בעיות קטנות

תלת קרב

תיאור הבעיה:

ישנם שלושה ציידים הנלחמים זה בזה.

לצייד הראשון יש 100 אחוזי פגיעה, לצייד השני יש 80 אחוזי פגיעה, לשלישי יש 50 אחוזי פגיעה. סדר השחקנים נקבע באופן רנדומלי.

בהתאם לעדיפות שהציידים מקבלים בשלב הראשון הם יורים אחד בשני עד שרק אחד מהם יישאר בחיים כאשר כל צייד יכול לירות באחד מהשניים האחרים לפי בחירתו או לירות באוויר.

עלינו לממש פונקציה המדמה קרב בין 3 לוחמים כאשר כל אחד מתנהג לפי האסטרטגיה הטובה ביותר עבורו.

בעיית החציון

הגדרת חציון:

חציון הוא מספר (לא בהכרח איבר המערך) שמחצית מאיברי המערך גדולים ממנו ומחצית מאיברי המערך קטנים ממנו.

תיאור הבעיה:

בהינתן מערך לא ממויין של מספרים אקראיים, יש למצוא איבר שהוא גדול מהחציון של המערך , כלומר, מספר שחצי מאיברי המערך גדולים ממנו וחצי קטנים ממנו.

פתרון נאיבי:

נמיין את המערך ניקח את האיבר האחרון כי הוא בטוח גדול מהחציון, הסיבוכיות תהיה O(nlogn) = מיון + לקיחת איבר (O(1)).

פתרון אופטימלי:

אם ניקח את האיבר הראשון[0]a ההסתברות שהוא גדול מהחציון היא 50%.

אם ניקח את שני האיברים הראשונים של המערך a[0], a[1] ההסתברות שהמקסימום מבניהם יהיה גדול מהחציון היא 75%.

אם ניקח את שלושת האיברים הראשונים של המערך a[0], a[1], a[2] ההסתברות שהמקסימום מבניהם היה גדול מהחציון היא $\frac{7}{8}$.

אם ניקח את 64 האיברים הראשונים של המערך, ההסתברות שהגדול בניהם נמצא במחצית הימנית של המערך היא 1 ,
מכיוון שמספר כל תתי הקבוצות של 64 איברים הוא 2^{64} ולכן $\leftarrow 1-\frac{1}{2^{64=1}}=\frac{2^{64}-1}{2^{64}}$

✡ **<u>בעיית הפיצה</u>**

<u>תיאור הבעיה:</u>

אלי ובני הזמינו פיצה משפחתית. מהירות אכילה של אלי גדולה פי X ממהירות האכילה של בני (X>1), וניתן לחלק את הפיצה ל-N משולשים שווים.

במהלך הארוחה כל אחד לוקח משולש נוסף לאחר שסיים את הקודם, אסור ששניהם יגיעו למשולש האחרון בו זמנית, יש למצוא את החלוקה האופטימאלית כך שאלי יאכל כמה שיותר משולשים.

<u>פתרון:</u>

נוכיח שהחלוקה האופטימאלית היא כפולה של X+1 .

1. נניח שהחלוקה האופטימאלית היא N=X (כמות המשולשים תהיה שווה למהירות האכילה של אלי) - במקרה זה אלי יאכל $\frac{N-1}{N}$ משולשים , ובני יאכל $\frac{1}{N}$ משולשים, ואז הם לא יסיימו בו זמנית.
2. אם נחלק ל N=X+1 חלקים אז אלי יאכל $\frac{N}{N+1}$, ובני יאכל $\frac{1}{N+1}$, ואז הם יסיימן בו זמנית.

צריך להוכיח $\frac{N}{N+1} < \frac{N-1}{N}$ ← $(N-1)(N+1) < N^2$ ← $N^2 - 1 < N^2$, אי השיוויון מתקיים ולכן עדיף לחלק ל $X+1$ חלקים.

כאשר $X+1$ הוא מס' המשולשים שהם מסיימים לאכול בו זמנית, ו-P היא הכפולה (כמות הסיבובים), מס' החלקים N צריך להתקיים: $N \neq (X+1) \cdot P + 1$ כדי להימנע ממצב שבו שניהם מגיעים למשולש האחרון בו זמנית, מכיוון שהם אוכלים יחד $(X+1) \cdot P$ ואז יישאר משולש אחרון שאליו הם יגיעו יחד וזהו מצב אסור.

נוכיח כי $N = (X+1) \cdot P + r$ כאשר r היא השארית, $2 \leq r \leq X$. **במקרה זה אלי יאכל** $\frac{X \cdot P + r - 1}{(X+1) \cdot P + r}$ מהפיצה, ובני יאכל $\frac{P+1}{(X+1) \cdot P + r}$ מהפיצה **(אלי אוכל את השארית r כי הוא יגיע אליה לפני שבני יסיים).**

צריך להוכיח: $$\frac{X \cdot P + r - 1}{(X+1) \cdot P + r} < \frac{X}{X+1}$$

$$\leftarrow \quad (X \cdot P + r - 1)(X+1) < X\big((X+1) \cdot P + r\big)$$

$$\leftarrow \quad (X^2 \cdot P + XP + Xr + r - X - 1) < X^2 \cdot P + XP + Xr)$$

$$\leftarrow \quad r < X + 1$$

מכאן נובע, השארית קטנה יותר מהחלוקה, ולכן מתקיים והם **לא** יגיעו בו זמנית.

הפונקציה היא $F(x) = X + 1$ וזוהי החלוקה האופטימאלית.

בעיית האסירים

<u>תיאור הבעיה:</u>

- בכלא מסויים יש אסירים וכולם נידונים למוות.
- מנהל הכלא הסכים לאשר להם חנינה במידה ויצליחו באתגר מסויים.
- בכלא יש חדר מיוחד ובו נורה אחת בלבד, כל אסיר יכול להיכנס לחדר מספר פעמים או פעם אחת בלבד באופן אקראי, ולהדליק או לכבות את הנורה.
- אם נציג מהאסירים יאמר בזמן הנכון שכל אחד מהאסירים היה בחדר לפחות פעם אחת- כולם יקבלו חנינה והם יצליחו באתגר.
- בזמן ההתכנסות האסירים בוחרים נציג שיצטרך לומר לסוהרים כאשר יידע שכולם כבר נכנסו לחדר, ובנוסף כל אחד מהאסירים יודע כמה אסירים ישנם סה"כ.

<u>פתרון:</u>

- במקרה ומצב הנורה לא ידוע האסירים יצטרכו לכבות את האור פעמיי מכיוון שייתכן ונכנסו לפני הנציג הסופר.
- ברגע שכיבו פעמיים- הם יודעים שהנציג הסופר כבר נכנס כי רק הוא מדליק את הנורה.

בעיית המזכירה

<u>תיאור הבעיה:</u>

משרד מסויים נותן שירות ל-n לקוחות, מטרת מזכירת המשרד היא להקטין ככל האפשר את זמן הממוצע שהלקוחות נמצאים במשרד.

הזמן שהלקוח נמצא במשרד מורכב מזמן ההמתנה שלו עד תורו יחד עם זמן הטיפול שלו.

זמן ההמתנה הממוצע הוא:

$$AVR = \frac{T_1 + T_2 + \cdots + T_n}{n} \rightarrow min$$

מכאן, מספיק למצוא את המינימום של הסכום שייתן את התוצאה הטובה ביותר,

$$T_n = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$$

<u>פתרון:</u>

1. מעבר על כל הפרמוטציות האפשריות $n! > 2^n$, לא יעיל.

2. נוכיח שמיון התור מהקטן אל הגדול הוא היעיל ביותר.

זמן ההמתנה הכולל הוא:

$$sum = T_1 +..+ T_{i-1} + T_i + T_{i+1} +..+ T_n = t_1 +..+ (t_1 + \cdots + t_{i-1}) + (t_1 + \cdots + t_{i-1} + t_i) + (t_1 + \cdots + t_{i-1} + t_i + t_{i+1}) + \cdots + (t_1 + \cdots + t_{i-1} + t_i + t_{i+1} + \cdots + t_n)$$

נוכיח את הטענה בדרך השלילה:

נניח שזמן ההמתנה t_i (איבר כלשהו במערך לא ממויין) גדול יותר מזמן ההמתנה של הבא בתור, כלומר $t_i > t_{i+1}$, אם נחליף ביניהם $(t_i \leftrightarrow t_{i+1})$ נקבל :

$$sum' = T_1 +..+ T_{i-1} + T_i' + T_{i+1} +..+ T_n = t_1 +..+ (t_1 + \cdots + t_{i-1}) + (t_1 + \cdots + t_{i-1} + \boldsymbol{t_{i+1}}) + (t_1 + \cdots + t_{i-1} + \boldsymbol{t_{i+1}} + \boldsymbol{t_i}) + \cdots + (t_1 + \cdots + t_{i-1} + t_i + t_{i+1} + \cdots + t_n)$$

נחסר בין sum ל"sum ונקבל: $sum - sum' = t_i - t_{i+1} > 0$

כלומר: $sum' < sum$.
ומכאן, הזמן הממוצע קטן יותר כאשר האיברים (זמני הטיפול) הסמוכים נמצאים בסדר עולה.
המסקנה היא שעל המזכירה למיין את מערך זמני הטיפול מהקצר לארוך ובהתאמה לקבוע את התור.

בעיית הסופגניות

תיאור הבעיה:

- במחבת יש מקום ל-P סופגניות, ויש K סופגניות בסך הכל.
- זמן ההכנה לכל סופגנייה הוא 2 דק' (דקה לכל צד).

מהו הזמן המינימלי להכנת K סופגניות?

פתרון:

טענה: הכנת K סופגניות דורשת K דקות.

הוכחה:

1. אם K הוא מספר זוגי: $K = 2 \cdot m$, כאשר m הוא מס' הזוגות של סופגניות במחבת.
במקרה זה נכין את הסופגניות בזוגות, 2 דק' עבור כל זוג.

2. אם K הוא מספר אי זוגי: $K = 2 \cdot m + 1$, במקרה זה יהיו m-1 זוגות שעבורם יהיו 2 דק' הכנה, והזוג האחרון יצטרף לסופגנייה הבודדת והם יהיו שלישייה שעבורם ידרשו 3 דק' הכנה. $K = 2 \cdot (m-1) + 3 = 2 \cdot m + 1$

נממש פונקציה אשר מקבלת את מספר הסופגניות שנכנסות במחשבת ואת מספר הסופגניות הנתונות ותחזיר את זמן הטיגון של הסופגניות בדקות(כאשר זמן טיגון של כל צד הוא דקה).

בעיית הקומפיילר:

תיאור הבעיה:

כל תוכנה בקומפיילר מורכבת מאורך l_i והסתברות שימוש P_i, כדי להגיע לתוכנה כלשהי הקומפיילר צריך לעבור את כל התוכנות הנמצאות לפניה.
יש לסדר את התוכנות כך שזמן הריצה הממוצע יהיה הנמוך ביותר. יש $n!$ אפשרויות לסדר את התוכנית. יש זמן ריצה ממוצע T ויש למצוא לו זמן מינימלי :

$$T = l_1P_1 + (l_1 + l_2)p_2 + \cdots + (l_1 + \cdots + l_n)P_n$$

פתרון:

1. חיפוש שלם- לסדרה המורכבת מ-n איברים יש $n! > 2^n$ אפשרויות, לא יעיל.

2. נניח שכל ההסתברויות שוות- במקרה זה $T = (l_1 + (l_1 + l_2) + \cdots + (l_1 + \cdots + l_n)) \cdot P$
קיבלנו בעצם את בעיית המזכירה וכדי שזמן הריצה יהיה מינימלי יש למיין את התוכנות (מערך של l_i) בסדר עולה.

נניח שכל התוכנות שוות אורך- במקרה זה $T = l(P_1 + 2p_2 + \cdots + nP_n)$

נצטרך למיין את מערך ההסתברויות בסדר יורד (מערך של P_i) כך שההסתברות הגדולה ביותר תקבל את המקדם הקטן יותר על מנת שיהיה ממנה כמה שפחות, וההסתברות הקטנה ביותר תקבל את המקדם הגדול ביותר על מנת לחסוך מההסתברויות הגדולות.

כעת נסתכל על המקרה הכללי- צריך להבין לפי מה נקבע את סדר התוכנות על מנת שנקבל זמן ריצה נמוך ביותר כאשר נרצה למצוא תוכנה מסוימת.

דוגמה: $L = P_1 + 2P_2 + 3P_3$

$$L' = P_1 + 2P_3 + 3P_2$$

$$L - L' = -p_2 + p_3 > 0$$

$$L - L' > 0 \rightarrow L > L'$$

כאשר $P_3 > P_2$, נחסר בין המשוואות והוכחנו שאם נחליף ביניהם נקבל תוצאה טובה יותר .

במקרה הכללי- ננסה להחליף בין שתי תוכנות סמוכות, תוכנה במיקום i עם תוכנה במיקום $i+1$ ← T'.

$$T = l_1P_1 + (l_1 + \cdots + l_{i-1} + l_i)P_i + (l_1 + \cdots + l_i + l_{i+1})P_{i+1} + \cdots + (l_1 + \cdots + l_n)P_n$$

$$T' = l_1P_1 + (l_1 + \cdots + l_{i-1} + l_{i+1})P_{i+1} + (l_1 + \cdots + l_{i+1} + l_i)P_i + \cdots + (l_1 + \cdots + l_n)P_n$$

$$T - T' = P_{i+1}l_i - P_i l_{i+1}$$

לאחר שחיסרנו בין הזמנים קיבלנו $T>T'$:

$$T - T' > 0 \rightarrow P_{i+1}l_i - P_i l_{i+1} > 0 \rightarrow P_{i+1}l_i > P_i l_{i+1} \rightarrow \frac{P_{i+1}}{l_{i+1}} > \frac{P_i}{l_i}$$

כלומר, כדי לקבל זמן ממוצע מינימלי יש למיין מערך של יחסים $\left\{\frac{P_i}{l_i}\right\}$ בסדר יורד מהגדול לקטן, אך אם יש זוג איברים סמוכים בסדרה $\left\{\frac{P_i}{l_i}\right\}$ כאשר הבא גדול מקודם ניתן להקטין את זמן הממוצע בעזרת שינוי הסדר של האיברים.

<u>סיבוכיות:</u>

$O(n)+O(n\log n)=O(n\log n)$, חישוב הסדרה ומיון.