} = \phi_i'(\tau_k) \tag{4}$$

Matriks diferensiasi $D_{ki}$ dapat dinyatakan secara eksplisit sebagai:

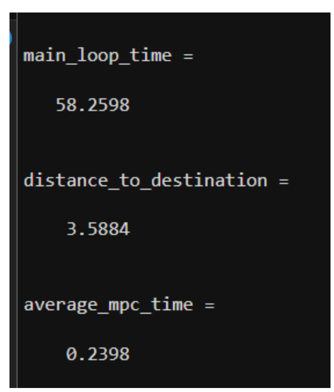
$$D_{ki} = \begin{cases} \dfrac{c_k}{c_i}\dfrac{(-1)^{k+i}}{\tau_k - \tau_i}, & k \neq i, \\ -\dfrac{\tau_k}{2(1-\tau_k^2)}, & 1 \leq k \leq N-1, \\ \dfrac{2N^2+1}{6}, & k = 0, \\ -\dfrac{2N^2+1}{6}, & k = N, \end{cases} \tag{5}$$

dengan $c_0 = c_N = 2$ dan $c_i = 1$ untuk $i = 1, 2, \ldots, N-1$.

## Simulasi NMPC dengan CASADI hasil ChatGPT




(a) Simulasi NMPC dengan Chebyshev




(b) Simulasi NMPC konvensional

Figure 1: Perbandingan hasil simulasi antara NMPC Chebyshev dan NMPC biasa.

## Catatan

N : Orde polinomial chebysev
i : indeks indeks titik basis Lagrange (atau node tempat state/variabel disimpan)
k : indeks titik kolokasi tempat turunan sistem dipaksakan berlaku

## Coret-Coret

Dengan $s = [\,v'\ r'\ \psi'\ x'\ y'\,]^\top$, kendali $u' = \delta'$, dan kecepatan surge konstan $u_0'$, model takliniernya:

$$\dot{s} = f(s, u') \equiv \begin{bmatrix} -0.6174\, v' - 0.1036\, r' + 0.01\, u' \\ -5.0967\, v' - 3.4047\, r' + u' \\ r' \\ u_0' \cos\psi' - v' \sin\psi' \\ u_0' \sin\psi' + v' \cos\psi' \end{bmatrix}.$$

Ambil titik CGL untuk $N = 4$ dan $T = 5$:

$$\tau_0 = 1, \quad \tau_1 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tau_2 = 0, \quad \tau_3 = -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tau_4 = -1,$$

dan tulis $S_i := S(\tau_i) = [\,v_i'\ r_i'\ \psi_i'\ x_i'\ y_i'\,]^\top$, $u_i' := u'(\tau_i)$.

**Persamaan kolokasi.** Untuk setiap $k = 0, \ldots, 4$ berlaku

$$\sum_{i=0}^{4} D_{ki}\, S_i \;=\; \frac{T}{2}\, f(S_k, u_k') \;=\; 5\, f(S_k, u_k'),$$

yang komponen–per–komponen menjadi

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{4} D_{ki}\, v_i' &= 5\Big( -0.6174\, v_k' - 0.1036\, r_k' + 0.01\, u_k' \Big), \\
\sum_{i=0}^{4} D_{ki}\, r_i' &= 5\Big( -5.0967\, v_k' - 3.4047\, r_k' + u_k' \Big), \\
\sum_{i=0}^{4} D_{ki}\, \psi_i' &= 5\, r_k', \\
\sum_{i=0}^{4} D_{ki}\, x_i' &= 5\Big( u_0' \cos\psi_k' - v_k' \sin\psi_k' \Big), \\
\sum_{i=0}^{4} D_{ki}\, y_i' &= 5\Big( u_0' \sin\psi_k' + v_k' \cos\psi_k' \Big).
\end{aligned}$$

**Matriks diferensiasi CGL ($N = 4$).**

$$D = \begin{bmatrix} 5.50000000 & -6.82842712 & 2.00000000 & -1.17157288 & 0.50000000 \\ 1.70710678 & -0.70710678 & -1.41421356 & 0.70710678 & -0.29289322 \\ -0.50000000 & 1.41421356 & 0.00000000 & -1.41421356 & 0.50000000 \\ 0.29289322 & -0.70710678 & 1.41421356 & 0.70710678 & -1.70710678 \\ -0.50000000 & 1.17157288 & -2.00000000 & 6.82842712 & -5.50000000 \end{bmatrix}.$$

maka persamaan menjadi

**(1) Komponen $v'$:**

$$\begin{aligned}
5.5v'_0 - 6.8284v'_1 + 2v'_2 - 1.1716v'_3 + 0.5v'_4 &= 5(-0.6174v'_0 - 0.1036r'_0 + 0.01u'_0),\\
1.7071v'_0 - 0.7071v'_1 - 1.4142v'_2 + 0.7071v'_3 - 0.2929v'_4 &= 5(-0.6174v'_1 - 0.1036r'_1 + 0.01u'_1),\\
-0.5v'_0 + 1.4142v'_1 - 1.4142v'_3 + 0.5v'_4 &= 5(-0.6174v'_2 - 0.1036r'_2 + 0.01u'_2),\\
0.2929v'_0 - 0.7071v'_1 + 1.4142v'_2 + 0.7071v'_3 - 1.7071v'_4 &= 5(-0.6174v'_3 - 0.1036r'_3 + 0.01u'_3),\\
-0.5v'_0 + 1.1716v'_1 - 2v'_2 + 6.8284v'_3 - 5.5v'_4 &= 5(-0.6174v'_4 - 0.1036r'_4 + 0.01u'_4).
\end{aligned}$$

**(2) Komponen $r'$:**

$$\begin{aligned}
5.5r'_0 - 6.8284r'_1 + 2r'_2 - 1.1716r'_3 + 0.5r'_4 &= 5(-5.0967v'_0 - 3.4047r'_0 + u'_0),\\
1.7071r'_0 - 0.7071r'_1 - 1.4142r'_2 + 0.7071r'_3 - 0.2929r'_4 &= 5(-5.0967v'_1 - 3.4047r'_1 + u'_1),\\
-0.5r'_0 + 1.4142r'_1 - 1.4142r'_3 + 0.5r'_4 &= 5(-5.0967v'_2 - 3.4047r'_2 + u'_2),\\
0.2929r'_0 - 0.7071r'_1 + 1.4142r'_2 + 0.7071r'_3 - 1.7071r'_4 &= 5(-5.0967v'_3 - 3.4047r'_3 + u'_3),\\
-0.5r'_0 + 1.1716r'_1 - 2r'_2 + 6.8284r'_3 - 5.5r'_4 &= 5(-5.0967v'_4 - 3.4047r'_4 + u'_4).
\end{aligned}$$

**(3) Komponen $\psi'$:**

$$\begin{aligned}
5.5\psi'_0 - 6.8284\psi'_1 + 2\psi'_2 - 1.1716\psi'_3 + 0.5\psi'_4 &= 5r'_0,\\
1.7071\psi'_0 - 0.7071\psi'_1 - 1.4142\psi'_2 + 0.7071\psi'_3 - 0.2929\psi'_4 &= 5r'_1,\\
-0.5\psi'_0 + 1.4142\psi'_1 - 1.4142\psi'_3 + 0.5\psi'_4 &= 5r'_2,\\
0.2929\psi'_0 - 0.7071\psi'_1 + 1.4142\psi'_2 + 0.7071\psi'_3 - 1.7071\psi'_4 &= 5r'_3,\\
-0.5\psi'_0 + 1.1716\psi'_1 - 2\psi'_2 + 6.8284\psi'_3 - 5.5\psi'_4 &= 5r'_4.
\end{aligned}$$

**(4) Komponen $x'$:**

$$\begin{aligned}
5.5x'_0 - 6.8284x'_1 + 2x'_2 - 1.1716x'_3 + 0.5x'_4 &= 5(u'_0\cos\psi'_0 - v'_0\sin\psi'_0),\\
1.7071x'_0 - 0.7071x'_1 - 1.4142x'_2 + 0.7071x'_3 - 0.2929x'_4 &= 5(u'_0\cos\psi'_1 - v'_1\sin\psi'_1),\\
-0.5x'_0 + 1.4142x'_1 - 1.4142x'_3 + 0.5x'_4 &= 5(u'_0\cos\psi'_2 - v'_2\sin\psi'_2),\\
0.2929x'_0 - 0.7071x'_1 + 1.4142x'_2 + 0.7071x'_3 - 1.7071x'_4 &= 5(u'_0\cos\psi'_3 - v'_3\sin\psi'_3),\\
-0.5x'_0 + 1.1716x'_1 - 2x'_2 + 6.8284x'_3 - 5.5x'_4 &= 5(u'_0\cos\psi'_4 - v'_4\sin\psi'_4).
\end{aligned}$$

**(5) Komponen $y'$:**

$$\begin{aligned}
5.5y'_0 - 6.8284y'_1 + 2y'_2 - 1.1716y'_3 + 0.5y'_4 &= 5(u'_0\sin\psi'_0 + v'_0\cos\psi'_0),\\
1.7071y'_0 - 0.7071y'_1 - 1.4142y'_2 + 0.7071y'_3 - 0.2929y'_4 &= 5(u'_0\sin\psi'_1 + v'_1\cos\psi'_1),\\
-0.5y'_0 + 1.4142y'_1 - 1.4142y'_3 + 0.5y'_4 &= 5(u'_0\sin\psi'_2 + v'_2\cos\psi'_2),\\
0.2929y'_0 - 0.7071y'_1 + 1.4142y'_2 + 0.7071y'_3 - 1.7071y'_4 &= 5(u'_0\sin\psi'_3 + v'_3\cos\psi'_3),\\
-0.5y'_0 + 1.1716y'_1 - 2y'_2 + 6.8284y'_3 - 5.5y'_4 &= 5(u'_0\sin\psi'_4 + v'_4\cos\psi'_4).
\end{aligned}$$

## Materi

## Chebyshev-Gauss-Lobatto (CGL)

CGL adalah sekumpulan titik kolokasi (collocation points) yang digunakan dalam metode pseudospectral untuk mendiskritisasi fungsi kontinu menjadi bentuk polinomial berderajat N. CGL merupakan special case dari titik Chebyshev-Gauss (CG), tetapi dengan tambahan dua titik batas $(-1, 1)$ sehingga domainnya lengkap di interval $[-1, 1]$. Titik ini didefinisikan sebagai:

$$\tau_k = \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)$$

Note:

1. Titik kolokasi adalah sekumpulan titik diskrit di sepanjang domain waktu atau ruang tempat persamaan diferensial sistem dipaksakan berlaku secara eksak
2. Metode pseudospectral adalah metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial atau masalah kontrol optimal dengan cara:
   (a) Mengaproksimasi fungsi keadaan dan kontrol menggunakan polinomial ortogonal orde tinggi (seperti Chebyshev atau Legendre)
   (b) Menentukan turunan dan integralnya hanya di titik-titik kolokasi (biasanya titik-titik Chebyshev–Gauss–Lobatto atau Legendre–Gauss–Lobatto)

## Pembukatian $D_{ki}$

Kita mulai dari definisi fungsi basis Lagrange untuk titik-titik kolokasi $\{\tau_j\}_{j=0}^N$:

$$\phi_i(\tau) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{N} \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}, \qquad \phi_i(\tau_k) = \delta_{ik}. \tag{6}$$

Turunan terhadap $\tau$ diberikan oleh

$$\phi_i'(\tau) = \phi_i(\tau) \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{N} \frac{1}{\tau - \tau_j}. \tag{7}$$

Evaluasi pada titik kolokasi $\tau = \tau_k$ memberikan elemen matriks diferensiasi:

$$D_{ki} = \phi_i'(\tau_k). \tag{8}$$

## Bentuk Umum dengan Bobot Barisentris

Untuk sebarang himpunan titik kolokasi, definisikan bobot barisentris sebagai:

$$w_i = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^{N} (\tau_i - \tau_m)}. \tag{9}$$

Dengan bobot tersebut, turunan fungsi basis pada titik-titik kolokasi dapat dinyatakan sebagai

$$D_{ki} = \begin{cases} \dfrac{w_i}{w_k} \dfrac{1}{\tau_k - \tau_i}, & k \neq i, \\ -\sum\limits_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{N} D_{km}, & k = i. \end{cases} \tag{10}$$

## Khusus untuk Titik Chebyshev–Gauss–Lobatto (CGL)

Untuk titik-titik Chebyshev-Gauss-Lobatto yang didefinisikan sebagai

$$\tau_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right), \qquad j = 0, 1, \ldots, N, \tag{11}$$

bobot barisentrisnya memiliki bentuk proporsional sebagai berikut:

$$w_j \propto (-1)^j \, c_j, \qquad c_0 = c_N = \tfrac{1}{2}, \quad c_j = 1 \text{ untuk } j = 1, \ldots, N-1. \tag{12}$$

Substitusi ke dalam Persamaan (10) menghasilkan

$$\boxed{D_{ki} = \frac{c_k}{c_i} \frac{(-1)^{k+i}}{\tau_k - \tau_i}, \qquad k \neq i.} \tag{13}$$

Untuk elemen diagonal diperoleh dengan memanfaatkan sifat baris-jumlah-nol $\sum_{m=0}^{N} D_{km} = 0$, sehingga

$$D_{kk} = -\sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{N} D_{km}. \tag{14}$$

Setelah disederhanakan menggunakan identitas trigonometri $\tau_k = \cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)$, bentuk eksplisitnya adalah

$$\boxed{D_{kk} = \begin{cases} -\dfrac{\tau_k}{2(1 - \tau_k^2)}, & 1 \leq k \leq N-1, \\ \dfrac{2N^2 + 1}{6}, & k = 0, \\ -\dfrac{2N^2 + 1}{6}, & k = N. \end{cases}} \tag{15}$$

## Hasil Akhir

Maka, matriks diferensiasi Chebyshev–Gauss–Lobatto dapat dinyatakan secara lengkap sebagai:

$$\boxed{D_{ki} = \begin{cases} \dfrac{c_k}{c_i} \dfrac{(-1)^{k+i}}{\tau_k - \tau_i}, & k \neq i, \\ -\dfrac{\tau_k}{2(1-\tau_k^2)}, & 1 \leq k \leq N-1, \\ \dfrac{2N^2+1}{6}, & k = 0, \\ -\dfrac{2N^2+1}{6}, & k = N. \end{cases}} \tag{16}$$

Bentuk inilah yang digunakan sebagai *differentiation matrix* $D_{ki}$ dalam metode *Chebyshev pseudospectral*, yang merepresentasikan turunan fungsi kontinu terhadap variabel $\tau$ pada titik-titik kolokasi $\tau_k \in [-1, 1]$.