משחק המספרים

תיאור הבעיה:

נתון מערך A בעל n איברים כאשר n הוא מס' זוגי ויש שני שחקנים.
כל אחד מהשחקנים בתורו בוחר מספר מהקצה השמאלי או מהקצה הימני של המערך.
המנצח הוא בעל סכום המספרים הגדול ביותר.

השאיפה היא לנצח ברווח המקסימלי ביותר של סכום המספרים שלנו בכל משחק.

1	3	6	1	3	6

נניח כי השחקן הראשון הוא אנחנו והוא תמיד המתחיל בכל משחק.
בנוסף, תמיד נחשוב שאנחנו משחקים מול השחקים הטוב ביותר בעולם, אסור לטעות.

פתרון:

אפשרות א'- אלגוריתם חמדני

- אנו צריכים לבחור מספר אחד מהקצה השמאלי או הימני של המערך.
- בכל שלב כזה אנו נבחר את האפשרות הטובה ביותר הנראית לעין מבלי לקחת בחשבון את המשך השלבים.

אסטרטגיה זו לא תמיד מובילה לניצחון.

אפשרות ב'- זוגי או אי זוגי

- לפני תחילת המשחק נחשב את סכום האיברים במקומות הזוגיים במערך ואת הסכום של האיברים במקומות האי זוגיים במערך ונבחר את הגדול מבניהם.
- לאחר שבחרנו את הסכום, נתחיל את המשחק כאשר הזכות להיות ראשונים היא שלנו.
- בכל שלב, אנו תמיד נבחר במערך את המספר במקום הזוגי או האי זוגי בהתאם לסכום שבחרנו בתחילת המשחק.

אסטרטגיה זו אינה נותנת את הרווח המקסימלי.

אפשרות ג'- אסטרטגיה אדפטיבית

- בכל שלב נחשב את הסכום הזוגי/ האי זוגי הקיימים ונבחר במספר המשתלם לנו.
- אפשרות זו יותר טובה מאפשרות ב' כי היא מאפשרת לנו לנצח גם במקרה של סכום שווה.

גם אסטרטגיה זו לא נותנת לנו תמיד את הרווח המקסימלי.

<u>אפשרות ד'- תכנות דינאמי</u>

- נעבור על כל אפשרויות המשחק שלנו.
- נבנה מטריצת ער ובאלכסון שלה נציב את איברי המערך הנתון במשחק.
- כל תא במטריצה הוא אפשרות משחק.
- נרוץ מהפינה הימנית התחתונה עד להתחלה של המטריצה, בכל תא יהיה את מקסימום הרווח שניתן לקבל.
- לאחר הפעלת כל אפשרויות המשחקים על המטריצה, נשלח לפונקציה שתבצע חישוב לאחור כדי לחשב את הסכום שצבר שחקן א' וגם עבור שחקן ב'.
- לבסוף נציג את ההפרש המקסימלי שקיבלנו ונציג את הסכום שקיבל כל שחקן .

עבור המערך הבא:

4	1	5	9

נצהיר על מטריצה חדשה ונציב באלכסון הראשי שלה את מערך המשחק:

4			
	1		
		5	
			9

לאחר הצבת האלכסון נתחיל להפעיל את המשחקים ולהציב בכל תא מתאים את הרווח המקסימלי עבור כל משחק. לאורך חישוב המטריצה נפעיל את הנוסחה הבאה עבור כל תא:

$$mat[i][j] = Math.\max\,(\,mat[i][i]\;-\;mat[i+1][j]\,,\;mat[j][j]\;-\;mat[i][j-1]\,)$$

עבור חישוב האלכסון הראשון נסתכל על התא שצבוע **בכחול** ונשאל עבור איזה משחק מבין 2 האפשרויות נקבל את הרווח המקסימלי ? – כלומר :

4			
	1		
		5	
			9

$$mat[2][3] = Math.\max\,(\,mat[2][2] - mat[2+1][3], mat[3][3] - mat[2][3-1]\,)$$

$$mat[2][3] = Math.\max(5-0, 9-5) = Math.\max(-4, 4) = 4$$

וכך נפעל עבור כל שאר האלכסון ועבור כל תא במטריצה .

בסופו של דבר נקבל את המטריצה הבאה:

4	3	2	7
	1	4	5
		5	4
			9

ניתן לראות כי הרווח המקסימלי שהשחקן שלנו יכול להשיג הוא 7, כלומר המספר שנמצא בתא הצבוע בכחול.

כעת, נרצה לחשב את הסכום שצבר השחקן שלנו לאורך המשחק, לכן נחזור אל הנוסחה שהצגנו ונתחיל מהתא של המשחק המרכזים ונשאל איזה תא סיפק לנו את הרווח שבו אנו עומדים ?

$$mat[i][j] = Math.\max\,(\,mat[i][i] \;-\; mat[i+1][j]\,,\; mat[j][j] \;-\; mat[i][j-1]\,)$$

כלומר עבור המקרה שלנו, אנו מסתכלים על התא שבו הספרה 7, נחזור לנוסחה ונבחן מי הגורם לרווח זה ?

$$7 = Math.\max\,(\;4-5, 9-2\,)$$

ברור ש$7 = 2 - 9$ ולכן נבחר את 9 להיות חלק מהסכום שלנו, וכל הלאה עד שנסיים את חישוב המשחק.

<u>הסיבוכיות:</u> ממלאים מטריצה $n \times n$ לחישוב הרווחים ולכן תהיה $O(n^2)$.