



CURSO DE SISTEMAS DE INFORMAÇÃO

**ANÁLISE DE MÉTODOS ESCALARES APLICADOS A
PROBLEMAS MULTIOBJETIVOS**

ANTÔNIO MAGNO PEREIRA CORREIA

Palmas

2017



CURSO DE SISTEMAS DE INFORMAÇÃO

ANÁLISE DE MÉTODOS ESCALARES APLICADOS A PROBLEMAS MULTIOBJETIVOS

ANTÔNIO MAGNO PEREIRA CORREIA

Projeto apresentado ao Curso de Sistemas de Informação da Fundação Universidade do Tocantins - UNITINS como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Bacharel em Sistemas de Informação, sob a orientação do professor Me. Douglas Chagas.

Palmas

2017



CURSO DE SISTEMAS DE INFORMAÇÃO

ANÁLISE DE MÉTODOS ESCALARES APLICADOS A PROBLEMAS MULTIOBJETIVOS

ANTÔNIO MAGNO PEREIRA CORREIA

Projeto apresentado ao Curso de Sistemas de Informação da Fundação Universidade do Tocantins - UNITINS como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Bacharel em Sistemas de Informação, sob a orientação do professor Me. Douglas Chagas.

Prof. Me. Douglas Chagas da Silva
Orientador

Prof. Me. Paulo Vitoriano
Professor

Prof. Me. Marco Antônio Firmino
Professor

Palmas
2017

Este trabalho é dedicado à minha família, pelo apoio incondicional.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, pelo dom da vida.

Agradeço muito aos meus pais que sempre me incentivaram e acreditaram em mim. À minha família que com seu afeto me deu suporte para encarar todas as dificuldades que surgiram em meu caminho.

Ao meu orientador Douglas Chagas, pela oportunidade impar de aprendizado, pela sua paciência, sabedoria e incentivo durante todo esse processo.

Aos meus amigos de jornada, que mesmo longe me deram valorosos conselhos.

Muito obrigado!

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

Resumo

Em problemas de otimização na maioria das situações é necessário minimizar ou maximizar não apenas um objetivo, mas vários, que geralmente são conflitantes. Tais problemas são chamados de *Problemas de Otimização Multiobjetivo* e demandam a utilização de métodos e técnicas de otimização para que sejam encontradas as possíveis soluções para tais problemas. Neste trabalho são estudados os conceitos de otimização multiobjetivo e alguns métodos clássicos existentes, que são baseados em escalonar as funções, onde todos os objetivos são transformados em uma única função escalar. Para avaliar a eficácia destes métodos são utilizadas funções de *benchmark*. Apresenta-se ainda uma análise estatística detalhada para cada solução dos problemas avaliados. Os resultados apontam para a viabilidade da aplicação destes métodos para o conjunto de problemas multiobjetivos estudados.

Palavras-chaves: Otimização Multiobjetivo, Métodos Escalares, Funções de *Benchmark*, Múltiplas comparações.

Abstract

In optimization problems in most situations is necessary to minimize or maximize not only a goal, but several, which are often conflicting. These problems are called Multiobjective Optimization Problems and require the use of optimization methods and techniques to find the possible solutions. In this work we study the concepts of multiobjective optimization and some existing classical methods, which are based on scalar functions, where all the objectives are transformed into a single scalar function. Benchmark functions are used to evaluate the effectiveness of these methods. A detailed statistical analysis is also presented for each solution of the evaluated problems. The results point to the feasibility of applying these methods to the set of multiobjective problems studied.

Key-words:Multiobjective optimization, scalar methods,*Benchmarking*, multiple comparisons.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Opções de compra de carro (1-5) considerando o custo e conforto . . .	17
Figura 2 – Exemplos relações de dominância entre soluções no espaço objetivo (ALMEIDA, 2012)	18
Figura 3 – Frente de Pareto Global e local (FIGUEIREDO, 2013)	19
Figura 4 – Métodos de otimização: abordagem a priori.	20
Figura 5 – Métodos de otimização: abordagem interativa.	21
Figura 6 – Métodos de otimização: abordagem a-posteriori.	21
Figura 7 – Interpretação geométrica do método da soma ponderada: espaço convexo.	24
Figura 8 – Interpretação gráfica do método da soma ponderada: efeitos indesejados quando algum dos pesos é nulo.	24
Figura 9 – Interpretação gráfica do método da soma ponderada: espaço não convexo.	25
Figura 10 – Método ε – <i>restrito</i>	26
Figura 11 – Representação das distâncias L_p	27
Figura 12 – Descoberta de soluções ótimas com o método da distância a um objetivo de referência utilizando métricas L_∞	28
Figura 13 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema ZDT1.	29
Figura 14 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema ZDT2.	30
Figura 15 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema ZDT3.	30
Figura 16 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema ZDT4.	31
Figura 17 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema ZDT5.	32
Figura 18 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema ZDT6.	32
Figura 19 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema DTLZ1.	34
Figura 20 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema DTLZ2.	35
Figura 21 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema DTLZ5.	36
Figura 22 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema DTLZ6.	37
Figura 23 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema DTLZ7.	38
Figura 24 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema DTLZ8.	39
Figura 25 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema DTLZ9.	39
Figura 26 – Resultados dos métodos com o problema ZDT1	47
Figura 27 – Resultados dos métodos com o problema ZDT3	49
Figura 28 – Resultados dos métodos com o problema DTLZ2	52
Figura 29 – Resultados dos métodos com o problema DTLZ7	55

Lista de tabelas

Tabela 1 – Dominância - relações possíveis entre soluções x,y (ALMEIDA, 2012). .	18
Tabela 2 – Médias dos resultados para o Problema ZDT1	44
Tabela 3 – Dados estatísticos para o Problema ZDT1	46
Tabela 4 – Médias dos resultados para o Problema ZDT3	47
Tabela 5 – Dados estatísticos para o Problema ZDT3	50
Tabela 6 – Médias dos resultados para o Problema DTLZ2	50
Tabela 7 – Dados estatísticos para o Problema DTLZ2	53
Tabela 8 – Médias dos resultados para o Problema DTLZ7	53
Tabela 9 – Dados estatísticos para o Problema DTLZ7	56
Tabela 10 – Análise de variância das médias encontradas	57
Tabela 11 – Resultado do teste de múltiplas comparações de médias de Tukey. . . .	58

Lista de abreviaturas e siglas

POM - Problema de Otimização Multiobjetivo.

χ - Vetor de decisão.

S - Espaço de busca.

Ω - Conjunto factível

δ - Conjunto imagem de Ω

PF^* - Frente de Pareto Global

PF^l - Frente de Pareto Local

WP - Método da Soma Ponderada

EC - Método ε -restrito

CP - Método da distância a um objetivo de referência.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Motivação	13
1.2	Objetivos	14
1.2.1	Objetivo Geral	14
1.2.2	Objetivos Específicos	14
2	REFERENCIAL TEÓRICO	15
2.1	Formulação Geral do Problema de Otimização Multi-objetivo	15
2.2	Dominância de Pareto	17
2.3	Classificação dos Métodos de Otimização Multiobjetivo	19
2.4	Métodos Otimização Multiobjetivo	22
2.4.1	Métodos escalares de Otimização Multiobjetivo	22
2.4.1.1	Método da soma ponderada	22
2.4.1.2	Método $\varepsilon - \text{restrito}$	25
2.4.1.3	Método da distância a um objetivo de referência	26
2.5	Funções de Benchmark para problemas de otimização	27
2.5.1	Conjunto de Problemas ZDT	28
2.5.1.1	Problema ZDT1	29
2.5.1.2	Problema ZDT2	29
2.5.1.3	Problema ZDT3	30
2.5.1.4	Problema ZDT4	31
2.5.1.5	Problema ZDT5	31
2.5.1.6	Problema ZDT6	32
2.5.2	Conjunto de Funções DTLZ	33
2.5.2.1	Problema DTLZ1	33
2.5.2.2	Problema DTLZ2	34
2.5.2.3	Problema DTLZ3	34
2.5.2.4	Problema DTLZ4	35
2.5.2.5	Problema DTLZ5	36
2.5.2.6	Problema DTLZ6	37
2.5.2.7	Problema DTLZ7	37
2.5.2.8	Problema DTLZ8	38
2.5.2.9	Problema DTLZ9	38
3	METODOLOGIA	40
3.1	Materiais	40

3.2	Implementação dos métodos	40
3.2.1	Pseudocódigos	41
4	RESULTADOS	44
4.1	Introdução	44
4.2	Análise Descritiva	44
4.2.1	Problema ZDT1	44
4.2.2	Problema ZDT3	47
4.2.3	Problema DTLZ2	50
4.2.4	Problema DTLZ7	53
4.3	Análise Estatística	56
4.3.1	Análise de Variância	56
4.3.2	Teste de Tukey	57
5	CONCLUSÃO	59
5.1	Trabalhos Futuros	60
	REFERÊNCIAS	61

1 Introdução

O processo de otimização está presente em todas as áreas de conhecimento (FIGUEIREDO, 2013) e dentre outros significados, envolve realizar qualquer tarefa do modo mais eficiente possível, podendo ser realizada de muitas maneiras, conforme o tipo de tarefa. Castro (2001) ilustra que no dia a dia realizamos várias tarefas de otimização, seja no campo doméstico ou profissional: buscamos diminuir o tempo gasto na manutenção de um jardim, tentamos aumentar a velocidade do processamento de um chip, ou tentamos reduzir os custos de uma obra de engenharia, dentre outros exemplos. Pode-se dizer então que o processo de otimização envolve a pesquisa da melhor opção, que faça melhor uso dos recursos disponíveis dentre as possíveis soluções fornecidas.

Se consideramos por exemplo uma tarefa de comprar um carro novo, que seja o mais barato, estamos diante da chamada *otimização mono-objetivo*, pois a meta é uma só: adquirir um bem ao menor custo. Por outro lado, se desejarmos comprar o carro mais barato que tenha um mínimo de conforto em relação às demais opções, temos dois objetivos que devem ser considerados, custo e conforto, e para tais tipos de problemas há a chamada *otimização multiobjetivo*.

No que tange aos problemas de otimização mono-objetivo, há trabalhos acadêmicos que exploram os diversos métodos, na busca de encontrar o mais eficiente, por exemplo em (SAMPAIO, 2011; JÚNIOR, 2011; MARTINS, 2017), são comparados o desempenho de algoritmos evolucionários, que se baseiam nos conceitos da teoria da evolução das espécies de Charles Darwin (DARWIN, 1859).

Este trabalho, por outro lado, explora os métodos clássicos de otimização multi-objetivo, e está estruturado da seguinte forma: no Capítulo 2 é apresentada uma breve explicação sobre o problema de otimização multiobjetivo, dos métodos clássicos e as principais famílias de teste, que se propõe a avaliar a qualidade dos algoritmos de otimização. No capítulo 3 são apresentados os materiais utilizados e pseudocódigos dos métodos implementados e as particularidades de cada algoritmo. No capítulo 4 os resultados são discutidos, e por fim, têm-se as considerações finais no capítulo 5.

1.1 Motivação

A literatura que trata da pesquisa de métodos de otimização multiobjetivo costumeiramente faz referência à abordagem clássica, mas geralmente não apresenta testes que demonstrem seu desempenho, como pode ser visto em (ARROYO, 2002; BARDANA-CHVILI, 2006; FIGUEIREDO, 2013). Aparentemente a citação se dá apenas para fins

didáticos, sendo os testes desenvolvidos com métodos evolutivos (estocásticos). Segundo [Oliveira \(2005\)](#) os métodos clássicos de otimização (determinísticos) possuem limitações para a resolução de problemas com características descontínuas e multimodais, e neste trabalho pretende-se investigar o funcionamento de tais métodos e comprovar ou não sua eficácia.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Avaliar a aplicação de métodos escalares na resolução de problemas multiobjetivos utilizando funções de benchmark.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Estudar os conceitos envolvendo a resolução de problemas multiobjetivos;
- Entender o funcionamento das funções de benchmark utilizadas pelos algoritmos;
- Implementar e ajustar os métodos escalares desenvolvidos;
- Avaliar o desempenho dos algoritmos para o conjunto de funções de teste;
- Analisar e discutir os resultados dos testes.

2 Referencial Teórico

O processo de otimização consiste em encontrar e comparar soluções ótimas para um problema, até que não se encontre melhor solução (DEB, 2011).

Um problema de otimização é composto de funções objetivo que buscam minimizar ou maximizar seu resultado, tendo como parâmetros um vetor de variáveis de decisão e funções de restrição, que podem estar ou não presentes no sistema (ALMEIDA, 2012).

Entende-se como problema de minimização, quando dada uma função f desejamos encontrar $s^* \in S | f(s^*) \leq f(s), \forall s \in S$, ou seja o menor valor possível. Se o objetivo for encontrar $s^* \in S | f(s^*) \geq f(s), \forall s \in S$, temos um problema de maximização. (BECCENERI, 2012).

Quando o problema possui apenas um objetivo a ser otimizado temos a chamada otimização mono-objetivo (BARBOSA, 2012), sendo objeto de vários estudos, como por exemplo (MARTINS, 2017). Ocorre que geralmente temos problemas mais complexos, com mais de um objetivo geralmente conflitantes, onde não há uma solução ótima, mas um conjunto de soluções ótimas. Tais problemas são chamados de Problema de Otimização Multi-objetivo (DEB, 2011).

2.1 Formulação Geral do Problema de Otimização Multi-objetivo

Um problema de otimização multiobjetivo, ou POM, é composto de um conjunto de m funções objetivo que serão otimizadas utilizando um vetor de n variáveis de decisão, respeitando um conjunto de restrições para o problema (FIGUEIREDO, 2013). A fórmula geral é:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimizar ou maximizar} & y = f_m(\chi), \quad m = 1, 2 \dots T \\ \text{sujeito a} & g_j(\chi) \leq 0, \quad j = 1, 2 \dots J; \\ & h_k(\chi) = 0 \quad k = 1, 2 \dots K; \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

onde ,

- $\chi = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in S \subset \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de decisão, denominado *vetor de decisão*;
- $f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, T$ são as funções objetivo.

- $g_j, h_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são as inequações e equações que modelam as restrições do sistema. Elas determinam o conjunto de requisitos que o sistema deve obter para ser admissível enquanto solução.
- $y = f(x) \forall x \in \mathbb{R}^m$ é o vetor objetivo.
- o conjunto \mathbb{R}^n é chamado de espaço de variáveis de decisão ou espaço de decisão;
- \mathbb{R}^m é o *espaço objetivo*.
- $S \subset \mathbb{R}^n$ é o *espaço de busca* que corresponde ao conjunto de possíveis soluções para o problema.
- Ω é o conjunto factível, definido como o conjunto dos vetores de decisão X que satisfazem as restrições g_j, h_k . Formalmente temos:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) \leq 0 \text{ e } h(x) = 0\}$$

- σ é o conjunto imagem de Ω , denominado *espaço objetivo factível* denotado por (JÚNIOR, 2011):

$$\sigma = f(\Omega) = f(x) | x \in \Omega$$

Os autores Deb (2011) e Ticona (2008), apresentam ainda mais uma restrição, na forma de limites laterais para x , complementando a definição de um POM:

$$x_i^{(inf)} \leq x_i \leq x_i^{(sup)}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (2.2)$$

Na formulação geral do problema, admite-se que cada função objetivo pode ser maximizada ou minimizada, na busca da melhor solução de compromisso. Pode-se procurar: a) Minimizar todas as funções objetivo, b) Maximizar todas as funções objetivo ou c) Minimizar algumas e maximizar outras. (OLIVEIRA, 2005)

Por conveniência, (OLIVEIRA, 2005; BARDANACHVILI, 2006; ALMEIDA, 2012), recomendam que todas as funções de maximização sejam convertidas em minimização, utilizando o princípio da dualidade, multiplicando-as por (-1).

Considerando os conceitos apresentados, o problema 2.1 pode ser escrito como (ARROYO, 2002):

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimizar} & y = f_m(x), \quad m = 1, 2, \dots, T \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

2.2 Dominância de Pareto

O processo de tomada de decisões consiste em avaliar vários fatores, com o objetivo de encontrar a melhor solução. Em alguns casos, podem aparecer várias soluções boas, das quais nenhuma pode ser necessariamente melhor que a outra. Quando são considerados vários objetivos, muitas vezes conflitantes entre si, não existe uma única solução que seja ótima com respeito a todos os objetivos. Desta forma, em um problema de minimização, minimizar um dos objetivos pode causar a maximização de outros (ARROYO, 2002).

Uma função objetivo f_1 conflita com outra função f_2 quando ao melhorar o valor da primeira há piora no valor da segunda. Um exemplo prático de objetivos conflitantes dado por Ticona (2008) é a tarefa de decidir qual modelo de carro comprar considerando-se o preço e o conforto, conforme ilustrado na figura 1: o objetivo é comprar o carro mais confortável com o menor preço, isto é minimizar o custo e maximizar o conforto.

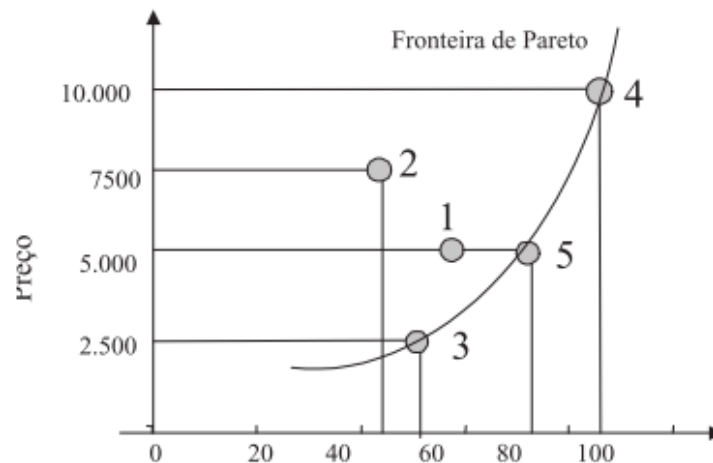


Figura 1 – Opções de compra de carro (1-5) considerando o custo e conforto (TICONA, 2008)

Para comparar duas soluções factíveis emprega-se o conceito de *dominância de Pareto*, que visa indicar a qualidade de uma solução em relação à outra (CORDEIRO, 2008).

Considerando um problema de minimização com T funções objetivo, uma solução x domina outra solução y (algebricamente $x \prec y$) se x é pelo menos igual a y em todas as funções objetivo e for superior a y em pelo menos uma das funções objetivo (ALMEIDA, 2012). Quando não é possível definir qual função domina a outra, temos soluções indiferentes ou incomparáveis. A Tabela 1 apresenta as relações possíveis de dominância.

Analisando o gráfico ilustrado na Figura 1, aplicando os conceitos de dominância, é possível perceber que as soluções 1 e 2 são dominadas pela solução 5, que oferece mais conforto pelo menor preço e a opção 3 domina a solução 2, pois oferece mais conforto

Tabela 1 – Dominância - relações possíveis entre soluções x, y (ALMEIDA, 2012).

Relação	Simbologia	Interpretação no espaço dos objetivos
domina fortemente	$x \prec\prec y$	x é melhor que y em todos os objetivos, ou seja, $\forall i \mid 0 < i \leq T \Rightarrow f_i(x) < f_i(y)$
domina	$x \prec y$	x não é pior que y em todos os objetivos e é melhor em ao menos um, ou seja, $\forall i \mid 0 < i \leq T \Rightarrow f_i(x) \leq f_i(y) \wedge \exists k \mid 0 < k \leq T \Rightarrow f_k(x) < f_k(y)$
domina fracamente	$x \preceq y$	x não é pior que y em nenhum objetivos, ou seja, $\forall i \mid 0 < i \leq T \Rightarrow f_i(x) \leq f_i(y)$
incomparáveis	$x \parallel y$	nem $x \preceq y$ e nem $y \preceq x$
indiferentes	$x \sim y$	x é igual a y em todos os objetivos, ou seja, $\forall i \mid 0 < i \leq T \Rightarrow f_i(x) = f_i(y)$

a um custo bem menor. Restam 3 opções de escolha (3,4,5) não dominadas, todas boas alternativas de compra, pois em termos quantitativos nenhuma é melhor que a outra, existindo um "compromisso" entre os objetivos; quanto maior o conforto maior o preço e vice-versa. A figura 2 apresenta as relações de dominância entre as soluções no espaço objetivo.

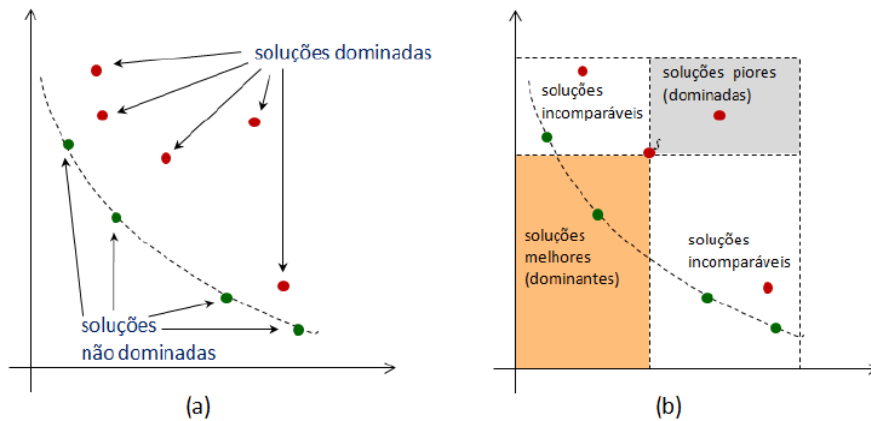


Figura 2 – Exemplos relações de dominância entre soluções no espaço objetivo (ALMEIDA, 2012)

Estabelecidos os conceitos de dominância (FIGUEIREDO, 2013) apresenta algumas definições importantes:

- **Ótimo de pareto:** Uma solução $x^* \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dita solução eficiente, ou solução Pareto-ótima, se, e somente se, $\nexists x \in \Omega$ tal que $f(x) \prec f(x^*)$.
- **Conjunto Pareto-ótimo:** É o conjunto de todas as soluções ótimas de pareto, definido por: $\Omega^* = \{x \in \Omega \mid x \text{ é Pareto - ótimo}\}$

- **Frente de Pareto Global** ou simplesmente Frente de Pareto, demonstrada na Figura 3 é definida por :

$$PF^* = \{f(x) \in \mathbb{R}^m | x \in \Omega^*\}$$

- **Conjunto Pareto-ótimo local:** É o conjunto Ω' se e somente se

$$\forall x' \in \Omega' : \nexists x \in \Omega : x \prec x' \wedge \|x - x'\| < \varepsilon \wedge \|f(x) - f(x')\| < \delta$$

, onde $\|\cdot\|$ é uma métrica de distância e $\varepsilon > 0, \delta > 0$ (ZITZLER, 1999).

- **Frente de Pareto Local:** É um conjunto correspondente a um Conjunto Pareto-ótimo local Ω' dado por:

$$PF' = \{f(x) \in \mathbb{R}^m | x \in \Omega'\}$$

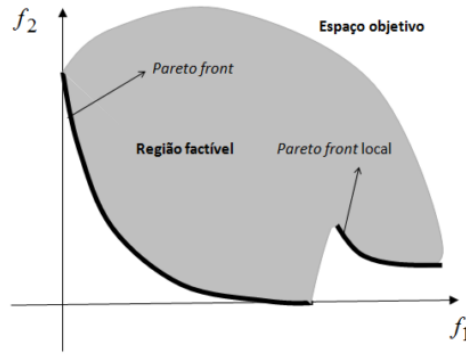


Figura 3 – Frente de Pareto Global e local (FIGUEIREDO, 2013)

2.3 Classificação dos Métodos de Otimização Multiobjetivo

Na otimização multiobjetivo, encontrar soluções viáveis que otimizem todos os objetivos é um grande desafio (JÚNIOR, 2011), onde encontramos dois problemas: busca de soluções e tomada de decisões.

A busca de soluções refere-se ao processo de otimização no qual o conjunto de soluções factíveis são mapeados para o encontro de soluções Pareto-ótimas.

Na literatura há diferentes formas de classificação para os métodos de resolução de um POM, como pode ser observado em (ARROYO, 2002; SAMPAIO, 2011). Neste trabalho destacamos a classificação baseada na interferência do agente de decisão:

- **Métodos a-priori:** com a tomada de decisão antes da busca;
- **Métodos interativos,** com a tomada de decisão durante a busca.
- **Métodos geradores ou a-posteriori,** com a tomada de decisão depois da busca;

Métodos a-priori

São métodos caracterizados pela participação do decisor antes do processo de busca de soluções, como demonstrado na Figura 4; neles o decisor atribui elementos de preferência através de duas abordagens possíveis (JÚNIOR, 2011).

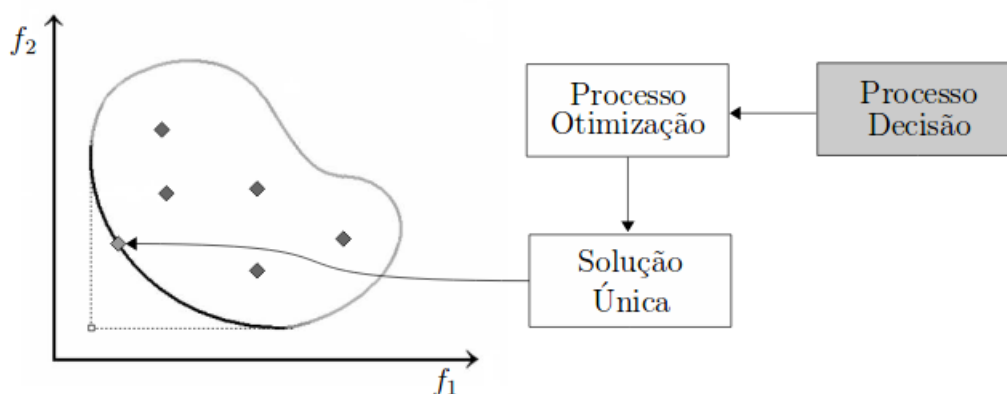


Figura 4 – Métodos de otimização: abordagem a priori.
(RAMPAZZO, 2012)

Na primeira abordagem, os objetivos são combinados em um único objetivo, através da associação de pesos, para refletir a preferência do decisor em cada objetivo.

Na segunda abordagem, os objetivos são classificados pela ordem de prioridade. Após a ordenação o primeiro objetivo é resolvido, desconsiderando os demais. Na sequência o segundo objetivo é resolvido sujeito ao valor ótimo encontrado para o primeiro, e assim repete-se o processo sucessivamente até que se esgotem todos os objetivos (ARROYO, 2002).

Estes métodos possuem a desvantagem de que as características desejáveis de uma solução raramente são conhecidas a priori. São exemplos de métodos a priori: Método Lexicográfico, Método das Limitantes e Método da realização das metas (RAMPAZZO, 2012)

Métodos interativos

São os métodos onde há interferência do decisor durante o processo de busca de soluções, que visam nortear a busca na direção das regiões onde existam soluções relevantes (JÚNIOR, 2011). Compreendem duas fases: cálculo, onde são encontradas as soluções eficientes, e diálogo, onde o decisor expressa suas preferências (ANTUNES; ALVES, 2012). Para (RAMPAZZO, 2012) tais métodos são mais elaborados, pois o decisor ajusta suas preferências ao mesmo tempo que aprende sobre o problema a ser resolvido. A Figura 5 exemplifica o processo.

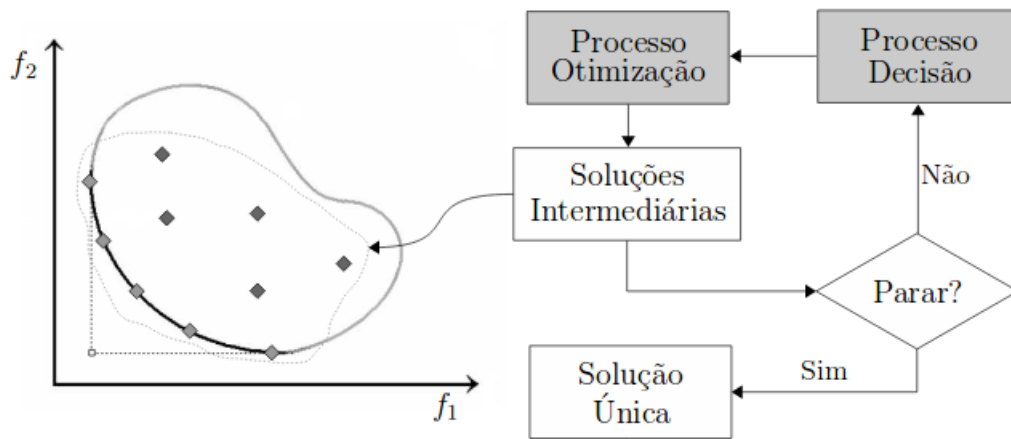


Figura 5 – Métodos de otimização: abordagem iterativa.
(RAMPAZZO, 2012)

Enquadram-se como métodos iterativos o método de Geoffrion, Dyer e Feinberg e o método STEM (RAMPAZZO, 2012).

Métodos a-posteriori

Para este método todos os objetivos possuem a mesma relevância, pois a tomada de decisão é feita após a realização da busca de soluções Pareto-ótimas. Nesse caso, para Arroyo (2002) e Rampazzo (2012), fica sob responsabilidade do decisor a tarefa de selecionar a solução de compromisso mais adequada ao problema estudado, como exemplificado na Figura 6.

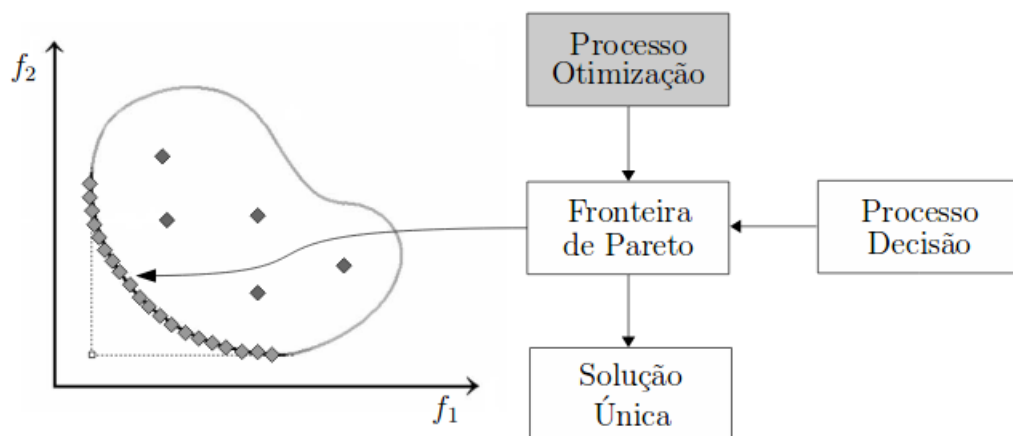


Figura 6 – Métodos de otimização: abordagem a-posteriori.
(RAMPAZZO, 2012)

Nesta classificação podemos destacar: Método da Soma Ponderada, Método ε -restrito, Método da Distância a um objetivo de referência, e os Algoritmos Evolutivos (RAMPAZZO, 2012).

2.4 Métodos Otimização Multiobjetivo

Para a solução dos problemas de otimização multiobjetivo há algumas abordagens possíveis no que diz respeito à codificação dos algoritmos tais como:

- Métodos Clássicos.
- Métodos Evolucionários.

Os métodos clássicos, também chamados de métodos escalares, têm como característica a conversão de um várias funções objetivo em apenas uma função de modo que o problema seja resolvido como um problema de otimização uniobjetivo (BARDANACHVILI, 2006). Nestes métodos são necessárias várias iterações com alteração de parâmetros para que se possa obter um conjunto de soluções ótimas. Alguns destes métodos são detalhados na Seção 2.4.1.

Os Métodos Evolucionários são baseados na teoria da evolução das espécies (DARWIN, 1859; ARROYO, 2002), e operam sob dois princípios básicos: *seleção* e *evolução* (FORMIGA, 2005). São métodos muito eficientes e apropriados a problemas complexos e apresentam várias vantagens em relação aos métodos clássicos, tais como o uso da computação paralela (BARDANACHVILI, 2006). Tais métodos são amplamente explorados em (ARROYO, 2002; RAMPAZZO, 2012; OLIVEIRA, 2005) e não serão estudados neste trabalho.

2.4.1 Métodos escalares de Otimização Multiobjetivo

Objetivos conflitantes representam uma grande dificuldade em um problema de otimização multiobjetivo (ARROYO, 2002), e para buscar resolver esse conflito existem vários métodos multiobjetivos clássicos para a busca de soluções Pareto-ótimas (FORMIGA, 2005), que funcionam acrescentando prioridades aos objetivos (JÚNIOR, 2011). Dentre vários métodos existentes três foram selecionados para este estudo:

- Método da Soma Ponderada.
- Método ε -restrito.
- Método da distância a um objetivo de referência.

2.4.1.1 Método da soma ponderada

O método da soma ponderada é considerado por Arroyo (2002) o mais simples dos métodos clássicos e consiste em transformar um problema multiobjetivo em um

problema escalar mono-objetivo, onde os objetivos são combinadas em uma única função, acrescentando pesos diferentes para cada objetivo.

Sob o ponto de vista do decisor, o método da soma ponderada classifica-se como a-posteriori, mas pode trabalhar também como um método à-priori (SAMPAIO, 2011); tudo gira em torno da escolha dos pesos, se são escolhidos antecipadamente pelo decisor ou se são definidos de modo automático pelo algoritmo a ser executado. Pode-se dizer que o fluxo de informação é que define a classificação do método.

Para que o método tenha êxito na busca de soluções eficientes, é necessário que os pesos sejam devidamente normalizados para cada função objetivo. Como exemplo (FILHO, 2016) apresenta um problema com dois objetivos onde uma função-objetivo busca a minimização do custo de produção, na ordem de R\$ 10^6 e a outra busca reduzir o desperdício que varia no intervalo de $[10^{-3}, 10^{-2}]m^2$; para colocá-las na mesma ordem de grandeza, a primeira pode ser multiplicada por 10^{-6} e a segunda por 10.

Uma vez que os pesos para cada objetivo estejam devidamente normalizados temos um POM transformado em uma sequência de problemas mono-objetivo, dado pela seguinte equação:

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimizar} \quad \sum_{m=1}^T w_m f_m(x), \\ \text{sujeito a} \quad x \in \Omega \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

onde, $w_m \in [0, 1]$ é o peso que representa a importância relativa do objetivo f_m em relação aos outros. Na prática os pesos são escolhidos tal que a soma seja igual a 1 (DEB, 1999), ou seja:

$$\sum_{m=1}^T w_m = 1$$

Observadas as restrições impostas pelo sistema, cada solução ótima do problema 2.4 é considerada uma solução ótima para o POM. Se os pesos forem escolhidos à priori, a solução ótima será também a melhor solução para o POM (SAMPAIO, 2011).

Para representar melhor o funcionamento do método, consideremos um POM de dois objetivos, onde aplicando a equação 2.4 temos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimizar} \quad y = w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x), \\ \text{sujeito a} \quad x \in \Omega \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

que pode ser escrita como:

$$f_2(x) = -\frac{w_1}{w_2} f_1(x) + \frac{y}{w_2},$$

que define uma reta L de inclinação $-\frac{w_1}{w_2}$ que intersecta o eixo de f_2 em $\frac{y}{w_2}$. Essa reta é tangente ao espaço factível σ em um ponto Pareto-ótimo (ZITZLER, 1999), como pode ser observado na Figura 7; o método da soma ponderada consiste, portanto, em gerar retas suportes que se deslocam conforme o peso dado para cada objetivo.

À medida que os pesos w_1 e w_2 variam, as retas passam a ter inclinações diferentes e outras soluções eficientes podem ser obtidas (FILHO, 2016).

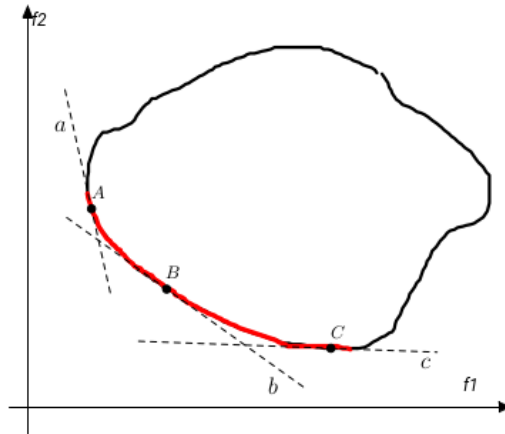


Figura 7 – Interpretação geométrica do método da soma ponderada: espaço convexo. (FILHO, 2016)

Quando um ou mais pesos são iguais a zero pode ocorrer a detecção de soluções não eficientes para o problema, pois a eficiência do método só é garantida com $w_m > 0$ para todo $m \in 1, \dots, T$. A Figura 8 apresenta uma situação onde um dos pesos é 0, fazendo com que a reta não tenha inclinação tornando-se paralela ao eixo de f_1 . Se o espaço objetivo tiver como limitante inferior o segmento BC, o método irá encontrar como solução todos os pontos presentes no segmento, quando apenas o ponto B não é dominado pelos demais.

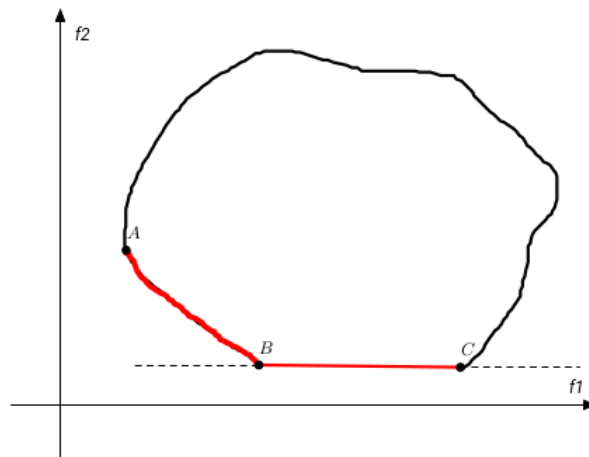


Figura 8 – Interpretação gráfica do método da soma ponderada: efeitos indesejados quando algum dos pesos é nulo. (FILHO, 2016)

Este método é ineficaz em problemas cujo espaço objetivo seja não convexo, pois não consegue encontrar todas as soluções Pareto-ótimas (ARROYO, 2002). É possível observar que na Figura 9 as retas geradas não atingiram toda a fronteira de Pareto.

Outra desvantagem é que, como a escolha dos pesos influencia o resultado final, será necessário resolver novamente o problema para encontrar um novo conjunto de soluções eficientes (SAMPAIO, 2011).

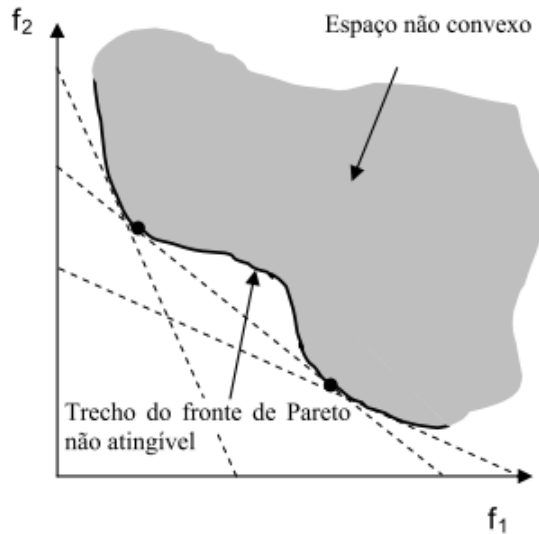


Figura 9 – Interpretação gráfica do método da soma ponderada: espaço não convexo. (BARDANACHVILI, 2006)

2.4.1.2 Método ε – restrito

É um método que pode ser empregado para a solução de problemas envolvendo regiões não convexas. Consiste em minimizar um único objetivo, escolhido *à-priori*, transformando os demais em restrições do problema (ARROYO, 2002; SAMPAIO, 2011). O problema ε – restrito é definido como:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimizar} & f_{\mu}(x), \\ \text{sujeito a} & f_m \leq \varepsilon_m, \quad m = 1, 2, \dots, T \text{ e } m \neq \mu; \\ & x \in \Omega \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

onde $\mu \in \{1, \dots, T\}$ é a função objetivo escolhida, ε_m é um vetor com os limites superiores dos objetivos f_m . Para Sampaio (2011) é importante que o vetor ε seja escolhido adequadamente, para que sejam obtidas soluções viáveis.

A Figura 10 mostra como uma restrição ε_2 pode impactar na descoberta de soluções ótimas, em um POM com dois objetivos. A reta $\varepsilon = k$ limita o espaço de soluções na Fronteira de Pareto, tornando as soluções A,B,C,D factíveis para o problema; por outro

lado, se o valor da limitante superior não for adequado ($\varepsilon_2 = k'$), o espaço obtido pode ser vazio, fazendo com que o problema não tenha solução.

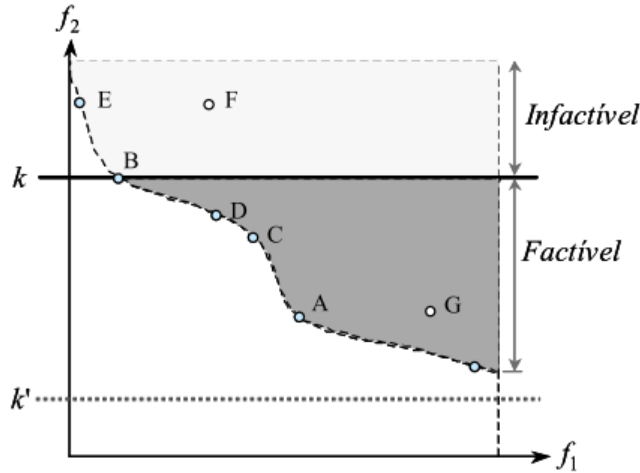


Figura 10 – Método ε – restrito
(ARROYO, 2002)

Este método possui a vantagem de controlar a cobertura da Fronteira de Pareto, funcionando melhor que o método da soma ponderada (SAMPAIO, 2011), porém deverá ser executado novamente quando houver necessidade de encontrar uma nova solução eficiente. Outra desvantagem é quanto à escolha do vetor ε , que impacta na descoberta das soluções eficientes. Para (SANTOS, 2013) a escolha do vetor ε não é trivial, e sua dificuldade aumenta à medida que cresce a quantidade de funções objetivo.

2.4.1.3 Método da distância a um objetivo de referência

Também chamada de programação por compromisso, tem como característica a busca de soluções eficientes onde utilizando uma determinada métrica, minimiza-se a distância a um determinado ponto de referência (JAIMES; ZAPOTECAS-MARTÍNEZ; COELLO, 2011). Geralmente utiliza-se como ponto de referência, a chamada *solução ideal*. Para (CLÍMACO; ANTUNES; ALVES, 2003), a solução ideal z^* seria um vetor onde cada componente representa o valor ótimo de cada função objetivo, quando otimizadas separadamente. Essa solução é também denominada por (ARROYO, 2002) de ponto utópico, pois geralmente não pertence à região admissível, pois se existisse, todas as funções teriam como ótimo a solução ideal e o problema estaria resolvido.

Uma métrica, como expõe (CLÍMACO; ANTUNES; ALVES, 2003) e (JAIMES; ZAPOTECAS-MARTÍNEZ; COELLO, 2011), é uma função que tem como resultado um escalar com a distância entre um par de vetores, $z^1, z^2 \in \mathbb{R}^n$, ou seja:

$$\left. \begin{aligned} \|z^1 - z^2\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n |z_i^1 - z_i^2|^p \right)^{1/p} & p \in \{1, 2, \dots\} \\ \|z^1 - z^2\|_\infty &= \max |z_i^1 - z_i^2| & i = 1, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

A interpretação gráfica das métricas L_1 , L_2 e L_∞ pode ser vista na Figura 11. A estas três medidas de distância é dada especial atenção na literatura; com L_1 temos a chamada *distância de Manhattan*, L_2 , *distância Euclideana* e L_∞ a *distância de Tchebycheff*, na qual é considerado apenas o pior caso (maior distância entre os vetores) (LOBIANCO; ANGULO-MEZA, 2007), (ANTUNES; ALVES; CLÍMACO, 2016).

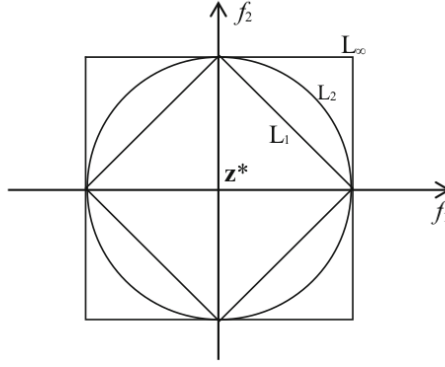


Figura 11 – Representação das distâncias L_p (ANTUNES; ALVES; CLÍMACO, 2016)

Considerando as definições de métricas, o método da distância a um objetivo de referência tem a seguinte equação (JAIMES; ZAPOTECAS-MARTÍNEZ; COELLO, 2011):

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimizar} \quad \left(\sum_{i=1}^T |f_i(x) - z_i^*|^p \right)^{1/p} \\ \text{sujeito a} \quad x \in \Omega \end{array} \right\} \quad (2.8)$$

É também possível adicionar um vetor de pesos na equação, para obter diferentes soluções ótimas:

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimizar} \quad \left(\sum_{i=1}^T w_i |f_i(x) - z_i^*|^p \right)^{1/p}, \\ \text{sujeito a} \quad x \in \Omega \end{array} \right\} \quad (2.9)$$

onde assim como no método da soma ponderada os pesos devem ser normalizados, $w_i > 0$.

A Figura 12 ilustra a descoberta de soluções eficientes utilizando a métrica L_∞ ponderada, nos desvios entre um ponto no espaço objetivo e z^i . Os retângulos pontilhados representam as métricas, que conseguem alcançar qualquer parte da Frente de Pareto.

2.5 Funções de Benchmark para problemas de otimização

De maneira a avaliar o desempenho dos métodos de otimização multiobjetivo existem alguns problemas de teste que são comumente empregados, destacando-se as

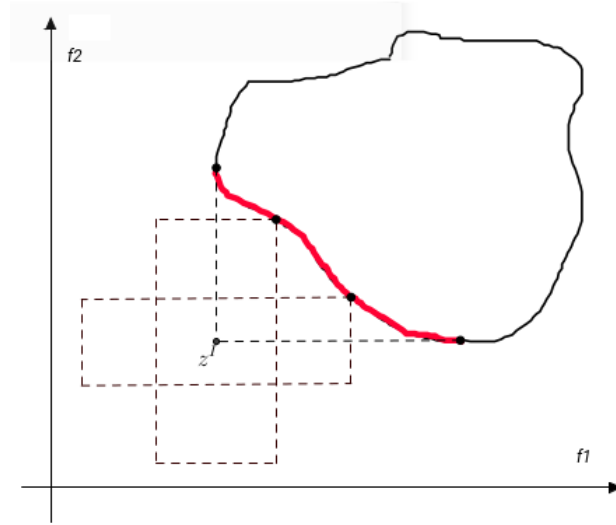


Figura 12 – Descoberta de soluções ótimas com o método da distância a um objetivo de referência utilizando métricas L_∞ .

(FILHO, 2016)

famílias de teste ZDT (CHASE et al., 2013) e DTLZ (FIGUEIREDO, 2013), exploradas a seguir:

2.5.1 Conjunto de Problemas ZDT

São funções de benchmark elaboradas por Zitzler, Deb e Thiler (ZITZLER; DEB; THIELE, 2000). Foram elaboradas para lidar com problemas de dois objetivos. Possuem a mesma estrutura, definida pela equação:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimizar} & \tau(\mathbf{x}) = (f_1(x_1), f_2(\mathbf{x})) \\ \text{sujeito a} & f_2(\mathbf{x}) = g(x_2, \dots, x_m)h(f_1(x_1), g(x_2, \dots, x_m)) \\ \text{onde} & \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \end{array} \right\} \quad (2.10)$$

A primeira função objetivo, f_1 , testa a habilidade do algoritmo de encontrar uma boa diversidade na Fronteira de Pareto, e a segunda função objetivo, f_2 , é composta do produto de uma função g , que testa a convergência à fronteira de Pareto, pela função h , que é uma função de f_1 e g , que testa a capacidade do algoritmo em lidar com diferentes formas de fronteira, considerando a possibilidade de descontinuidade e não convexidade (BARDANACHVILI, 2006).

Cada uma das funções ZDT contém uma característica particular que apresenta dificuldades na convergência para a Frente de Pareto, e são apresentadas a seguir:

2.5.1.1 Problema ZDT1

A frente de Pareto ótima é convexa, formada quando $g(x) = 1$ como demonstrado na Figura 13. A equação para o problema é dada por (ZITZLER; DEB; THIELE, 2000):

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1) &= x_1 \\ g(x_2, \dots, x_m) &= 1 + 9 \frac{\sum_{i=2}^m x_i}{(m-1)} \\ h(f_1, g) &= 1 - \sqrt{f_1/g} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

onde m representa o número de variáveis de decisão. Para esse problema, sugere-se usar $m = 30$ e $x_i \in [0, 1]$.

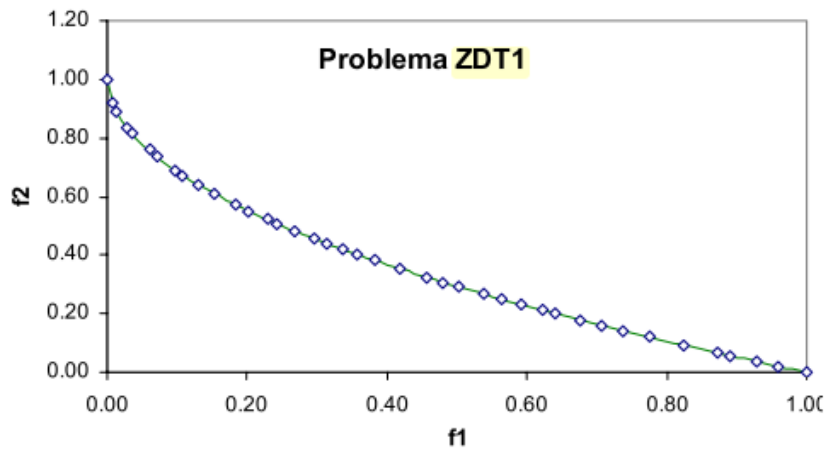


Figura 13 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema ZDT1.
Adaptado de (BARDANACHVILI, 2006)

2.5.1.2 Problema ZDT2

Neste problema a frente de Pareto é côncava formada com $g(x) = 1$, como exposto na Figura 14. Assim como o Problema ZDT1, possui 30 variáveis de decisão. A equação é (ZITZLER; DEB; THIELE, 2000):

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1) &= x_1 \\ g(x_2, \dots, x_m) &= 1 + 9 \frac{\sum_{i=2}^m x_i}{(m-1)} \\ h(f_1, g) &= 1 - (f_1/g)^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

onde m representa o número de variáveis de decisão. Para esse problema, sugere-se usar $m = 30$ e $x_i \in [0, 1]$.

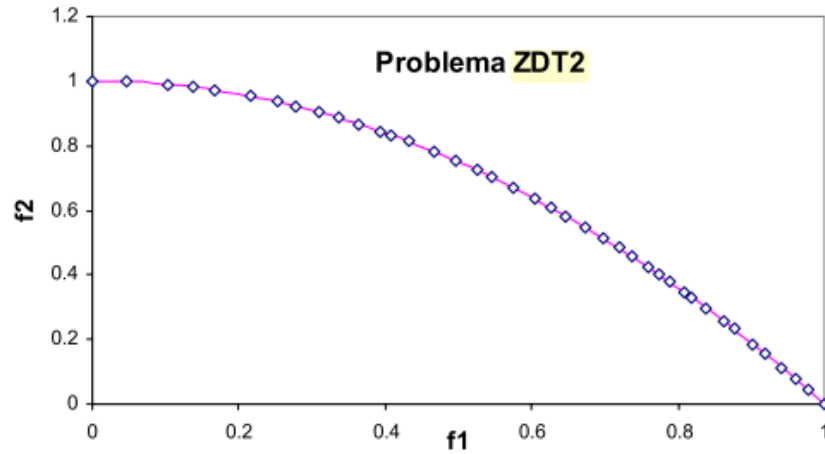


Figura 14 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema ZDT2.
Adaptado de (BARDANACHVILI, 2006)

2.5.1.3 Problema ZDT3

A função ZDT3 é definida pela equação (ZITZLER; DEB; THIELE, 2000):

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1) &= x_1 \\ g(x_2, \dots, x_m) &= 1 + 9 \sum_{i=2}^m x_i / (m - 1) \\ h(f_1, g) &= 1 - \sqrt{f_1/g} - (f_1/g) \sin(10\pi f_1), \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

com $m = 30$ e $x_i \in [0, 1]$. A frente de Pareto é discreta formada com $g(x) = 1$ e possui diversas partes convexas não-contínuas, sem descontinuidade do espaço das variáveis, como demonstrado na Figura 15.

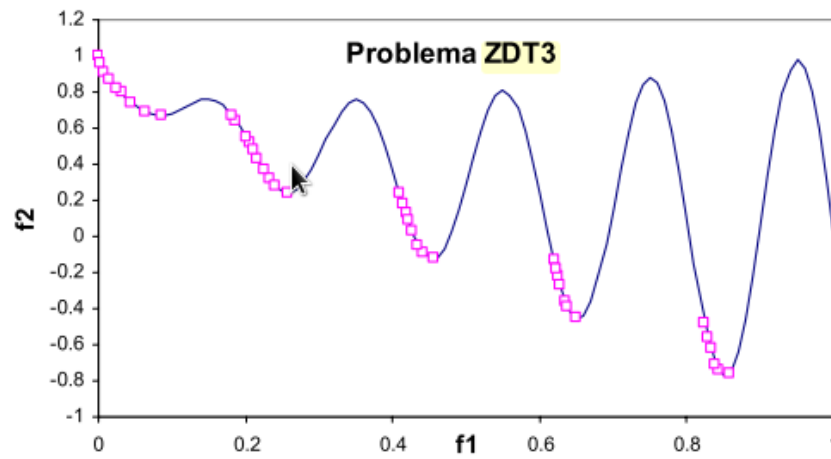


Figura 15 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema ZDT3.
Adaptado de (BARDANACHVILI, 2006)

2.5.1.4 Problema ZDT4

A função ZDT4 possui 21⁹ fronteiras de Pareto locais e é definida pela equação (ZITZLER; DEB; THIELE, 2000):

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1) &= x_1 \\ g(x_2, \dots, x_m) &= 1 + 10(m-1) \sum_{i=2}^m (x_i^2 - 10 \cos(4\pi x_i)) \\ h(f_1, g) &= 1 - \sqrt{f_1/g} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

com $m = 10$ e $x_i \in [0, 1]$ e $x_2, \dots, x_m \in [-5, 5]$. A fronteira de Pareto Global é formada com $g(x) = 1$. A função testa a habilidade dos algoritmos a lidar com múltiplas fronteiras de pareto locais.

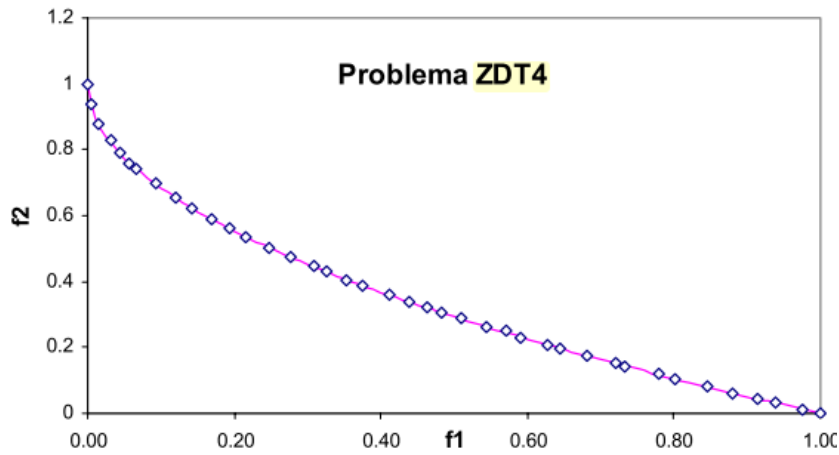


Figura 16 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema ZDT4.
Adaptado de (BARDANACHVILI, 2006)

2.5.1.5 Problema ZDT5

Esse problema é diferente dos anteriores, por trabalhar com um vetor de strings binárias. É definida pela equação (ZITZLER; DEB; THIELE, 2000):

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1) &= 1 + u(x_1) \\ g(x_2, \dots, x_m) &= \sum_{i=2}^m v(u(x_i)), \\ h(f_1, g) &= 1/f_1, \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

onde $u(x_i)$ é o número de bits 1 presentes no vetor x_1 e

$$v(u(x_i)) = \begin{cases} 2 + u(x_i) & \text{se } u(x_i) < 5 \\ 1 & \text{se } u(x_i) = 5 \end{cases}$$

e $m = 11$, $x_1 \in \{0, 1\}^{30}$, e $x_2, \dots, x_m \in \{0, 1\}^5$. A fronteira de Pareto Ótima é convexa e é formada com $g(x) = 10$.

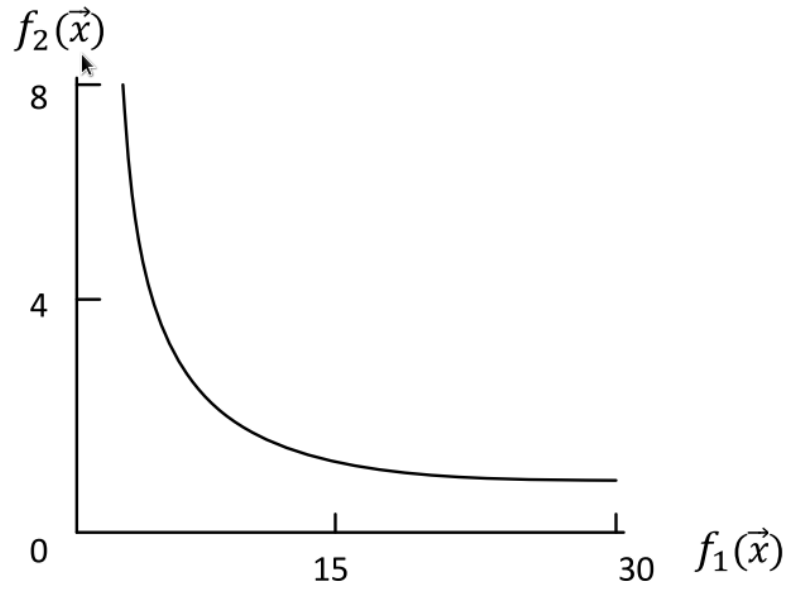


Figura 17 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema ZDT5.
(CORDEIRO, 2008)

2.5.1.6 Problema ZDT6

A função de teste ZDT6 tenta explorar a dificuldade dos algoritmos em distribuir as soluções do conjunto Pareto-Ótimo de maneira uniforme. Há também a baixa densidade de soluções próxima à Fronteira de Pareto. A equação é dada por (ZITZLER; DEB; THIELE, 2000):

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1) &= 1 - \exp(-4x_1) \sin^6(6\pi x_1) \\ g(x_2, \dots, x_m) &= 1 + 9((\sum_{i=2}^m x_i)/(m-1))^{0.25} \\ h(f_1, g) &= 1 - (f_1/g)^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

onde $m = 10, x_1 \in [0, 1]$. A Fronteira de Pareto é côncava e é formada com $g(x) = 1$.

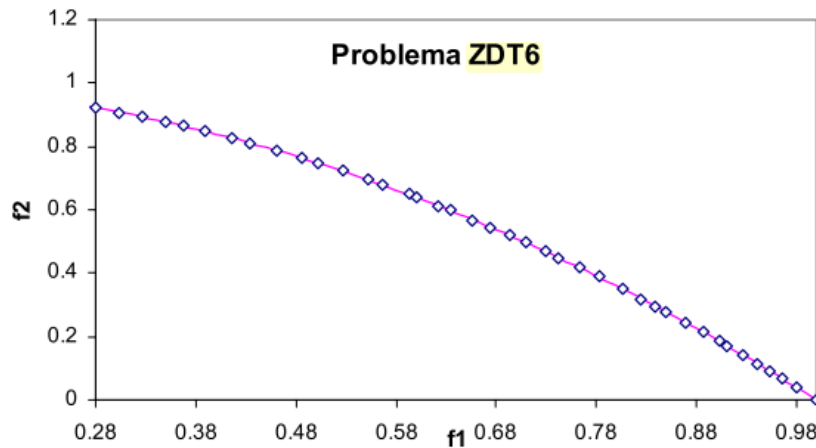


Figura 18 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema ZDT6.
Adaptado de (BARDANACHVILI, 2006)

2.5.2 Conjunto de Funções DTLZ

Para a avaliação de algoritmos elaborados para a solução de problemas com múltiplos objetivos, DEB et al. propuseram em (DEB et al., 2001) uma família de problemas de teste conhecida como DTLZ que correspondem às iniciais dos nomes dos autores; possuem a vantagem de possuir uma Frente de Pareto conhecida e são escaláveis tanto em número de objetivos quanto ao número de variáveis de decisão.

2.5.2.1 Problema DTLZ1

O problema de teste DTLZ1 possui uma Frente de Pareto Linear, como descrito pela equação (DEB et al., 2001):

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimizar } f_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1x_2 \dots x_{M-1}(1 + g(\mathbf{x}_M)), \\ \text{minimizar } f_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1x_2 \dots (1 - x_{M-1})(1 + g(\mathbf{x}_M)), \\ \vdots \\ \text{minimizar } f_{M-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1(1 - x_2)(1 + g(\mathbf{x}_M)), \\ \text{minimizar } f_M(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1(1 - x_1)(1 + g(\mathbf{x}_M)), \\ \text{sujeito a } 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2 \dots n; \end{array} \right\} \quad (2.17)$$

A função $g(\mathbf{x}_M)$ é definida por :

$$g(x_M) = 100 \left\{ |x_M| + \sum_{x_i \in x_M} (x_i - 0,5)^2 - \cos[20\pi(x_i - 0,5)] \right\} \quad (2.18)$$

onde $|\mathbf{x}_M| = k$ é o tamanho do vetor \mathbf{x}_M . Para esse problema, o sugerido é $k = 5$. O número de variáveis de decisão é dados por $n = M + k - 1$. A Figura 19 apresenta uma solução para o problema 2.17 com três objetivos ($M = 3$):

Para FIGUEIREDO (2013) a maior dificuldade imposta pelo problema é a convergência para a Frente de Pareto: há $(11^k - 1)$ Frentes de Pareto locais em que um algoritmo pode parar antes de atingir a Frente de Pareto Global.

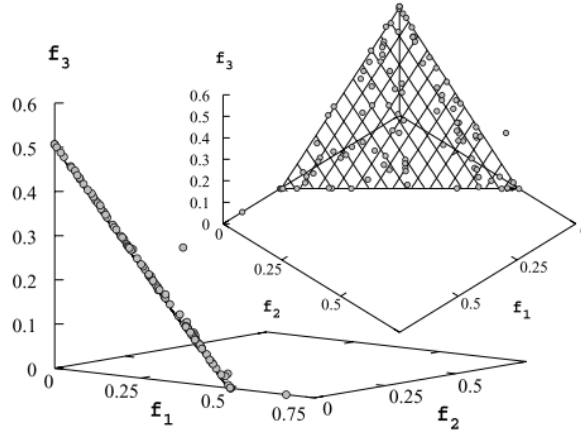


Figura 19 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema DTLZ1.
(FIGUEIREDO, 2013)

2.5.2.2 Problema DTLZ2

O problema DTLZ2 é um problema com Frente de Pareto esférica, definido pela equação 2.19:

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimizar } f_1(x) = (1 + g(x_M)) \cos(x_1\pi/2) \dots \cos(x_{M-2}\pi/2) \cos(x_{M-1}\pi/2), \\ \text{minimizar } f_2(x) = (1 + g(x_M)) \cos(x_1\pi/2) \dots \cos(x_{M-2}\pi/2) \sin(x_{M-1}\pi/2), \\ \text{minimizar } f_3(x) = (1 + g(x_M)) \cos(x_1\pi/2) \dots \sin(x_{M-2}\pi/2), \\ \vdots \\ \text{minimizar } f_M(x) = (1 + g(x_M)) \sin(x_1\pi/2) \\ \text{sujeito a } 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2 \dots n; \end{array} \right\} \quad (2.19)$$

onde,

$$g(x_M) = \sum_{x_i \in x_M} (x_i - 0,5)^2 \quad (2.20)$$

O recomendado por (DEB et al., 2001) é $k = |x_M| = 10$ com $n = M + k - 1$. A frente de Pareto é contínua e côncava como demonstrado na Figura 20.

2.5.2.3 Problema DTLZ3

O problema DTLZ3 consiste em uma modificação do problema DTLZ2 (2.19), que faz com que ele se torne um problema de maior complexidade com a introdução de $(3^k - 1)$ Frentes de Pareto locais, paralelas à Frente de Pareto Global. A modificação consiste em substituir a equação 2.20 pela 2.18.

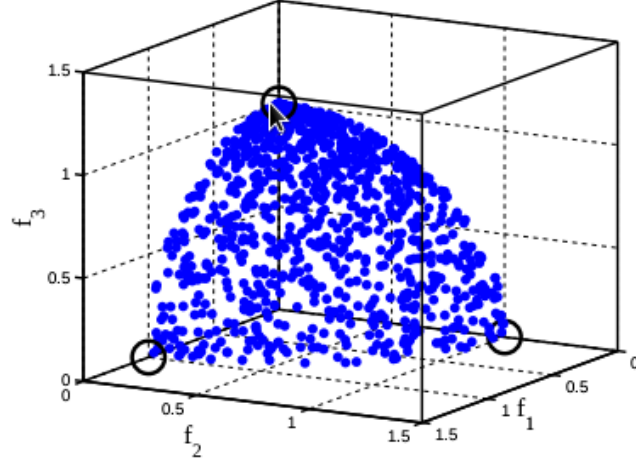


Figura 20 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema DTLZ2.
(FIGUEIREDO, 2013)

2.5.2.4 Problema DTLZ4

O problema DTLZ4 é também uma modificação do problema DTLZ2 (2.19), e também possui frente de Pareto côncava: foi criado para avaliar a capacidade dos algoritmos de gerar um conjunto bem distribuído de soluções sobre a Frente de Pareto Global (DEB et al., 2001). A equação do problema é:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{minimizar } f_1(x) &= (1 + g(x_M)) \cos(x_1^\alpha \pi/2) \cos(x_2^\alpha \pi/2) \dots \cos(x_{M-2}^\alpha \pi/2) \cos(x_{M-1}^\alpha \pi/2), \\
 \text{minimizar } f_2(x) &= (1 + g(x_M)) \cos(x_1^\alpha \pi/2) \cos(x_2^\alpha \pi/2) \dots \cos(x_{M-2}^\alpha \pi/2) \text{sen}(x_{M-1}^\alpha \pi/2), \\
 \text{minimizar } f_3(x) &= (1 + g(x_M)) \cos(x_1^\alpha \pi/2) \cos(x_2^\alpha \pi/2) \dots \text{sen}(x_{M-2}^\alpha \pi/2), \\
 &\vdots \\
 \text{minimizar } f_{M-1}(x) &= (1 + g(x_M)) \cos(x_1^\alpha \pi/2) \text{sen}(x_2^\alpha \pi/2) \\
 \text{minimizar } f_M(x) &= (1 + g(x_M)) \text{sen}(x_1^\alpha \pi/2) \\
 \text{sujeito } a &0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n;
 \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

onde,

$$g(x_M) = \sum_{x_i \in x_M} (x_i - 0.5)^2 \quad (2.22)$$

O valor sugerido por (DEB et al., 2001) são $\alpha = 100$ e $k = 10$. Para o problema existem $n = M + k - 1$ variáveis de decisão.

2.5.2.5 Problema DTLZ5

O Problema DTLZ-5 é também uma modificação do DTLZ2 (2.19) e foi construído para testar a capacidade dos algoritmos em convergir a uma curva (DEB et al., 2001), (RIBEIRO, 2016). O problema é matematicamente descrito pela equação 2.23:

$$\begin{aligned}
 \text{minimizar } f_1(x) &= (1 + g(x_M)) \cos(\Theta_1\pi/2) \cos(\Theta_2\pi/2) \dots \cos(\Theta_{M-2}\pi/2) \cos(\Theta_{M-1}\pi/2), \\
 \text{minimizar } f_2(x) &= (1 + g(x_M)) \cos(\Theta_1\pi/2) \cos(\Theta_2\pi/2) \dots \cos(\Theta_{M-2}\pi/2) \sin(\Theta_{M-1}\pi/2), \\
 \text{minimizar } f_3(x) &= (1 + g(x_M)) \cos(\Theta_1\pi/2) \cos(\Theta_2\pi/2) \dots \sin(\Theta_{M-2}\pi/2), \\
 &\vdots \\
 \text{minimizar } f_{M-1}(x) &= (1 + g(x_M)) \cos(\Theta_1\pi/2) \sin(\Theta_2\pi/2) \\
 \text{minimizar } f_M(x) &= (1 + g(x_M)) \sin(\Theta_1\pi/2) \\
 \text{sujeito a } &0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\
 \text{onde } &\Theta_i = \frac{\pi}{4[1+g(x_M)]} [1 + 2g(x_M)x_i], \quad i = (2, 3, \dots, (M-1))
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

em que $g(x_M)$ é definida pela equação:

$$g(x_M) = \sum_{x_i \in x_M} (x_i - 0.5)^2 \tag{2.24}$$

O recomendado por (DEB et al., 2001) é $k = |x_M| = 10$ com $n = M + k - 1$. Independente da quantidade de objetivos a frente de Pareto será formada em um espaço de duas dimensões, conforme demonstrado na figura 21.

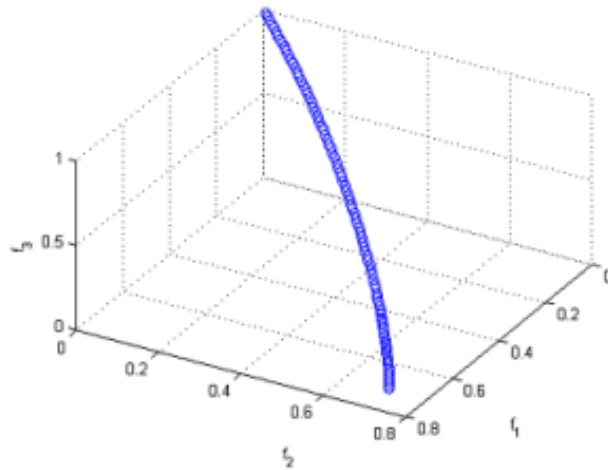


Figura 21 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema DTLZ5. (RIBEIRO, 2016)

2.5.2.6 Problema DTLZ6

O Problema DTLZ6 é uma modificação do DTLZ5 (2.23), aumentando a dificuldade de convergência para a fronteira de Pareto (Figura 22). A equação que define $g(x_m)$ é substituída por:

$$g(x_M) = \sum_{x_i \in x_M} (x_i)^{0.1} \quad (2.25)$$

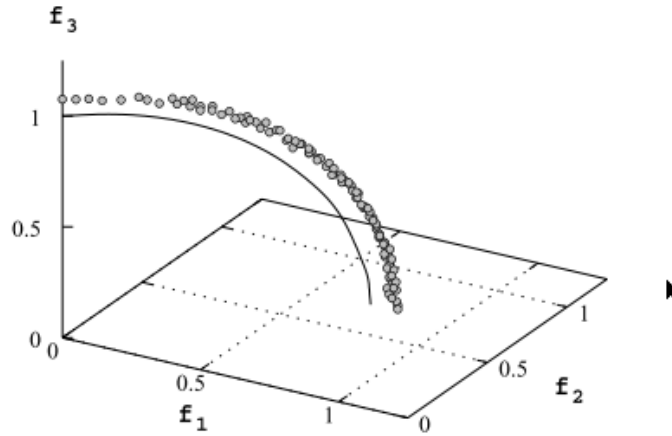


Figura 22 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema DTLZ6. (DEB et al., 2001)

2.5.2.7 Problema DTLZ7

Este problema é caracterizado por possuir um conjunto desconexo de áreas Pareto-ótimas, e é dado pela equação:

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimizar } f_1(x) = x_1, \\ \text{minimizar } f_2(x) = x_2 \\ \vdots \\ \text{minimizar } f_{M-1}(x_{M-1}) = x_{M-1} \\ \text{minimizar } f_M(x) = (1 + g(x_M))h(f_1, f_2, \dots, f_{M-1}, g) \\ \text{onde } g(x_M) = 1 + \frac{9}{|x_M|} \sum_{x_i \in x_M} x_i \\ h(f_1, f_2, \dots, f_{M-1}, g) = M - \sum_{i=1}^{M-1} \left[\frac{f_i}{1+g} (1 + \sin(3\pi f_i)) \right], \\ \text{sujeito a } 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2 \dots n; \end{array} \right\} \quad (2.26)$$

Este problema possui 2^{M-1} fronteiras de Pareto descontínuas, como pode ser observado na Figura 23. A função g requer $k = |x_M|$ variáveis, sendo sugerido $k = 20$, e o total de variáveis do problema é $n = M + k - 1$. O problema testa a habilidade do algoritmo em manter subpopulações em diferentes regiões Pareto-ótimas.

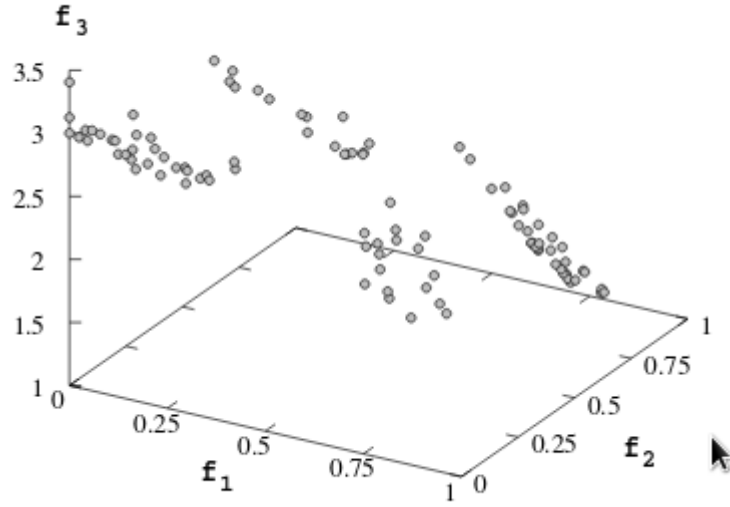


Figura 23 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema DTLZ7.
(DEB et al., 2001)

2.5.2.8 Problema DTLZ8

Neste problema a Fronteira de Pareto é uma combinação de uma linha contínua e um hiperplano, como pode ser visualizado na Figura 24. A equação é do problema é:

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{minimizar} \quad f_j(x) = \frac{1}{\lfloor \frac{n}{M} \rfloor} \sum_{i=\lfloor (j-1)\frac{n}{M} \rfloor}^{\lfloor j\frac{n}{M} \rfloor} x_i, j = 1, 2, \dots, M, \\
 & \quad \quad \quad \vdots \\
 & \text{sujeito a} \quad \left. \begin{aligned}
 g_j(x) &= f_M(x) + 4f_j(x) - 1 \geq 0, j = 1, 2, \dots, (M-1), \\
 g_M(x) &= 2f_M(x) + \min_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{M-1} [f_i(x) + f_j(x)] - 1 \geq 0, \\
 & \quad \quad \quad i \neq j
 \end{aligned} \right\} \quad (2.27) \\
 & \text{sujeito a} \quad 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n;
 \end{aligned} \right\}$$

Os algoritmos podem ter dificuldades em encontrar soluções em ambas regiões do Pareto e também em manter uma boa distribuição das soluções no hiperplano. Para esta equação, o número de variáveis deve ser maior que o número de objetivos ($n > M$), com $n = 10M$ sugerido por Deb et al. (2001).

2.5.2.9 Problema DTLZ9

O problema DTLZ9 possui fronteira de Pareto-ótima curva localizada em um espaço de objetivos tridimensional, que é definida pela interseção de todas as restrições de

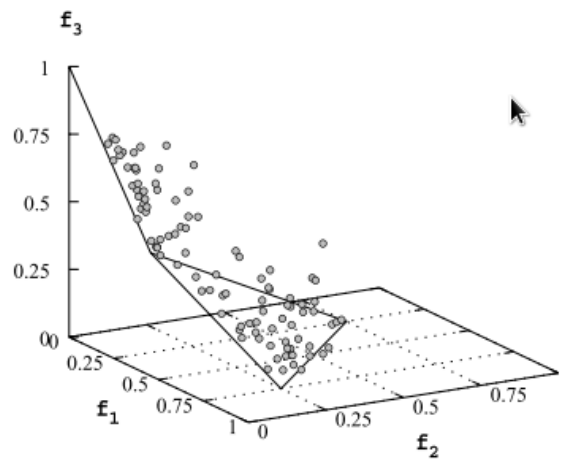


Figura 24 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema DTLZ8.
(DEB et al., 2001)

desigualdade (JÚNIOR, 2011). A equação é:

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimizar} \quad f_j(x) = \sum_{i=\lfloor (j-1)\frac{n}{M} \rfloor}^{\lfloor j\frac{n}{M} \rfloor} x_i^0, j = 1, 2, \dots, M, \\ \text{sujeito a} \quad g_j(x) = f_M^2(x) + f_j^2(x) - 1 \geq 0, j = 1, 2, \dots, (M-1), \\ \text{sujeito a} \quad 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n; \end{array} \right\} \quad (2.28)$$

O vetor de decisão deve possuir uma quantidade $n = 10M$ variáveis, como sugerido por (DEB et al., 2001). A Figura 25 apresenta uma visualização no plano $f_1 - f_3$ das soluções que se aproximam da curva Pareto-ótima.

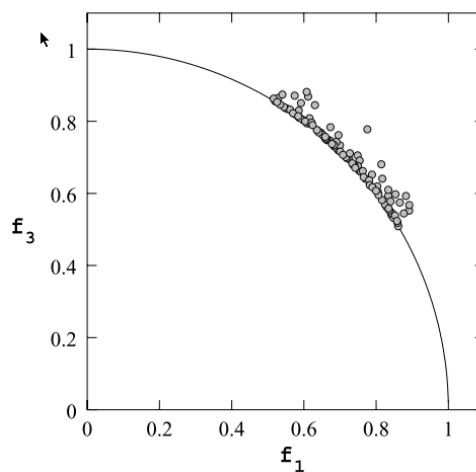


Figura 25 – Aproximação da Frente de Pareto para o problema DTLZ9.
(DEB et al., 2001)

3 Metodologia

3.1 Materiais

Para a implementação e avaliação dos métodos descritos foi utilizado o software MATLAB na versão R2017B¹. Vários autores, tais como (OLIVEIRA, 2005), (FORMIGA, 2005), (LOBATO, 2008) dentre outros, utilizaram tal ferramenta por ser extremamente eficaz na resolução de problemas matemáticos.

Para tratamento dos resultados foi utilizado: linguagem R², especialmente desenvolvida para computação estatística; interface RStudio³.

Os algoritmos foram implementados e executados em um Notebook HP Elitebook 840 G3, processador Intel core i5-6300U 2.40GHz, 6 Gb de memória RAM e sistema operacional Linux Mint 18 Sonya 64 bits⁴.

3.2 Implementação dos métodos

Os métodos descritos na seção 2.4 foram codificados no Matlab, assim como os problemas de teste ZDT1, ZDT3, DTLZ2 e DTLZ7 descritos na seção 2.5. Assim, foram escolhidos para este estudo dois problemas de cada conjunto de testes.

A otimização dos problemas foi realizada com o auxílio da função FMINCON⁵ do conjunto de ferramentas de otimização do Matlab, desenvolvida para a minimização de problemas com um objetivo.

Cada conjunto formado por um método e um problema de teste foi executado 33 vezes, e em cada execução foram obtidos 50 soluções ótimas da fronteira de Pareto.

Para efeitos estatísticos calculou-se a média, mediana, variância, desvio padrão, com um nível de confiança de 95%. Foram também feitas análises de variância e comparação de média nos resultados para verificar a qualidade dos métodos implementados.

Os algoritmos foram configurados de modo a exportar os resultados para um arquivo texto, para posterior tratamento no RStudio.

¹ <<https://www.mathworks.com/products/matlab.html>>

² <<https://www.r-project.org>>

³ <<https://www.rstudio.com>>

⁴ <<https://www.linuxmint.com/>>

⁵ <<https://www.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html>>

3.2.1 Pseudocódigos

Método da Soma Ponderada

Algoritmo 1: MÉTODO DA SOMA PONDERADA

Entrada: Problema de Teste $FTest$, Número de variáveis de decisão $Nvar$, Número de iterações $Niter$, limites inferiores e superiores das variáveis de decisão LB, LU

Saída: Vetor de soluções ótimas $Svec$

```

1 início
2    $Svec \leftarrow vector(Niter);$                                 /* Cria vetor de Soluções */
3    $x0 \leftarrow RAND(Nvar, 1);$                                 /* Cria vetor com Nvar variáveis */
4   para  $i$  de 1 até  $Niter$  faça
5        $W \leftarrow WEIGHTS(FTEST);$                             /* Cria vetor de pesos */
6        $Fobj \leftarrow WEIGHTEDSUM(FTEST, W);$                   /* Transforma a função */
7        $Svec[i] \leftarrow FMINCON(Fobj, x0, A, b, Aeq, beq, LB, LU);$  /* Encontra e
           armazena a solução ótima */
8   fim
9 fim
10 retorna  $Svec$ 

```

As entradas do algoritmo são o problema de teste a ser utilizado (ZDT1, ZDT3, DTLZ2 e DTLZ7), representado $FTest$, os limites superiores e inferiores para as variáveis de otimização LB e LU , a quantidade de variáveis de decisão a serem utilizadas $Nvar$, o número de iterações $Niter$.

Informadas as variáveis de entrada, o algoritmo gera um vetor $x0$ com $Nvar$ variáveis de decisão, com valores entre 0 e 1. Os limites superiores e inferiores foram configurados respectivamente como 0 e 1 para que todas as variáveis fossem consideradas.

Na etapa seguinte inicia-se um processo que será repetido $Niter$ vezes: um vetor W recebe um cálculo aleatório de pesos para cada objetivo do problema de teste $Ftest$ a ser minimizado, isto é, o tamanho do vetor W equivale à quantidade de objetivos do problema. Calculado o vetor W , o problema de teste selecionado é convertido em uma função mono-objetivo $Fobj$ pelo método da soma ponderada. A próxima função executada é a $FMINCON$, que realiza a minimização da função $Fobj$, armazenando o resultado no vetor $Svec$, que ao final do processo terá $Niter$ soluções ótimas.

Método ε -restrito

As entradas do algoritmo são o problema de teste a ser utilizado (ZDT1, ZDT3, DTLZ2 e DTLZ7), representado $FTest$, os limites superiores e inferiores para as variáveis de otimização LB e LU , a quantidade de variáveis de decisão a serem utilizadas $Nvar$, o número de iterações $Niter$, e as restrições de desigualdade e igualdade A, b, Aeq, beq .

Algoritmo 2: MÉTODO ε – restrito

Entrada: Problema de Teste $FTest$, Número de variáveis de decisão $Nvar$, Número de iterações $Niter$, limites inferiores e superiores das variáveis de decisão LB, LU , Parâmetros para as restrições de desigualdade e igualdade A, Aeq, b, beq

Saída: Vetor de soluções ótimas $Svec$

```

1 início
2    $Svec \leftarrow vector(Niter);$                                 /* Cria vetor de Soluções */
3    $x0 \leftarrow RAND(Nvar, 1);$                                 /* Cria vetor com Nvar variáveis */
4   para  $i$  de 1 até  $Niter$  faça
5        $\varepsilon \leftarrow CONSTRAINTS(FTest);$                 /* Restrições para as funções */
6        $Fobj \leftarrow \varepsilon\text{-}CONSTRAINT(FTest, \varepsilon);$     /* Transforma a função */
7        $Svec[i] \leftarrow FMINCON(Fobj, x0, A, b, Aeq, beq, LB, LU);$  /* Encontra e
           armazena a solução ótima */
8   fim
9 fim
10 retorna  $Svec$ 

```

Informadas as variáveis de entrada, o algoritmo gera um vetor $x0$ com $Nvar$ variáveis de decisão, com valores entre 0 e 1. Os limites superiores e inferiores foram configurados respectivamente como 0 e 1 para que todas as variáveis fossem consideradas.

Na etapa seguinte, inicia-se um processo que será repetido $Niter$ vezes: um vetor ε recebe os limites para cada objetivo do problema de teste $Ftest$ a ser minimizado. Calculado o vetor ε , o problema de teste selecionado é convertido em uma função mono-objetivo $Fobj$ pelo método ε -restrito. A próxima função executada é a $FMINCON$, que realiza a minimização da função $Fobj$, armazenando o resultado no vetor $Svec$, que ao final do processo terá $Niter$ soluções ótimas.

Método da Distância a um objetivo de referência

Algoritmo 3: MÉTODO DA DISTÂNCIA A UM OBJETIVO DE REFERÊNCIA

Entrada: Problema de Teste $FTest$, Número de variáveis de decisão $Nvar$, Número de iterações $Niter$, métrica de distância L , limites inferiores e superiores das variáveis de decisão LB, LU , Parâmetros para as restrições de desigualdade e igualdade A, Aeq, b, beq

Saída: Vetor de soluções ótimas $Svec$

```

1 início
2    $Svec \leftarrow vector(Niter);$                                 /* Cria vetor de Soluções */
3    $x0 \leftarrow RAND(Nvar, 1);$                                 /* Cria vetor com Nvar variáveis */
4   para  $i$  de 1 até  $Niter$  faça
5        $vIdeal \leftarrow RANDZ(FTest);$                         /* Define vetor de pontos ideais */
6        $Fobj \leftarrow COMPROMISE(Ftest, vIdeal, L)$             /* Converte a função */
7        $Svec[x] \leftarrow FMINCON(Fobj, x0, A, b, Aeq, beq, LB, LU)$  /* Encontra a
           solução ótima */
8   fim
9 fim
10 retorna  $Svec$ 

```

As entradas do algoritmo são o problema de teste a ser utilizado (ZDT1, ZDT3, DTLZ2 e DTLZ7), representado $FTest$, a métrica de distância a ser utilizada L , os limites superiores e inferiores para as variáveis de otimização LB e LU , a quantidade de variáveis de decisão a serem utilizadas $Nvar$, o número de iterações $Niter$, e as restrições de desigualdade e igualdade A, b, Aeq, beq .

Informadas as variáveis de entrada, o algoritmo gera um vetor $x0$ com $Nvar$ variáveis de decisão, com valores entre 0 e 1. Os limites superiores e inferiores foram configurados respectivamente como 0 e 1 para que todas as variáveis fossem consideradas.

Na etapa seguinte, inicia-se um processo que será repetido $Niter$ vezes: é gerado um vetor de pontos de referência $vIdeal$ que ira conter um ponto ideal (utópico) para cada objetivo. A seguir o problema de teste selecionado é convertido em uma função mono-objetivo $Fobj$ pelo método da distância a um objetivo de referência, com os parâmetros L e $vIdeal$. A próxima função executada é a FMINCON, que realiza a minimização da função $Fobj$, armazenando o resultado no vetor $Svec$, que ao final do processo terá $Niter$ soluções ótimas.

4 Resultados

4.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados obtidos com a execução dos algoritmos implementados, assim como a análise estatística dos dados gerados para cada conjunto de método e problema testado. Os resultados estão agrupados por cada função de *benchmark* avaliada, como detalhado no decorrer das próximas seções.

Após execução dos métodos implementados e obtenção dos dados resultantes dos testes das funções para cada algoritmo, é feita uma análise do comportamento de cada método cada uma das funções de benchmark utilizadas.

Os dados das 33 execuções para cada um dos métodos foram exportados em arquivo e posteriormente importados no RStudio para realização de cálculos estatísticos tais como: cálculo da média, mediana, variância, desvio padrão e intervalo de confiança em cada uma das funções objetivo. Como em cada execução foram obtidos 50 pontos ótimos, isto é 50 soluções ótimas para o problema, os resultados foram ordenados em ordem crescente para que o cálculo da média por ponto não se distanciasse do valor ótimo em cada teste.

4.2 Análise Descritiva

4.2.1 Problema ZDT1

A Tabela 2 apresenta o valor médio para todos os pontos ótimos obtidos em todas as 33 execuções dos métodos *Soma Ponderada*, ε -restrito e *Distância a um objetivo de referência*, considerando a função de benchmark ZDT1.

Tabela 2 – Médias dos resultados para o Problema ZDT1

	Média Ponderada		ε -restrito		Distância	
	F1	F2	F1	F2	F1	F2
1	0.00008	0.99952	0.02153	0.87450	0.00165	0.96014
2	0.00041	0.98438	0.03961	0.81719	0.00626	0.92099
3	0.00099	0.97294	0.05963	0.76724	0.01365	0.88319
4	0.00218	0.95782	0.07619	0.73302	0.02337	0.84715
5	0.00361	0.94403	0.09488	0.70033	0.03495	0.81307
6	0.00482	0.93473	0.11597	0.66503	0.04797	0.78101
7	0.00682	0.92206	0.13526	0.63779	0.06205	0.75091

	Média Ponderada		ε -restrito		Distância	
	F1	F2	F1	F2	F1	F2
8	0.00864	0.91196	0.15380	0.61384	0.07692	0.72267
9	0.01213	0.89430	0.17496	0.58708	0.09235	0.69613
10	0.01536	0.87992	0.19711	0.56121	0.10816	0.67114
11	0.02011	0.86248	0.21491	0.54156	0.12422	0.64756
12	0.02377	0.85035	0.22804	0.52691	0.14044	0.62526
13	0.02954	0.83336	0.25286	0.50267	0.15674	0.60411
14	0.03815	0.81303	0.26780	0.48828	0.17307	0.58399
15	0.04600	0.79359	0.28867	0.46794	0.18938	0.56483
16	0.05801	0.76961	0.30554	0.45209	0.20565	0.54652
17	0.07168	0.74273	0.32873	0.43087	0.22186	0.52900
18	0.08418	0.72041	0.35127	0.41110	0.23798	0.51218
19	0.10327	0.68974	0.37698	0.38991	0.25400	0.49603
20	0.13132	0.65672	0.39995	0.37101	0.26992	0.48047
21	0.15112	0.62900	0.42234	0.35315	0.28573	0.46547
22	0.16952	0.60901	0.44836	0.33312	0.30143	0.45099
23	0.19953	0.57271	0.47458	0.31337	0.31701	0.43697
24	0.22954	0.54276	0.48822	0.30353	0.33247	0.42341
25	0.26875	0.50405	0.50648	0.29034	0.34782	0.41025
26	0.31972	0.45537	0.52522	0.27707	0.34782	0.41025
27	0.37646	0.40901	0.54047	0.26662	0.36623	0.39484
28	0.44231	0.35849	0.55668	0.25570	0.38541	0.37920
29	0.50776	0.30897	0.57666	0.24219	0.40535	0.36334
30	0.58104	0.25669	0.59734	0.22844	0.42604	0.34729
31	0.67946	0.19240	0.61477	0.21708	0.44747	0.33108
32	0.74023	0.15555	0.63520	0.20416	0.46963	0.31472
33	0.80434	0.11523	0.65903	0.18920	0.49249	0.29824
34	0.85279	0.08550	0.67976	0.17638	0.51604	0.28165
35	0.89750	0.05813	0.69999	0.16417	0.54026	0.26499
36	0.92374	0.04222	0.71726	0.15373	0.56513	0.24826
37	0.97261	0.01468	0.73489	0.14334	0.59062	0.23150
38	0.98302	0.00898	0.75503	0.13170	0.61670	0.21471
39	0.99640	0.00186	0.76848	0.12396	0.64337	0.19791
40	1.00000	0.00001	0.79427	0.10927	0.67059	0.18112
41	1.00000	0.00001	0.81935	0.09528	0.69833	0.16435
42	1.00000	0.00001	0.84170	0.08298	0.72658	0.14761
43	1.00000	0.00001	0.85776	0.07425	0.75532	0.13092

	Média Ponderada		ε -restrito		Distância	
	F1	F2	F1	F2	F1	F2
44	1.00000	0.00001	0.87077	0.06721	0.78451	0.11428
45	1.00000	0.00001	0.89224	0.05571	0.81414	0.09771
46	1.00000	0.00001	0.91346	0.04450	0.84419	0.08121
47	1.00000	0.00001	0.93149	0.03505	0.87464	0.06479
48	1.00000	0.00001	0.95137	0.02471	0.90546	0.04845
49	1.00000	0.00001	0.96564	0.01740	0.93664	0.03221
50	1.00000	0.00001	0.98159	0.00930	0.96816	0.01606

É possível observar que todos os métodos conseguiram encontrar pontos na Fronteira de Pareto estimada, conforme descrito na seção 2.5.1.1, porém o método da soma ponderada teve como comportamento o agrupamento das soluções no mínimo de F1 ou F2, com poucos valores intermediários, como observa-se nos pontos 01-18 e 40-50, sendo facilmente constatado na Figura 26a. O método ε -restrito apresentou comportamento melhor que o método da soma ponderada, mas com distribuição irregular ao longo da fronteira de Pareto, com concentração de soluções em alguns segmentos (Figura 26b). O método da distância a um objetivo foi o que conseguiu melhor resultado, com as soluções bem distribuídas ao longo da Fronteira de Pareto, como pode ser observado na Figura 26c.

A Tabela 3 apresenta os resultados estatísticos calculados a partir da Tabela 2, sendo possível observar que no método da Soma Ponderada o valor médio das funções objetivo F1 e F2 ficaram muito próximos (0.45514 e 0.44909 respectivamente), resultado muito diferente dos demais métodos. Comportamento semelhante é observado na variância e desvio padrão.

Tabela 3 – Dados estatísticos para o Problema ZDT1

	Média Ponderada		ε -restrito		Distância	
Média	0.45514	0.44909	0.50608	0.33045	0.39632	0.42360
Mediana	0.29424	0.47971	0.51585	0.28370	0.34782	0.41025
Variância	0.18145	0.14665	0.08443	0.05599	0.08073	0.06538
Desvio Padrão	0.42597	0.38295	0.29056	0.23662	0.28413	0.25570
Intervalo de Confiança	0.33408	0.34025	0.42350	0.26320	0.31557	0.35093
	0.57620	0.55792	0.58866	0.39770	0.47707	0.49627

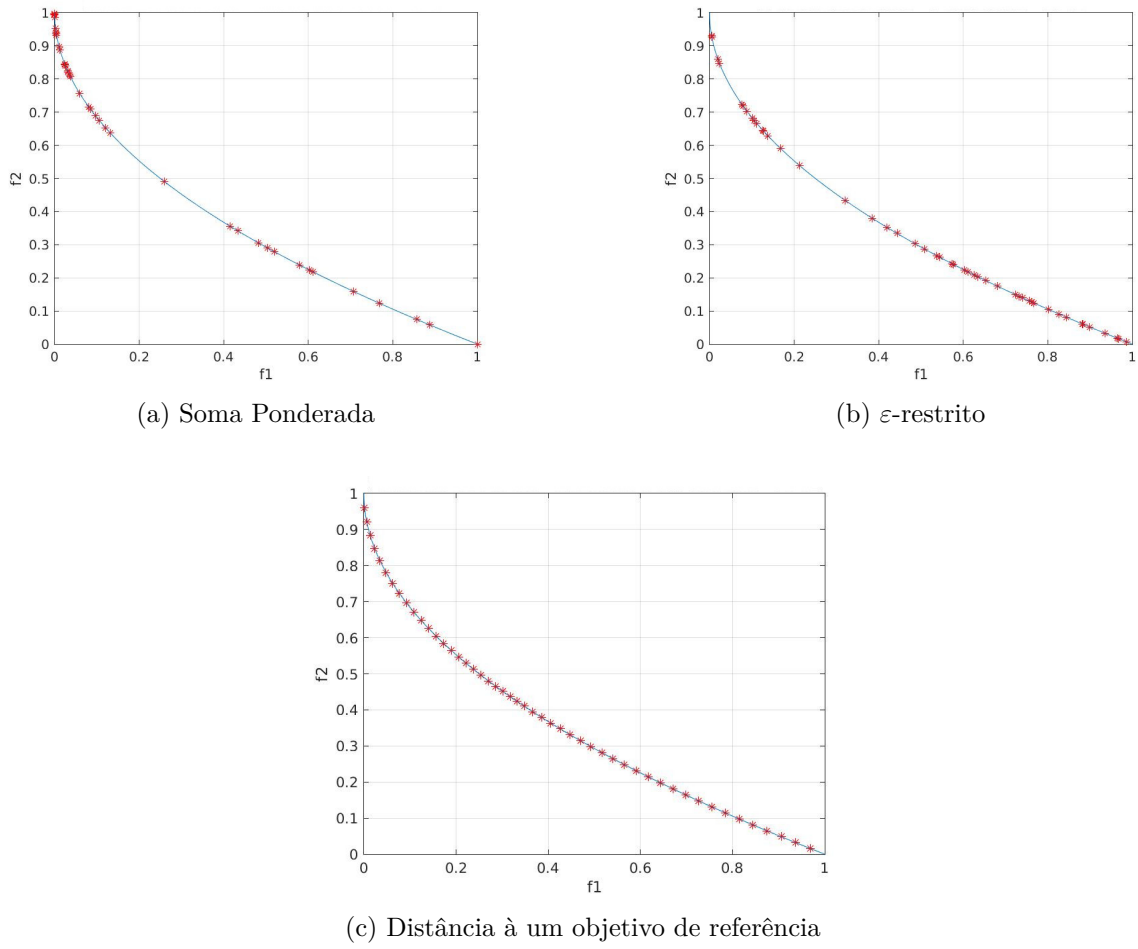


Figura 26 – Resultados dos métodos com o problema ZDT1

4.2.2 Problema ZDT3

A Tabela 4 apresenta o valor médio para todos os pontos ótimos obtidos em todas as 33 execuções dos métodos *Soma Ponderada*, *ε -restrito* e *Distância a um objetivo de referência*, considerando a função de benchmark ZDT3.

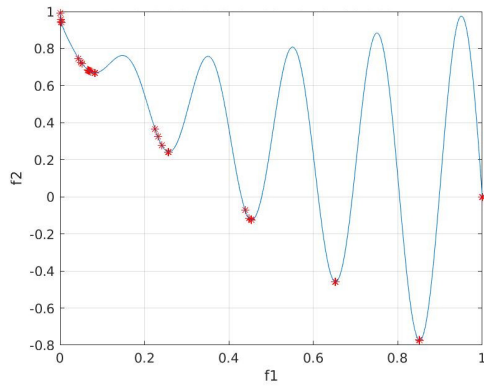
Tabela 4 – Médias dos resultados para o Problema ZDT3

	Média Ponderada		ε -restrito		Distância	
	F1	F2	F1	F2	F1	F2
1	0.00028	0.98935	0.02180	0.85266	0.09356	0.64383
2	0.00076	0.97852	0.03649	0.78940	0.12569	0.56619
3	0.00193	0.96323	0.05342	0.73573	0.17867	0.43675
4	0.00526	0.94280	0.06766	0.69995	0.21011	0.35898
5	0.01144	0.90786	0.07455	0.68574	0.24647	0.26821
6	0.01770	0.87802	0.07927	0.67444	0.25776	0.24420
7	0.02754	0.83326	0.08167	0.67091	0.26309	0.23118

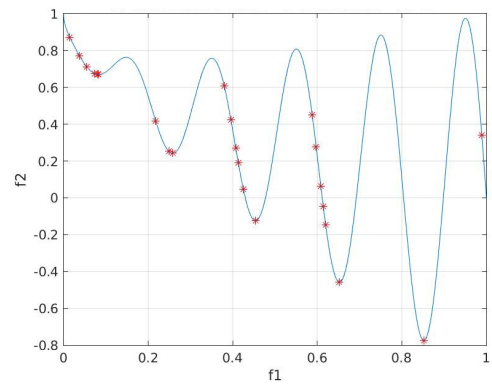
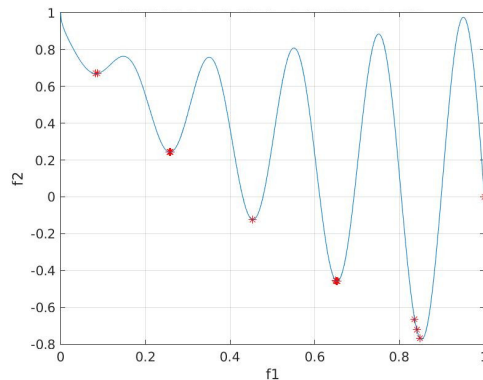
	Média Ponderada		ε -restrito		Distância	
	F1	F2	F1	F2	F1	F2
8	0.03783	0.79081	0.09042	0.65893	0.26353	0.23119
9	0.04646	0.75717	0.09718	0.65489	0.26393	0.23127
10	0.06752	0.69647	0.11421	0.62211	0.28762	0.18833
11	0.07666	0.67253	0.13998	0.57289	0.31721	0.13263
12	0.09870	0.61650	0.15275	0.51334	0.35261	0.06597
13	0.12353	0.55565	0.18896	0.44457	0.37058	0.03371
14	0.14202	0.51309	0.20925	0.39927	0.38266	0.01138
15	0.18206	0.42333	0.22152	0.35219	0.43571	-0.08246
16	0.20420	0.37894	0.23509	0.31179	0.45970	-0.12375
17	0.24159	0.29608	0.24713	0.27784	0.48932	-0.17873
18	0.28218	0.20977	0.25030	0.26275	0.53108	-0.25146
19	0.31829	0.13070	0.25684	0.24546	0.55512	-0.29382
20	0.32608	0.11448	0.25776	0.24216	0.59549	-0.35169
21	0.35100	0.07066	0.25776	0.24216	0.63702	-0.41774
22	0.36863	0.04249	0.25776	0.24216	0.65334	-0.40938
23	0.43274	-0.0712	0.26183	0.24910	0.68395	-0.46573
24	0.49060	-0.16515	0.26732	0.23736	0.72385	-0.46548
25	0.50603	-0.20254	0.28653	0.22975	0.76969	-0.37965
26	0.52970	-0.23974	0.30279	0.21550	0.81908	-0.39054
27	0.59667	-0.20113	0.33293	0.19829	0.84158	-0.37772
28	0.62992	-0.37504	0.35221	0.14443	0.88804	-0.27021
29	0.65969	-0.40049	0.37563	0.10230	0.91373	-0.22288
30	0.70016	-0.43270	0.39160	0.04016	0.94527	-0.15661
31	0.73963	-0.43537	0.40816	0.02307	0.97057	-0.10147
32	0.78518	-0.19792	0.42912	-0.03637	0.98007	-0.05972
33	0.81811	-0.44248	0.43875	-0.07933	0.98482	-0.03707
34	0.88347	-0.41769	0.44491	-0.08148	0.98946	-0.01388
35	0.89951	-0.38845	0.45637	-0.10249	0.99487	-0.01794
36	0.93263	-0.17962	0.47624	-0.08142	0.99529	-0.02274
37	0.96345	-0.17395	0.50954	-0.11297	1.00000	0.00001
38	0.98194	-0.09362	0.53171	-0.13117	1.00000	0.00001
39	0.98647	-0.07026	0.55375	-0.21451	1.00000	0.00002
40	1.00000	0.00001	0.58005	-0.22132	1.00000	0.00002
41	1.00000	0.00001	0.60590	-0.25272	1.00000	0.00002
42	1.00000	0.00002	0.63574	-0.29923	1.00000	0.00002
43	1.00000	0.00002	0.65900	-0.30812	1.00000	0.00002

	Média Ponderada		ε -restrito		Distância	
	F1	F2	F1	F2	F1	F2
44	1.00000	0.00002	0.67456	-0.37441	1.00000	0.00003
45	1.00000	0.00003	0.69890	-0.41869	1.00000	0.00004
46	1.00000	0.00003	0.72893	-0.46143	1.00000	0.00005
47	1.00000	0.00005	0.77347	-0.49230	1.00000	0.00006
48	1.00000	0.00007	0.81883	-0.59466	1.00000	0.00007
49	1.00000	0.00010	0.85044	-0.53523	1.00000	0.00008
50	1.00000	0.00018	0.90387	-0.30289	1.00000	0.00012

É possível observar que todos os métodos conseguiram encontrar pontos na Fronteira de Pareto estimada, conforme descrito na seção 2.5.1.3, e para este problema o método da soma ponderada foi o que obteve melhor resultado, como visto na Figura 27a. O método da distância a um objetivo de referência também teve desempenho satisfatório, porém com tendência a agrupar as soluções quando comparados aos resultados do método Soma Ponderada. A Figura 27c permite melhor constatação do agrupamento observado.



(a) Soma Ponderada

(b) ε -restrito

(c) Distância à um objetivo de referência

Figura 27 – Resultados dos métodos com o problema ZDT3

O método ε -restrito encontrou vários pontos fora da Fronteira de Pareto (Figura 27b), sendo completamente ineficiente para o problema analisado. Essa verificação nos resultados também é melhor percebida ao observar os dados da Tabela 5, onde a mediana para as funções objetivo no método ε -restrito tiveram resultados próximos (0.29 e 0.22), resultado muito diferente dos obtidos nos demais métodos. Observa-se também uma grande variação no intervalo de confiança.

Tabela 5 – Dados estatísticos para o Problema ZDT3

	Média Ponderada		ε -restrito		Distância	
Média	0.52935	0.16550	0.36282	0.14981	0.68941	-0.02893
Mediana	0.51786	0.00006	0.29466	0.22263	0.79438	0.00002
Variância	0.15367	0.19874	0.05687	0.15581	0.10191	0.06264
Desvio Padrão	0.39201	0.4458	0.23847	0.39473	0.31923	0.25028
Intervalo	0.41794	0.03880	0.29504	0.03763	0.59869	-0.10005
de Confiança	0.64076	0.29219	0.43059	0.26199	0.78013	0.04220

4.2.3 Problema DTLZ2

A Tabela 6 apresenta o valor médio para todos os pontos ótimos obtidos em todas as 33 execuções dos métodos *Soma Ponderada*, ε -restrito e *Distância a um Objetivo de Referência*, considerando a função de benchmark DTLZ2 (2.5.2.2).

Tabela 6 – Médias dos resultados para o Problema DTLZ2

	Média Ponderada			ε -restrito			Distância a um objetivo		
	F1	F2	F3	F1	F2	F3	F1	F2	F3
1	0	0	1	0	0.424	0.886	0.025	0.531	0.730
2	0	0	1	0	0.563	0.798	0.048	0.689	0.532
3	0	0	1	0	0.645	0.743	0.069	0.584	0.640
4	0	0	1	0	0.729	0.660	0.087	0.625	0.632
5	0	0	1	0	0.752	0.624	0.106	0.609	0.638
6	0	0	1	0.011	0.744	0.616	0.127	0.589	0.649
7	0	0	1	0.016	0.745	0.615	0.143	0.627	0.676
8	0	0	1	0.036	0.765	0.566	0.160	0.540	0.681
9	0	0	1	0.06	0.65	0.663	0.178	0.587	0.660
10	0	0	1	0.096	0.652	0.693	0.197	0.605	0.666

	Média Ponderada			ε -restrito			Distância a um objetivo		
	F1	F2	F3	F1	F2	F3	F1	F2	F3
11	0	0	1	0.145	0.579	0.717	0.214	0.572	0.644
12	0	0	1	0.206	0.559	0.718	0.228	0.586	0.630
13	0	0	1	0.258	0.610	0.624	0.245	0.537	0.690
14	0	0	1	0.300	0.553	0.652	0.260	0.569	0.637
15	0	0.03	0.970	0.345	0.542	0.668	0.284	0.590	0.588
16	0	0.061	0.939	0.379	0.580	0.551	0.297	0.578	0.650
17	0	0.152	0.848	0.413	0.539	0.624	0.312	0.62	0.542
18	0	0.242	0.758	0.447	0.487	0.603	0.329	0.525	0.675
19	0	0.303	0.697	0.483	0.571	0.554	0.344	0.567	0.588
20	0	0.394	0.606	0.512	0.585	0.506	0.367	0.534	0.625
21	0	0.425	0.576	0.543	0.497	0.59	0.388	0.596	0.548
22	0	0.515	0.485	0.568	0.535	0.516	0.401	0.602	0.554
23	0	0.546	0.455	0.593	0.474	0.513	0.419	0.587	0.561
24	0.001	0.636	0.365	0.613	0.469	0.533	0.436	0.675	0.456
25	0.001	0.697	0.304	0.633	0.513	0.471	0.454	0.556	0.549
26	0.002	0.727	0.273	0.650	0.515	0.433	0.474	0.570	0.512
27	0.003	0.711	0.306	0.677	0.458	0.496	0.497	0.576	0.470
28	0.005	0.578	0.427	0.697	0.487	0.422	0.517	0.563	0.506
29	0.007	0.526	0.489	0.712	0.397	0.468	0.532	0.525	0.539
30	0.011	0.527	0.490	0.732	0.485	0.396	0.555	0.523	0.511
31	0.016	0.547	0.486	0.749	0.362	0.461	0.576	0.510	0.531
32	0.030	0.696	0.340	0.766	0.375	0.430	0.598	0.473	0.540
33	0.069	0.583	0.443	0.786	0.337	0.432	0.634	0.456	0.516
34	0.084	0.619	0.445	0.801	0.392	0.372	0.669	0.460	0.454
35	0.122	0.476	0.624	0.820	0.306	0.400	0.708	0.427	0.455
36	0.195	0.484	0.541	0.840	0.364	0.325	0.733	0.477	0.370
37	0.264	0.467	0.542	0.852	0.267	0.393	0.762	0.419	0.432
38	0.446	0.416	0.480	0.869	0.307	0.333	0.792	0.428	0.362
39	0.581	0.339	0.416	0.879	0.314	0.286	0.816	0.348	0.381
40	0.681	0.283	0.328	0.888	0.304	0.256	0.838	0.372	0.310
41	0.833	0.232	0.164	0.905	0.258	0.290	0.854	0.279	0.382
42	0.888	0.112	0.108	0.913	0.266	0.275	0.871	0.323	0.295
43	0.922	0.086	0.093	0.923	0.229	0.242	0.884	0.295	0.291
44	0.953	0.072	0.024	0.938	0.255	0.177	0.898	0.273	0.273
45	0.976	0.029	0.007	0.949	0.222	0.189	0.911	0.283	0.245

	Média Ponderada			ε -restrito			Distância a um objetivo		
	F1	F2	F3	F1	F2	F3	F1	F2	F3
46	0.978	0.028	0.010	0.961	0.149	0.193	0.930	0.208	0.260
47	0.990	0.002	0.026	0.971	0.174	0.130	0.943	0.228	0.191
48	0.998	0.023	0.012	0.981	0.116	0.145	0.957	0.192	0.169
49	1.003	0.034	0.024	0.993	0.129	0.096	0.969	0.138	0.151
50	1.042	0.088	0.104	1.068	0.201	0.191	0.989	0.150	0.096

Os métodos ε -restrito e Distância a um objetivo de referência tiveram resultados satisfatórios, indicando capacidade de encontrar soluções em toda a fronteira de Pareto. As figuras 28b e 28c evidenciam esse comportamento.

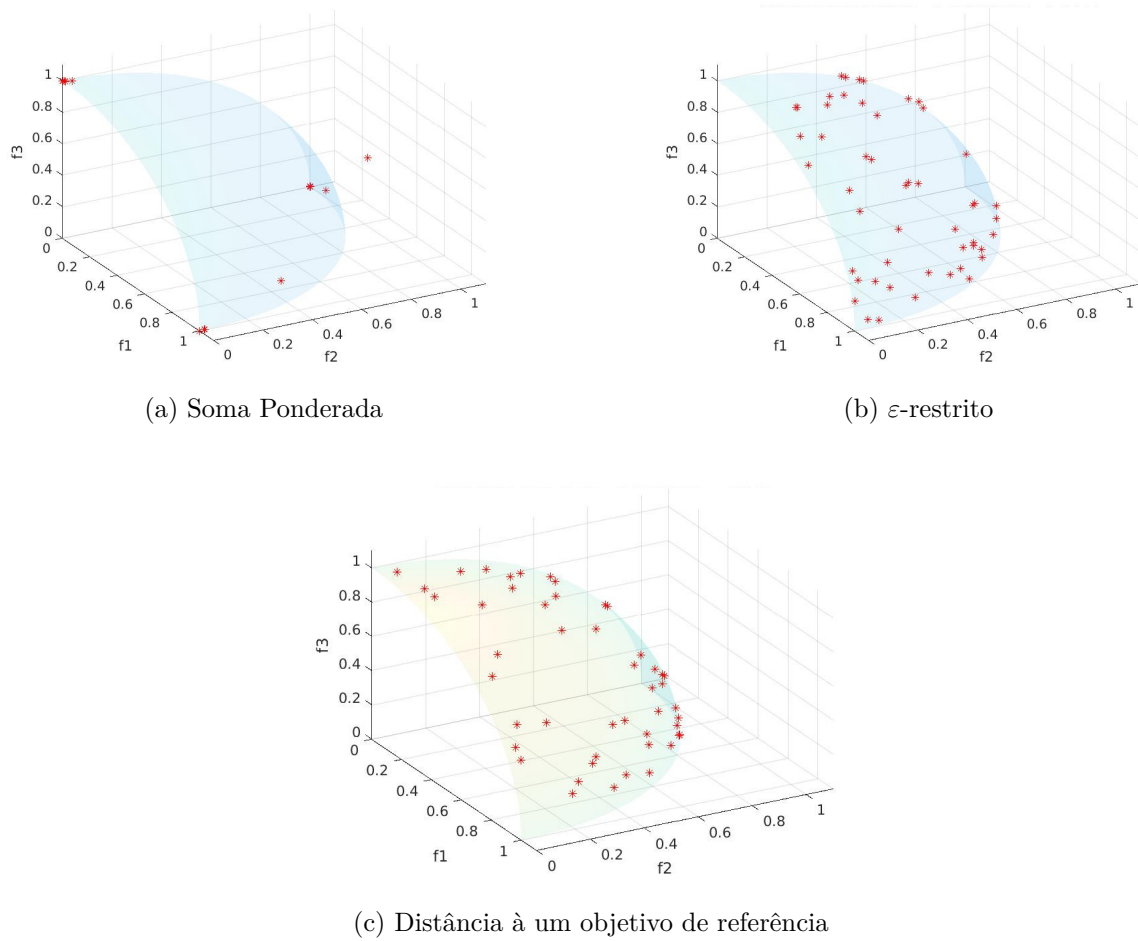


Figura 28 – Resultados dos métodos com o problema DTLZ2

Como esperado, o método da soma ponderada não foi capaz de encontrar as soluções ótimas em toda a fronteira de Pareto, pois o espaço objetivo deste problema não é convexo (ARROYO, 2002). Os pontos foram agrupados nas extremidades do gráfico, como visto

nos pontos 1 a 14. A Figura 28a evidencia a concentração das soluções. É possível observar na Tabela 7 que a média do valor das funções objetivo para o método DTLZ2 ficou muito baixa para F1 e F2, pois a maioria das soluções foi encontrada com resultados próximo a zero, exceto para F3, que teve maior diversidade nos resultados. Para os métodos ε -restrito e Distância a um objetivo de referência os dados sugerem certa proximidade quanto à eficiência em solucionar o problema em questão.

Tabela 7 – Dados estatísticos para o Problema DTLZ2

	Média Ponderada			ε -restrito			Distância a um objetivo		
	F1	F2	F3	F1	F2	F3	F1	F2	F3
Média	0.2420	0.2537	0.5641	0.5596	0.4486	0.4707	0.5005	0.4835	0.4937
Mediana	0.0013	0.2630	0.6692	0.6418	0.4891	0.4899	0.4639	0.5409	0.5339
Variância	0.1515	0.0204	0.0800	0.1211	0.0304	0.0360	0.0887	0.0209	0.0264
Desvio Padrão	0.3893	0.1430	0.2829	0.3480	0.1743	0.1898	0.2977	0.1444	0.1624
Intervalo de Confiança	0.1314	0.2131	0.4837	0.4607	0.3991	0.4168	0.4159	0.4425	0.4475
	0.3526	0.2944	0.6445	0.6585	0.4982	0.5246	0.5851	0.5246	0.5398

4.2.4 Problema DTLZ7

A Tabela 8 apresenta o valor médio para todos os pontos ótimos obtidos em todas as 33 execuções dos métodos *Soma Ponderada*, ε -restrito e *Distância a um objetivo de referência*, considerando a função de benchmark DTLZ7 (2.5.2.7).

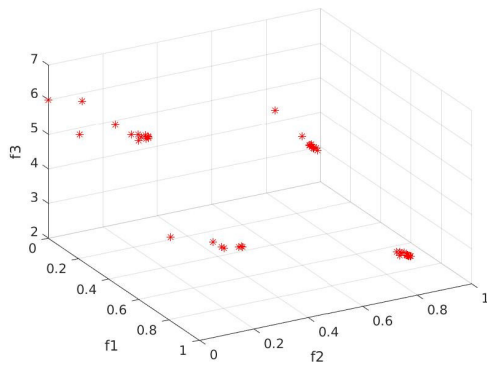
Tabela 8 – Médias dos resultados para o Problema DTLZ7

	Média Ponderada			ε -restrito			Distância		
	F1	F2	F3	F1	F2	F3	F1	F2	F3
1	0	0	6.000	0.243	0.248	5.175	0.215	0.413	4.834
2	0	0.025	5.950	0.251	0.178	5.243	0.215	0.567	4.524
3	0.005	0.074	5.843	0.251	0.208	5.197	0.215	0.660	4.387
4	0.015	0.108	5.763	0.251	0.224	5.178	0.225	0.726	4.545
5	0.019	0.238	5.493	0.251	0.237	5.159	0.234	0.598	4.788
6	0.041	0.304	5.320	0.251	0.255	5.158	0.247	0.649	4.538
7	0.056	0.343	5.224	0.251	0.258	5.148	0.261	0.648	4.745
8	0.064	0.436	5.060	0.251	0.262	5.133	0.270	0.597	4.684
9	0.105	0.497	4.840	0.251	0.288	5.119	0.275	0.573	4.622
10	0.14	0.500	4.759	0.251	0.294	5.087	0.278	0.579	4.492
11	0.171	0.590	4.578	0.251	0.298	5.057	0.298	0.570	4.615
12	0.181	0.503	4.660	0.251	0.340	5.078	0.336	0.634	4.332

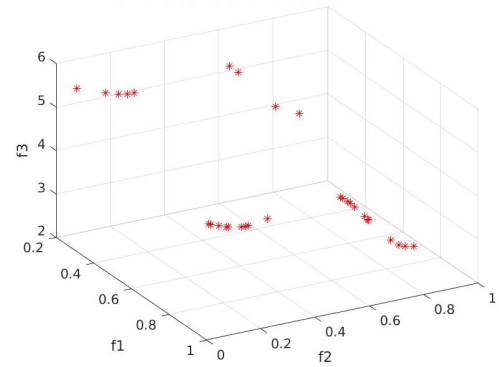
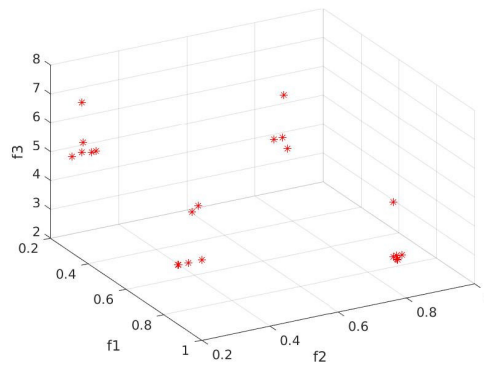
	Média Ponderada			ε -restrito			Distância		
	F1	F2	F3	F1	F2	F3	F1	F2	F3
13	0.192	0.611	4.429	0.251	0.402	5.054	0.371	0.629	4.322
14	0.198	0.590	4.512	0.251	0.474	4.902	0.411	0.683	4.132
15	0.205	0.596	4.440	0.251	0.515	4.926	0.506	0.573	4.300
16	0.209	0.432	4.767	0.318	0.504	4.731	0.540	0.607	4.119
17	0.217	0.502	4.614	0.361	0.577	4.444	0.626	0.481	4.244
18	0.221	0.572	4.468	0.381	0.585	4.315	0.660	0.482	4.088
19	0.241	0.483	4.604	0.490	0.545	4.092	0.694	0.392	4.058
20	0.245	0.451	4.670	0.564	0.413	4.282	0.744	0.399	3.963
21	0.248	0.510	4.551	0.638	0.381	4.094	0.779	0.348	3.978
22	0.266	0.506	4.530	0.656	0.399	4.037	0.830	0.296	3.978
23	0.339	0.576	4.243	0.748	0.314	4.039	0.830	0.334	3.845
24	0.379	0.578	4.148	0.822	0.231	3.997	0.830	0.371	3.711
25	0.448	0.536	4.090	0.859	0.196	3.962	0.830	0.375	3.767
26	0.470	0.481	4.147	0.859	0.228	3.905	0.847	0.450	3.573
27	0.492	0.559	3.955	0.859	0.239	3.891	0.847	0.536	3.380
28	0.595	0.548	3.768	0.859	0.244	3.884	0.847	0.587	3.264
29	0.652	0.497	3.738	0.859	0.249	3.880	0.847	0.645	3.104
30	0.723	0.466	3.660	0.859	0.251	3.880	0.847	0.708	2.936
31	0.746	0.506	3.524	0.859	0.251	3.880	0.847	0.709	2.937
32	0.799	0.542	3.350	0.859	0.251	3.880	0.847	0.762	2.820
33	0.804	0.485	3.448	0.859	0.251	3.880	0.847	0.796	2.743
34	0.823	0.499	3.384	0.859	0.251	3.880	0.847	0.796	2.743
35	0.826	0.498	3.374	0.859	0.253	3.882	0.847	0.830	2.666
36	0.827	0.543	3.288	0.859	0.270	3.899	0.847	0.847	2.627
37	0.846	0.523	3.289	0.859	0.293	3.931	0.847	0.847	2.627
38	0.847	0.468	3.399	0.859	0.335	3.923	0.847	0.847	2.627
39	0.848	0.504	3.326	0.859	0.367	3.864	0.847	0.847	2.627
40	0.849	0.518	3.301	0.859	0.416	3.828	0.847	0.847	2.627
41	0.850	0.519	3.308	0.859	0.474	3.826	0.847	0.847	2.627
42	0.851	0.570	3.199	0.859	0.584	3.699	0.847	0.847	2.627
43	0.852	0.543	3.244	0.859	0.659	3.396	0.847	0.847	2.627
44	0.853	0.537	3.256	0.859	0.709	3.152	0.847	0.847	2.627
45	0.854	0.511	3.305	0.859	0.743	2.970	0.847	0.847	2.627
46	0.855	0.543	3.243	0.859	0.796	2.827	0.847	0.849	2.627
47	0.856	0.544	3.234	0.859	0.83	2.725	0.849	0.774	2.975
48	0.857	0.536	3.255	0.859	0.845	2.671	0.852	0.719	3.258

	Média Ponderada			ε -restrito			Distância		
	F1	F2	F3	F1	F2	F3	F1	F2	F3
49	0.858	0.563	3.201	0.859	0.837	2.722	0.861	0.620	3.300
50	0.859	0.626	3.080	0.866	0.784	3.000	0.868	0.637	3.129

Analisando os resultados da Tabela 8 é possível perceber o método da Soma Ponderada encontrou pontos próximo à fronteira de Pareto estimada, com tendência a agrupamento das soluções. O método ε -restrito agrupou várias soluções ótimas no mesmo ponto no eixo de F1, com poucas variações em F2 e F3, como observado nos pontos 4-15 e 26-48, revelando dificuldades em encontrar boa diversidade de soluções para o problema. É possível notar que o método da Distância a um objetivo de Referência, apresentou piores resultados, encontrando pontos exatamente iguais em várias execuções como observado nos pontos 36-44 dentre outros, que ficaram muito próximos.



(a) Soma Ponderada

(b) ε -restrito

(c) Distância à um objetivo de referência

Figura 29 – Resultados dos métodos com o problema DTLZ7

Comparando os gráficos dos métodos expostos na Figura 29 com a Figura 23 verifica-se que o método da Soma Ponderada comportou-se melhor para este problema,

seguido do método ε -restrito, embora nenhum tenha conseguido encontrar a Fronteira de Pareto exata. Observa-se na Tabela 9 que a média e mediana para os resultados da função F1 para método da soma ponderada foi muito menor que os resultados dos outros métodos, evidenciando melhor distribuição dos pontos no espaço objetivo factível.

Tabela 9 – Dados estatísticos para o Problema DTLZ7

	Média Ponderada			ε -restrito			Distância a um objetivo		
	F1	F2	F3	F1	F2	F3	F1	F2	F3
Média	0.478	0.474	4.137	0.622	0.401	4.158	0.658	0.641	3.587
Mediana	0.459	0.488	4.102	0.859	0.332	3.915	0.838	0.648	3.642
Variância	0.112	0.015	0.690	0.078	0.030	0.494	0.065	0.028	0.619
Desvio Padrão	0.334	0.121	0.831	0.280	0.173	0.703	0.255	0.166	0.786
Intervalo	0.383	0.439	3.901	0.542	0.352	3.958	0.586	0.594	3.363
de Confiança	0.573	0.508	4.373	0.7014	0.450	4.357	0.731	0.688	3.810

4.3 Análise Estatística

Nesta seção realiza-se uma análise estatística dos resultados para verificar se as constatações da seção anterior se confirmam. Utilizou-se a Análise de Variância e Teste de Tukey (MONTGOMERY; RUNGER, 2011). Esses testes são usados quando há a necessidade de se realizar múltiplas comparações entre as variáveis que compõem o grupo amostral.

4.3.1 Análise de Variância

Inicialmente definiu-se as seguintes hipóteses:

Hipóteses

H_o : Não existe diferença significativa entre os métodos.

H_1 : Existem diferenças significativas entre os métodos.

Significância desejada: $\alpha = 0.05$.

A Tabela 10 apresenta o resultado da análise de variância para todos os problemas estudados.

Tabela 10 – Análise de variância das médias encontradas

Problema		Df	Sum Sq	Mean Sq	F-value	Pr(>F)
ZDT1	Métodos	2	0.1994	0.09971	16.97	2.33e-07
	Resíduos	147	0.8635	0.00587		
ZDT3	Métodos	2	0.937	0.4687	7.503	0.00079
	Resíduos	147	9.184	0.0625		
DTLZ2	Métodos	2	5.836	2.9181	261.3	<2e-16
	Resíduos	147	1.642	0.0112		
DTLZ7	Métodos	2	2.247	1.1234	6.231	0.00253
	Resíduos	147	26.501	0.1803		

Nota-se que para todos os problemas de teste o valor de Pr é menor que o nível de significância desejado, portanto pode-se afirmar com 95% de confiança que existem diferenças no valor médio dos resultados dos métodos, o que implica na rejeição de H_0 (MONTGOMERY; RUNGER, 2011).

4.3.2 Teste de Tukey

Para a realização do teste de múltiplas comparações de médias definiu-se as seguintes hipóteses:

Hipóteses

$H_0 : \bar{x}_{EC} = \bar{x}_{CP}$ (As médias dos resultados para ε -restrito e Distância a um objetivo de referência não diferem significativamente)

$H_1 : \bar{x}_{WP} = \bar{x}_{CP}$ (As médias dos resultados para Soma Ponderada e Distância a um objetivo de referência não diferem significativamente)

$H_2 : \bar{x}_{WP} = \bar{x}_{EC}$ (As médias dos resultados para Soma Ponderada e ε -restrito não diferem significativamente)

A Tabela 11 apresenta os resultados dos testes realizados para todos os problemas analisados.

A partir da análise dos dados para o problema ZDT1 rejeita-se as hipóteses H_1 e H_2 , visto que pode-se afirmar com 95% de confiança que o método da Soma Ponderada possui em seus resultados diferenças significativas em comparação aos resultados dos métodos ε -Restrito e Distância a um Objetivo, pois o p – valor para ambos os testes (WP-CP e WP-EC) foi inferior ao nível de significância desejado que é de 0.05 (MONTGOMERY; RUNGER, 2011). Entretanto, constata-se pela análise da Tabela 11 que os métodos ε -restrito e Distância a um Objetivo não apresentaram diferenças significativas nos resultados obtidos para resolução o problema, sendo considerados boas soluções. Esta análise corrobora as impressões obtidas na seção 4.2.1.

Tabela 11 – Resultado do teste de múltiplas comparações de médias de Tukey.

Problema	Método	Diff	Lower	Upper	p-valor
ZDT1	EC-CP	0.0166054	-0.01968789	0.05289869	0.5259234
	WP-CP	0.0843002	0.04800691	0.12059349	0.0000005
	WP-EC	0.0676948	0.03140151	0.10398809	0.0000573
ZDT3	EC-CP	-0.1478570	-0.26621689	-0.02949711	0.0100468
	WP-CP	0.0343640	-0.08399589	0.15272389	0.7711978
	WP-EC	0.1822210	0.06386111	0.30058089	0.0010724
DTLZ2	EC-CP	0.0011800	-0.04886630	0.05122630	0.9982833
	WP-CP	-0.4178400	-0.46788630	-0.36779370	0.0000000
	WP-EC	-0.4190200	-0.46906630	-0.36897370	0.0000000
DTLZ7	EC-CP	0.2929800	0.0919207867	0.49403920	0.0021013
	WP-CP	0.2014800	0.0004207867	0.40253920	0.0493947
	WP-EC	-0.0915000	-0.2925592133	0.10955920	0.5295122

Quanto aos dados do problema ZDT3, rejeita-se as hipóteses H_0 e H_2 , uma vez que pode-se afirmar com 95% de confiança que o método ε -Restrito possui em seus resultados diferenças significativas quando comparados aos resultados dos métodos Soma Ponderada e Distância a um Objetivo, pois o $p - valor$ para ambos os testes (EC-CP e WP-EC) foi inferior ao nível de significância desejado que é de 0.05 (MONTGOMERY; RUNGER, 2011).Entretanto, constata-se pela análise da Tabela 11 que os métodos Soma Ponderada e Distância a um Objetivo não apresentaram diferenças significativas nos resultados obtidos para resolução o problema, sendo considerados boas soluções. Esta análise corrobora as impressões obtidas na seção 4.2.2.

Para o problema DTLZ2 rejeita-se as hipóteses H_1 e H_2 pois pode-se afirmar com 95% de confiança que o método da Soma Ponderada possui em seus resultados diferenças significativas em comparação aos resultados dos métodos ε -Restrito e Distância a um Objetivo, pois o $p - valor$ para ambos os testes (WP-CP e WP-EC) foi inferior a 0.05 (MONTGOMERY; RUNGER, 2011). Entretanto, constata-se pela análise da Tabela 11 que os métodos ε -restrito e Distância a um Objetivo não apresentaram diferenças significativas nos resultados obtidos para resolução o problema, sendo considerados boas soluções. Esta análise corrobora as impressões obtidas na seção 4.2.3.

Para o problema DTLZ7 rejeita-se as hipóteses H_0 e H_1 pois pode-se afirmar com 95% de confiança que o método da Distância a um Objetivo possui em seus resultados diferenças significativas em comparação aos resultados dos métodos ε -Restrito e Soma Ponderada, pois o $p - valor$ para ambos os testes (EC-CP e WP-CP) foi inferior a 0.05 (MONTGOMERY; RUNGER, 2011). Entretanto, constata-se pela análise da Tabela 11 que os métodos ε -Restrito e Soma Ponderada não apresentaram diferenças significativas nos resultados obtidos para resolução o problema, sendo considerados boas soluções. Esta análise esclarece as impressões obtidas na seção 4.2.4.

5 Conclusão

Após a execução e análise dos métodos estudados, é possível extrair algumas conclusões no que diz respeito à eficácia dos mesmos em cada função de *benchmark*.

Conforme apresentado na seção 2.4 os métodos escalares de otimização multiobjetivo representam uma possibilidade de solução para um problema de múltiplos objetivos, através de sua conversão em um problema mono-objetivo. Desta forma, este trabalho concentrou esforços em avaliar a capacidade destes métodos em lidar com tais problemas, que podem ser de difícil resolução. As funções de *benchmark* escolhidas emulam problemas reais e possuem comportamento distinto que permitiram testar as características de cada método (ZITZLER; DEB; THIELE, 2000; DEB et al., 2001).

No processo de codificação e testes, verificou-se que para o método da Distância a um objetivo o ponto de referência não poderia ser livremente gerado pelo algoritmo, pois o método requer que o tal ponto esteja fora da região admissível. Nas primeiras execuções os resultados foram muito ruins e após ajustes que delimitaram o espaço de geração aleatória do ponto, a qualidade dos resultados melhorou consideravelmente.

Constatou-se ainda que para problemas de baixa complexidade como o ZDT1 todos os algoritmos conseguiram encontrar a frente de Pareto global. Esse comportamento ocorre devido ao fato do problema possuir uma frente de Pareto contínua e convexa (ARROYO, 2002). Observa-se ainda que o método da Distância a um Objetivo de Referência foi o que obteve melhores resultados encontrando pontos ótimos bem distribuídos ao longo de toda a fronteira de Pareto.

Ademais, com um nível de complexidade maior, possuindo uma frente de Pareto descontínua e multimodal, o problema ZDT3 revelou-se desafiador principalmente para o método ε -restrito, que apresentou dificuldade de convergir para a fronteira Pareto-ótima, encontrando vários pontos dominados no conjunto solução. O método da soma ponderada foi mais eficiente quanto à cobertura da fronteira de Pareto, com uma melhor distribuição dos resultados, no entanto o método da Distância a um objetivo de referência também mostra tendência a apresentar bons resultados, apesar do forte agrupamento das soluções.

O problema DTLZ2 mostrou-se bastante complexo para todos os métodos; sua fronteira de Pareto corresponde a um segmento de esfera localizado no 1º Octante (DEB et al., 2001). Assim, o método da Soma Ponderada foi completamente ineficaz praticamente agrupando as soluções em três pontos. Verificou-se ainda em alguns momentos pontos aleatórios, muitas vezes dominados. Os métodos ε -restrito e Distância a um objetivo de referência conseguiram lidar bem com o problema, mostrando capacidade de cobrir toda a fronteira, o que aconteceria se o teste fosse feito com um número maior de pontos.

O problema DTLZ7 foi o que apresentou maior dificuldade para os métodos analisados, devido à descontinuidade da Fronteira de Pareto. Embora todos os métodos tenham conseguido perceber tal descontinuidade, os resultados foram em média insatisfatórios, e apenas o método da Soma Ponderada funcionou de maneira regular.

O uso dos testes de análise de variância e o teste de múltiplas comparações médias de Tukey foi importante para demonstrar as semelhanças (ou diferenças) nos resultados médios das execuções, e podem ser considerados importantes metodologias de comparação da eficácia dos métodos de otimização.

Por fim, verifica-se que para problemas menos complexos os métodos escalares são satisfatórios, no entanto, à medida que crescem o número de objetivos e consequentemente as restrições para o problema, o uso de algoritmos evolutivos pode ser mais aconselhável.

5.1 Trabalhos Futuros

Pretende-se como trabalhos futuros:

- Avaliar o desempenho de métodos evolutivos, como por exemplo Differential Evolution - DE, Clonal Selection Algorithm e Genetic Algorithm - GA, utilizando as funções de *benchmark* avaliadas neste trabalho.
- Testar a capacidade dos métodos evolutivos em resolver as funções DTLZ com um grande número de objetivos.

Referências

- ALMEIDA, C. P. *Transgenética computacional aplicada a problemas de otimização combinatória com múltiplos objetivos*. Tese (Doutorado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2012.
- ANTUNES, C. H.; ALVES, M. J. Programação Linear Multiobjetivo-Métodos Iterativos E Software. *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, p. 4725–4736, 2012.
- ANTUNES, C. H. et al. *Multiobjective Linear and Integer Programming*. [S.l.: s.n.], 2016. ISBN 978-3-319-28744-7.
- ARROYO, J. E. C. *Heurísticas E Metaheurísticas Para Multiobjetivo*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2002.
- BARBOSA, L. Z. *Técnicas de otimização baseadas no paradigma de enxames de partículas e sua aplicação ao projeto de equipamentos eletromagnéticos*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012.
- BARDANACHVILI, C. A. *Otimização Multiobjetivo com Estratégias Evolutivas Aplica a Projetos Estruturais*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2006.
- BECCENERI, J. C. Meta-heurísticas e Otimização Combinatória: Aplicações em Problemas Ambientais. 2012.
- CASTRO, R. E. *Otimização de estruturas com multi-objetivos via algoritmos genéticos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2001.
- CHASE, N. et al. A Benchmark Study of Multi-Objective Optimization Methods. 2013.
- CLÍMACO, J. et al. *Programação linear multiobjetivo: do modelo de programação linear clássico à consideração explícita de várias funções objetivo*. [S.l.]: COIMBRA EDITORA, 2003. ISBN 9789728704131.
- CORDEIRO, F. R. *Uma Ferramenta de Simulação para Otimização Multi-Objetiva Evolucionária*. Monografia (Especialização), 2008.
- DARWIN, C. *On the origin of species by means of natural selection*. [S.l.: s.n.], 1859. v. 5. 386 p. ISSN 00335770. ISBN 0451529065.
- DEB, K. Multi-objective Genetic Algorithms: Problem Difficulties and Construction of Test Problems. *Evolutionary Computation*, v. 7, n. 3, p. 205–230, 1999. ISSN 1063-6560.
- DEB, K. Multi-objective optimisation using evolutionary algorithms: An introduction. In: _____. *Multi-objective Evolutionary Optimisation for Product Design and Manufacturing*. London: Springer London, 2011. p. 3–34.
- DEB, K. et al. Scalable test problems for evolutionary multi-objective optimization. *TIK-Report*, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich (ETH), Institut für Technische Informa und Kommunikationsnetze (TIK), v. 112, 1 2001.

- FIGUEIREDO, E. M. d. N. *Algoritmo Baseado em Enxame de Partículas para Otimização de Problemas com Muitos Objetivos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, 2013.
- FILHO, A. A. *Novas Extensões de Técnicas de Escalarizações no Problema de Corte Unidimensional Inteiro Multiobjetivo*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2016.
- FORMIGA, K. *Otimização Multiobjetivo de Projetos de Redes*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2005.
- JAIMES, A. L. et al. An introduction to multiobjective optimization techniques. In: . [S.l.: s.n.], 2011. p. 29–57. ISBN 978-1-61122-818-2.
- JÚNIOR, G. P. *Métodos de otimização multiobjetivo e de simulação aplicados ao problema de planejamento operacional de lavra em minas a céu aberto*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Ouro Preto, 2011.
- LOBATO, F. S. *Otimização multi-objetivo para o projeto de sistemas de engenharia*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2008.
- LOBIANCO, A. T. d. M.; ANGULO-MEZA, L. Uma Comparação De Métodos De Solução Para Problemas De Programação Linear Multiobjetivo. *X Simpósio de Pesquisa Operacional e Logística da Marinha-SPOLM*, 2007.
- MARTINS, R. C. *Análise de algoritmos evolucionários na resolução de funções de benchmark irrestritas*. Monografia — Universidade Estadual do Tocantins, 2017.
- MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. *Applied Statistics and Probability for Engineers*. [S.l.: s.n.], 2011. 792 p. ISBN 9780470053041.
- OLIVEIRA, L. S. D. *Uma contribuição ao estudo dos métodos de otimização multi-objetivo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2005.
- RAMPAZZO, P. C. B. *Planejamento Hidrelétrico: Otimização Multiobjetivo e Abordagens Evolutivas*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, 2012.
- RIBEIRO, R. de S. *Comparação De Algoritmos Evolucionários Para Problemas Com Muitos Objetivos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2016.
- SAMPAIO, P. R. *Teoria, métodos e aplicações de otimização multiobjetivo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2011.
- SANTOS, F. F. G. d. *Gerenciamento de riscos: otimização multiobjetivo e análise de portfólio de compra e venda de energia*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2013.
- TICONA, W. G. C. *Algoritmos evolutivos multi-objetivo para a reconstrução de árvores logenéticas*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2008.
- ZITZLER, E. Evolutionary Algorithms for Multiobjective Optimization: Methods and Applications. *TIK-Schriftenreihe*, v. 30, n. 30, p. 1–122, 1999.
- ZITZLER, E. et al. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: empirical results. *Evol Comput*, v. 8, n. 2, p. 173–195, 2000.