פיבונאצ'י

סדרת פיבונאצ'י היא סדרה רקורסיבית המוגדרת על ידי כלל הנסיגה הבא:

$$F_1 = F_2 = 1$$

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$$

כאשר F_n הוא איבר במקום ה-n בסדרת פיבונאצ'י.

יחס הזהב

לאיברי הסדרה יש כמה תכונות , אחת מהן היא היחס בין איברים עוקבים של הסדרה, כלומר למנה $\frac{F_n}{F_{n-1}}$.

אם מסתכלים על הגבול של המנה הזו נקבל מספר אי רציונלי $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, מספר זה מכונה "יחס הזהב".

פתרון:

דרך פשוטה למציאת איבר n בסדרת פיבונאצ'י היא בעזרת יחס הזהב,

נשים לב ששיטה זו עובדת החל מהאינדקס החמישי ויודעת לחשב עד האיבר ה-34 ולא יותר מזה.

סדרת פיבונאצ'י ומטריצות

שיטה נוספת להחזיר איבר באינדקס n בסדרת פיבונאצ'י היא בעזרת חישוב נוסחת הסדרה ע"י מטריצות.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

כאשר n הוא האיבר באינדקס n של סדרת פיבונאצ'י.

אלגוריתם:

כדי לחשב את סדרת פיבונאצ'י נשתמש בכפל מטריצות, נגדיר מטריצה ראשונית להיות ערכי ההתחלה של הסדרה ונכפיל אותה n-1 פעמים.

הוכחת נכונות האלגוריתם באינדוקציה:

הנחת האינדוקציה- $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$.

צעד האינדוקציה- צריך להוכיח כי $A^{n+1} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{+1} & F_n \end{pmatrix}$:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{+1} & F_n \end{pmatrix}$$

כדי לקבל פתרון נכפול את $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n פעמים, ונחזיר את הפתרון שהתקבל במיקום mat[0][0] כלומר את $F_n + 1$, מכיוון שסדרת פיבונאצ'י מתחילה באיבר 0 ועד עכשיו ספרנו אינדקסים החל מאיבר 1.

בצורה אינדוקטיבית הסיבוכיות תהיה O(n) .

בצורה רקורסיבית הנוסחה שהצגנו תספק לנו סיבוכיות בזמן ריצה של O(logn) .

עבור איבר באינדקס שלילי של סדרת פיבונאצ'י נראה פתרון רקורסיבי פשוט שעובד עבור כל איבר n .