

LEHRBUCH

Lothar Papula

# Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3

Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung,  
Mathematische Statistik, Fehler- und  
Ausgleichsrechnung

7. Auflage



Springer Vieweg

---

# Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3

Die drei Bände *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler* werden durch eine Formelsammlung, ein Buch mit Klausur- und Übungsaufgaben sowie ein Buch mit Anwendungsbeispielen zu einem Lehr- und Lernsystem ergänzt:

Lothar Papula

**Mathematische Formelsammlung**

Für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Mit zahlreichen Abbildungen und Rechenbeispielen  
und einer ausführlichen Integraltafel

**Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler –  
Klausur- und Übungsaufgaben**

632 Aufgaben mit ausführlichen Lösungen zum Selbststudium  
und zur Prüfungsvorbereitung

**Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler –  
Anwendungsbeispiele**

222 Aufgabenstellungen mit ausführlichen Lösungen

---

Lothar Papula

# Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3

Vektoranalysis,  
Wahrscheinlichkeitsrechnung,  
Mathematische Statistik, Fehler- und  
Ausgleichsrechnung

7. Auflage

Mit 550 Abbildungen, zahlreichen Beispielen aus  
Naturwissenschaft und Technik sowie 295  
Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen



Springer Vieweg

Lothar Papula  
Wiesbaden, Deutschland

ISBN 978-3-658-11923-2  
DOI 10.1007/978-3-658-11924-9

ISBN 978-3-658-11924-9 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnetet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer Fachmedien Wiesbaden 1994, 1997, 1999, 2001, 2008, 2011, 2016

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Ein speicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk be rechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

*Lektorat:* Thomas Zipsner

*Abbildung:* Graphik & Text Studio Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media ([www.springer.com](http://www.springer.com))

---

# Vorwort

Das dreibändige Werk **Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler** ist ein Lehr- und Arbeitsbuch für das *Grund- und Hauptstudium* der naturwissenschaftlich-technischen Disziplinen im Hochschulbereich. Es wird durch eine **mathematische Formelsammlung**, einen **Klausurentrainer** und ein Buch mit **Anwendungsbeispielen** zu einem kompakten *Lehr- und Lernsystem* ergänzt. Die Bände 1 und 2 lassen sich dem *Grundstudium* zuordnen, während der vorliegende dritte Band spezielle Themen aus dem *Hauptstudium* behandelt.

## Zur Stoffauswahl des dritten Bandes

Im vorliegenden dritten Band werden die folgenden Stoffgebiete behandelt:

- **Vektoranalysis:** Kurven und Flächen, Skalar- und Vektorfelder, Gradient, Divergenz und Rotation, spezielle ebene und räumliche Koordinatensysteme, Linien- oder Kurvenintegrale, Oberflächenintegrale, Integralsätze von Gauß und Stokes
- **Wahrscheinlichkeitsrechnung:** Kombinatorik, Zufallsexperimente, Wahrscheinlichkeiten, Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen, Kennwerte oder Maßzahlen einer Verteilung, spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen wie z. B. Binomial-, Poisson- oder Gaußverteilung, Verteilungen von mehreren Zufallsvariablen, Prüf- oder Testverteilungen wie z. B. Chi-Quadrat- oder  $t$ -Verteilung
- **Grundlagen der mathematischen Statistik:** Zufallsstichproben, Häufigkeitsverteilungen, Kennwerte oder Maßzahlen einer Stichprobe, Parameterschätzungen, Parametertests, Anpassungs- oder Verteilungstests wie z. B. der Chi-Quadrat-Test, Korrelation und Regression
- **Fehler- und Ausgleichsrechnung:** „Fehlerarten“ und Messabweichungen, statistische Verteilung der Messwerte und Messabweichungen, Auswertung einer Messreihe, Vertrauensbereiche, „Fehlerfortpflanzung“ nach Gauß (Varianzfortpflanzungsgesetz), Ausgleichs- oder Regressionskurven
- Im **Anhang (Teil A)** findet der Leser wichtige Tabellen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (auf farbigem Papier gedruckt).

## Zur Darstellung des Stoffes

Auch in diesem Band wurde eine anschauliche, anwendungsorientierte und leicht verständliche Darstellungsform des mathematischen Stoffes gewählt. Begriffe, Zusammenhänge, Sätze und Formeln werden durch zahlreiche Beispiele aus Naturwissenschaft und Technik und anhand vieler Abbildungen näher erläutert.

Einen wesentlichen Bestandteil dieses Werkes bilden die **Übungsaufgaben** am Ende eines jeden Kapitels (nach Abschnitten geordnet). Sie dienen zum Einüben und Vertiefen des Stoffes. Die im **Anhang (Teil B)** dargestellten ausführlich kommentierten Lösungen ermöglichen dem Leser eine ständige Selbstkontrolle.

## Zur äußereren Form

*Zentrale* Inhalte wie Definitionen, Sätze, Formeln, Tabellen, Zusammenfassungen und Beispiele sind besonders hervorgehoben:

- Definitionen, Sätze, Formeln und Zusammenfassungen sind *gerahmt* und *grau* unterlegt.
- Tabellen sind *gerahmt* und teilweise *grau* unterlegt.
- Anfang und Ende von Beispielen sind durch das Symbol ■ gekennzeichnet.

Bei der (bildlichen) Darstellung von Flächen und räumlichen Körpern wurden *Grauraster* unterschiedlicher Helligkeit verwendet, um besonders anschauliche und aussagekräftige Bilder zu erhalten.

## Zum Einsatz von Computeralgebra-Programmen

In zunehmendem Maße werden leistungsfähige Computeralgebra-Programme wie z. B. MATLAB, MAPLE, MATHCAD oder MATHEMATICA bei der mathematischen Lösung kompakter naturwissenschaftlich-technischer Probleme in Praxis und Wissenschaft erfolgreich eingesetzt. Solche Programme können bereits im Grundstudium ein nützliches und sinnvolles *Hilfsmittel* sein und so z. B. als eine Art „*Kontrollinstanz*“ beim Lösen von Übungsaufgaben verwendet werden (Überprüfung der von *Hand* ermittelten Lösungen mit Hilfe eines Computeralgebra-Programms auf einem PC). Die meisten der in diesem Werk gestellten Aufgaben lassen sich auf diese Weise problemlos lösen.

## Zur 7. Auflage

Die **Lösungen** der zahlreichen Übungsaufgaben wurden komplett überarbeitet und wesentlich ausführlicher dargestellt (mit allen Zwischenschritten und Zwischenergebnissen). Gerade für Studienanfänger sind detaillierte Lösungswege besonders hilfreich für ein erfolgreiches Studium. Kürzen eines gemeinsamen Faktors in komplizierten Brüchen wird in der Regel durch Grauunterlegung gekennzeichnet. Alle Angaben über Integrale beziehen sich auf die *Integraltafel* der **Mathematischen Formelsammlung** des Autors.

## **Eine Bitte des Autors**

Für Hinweise und Anregungen – insbesondere auch aus dem Kreis der Studentenschaft – bin ich stets sehr dankbar. Sie sind eine unverzichtbare Voraussetzung und Hilfe für die permanente Verbesserung dieses Lehrwerkes.

## **Ein Wort des Dankes ...**

... an alle Fachkollegen und Studierenden, die durch Anregungen und Hinweise zur Verbesserung dieses Werkes beigetragen haben,

... an die Mitarbeiter des Verlages, besonders an Herrn Thomas Zipsner, für die hervorragende Zusammenarbeit während der Entstehung und Drucklegung dieses Werkes,

... an Frau Diane Schulz von der Beltz Bad Langensalza GmbH für den ausgezeichneten mathematischen Satz,

... an Herrn Dr. Wolfgang Zettlmeier für die hervorragende Qualität der Abbildungen.

Wiesbaden, im Frühjahr 2016

*Lothar Papula*

# Inhaltsverzeichnis

<b>I Vektoranalysis .....</b>	<b>1</b>
<b>1 Ebene und räumliche Kurven .....</b>	<b>1</b>
1.1 Vektorielle Darstellung einer Kurve .....	1
1.2 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter .....	4
1.2.1 Ableitung eines Vektors .....	4
1.2.2 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor eines Massenpunktes ..	9
1.3 Bogenlänge einer Kurve .....	12
1.4 Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor .....	16
1.5 Krümmung einer Kurve .....	21
1.6 Ein Anwendungsbeispiel: Zerlegung von Geschwindigkeit und Beschleuni- gung in Tangential- und Normalkomponenten .....	27
<b>2 Flächen im Raum .....</b>	<b>31</b>
2.1 Vektorielle Darstellung einer Fläche .....	31
2.2 Flächenkurven .....	35
2.3 Tangentialebene, Flächennormale, Flächenelement .....	37
2.4 Flächen vom Typ $z = f(x; y)$ .....	43
<b>3 Skalar- und Vektorfelder .....</b>	<b>47</b>
3.1 Ein einführendes Beispiel .....	47
3.2 Skalarfelder .....	50
3.3 Vektorfelder .....	52
3.4 Spezielle Vektorfelder aus Physik und Technik .....	55
3.4.1 Homogenes Vektorfeld .....	55
3.4.2 Kugel- oder radialsymmetrisches Vektorfeld (Zentralfeld) .....	56
3.4.3 Zylinder- oder axialsymmetrisches Vektorfeld .....	58
3.4.4 Zusammenstellung der behandelten Vektorfelder .....	59
<b>4 Gradient eines Skalarfeldes .....</b>	<b>60</b>
4.1 Definition und Eigenschaften des Gradienten .....	60
4.2 Richtungsableitung .....	64
4.3 Flächen vom Typ $F(x; y; z) = 0$ .....	66
4.4 Ein Anwendungsbeispiel: Elektrisches Feld einer Punktladung .....	68
<b>5 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes .....</b>	<b>70</b>
5.1 Divergenz eines Vektorfeldes .....	70
5.1.1 Ein einführendes Beispiel .....	70
5.1.2 Definition und Eigenschaften der Divergenz .....	74
5.1.3 Ein Anwendungsbeispiel: Elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders .....	77

5.2 Rotation eines Vektorfeldes .....	79
5.2.1 Definition und Eigenschaften der Rotation .....	79
5.2.2 Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsfeld einer rotierenden Scheibe .....	83
5.3 Spezielle Vektorfelder .....	85
5.3.1 Quellenfreies Vektorfeld .....	85
5.3.2 Wirbelfreies Vektorfeld .....	87
5.3.3 Laplace- und Poisson-Gleichung .....	89
5.3.4 Ein Anwendungsbeispiel: Potentialgleichung des elektrischen Feldes ..	93
<b>6 Spezielle ebene und räumliche Koordinatensysteme .....</b>	<b>94</b>
6.1 Polarkoordinaten .....	94
6.1.1 Definition und Eigenschaften der Polarkoordinaten .....	94
6.1.2 Darstellung eines Vektors in Polarkoordinaten .....	95
6.1.3 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Polarkoordinaten .....	101
6.1.4 Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsvektor bei einer gleichförmigen Kreisbewegung .....	105
6.2 Zylinderkoordinaten .....	107
6.2.1 Definition und Eigenschaften der Zylinderkoordinaten .....	107
6.2.2 Darstellung eines Vektors in Zylinderkoordinaten .....	111
6.2.3 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten .....	116
6.2.4 Zylindersymmetrische Vektorfelder .....	119
6.2.5 Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsvektor eines Massenpunktes in Zylinderkoordinaten .....	121
6.3 Kugelkoordinaten .....	124
6.3.1 Definition und Eigenschaften der Kugelkoordinaten .....	124
6.3.2 Darstellung eines Vektors in Kugelkoordinaten .....	129
6.3.3 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Kugelkoordinaten .....	135
6.3.4 Kugel- oder radialsymmetrische Vektorfelder (Zentralfelder) .....	137
6.3.5 Ein Anwendungsbeispiel: Potential und elektrische Feldstärke in der Umgebung einer homogen geladenen Kugel .....	140
<b>7 Linien- oder Kurvenintegrale .....</b>	<b>143</b>
7.1 Ein einführendes Beispiel .....	143
7.2 Definition eines Linien- oder Kurvenintegrals .....	146
7.3 Berechnung eines Linien- oder Kurvenintegrals .....	148
7.4 Wegunabhängigkeit eines Linien- oder Kurvenintegrals. Konservative Vektorfelder .....	152
7.5 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik .....	163
7.5.1 Kugel- oder radialsymmetrische Vektorfelder (Zentralfelder) .....	163
7.5.2 Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters .....	164
7.5.3 Elektrisches Feld in der Umgebung eines homogen geladenen Drahtes	165
7.6 Arbeitsintegral .....	167
7.6.1 Arbeit eines Kraftfeldes .....	167
7.6.2 Ein Anwendungsbeispiel: Elektronen im Magnetfeld .....	168

<b>8 Oberflächenintegrale</b> .....	170
8.1 Ein einführendes Beispiel .....	170
8.2 Definition eines Oberflächenintegrals .....	175
8.3 Berechnung eines Oberflächenintegrals .....	177
8.3.1 Oberflächenintegral in speziellen (symmetriegerechten) Koordinaten ..	178
8.3.2 Oberflächenintegral in Flächenparametern .....	190
8.4 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik .....	195
8.4.1 Fluss eines homogenen Vektorfeldes durch die Oberfläche eines Würfels .....	195
8.4.2 Fluss eines zylinder- oder axialsymmetrischen Vektorfeldes durch die Oberfläche eines Zylinders .....	199
8.4.3 Fluss eines kugel- oder radialsymmetrischen Vektorfeldes durch die Oberfläche einer Kugel .....	202
<b>9 Integralsätze von Gauß und Stokes</b> .....	205
9.1 Gaußscher Integralsatz .....	205
9.1.1 Ein einführendes Beispiel .....	205
9.1.2 Gaußscher Integralsatz im Raum .....	207
9.1.3 Gaußscher Integralsatz in der Ebene .....	211
9.2 Stokesscher Integralsatz .....	214
9.3 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik .....	222
9.3.1 Elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders .....	222
9.3.2 Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters .....	227
<b>Übungsaufgaben</b> .....	230
Zu Abschnitt 1 .....	230
Zu Abschnitt 2 .....	232
Zu Abschnitt 3 .....	234
Zu Abschnitt 4 .....	236
Zu Abschnitt 5 .....	237
Zu Abschnitt 6 .....	239
Zu Abschnitt 7 .....	242
Zu Abschnitt 8 .....	245
Zu Abschnitt 9 .....	248
<b>II Wahrscheinlichkeitsrechnung</b> .....	251
<b>1 Hilfsmittel aus der Kombinatorik</b> .....	251
1.1 Urnenmodell .....	251
1.2 Permutationen .....	252
1.3 Kombinationen .....	255
1.4 Variationen .....	260
1.5 Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Formeln .....	264
<b>2 Grundbegriffe</b> .....	264
2.1 Einführende Beispiele .....	264
2.2 Zufallsexperimente .....	268

2.3 Elementarereignisse und Ergebnismenge eines Zufallsexperiments .....	269
2.4 Ereignisse und Ereignisraum .....	270
2.5 Verknüpfungen von Ereignissen .....	273
<b>3 Wahrscheinlichkeit .....</b>	<b>276</b>
3.1 Laplace-Experimente .....	276
3.2 Wahrscheinlichkeitsaxiome .....	281
3.2.1 Eigenschaften der relativen Häufigkeiten .....	281
3.2.2 Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogoroff .....	284
3.2.3 Festlegung unbekannter Wahrscheinlichkeiten in der Praxis („statistische“ Definition der Wahrscheinlichkeit) .....	286
3.2.4 Wahrscheinlichkeitsraum .....	287
3.3 Additionssatz für beliebige Ereignisse .....	290
3.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit .....	292
3.5 Multiplikationssatz .....	295
3.6 Stochastisch unabhängige Ereignisse .....	299
3.7 Ereignisbäume .....	302
3.8 Totale Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und Bayessche Formel .....	308
<b>4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen .....</b>	<b>315</b>
4.1 Zufallsvariable oder Zufallsgrößen .....	315
4.1.1 Einführende Beispiele .....	315
4.1.2 Definition einer Zufallsvariablen .....	317
4.2 Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen .....	318
4.3 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen (diskrete Verteilung) .....	319
4.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen Zufallsvariablen (stetige Verteilung) .....	327
<b>5 Kennwerte oder Maßzahlen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung .....</b>	<b>335</b>
5.1 Erwartungswert einer Zufallsvariablen .....	336
5.1.1 Ein einführendes Beispiel .....	336
5.1.2 Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen .....	336
5.1.3 Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen .....	337
5.2 Erwartungswert einer Funktion .....	339
5.3 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer diskreten Zufallsvariablen .....	340
5.4 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer stetigen Zufallsvariablen .....	344
5.5 Mittelwert und Varianz einer linearen Funktion .....	348
<b>6 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen .....</b>	<b>350</b>
6.1 Binomialverteilung .....	350
6.2 Hypergeometrische Verteilung .....	361
6.3 Poisson-Verteilung .....	367

6.4 Gaußsche Normalverteilung . . . . .	371
6.4.1 Allgemeine Normalverteilung . . . . .	371
6.4.2 Standardnormalverteilung . . . . .	374
6.4.3 Erläuterungen zur tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung . . . . .	376
6.4.4 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung . . . . .	378
6.4.5 Quantile der Standardnormalverteilung . . . . .	388
6.5 Exponentialverteilung . . . . .	390
6.6 Zusammenhang zwischen der Binomialverteilung und der Gaußschen Normalverteilung . . . . .	393
6.7 Approximation einer diskreten Verteilung durch eine andere Verteilung, insbesondere durch die Normalverteilung . . . . .	401
<b>7 Wahrscheinlichkeitsverteilungen von mehreren Zufallsvariablen . . . . .</b>	<b>403</b>
7.1 Ein einführendes Beispiel . . . . .	403
7.2 Zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .	406
7.2.1 Verteilungsfunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariablen . . . . .	406
7.2.2 Diskrete zweidimensionale Verteilung . . . . .	408
7.2.3 Stetige zweidimensionale Verteilung . . . . .	411
7.3 Stochastisch unabhängige Zufallsvariable . . . . .	417
7.4 Funktionen von mehreren Zufallsvariablen . . . . .	423
7.5 Summen und Produkte von Zufallsvariablen . . . . .	425
7.5.1 Additionssatz für Mittelwerte . . . . .	425
7.5.2 Multiplikationssatz für Mittelwerte . . . . .	427
7.5.3 Additionssatz für Varianzen . . . . .	430
7.5.4 Eigenschaften einer Summe von stochastisch unabhängigen und normalverteilten Zufallsvariablen . . . . .	433
7.6 Über die große Bedeutung der Gaußschen Normalverteilung in den Anwendungen . . . . .	436
7.6.1 Zentraler Grenzwertsatz . . . . .	436
7.6.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe von Zufallsvariablen . . . . .	438
7.6.3 Grenzwertsatz von Moivre-Laplace . . . . .	440
<b>8 Prüf- oder Testverteilungen . . . . .</b>	<b>441</b>
8.1 Chi-Quadrat-Verteilung . . . . .	441
8.2 <i>t</i> -Verteilung von Student . . . . .	446
<b>Übungsaufgaben . . . . .</b>	<b>451</b>
Zu Abschnitt 1 . . . . .	451
Zu Abschnitt 2 . . . . .	453
Zu Abschnitt 3 . . . . .	454
Zu Abschnitt 4 . . . . .	457
Zu Abschnitt 5 . . . . .	459
Zu Abschnitt 6 . . . . .	462
Zu Abschnitt 7 . . . . .	467

<b>III Grundlagen der mathematischen Statistik</b>	471
<b>1 Grundbegriffe</b>	471
1.1 Ein einführendes Beispiel	471
1.2 Zufallsstichproben aus einer Grundgesamtheit	472
1.3 Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe	474
1.3.1 Häufigkeitsfunktion einer Stichprobe	474
1.3.2 Verteilungsfunktion einer Stichprobe	477
1.3.3 Gruppierung der Stichprobenwerte bei umfangreichen Stichproben (Einteilung in Klassen)	479
<b>2 Kennwerte oder Maßzahlen einer Stichprobe</b>	485
2.1 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer Stichprobe	486
2.2 Spezielle Berechnungsformeln für die Kennwerte einer Stichprobe	489
2.2.1 Berechnung der Kennwerte unter Verwendung der Häufigkeits- funktion	489
2.2.2 Berechnung der Kennwerte einer gruppierten Stichprobe	491
<b>3 Statistische Schätzmethoden für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parameterschätzungen“)</b>	493
3.1 Aufgaben der Parameterschätzung	493
3.2 Schätzfunktionen und Schätzwerte für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Punktschätzungen“)	494
3.2.1 Ein einführendes Beispiel	495
3.2.2 Schätz- und Stichprobenfunktionen	495
3.2.3 Schätzungen für den Mittelwert $\mu$	498
3.2.4 Schätzungen für die Varianz $\sigma^2$	499
3.2.5 Schätzungen für einen Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomial- verteilung)	500
3.2.6 Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Schätzfunktionen und ihrer Schätzwerte	500
3.3 Ein Verfahren zur Gewinnung von Schätzfunktionen	503
3.3.1 Maximum-Likelihood-Methode	504
3.3.2 Anwendungen auf spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen	506
3.3.2.1 Binomialverteilung	506
3.3.2.2 Poisson-Verteilung	508
3.3.2.3 Gaußsche Normalverteilung	511
3.4 Vertrauens- oder Konfidenzintervalle für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Intervallschätzungen“)	514
3.4.1 Vertrauens- oder Konfidenzintervalle und statistische Sicherheit	514
3.4.2 Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer Normal- verteilung bei bekannter Varianz $\sigma^2$	518
3.4.3 Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer Normal- verteilung bei unbekannter Varianz $\sigma^2$	525
3.4.4 Vertrauensintervalle für die unbekannte Varianz $\sigma^2$ einer Normal- verteilung	530

3.4.5 Vertrauensintervalle für einen unbekannten Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomialverteilung) . . . . .	534
3.4.6 Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer beliebigen Verteilung . . . . .	539
<b>4 Statistische Prüfverfahren für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parametertests“) . . . . .</b>	540
4.1 Ein einführendes Beispiel . . . . .	540
4.2 Statistische Hypothesen und Parametertests . . . . .	544
4.3 Planung und Durchführung eines Parametertests . . . . .	545
4.4 Mögliche Fehlerquellen bei einem Parametertest . . . . .	550
4.5 Spezielle Parametertests . . . . .	555
4.5.1 Tests für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz $\sigma^2$ . . . . .	555
4.5.2 Tests für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz $\sigma^2$ . . . . .	564
4.5.3 Tests für die Gleichheit der unbekannten Mittelwerte $\mu_1$ und $\mu_2$ zweier Normalverteilungen (Differenzentests) . . . . .	569
4.5.3.1 Abhängige und unabhängige Stichproben . . . . .	569
4.5.3.2 Differenzentests bei abhängigen Stichproben . . . . .	571
4.5.3.3 Differenzentests bei unabhängigen Stichproben . . . . .	576
4.5.4 Tests für die unbekannte Varianz $\sigma^2$ einer Normalverteilung . . . . .	588
4.5.5 Tests für einen unbekannten Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomialverteilung) . . . . .	593
4.6 Ein Anwendungsbeispiel: Statistische Qualitätskontrolle unter Verwendung von Kontrollkarten . . . . .	599
<b>5 Statistische Prüfverfahren für die unbekannte Verteilungsfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Anpassungs- oder Verteilungstests“) . . . . .</b>	604
5.1 Aufgaben eines Anpassungs- oder Verteilungstests . . . . .	604
5.2 Ein einführendes Beispiel . . . . .	605
5.3 Chi-Quadrat-Test („ $\chi^2$ -Test“) . . . . .	607
<b>6 Korrelation und Regression . . . . .</b>	620
6.1 Korrelation . . . . .	620
6.1.1 Korrelationskoeffizient einer zweidimensionalen Stichprobe . . . . .	620
6.1.2 Korrelationskoeffizient einer zweidimensionalen Grundgesamtheit . . . . .	630
6.2 Regression . . . . .	633
<b>Übungsaufgaben . . . . .</b>	639
Zu Abschnitt 1 . . . . .	639
Zu Abschnitt 2 . . . . .	641
Zu Abschnitt 3 . . . . .	642
Zu Abschnitt 4 . . . . .	644
Zu Abschnitt 5 . . . . .	647
Zu Abschnitt 6 . . . . .	648

<b>IV Fehler- und Ausgleichsrechnung</b>	650
<b>1 „Fehlerarten“ (systematische und zufällige Messabweichungen).</b>	
<b>Aufgaben der Fehler- und Ausgleichsrechnung</b>	650
<b>2 Statistische Verteilung der Messwerte und Messabweichungen („Messfehler“)</b>	654
2.1 Häufigkeitsverteilungen	654
2.2 Normalverteilte Messgrößen	656
<b>3 Auswertung einer Messreihe</b>	662
3.1 Mittelwert und Standardabweichung	662
3.2 Vertrauensbereich für den Mittelwert $\mu$ , Messunsicherheit, Messergebnis	670
<b>4 „Fehlerfortpflanzung“ nach Gauß</b>	679
4.1 Ein einführendes Beispiel	679
4.2 Mittelwert einer „indirekten“ Messgröße	680
4.3 Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz (Varianzfortpflanzungsgesetz)	683
4.4 Messergebnis für eine „indirekte“ Messgröße	687
<b>5 Ausgleichs- oder Regressionskurven</b>	694
5.1 Ein einführendes Beispiel	694
5.2 Ausgleichung nach der „Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate“	696
5.3 Ausgleichs- oder Regressionsgerade	701
5.3.1 Bestimmung der Parameter einer Ausgleichsgeraden	701
5.3.2 Streuungsmaße und Unsicherheiten bei der Parameterbestimmung	709
5.4 Ausgleichs- oder Regressionsparabel	715
5.5 Nichtlineare Ausgleichsprobleme, die auf die lineare Regression zurückführbar sind	719
<b>Übungsaufgaben</b>	730
Zu Abschnitt 3	730
Zu Abschnitt 4	732
Zu Abschnitt 5	734

<b>Anhang</b> .....	739
<b>Teil A: Tabellen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik</b> .....	740
Tabelle 1: Verteilungsfunktion $\phi(u)$ der Standardnormalverteilung .....	740
Tabelle 2: Quantile der Standardnormalverteilung .....	742
Tabelle 3: Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung .....	744
Tabelle 4: Quantile der $t$ -Verteilung von „Student“ .....	746
<b>Teil B: Lösungen der Übungsaufgaben</b> .....	749
<b>I Vektoranalysis</b> .....	750
Abschnitt 1 .....	750
Abschnitt 2 .....	753
Abschnitt 3 .....	757
Abschnitt 4 .....	760
Abschnitt 5 .....	763
Abschnitt 6 .....	769
Abschnitt 7 .....	777
Abschnitt 8 .....	783
Abschnitt 9 .....	790
<b>II Wahrscheinlichkeitsrechnung</b> .....	796
Abschnitt 1 .....	796
Abschnitt 2 .....	797
Abschnitt 3 .....	798
Abschnitt 4 .....	801
Abschnitt 5 .....	804
Abschnitt 6 .....	808
Abschnitt 7 .....	814
<b>III Grundlagen der mathematischen Statistik</b> .....	819
Abschnitt 1 .....	819
Abschnitt 2 .....	824
Abschnitt 3 .....	826
Abschnitt 4 .....	829
Abschnitt 5 .....	836
Abschnitt 6 .....	840
<b>IV Fehler- und Ausgleichsrechnung</b> .....	844
Abschnitt 3 .....	844
Abschnitt 4 .....	847
Abschnitt 5 .....	851
<b>Literaturhinweise</b> .....	859
<b>Sachwortverzeichnis</b> .....	860

# Inhaltsübersicht Band 1

## Kapitel I: Allgemeine Grundlagen

- 1 Einige grundlegende Begriffe über Mengen
- 2 Die Menge der reellen Zahlen
- 3 Gleichungen
- 4 Ungleichungen
- 5 Lineare Gleichungssysteme
- 6 Der Binomische Lehrsatz

## Kapitel II: Vektoralgebra

- 1 Grundbegriffe
- 2 Vektorrechnung in der Ebene
- 3 Vektorrechnung im 3-dimensionalen Raum
- 4 Anwendungen in der Geometrie

## Kapitel III: Funktionen und Kurven

- 1 Definition und Darstellung einer Funktion
- 2 Allgemeine Funktionseigenschaften
- 3 Koordinatentransformationen
- 4 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion
- 5 Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)
- 6 Gebrochenrationale Funktionen
- 7 Potenz- und Wurzelfunktionen
- 8 Kegelschnitte
- 9 Trigonometrische Funktionen
- 10 Arkusfunktionen
- 11 Exponentialfunktionen
- 12 Logarithmusfunktionen
- 13 Hyperbel- und Areafunktionen

## Kapitel IV: Differentialrechnung

- 1 Differenzierbarkeit einer Funktion
- 2 Ableitungsregeln
- 3 Anwendungen der Differentialrechnung

**Kapitel V: Integralrechnung**

- 1 Integration als Umkehrung der Differentiation
- 2 Das bestimmte Integral als Flächeninhalt
- 3 Unbestimmtes Integral und Flächenfunktion
- 4 Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung
- 5 Grund- oder Stammintegrale
- 6 Berechnung bestimmter Integrale unter Verwendung einer Stammfunktion
- 7 Elementare Integrationsregeln
- 8 Integrationsmethoden
- 9 Uneigentliche Integrale
- 10 Anwendungen der Integralrechnung

**Kapitel VI: Potenzreihenentwicklungen**

- 1 Unendliche Reihen
- 2 Potenzreihen
- 3 Taylor-Reihen

**Kapitel VII: Komplexe Zahlen und Funktionen**

- 1 Definition und Darstellung einer komplexen Zahl
- 2 Komplexe Rechnung
- 3 Anwendungen der komplexen Rechnung
- 4 Ortskurven

**Anhang: Lösungen der Übungsaufgaben**

# Inhaltsübersicht Band 2

## Kapitel I: Lineare Algebra

- 1 Vektoren
- 2 Reelle Matrizen
- 3 Determinanten
- 4 Ergänzungen
- 5 Lineare Gleichungssysteme
- 6 Komplexe Matrizen
- 7 Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix

## Kapitel II: Fourier-Reihen

- 1 Fourier-Reihe einer periodischen Funktion
- 2 Anwendungen

## Kapitel III: Differential- und Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen

- 1 Funktionen von mehreren Variablen
- 2 Partielle Differentiation
- 3 Mehrfachintegrale

## Kapitel IV: Gewöhnliche Differentialgleichungen

- 1 Grundbegriffe
- 2 Differentialgleichungen 1. Ordnung
- 3 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten
- 4 Anwendungen in der Schwingungslehre
- 5 Lineare Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten
- 6 Numerische Integration einer Differentialgleichung
- 7 Systeme linearer Differentialgleichungen

**Kapitel V: Fourier-Transformationen**

- 1 Grundbegriffe
- 2 Spezielle Fourier-Transformationen
- 3 Wichtige „Hilfsfunktionen“ in den Anwendungen
- 4 Eigenschaften der Fourier-Transformation (Transformationssätze)
- 5 Rücktransformation aus dem Bildbereich in den Originalbereich
- 6 Anwendungen der Fourier-Transformation

**Kapitel VI: Laplace-Transformationen**

- 1 Grundbegriffe
- 2 Eigenschaften der Laplace-Transformation (Transformationssätze)
- 3 Laplace-Transformierte einer periodischen Funktion
- 4 Rücktransformation aus dem Bildbereich in den Originalbereich
- 5 Anwendungen der Laplace-Transformation

**Anhang: Lösungen der Übungsaufgaben**

# I Vektoranalysis

## 1 Ebene und räumliche Kurven

### 1.1 Vektorielle Darstellung einer Kurve

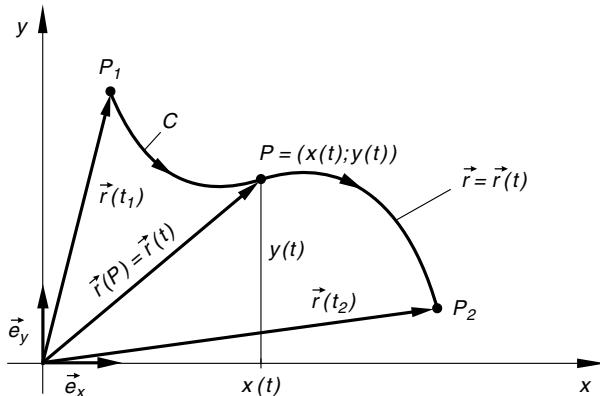
Die Parameterdarstellung einer *ebenen* Kurve  $C$  in einem kartesischen Koordinatensystem laute:

$$C: \quad x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t_1 \leq t \leq t_2) \quad (\text{I-1})$$

Der zum Parameterwert  $t$  gehörige Kurvenpunkt  $P = (x(t); y(t))$  ist dann eindeutig durch seinen *Ortsvektor*

$$\vec{r}(P) = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (\text{I-2})$$

bestimmt (Bild I-1).



**Bild I-1**  
Vektordarstellung  
einer ebenen Kurve

Beim Durchlaufen sämtlicher  $t$ -Werte von  $t_1$  bis  $t_2$  bewegt sich der Punkt  $P$  längs der Kurve  $C$  von  $P_1$  nach  $P_2$ . Die Kurve selbst kann somit auch durch den *parameterabhängigen* Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (t_1 \leq t \leq t_2) \quad (\text{I-3})$$

beschrieben werden. Analog lässt sich eine *räumliche* Kurve durch einen *3-dimensionalen* Ortsvektor mit den Vektorkoordinaten (skalaren Vektorkomponenten)  $x(t)$ ,  $y(t)$  und  $z(t)$  darstellen.

**Darstellung einer Kurve durch einen parameterabhängigen Ortsvektor  
(vektorielle Darstellung einer Kurve)**

**Ortsvektor einer ebenen Kurve (Bild I-1)**

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (\text{I-4})$$

**Ortsvektor einer Raumkurve**

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y + z(t) \vec{e}_z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (\text{I-5})$$

*t:* Reeller Parameter mit  $t_1 \leq t \leq t_2$

*Anmerkungen*

- (1) Die *vektorielle* Darstellungsform einer Kurve ist in den Anwendungen weit verbreitet und eignet sich – wie wir noch sehen werden – in besonderem Maße zur Beschreibung von *Bewegungsabläufen*. Als Parametergröße dient dabei meist die *Zeit*, manchmal auch ein *Winkel*.
- (2) Der Ortsvektor  $\vec{r}$  ist eine *Funktion* des Parameters  $t$ :  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . Allgemein wird ein von einem *reellen* Parameter  $t$  abhängiger Vektor

$$\vec{a} = \vec{a}(t) = a_x(t) \vec{e}_x + a_y(t) \vec{e}_y + a_z(t) \vec{e}_z = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} \quad (\text{I-6})$$

als *Vektorfunktion* des Parameters  $t$  bezeichnet ( $t_1 \leq t \leq t_2$ ). Die Vektorkoordinaten sind dabei reelle *Funktionen* des Parameters  $t$ :

$$a_x = a_x(t), \quad a_y = a_y(t), \quad a_z = a_z(t) \quad (\text{I-7})$$

■ **Beispiele**

- (1) **Schiefer Wurf (im luftleeren Raum)**

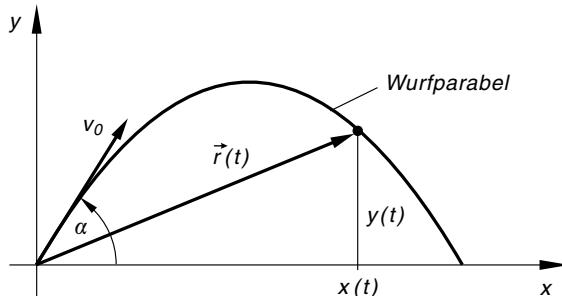
Ein Körper wird unter einem Winkel  $\alpha$  gegen die Horizontale mit einer Geschwindigkeit vom Betrag  $v_0$  abgeworfen (Bild I-2). Die dabei durchlaufene Bahnkurve ist eine *Parabel*, in diesem Zusammenhang auch *Wurfparabel* genannt, und kann durch die *Parametergleichungen*

$$x(t) = (v_0 \cdot \cos \alpha) t, \quad y(t) = (v_0 \cdot \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (t \geq 0)$$

oder durch den *zeitabhängigen Ortsvektor*

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} (v_0 \cdot \cos \alpha) t \\ (v_0 \cdot \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix} \quad (t \geq 0)$$

beschrieben werden ( $g$ : Erdbeschleunigung; Abwurf aus dem Nullpunkt).



**Bild I-2**

Wurfparabel beim schießen Wurf, dargestellt durch den zeitabhängigen Ortsvektor

## (2) Elektronen im homogenen Magnetfeld

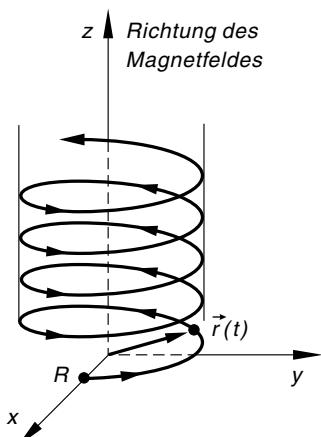
Elektronen, die *schief* in ein *homogenes* Magnetfeld eingeschossen werden, bewegen sich auf einer *Schraubenlinie* um die Feldrichtung ( $z$ -Achse; Bild I-3). Die Bahnkurve lässt sich dabei durch die *Parametergleichungen*

$$x(t) = R \cdot \cos(\omega t), \quad y(t) = R \cdot \sin(\omega t), \quad z(t) = c t \quad (t \geq 0)$$

oder durch den *zeitabhängigen Ortsvektor*

$$\vec{r}(t) = R \cdot \cos(\omega t) \vec{e}_x + R \cdot \sin(\omega t) \vec{e}_y + c t \vec{e}_z \quad (t \geq 0)$$

beschreiben ( $R$ ,  $\omega$  und  $c$  sind positive Konstanten).



**Bild I-3**

Schraubenlinienförmige Bahn eines Elektrons in einem homogenen Magnetfeld, dargestellt durch einen zeitabhängigen Ortsvektor  
(Startpunkt zur Zeit  $t = 0$ :  $x = R$ ,  $y = z = 0$ )

Anmerkung: Die Elektronen *rotieren* mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  auf einer Kreisbahn mit dem Radius  $R$  um das Magnetfeld und führen gleichzeitig eine *Translationsbewegung* mit der konstanten Geschwindigkeit  $v_0 = c$  in der Feldrichtung aus. Durch *ungestörte Überlagerung* dieser Bewegungen entsteht die *schraubenlinienförmige* Bahnkurve.

- (3) Ein elektrisches Feld besitze in einem bestimmten Punkt des Raumes den *zeitabhängigen Feldstärkevektor*

$$\vec{E} = \vec{E}(t) = \begin{pmatrix} E_0 \cdot \sin(\omega t) \\ E_0 \cdot \cos(\omega t) \\ E_0 \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \geq 0)$$

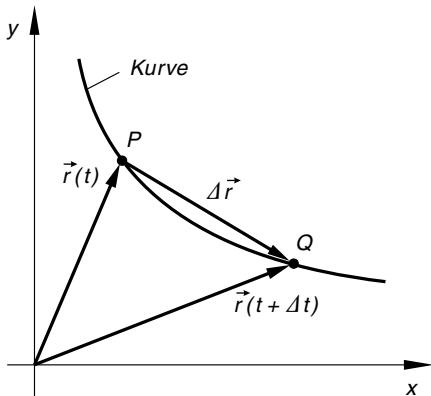
Die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  ist somit eine *Vektorfunktion* des *Zeitparameters*  $t$ . Der *Betrag* der elektrischen Feldstärke ist jedoch zu allen Zeiten der *gleiche*, d. h. eine *konstante* Größe:

$$|\vec{E}| = E_0 \cdot \sqrt{\underbrace{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)}_1 + 1^2} = \sqrt{1+1} E_0 = \sqrt{2} E_0$$
■

## 1.2 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter

### 1.2.1 Ableitung eines Vektors

Auf einer *ebenen* Kurve mit der vektoriellen Darstellung  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  betrachten wir zwei benachbarte Punkte  $P$  und  $Q$  (Bild I-4).



**Bild I-4**

Zum Begriff des Tangentenvektors  
einer ebenen Kurve

Ihre Ortsvektoren  $\vec{r}(t)$  bzw.  $\vec{r}(t + \Delta t)$  unterscheiden sich durch den *Differenzvektor* (*Sehnenvektor*)

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t + \Delta t) - x(t) \\ y(t + \Delta t) - y(t) \end{pmatrix} \quad (\text{I-8})$$

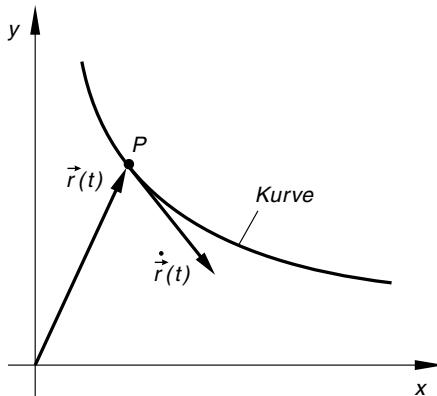
Wir dividieren diesen Vektor noch durch den *Skalar*  $\Delta t \neq 0$  und erhalten den in der *gleichen Richtung* liegenden Vektor

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} \quad (\text{I-9})$$

Er geht beim Grenzübergang  $\Delta t \rightarrow 0$  in den sog. *Tangentenvektor*

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \quad (\text{I-10})$$

über, der die Richtung der *Tangente* im Kurvenpunkt  $P = (x(t); y(t))$  festlegt (Bild I-5).  $\dot{x}(t)$  und  $\dot{y}(t)$  sind dabei die Ableitungen der (stetig differenzierbaren) Koordinatenfunktionen  $x(t)$  und  $y(t)$  nach dem Parameter  $t$  (üblicherweise durch Punkte gekennzeichnet).



**Bild I-5**

Orts- und Tangentenvektor  
einer ebenen Kurve im Kurvenpunkt  $P$

Der *Tangentenvektor* entsteht somit aus dem Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  durch *komponentenweise Differentiation* nach dem Parameter  $t$  und wird daher auch als *1. Ableitung* des Vektors  $\vec{r}(t)$  bezeichnet. In Anlehnung an die Differentialrechnung für Funktionen schreibt man dafür:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}(t) \vec{e}_x + \dot{y}(t) \vec{e}_y = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \quad (\text{I-11})$$

Analog liegen die Verhältnisse bei einem parameterabhängigen *3-dimensionalen Ortsvektor* (Raumkurve).

### Differentiation eines Ortsvektors nach einem Parameter

Die *Differentiation* eines parameterabhängigen Ortsvektors  $\vec{r}(t)$  nach dem Parameter  $t$  erfolgt *komponentenweise* und führt wiederum zu einem Vektor, der als *Tangentenvektor* bezeichnet wird:

#### Tangentenvektor einer ebenen Kurve (Bild I-5)

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t) \vec{e}_x + \dot{y}(t) \vec{e}_y = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \quad (\text{I-12})$$

#### Tangentenvektor einer Raumkurve

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t) \vec{e}_x + \dot{y}(t) \vec{e}_y + \dot{z}(t) \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \quad (\text{I-13})$$

Der Tangentenvektor  $\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$  ist die *1. Ableitung* des Ortsvektors  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  nach dem Parameter  $t$ .

#### Anmerkungen

- (1) Der Tangentenvektor  $\dot{\vec{r}}$  liegt in der *Kurventangente* (daher stammt auch die Bezeichnung) und zeigt in die Richtung, in die sich der Kurvenpunkt  $P$  mit *wachsendem* Parameterwert  $t$  bewegen würde.
- (2) Durch *zweimalige komponentenweise* Differentiation des Ortsvektors  $\vec{r}(t)$  erhält man die *2. Ableitung*

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t) \vec{e}_x + \ddot{y}(t) \vec{e}_y + \ddot{z}(t) \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} \quad (\text{I-14})$$

Analog lassen sich *höhere* Ableitungen bilden (*Voraussetzung*: Die Vektorkoordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  sind entsprechend oft *differenzierbar*). Alle Ableitungen des Ortsvektors sind wiederum *Vektoren*.

- (3) Wir verwenden für die 1. Ableitung im Folgenden meist die *Kurzschriftweise*

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z \quad \text{oder} \quad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (\text{I-15})$$

Entsprechendes gilt für die *höheren* Ableitungen.

- (4) Die Ableitungsregel gilt allgemein für *beliebige* (differenzierbare) Vektorfunktionen. Die Differentiation einer Vektorfunktion  $\vec{a} = \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}$  nach dem Parameter  $t$  erfolgt somit *komponentenweise*:

$$\frac{d}{dt} [\vec{a}(t)] = \dot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{a}_x(t) \\ \dot{a}_y(t) \\ \dot{a}_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \\ \dot{a}_z \end{pmatrix} \quad (\text{I-16})$$

Wir nennen daher eine Vektorfunktion  $\vec{a}(t)$  *differenzierbar*, wenn ihre Vektorkoordinaten differenzierbare Funktionen des Parameters  $t$  sind.

## ■ Beispiele

- (1) Der *Tangentenvektor* der ebenen Kurve mit dem Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = t^2 \vec{e}_x + t^3 \vec{e}_y = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

lautet wie folgt:

$$\dot{\vec{r}}(t) = 2t \vec{e}_x + 3t^2 \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

- (2) Wir bestimmen den *Tangentenvektor* an die Raumkurve

$$C: \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \cdot \cos t \\ t \cdot \sin t \\ e^{2t} \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

im Kurvenpunkt  $P$  mit dem Parameterwert  $t = 0$ .

Durch *komponentenweise* Differentiation nach dem Parameter  $t$  erhalten wir mit Hilfe der Produkt- bzw. Kettenregel zunächst

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \cdot \cos t - t \cdot \sin t \\ 1 \cdot \sin t + t \cdot \cos t \\ 2 \cdot e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - t \cdot \sin t \\ \sin t + t \cdot \cos t \\ 2 \cdot e^{2t} \end{pmatrix}$$

Im Punkt  $P(t = 0) = (0; 0; 1)$  besitzt die Raumkurve dann den folgenden *Tangentenvektor*:

$$\dot{\vec{r}}(t = 0) = \begin{pmatrix} \cos 0 - 0 \cdot \sin 0 \\ \sin 0 + 0 \cdot \cos 0 \\ 2 \cdot e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 0 + 0 \\ 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(3) Wir differenzieren die Vektorfunktion

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ t \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

zweimal komponentenweise unter Verwendung der Kettenregel nach dem Parameter  $t$  und erhalten:

$$\dot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -2 \cdot \sin(2t) \\ 1 \\ 2 \cdot \cos(2t) \end{pmatrix}, \quad \ddot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -4 \cdot \cos(2t) \\ 0 \\ -4 \cdot \sin(2t) \end{pmatrix}$$
■

Zum Abschluss noch einige sehr nützliche *Ableitungsregeln* für *Summen* und *Produkte* von Vektorfunktionen:

### Ableitungsregeln für Summen und Produkte von Vektoren

$\vec{a} = \vec{a}(t)$  und  $\vec{b} = \vec{b}(t)$  seien differenzierbare Vektorfunktionen und  $\varphi = \varphi(t)$  eine differenzierbare skalare Funktion des Parameters  $t$ . Dann gelten die folgenden Ableitungsregeln:

#### Summenregel

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} + \vec{b}) = \dot{\vec{a}} + \dot{\vec{b}} \quad (\text{I-17})$$

Eine endliche Summe wird gliedweise differenziert.

#### Produktregel

Für ein Skalarprodukt zweier Vektoren gilt:

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \dot{\vec{b}} \quad (\text{I-18})$$

Für ein Vektorprodukt zweier Vektoren gilt:

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} \times \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dot{\vec{b}} \quad (\text{I-19})$$

Für ein Produkt aus einer skalaren und einer Vektorfunktion gilt:

$$\frac{d}{dt} (\varphi \vec{a}) = \dot{\varphi} \vec{a} + \varphi \dot{\vec{a}} \quad (\text{I-20})$$

**Anmerkung**

*Summen- und Produktregel* erinnern an die entsprechenden Ableitungsregeln für Funktionen von *einer* unabhängigen Variablen (siehe Band 1).

■ **Beispiel**

Die auf einen Körper der Masse  $m$  einwirkende Kraft  $\vec{F}$  ist definiert als die *zeitliche Änderung* des Impulses  $\vec{p} = m\vec{v}$ , wobei  $\vec{v}$  der Geschwindigkeitsvektor der Masse ist. Somit gilt nach der *Produktregel* (I-20):

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \dot{m}\vec{v} + m\dot{\vec{v}} = \dot{m}\vec{v} + m\vec{a}$$

( $\dot{\vec{v}}$  ist definitionsgemäß die *Beschleunigung*  $\vec{a}$  des Körpers:  $\dot{\vec{v}} = \vec{a}$ ). Bei *konstanter* Masse ist  $\dot{m} = 0$ , und wir erhalten die aus der elementaren Mechanik bekannte Formel

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad ■$$

### 1.2.2 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor eines Massenpunktes

In den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen wird die *Bahnkurve* eines Massenpunktes häufig durch einen *zeitabhängigen Ortsvektor*  $\vec{r}(t)$  beschrieben. Den *Geschwindigkeits-* bzw. *Beschleunigungsvektor* der Bewegung erhält man dann durch *ein-* bzw. *zweimalige* Differentiation von  $\vec{r}(t)$  nach dem Zeitparameter  $t$ .

#### Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor eines Massenpunktes

Ein Massenpunkt bewege sich auf einer (ebenen oder räumlichen) Bahnkurve, beschrieben durch einen *zeitabhängigen Ortsvektor*  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  (siehe Bild I-1). Dann erhält man den *Geschwindigkeitsvektor*  $\vec{v}(t)$  und den *Beschleunigungsvektor*  $\vec{a}(t)$  als 1. bzw. 2. Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit:

#### Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \quad (I-21)$$

#### Beschleunigungsvektor

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{\vec{v}}(t) = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} \quad (I-22)$$

## ■ Beispiele

### (1) Schiefer Wurf (siehe hierzu auch Beispiel (1) aus Abschnitt 1.1)

Beim *schießen Wurf* erhalten wir aus dem *zeitabhängigen Ortsvektor*

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} (v_0 \cdot \cos \alpha) t \\ (v_0 \cdot \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix} \quad (t \geq 0)$$

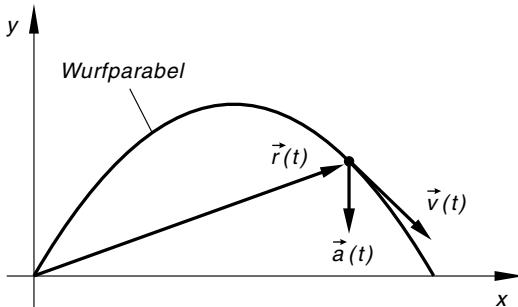
durch Differentiation zunächst den *Geschwindigkeitsvektor*

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_0 \cdot \sin \alpha - g t \end{pmatrix}$$

und durch nochmalige Differentiation den *Beschleunigungsvektor*

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Bild I-6 zeigt die Bahnkurve mit den Vektoren  $\vec{r}(t)$ ,  $\vec{v}(t)$  und  $\vec{a}(t)$ .



**Bild I-6**

Wurfparabel beim *schießen Wurf* mit dem Ortsvektor, dem Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor

### (2) Elektronen im Magnetfeld (siehe hierzu auch Beispiel (2) aus Abschnitt 1.1)

Wir bestimmen den *Geschwindigkeitsvektor*  $\vec{v}(t)$  und den *Beschleunigungsvektor*  $\vec{a}(t)$  für die in Bild I-3 skizzierte *schraubenlinienförmige* Bahnkurve eines Elektrons in einem homogenen Magnetfeld (in  $z$ -Richtung):

$$\vec{r}(t) = R \cdot \cos(\omega t) \vec{e}_x + R \cdot \sin(\omega t) \vec{e}_y + c t \vec{e}_z$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = -R\omega \cdot \sin(\omega t) \vec{e}_x + R\omega \cdot \cos(\omega t) \vec{e}_y + c \vec{e}_z$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = -R\omega^2 \cdot \cos(\omega t) \vec{e}_x - R\omega^2 \cdot \sin(\omega t) \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z$$

Die  $z$ -Komponente des Beschleunigungsvektors  $\vec{a}$  verschwindet somit. Wegen  $\vec{F} = m\vec{a}$  gilt dies auch für die  $z$ -Komponente der auf das Elektron einwirkenden Kraft  $\vec{F}$  ( $m$  ist die Masse des Elektrons). Der Kraftvektor liegt damit in einer zur  $z$ -Achse senkrechten Ebene. Mit anderen Worten: Elektronen erfahren in einem *homogenen* Magnetfeld stets eine Kraft *senkrecht* zur Feldrichtung (sog. *Lorenzkraft*).

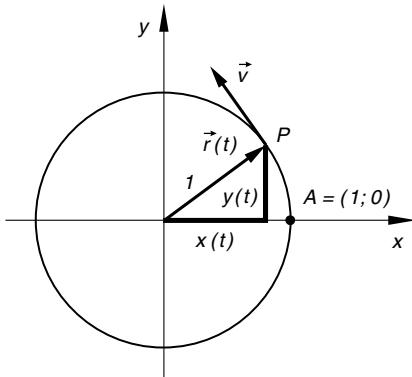
- (3) Ein Masseteilchen bewegt sich auf einer Bahnkurve mit dem *zeitabhängigen* Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{pmatrix} \quad (t \geq 0)$$

Es handelt sich dabei um den *Einheitskreis* der  $x, y$ -Ebene. Denn es gilt:

$$x^2(t) + y^2(t) = \underbrace{\cos^2(t^2) + \sin^2(t^2)}_1 = 1$$

Die Bewegung erfolgt dabei zur Zeit  $t = 0$  aus der Anfangslage  $A = (1; 0)$  heraus im *Gegenuhrzeigersinn* (Bild I-7).



**Bild I-7**

Bewegung eines Massenpunktes auf dem Einheitskreis ( $P$ : Lage der Masse zur Zeit  $t$ )

Wir untersuchen nun die *Geschwindigkeit* und *Beschleunigung* des Teilchens. Mit Hilfe der Ketten- und Produktregel erhalten wir:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} [-\sin(t^2)] \cdot 2t \\ [\cos(t^2)] \cdot 2t \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -t \cdot \sin(t^2) \\ t \cdot \cos(t^2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) = 2 \begin{pmatrix} -1 \cdot \sin(t^2) - t \cdot [\cos(t^2)] \cdot 2t \\ 1 \cdot \cos(t^2) + t \cdot [-\sin(t^2)] \cdot 2t \end{pmatrix} = \\ &= 2 \begin{pmatrix} -\sin(t^2) - 2t^2 \cdot \cos(t^2) \\ \cos(t^2) - 2t^2 \cdot \sin(t^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dabei wächst der *Betrag* der Geschwindigkeit *linear* mit der Zeit:

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= 2 \sqrt{[-t \cdot \sin(t^2)]^2 + [t \cdot \cos(t^2)]^2} = \\ &= 2 \sqrt{t^2 \cdot \sin^2(t^2) + t^2 \cdot \cos^2(t^2)} = \\ &= 2 \sqrt{t^2 \underbrace{[\sin^2(t^2) + \cos^2(t^2)]}_1} = 2 \sqrt{t^2} = 2t \sim t \end{aligned}$$

Wir folgern daraus: Die Kreisbahn wird von Umlauf zu Umlauf immer *schneller* durchlaufen, d. h. die Umlaufdauer nimmt mit der Zeit immer stärker *ab*.

Für die Beschleunigung des Massenpunktes erhalten wir dem *Betrage* nach (bei der *Zwischenrechnung* setzen wir der besseren Übersicht wegen  $t^2 = u$ ):

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= 4 [(-\sin u - 2u \cdot \cos u)^2 + (\cos u - 2u \cdot \sin u)^2] = \\ &= 4 [\sin^2 u + 4u \cdot \sin u \cdot \cos u + 4u^2 \cdot \cos^2 u + \cos^2 u - \\ &\quad - 4u \cdot \sin u \cdot \cos u + 4u^2 \cdot \sin^2 u] = \\ &= 4 [\underbrace{(\sin^2 u + \cos^2 u)}_1 + 4u^2 \underbrace{(\cos^2 u + \sin^2 u)}_1] = \\ &= 4(1 + 4u^2) = 4(1 + 4t^4) \quad (\text{Rücksubstitution: } u^2 = t^4) \\ |\vec{a}| &= \sqrt{4(1 + 4t^4)} = 2\sqrt{1 + 4t^4} \end{aligned}$$

Auch die Beschleunigung *wächst* also mit der Zeit, nach einem größeren Zeitraum nahezu quadratisch mit  $t$ :

$$|\vec{a}| \approx 2\sqrt{4t^4} = 2 \cdot 2t^2 = 4t^2 \sim t^2 \quad (\text{für } t \gg 1) \quad \blacksquare$$

### 1.3 Bogenlänge einer Kurve

Mit der Berechnung der *Bogenlänge*  $s$  einer *ebenen* Kurve haben wir uns bereits im Band 1 beschäftigt. Liegt die Kurvengleichung in der *expliziten* Form  $y = f(x)$  vor, so gilt für die Länge des Bogens vom Kurvenpunkt  $P_1$  bis zum Kurvenpunkt  $P_2$  die aus Band 1 (Abschnitt V.10.4) bekannte Formel (siehe hierzu auch Bild I.8):

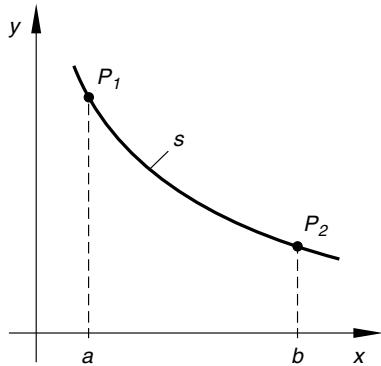
$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (\text{I-23})$$

Wir nehmen jetzt an, dass sich die Kurve auch durch einen *parameterabhängigen Ortsvektor*

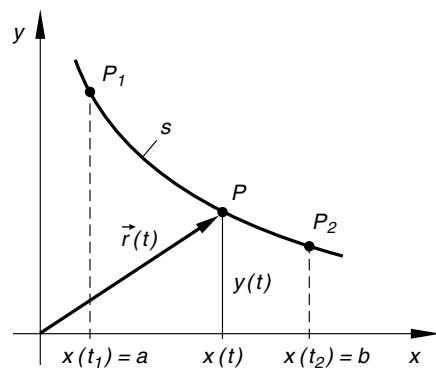
$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (t_1 \leq t \leq t_2) \quad (\text{I-24})$$

beschreiben lässt, wobei die Parameterwerte  $t_1$  und  $t_2$  den beiden Randpunkten  $P_1$  und  $P_2$  entsprechen (Bild I-9). Zwischen der Tangentensteigung  $y'$  und den Ableitungen  $\dot{x}$  und  $\dot{y}$  der beiden Vektorkoordinaten von  $\vec{r}(t)$  besteht dann bekanntlich der folgende Zusammenhang (siehe Band 1, Abschnitt IV.2.12):

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad (\text{I-25})$$

**Bild I-8**

Zum Begriff der Bogenlänge einer ebenen Kurve

**Bild I-9**

Bogenlänge einer durch einen Ortsvektor dargestellten ebenen Kurve

Mit Hilfe dieser Beziehung und unter Beachtung von  $\dot{x} = dx/dt$  und damit  $dx = \dot{x} dt$  lässt sich dann die Integralformel (I-23) für die Bogenlänge in die *Parameterform* überführen. Zunächst einmal ist

$$1 + (y')^2 = 1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2 = 1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2} = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}^2} \quad (\text{I-26})$$

und somit

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (y')^2} dx &= \sqrt{\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}^2}} \cdot \dot{x} dt = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\dot{x}} \cdot \dot{x} dt = \\ &= \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}_{|\dot{\vec{r}}|} dt = |\dot{\vec{r}}| dt \end{aligned} \quad (\text{I-27})$$

Für die Bogenlänge  $s$  erhalten wir damit aus Gleichung (I-23) die folgende Formel:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}| dt \quad (\text{I-28})$$

Das *Differential* der Bogenlänge  $s$  lautet daher

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = |\dot{\vec{r}}| dt = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt = |d\vec{r}| \quad (\text{I-29})$$

und wird als *Bogen-* oder *Linienelement* oder auch als *Bogendifferential* bezeichnet.

Hieraus folgt durch Division durch  $dt$  die wichtige Beziehung

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = |\dot{\vec{r}}| \quad (\text{I-30})$$

d. h. die *Ableitung* der Bogenlänge  $s$  nach dem Parameter  $t$  ist gleich dem *Betrag* des Tangentenvektors  $\dot{\vec{r}}$ . Die *Länge* des Tangentenvektors ist somit ein Maß für die *Änderungsgeschwindigkeit* der Bogenlänge!

Bei einer *Raumkurve* erweitert sich die Integralformel (I-28) entsprechend. In diesem Fall gilt:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}| dt \quad (\text{I-31})$$

Wir fassen die Ergebnisse wie folgt zusammen:

### Bogenlänge einer Kurve

#### Bogenlänge einer ebenen Kurve (Bild I-9)

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \quad (\text{I-32})$$

#### Bogenlänge einer Raumkurve

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \quad (\text{I-33})$$

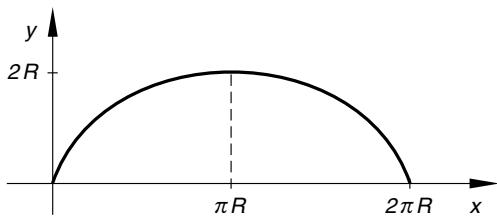
$\vec{r} = \vec{r}(t)$ : Ortsvektor der ebenen bzw. räumlichen Kurve in Abhängigkeit vom Kurvenparameter  $t$

## ■ Beispiele

(1) Durch den Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

wird der in Bild I-10 dargestellte Bogen einer *gewöhnlichen Zykloide (Rollkurve)* beschrieben.

**Bild I-10**

Bogenlänge einer gewöhnlichen Zykloide (Rollkurve)

Wir wollen nun die *Länge*  $s$  dieses Bogens berechnen. Dazu benötigen wir zunächst den *Tangentenvektor*  $\dot{\vec{r}}$ , d. h. die *erste Ableitung* des Ortsvektors  $\vec{r}$  nach dem Parameter  $t$ :

$$\dot{\vec{r}} = R \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ 0 + \sin t \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Der Tangentenvektor  $\dot{\vec{r}}$  besitzt dann die folgende *Länge* (Betrag):

$$\begin{aligned} |\dot{\vec{r}}| &= R \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2} = \\ &= R \sqrt{1 - 2 \cdot \cos t + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_1} = R \sqrt{1 - 2 \cdot \cos t + 1} = \\ &= R \sqrt{2 - 2 \cdot \cos t} = R \sqrt{2(1 - \cos t)} \end{aligned}$$

Unter Verwendung der trigonometrischen Formel (siehe Formelsammlung)

$$1 - \cos t = 2 \cdot \sin^2(t/2)$$

können wir dafür auch schreiben:

$$|\dot{\vec{r}}| = R \sqrt{2 \cdot 2 \cdot \sin^2(t/2)} = R \cdot 2 \cdot \sin(t/2) = 2R \cdot \sin(t/2)$$

Damit erhalten wir die folgende Bogenlänge ( $t$  läuft von 0 bis  $2\pi$ ):

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} |\dot{\vec{r}}| dt = 2R \cdot \int_0^{2\pi} \sin(t/2) dt = 2R \left[ -2 \cdot \cos(t/2) \right]_0^{2\pi} = \\ &= -4R \left[ \cos(t/2) \right]_0^{2\pi} = -4R(\cos \pi - \cos 0) = -4R(-1 - 1) = 8R \end{aligned}$$

(Integral Nr. 204 mit  $a = 1/2$ )

- (2) In Beispiel (2) aus Abschnitt 1.1 haben wir die *schraubenlinienförmige* Bahn von Elektronen in einem homogenen Magnetfeld durch den *zeitabhängigen Ortsvektor*

$$\vec{r}(t) = R \cdot \cos(\omega t) \vec{e}_x + R \cdot \sin(\omega t) \vec{e}_y + c t \vec{e}_z \quad (t \geq 0)$$

beschrieben (siehe hierzu auch Bild I-3). Wir berechnen nun den bei einem *vollen* Umlauf zurückgelegten Weg  $s$ . Dazu benötigen wir zuerst einmal die Ableitung  $\dot{\vec{r}}$  des Ortsvektors  $\vec{r}(t)$  sowie den Betrag  $|\dot{\vec{r}}|$  dieser Ableitung. Mit der Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t) &= -R\omega \cdot \sin(\omega t) \vec{e}_x + R\omega \cdot \cos(\omega t) \vec{e}_y + c \vec{e}_z \\ |\dot{\vec{r}}(t)| &= \sqrt{[-R\omega \cdot \sin(\omega t)]^2 + [R\omega \cdot \cos(\omega t)]^2 + c^2} = \\ &= \sqrt{R^2 \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t) + R^2 \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t) + c^2} = \\ &= \sqrt{R^2 \omega^2 \underbrace{[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)]}_{1} + c^2} = \sqrt{R^2 \omega^2 + c^2} \end{aligned}$$

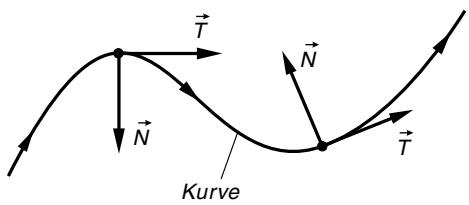
Da die Elektronen das Magnetfeld mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  umkreisen, benötigen sie für eine *volle* Drehung die Zeit  $T = 2\pi/\omega$ . Somit ist

$$\begin{aligned} s &= \int_0^T |\dot{\vec{r}}| dt = \int_0^{2\pi/\omega} \sqrt{R^2 \omega^2 + c^2} dt = \sqrt{R^2 \omega^2 + c^2} \cdot \int_0^{2\pi/\omega} 1 dt = \\ &= \sqrt{R^2 \omega^2 + c^2} \left[ t \right]_0^{2\pi/\omega} = \sqrt{R^2 \omega^2 + c^2} \left[ \frac{2\pi}{\omega} - 0 \right] = \\ &= \frac{2\pi \sqrt{R^2 \omega^2 + c^2}}{\omega} \end{aligned}$$

der von ihnen bei *einem* Umlauf auf der Schraubenlinie zurückgelegte Weg. ■

## 1.4 Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor

Jedem Punkt einer Bahnkurve, beschrieben durch einen Ortsvektor  $\vec{r}(t)$ , ordnen wir in eindeutiger Weise *zwei* Einheitsvektoren zu, die sich insbesondere bei der Untersuchung von Bewegungsabläufen als sehr nützlich erweisen. Es sind dies der *Tangenteneinheitsvektor*  $\vec{T} = \vec{T}(t)$  und der dazu senkrechte *Hauptnormaleneinheitsvektor*  $\vec{N} = \vec{N}(t)$  (siehe Bild I-11).

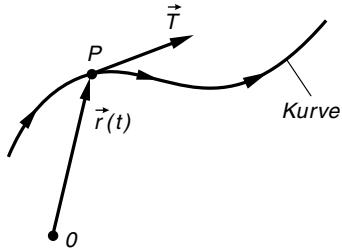
**Bild I-11**

Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor einer Kurve

Den *Tangenteneinheitsvektor*  $\vec{T}$  erhält man aus dem Tangentenvektor  $\dot{\vec{r}}$  durch *Normierung*:

$$\vec{T} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{1}{|\dot{\vec{r}}|} \dot{\vec{r}} \quad (|\vec{T}| = 1) \quad (\text{I-34})$$

Er liegt in der *Kurventangente* des Punktes  $P$  und zeigt in die Richtung, in die sich dieser Punkt mit wachsendem  $t$  bewegen würde (*tangentielle* Richtung, siehe Bild I-12).

**Bild I-12**

Tangenteneinheitsvektor  $\vec{T}$  einer Kurve

Den *Hauptnormaleneinheitsvektor*  $\vec{N}$  erhalten wir wie folgt: Wir differenzieren zunächst das Skalarprodukt  $\vec{T} \cdot \vec{T} = 1$  mit Hilfe der *Produktregel* (I-18) des vorherigen Abschnitts nach dem Parameter  $t$ :

$$\frac{d}{dt} (\vec{T} \cdot \vec{T}) = \frac{d\vec{T}}{dt} \cdot \vec{T} + \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d}{dt} (1) = 0 \quad (\text{I-35})$$

Wegen der *Kommutativität* eines Skalarproduktes folgt dann weiter

$$\frac{d\vec{T}}{dt} \cdot \vec{T} + \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} = \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} + \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} = 2 \left( \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} \right) = 0 \quad (\text{I-36})$$

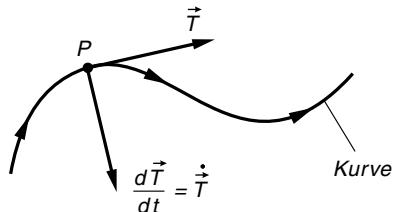
und somit (nach Division durch 2)

$$\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} = \vec{T} \cdot \dot{\vec{T}} = 0 \quad (\text{I-37})$$

Dies aber bedeutet, dass der Vektor  $\frac{d\vec{T}}{dt} = \dot{\vec{T}}$  senkrecht auf dem Tangenteneinheitsvektor  $\vec{T}$  steht (Bild I-13). Der normierte Vektor

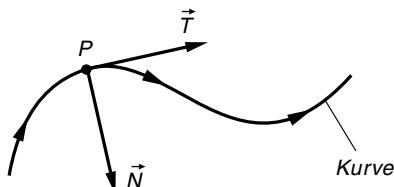
$$\vec{N} = \frac{\dot{\vec{T}}}{|\dot{\vec{T}}|} = \frac{1}{|\dot{\vec{T}}|} \dot{\vec{T}} \quad (|\vec{N}| = 1) \quad (\text{I-38})$$

heißt *Hauptnormaleneinheitsvektor* und zeigt stets in Richtung der *Kurvenkrümmung* (Bild I-14).



**Bild I-13**

Die Vektoren  $\vec{T}$  und  $\frac{d\vec{T}}{dt}$  stehen senkrecht aufeinander



**Bild I-14**

Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor einer Kurve

Wir fassen zusammen:

### Tangenten- und Hauptnormaleneinheitsvektor einer Kurve

Wir ordnen jedem Punkt  $P$  einer (ebenen oder räumlichen) Kurve mit dem Ortsvektor  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  wie folgt zwei aufeinander *senkrecht* stehende *Einheitsvektoren* zu (siehe hierzu Bild I-14):

#### Tangenteneinheitsvektor

$$\vec{T} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{1}{|\dot{\vec{r}}|} \dot{\vec{r}} \quad (|\vec{T}| = 1) \quad (\text{I-39})$$

$\vec{T}$  liegt in der *Kurventangente* und zeigt in die Richtung, in die sich der Kurvenpunkt  $P$  mit *wachsendem* Parameterwert  $t$  bewegen würde.

#### Hauptnormaleneinheitsvektor

$$\vec{N} = \frac{\dot{\vec{T}}}{|\dot{\vec{T}}|} = \frac{1}{|\dot{\vec{T}}|} \dot{\vec{T}} \quad (|\vec{N}| = 1) \quad (\text{I-40})$$

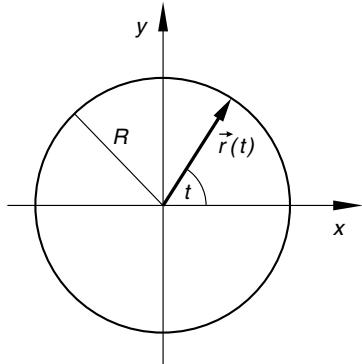
$\vec{N}$  zeigt in die Richtung der *Kurvenkrümmung*.

## ■ Beispiel

Wir bestimmen die Vektoren  $\vec{T}$  und  $\vec{N}$  für den *Mittelpunktskreis* mit dem Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos t \\ R \cdot \sin t \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(Kreis mit dem Radius  $R$  um den Nullpunkt, siehe Bild I-15).



**Bild I-15**

Mittelpunktskreis mit dem Radius  $R$ , dargestellt durch einen parameterabhängigen Ortsvektor  
(Parameter: Winkel  $t$ )

### Tangenteneinheitsvektor $\vec{T}$

$$\dot{\vec{r}} = R \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$|\dot{\vec{r}}| = R \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = R \underbrace{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}}_1 = R$$

$$\vec{T} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{1}{R} \dot{\vec{r}} = \frac{1}{R} \cdot R \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

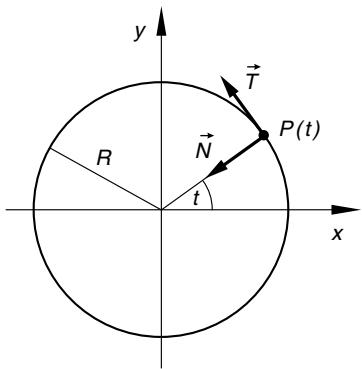
### Hauptnormaleneinheitsvektor $\vec{N}$

$$\dot{\vec{T}} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

$$|\dot{\vec{T}}| = \sqrt{(-\cos t)^2 + (-\sin t)^2} = \sqrt{\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_1} = 1$$

$$\vec{N} = \frac{\dot{\vec{T}}}{|\dot{\vec{T}}|} = \frac{1}{|\dot{\vec{T}}|} \dot{\vec{T}} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Der Hauptnormaleneinheitsvektor  $\vec{N}$  zeigt somit stets in Richtung des *Kreismittelpunktes* und ist *antiparallel* zum Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  (siehe Bild I-16).

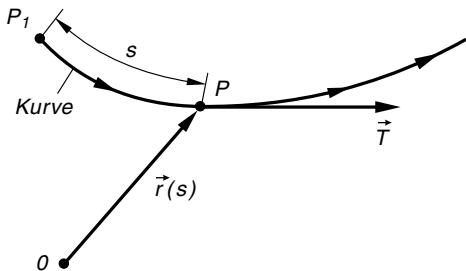


**Bild I-16**

Tangenteneinheitsvektor  $\vec{T}$  und Hauptnormaleneinheitsvektor  $\vec{N}$  beim Mittelpunktkreis

■

In den Anwendungen stellt der Kurvenparameter  $t$  meist die *Zeit* dar. Aber auch *geometrische Parameter* wie z. B. die *Bogenlänge*  $s$  der Kurve finden Verwendung. In diesem wichtigen Sonderfall ist der Ortsvektor  $\vec{r}$  der Kurve eine Vektorfunktion der *Bogenlänge*  $s$ , die von einem bestimmten Kurvenpunkt  $P_1$  aus gemessen wird:  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  (Bild I-17). Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einem *natürlichen Parameter* und nennt die Parameterdarstellung  $\vec{r}(s)$  eine *natürliche Darstellung* der Kurve.



**Bild I-17**

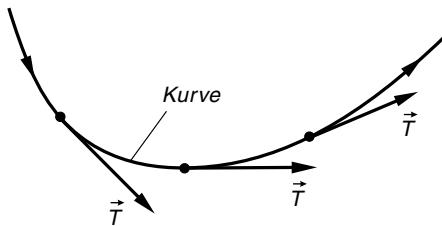
Zur *natürlichen* Darstellung einer Kurve:  
Die Bogenlänge  $s$  dient als Parameter des  
Ortsvektors  $\vec{r}$

Der *Tangentenvektor*  $\frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{\vec{r}}(s)$  ist nach Gleichung (I-30) bereits *normiert* und somit identisch mit dem *Tangenteneinheitsvektor*  $\vec{T} = \vec{T}(s)$ :

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{\vec{r}}(s) \quad \text{mit} \quad |\vec{T}| = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = |\dot{\vec{r}}(s)| = 1 \quad (\text{I-41})$$

## 1.5 Krümmung einer Kurve

Wir gehen in diesem Abschnitt zunächst von der sog. *natürlichen* Darstellung einer Kurve aus, d. h. wir verwenden die *Bogenlänge*  $s$  als Kurvenparameter. Dann ist  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  der Ortsvektor einer solchen Kurve und  $\vec{T} = \vec{T}(s) = \frac{d\vec{r}}{ds}$  der zugehörige *Tangenteneinheitsvektor*, der sich im Allgemeinen von Kurvenpunkt zu Kurvenpunkt verändert wird (Bild I-18).



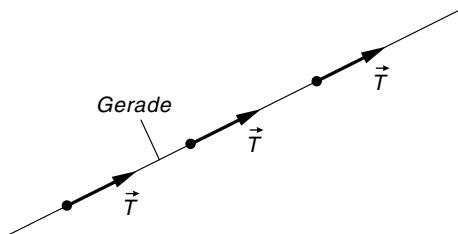
**Bild I-18**

Der Tangenteneinheitsvektor  $\vec{T}$  einer Kurve ändert im Allgemeinen seine Richtung von Punkt zu Punkt

Eine Ausnahme bilden allerdings die *Geraden*, deren Tangenteneinheitsvektoren in *jedem* Punkt die gleiche Richtung besitzen (Bild I-19). Wir können diese wichtige Eigenschaft einer Geraden auch durch die Gleichung

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \dot{\vec{T}}(s) = \vec{0} \quad (\text{I-42})$$

zum Ausdruck bringen.



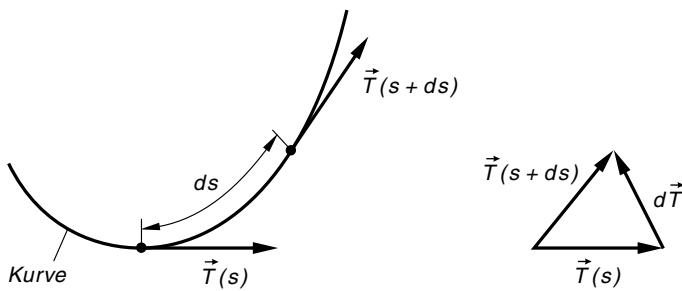
**Bild I-19**

Eine Gerade besitzt einen von Punkt zu Punkt konstant bleibenden Tangenteneinheitsvektor  $\vec{T}$

Bei einer *beliebigen* Raumkurve kennzeichnet der Vektor  $\frac{d\vec{T}}{ds} = \dot{\vec{T}}(s)$  die Änderungsgeschwindigkeit des Tangenteneinheitsvektors  $\vec{T}$ . Wenn wir also längs der Kurve in positiver Richtung um das *Bogenelement*  $ds$  forschreiten, so ändert sich der Vektor  $\vec{T}$  um

$$d\vec{T} = \dot{\vec{T}}(s) ds \quad (\text{I-43})$$

Bild I-20 verdeutlicht diese Aussage.



**Bild I-20** Zur Änderungsgeschwindigkeit des Tangenteneinheitsvektors  $\vec{T}$

Je größer diese Änderung ist (bei festem  $ds$ ), umso stärker weicht die Kurve offensichtlich vom geradlinigen Verlauf ab und umso stärker ist sie somit gekrümmmt. Die Änderungsgeschwindigkeit des Tangenteneinheitsvektors  $\vec{T}$  charakterisiert also in gewisser Weise die *Stärke der Krümmung* der Kurve an der betreffenden Stelle. Daher ist die positive Größe

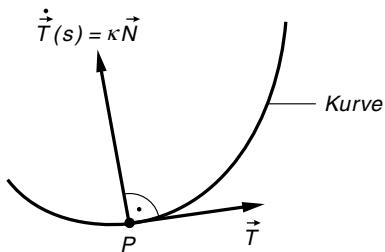
$$\kappa = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| = \left| \dot{\vec{T}}(s) \right| \quad (\text{I-44})$$

ein geeignetes Maß für die Abweichung der Kurve vom *geradlinigen* Verlauf und wird folgerichtig als *Kurvenkrümmung* bezeichnet. Sie ändert sich im Allgemeinen von Punkt zu Punkt, d. h. die Krümmung  $\kappa$  ist eine *Funktion* der Bogenlänge  $s$ :  $\kappa = \kappa(s)$ . Ihr *reziproker Wert*

$$\varrho = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{|\dot{\vec{T}}(s)|} \quad (\text{I-45})$$

wird als *Krümmungsradius* bezeichnet. Der Vektor  $\frac{d\vec{T}}{ds} = \dot{\vec{T}}(s)$  weist dabei in die Richtung des *Hauptnormaleneinheitsvektors*  $\vec{N}$ , seine Länge ist die Krümmung  $\kappa$  (siehe Bild I-21). Somit gilt:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \dot{\vec{T}}(s) = \kappa \vec{N} \quad (\kappa \geq 0) \quad (\text{I-46})$$



**Bild I-21**

Zum Begriff der Krümmung einer Kurve

### Kümmung und Krümmungsradius einer Raumkurve

Durch die *Krümmung*  $\kappa$  wird die *Abweichung* einer Raumkurve von einer Geraden und somit die *Richtungsänderung* der Kurventangente pro Bogenlängenänderung gemessen (Bild I-21). Der *reziproke* Wert der Krümmung  $\kappa$  heißt *Krümmungsradius*  $\varrho$  ( $\varrho = 1/\kappa$ ). Krümmung und Krümmungsradius verändern sich dabei im Allgemeinen von Kurvenpunkt zu Kurvenpunkt und sind somit *Funktionen* des verwendeten Kurvenparameters.

**Krümmung einer Raumkurve**  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  ( $s$ : Bogenlänge)

$$\kappa = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| = \left| \dot{\vec{T}}(s) \right| \quad (\text{I-47})$$

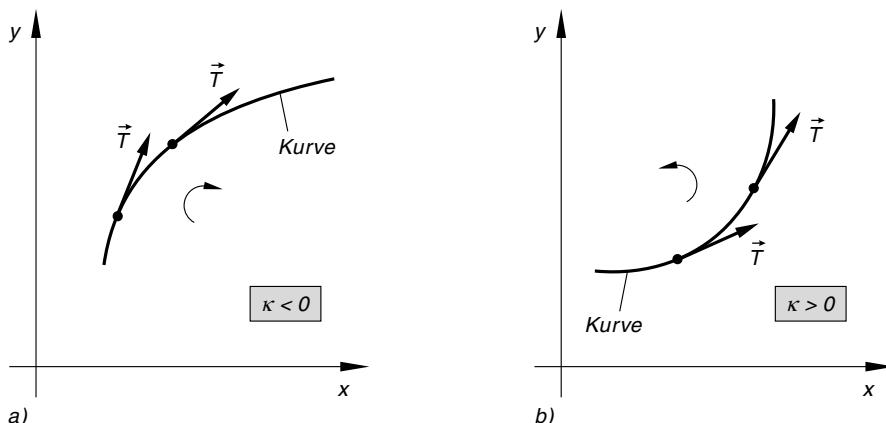
**Krümmung einer Raumkurve**  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  ( $t$ : beliebiger Parameter)

$$\kappa = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} \quad (\dot{\vec{r}} \neq \vec{0}) \quad (\text{I-48})$$

$\vec{T}$ : Tangenteneinheitsvektor der Raumkurve

#### Anmerkungen

- (1) Bei einer *ebenen* Kurve wird noch zwischen *Rechts-* und *Linkskrümmung* unterschieden (siehe hierzu auch Band 1, Abschnitt IV.3.3.1 und IV.3.3.3). Die *Krümmungsart* wird dabei wie folgt durch ein *Vorzeichen* gekennzeichnet (Bild I-22):
  - Rechtskrümmung:*  $\kappa < 0$ , der Tangentenvektor  $\vec{T}$  dreht sich im *Uhrzeigersinn*
  - Linkskrümmung:*  $\kappa > 0$ , der Tangentenvektor  $\vec{T}$  dreht sich im *Gegenuhrzeigersinn*



**Bild I-22** Zur Krümmung einer *ebenen* Kurve: a) Rechtskrümmung b) Linkskrümmung

- (2) Bei einer *Raumkurve* ist eine Unterscheidung zwischen Rechts- und Linkskrümmung jedoch *nicht* möglich. Die Krümmung ist hier stets *positiv*.
- (3) Für die Krümmung einer *ebenen* Kurve gelten die folgenden Formeln:

a) Kurve mit dem Ortsvektor  $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y$ :

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{|\dot{\vec{r}}|^3} \quad (\text{I-49})$$

b) Kurve mit der expliziten Gleichung  $y = f(x)$ :

$$\kappa = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \quad (\text{I-50})$$

*Herleitung* dieser Formel: Siehe Übungsaufgabe 11) auf Seite 232

- (4) Wichtige Beispiele für Kurven mit *konstanter* Krümmung sind:

*Gerade*:  $\kappa = 0$

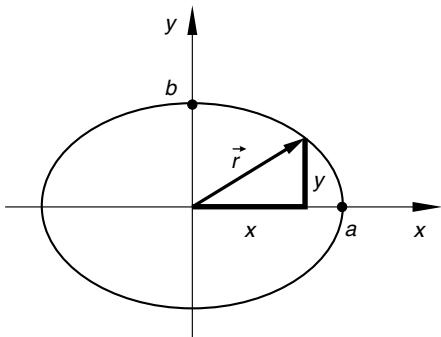
*Kreis*:  $\kappa = \text{const.} = 1/r$  ( $r$ : Kreisradius)

## ■ Beispiele

- (1) Die in Bild I-23 dargestellte *Mittelpunktsellipse* mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  lässt sich durch den parameterabhängigen Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ b \cdot \sin t \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

beschreiben (mit  $a > 0$ ,  $b > 0$ ).



**Bild I-23**

Mittelpunktsellipse, dargestellt durch einen parameterabhängigen Ortsvektor

Mit den Ableitungen

$$\dot{x} = -a \cdot \sin t, \quad \ddot{x} = -a \cdot \cos t, \quad \dot{y} = b \cdot \cos t, \quad \ddot{y} = -b \cdot \sin t$$

erhalten wir dann nach Formel (I-49) die folgende Krümmung:

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{(-a \cdot \sin t)(-b \cdot \sin t) - (-a \cdot \cos t)(b \cdot \cos t)}{(a^2 \cdot \sin^2 t + b^2 \cdot \cos^2 t)^{3/2}} = \\ &= \frac{ab \cdot \sin^2 t + ab \cdot \cos^2 t}{(a^2 \cdot \sin^2 t + b^2 \cdot \cos^2 t)^{3/2}} = \frac{ab(\sin^2 t + \cos^2 t)}{(a^2 \cdot \sin^2 t + b^2 \cdot \cos^2 t)^{3/2}} = \\ &= \frac{ab}{(a^2 \cdot \sin^2 t + b^2 \cdot \cos^2 t)^{3/2}}\end{aligned}$$

(unter Beachtung des trigonometrischen Pythagoras  $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ )

**Sonderfall:** Für  $a = b = r$  erhalten wir einen *Mittelpunktskreis* mit dem Radius  $r$ . Er besitzt die *konstante Krümmung*

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{r^2}{(r^2 \cdot \sin^2 t + r^2 \cdot \cos^2 t)^{3/2}} = \frac{r^2}{[r^2 (\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t})]^{3/2}} = \\ &= \frac{r^2}{(r^2)^{3/2}} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}\end{aligned}$$

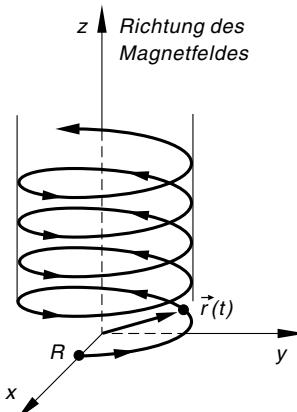
Der Krümmungsradius  $\varrho$  ist daher mit dem *Radius*  $r$  des Kreises identisch:

$$\varrho = \frac{1}{\kappa} = r$$

- (2) Bild I-24 zeigt eine *Schraubenlinie* mit dem Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = R \cdot \cos(\omega t) \vec{e}_x + R \cdot \sin(\omega t) \vec{e}_y + c t \vec{e}_z \quad (t \geq 0)$$

( $R > 0$ ;  $c > 0$ ; Bahnkurve eines Elektrons im homogenen Magnetfeld, siehe hierzu auch Beispiel (2) aus Abschnitt 1.1).



**Bild I-24**

Schraubenlinie, dargestellt durch einen parameterabhängigen Ortsvektor

Für die Berechnung der *Kurvenkrümmung* nach Gleichung (I-48) benötigen wir die Ableitungen  $\dot{\vec{r}}$  und  $\ddot{\vec{r}}$ . Die Kettenregel liefert:

$$\dot{\vec{r}} = -R\omega \cdot \sin(\omega t) \vec{e}_x + R\omega \cdot \cos(\omega t) \vec{e}_y + c \vec{e}_z$$

$$\ddot{\vec{r}} = -R\omega^2 \cdot \cos(\omega t) \vec{e}_x - R\omega^2 \cdot \sin(\omega t) \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z$$

Hieraus lassen sich die in Formel (I-48) benötigten Größen  $|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|$  und  $|\dot{\vec{r}}|$  wie folgt bestimmen:

$$|\dot{\vec{r}}| = \sqrt{R^2 \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t) + R^2 \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t) + c^2} = \sqrt{R^2 \omega^2 + c^2}$$

$$= \underbrace{\sqrt{R^2 \omega^2 [\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)] + c^2}}_1 = \sqrt{R^2 \omega^2 + c^2}$$

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -R\omega \cdot \sin(\omega t) \\ R\omega \cdot \cos(\omega t) \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\omega^2 \cdot \cos(\omega t) \\ -R\omega^2 \cdot \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= R\omega^2 \begin{pmatrix} -R\omega \cdot \sin(\omega t) \\ R\omega \cdot \cos(\omega t) \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= R\omega^2 \begin{pmatrix} 0 + c \cdot \sin(\omega t) \\ -c \cdot \cos(\omega t) - 0 \\ R\omega \cdot \sin^2(\omega t) + R\omega \cdot \cos^2(\omega t) \end{pmatrix} =$$

$$= R\omega^2 \underbrace{\begin{pmatrix} c \cdot \sin(\omega t) \\ -c \cdot \cos(\omega t) \\ R\omega [\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)] \end{pmatrix}}_1 = R\omega^2 \begin{pmatrix} c \cdot \sin(\omega t) \\ -c \cdot \cos(\omega t) \\ R\omega \end{pmatrix}$$

$$|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| = R\omega^2 \cdot \sqrt{c^2 \cdot \sin^2(\omega t) + c^2 \cdot \cos^2(\omega t) + R^2 \omega^2} =$$

$$= R\omega^2 \cdot \sqrt{c^2 \underbrace{[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)]}_1 + R^2 \omega^2} =$$

$$= R\omega^2 \cdot \sqrt{c^2 + R^2 \omega^2} = R\omega^2 \cdot \sqrt{R^2 \omega^2 + c^2}$$

Nach Formel (I-48) erhalten wir damit die folgende Kurvenkrümmung:

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} = \frac{R\omega^2 \cdot \sqrt{R^2\omega^2 + c^2}}{(\sqrt{R^2\omega^2 + c^2})^3} = \frac{R\omega^2}{(\sqrt{R^2\omega^2 + c^2})^2} = \\ &= \frac{R\omega^2}{R^2\omega^2 + c^2} = \text{const.}\end{aligned}$$

Die Schraubenlinie besitzt somit in jedem Punkt die *gleiche* Krümmung. Der *konsante* Krümmungsradius beträgt

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{R^2\omega^2 + c^2}{R\omega^2} \quad \blacksquare$$

## 1.6 Ein Anwendungsbeispiel: Zerlegung von Geschwindigkeit und Beschleunigung in Tangential- und Normalkomponenten

Ein Massenpunkt bewege sich auf einer (ebenen oder räumlichen) Bahnkurve mit dem *zeitabhängigen* Ortsvektor  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . Wir wollen jetzt den Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$  sowie den Beschleunigungsvektor  $\vec{a} = \ddot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$  in jeweils eine *Tangential-* und *Normalkomponente* zerlegen. Gesucht sind also Zerlegungen in der Form

$$\vec{v} = v_T \vec{T} + v_N \vec{N} \quad \text{und} \quad \vec{a} = a_T \vec{T} + a_N \vec{N} \quad (\text{I-51})$$

wobei  $\vec{T}$  der *Tangenteneinheitsvektor* und  $\vec{N}$  der *Hauptnormaleneinheitsvektor* ist (Index  $T$ : Tangentialkomponente; Index  $N$ : Normalkomponente).

### Geschwindigkeitsvektor

Der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$  liegt bekanntlich in Richtung der *Kurventangente* und lässt sich somit in der Form

$$\vec{v} = v_T \vec{T} + 0 \vec{N} = v_T \vec{T} = v \vec{T} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \vec{T} \quad (\text{I-52})$$

darstellen, wobei

$$v = \frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (\text{I-53})$$

der zeitabhängige *Geschwindigkeitsbetrag* ist. Die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  besitzt nur eine *Tangentialkomponente*  $v_T = v$ , während die Normalkomponente  $v_N$  stets *verschwindet*:  $v_N = 0$  (siehe Bild I-25).

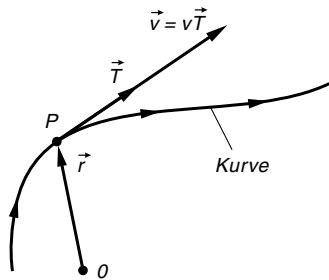


Bild I-25

Der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  besitzt nur eine Tangentialkomponente  $v_T = v$  (die Normalkomponente  $v_N$  verschwindet)

### Beschleunigungsvektor

Wir differenzieren den Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v} = v \vec{T}$  mit Hilfe der Produktregel (I-20) nach der Zeit  $t$  und erhalten definitionsgemäß den *Beschleunigungsvektor*  $\vec{a}$ :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \vec{T}) = \frac{dv}{dt} \vec{T} + v \frac{d\vec{T}}{dt} = \dot{v} \vec{T} + v \frac{d\vec{T}}{dt} \quad (\text{I-54})$$

Ferner ist

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \left( \frac{d\vec{T}}{ds} \right) \frac{ds}{dt} = \left( \frac{d\vec{T}}{ds} \right) \frac{ds}{dt} = (\kappa \vec{N}) v = \kappa v \vec{N} = \frac{1}{\rho} v \vec{N} = \frac{v}{\rho} \vec{N} \quad (\text{I-55})$$

wobei wir von den Beziehungen

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa \vec{N}, \quad \frac{ds}{dt} = v \quad \text{und} \quad \kappa = \frac{1}{\rho} \quad (\text{I-56})$$

Gebrauch gemacht haben. Damit bekommt der *Beschleunigungsvektor*  $\vec{a}$  aus Gleichung (I-54) die folgende Gestalt:

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{T} + v \frac{d\vec{T}}{dt} = \dot{v} \vec{T} + v \left( \frac{v}{\rho} \right) \vec{N} = \dot{v} \vec{T} + \frac{v^2}{\rho} \vec{N} \quad (\text{I-57})$$

Er besitzt somit die *Tangentialkomponente*  $a_T = \dot{v}$  und die *Normalkomponente*  $a_N = \frac{v^2}{\rho}$ , die auch als *Zentripetalbeschleunigung* bezeichnet wird (Bild I-26).

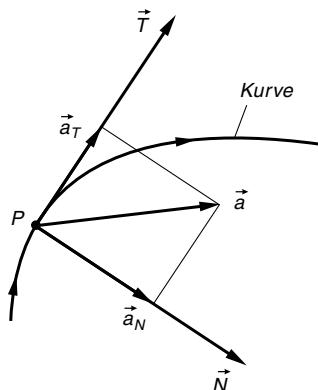


Bild I-26

Zerlegung des Beschleunigungsvektors  $\vec{a}$  in eine Tangential- und Normalkomponente

Wir fassen diese Ergebnisse wie folgt zusammen:

### Tangential- und Normalkomponenten von Geschwindigkeit und Beschleunigung

#### Geschwindigkeitsvektor (siehe Bild I-25)

$$\vec{v} = v_T \vec{T} + v_N \vec{N} = v \vec{T} + 0 \vec{N} = v \vec{T} \quad (v = |\dot{\vec{r}}|) \quad (\text{I-58})$$

Die Geschwindigkeit besitzt nur eine *Tangentialkomponente*  $v_T = v$ , die Normalkomponente  $v_N$  verschwindet ( $v_N = 0$ ).

#### Beschleunigungsvektor (siehe Bild I-26)

$$\vec{a} = a_T \vec{T} + a_N \vec{N} = \dot{v} \vec{T} + \frac{v^2}{\varrho} \vec{N} = \dot{v} \vec{T} + \kappa v^2 \vec{N} \quad (\text{I-59})$$

Die Beschleunigung besitzt die *Tangentialkomponente*  $a_T = \dot{v}$  und die *Normalkomponente*  $a_N = \frac{v^2}{\varrho} = \kappa v^2$ , auch *Zentripetalbeschleunigung* genannt.

Dabei bedeuten:

$\vec{T}$ : Tangenteneinheitsvektor

$\vec{N}$ : Hauptnormaleneinheitsvektor

$v$ : Geschwindigkeitsbetrag

$\kappa$ : Kurvenkrümmung

$\varrho$ : Krümmungsradius ( $\varrho = 1/\kappa$ )

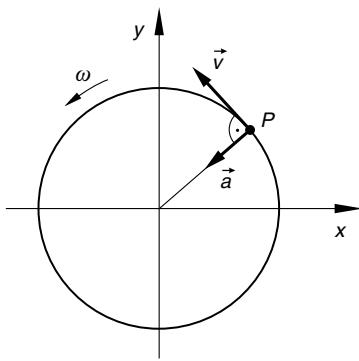
## ■ Beispiele

- (1) Bei einer gleichmäßigen Kreisbewegung ist der Betrag  $v$  der Geschwindigkeit *konstant* und daher  $\dot{v} = 0$ . Die *Tangentialbeschleunigung* ist somit *null*:  $a_T = 0$ . Die *Normalkomponente* (*Zentripetalbeschleunigung*)  $a_N = v^2/r$  ist stets auf den *Kreismittelpunkt* gerichtet und ändert laufend die *Richtung* der Geschwindigkeit, *nicht* jedoch den Geschwindigkeitsbetrag ( $r$ : Kreisradius; siehe Bild I-27). Es gilt somit unter Berücksichtigung der Beziehung  $v = \omega r$ , wobei  $\omega$  die (konstante) *Winkelgeschwindigkeit* ist, mit der sich der Massenpunkt um den Kreismittelpunkt bewegt:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_T \vec{T} + a_N \vec{N} = 0 \vec{T} + \frac{v^2}{r} \vec{N} = \frac{v^2}{r} \vec{N} = - \frac{v^2}{r} \frac{\vec{r}}{r} = - \frac{v^2}{r^2} \vec{r} = \\ &= - \frac{(\omega r)^2}{r^2} \vec{r} = - \frac{\omega^2 r^2}{r^2} \vec{r} = - \omega^2 \vec{r} \end{aligned}$$

Hinweis: Der Hauptnormaleneinheitsvektor  $\vec{N}$  ist *antiparallel* zum Ortsvektor  $\vec{r}$ .

Somit ist  $\vec{N} = - \frac{\vec{r}}{r}$ .

**Bild I-27**

Kreisbewegung mit konstanter  
Winkelgeschwindigkeit  $\omega$

- (2) Die Bahnkurve eines Körpers lautet wie folgt:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t \end{pmatrix} \quad (t \geq 0)$$

Wir interessieren uns für die *Tangential-* und *Normalkomponenten* von Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und Beschleunigung  $\vec{a}$ .

**Geschwindigkeit**  $\vec{v}$  (es existiert bekanntlich nur eine Tangentialkomponente  $v_T$ )

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{1 + 4t^2 + 1} = \sqrt{4t^2 + 2}$$

Somit besitzt der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  die *Tangentialkomponente*

$$v_T = v = \sqrt{4t^2 + 2}$$

**Beschleunigung**  $\vec{a}$

Wir berechnen zunächst alle benötigten Größen ( $\dot{v}$ ,  $\dot{\vec{r}}$ ,  $\ddot{\vec{r}}$  und  $\kappa$ ):

$$\dot{v} = \frac{d}{dt} (\sqrt{4t^2 + 2}) = \frac{1}{2\sqrt{4t^2 + 2}} \cdot 8t = \frac{4t}{\sqrt{4t^2 + 2}}$$

(mit Hilfe der Kettenregel)

$$\ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 0 - 0 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 0 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\kappa = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{4t^2 + 2})^3} = \frac{2\sqrt{2}}{[(4t^2 + 2)^{1/2}]^3} = \frac{2\sqrt{2}}{(4t^2 + 2)^{3/2}}$$

Damit besitzt der Beschleunigungsvektor  $\vec{a}$  nach Gleichung (I-59) die *Tangentialkomponente*

$$a_T = \dot{v} = \frac{4t}{\sqrt{4t^2 + 2}}$$

und die *Normalkomponente*

$$a_N = \kappa v^2 = \frac{2\sqrt{2}}{(4t^2 + 2)^{3/2}} \cdot (4t^2 + 2) = \frac{2\sqrt{2}}{(4t^2 + 2)^{1/2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4t^2 + 2}}$$
■

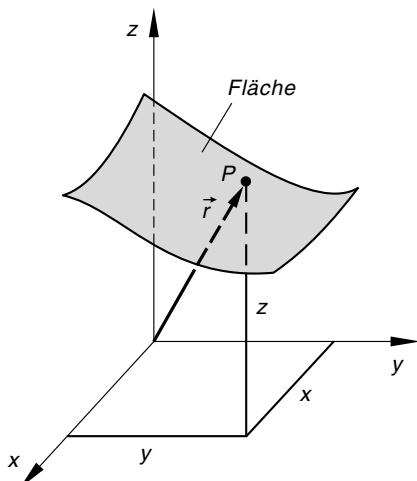
## 2 Flächen im Raum

### 2.1 Vektorielle Darstellung einer Fläche

Eine Fläche im Raum lässt sich durch einen Ortsvektor beschreiben, der von *zwei* reellen Parametern  $u$  und  $v$  abhängt, d. h. die kartesischen Vektorkoordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  sind *Funktionen* der beiden Variablen  $u$  und  $v$ :

$$\vec{r} = \vec{r}(u; v) = x(u; v) \vec{e}_x + y(u; v) \vec{e}_y + z(u; v) \vec{e}_z = \begin{pmatrix} x(u; v) \\ y(u; v) \\ z(u; v) \end{pmatrix} \quad (\text{I-60})$$

(siehe Bild I-28).



**Bild I-28**  
Vektdarstellung einer Fläche im Raum

Die Fläche wird dabei von einem Netz von *Parameterkurven*, auch *Parameter-* oder *Koordinatenlinien* genannt, durchzogen. Wir unterscheiden dabei die folgenden Linien (siehe Bild I-29):

*u-Linien* ( $u$  variabel;  $v = \text{const.}$ ):

$$\vec{r} = \vec{r}(u; v = \text{const.}) \quad (\text{I-61})$$

*v-Linien* ( $v$  variabel;  $u = \text{const.}$ ):

$$\vec{r} = \vec{r}(u = \text{const.}; v) \quad (\text{I-62})$$

Längs einer Parameterlinie ist also jeweils *einer* der beiden Parameter *konstant*. Die Parameterlinien hängen somit nur noch von *einem* Parameter ab.

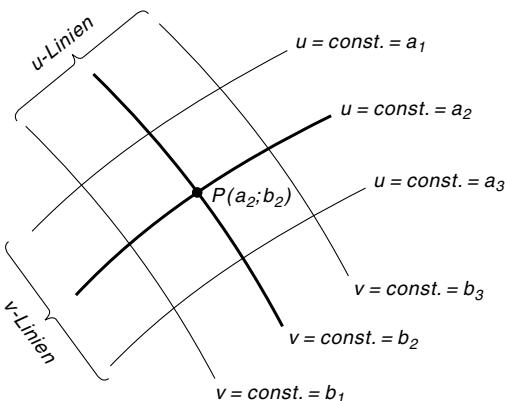


Bild I-29

Parameter- oder Koordinatenlinien einer Fläche

Der in Bild I-29 eingezeichnete Flächenpunkt  $P$  ist der *Schnittpunkt* der  $u$ -Linie  $v = \text{const.} = b_2$  mit der  $v$ -Linie  $u = \text{const.} = a_2$  und somit durch die Parameterwerte  $u = a_2, v = b_2$  eindeutig festgelegt.

Wir interessieren uns jetzt für die *Tangentenvektoren* an die Parameterlinien (Bild I-30). Da längs einer  $u$ -Linie der Parameter  $v$  *konstant* bleibt, hängt der Ortsvektor dieser Kurve nur vom Parameter  $u$  ab. Dann ist nach den Ergebnissen aus Abschnitt 1.2 der Tangentenvektor an diese Kurve durch die *erste Ableitung* des Ortsvektors  $\vec{r} = \vec{r}(u; v = \text{const.})$  nach dem Parameter  $u$  gegeben. Wir schreiben dafür

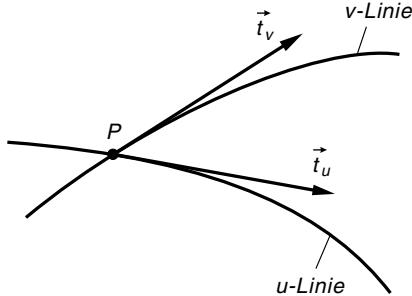
$$\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} [\vec{r}(u; v = \text{const.})] \quad (\text{I-63})$$

Es handelt sich hier also um eine *partielle* Ableitung 1. Ordnung, da  $\vec{r}$  formal von  $u$  und  $v$ , d. h. von *zwei* Variablen abhängt. Beim Differenzieren gilt dabei die bereits bekannte Regel, dass ein Vektor *komponentenweise* differenziert wird (hier also *partiell* nach der Variablen  $u$ ). In ausführlicher Schreibweise gilt also:

$$\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial u} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial u} \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix} \quad (\text{I-64})$$

Analog erhält man den Tangentenvektor an die *v-Linie*:

$$\vec{t}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial v} \vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial v} \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \quad (\text{I-65})$$



**Bild I-30**

Tangentenvektoren an die Parameter- oder Koordinatenlinien einer Fläche

Wir fassen die Ergebnisse wie folgt zusammen:

### Darstellung einer Fläche im Raum durch einen parameterabhängigen Ortsvektor

#### Ortsvektor einer Fläche im Raum (siehe Bild I-28)

$$\vec{r} = \vec{r}(u; v) = x(u; v) \vec{e}_x + y(u; v) \vec{e}_y + z(u; v) \vec{e}_z = \begin{pmatrix} x(u; v) \\ y(u; v) \\ z(u; v) \end{pmatrix} \quad (\text{I-66})$$

*u, v*: Voneinander *unabhängige* reelle Parameter (auch *Flächenparameter* genannt)

#### Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien (*u*- und *v*-Linien; siehe Bild I-30)

$$\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{t}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \quad (\text{I-67})$$

### ■ Beispiele

#### (1) Die durch den Ortsvektor

$$\vec{r} = \vec{r}(u; v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix} \quad (u, v \in \mathbb{R})$$

erfassten Punkte bilden den *Mantel eines Rotationsparaboloids*, das durch Drehung der Normalparabel um die *z*-Achse entstanden ist (Bild I-31).

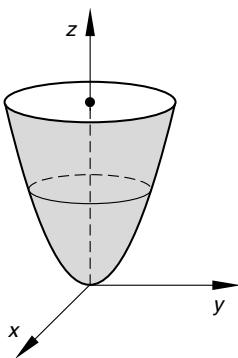


Bild I-31

Mantelfläche eines Rotationsparaboloids

Die *Tangentenvektoren* an die Parameterkurven lauten dann wie folgt:

$$\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}$$

So gehört z. B. zu den Parameterwerten  $u = 1, v = 2$  der Punkt  $P = (1; 2; 5)$  mit den *Tangentenvektoren*

$$\vec{t}_u(1; 2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{t}_v(1; 2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- (2) Bild I-32 zeigt einen *Zylinder* vom Radius  $R = 1$  und der Höhe  $H = 5$ . Die *Mantelfläche* lässt sich dann durch den Ortsvektor

$$\vec{r} = \vec{r}(u; v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ v \end{pmatrix} \quad (0 \leq u < 2\pi; 0 \leq v \leq 5)$$

beschreiben. Ihre *Parameterlinien* sind (siehe Bild I-33):

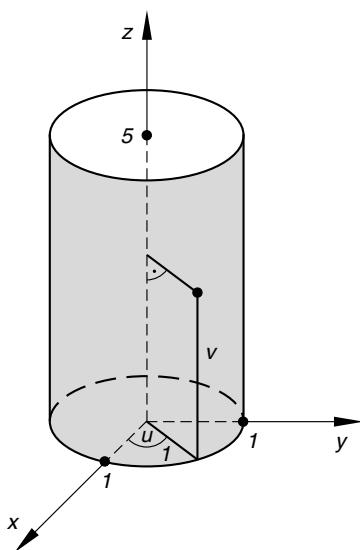
*u-Linien* ( $v = \text{const.}$ ): *Einheitskreise* in den Parallelebenen  $z = v = \text{const.}$ , deren Mittelpunkte auf der  $z$ -Achse liegen (zwischen  $z = 0$  und  $z = 5$ )

*v-Linien* ( $u = \text{const.}$ ): *Mantellinien* des Zylinders

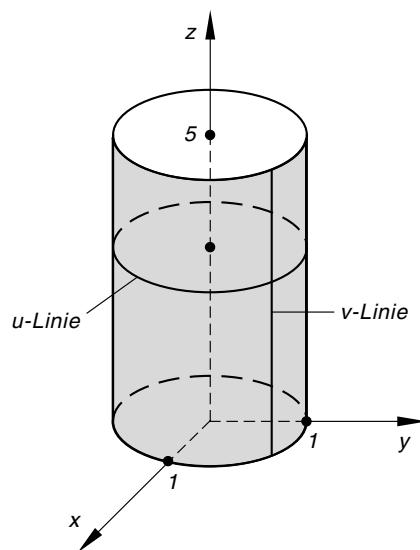
Die *Tangentenvektoren* an diese Parameterlinien lauten:

$$\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{t}_v$  ist dabei in jedem Flächenpunkt *identisch* mit dem kartesischen Einheitsvektor  $\vec{e}_z$ .

**Bild I-32**

Vektordarstellung der Mantelfläche eines Zylinders

**Bild I-33**

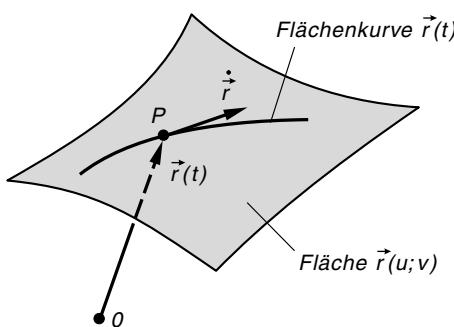
Parameterlinien der Mantelfläche eines Zylinders

## 2.2 Flächenkurven

Sind die Flächenparameter  $u$  und  $v$  *Funktionen* einer reellen Variablen  $t$ , gilt also  $u = u(t)$  und  $v = v(t)$ , so beschreibt der letztlich nur von  $t$  abhängige Ortsvektor

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t); v(t)) = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(u(t); v(t)) \\ y(u(t); v(t)) \\ z(u(t); v(t)) \end{pmatrix} \quad (\text{I-68})$$

eine sog. *Flächenkurve*, d. h. eine auf der Fläche  $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$  verlaufende Kurve (siehe Bild I-34).

**Bild I-34**

Flächenkurve auf einer räumlichen Fläche, dargestellt durch einen parameterabhängigen Ortsvektor

Der zum Parameter  $t$  gehörige Punkt  $P = P(t)$  der Flächenkurve besitzt dann den folgenden *Tangentenvektor*:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial t} = \vec{t}_u \dot{u} + \vec{t}_v \dot{v} = \dot{u} \vec{t}_u + \dot{v} \vec{t}_v \quad (\text{I-69})$$

Die Ableitung wird hier wiederum *komponentenweise* mit Hilfe der *Kettenregel* gebildet, da die Vektorkoordinaten jeweils von  $u$  und  $v$  abhängen und diese wiederum *Funktionen* des Parameters  $t$  sind.

Wir fassen zusammen:

### Flächenkurven

Sind die Parameter  $u$  und  $v$  einer Fläche  $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$  *Funktionen* einer Variablen  $t$ , gilt also  $u = u(t)$  und  $v = v(t)$ , so beschreibt der Ortsvektor

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}(u(t); v(t)) \quad (\text{I-70})$$

eine auf der Fläche verlaufende *Kurve* (sog. *Flächenkurve*, siehe Bild I-34). Der *Tangentenvektor* dieser Flächenkurve besitzt dann die folgende Darstellung:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \dot{u} \vec{t}_u + \dot{v} \vec{t}_v \quad (\text{I-71})$$

$\vec{t}_u, \vec{t}_v$ : *Tangentenvektoren* an die durch den Kurvenpunkt  $P = (u(t); v(t))$  gehenden Parameterlinien der Fläche

$\dot{u}, \dot{v}$ : Ableitungen der Parameter  $u$  und  $v$  nach  $t$

### ■ Beispiel

Elektronen, die *schief* in ein *homogenes* Magnetfeld eintreten, bewegen sich auf dem *Mantel eines Zylinders*, beschrieben durch den parameterabhängigen Ortsvektor

$$\vec{r} = \vec{r}(u; v) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos u \\ R \cdot \sin u \\ v \end{pmatrix} \quad (R > 0; 0 \leq u \leq 2\pi; 0 \leq v < \infty)$$

Die Flächenparameter  $u$  und  $v$  sind dabei noch wie folgt von der *Zeit*  $t$  abhängig:

$$u = \omega t, \quad v = ct$$

( $\omega > 0$ : Kreisfrequenz;  $c > 0$ ). Die von den Elektronen durchlaufene Bahnkurve ist eine *Schraubenlinie* (Bild I-35; siehe hierzu auch Beispiel (2) aus Abschnitt 1.1).

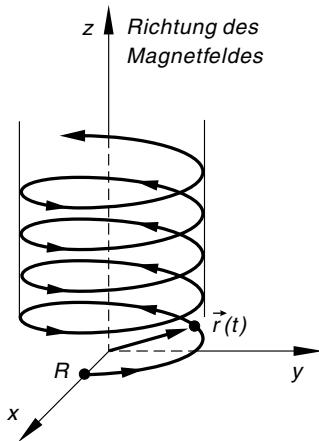


Bild I-35

Schraubenlinienförmige Bahn eines Elektrons in einem homogenen Magnetfeld, dargestellt durch einen parameterabhängigen Ortsvektor

Wir bestimmen jetzt den *Tangentenvektor* dieser Kurve nach Formel (I-71):

$$\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} -R \cdot \sin u \\ R \cdot \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \dot{u} = \omega, \quad \dot{v} = c$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \dot{u} \vec{t}_u + \dot{v} \vec{t}_v = \omega \begin{pmatrix} -R \cdot \sin u \\ R \cdot \cos u \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \omega \cdot \sin u \\ R \omega \cdot \cos u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -R \omega \cdot \sin u \\ R \omega \cdot \cos u \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \omega \cdot \sin(\omega t) \\ R \omega \cdot \cos(\omega t) \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

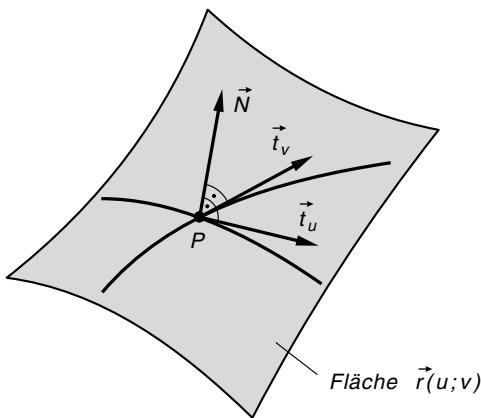
(unter Berücksichtigung von  $u = \omega t$ ). Dieses Ergebnis haben wir bereits in Abschnitt 1.2.2 hergeleitet (Beispiel (2)). Der *Tangentenvektor*  $\dot{\vec{r}}$  ist dabei nichts anderes als der *Geschwindigkeitsvektor*  $\vec{v}$  der eingeschossenen Elektronen, die sich auf der angegebenen Schraubenlinie bewegen.

## 2.3 Tangentialebene, Flächennormale, Flächenelement

### Flächennormale

Die *Tangentialebene* in einem Flächenpunkt  $P = (x_0; y_0; z_0)$  der Fläche  $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$  enthält sämtliche Tangenten, die man in  $P$  an die Fläche anlegen kann. Sie wird dabei von den beiden Tangentenvektoren  $\vec{t}_u$  und  $\vec{t}_v$  aufgespannt, vorausgesetzt, dass diese *nicht* in einer Linie liegen, also die Bedingung  $\vec{t}_u \times \vec{t}_v \neq \vec{0}$  erfüllen (siehe Bild I-36)<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Diese Bedingung bedeutet *geometrisch*, dass die beiden Tangentenvektoren  $\vec{t}_u$  und  $\vec{t}_v$ , ein *Parallelogramm* aufspannen.

**Bild I-36**

Zum Begriff des Normaleneinheitsvektors einer Fläche (Flächennormale  $\vec{N}$ )

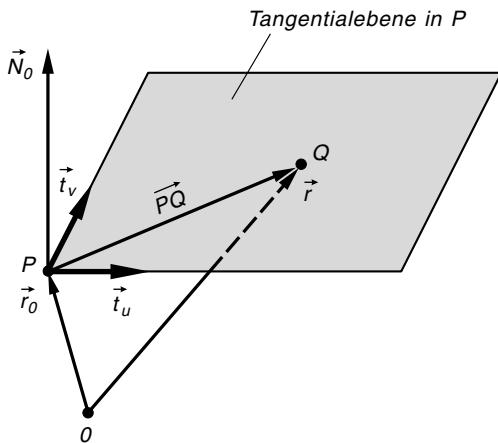
Dann steht das Vektorprodukt  $\vec{t}_u \times \vec{t}_v$  senkrecht auf der Tangentialebene des Flächenpunktes  $P$ . Durch Normierung erhalten wir aus  $\vec{t}_u \times \vec{t}_v$  den Normaleneinheitsvektor der Fläche, den wir kurz als Flächennormale  $\vec{N}$  bezeichnen wollen:

$$\vec{N} = \frac{\vec{t}_u \times \vec{t}_v}{|\vec{t}_u \times \vec{t}_v|} = \frac{1}{|\vec{t}_u \times \vec{t}_v|} (\vec{t}_u \times \vec{t}_v) \quad (\text{I-72})$$

Es gehört also zu jedem Punkt der Fläche genau eine Flächennormale.

### Tangentialebene

Wir wollen uns jetzt mit der *Tangentialebene* in einem festen Flächenpunkt  $P = (x_0; y_0; z_0)$  näher auseinandersetzen und insbesondere deren *Gleichung* herleiten (siehe Bild I-37).

**Bild I-37**

Tangentialebene einer Fläche im Flächenpunkt  $P$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}_0$

Ist  $\vec{r}_0$  der Ortsvektor von  $P$  und  $\vec{r}$  der Ortsvektor eines *beliebigen* Punktes  $Q$  der Tangentialebene, so liegt der Vektor  $\overrightarrow{PQ} = \vec{r} - \vec{r}_0$  in dieser Ebene und steht damit *senkrecht* zur Flächennormale  $\vec{N}_0$  im Flächenpunkt  $P$ <sup>2)</sup>. Das *Skalarprodukt* dieser Vektoren *verschwindet* daher und führt uns zu der gesuchten *Gleichung* der Tangentialebene. Diese lässt sich somit in der Form

$$\vec{N}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad (\text{I-73})$$

darstellen.

Wir fassen zusammen:

**Gleichung der Tangentialebene im Flächenpunkt  $P = (x_0; y_0; z_0)$**

Jedem Punkt einer Fläche mit dem Ortsvektor  $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$  ordnen wir eine normierte *Flächennormale*

$$\vec{N} = \frac{\vec{t}_u \times \vec{t}_v}{|\vec{t}_u \times \vec{t}_v|} \quad (\vec{t}_u \times \vec{t}_v \neq \vec{0}) \quad (\text{I-74})$$

zu. Die *Gleichung der Tangentialebene* an diese Fläche in dem (festen) Flächenpunkt  $P = (x_0; y_0; z_0)$  lautet dann:

$$\vec{N}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad (\text{I-75})$$

Dabei bedeuten (siehe Bild I-37):

$\vec{N}_0$ : *Flächennormale* im Flächenpunkt  $P$

$\vec{r}_0$ : Ortsvektor des Flächenpunktes  $P$

$\vec{r}$ : Ortsvektor eines *beliebigen* Punktes  $Q$  auf der Tangentialebene

#### Anmerkungen

- (1) Die Flächennormale  $\vec{N}$  ist das *normierte* Vektorprodukt der Tangentenvektoren  $\vec{t}_u$  und  $\vec{t}_v$ .
- (2) Da die Vektoren  $\vec{t}_u \times \vec{t}_v$  und  $\vec{N}$  *parallel* sind, lässt sich die Tangentialebene auch durch die Gleichung

$$(\vec{t}_u \times \vec{t}_v)_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad (\text{I-76})$$

beschreiben (die Normierung des Vektorproduktes  $(\vec{t}_u \times \vec{t}_v)_0$  ist für die Tangentialebene *ohne* Bedeutung).

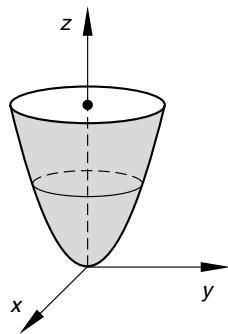
<sup>2)</sup> Um Missverständnisse zu vermeiden, werden wir im Folgenden alle Größen, die sich auf einen *speziellen* (*fest vorgegebenen*) Punkt  $P = (x_0; y_0; z_0)$  beziehen, durch den Index „0“ kennzeichnen. So ist beispielsweise  $\vec{N}_0$  die Flächennormale in dem *festen* Flächenpunkt  $P$  mit den Koordinaten  $x_0, y_0$  und  $z_0$ .

## ■ Beispiel

Durch den Ortsvektor

$$\vec{r} = \vec{r}(u; v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix} \quad (u, v \in \mathbb{R})$$

lässt sich die *Mantelfläche eines Rotationsparaboloids* beschreiben, die durch Drehung der Normalparabel um die  $z$ -Achse entstanden ist (Bild I-38). Wie lauten die Tangentenvektoren, die normierte Flächennormale sowie die Gleichung der *Tangentialebene* im Flächenpunkt  $P$  mit den Parameterwerten  $u = 1, v = 1$ ?



**Bild I-38**  
Mantelfläche eines Rotationsparaboloids

*Lösung:* Zunächst bestimmen wir die beiden *Tangentenvektoren* des Flächenpunktes  $P = (1; 1; 2)$ :

$$\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{t}_u(1; 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{t}_v(1; 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Für das *Vektorprodukt* der Tangentenvektoren erhalten wir damit:

$$(\vec{t}_u \times \vec{t}_v)_0 = \vec{t}_u(1; 1) \times \vec{t}_v(1; 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 0 - 2 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normierung führt zur *Flächennormale* im Punkt  $P$ :

$$|\vec{t}_u(1; 1) \times \vec{t}_v(1; 1)| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{N}_0 = \frac{\vec{t}_u(1; 1) \times \vec{t}_v(1; 1)}{|\vec{t}_u(1; 1) \times \vec{t}_v(1; 1)|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir sind jetzt in der Lage, die Gleichung der *Tangentialebene* im Flächenpunkt  $P$  zu bestimmen (den Normierungsfaktor 1/3 können wir weglassen, d. h. wir verwenden Gleichung (I-76)):

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \\ z - 2 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{t}_u \times \vec{t}_v)_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \\ z - 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-2(x - 1) - 2(y - 1) + 1(z - 2) = -2x + 2 - 2y + 2 + z - 2 = 0 \quad \Rightarrow \\ -2x - 2y + z + 2 = 0$$

Die *Tangentialebene* im Punkt  $P = (1; 1; 2)$  lässt sich somit durch die Gleichung

$$z = 2x + 2y - 2$$

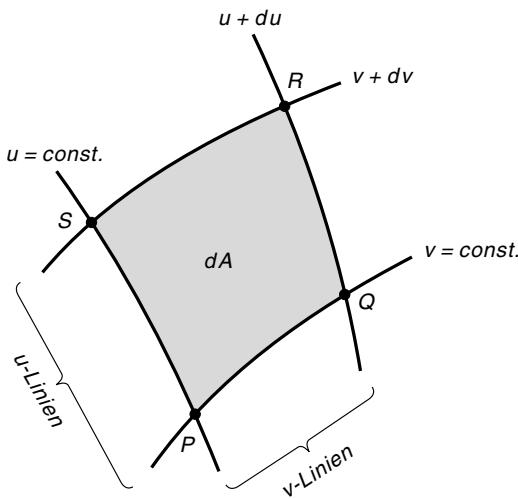
beschreiben. ■

### Flächenelement

Für spätere Zwecke, z. B. für die Berechnung von *Oberflächenintegralen*, benötigen wir noch einen allgemeinen Ausdruck für das *Flächenelement*  $dA$  einer Fläche  $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$ . Ein solches Flächenelement wird durch jeweils *zwei* infinitesimal benachbarte  $u$ - und  $v$ -Parameterlinien begrenzt (siehe Bild I-39). Die *Tangentenvektoren* im Flächenpunkt  $P$  längs der  $u$ -Linie durch  $P$  und  $Q$  bzw. längs der  $v$ -Linie durch  $P$  und  $S$  lauten:

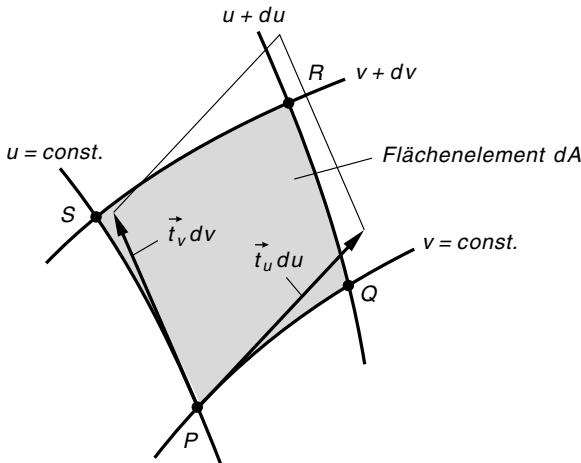
$$\text{Tangentenvektor an die } u\text{-Linie im Punkt } P: \vec{t}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$$

$$\text{Tangentenvektor an die } v\text{-Linie im Punkt } P: \vec{t}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

**Bild I-39**

Flächenelement  $dA$  einer Fläche im Raum

Die Länge des Bogens  $\widehat{PQ}$  auf der  $u$ -Linie durch  $P$  und  $Q$  wird dann *angenähert* durch die Länge des Vektors  $\vec{t}_u du$  (Bild I-40).

**Bild I-40**

Das Flächenelement  $dA$  lässt sich durch ein Parallelogramm annähern

Analog ist die Länge des Vektors  $\vec{t}_v dv$  eine *Näherung* für die Länge des Bogens  $\widehat{PS}$  auf der  $v$ -Linie durch  $P$  und  $S$ . Das *Flächenelement*  $dA$  besitzt dann *annähernd* den gleichen Inhalt wie das von den beiden Vektoren  $\vec{t}_u du$  und  $\vec{t}_v dv$  aufgespannte *Parallelogramm*. Somit ist  $dA$  *näherungsweise* gleich dem *Betrag* des Vektorproduktes der Vektoren  $\vec{t}_u du$  und  $\vec{t}_v dv$ :

$$dA = |(\vec{t}_u du) \times (\vec{t}_v dv)| = |\vec{t}_u \times \vec{t}_v| du dv \quad (I-77)$$

Wir fassen zusammen:

**Flächenelement einer Fläche  $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$**

Das *Flächenelement* in einem Punkt  $P$  einer Fläche  $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$  lässt sich in der Form

$$dA = |\vec{t}_u \times \vec{t}_v| du dv \quad (\text{I-78})$$

darstellen (siehe Bild I-40).

Dabei bedeuten:

$\vec{t}_u, \vec{t}_v$ : *Tangentenvektoren im Flächenpunkt  $P$*

$du, dv$ : *Differentiale* der beiden Flächenparameter  $u$  und  $v$

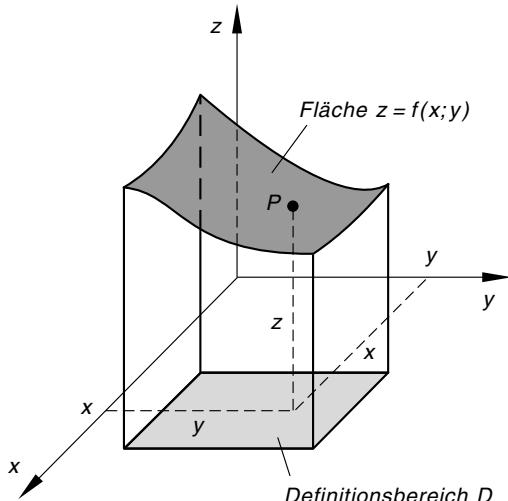
Die Flächennormale  $\vec{N}$  im Flächenpunkt  $P$  steht dabei *senkrecht* auf dem Flächenelement  $dA$ .

*Anmerkung*

Flächenelement  $dA$  und Flächennormale  $\vec{N}$  *verändern* sich im Allgemeinen von Flächenpunkt zu Flächenpunkt, sind damit *Funktionen* der beiden Flächenparameter  $u$  und  $v$ .

## 2.4 Flächen vom Typ $z = f(x; y)$

Aus Band 2, Abschnitt III.1.2.3 ist uns bereits bekannt, dass eine Funktion vom Typ  $z = f(x; y)$  bildlich durch eine *Fläche im Raum* dargestellt werden kann (Bild I-41).



**Bild I-41**

Fläche vom Typ  $z = f(x; y)$

Ein beliebiger Punkt  $P$  auf dieser Fläche besitzt dann die Koordinaten  $x, y$  und  $z = f(x; y)$ . Die *Bildfläche* der Funktion  $z = f(x; y)$  lässt sich auch in *vektorieller Form* darstellen, wobei die kartesischen Koordinaten  $x$  und  $y$  als *Flächenparameter* dienen:

$$\vec{r} = \vec{r}(x; y) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + f(x; y)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x; y) \end{pmatrix} \quad (\text{I-79})$$

Damit erhalten wir die folgenden *Tangentenvektoren* an die Parameterlinien der Fläche ( $x$ -Linien und  $y$ -Linien):

$$\vec{t}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix} \quad (\text{I-80})$$

$f_x$  und  $f_y$  sind dabei die *partiellen Ableitungen* 1. Ordnung von  $z = f(x; y)$ .

Da eine Verwechslung mit Vektorkoordinaten an dieser Stelle nicht möglich ist, haben wir hier die *Kurzschriftweise* für partielle Ableitungen gewählt. Das *Vektorprodukt* der beiden Tangentenvektoren lautet dann:

$$\vec{t}_x \times \vec{t}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - f_x \\ 0 - f_y \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I-81})$$

Wir benötigen noch den Betrag dieses Vektorproduktes:

$$|\vec{t}_x \times \vec{t}_y| = \sqrt{(-f_x)^2 + (-f_y)^2 + 1^2} = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} \quad (\text{I-82})$$

Durch *Normierung* des Vektorproduktes erhalten wir die *Flächennormale*  $\vec{N}$ :

$$\vec{N} = \frac{\vec{t}_x \times \vec{t}_y}{|\vec{t}_x \times \vec{t}_y|} = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I-83})$$

Wir bestimmen nun die Gleichung der *Tangentialebene* im Flächenpunkt  $P = (x_0; y_0; z_0)$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}_0$  nach Gleichung (I-75) bzw. (I-76):

$$\begin{aligned} (\vec{t}_x \times \vec{t}_y)_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) &= \begin{pmatrix} -f_x(x_0; y_0) \\ -f_y(x_0; y_0) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \\ -f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) - f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0) + 1(z - z_0) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I-84})$$

Die partiellen Ableitungen sind dabei im vorgegebenen Flächenpunkt  $P$  zu bilden, d. h. für die Parameterwerte  $x = x_0$  und  $y = y_0$ . Wir lösen die Gleichung (I-84) noch nach  $z$  auf und erhalten die bereits aus Band 2 bekannte Gleichung der *Tangentialebene* in der expliziten Form

$$z = f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0) + z_0 \quad (\text{I-85})$$

(Band 2, Kap. III, Abschnitt 2.4.1, Gleichung III-34 bzw. III-36).

Zum Abschluss geben wir noch das *Flächenelement*  $dA$  an, ausgedrückt in den kartesischen Flächenparametern  $x$  und  $y$ . Es lautet:

$$dA = |\vec{t}_x \times \vec{t}_y| dx dy = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dx dy \quad (\text{I-86})$$

Wir fassen die Ergebnisse wie folgt zusammen:

**Flächennormale, Flächenelement und Tangentialebene einer Fläche vom Typ  $z = f(x; y)$**

**Ortsvektor der Fläche  $z = f(x; y)$  (siehe Bild I-41)**

$$\vec{r} = \vec{r}(x; y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x; y) \end{pmatrix} \quad (\text{I-87})$$

Die kartesischen Koordinaten  $x$  und  $y$  dienen dabei als *Flächenparameter*.

**Tangentenvektoren an die Parameterlinien ( $x$ -Linien und  $y$ -Linien)**

$$\vec{t}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix} \quad (\text{I-88})$$

**Flächennormale**

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I-89})$$

**Flächenelement**

$$dA = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dx dy \quad (\text{I-90})$$

**Tangentialebene im Flächenpunkt  $P = (x_0; y_0; z_0)$  mit  $z_0 = f(x_0; y_0)$**

In *vektorieller Form*:

$$\vec{N}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad \text{oder} \quad (\vec{t}_x \times \vec{t}_y)_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad (\text{I-91})$$

In expliziter Form:

$$z = f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0) + z_0 \quad (\text{I-92})$$

Dabei bedeuten:

$\vec{N}_0$ : Flächennormale im Flächenpunkt  $P$

$\vec{r}_0$ : Ortsvektor des Flächenpunktes  $P$

$\vec{r}$ : Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Tangentialebene

$f_x, f_y$ : Partielle Ableitungen 1. Ordnung der Funktion  $z = f(x; y)$

## ■ Beispiel

Die Fläche  $z = f(x; y) = x^2 \cdot e^{xy}$  lässt sich auch durch den *Ortsvektor*

$$\vec{r} = \vec{r}(x; y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 \cdot e^{xy} \end{pmatrix}$$

mit den *kartesischen* Flächenparametern  $x$  und  $y$  beschreiben. Wir interessieren uns für die Gleichung der *Tangentialebene* im Flächenpunkt  $P$  mit den Parameterwerten  $x = 1, y = 0$ .

*Lösung:* Der Punkt  $P$  besitzt die Koordinaten  $x_0 = 1, y_0 = 0$  und  $z_0 = f(x_0; y_0) = f(1; 0) = 1$ . Wir bestimmen zunächst die benötigten *Tangentenvektoren* in diesem Punkt (unter Verwendung von Produkt- und Kettenregel):

$$\vec{t}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ (2x + x^2 \cdot e^{xy}) \cdot e^{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ (2x + x^2 y) \cdot e^{xy} \end{pmatrix}$$

$$\vec{t}_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x^2 \cdot e^{xy} \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x^3 \cdot e^{xy} \end{pmatrix}$$

$$\vec{t}_x(1; 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ (2 + 0) \cdot e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_y(1; 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \cdot e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das *Vektorprodukt* dieser Vektoren lautet dann:

$$(\vec{t}_x \times \vec{t}_y)_0 = \vec{t}_x(1; 0) \times \vec{t}_y(1; 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 0 - 1 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir können jetzt die Gleichung der *Tangentialebene* im Flächenpunkt  $P = (1; 0; 1)$  nach Formel (I-91) bestimmen:

$$(\vec{t}_x \times \vec{t}_y)_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 0 \\ z - 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-2(x - 1) - 1(y - 0) + 1(z - 1) = -2x + 2 - y + z - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$-2x - y + z + 1 = 0$$

Die Gleichung der gesuchten *Tangentialebene* lautet damit in expliziter Form:

$$z = 2x + y - 1$$

■

## 3 Skalar- und Vektorfelder

### 3.1 Ein einführendes Beispiel

Die in Naturwissenschaft und Technik so grundlegenden Begriffe *Skalarfeld* und *Vektorfeld* sollen anhand eines einfachen physikalischen Beispiels eingeführt werden. Wir betrachten dazu das *elektrische Feld* in der Umgebung einer positiven *Punktladung*  $Q$ . In jedem Punkt  $P$  dieses Feldes erfährt eine positive Probeladung  $q$  eine *radial nach außen* gerichtete Kraft  $\vec{F}(P)$ , deren Betrag mit zunehmendem Abstand  $r$  von der feldzeugenden Ladung  $Q$  abnimmt (Bild I-42). Es gilt das von *Coulomb* stammende Kraftgesetz

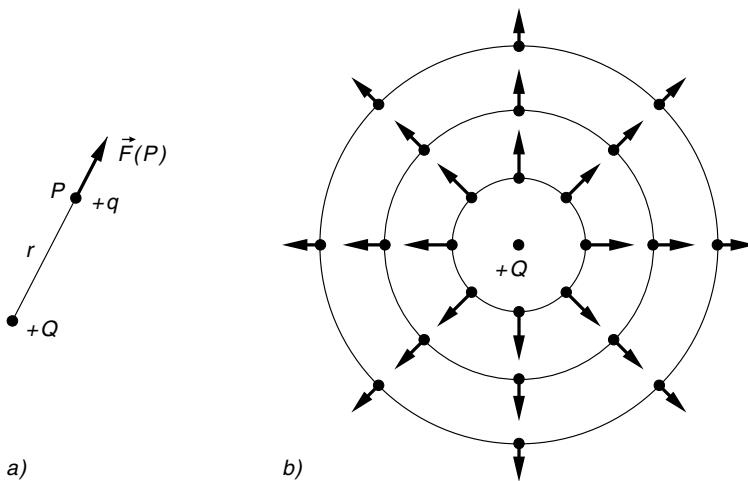
$$\vec{F} = \vec{F}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r^2} \vec{e}_r \quad (\text{I-93})$$

( $\epsilon_0$ : elektrische Feldkonstante).  $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$  ist dabei ein radial nach außen gerichteter *Einheitsvektor*. Er hat die gleiche Richtung wie der Ortsvektor  $\vec{r} = \vec{r}(P)$ . Die Kraftwirkung nach dem **Coulombgesetz** ist dabei von Ort zu Ort *verschieden*, hängt allerdings auch noch von der *Probeladung*  $q$  selbst ab, wobei gilt:

$$|\vec{F}| \sim q \quad (\text{I-94})$$

Wir verdeutlichen diesen Sachverhalt durch die Schreibweise  $\vec{F} = \vec{F}(P; q)$ . Um die Coulombkraft von der Probeladung  $q$  *unabhängig* zu machen, wird die Kraftwirkung auf die *Einheitsladung* ( $q = 1$ ) bezogen. Wir erhalten dann den als *elektrische Feldstärke* bezeichneten Vektor

$$\vec{E} = \vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r \quad (\text{I-95})$$

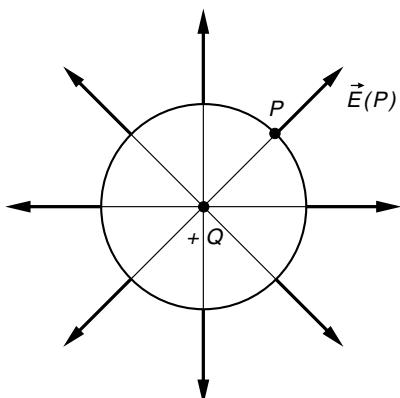


**Bild I-42** Kraftfeld in der Umgebung einer *positiven* Punktladung  $Q$

- Kraftwirkung auf eine *positive* Probeladung  $q$
- Die Kraftwirkung des elektrischen Feldes nimmt nach außen hin ab (*Coulomb-Gesetz*; die Kraftvektoren sind der besseren Übersicht wegen nicht maßstabsgetreu gezeichnet)

Dieser Vektor ist von der Probeladung vollkommen *unabhängig* und hängt nur noch vom betrachteten *Ort* ab (bei *fest* vorgegebener Ladung  $Q$ ). Zu jedem Punkt  $P$  des elektrischen Feldes gehört somit genau ein Feldstärkevektor  $\vec{E}(P)$ . Er beschreibt die Kraftwirkung des Feldes auf eine positive *Einheitsladung* nach Richtung und Größe in eindeutiger und *vollständiger* Weise. Man spricht daher in diesem Zusammenhang auch von einem *elektrischen Kraftfeld* oder etwas allgemeiner von einem *Vektorfeld*.

Ein *ebener* Schnitt durch dieses Feld (die Schnittebene enthält die felderzeugende Ladung  $Q$ ) führt uns zu dem in Bild I-43 dargestellten *ebenen* Vektorfeld. Alle Feldstärkevektoren liegen in der *Schnittebene* und sind in der üblichen Weise durch *Pfeile* gekennzeichnet.



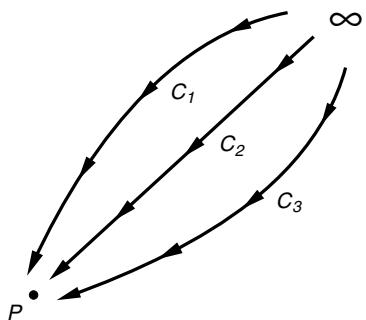
**Bild I-43**

Ebener Schnitt durch das elektrische Feld in der Umgebung einer *positiven* Punktladung  $Q$  (Schnitt durch die felderzeugende Ladung  $Q$ )

Das elektrische Feld in der Umgebung der positiven Punktladung  $Q$  kann aber auch durch eine *skalare* Größe eindeutig und *vollständig* beschrieben werden. Als geeignet erweist sich dabei die *physikalische Arbeit*  $W$ , die man an einer *positiven* Probeladung  $q$  verrichten muss, um diese aus dem „Unendlichen“ in einen Punkt  $P$  des elektrischen Feldes zu bringen. Bei dieser Verschiebung muss die abstoßende Coulomb-Kraft überwunden werden. Es zeigt sich dabei, dass die aufzubringende Arbeit  $W$  völlig *unabhängig* von dem eingeschlagenen Verbindungsweg  $C$  ist und somit nur vom *Endpunkt*  $P$  des Weges abhängt. In Bild I-44 wird diese Aussage verdeutlicht: Wenn wir die Probeladung  $q$  längs der eingezeichneten Wege  $C_1, C_2$  und  $C_3$  aus dem „Unendlichen“ in den gemeinsamen Endpunkt  $P$  verschieben, so müssen wir dabei jeweils die *gleiche* Arbeit verrichten. Allerdings ist diese Arbeit auch noch von der *Probeladung*  $q$  abhängig, wobei gilt:

$$W \sim q \quad (\text{I-96})$$

Wir bringen diese Abhängigkeit der Arbeit  $W$  sowohl vom Ort, d. h. dem Punkt  $P$  als auch von der Probeladung  $q$  durch die Schreibweise  $W = W(P; q)$  zum Ausdruck.



**Bild I-44**

Die Arbeit eines elektrischen Feldes an einer Probeladung ist *unabhängig* vom eingeschlagenen Verbindungsweg

Um die Arbeit von der Probeladung  $q$  *unabhängig* zu machen, verwenden wir wiederum die *Einheitsladung* ( $q = 1$ ) und erhalten auf diese Weise eine von  $q$  *unabhängige* Arbeitsgröße, die als *elektrostatisches Potential*  $U = U(P)$  bezeichnet wird. Zu jedem Punkt  $P$  des elektrischen Feldes gehört somit genau ein Potential  $U(P)$ . Es beschreibt die physikalische Arbeit, die man aufbringen muss, um die positive Einheitsladung aus dem „Unendlichen“ in den Punkt  $P$  zu verschieben. Da es sich um eine *skalare* von Ort zu Ort variierende Größe handelt, spricht man in diesem Zusammenhang von einem *Potentialfeld* oder etwas allgemeiner von einem *Skalarfeld*.

### 3.2 Skalarfelder

Im einführenden Beispiel haben wir erstmals den Begriff eines *skalaren* Feldes kennengelernt. Jedem Punkt  $P$  eines elektrischen Feldes konnte in eindeutiger Weise ein *Potential*  $U(P)$ , also eine *skalare* Größe, zugeordnet werden. Dies führt uns zu der folgenden Begriffsbildung:

**Definition:** Ein *Skalarfeld* ordnet den Punkten eines ebenen oder räumlichen Bereiches in eindeutiger Weise einen *Skalar* zu. Symbolische Schreibweise:

*Ebenes Skalarfeld:*

$$\phi = \phi(P) = \phi(x; y) \quad (\text{I-97})$$

*Räumliches Skalarfeld:*

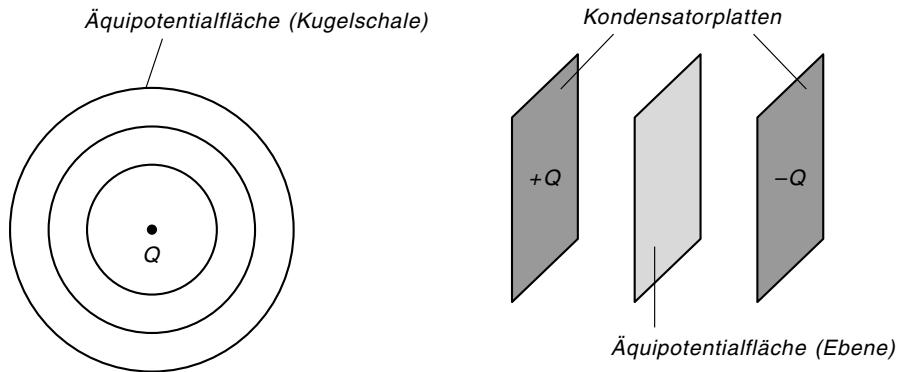
$$\phi = \phi(P) = \phi(x; y; z) \quad (\text{I-98})$$

#### Anmerkungen

- (1) Skalare Felder verändern sich häufig mit der *Zeit*, d. h. die skalare Größe  $\phi$  ist oft noch *zeitabhängig*. Ein Beispiel dafür liefert die *Temperaturverteilung* in einem Raum, die z. B. im Laufe eines Tages gewissen Schwankungen unterliegt. Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel jedoch ausschließlich mit *stationären*, d. h. *zeitunabhängigen* Skalarfeldern.
- (2) Eine Fläche im Raum, auf der das skalare Feld einen *konstanten* Wert annimmt, heißt *Niveaumöglichkeit*. Die Niveaumöglichkeiten eines Skalarfeldes  $\phi(x; y; z)$  werden daher durch die Gleichungen  $\phi(x; y; z) = \text{const.}$  beschrieben. In den technischen Anwendungen wird eine solche Niveaumöglichkeit meist als *Äquipotentialfläche* bezeichnet.  
Bei einem *ebenen* Feld wird durch die Gleichung  $\phi(x; y) = \text{const.}$  eine sog. *Niveaulinie* definiert. Auf ihr besitzt das skalare Feld einen *konstanten* Wert.

#### ■ Beispiele

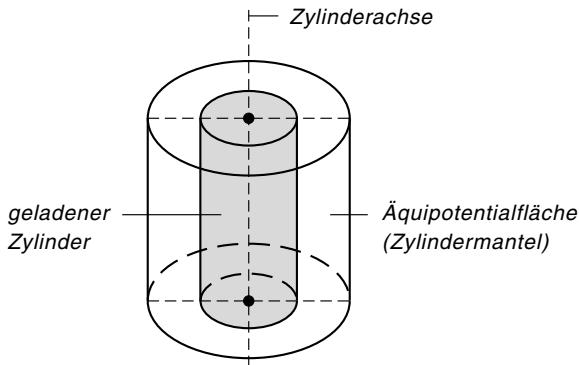
- (1) Wir nennen einige Beispiele für *skalare* Felder:
  - *Dichteverteilung* im Innern der Erdkugel
  - *Temperaturverteilung* in einem Raum
  - *Elektrostatisches Potential* in der Umgebung einer geladenen Kugel
- (2) Beispiele für *Niveaumöglichkeiten* liefern die *Äquipotentialflächen* elektrisch geladener Körper:
  - Äquipotentialflächen einer *Punktladung*: *Konzentrische Kugelschalen* (siehe Bild I-45)
  - Äquipotentialflächen eines geladenen *Plattenkondensators*: Ebenen *parallel* zu den Plattenflächen (siehe Bild I-46)
  - Äquipotentialflächen eines geladenen *Zylinders*: *Koaxiale Zylindermäntel* (siehe Bild I-47)

**Bild I-45**

Äquipotentialflächen einer Punktladung  
(ebener Schnitt durch die Punktladung)

**Bild I-46**

Äquipotentialflächen eines geladenen  
Plattenkondensators

**Bild I-47**

Äquipotentialflächen eines  
geladenen Zylinders

### (3) Das Skalarfeld

$$\phi(x; y; z) = \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{oder} \quad \phi(r) = \frac{a}{r}$$

mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 0$  und  $a \neq 0$  ist *kugel-* oder *radialsymmetrisch*,  
da  $\phi$  nur vom Abstand  $r$  des Punktes vom Nullpunkt abhängt.

*Äquipotentialflächen:*  $x^2 + y^2 + z^2 = c$  mit  $c > 0$

(konzentrische Kugelschalen mit den Radien  $R = \sqrt{c}$ ) ■

### 3.3 Vektorfelder

Das *Kraftfeld* in der Umgebung einer Punktladung führte uns zu dem Begriff des *Vektorfeldes*. Jedem Punkt  $P$  des elektrischen Feldes konnten wir in eindeutiger Weise eine *vektorielle* Größe, nämlich die elektrische Feldstärke  $E(P)$ , zuordnen.

Wir definieren daher:

**Definition:** Ein *Vektorfeld* ordnet den Punkten eines ebenen oder räumlichen Bereiches in eindeutiger Weise einen *Vektor* zu. Symbolische Schreibweise:

*Ebenes Vektorfeld* (siehe Bild I-48):

$$\vec{F}(x; y) = F_x(x; y) \vec{e}_x + F_y(x; y) \vec{e}_y = \begin{pmatrix} F_x(x; y) \\ F_y(x; y) \end{pmatrix} \quad (\text{I-99})$$

*Räumliches Vektorfeld*:

$$\begin{aligned} \vec{F}(x; y; z) &= F_x(x; y; z) \vec{e}_x + F_y(x; y; z) \vec{e}_y + F_z(x; y; z) \vec{e}_z = \\ &= \begin{pmatrix} F_x(x; y; z) \\ F_y(x; y; z) \\ F_z(x; y; z) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I-100})$$

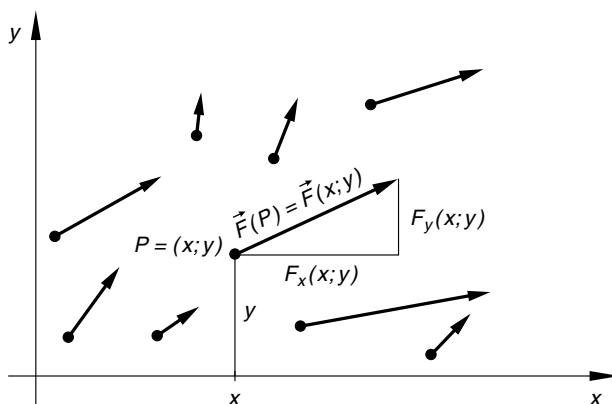


Bild I-48  
Ebenes Vektorfeld

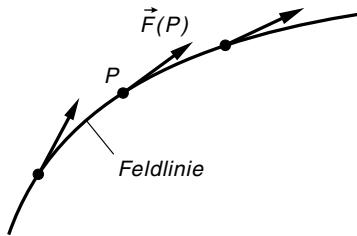
#### Anmerkung

Häufig verändern sich Vektorfelder im Laufe der *Zeit*. Beispiele hierfür sind die *Geschwindigkeitsfelder* strömender Flüssigkeiten und die *zeitabhängigen magnetischen* oder *elektrischen* Felder. Wir beschränken uns wiederum (wie bereits bei den skalaren Feldern) auf die *stationären*, d. h. *zeitunabhängigen* Vektorfelder.

Ein Vektorfeld lässt sich durch *Feldlinien* sehr anschaulich darstellen. Die Feldlinien sind dabei Kurven, die in jedem Punkt  $P$  durch den dortigen Feldvektor  $\vec{F}(P)$  tangiert werden (Bild I-49). Durch jeden Punkt des Vektorfeldes geht dabei genau *eine* Feldlinie, und Feldlinien schneiden sich *nie*. Die Feldlinien lassen sich aus der *Bedingung*

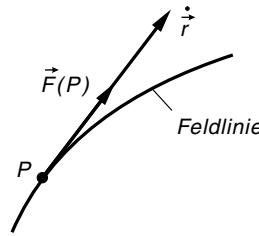
$$\vec{F} \times \dot{\vec{r}} = \vec{0} \quad \text{oder} \quad \vec{F} \times d\vec{r} = \vec{0} \quad (\text{I-101})$$

bestimmen, da der Feldvektor  $\vec{F}$  stets *parallel* zum Tangentenvektor  $\dot{\vec{r}}$  der Feldlinie verläuft (das differentielle Wegelement  $d\vec{r}$  liegt ebenfalls in der *Kurventangente*; siehe Bild I-50).



**Bild I-49**

Bildliche Darstellung eines Vektorfeldes durch Feldlinien



**Bild I-50**

Der Feldvektor  $\vec{F}(P)$  verläuft parallel zum Tangentenvektor  $\dot{\vec{r}}$  der Feldlinie

## ■ Beispiele

### (1) Beispiele für *stationäre* Vektorfelder:

- *Elektrisches Feld* einer Punktladung
- *Gravitationsfeld* einer Masse (z. B. der Erde)
- *Magnetfeld* in der Umgebung eines linearen von einem Gleichstrom durchflossenen Leiters

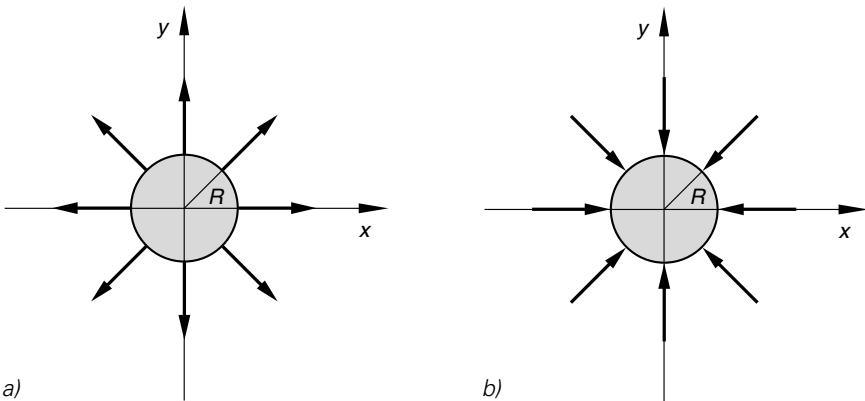
### (2) Die Feldlinien des *ebenen* Vektorfeldes

$$\vec{F}_1(x; y) = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y = \vec{r} \quad (|\vec{r}| \geq R)$$

sind *radial nach außen* gerichtet, die Feldlinien des *ebenen* Vektorfeldes

$$\vec{F}_2(x; y) = -x \vec{e}_x - y \vec{e}_y = -\vec{r} \quad (|\vec{r}| \geq R)$$

dagegen *radial nach innen* (siehe Bild I-51).



**Bild I-51** Ebenes Vektorfeld mit Radialsymmetrie

- a) nach außen gerichtetes Feld
- b) nach innen gerichtetes Feld

- (3) Das *Magnetfeld* in der Umgebung eines stromdurchflossenen linearen Leiters lässt sich durch den *magnetischen Feldstärkevektor*

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r^2} (-y \vec{e}_x + x \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z) = \frac{I}{2\pi r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschreiben. Dabei ist  $r$  der senkrechte Abstand von der *Leiterachse* ( $z$ -Achse) und  $I$  die konstante Stromstärke. Wir betrachten jetzt das Magnetfeld in einer zur Leiterachse *senkrechten* Ebene ( $x$ ,  $y$ -Ebene) und wollen zeigen, dass die *ringförmig* verlaufenden Feldlinien *konzentrische Kreise* darstellen.

Die Feldlinien müssen die Bedingung (I-101), hier also die Bedingung

$$\vec{H} \times d\vec{r} = \vec{0}$$

erfüllen. Aus ihr folgt

$$\frac{I}{2\pi r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{I}{2\pi r^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -y dy - x dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$-y dy - x dx = 0$$

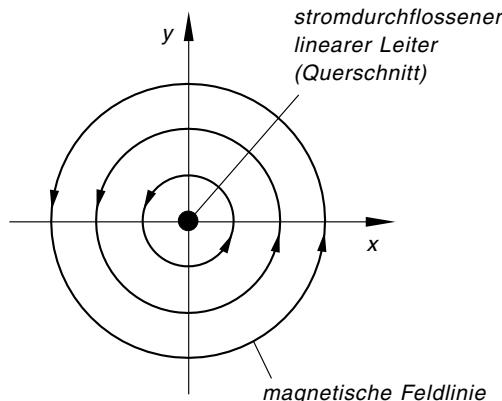
Diese *Differentialgleichung 1. Ordnung* lösen wir durch „*Trennung der Variablen*“ (siehe Band 2, Kap. IV, Abschnitt 2.2) wie folgt:

$$-y \, dy = x \, dx \quad \text{oder} \quad y \, dy = -x \, dx$$

Unbestimmte Integration auf beiden Seiten führt zu:

$$\int y \, dy = - \int x \, dx \Rightarrow \frac{1}{2} y^2 = -\frac{1}{2} x^2 + C \Big| \cdot 2 \Rightarrow y^2 = -x^2 + 2C \Rightarrow x^2 + y^2 = 2C$$

Wir erhalten für  $C > 0$  *konzentrische Kreise* um den Nullpunkt der  $x, y$ -Ebene mit den Radien  $\sqrt{2C}$ . Bild I-52 zeigt den Verlauf der *kreisförmigen magnetischen Feldlinien* in der  $x, y$ -Ebene.



**Bild I-52** Kreisförmige magnetische Feldlinien in der Umgebung eines stromdurchflossenen linearen Leiters (Leiterachse senkrecht zur Bildebene, der Strom fließt nach oben)

## 3.4 Spezielle Vektorfelder aus Physik und Technik

### 3.4.1 Homogenes Vektorfeld

Ein *homogenes* Vektorfeld liegt vor, wenn der Feldvektor  $\vec{F}$  in jedem Punkt des Feldes die *gleiche* Richtung und den *gleichen* Betrag hat:

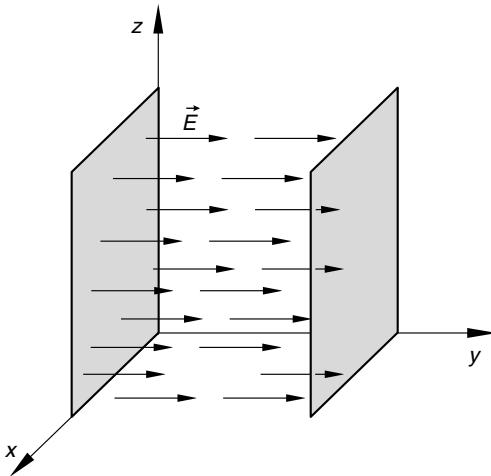
$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{const.}} \quad (\text{I-102})$$

#### ■ Beispiele

- (1) Homogene Vektorfelder spielen in Naturwissenschaft und Technik eine große Rolle:
  - *Homogenes* elektrisches oder magnetisches Feld
  - *Konstantes* Geschwindigkeitsfeld einer *gleichförmig* strömenden Flüssigkeit

- (2) Wir betrachten das *elektrische* Feld in einem geladenen Plattenkondensator. Der *elektrische Feldstärkevektor*  $\vec{E}$  besitzt in jedem Punkt des Kondensatorfeldes die *gleiche* Richtung und den *gleichen* Betrag  $|\vec{E}| = \text{const.} = E_0$ . Für das in Bild I-53 skizzierte *homogene* Feld gilt dann:

$$\vec{E}(P) = 0 \vec{e}_x + E_0 \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



**Bild I-53**

Homogenes elektrisches Feld in einem geladenen Plattenkondensator (eingezzeichnet sind die Feldstärkevektoren)

### 3.4.2 Kugel- oder radialsymmetrisches Vektorfeld (Zentrafeld)

Ein Vektorfeld  $\vec{F}(P)$  mit den folgenden Eigenschaften heißt *kugel-* oder *radialsymmetrisch*:

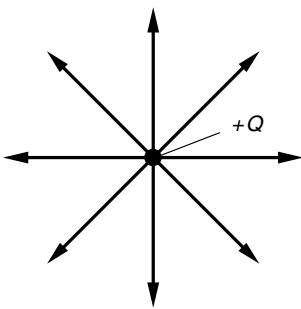
1. Der Feldvektor zeigt in jedem Punkt des Feldes *radial* nach außen oder innen.
2. Der *Betrag* des Feldvektors hängt nur vom *Abstand*  $r$  vom Koordinatenursprung ab.

Bild I-54 zeigt ein typisches *Radialfeld* mit nach *außen* gerichteten Feldlinien (Feldlinienbild einer *positiven* Punktladung in einer Schnittebene durch die felderzeugende Ladung  $Q$ ).

Ein *kugelsymmetrisches* Vektorfeld ist stets in der Form

$$\vec{F}(P) = f(r) \vec{e}_r = f(r) \frac{\vec{r}}{r} = \frac{f(r)}{r} \vec{r} \quad (\text{I-103})$$

darstellbar, wobei  $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$  ein *radial nach außen* gerichteter *Einheitsvektor* ist.

**Bild I-54**

Radialsymmetrisches elektrisches Feld einer *positiven* Punktladung  $Q$  (ebener Schnitt durch die Punktladung)

Der Betrag des Feldvektors entspricht dabei dem Betrag der *radialsymmetrischen* Funktion  $f(r)$ :

$$|\vec{F}(P)| = F(r) = |f(r)| \quad (\text{I-104})$$

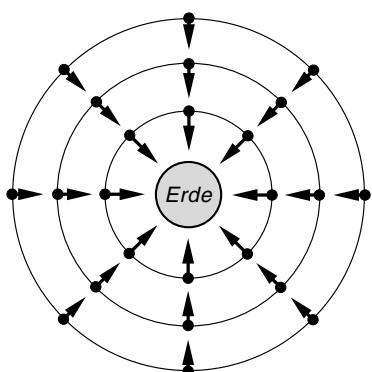
*Radial-* oder *kugelsymmetrische* Vektorfelder spielen in Naturwissenschaft und Technik eine überragende Rolle. Sie werden auch als *Zentralfelder* bezeichnet. *Beispiele:* *Elektrisches Feld* einer Punktladung, *Gravitationsfeld* einer Masse.

## ■ Beispiel

Ein sehr anschauliches Beispiel für ein *radial-* oder *kugelsymmetrisches* Vektorfeld liefert das *Gravitationsfeld* der Erde. Nach dem *Gravitationsgesetz* von Newton wird eine Masse  $m$  im Abstand  $r$  vom Erdmittelpunkt von der Erdmasse  $M$  mit der Kraft

$$\vec{F}(P) = -\gamma \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\gamma \frac{mM}{r^3} \vec{r} \quad (r > 0)$$

angezogen ( $\gamma$ : Gravitationskonstante). Die Gravitationskraft  $\vec{F}(P)$  ist dabei stets *radial* auf den Erdmittelpunkt *zu* gerichtet und betragsmäßig nur vom Abstand  $r$  der Masse abhängig. Das Gravitationsfeld der Erde ist somit *radialsymmetrisch*. Bild I-55 zeigt einen *ebenen* Schnitt durch dieses Feld.

**Bild I-55**

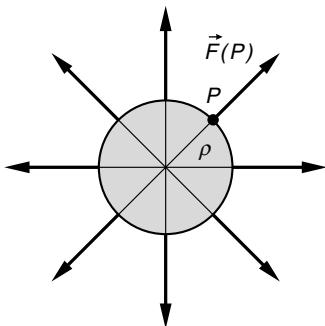
Radialsymmetrisches Gravitationsfeld der Erde  
(ebener Schnitt durch den Erdmittelpunkt)

### 3.4.3 Zylinder- oder axialsymmetrisches Vektorfeld

Ein Vektorfeld  $\vec{F}(P)$  mit den folgenden Eigenschaften heißt *zylinder- oder axialsymmetrisch*:

1. Der Feldvektor zeigt in jedem Punkt des Feldes *axial* nach außen oder innen.
2. Der *Betrag* des Feldvektors hängt nur vom senkrechten *Abstand*  $\varrho$  von der Symmetrieachse ( $z$ -Achse) ab<sup>3)</sup>.

Der typische Verlauf eines *zylindersymmetrischen* Vektorfeldes ist in Bild I-56 in einem *ebenen Schnitt senkrecht* zur Symmetrieachse (Zylinderachse,  $z$ -Achse) dargestellt.



**Bild I-56**

Zylindersymmetrisches Vektorfeld (ebener Schnitt senkrecht zur Zylinderachse)

Ein *zylinder- oder axialsymmetrisches* Vektorfeld lässt sich stets in der Form

$$\vec{F}(P) = f(\varrho) \vec{e}_\varrho \quad (\text{I-105})$$

darstellen. Dabei ist  $\vec{e}_\varrho$  ein *axial nach außen gerichteter Einheitsvektor* und

$$|\vec{F}(P)| = F(\varrho) = |f(\varrho)| \quad (\text{I-106})$$

der *Betrag* des Feldvektors  $\vec{F}(P)$ .

#### ■ Beispiel

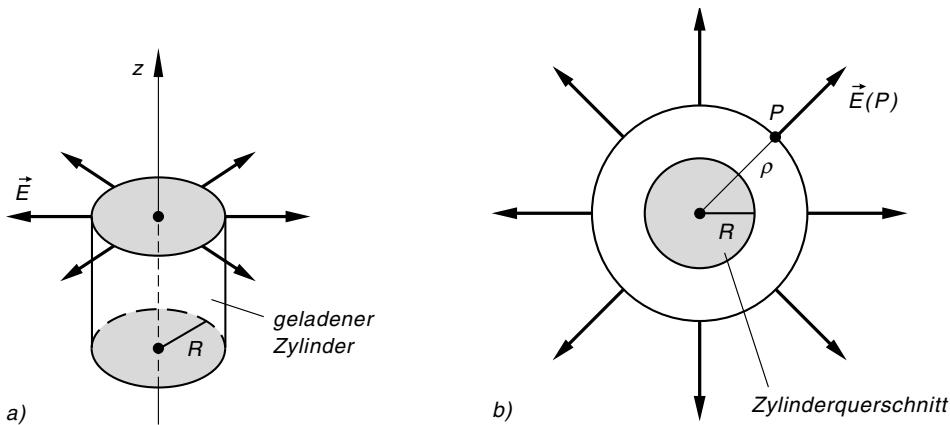
Das *elektrische Feld* in der Umgebung eines *homogen geladenen Zylinders* besitzt *Zylindersymmetrie* (Bild I-57). Für den Vektor der *elektrischen Feldstärke* gilt dabei:

$$\vec{E}(P) = \frac{\varrho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0 Q} \vec{e}_\varrho \quad (\varrho \geq R)$$

( $R$ : Zylinderradius;  $\varrho_{\text{el}}$ : Ladungsdichte des Zylinders;  $\varepsilon_0$ : elektrische Feldkonstante).

Die Größe, d. h. der *Betrag* der Feldstärke hängt nur vom *Abstand*  $\varrho$  von der Zylinderachse ab, der Feldvektor selbst ist *senkrecht* vom Zylindermantel nach *außen* gerichtet (bei positiver Ladungsdichte, siehe Bild I-57).

<sup>3)</sup> Bei *Zylindersymmetrie* wird der senkrechte Abstand von der Achse mit  $\varrho$  und nicht mit  $r$  bezeichnet. Eine einleuchtende Begründung erfolgt in Abschnitt 6.2.



**Bild I-57** Elektrisches Feld in der Umgebung eines homogen geladenen Zylinders (bei positiver Ladungsdichte)

- a) Zylindersymmetrisches Feld
- b) Ebener Schnitt durch das Feld (senkrecht zur Zylinderachse)

■

### 3.4.4 Zusammenstellung der behandelten Vektorfelder

Wegen der großen Bedeutung in den Anwendungen fassen wir die Eigenschaften der besprochenen Vektorfelder wie folgt zusammen:

#### Spezielle Vektorfelder aus Physik und Technik

##### 1. Homogenes Vektorfeld

$$\vec{F}(P) = \vec{F}(x; y; z) = \overrightarrow{\text{const.}} \quad (\text{I-107})$$

Der Feldvektor  $\vec{F}(P)$  hat überall die *gleiche* Richtung und den *gleichen* Betrag.

*Musterbeispiele:* Elektrisches Feld in einem geladenen Plattenkondensator (siehe Bild I-53), konstantes Geschwindigkeitsfeld einer gleichförmig strömenden Flüssigkeit.

*Symmetriegerechte Koordinaten:* Kartesische Koordinaten

##### 2. Kugel- oder radialsymmetrisches Vektorfeld (Zentraffeld)

$$\vec{F}(P) = f(r) \vec{e}_r \quad (\text{I-108})$$

Der Feldvektor  $\vec{F}(P)$  ist *radial* nach außen oder innen gerichtet. Sein *Betrag* ist nur vom *Abstand*  $r$  des Punktes  $P$  vom Koordinatenursprung abhängig:  $|\vec{F}(P)| = F(r) = |f(r)|$ .

*Musterbeispiele:* Gravitationsfeld der Erde (siehe Bild I-55), elektrisches Feld in der Umgebung einer Punktladung (siehe Bild I-54).

*Symmetriegerechte Koordinaten:* Kugelkoordinaten → Abschnitt 6.3

### 3. Zylinder- oder axialsymmetrisches Vektorfeld

$$\vec{F}(P) = f(\varrho) \vec{e}_\varrho \quad (\text{I-109})$$

Der Feldvektor  $\vec{F}(P)$  ist *axial* nach außen oder innen gerichtet. Sein *Betrag* ist nur vom senkrechten *Abstand*  $\varrho$  des Punktes  $P$  von der Zylinderachse ( $z$ -Achse) abhängig:  $|\vec{F}(P)| = F(\varrho) = |f(\varrho)|$ .

*Musterbeispiel:* Elektrisches Feld in der Umgebung eines homogen geladenen Zylinders (siehe Bild I-57).

*Symmetriegerechte Koordinaten:* Zylinderkoordinaten → Abschnitt 6.2

## 4 Gradient eines Skalarfeldes

### 4.1 Definition und Eigenschaften des Gradienten

Die partiellen Ableitungen *1. Ordnung* einer differenzierbaren skalaren Funktion  $\phi(x; y; z)$  ermöglichen Aussagen über die Änderungen des Funktionswertes  $\phi$ , wenn man von einem Punkt  $P$  aus in Richtung der betreffenden Koordinatenachsen *fortschreitet*. Wir fassen diese Ableitungen wie folgt zu einem *Vektor* zusammen, der als *Gradient* des skalaren Feldes  $\phi(x; y; z)$  bezeichnet wird:

**Definition:** Unter dem *Gradient* eines differenzierbaren Skalarfeldes  $\phi(x; y; z)$  verstehen wir den aus den partiellen Ableitungen 1. Ordnung von  $\phi$  gebildeten *Vektor*

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{I-110})$$

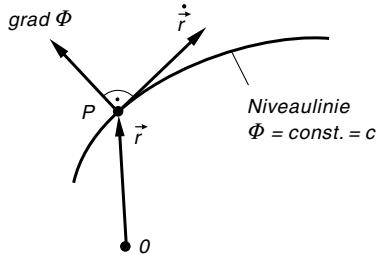
#### Anmerkung

Bei einem *ebenen Skalarfeld*  $\phi(x; y)$  reduziert sich der Gradient des Feldes auf *zwei* Komponenten:

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{I-111})$$

Der Gradient eines *ebenen Skalarfeldes* ist somit ein *ebener Vektor*.

Wir wollen uns jetzt mit den *Eigenschaften* des Gradienten näher befassen, beschränken uns dabei zunächst auf ein *ebenes* Skalarfeld  $\phi = \phi(x; y)$ . Der *Gradient* eines solchen Skalarfeldes steht in jedem Punkt  $P$  *senkrecht* auf der durch  $P$  verlaufenden *Niveaulinie* von  $\phi$  (siehe Bild I-58).

**Bild I-58**

Der Gradient eines ebenen skalaren Feldes im Punkt  $P$  steht *senkrecht* auf der Niveaulinie durch diesen Punkt, d. h. senkrecht auf dem Tangentenvektor des Punktes  $P$

Um diese wichtige Eigenschaft zu beweisen, gehen wir von dem *totalen Differential* der skalaren Funktion  $\phi(x; y)$  aus:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \quad (\text{I-112})$$

Es lässt sich als *Skalarprodukt* der Vektoren  $\text{grad } \phi$  und  $d\vec{r}$  darstellen:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \text{grad } \phi \cdot d\vec{r} \quad (\text{I-113})$$

Auf einer *Niveaulinie* ist aber wegen  $\phi = \text{const.} = c$  stets  $d\phi = 0$  und somit auch

$$\text{grad } \phi \cdot d\vec{r} = 0 \quad (\text{I-114})$$

Das *skalare Produkt* aus dem Gradienten von  $\phi$  und dem in der Tangentenrichtung liegenden Vektor  $d\vec{r}$  *verschwindet* also. Dies aber ist nur möglich, wenn die beiden Vektoren *senkrecht* aufeinander stehen. Der *Gradient* eines Skalarfeldes verläuft daher stets *senkrecht* zu den *Niveaulinien* des Feldes und somit in Richtung des Hauptnormaleneinheitsvektors.

Eine weitere wichtige Eigenschaft lautet: Der *Gradient* zeigt immer in die Richtung des *größten* Zuwachses von  $\phi(x; y)$ . Der *Betrag* des Gradienten ist somit ein *Maß* für die Änderung des Skalarfeldes *senkrecht* zu den *Niveaulinien*.

Entsprechende Aussagen gelten auch für ein *räumliches* Skalarfeld  $\phi = \phi(x; y; z)$ . Der Gradient von  $\phi$  steht jetzt *senkrecht* auf den *Niveauflächen* des Feldes und zeigt wiederum in die Richtung des *größten* Zuwachses von  $\phi$ , d. h. in Richtung der Flächennormale des Punktes  $P$ . Mit Hilfe des sog. *Nabla-Operators*

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{I-115})$$

lässt sich der Gradient von  $\phi$  formal auch in der Form

$$\text{grad } \phi = \vec{\nabla} \phi \quad (\text{I-116})$$

darstellen (Multiplikation des „Vektors“  $\vec{\nabla}$  mit dem Skalar  $\phi$ ). Der *Nabla-Operator* ist ein *vektorieller* Differentialoperator, dessen Komponenten die *partiellen* Ableitungsoperatoren  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  und  $\frac{\partial}{\partial z}$  sind.

Wir fassen die wichtigsten Eigenschaften des Gradienten wie folgt zusammen:

### Eigenschaften des Gradienten eines Skalarfeldes

Der Gradient eines Skalarfeldes  $\phi = \phi(x; y; z)$  ist das *formale* Produkt aus dem *Nabla-Operator*  $\vec{\nabla}$  und dem Skalar  $\phi$ :

$$\text{grad } \phi = \vec{\nabla} \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{I-117})$$

Er steht *senkrecht* auf den *Niveaumäßigkeiten* von  $\phi$  und zeigt in die Richtung des *größten* Zuwachses von  $\phi$ .

#### Anmerkung

Bei einem *ebenen Skalarfeld*  $\phi(x; y)$  steht der *Gradient* von  $\phi$  *senkrecht* auf den *Niveaulinien* des skalaren Feldes (siehe Bild I-58).

## ■ Beispiele

- (1) Wir bestimmen die *Niveaulinien* und den *Gradient* des ebenen Skalarfeldes  $\phi(x; y) = x^2 + y^2$ .

*Niveaulinien*  $\phi = \text{const.} = c: x^2 + y^2 = \text{const.} = c$

Wir erhalten für  $c > 0$  *konzentrische Kreise* um den Koordinatenursprung mit den Radien  $r = \sqrt{c}$  (siehe Bild I-59):

$$\text{Gradient von } \phi: \text{grad } \phi = 2x \vec{e}_x + 2y \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \vec{r}$$

Der Gradient ist *radial* nach *außen* gerichtet (Richtung des Ortsvektors  $\vec{r}$ , aber doppelte Länge) und steht auf den Niveaulinien (konzentrischen Kreisen) *senkrecht* (Bild I-60).

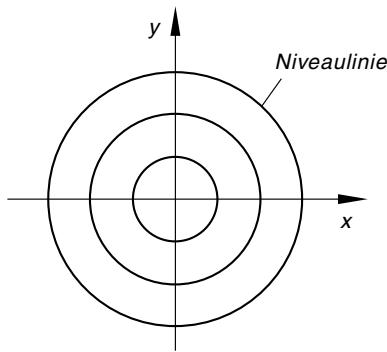


Bild I-59

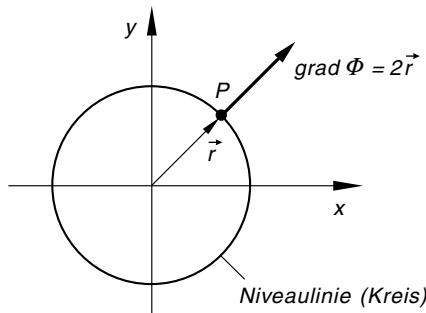


Bild I-60

- (2) Wir berechnen den *Gradient* des räumlichen Skalarfeldes  $\phi(x; y; z) = x^2 z^2 + x y^2$  im Punkt  $P = (1; 1; 2)$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 z^2 + x y^2) = 2x \cdot z^2 + 1 \cdot y^2 = 2xz^2 + y^2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 z^2 + x y^2) = 0 + x \cdot 2y = 2xy$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (x^2 z^2 + x y^2) = x^2 \cdot 2z + 0 = 2x^2 z$$

$$\text{grad } \phi = \begin{pmatrix} 2xz^2 + y^2 \\ 2xy \\ 2x^2 z \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{grad } \phi)_0 = \begin{pmatrix} 8+1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

*Hinweis:* Der Index 0 kennzeichnet den Punkt  $P$  (gilt im gesamten Kapitel). ■

Zum Abschluss noch einige wichtige *Rechenregeln* für Gradienten:

### Rechenregeln für Gradienten

$\phi$  und  $\psi$  sind *skalare* Felder,  $c$  eine reelle Konstante:

$$(1) \text{ grad } c = 0 \quad (\text{I-118})$$

$$(2) \text{ grad } (c \phi) = c (\text{grad } \phi) \quad (\text{I-119})$$

$$(3) \text{ grad } (\phi + \psi) = \text{grad } \phi + \text{grad } \psi \quad (\text{Summenregel}) \quad (\text{I-120})$$

$$(4) \text{ grad } (\phi + c) = \text{grad } \phi \quad (\text{I-121})$$

$$(5) \text{ grad } (\phi \cdot \psi) = \phi (\text{grad } \psi) + \psi (\text{grad } \phi) \quad (\text{Produktregel}) \quad (\text{I-122})$$

## 4.2 Richtungsableitung

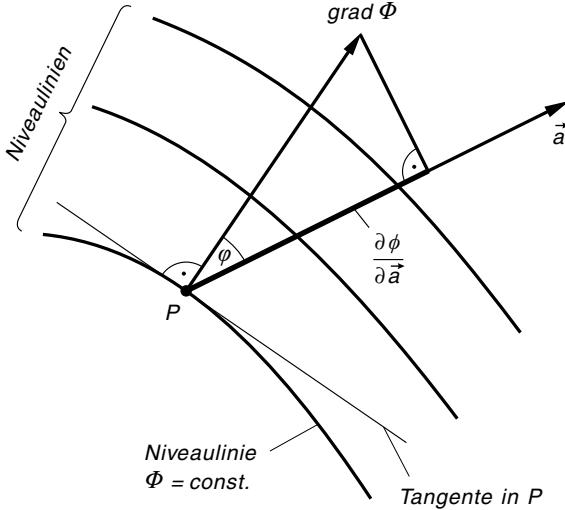
Häufig interessiert man sich für die Änderung des Funktionswertes einer skalaren Funktion  $\phi$ , wenn man von einem Punkt  $P$  aus in einer *bestimmten* Richtung forschreitet. Wir wollen uns bei den nachfolgenden Überlegungen zunächst auf ein *ebenes* Skalarfeld  $\phi = \phi(x; y)$  beschränken.

Die Fortschreitungsrichtung wird meist durch einen sog. *Richtungsvektor*  $\vec{a}$  festgelegt.

Durch *Normierung* erhalten wir daraus den *Einheitsvektor*  $\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$ , der die gleiche Richtung besitzt wie der Richtungsvektor  $\vec{a}$ . Die Komponente des Gradienten von  $\phi$  in Richtung dieses Einheitsvektors wird dann als *Richtungsableitung* des Skalarfeldes  $\phi$  in Richtung des Vektors  $\vec{a}$  bezeichnet und durch das Symbol  $\frac{\partial \phi}{\partial \vec{a}}$  gekennzeichnet. Definitionsgemäß gilt daher:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{a}} = (\text{grad } \phi) \cdot \vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} (\text{grad } \phi) \cdot \vec{a} \quad (\text{I-123})$$

Die Richtungsableitung ist also die *Projektion* des Gradienten von  $\phi$  auf den *normierten Richtungsvektor*  $\vec{e}_a$  und somit eine *skalare* Größe (Bild I-61). Sie gibt die Änderung des Funktionswertes von  $\phi$  an, wenn man von einem Punkt  $P$  aus in Richtung des Vektors  $\vec{a}$  um eine Längeneinheit forschreitet.



**Bild I-61** Zum Begriff der Richtungsableitung eines skalaren Feldes

Die *Richtungsableitung* ist dabei (bei *fest* vorgegebenem Raumpunkt  $P$ ) noch von Richtung zu Richtung *verschieden* und erreicht offensichtlich ihren *Maximalwert*, wenn der Richtungsvektor  $\vec{a}$  und damit auch der zugeordnete *normierte* Richtungsvektor  $\vec{e}_a$  in die Richtung des *Gradienten* von  $\phi$  zeigen.

Denn definitionsgemäß gilt ja

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{a}} = (\text{grad } \phi) \cdot \vec{e}_a = |\text{grad } \phi| \cdot \underbrace{|\vec{e}_a|}_{1} \cdot \cos \varphi = |\text{grad } \phi| \cdot \cos \varphi \quad (\text{I-124})$$

wobei  $\varphi$  der Winkel zwischen den Vektoren  $\text{grad } \phi$  und  $\vec{e}_a$  bzw. zwischen  $\text{grad } \phi$  und  $\vec{a}$  ist. Dieses Produkt ist genau dann am *größten*, wenn  $\cos \varphi = 1$  und somit  $\varphi = 0^\circ$  ist (siehe hierzu Bild I-61). Dann aber zeigen Gradient und Richtungsvektor in die *gleiche* Richtung.

Der Begriff der *Richtungsableitung* lässt sich ohne Schwierigkeiten auch auf *räumliche* Skalarfelder übertragen.

### Richtungsableitung eines Skalarfeldes

Die *Richtungsableitung*  $\frac{\partial \phi}{\partial \vec{a}}$  eines (ebenen oder räumlichen) Skalarfeldes  $\phi$  in

Richtung eines vorgegebenen *Richtungsvektors*  $\vec{a}$  ist ein Maß für die Änderung des Funktionswertes von  $\phi$ , wenn man von einem Punkt  $P$  aus in Richtung von  $\vec{a}$  um *eine Längeneinheit* forschreitet:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{a}} = (\text{grad } \phi) \cdot \vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} (\text{grad } \phi) \cdot \vec{a} \quad (\text{I-125})$$

Man erhält sie durch *Projektion* des Gradienten von  $\phi$  auf den *normierten Richtungsvektor*  $\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$  (siehe Bild I-61). Die Richtungsableitung erreicht ihren *größten* Wert in Richtung des *Gradienten*.

#### Anmerkung

Die Richtungsableitung ist das skalare Produkt aus dem Gradienten des Skalarfeldes  $\phi$  und dem normierten Richtungsvektor. Sie *verschwindet* daher, wenn man sich längs einer *Niveaulinie* (bei einem *ebenen* Feld) bzw. auf einer *Niveauplätze* (bei einem *räumlichen* Feld) bewegt.

#### ■ Beispiel

Wir berechnen die *Richtungsableitung* des skalaren Feldes  $\phi(x; y; z) = x^2 y^2 z^2 + 2xz^3$

im Punkt  $P = (-1; 1; 1)$  in Richtung des Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Zunächst *normieren* wir den Richtungsvektor  $\vec{a}$ :

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Als nächstes berechnen wir den *Gradient* von  $\phi$  im Punkt  $P = (-1; 1; 1)$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 y^2 z^2 + 2xz^3) = 2xy^2 z^2 + 2z^3$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y^2 z^2 + 2xz^3) = x^2 \cdot 2y \cdot z^2 + 0 = 2x^2 yz^2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (x^2 y^2 z^2 + 2xz^3) = x^2 y^2 \cdot 2z + 2x \cdot 3z^2 = 2x^2 y^2 z + 6xz^2$$

$$\text{grad } \phi = \begin{pmatrix} 2xy^2 z^2 + 2z^3 \\ 2x^2 yz^2 \\ 2x^2 y^2 z + 6xz^2 \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{grad } \phi)_0 = \begin{pmatrix} -2 + 2 \\ 2 \\ 2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Damit besitzt die *Richtungsableitung*  $\frac{\partial \phi}{\partial \vec{a}}$  im Punkt  $P$  den folgenden Wert:

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial \vec{a}} \right)_0 = (\text{grad } \phi)_0 \cdot \vec{e}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} (0 - 2 - 8) = -\frac{10}{3}$$

■

### 4.3 Flächen vom Typ $F(x; y; z) = 0$

In den Abschnitten 2.3 und 2.4 haben wir uns bereits mit den Eigenschaften von Flächen beschäftigt, die entweder in der *vektoriellen* Form  $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$  oder aber in Form einer Funktionsgleichung vom *expliziten* Typ  $z = f(x; y)$  vorliegen. Jetzt beschäftigen wir uns mit Flächen vom *impliziten* Funktionstyp  $F(x; y; z) = 0$ .

Eine solche Fläche  $F(x; y; z) = 0$  lässt sich auffassen als eine *spezielle Niveaufläche* des skalaren Feldes  $\phi = \phi(x; y; z) = F(x; y; z)$ , dessen Niveauflächen bekanntlich durch die Gleichung

$$\phi(x; y; z) = F(x; y; z) = \text{const.} = c \quad (\text{I-126})$$

definiert sind. Für den *speziellen* Wert  $c = 0$  erhalten wir gerade die vorgegebene Fläche  $F(x; y; z) = 0$ . Da der *Gradient* des skalaren Feldes  $\phi = F(x; y; z)$  stets *senkrecht* auf den *Niveauflächen* steht, verläuft er auch *senkrecht* zu unserer Fläche und ist somit ein *Normalenvektor* dieser Fläche. Die in einem Flächenpunkt  $P = (x_0; y_0; z_0)$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}_0$  errichtete *Tangentialebene* lässt sich dann nach Gleichung (I-75) in der Form

$$(\text{grad } F)_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad (\text{I-127})$$

darstellen, wobei  $\vec{r}$  der Ortsvektor eines *beliebigen* Punktes  $Q = (x; y; z)$  der Tangentialebene ist.

### Tangentialebene einer Fläche vom Typ $F(x; y; z) = 0$

Eine durch die *implizite* Funktionsgleichung  $F(x; y; z) = 0$  dargestellte Fläche kann als eine *spezielle* Niveaumenge des skalaren Feldes  $\phi = F(x; y; z)$  aufgefasst werden. Daher steht der *Gradient* von  $F(x; y; z)$  in jedem Flächenpunkt *senkrecht* auf der Fläche  $F(x; y; z) = 0$  und ist somit ein *Normalenvektor* dieser Fläche. Die im Flächenpunkt  $P = (x_0; y_0; z_0)$  errichtete *Tangentialebene* an die Fläche besitzt dann die folgende Gleichung:

$$(\text{grad } F)_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad (\text{I-128})$$

Dabei bedeuten:

$(\text{grad } F)_0$ : *Gradient* von  $F(x; y; z)$  im Flächenpunkt  $P = (x_0; y_0; z_0)$

$\vec{r}_0$ : Ortsvektor des Flächenpunktes  $P = (x_0; y_0; z_0)$

$\vec{r}$ : Ortsvektor eines *beliebigen* Punktes  $Q = (x; y; z)$  auf der Tangentialebene

#### Anmerkung

Eine Fläche vom *expliziten* Typ  $z = f(x; y)$  kann als eine *spezielle* Niveaumenge des skalaren Feldes

$$\phi = \phi(x; y; z) = z - f(x; y) \quad (\text{I-129})$$

aufgefasst werden. Dann ist  $\text{grad } \phi = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}$  ein auf der Fläche *senkrecht* stehender Vektor (*Normalenvektor*) und

$$(\text{grad } \phi)_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad (\text{I-130})$$

die zum Flächenpunkt  $P = (x_0; y_0; z_0)$  gehörige *Tangentialebene*. Zu diesem Ergebnis sind wir bereits in Abschnitt 2.4 gelangt (siehe Gleichung (I-91) und (I-92)).

### ■ Beispiel

Die *Kugeloberfläche*  $x^2 + y^2 + z^2 = 49$  ist eine *spezielle* Niveaumenge des Skalarfeldes  $\phi(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2$ . Wir bestimmen die Gleichung der *Tangentialebene* im Flächenpunkt  $P = (2; 3; 6)$ .

Zunächst berechnen wir den *Gradient* von  $\phi$  im Punkt  $P$ :

$$\text{grad } \phi = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{grad } \phi)_0 = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir nach Gleichung (I-128) die folgende *Tangentialebene*:

$$(\text{grad } \phi)_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 3 \\ z - 6 \end{pmatrix} = 0$$

$$2[2(x - 2) + 3(y - 3) + 6(z - 6)] = 0 \mid : 2$$

$$2(x - 2) + 3(y - 3) + 6(z - 6) = 0$$

$$2x - 4 + 3y - 9 + 6z - 36 = 0$$

$$2x + 3y + 6z = 49$$

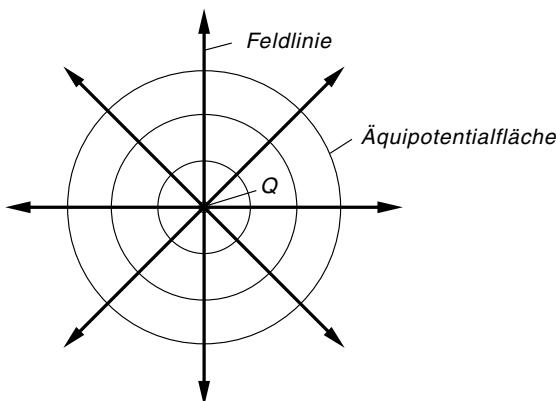
■

#### 4.4 Ein Anwendungsbeispiel: Elektrisches Feld einer Punktladung

Wir betrachten das *elektrische Feld* in der Umgebung einer *positiven Punktladung*  $Q$  (Bild I-62). Die elektrischen *Feldlinien* verlaufen dabei *radial nach außen*. In jedem Punkt  $P$  des Feldes herrscht ein bestimmtes *elektrostatisches Potential*  $U(P)$  und eine bestimmte *elektrische Feldstärke*  $\vec{E}(P)$ . Das Potential hängt dabei wegen der *Radial- oder Kugelsymmetrie* nur vom *Abstand*  $r$  des Punktes  $P$  vom Koordinatenursprung ab<sup>4)</sup>. Es gilt:

$$U(P) = U(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r > 0) \quad (\text{I-131})$$

( $\epsilon_0$ : elektrische Feldkonstante). Die *Niveaumassen*, hier *Äquipotentialflächen* genannt, sind *konzentrische Kugelschalen* (siehe Bild I-62).



**Bild I-62**

Niveaumassen (Äquipotentialflächen) des elektrischen Feldes einer *positiven Punktladung*  $Q$  (ebener Schnitt durch die Punktladung)

<sup>4)</sup> Die felderzeugende Punktladung  $Q$  befindet sich im Koordinatenursprung des kartesischen Koordinatensystems.

Zwischen dem Feldstärkevektor  $\vec{E}(P) = \vec{E}(r)$  und dem Potential  $U(P) = U(r)$  besteht dabei die folgende Beziehung:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} U \quad (\text{I-132})$$

d. h. die Feldstärke ist – vom Vorzeichen abgesehen – der *Gradient* des Potentials. Mit ihrer Berechnung wollen wir uns jetzt beschäftigen. Dazu benötigen wir die *partiellen Ableitungen 1. Ordnung* der Potentialfunktion  $U$ , die sich unter Berücksichtigung von

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (\text{I-133})$$

auch in der Form

$$U(P) = U(x; y; z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \quad (\text{I-134})$$

durch *kartesische* Koordinaten darstellen lässt. Wir differenzieren diese Funktion mit Hilfe der *Kettenregel* zunächst *partiell* nach der Variablen  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2x \right] = \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot x (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \underbrace{\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}}_{r^2} = \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(r^2)^{3/2}} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{r^3} \end{aligned} \quad (\text{I-135})$$

Entsprechende Ausdrücke erhalten wir für die partiellen Ableitungen 1. Ordnung nach  $y$  bzw.  $z$  (innere Ableitung:  $2y$  bzw.  $2z$  statt  $2x$ ):

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z}{r^3} \quad (\text{I-136})$$

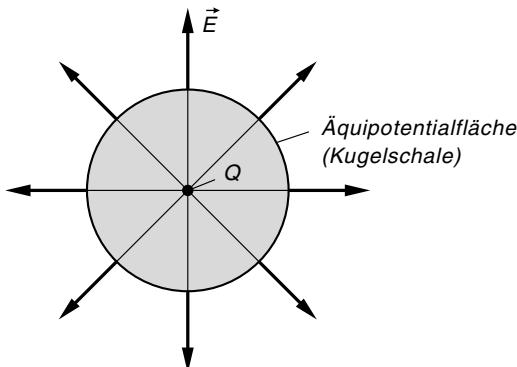
Für den *Feldstärkevektor*  $\vec{E}$  folgt damit nach Gleichung (I-132):

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\operatorname{grad} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z\right) = \\ &= -\left(-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{r^3} \vec{e}_x - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{y}{r^3} \vec{e}_y - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z}{r^3} \vec{e}_z\right) = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{r^3} \vec{e}_x + \frac{y}{r^3} \vec{e}_y + \frac{z}{r^3} \vec{e}_z\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{r^3} = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \end{aligned} \quad (\text{I-137})$$

Dabei ist  $\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$  der Ortsvektor des Punktes  $P = (x; y; z)$  und  $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$  ein Einheitsvektor in *radialer* Richtung, der somit von *gleicher* Richtung ist wie der Ortsvektor  $\vec{r}$ . Der Feldstärkevektor  $\vec{E}$  zeigt daher in jedem Punkt des Feldes *radial nach außen*, sein Betrag

$$|\vec{E}| = E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \underbrace{|\vec{e}_r|}_{1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > 0) \quad (\text{I-138})$$

ist wegen der *Kugelsymmetrie* des Feldes nur vom *Abstand*  $r$  abhängig, d. h. auf einer *Kugelschale* um den Nullpunkt hat die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  einen *konstanten* Betrag. Die *Äquipotentialflächen* des elektrischen Feldes einer Punktladung  $Q$  sind demnach die Oberflächen *konzentrischer* Kugeln, die ihren gemeinsamen Mittelpunkt am Ort der felderzeugenden Ladung  $Q$  haben (Bild I-63).



**Bild I-63**

Die Äquipotentialflächen des elektrischen Feldes einer positiven Punktladung  $Q$  sind *konzentrische* Kugelschalen (ebener Schnitt durch die Punktladung)

## 5 Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes

### 5.1 Divergenz eines Vektorfeldes

#### 5.1.1 Ein einführendes Beispiel

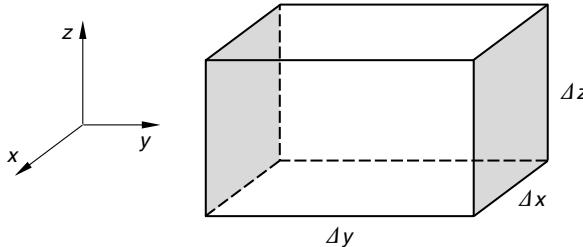
Wir wollen den etwas abstrakten Begriff der *Divergenz* eines Vektorfeldes am Modell einer strömenden Flüssigkeit einführen. Die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens wird im Allgemeinen von Ort zu Ort *verschieden* sein. Die Strömung lässt sich dann durch das *Geschwindigkeitsfeld*

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z \quad (\text{I-139})$$

beschreiben, wobei die Geschwindigkeitskomponenten noch *ortsabhängig*, d. h. *Funktionen* von  $x$ ,  $y$  und  $z$  sind:

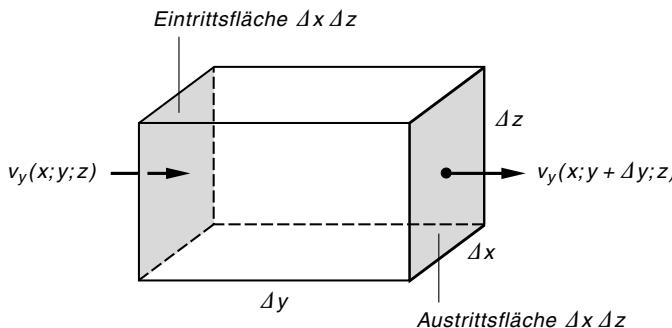
$$v_x = v_x(x; y; z), \quad v_y = v_y(x; y; z), \quad v_z = v_z(x; y; z) \quad (\text{I-140})$$

In diese Strömung bringen wir einen kleinen *Quader* mit den achsenparallelen Kanten der Längen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  und  $\Delta z$  (siehe Bild I-64). Dabei setzen wir voraus, dass die Quaderoberflächen für die Flüssigkeit *völlig durchlässig* sind. Durch das Einbringen des quaderförmigen Körpers wird also die Flüssigkeitsströmung in *keiner* Weise behindert.



**Bild I-64** Völlig durchlässiger quaderförmiger Körper in einer Flüssigkeitsströmung

Zunächst interessieren wir uns für den Flüssigkeitsstrom durch die beiden zur  $x$ ,  $z$ -Ebene parallelen Quaderflächen, die wir in Bild I-65 grau unterlegt haben. Beiträge kommen dabei *ausschließlich* durch die  $y$ -Komponente des Geschwindigkeitsfeldes  $\vec{v}$  zustande.



**Bild I-65** Flüssigkeitsstrom durch die Quaderoberflächen in Richtung der positiven  $y$ -Achse

Bei einem Quader mit *sehr kleinen* Kantenlängen (wie hier vorausgesetzt) können wir dann davon ausgehen, dass die Geschwindigkeitskomponente  $v_y$  auf beiden Flächen einen jeweils *nahezu konstanten* Wert annimmt. Die Geschwindigkeitskomponente  $v_y$  besitzt daher auf den *grau* unterlegten Quaderflächen die folgenden Werte (der Abstand der Flächen beträgt  $\Delta y$ ):

*Eintrittsfläche:*  $v_y(x; y; z)$

*Austrittsfläche:*  $v_y(x; y + \Delta y; z)$

Wir bestimmen nun die Flüssigkeitsmengen (Flüssigkeitsvolumina), die in dem *sehr kleinen* Zeitintervall  $\Delta t$  durch die beiden *grau* unterlegten Quaderflächen in den Quader *ein-* bzw. *austreten*. Die *Eintrittsmenge* beträgt dabei

$$[v_y(x; y; z) \Delta t] \Delta x \Delta z = v_y(x; y; z) \Delta x \Delta z \Delta t \quad (\text{I-141})$$

Denn alle diejenigen Flüssigkeitsteilchen, die sich zu einem Zeitpunkt  $t$  *links* von der Eintrittsfläche befinden und von dieser einen Abstand haben, der *nicht größer* ist als  $v_y(x; y; z) \Delta t$ , legen in der nachfolgenden Zeit  $\Delta t$  den Weg  $\Delta s = v_y(x; y; z) \Delta t$  zurück und fließen somit in diesem Zeitintervall durch die Eintrittsfläche  $\Delta x \Delta z$  in den Quader *herein*.

Analog erhält man für die in der *gleichen* Zeit durch die *rechte* Quaderfläche *ausgetretene* Flüssigkeitsmenge den Wert

$$[v_y(x; y + \Delta y; z) \Delta t] \Delta x \Delta z = v_y(x; y + \Delta y; z) \Delta x \Delta z \Delta t \quad (\text{I-142})$$

Die *Differenz* zwischen *abgeflossener* und *zugeflossener* Menge ist somit

$$\begin{aligned} & v_y(x; y + \Delta y; z) \Delta x \Delta z \Delta t - v_y(x; y; z) \Delta x \Delta z \Delta t = \\ & = [v_y(x; y + \Delta y; z) - v_y(x; y; z)] \Delta x \Delta z \Delta t \end{aligned} \quad (\text{I-143})$$

Auf die *Zeiteinheit* bezogen ( $\Delta t = 1$  gesetzt) ergibt dies einen *Überschuss* von

$$[v_y(x; y + \Delta y; z) - v_y(x; y; z)] \Delta x \Delta z \quad (\text{I-144})$$

Wir erweitern diesen Ausdruck noch mit  $\Delta y$  und beachten dabei, dass  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  das Quadervolumen bedeutet:

$$\left( \frac{v_y(x; y + \Delta y; z) - v_y(x; y; z)}{\Delta y} \right) \Delta V \quad (\text{I-145})$$

Wenn wir diese Größe noch durch das Quadervolumen  $\Delta V$  dividieren, erhalten wir den *Volumengewinn* an Flüssigkeit pro Volumen- *und* Zeiteinheit. Er beträgt somit

$$\frac{v_y(x; y + \Delta y; z) - v_y(x; y; z)}{\Delta y} \quad (\text{I-146})$$

Analoge Beiträge ergeben sich für die  $x$ - und  $z$ -Richtung. In der  $x$ -Richtung durch die Geschwindigkeitskomponente  $v_x(x; y; z)$ :

$$\frac{v_x(x + \Delta x; y; z) - v_x(x; y; z)}{\Delta x} \quad (\text{I-147})$$

In der  $z$ -Richtung durch die Geschwindigkeitskomponente  $v_z(x; y; z)$ :

$$\frac{v_z(x; y; z + \Delta z) - v_z(x; y; z)}{\Delta z} \quad (\text{I-148})$$

Man beachte dabei, dass diese Beiträge aus mathematischer Sicht *Differenzenquotienten* darstellen!

Wir verkleinern jetzt unseren Quader, d. h. wir lassen die Kantenlängen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  und  $\Delta z$  jeweils gegen *null* gehen. Mit anderen Worten: Wir gehen von unserem Quader mit dem Volumen  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  zu einem *infinitesimal kleinen* (quaderförmigen) *Volumenelement*  $dV = dx dy dz$  über. Bei diesem Grenzübergang streben die drei Differenzenquotienten definitionsgemäß gegen die entsprechenden *partiellen Differentialquotienten* oder *partiellen Ableitungen 1. Ordnung*:

$$\begin{aligned} \frac{v_x(x + \Delta x; y; z) - v_x(x; y; z)}{\Delta x} &\rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \frac{v_y(x; y + \Delta y; z) - v_y(x; y; z)}{\Delta y} &\rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ \frac{v_z(x; y; z + \Delta z) - v_z(x; y; z)}{\Delta z} &\rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{I-149})$$

Durch *Addition* der einzelnen Beiträge in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung ergibt sich damit der folgende *Volumengewinn* an Flüssigkeit pro Volumen- und Zeiteinheit:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{I-150})$$

Man bezeichnet diese *skalare* Größe als die *Divergenz* des Geschwindigkeitsfeldes  $\vec{v}(x; y; z)$  und schreibt dafür symbolisch:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{I-151})$$

Im Volumenelement  $dV$  wird somit in der Zeiteinheit das Flüssigkeitsvolumen

$$(\operatorname{div} \vec{v}) dV = \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV \quad (\text{I-152})$$

*erzeugt* oder *vernichtet*. Die *skalare* Größe  $\operatorname{div} \vec{v}$  lässt sich daher in unserem Strömungsmodell wie folgt anschaulich deuten:

**div  $\vec{v} > 0$ :** Der *abfließende* Anteil *überwiegt*, d. h. es tritt mehr Flüssigkeit aus als ein. Im Volumenelement  $dV$  befindet sich eine *Quelle*, in der Flüssigkeit *erzeugt* wird.

**div  $\vec{v} < 0$ :** Der *zufließende* Anteil *überwiegt*, d. h. es tritt mehr Flüssigkeit ein als aus. Im Volumenelement  $dV$  befindet sich eine *Senke*, in der Flüssigkeit *vernichtet* wird.

**div  $\vec{v} = 0$ :** Zufließender und abfließender Anteil halten sich das *Gleichgewicht*. Im Volumenelement  $dV$  befindet sich daher *weder* eine Quelle noch eine Senke, das Strömungsfeld ist hier *quellenfrei*.

### 5.1.2 Definition und Eigenschaften der Divergenz

Aufgrund unseres Beispiels definieren wir den Begriff *Divergenz eines Vektorfeldes* allgemein wie folgt:

**Definition:** Unter der *Divergenz* eines Vektorfeldes  $\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} F_x(x; y; z) \\ F_y(x; y; z) \\ F_z(x; y; z) \end{pmatrix}$  versteht man das *skalare* Feld

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (\text{I-153})$$

#### Anmerkungen

- (1) Bei einem *ebenen* Vektorfeld  $\vec{F}(x; y) = \begin{pmatrix} F_x(x; y) \\ F_y(x; y) \end{pmatrix}$  reduziert sich die Divergenz auf *zwei* Summanden:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \quad (\text{I-154})$$

- (2) Die Bezeichnung *Divergenz* stammt aus der *Hydrodynamik* und bedeutet soviel wie Auseinanderströmen einer Flüssigkeit (Divergieren). Die skalare Größe  $\operatorname{div} \vec{F}$  wird daher auch als *Quelldichte* oder *Quellstärke pro Volumenelement* bezeichnet. Dabei gilt in Analogie zum Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit:

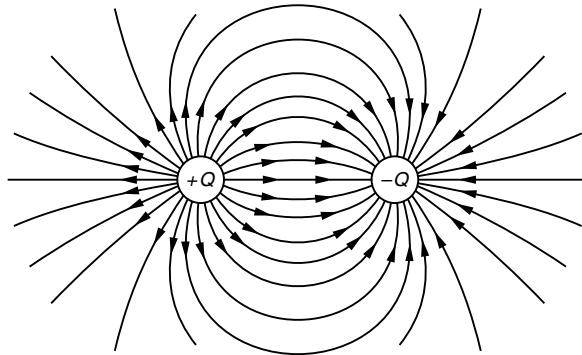
**div  $\vec{F} > 0$ :** Im Volumenelement befindet sich eine *Quelle*.

**div  $\vec{F} < 0$ :** Im Volumenelement befindet sich eine *Senke*.

**div  $\vec{F} = 0$ :** Im Volumenelement befindet sich *weder* eine Quelle *noch* eine Senke, das Vektorfeld ist an dieser Stelle *quellenfrei*.

- (3) Ein Vektorfeld  $\vec{F}$  heißt in einem Bereich *quellenfrei*, wenn dort überall  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$  gilt.

In den Anwendungen in Physik und Technik werden Vektorfelder häufig durch *Feldlinien* veranschaulicht (z. B. *elektrische* Felder von Ladungen oder *Geschwindigkeitsfelder* bei strömenden Flüssigkeiten). Die Feldlinien entspringen dabei den Quellen und enden in den Senken. Bei einem elektrischen Feld sind die *positiven* Ladungen als die Quellen und die *negativen* Ladungen als die Senken anzusehen. Bild I-66 zeigt das Feldlinienbild zweier *entgegengesetzt gleichgroßer* Ladungen.

**Bild 1-66**

Quellen und Senken in einem elektrischen Feld (hier: Feldlinienbild für zwei entgegengesetzt gleichstark geladene Kugeln)

Die *Divergenz* eines Vektorfeldes  $\vec{F}$  lässt sich *formal* auch als *skalares* Produkt aus Nabla-Operator  $\vec{\nabla}$  und Feldvektor  $\vec{F}$  darstellen:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (\text{I-155})$$

## ■ Beispiele

- (1) Wir nennen einige Beispiele für *quellenfreie* Felder, die in den Anwendungen eine gewisse Rolle spielen:
  - *Homogene* Vektorfelder wie z. B. das *elektrische Feld* in einem geladenen Plattenkondensator oder das *Geschwindigkeitsfeld* einer *gleichförmig* strömenden Flüssigkeit
  - *Elektrisches Feld* einer Punktladung
  - *Gravitationsfeld* einer Masse
  - *Magnetfeld* in der Umgebung eines stromdurchflossenen linearen Leiters
- (2) Wir bilden die *Divergenz* des Ortsvektors  $\vec{r}$  in Ebene und Raum:

In der *Ebene* gilt:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{r} = \frac{\partial}{\partial x} (x) + \frac{\partial}{\partial y} (y) = 1 + 1 = 2$$

Im *Raum* dagegen gilt:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{r} = \frac{\partial}{\partial x} (x) + \frac{\partial}{\partial y} (y) + \frac{\partial}{\partial z} (z) = 1 + 1 + 1 = 3$$

- (3) Wir berechnen die *Divergenz* des Vektorfeldes  $\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 z \\ -4y^2 z^2 \\ xyz^2 \end{pmatrix}$  im Punkt  $P = (1; 2; 1)$ :

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 z) + \frac{\partial}{\partial y} (-4y^2 z^2) + \frac{\partial}{\partial z} (xyz^2) = 2xz - 8yz^2 + 2xyz$$

$$(\operatorname{div} \vec{F})_0 = 2 - 16 + 4 = -10$$

- (4) Das 2-dimensionale Geschwindigkeitsfeld einer Strömung lautet:

$$\vec{v}(x; y) = \frac{v_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = v_0 \begin{pmatrix} -y(x^2 + y^2)^{-1/2} \\ x(x^2 + y^2)^{-1/2} \end{pmatrix}$$

( $v_0 > 0$  ist der Betrag der Geschwindigkeit;  $x^2 + y^2 > 0$ ). Ist das Feld quellenfrei? Um diese Frage zu beantworten, berechnen wir die *Divergenz* des Feldes (unter Verwendung der Kettenregel):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = v_0 \left[ -y \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{-1/2} + x \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{-1/2} \right] = \\ &= v_0 \left[ -y \left( -\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2)^{-3/2} \cdot 2x + x \left( -\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2)^{-3/2} \cdot 2y \right] = \\ &= v_0 [xy(x^2 + y^2)^{-3/2} - xy(x^2 + y^2)^{-3/2}] = 0 \end{aligned}$$

Wegen  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  ist das Geschwindigkeitsfeld *quellenfrei*.

- (5) Im *Innern* einer homogen geladenen Kugel herrscht die elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (|\vec{r}| \leq R)$$

( $R$ : Kugelradius;  $Q$ : Ladung der Kugel;  $\varepsilon_0$ : elektrische Feldkonstante; Kugelmittelpunkt = Ursprung). Wir bestimmen die *Divergenz* dieses kugelsymmetrischen Vektorfeldes und verwenden dabei das Ergebnis aus Beispiel (2):

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \cdot \operatorname{div} \vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \cdot 3 = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

(nach Beispiel (2) ist  $\operatorname{div} \vec{r} = 3$  bei einem *räumlichen* Ortsvektor). Mit der *Ladungsdichte*

$$\varrho_{\text{el}} = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

können wir dafür auch schreiben:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{3Q}{4\pi R^3} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} = \varrho_{\text{el}} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{\varrho_{\text{el}}}{\varepsilon_0}$$

Diese wichtige Beziehung besagt, dass jeder Punkt im *Innern* der geladenen Kugel eine *Quelle* des elektrischen Feldes ist. ■

Wir schließen mit einigen wichtigen *Rechenregeln* für Divergenzen:

### Rechenregeln für Divergenzen

$\vec{A}$  und  $\vec{B}$  sind Vektorfelder,  $\phi$  ist ein Skalarfeld,  $\vec{a}$  ist ein konstanter Vektor und  $c$  eine reelle Konstante:

$$(1) \operatorname{div} \vec{a} = 0 \quad (\text{I-156})$$

$$(2) \operatorname{div} (c \vec{A}) = c (\operatorname{div} \vec{A}) \quad (\text{I-157})$$

$$(3) \operatorname{div} (\vec{A} + \vec{B}) = \operatorname{div} \vec{A} + \operatorname{div} \vec{B} \quad (\text{Summenregel}) \quad (\text{I-158})$$

$$(4) \operatorname{div} (\vec{A} + \vec{a}) = \operatorname{div} \vec{A} \quad (\text{I-159})$$

$$(5) \operatorname{div} (\phi \vec{A}) = (\operatorname{grad} \phi) \cdot \vec{A} + \phi (\operatorname{div} \vec{A}) \quad (\text{Produktregel}) \quad (\text{I-160})$$

### 5.1.3 Ein Anwendungsbeispiel: Elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders

Wir wollen uns nun mit dem *elektrischen Feld* eines unendlich langen *homogen* geladenen Zylinders beschäftigen (Zylindradius:  $R$ ; Ladungsdichte:  $\varrho_{\text{el}}$ ). Im *Innern* des Zylinders besitzt das *axialsymmetrische* Feld die elektrische Feldstärke

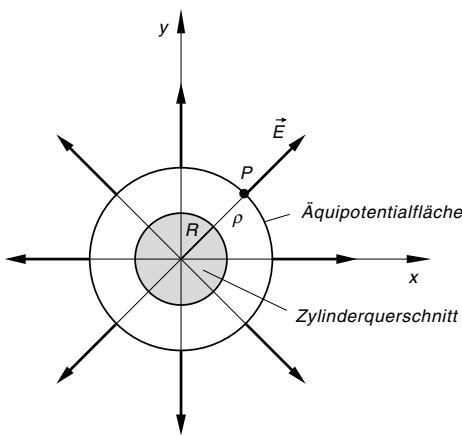
$$\vec{E} = \frac{\varrho_{\text{el}}}{2 \varepsilon_0} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x^2 + y^2 \leq R^2) \quad (\text{I-161})$$

im *Außenraum* dagegen die Feldstärke

$$\vec{E} = \frac{\varrho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0 (x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\varrho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0} \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I-162})$$

( $x^2 + y^2 \geq R^2$ ;  $\varepsilon_0$ : elektrische Feldkonstante).

Bild I-67 zeigt einen *ebenen* Schnitt durch das Feld *senkrecht* zur Zylinderachse ( $z$ -Achse), wobei wir von einer *positiven* Ladungsdichte ausgegangen sind. Da die  $z$ -Komponente der Feldstärke im gesamten Bereich *verschwindet* ( $E_z = 0$ ), haben wir es mit einem *ebenen* Vektorfeld zu tun.

**Bild 1-67**

Elektrisches Feld in der Umgebung eines homogen geladenen Zylinders (*positive* Ladungsdichte; ebener Schnitt senkrecht zur Zylinderachse)

### Elektrisches Feld außerhalb des Zylinders (siehe Gleichung (I-162))

Wir zeigen zunächst, dass das elektrische Feld *außerhalb* des Zylinders *quellenfrei* ist ( $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ ). Dazu benötigen wir die *partiellen* Ableitungen  $\frac{\partial E_x}{\partial x}$  und  $\frac{\partial E_y}{\partial y}$ , die wir mit Hilfe der Quotientenregel berechnen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial x} &= \frac{\rho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\rho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0} \cdot \frac{1(x^2 + y^2) - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{\rho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0} \cdot \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\rho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0} \cdot \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (\text{I-163})\end{aligned}$$

Analog:

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\rho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\rho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0} \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (\text{I-164})$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\rho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0} \left( \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \\ &= \frac{\rho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0} \cdot \frac{y^2 - x^2 + x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \quad (\text{I-165})\end{aligned}$$

Das elektrische Feld im *Außenraum* des geladenen Zylinders ist daher *quellenfrei*. Physikalisch einleuchtende Begründung: *Außerhalb* des Zylinders befinden sich *keine* Ladungen.

### Elektrisches Feld innerhalb des Zylinders (siehe Gleichung (I-161))

Im *Innern* des Zylinders dagegen verschwindet die Divergenz des Vektorfeldes  $\vec{E}$  *nicht*. Vielmehr gilt:

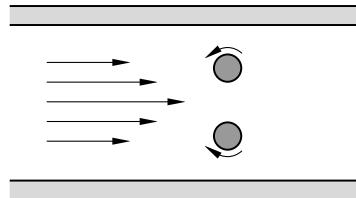
$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\rho_{\text{el}}}{2 \varepsilon_0} \left( \frac{\partial}{\partial x} (x) + \frac{\partial}{\partial y} (y) \right) = \frac{\rho_{\text{el}}}{2 \varepsilon_0} (1 + 1) = \frac{\rho_{\text{el}}}{\varepsilon_0} \quad (\text{I-166})$$

Diese wichtige Beziehung gehört zu den *Maxwellschen Gleichungen* der Elektrodynamik und besagt, dass die *positiven* Ladungen im Innern des Zylinders die *Quellen* des elektrischen Feldes sind.

## 5.2 Rotation eines Vektorfeldes

### 5.2.1 Definition und Eigenschaften der Rotation

Bei der mathematischen Behandlung *elektrischer* und *magnetischer* Felder sowie der *Geschwindigkeitsfelder* strömender Flüssigkeiten erweist sich eine weitere Differentialoperation als sehr nützlich, die als *Rotation* des entsprechenden Vektorfeldes bezeichnet wird. Ein einfaches Beispiel für ein solches Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v} = \vec{v}(x; y; z)$  liefert die (stationäre) Wasserströmung in einem Kanal. Die Strömungsgeschwindigkeit ist dabei in der Kanalmitte am größten, nimmt jedoch (durch Reibungskräfte bedingt) zum Ufer hin ab. Kleine, in die Strömung gebrachte Kugeln rotieren in Ufernähe infolge des dortigen Geschwindigkeitsgefälles um ihre Achsen und erlauben somit einen anschaulichen Einblick in die Bewegung der dortigen Wasserteilchen. Diese Rotation lässt sich in geeigneter Weise durch einen *Vektor* mit der Bezeichnung *Rotation des Geschwindigkeitsfeldes* beschreiben (siehe Bild I-68).



**Bild I-68**

Wasserströmung in einem Kanal

Die *Richtung* dieses Vektors fällt dabei in die jeweilige *Drehachse* der rotierenden Kugel (bzw. des Wasserteilchens), während der *Betrag* des Vektors als ein geeignetes Maß für die *Stärke* der Flüssigkeitswirbel dient.

Allgemein definieren wir den Begriff *Rotation eines Vektorfeldes* wie folgt:

**Definition:** Unter der *Rotation* eines Vektorfeldes  $\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} F_x(x; y; z) \\ F_y(x; y; z) \\ F_z(x; y; z) \end{pmatrix}$  versteht man das *Vektorfeld*

$$\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{I-167})$$

### Anmerkungen

- (1) Bei einem *ebenen* Vektorfeld  $\vec{F}(x; y) = \begin{pmatrix} F_x(x; y) \\ F_y(x; y) \end{pmatrix}$  verschwindet sowohl die *x-Komponente* als auch die *y-Komponente* der Rotation automatisch. Die verbleibende *z-Komponente* lautet:

$$(\text{rot } \vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \quad (\text{I-168})$$

Somit gilt für ein *ebenes* Vektorfeld:

$$\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \quad (\text{I-169})$$

- (2) Die Bezeichnung *Rotation* stammt aus der *Hydrodynamik* und beschreibt dort die Bildung von *Wirbeln* (geschlossene Feldlinien bei Geschwindigkeitsfeldern strömender Flüssigkeiten).
- (3) Der Vektor  $\text{rot } \vec{F}$  wird auch als *Wirbeldichte* des Feldes  $\vec{F}$  bezeichnet.
- (4) Das Vektorfeld  $\text{rot } \vec{F}$  wird häufig auch als *Wirbelfeld* zu  $\vec{F}$  bezeichnet.
- (5) Ein Vektorfeld  $\vec{F}$  heißt in einem Bereich *wirbelfrei*, wenn dort überall  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$  gilt.

Die *Rotation* eines Vektorfeldes  $\vec{F}$  lässt sich *formal* auch als *Vektorprodukt* aus dem Nabla-Operator  $\vec{\nabla}$  und dem Feldvektor  $\vec{F}$  darstellen:

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{I-170})$$

Weiterhin besteht die Möglichkeit der *Determinantenschreibweise*<sup>5)</sup>:

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (\text{I-171})$$

Durch Entwicklung der Determinante nach den Elementen der *ersten* Zeile erhält man genau die Definitionsformel (I-167).

<sup>5)</sup> In Band 1, Kap. II, Abschnitt 3.4.1 haben wir gezeigt, dass sich ein Vektorprodukt *formal* durch eine 3-reihige Determinante darstellen lässt.

## ■ Beispiele

- (1) Die folgenden Vektorfelder der Physik sind stets *wirbelfrei*:
  - *Homogene* Vektorfelder wie z. B. das elektrische Feld in einem geladenen *Plattenkondensator*.
  - *Kugel-* oder *radialsymmetrische* Vektorfelder (*Zentralfelder*) wie z. B. das elektrische Feld einer Punktladung oder das Gravitationsfeld einer Masse.
  - *Zylinder-* oder *axialsymmetrische* Vektorfelder wie z. B. das elektrische Feld in der Umgebung eines homogen geladenen Zylinders.
- (2) Die *Rotation* des Ortsvektors  $\vec{r}$  eines Punktes  $P = (x; y; z)$  *verschwindet*:

$$\text{rot } \vec{r} = \vec{\nabla} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(y) \\ \frac{\partial}{\partial z}(x) - \frac{\partial}{\partial x}(z) \\ \frac{\partial}{\partial x}(y) - \frac{\partial}{\partial y}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Diese Aussage gilt auch für Ortsvektoren der Ebene.

- (3) Wir zeigen, dass das 2-dimensionale Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v}(x; y) = \frac{v_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (x^2 + y^2 > 0)$$

*wirbelfrei* ist ( $v_0$ : Betrag der Geschwindigkeit).

Da ein *ebenes* Vektorfeld vorliegt, verschwinden die  $x$ - und  $y$ -Komponenten der Rotation von  $\vec{v}(x; y)$  automatisch. Mit den Geschwindigkeitskomponenten

$$v_x = \frac{v_0 x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = v_0 x (x^2 + y^2)^{-1/2}$$

$$v_y = \frac{v_0 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = v_0 y (x^2 + y^2)^{-1/2}$$

berechnen wir die noch fehlende  $z$ -Komponente der Rotation nach Gleichung (I-168), wobei wir die Kettenregel verwenden:

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{v})_z &= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_0 y \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{-1/2} - v_0 x \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{-1/2} = \\ &= v_0 y \left( -\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2)^{-3/2} \cdot 2x - v_0 x \left( -\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2)^{-3/2} \cdot 2y = \\ &= -v_0 x y (x^2 + y^2)^{-3/2} + v_0 x y (x^2 + y^2)^{-3/2} = 0 \end{aligned}$$

Somit ist  $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$  und das Geschwindigkeitsfeld *wirbelfrei*.

- (4) Wir berechnen die *Rotation* des *Geschwindigkeitsfeldes*  $\vec{v} = \begin{pmatrix} xz^4 \\ -4xz \\ 2yz^2 \end{pmatrix}$  im Punkt  $P = (1; -1; 1)$ .

Zunächst erhalten wir für  $\text{rot } \vec{v}$  in der *Determinantenschreibweise*:

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^4 & -4xz & 2yz^2 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach den Elementen der *ersten Zeile* liefert:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{v} &= \left[ \frac{\partial}{\partial y} (2yz^2) - \frac{\partial}{\partial z} (-4xz) \right] \vec{e}_x - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (2yz^2) - \frac{\partial}{\partial z} (xz^4) \right] \vec{e}_y + \\ &\quad + \left[ \frac{\partial}{\partial x} (-4xz) - \frac{\partial}{\partial y} (xz^4) \right] \vec{e}_z = \\ &= (2z^2 + 4x) \vec{e}_x - (0 - 4xz^3) \vec{e}_y + (-4z - 0) \vec{e}_z = \\ &= (2z^2 + 4x) \vec{e}_x + 4xz^3 \vec{e}_y - 4z \vec{e}_z \end{aligned}$$

Im Punkt  $P = (1; -1; 1)$  gilt dann:

$$(\text{rot } \vec{v})_0 = (2 + 4) \vec{e}_x + 4 \vec{e}_y - 4 \vec{e}_z = 6 \vec{e}_x + 4 \vec{e}_y - 4 \vec{e}_z$$

- (5) Im *Innern* einer homogen geladenen Kugel wird das elektrische Feld durch den *Feldstärkevektor*

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r} \quad (|\vec{r}| \leq R)$$

dargestellt ( $R$ : Kugelradius;  $Q$ : Ladung der Kugel;  $\epsilon_0$ : elektrische Feldkonstante).

Die *Rotation* dieses Feldes *verschwindet*:

$$\text{rot } \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot \text{rot } \vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{0} = \vec{0}$$

Denn nach Beispiel (2) ist  $\text{rot } \vec{r} = \vec{0}$ . Das elektrische Feld im *Innern* der geladenen Kugel ist somit *wirbelfrei*. ■

Abschließend geben wir noch die wichtigsten *Rechenregeln für Rotationen* an:

### Rechenregeln für Rotationen

$\vec{A}$  und  $\vec{B}$  sind Vektorfelder,  $\phi$  ist ein Skalarfeld,  $\vec{a}$  ist ein konstanter Vektor und  $c$  eine reelle Konstante:

$$(1) \operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0} \quad (\text{I-172})$$

$$(2) \operatorname{rot}(c \vec{A}) = c(\operatorname{rot} \vec{A}) \quad (\text{I-173})$$

$$(3) \operatorname{rot}(\vec{A} + \vec{B}) = \operatorname{rot} \vec{A} + \operatorname{rot} \vec{B} \quad (\text{Summenregel}) \quad (\text{I-174})$$

$$(4) \operatorname{rot}(\vec{A} + \vec{a}) = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (\text{I-175})$$

$$(5) \operatorname{rot}(\phi \vec{A}) = (\operatorname{grad} \phi) \times \vec{A} + \phi(\operatorname{rot} \vec{A}) \quad (\text{Produktregel}) \quad (\text{I-176})$$

### 5.2.2 Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsfeld einer rotierenden Scheibe

Eine dünne homogene kreisförmige Scheibe rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega} = \omega_0 \vec{e}_z$  um die Symmetriechse der Scheibe ( $z$ -Achse; siehe Bild I-69)<sup>6)</sup>.

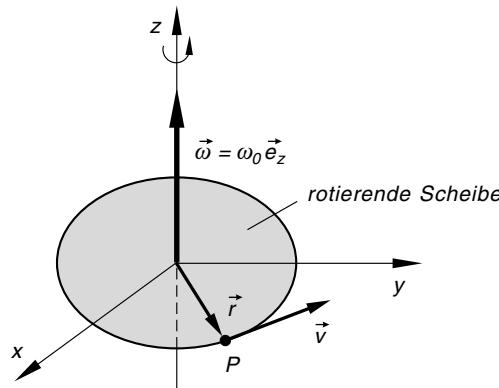


Bild I-69

Gleichmäßig um die Symmetriechse ( $z$ -Achse) rotierende dünne Scheibe

Wir betrachten jetzt ein beliebiges Teilchen auf der Scheibe mit dem Ortsvektor  $\vec{r}$ . Es besitzt den folgenden *Geschwindigkeitsvektor*:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \omega_0 y \\ \omega_0 x - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0 y \\ \omega_0 x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I-177})$$

( $\vec{v}$  besitzt nur eine  $z$ -Koordinate  $v_z = \omega_0$ ; der Punkt  $P$  und damit  $\vec{r}$  liegen in der  $x, y$ -Ebene, d. h.  $z = 0$ )

<sup>6)</sup> Die Scheibe wird als *flächenhafter* Körper angesehen (Schichtdicke  $\rightarrow$  Null).

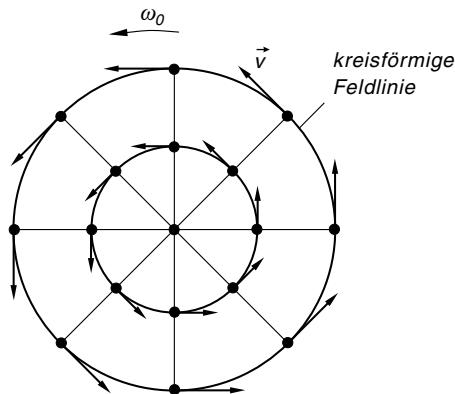
Dieses *ebene* Geschwindigkeitsfeld ist ein *Wirbelfeld*, da die Rotation von  $\vec{v}$  nicht verschwindet, wie wir gleich zeigen werden. Da bei einem *ebenen* Vektorfeld die ersten beiden Komponenten der Rotation *automatisch verschwinden*, müssen wir nur noch die *z-Komponente* bestimmen. Nach Formel (I-168) gilt dann:

$$(\text{rot } \vec{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (\omega_0 x) - \frac{\partial}{\partial y} (-\omega_0 y) = \omega_0 + \omega_0 = 2\omega_0 \neq 0 \quad (\text{I-178})$$

Damit ist

$$\text{rot } \vec{v} = 0 \vec{e}_x + 0 \vec{e}_y + 2\omega_0 \vec{e}_z = 2 \underbrace{\omega_0 \vec{e}_z}_{\vec{\omega}} = 2\vec{\omega} \neq \vec{0} \quad (\text{I-179})$$

Das Geschwindigkeitsfeld ist also – wie behauptet – ein *Wirbelfeld*. Die Feldlinien (Teilchenbahnen) sind dabei *konzentrische* Kreise, wie man der Anschauung unmittelbar entnehmen kann (Bild I-70).



**Bild I-70**

Geschwindigkeitsfeld einer gleichmäßig um die Symmetrieachse (hier: *z*-Achse) rotierenden kreisförmigen Scheibe

Sie können auch aus der Bedingung (I-101), d. h. hier also aus der Gleichung

$$\vec{v} \times d\vec{r} = \vec{0} \quad (\text{I-180})$$

direkt ermittelt werden:

$$\begin{aligned} \vec{v} \times d\vec{r} &= \begin{pmatrix} -\omega_0 y \\ \omega_0 x \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} = \omega_0 \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \omega_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -y dy - x dx \end{pmatrix} = \omega_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -y dy - x dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I-181}) \end{aligned}$$

Somit gilt (komponentenweiser Vergleich auf beiden Seiten):

$$-y dy - x dx = 0 \quad \text{oder} \quad y dy + x dx = 0 \quad (\text{I-182})$$

Diese *Differentialgleichung 1. Ordnung* haben wir bereits in Abschnitt 3.3 (Beispiel (3)) gelöst. Sie führt uns zu den Kurven

$$x^2 + y^2 = \text{const.} = c \quad (\text{mit } c > 0) \quad (\text{I-183})$$

d. h. zu *konzentrischen* Kreisen um den Koordinatenursprung mit den Radien  $R = \sqrt{c}$ .

## 5.3 Spezielle Vektorfelder

### 5.3.1 Quellenfreies Vektorfeld

Ein Vektorfeld  $\vec{F}$ , dessen *Divergenz* verschwindet ( $\text{div } \vec{F} = 0$ ), heißt bekanntlich *quellenfrei*. Wir wollen zunächst zeigen, dass ein Wirbelfeld  $\vec{F} = \text{rot } \vec{E}$  stets *quellenfrei* ist und somit der Gleichung

$$\text{div } \vec{F} = \text{div}(\text{rot } \vec{E}) = 0 \quad (\text{I-184})$$

genügt. Mit

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z \quad (\text{I-185})$$

und

$$\text{rot } \vec{E} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \quad (\text{I-186})$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{rot } \vec{E}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y \partial z} = \\ &= \left( \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y \partial z} \right) + \left( \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z \partial x} \right) + \left( \frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{I-187})$$

Die in den Klammern stehenden Ausdrücke *verschwinden* nach dem *Satz von Schwarz*, wenn wir voraussetzen, dass die Vektorkoordinaten von  $\vec{E}$  *stetige* partielle Ableitungen 2. Ordnung besitzen<sup>7)</sup>. Unter diesen Voraussetzungen gilt somit

$$\text{div}(\text{rot } \vec{E}) = 0 \quad (\text{I-188})$$

und ein *Wirbelfeld* ist daher stets *quellenfrei*.

*Umgekehrt* lässt sich zeigen, dass ein *quellenfreies* Vektorfeld  $\vec{F}$  stets als *Rotation* eines Vektorfeldes  $\vec{E}$ , *Vektorpotential* genannt, darstellbar ist:

$$\text{div } \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = \text{rot } \vec{E} \quad (\text{I-189})$$

Das *Vektorpotential*  $\vec{E}$  ist dabei bis auf den Gradienten einer skalaren Funktion  $\phi$  *eindeutig* bestimmt.

<sup>7)</sup> Die Reihenfolge, in der die Differentiationen ausgeführt werden, spielt dann *keine* Rolle und die in den jeweiligen Klammern enthaltenen partiellen Ableitungen sind somit *gleich*.

### Eigenschaften eines quellenfreien Vektorfeldes

Ein *quellenfreies* Vektorfeld  $\vec{F}$  lässt sich stets als *Rotation* eines Vektorfeldes  $\vec{E}$  darstellen:

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \operatorname{rot} \vec{E} \quad (\text{I-190})$$

$\vec{E}$  heißt *Vektorpotential* und ist bis auf den Gradienten einer skalaren Funktion  $\phi$  eindeutig bestimmt.

Umgekehrt ist ein *Wirbelfeld*  $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{E}$  stets *quellenfrei*:

$$\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{E}) = 0 \quad (\text{I-191})$$

### ■ Beispiele

- (1) Die folgenden Vektorfelder der Physik sind *quellenfrei*:
  - *Homogenes elektrisches Feld* in einem geladenen Plattenkondensator
  - *Elektrisches Feld* in der Umgebung einer Punktladung
  - *Gravitationsfeld* der Erde
  - *Magnetfeld* in der Umgebung eines stromdurchflossenen linearen Leiters
- (2) Wir prüfen, ob das ebene Vektorfeld

$$\vec{v}(x; y) = \begin{pmatrix} e^{-\pi x} \cdot \cos(\pi y) \\ e^{-\pi x} \cdot \sin(\pi y) \end{pmatrix}$$

quellenfrei ist.

Aus diesem Grund berechnen wir die Divergenz des Feldes (unter Verwendung der Kettenregel):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (e^{-\pi x} \cdot \cos(\pi y)) + \frac{\partial}{\partial y} (e^{-\pi x} \cdot \sin(\pi y)) = \\ &= \cos(\pi y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (e^{-\pi x}) + e^{-\pi x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\sin(\pi y)) = \\ &= \cos(\pi y) \cdot e^{-\pi x} \cdot (-\pi) + e^{-\pi x} \cdot \cos(\pi y) \cdot \pi = \\ &= -\pi \cdot e^{-\pi x} \cdot \cos(\pi y) + \pi \cdot e^{-\pi x} \cdot \cos(\pi y) = 0 \end{aligned}$$

Das Vektorfeld ist also *quellenfrei*. ■

### 5.3.2 Wirbelfreies Vektorfeld

Ein Vektorfeld  $\vec{F}$ , dessen Rotation verschwindet ( $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ ), bezeichnen wir bekanntlich als *wirbelfrei*. Wir zeigen zunächst, dass ein *Gradientenfeld*  $\vec{F} = \text{grad } \phi$  stets *wirbelfrei* ist und somit die Bedingung

$$\text{rot } \vec{F} = \text{rot}(\text{grad } \phi) = \vec{0} \quad (\text{I-192})$$

erfüllt. Mit

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{I-193})$$

folgt zunächst (in der speziellen Determinantenschreibweise)

$$\text{rot}(\text{grad } \phi) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (\text{I-194})$$

Wir entwickeln die Determinante nach den Elementen der *ersten* Zeile und erhalten

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{grad } \phi) &= \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] \vec{e}_x - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] \vec{e}_y + \\ &\quad + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] \vec{e}_z = \\ &= \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \right) \vec{e}_x - \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) \vec{e}_y + \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) \vec{e}_z \end{aligned} \quad (\text{I-195})$$

Wenn wir voraussetzen, dass die partiellen Ableitungen 2. Ordnung des skalaren Feldes  $\phi$  stetig sind, verschwinden nach dem *Satz von Schwarz* die in den Klammern stehenden Ausdrücke und es gilt

$$\text{rot}(\text{grad } \phi) = \vec{0} \quad (\text{I-196})$$

Unter den genannten Voraussetzungen ist ein *Gradientenfeld* also stets *wirbelfrei*.

Umgekehrt lässt sich zeigen, dass ein *wirbelfreies* Feld stets als *Gradient* eines skalaren Feldes  $\phi$  dargestellt werden kann:

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = \text{grad } \phi \quad (\text{I-197})$$

### Eigenschaften eines wirbelfreien Vektorfeldes

Ein *wirbelfreies* Vektorfeld  $\vec{F}$  lässt sich stets als *Gradient* eines skalaren Feldes  $\phi$  darstellen:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = \operatorname{grad} \phi \quad (\text{I-198})$$

Umgekehrt ist ein *Gradientenfeld*  $\vec{F} = \operatorname{grad} \phi$  stets *wirbelfrei*:

$$\vec{F} = \operatorname{grad} \phi \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{rot} (\operatorname{grad} \phi) = \vec{0} \quad (\text{I-199})$$

## ■ Beispiele

- (1) Die folgenden Vektorfelder der Physik sind stets *wirbelfrei*:
  - *Homogene* Vektorfelder wie z. B. das elektrische Feld in einem geladenen Plattenkondensator.
  - *Kugel-* oder *radialsymmetrische* Vektorfelder (*Zentralfelder*) wie z. B. das elektrische Feld einer Punktladung oder das Gravitationsfeld der Erde.
  - *Zylinder-* oder *axialsymmetrische* Vektorfelder wie z. B. das elektrische Feld in der Umgebung eines homogen geladenen Zylinders.
- (2) Im Abschnitt 5.3.1 haben wir gezeigt, dass das ebene Vektorfeld

$$\vec{v}(x; y) = \begin{pmatrix} e^{-\pi x} \cdot \cos(\pi y) \\ e^{-\pi x} \cdot \sin(\pi y) \end{pmatrix}$$

*quellenfrei* ist. Das Feld ist auch *wirbelfrei*, da die Rotation von  $\vec{v}$  verschwindet. Es genügt, zu zeigen, dass die  $z$ -Komponente von  $\operatorname{rot} \vec{v}$  den Wert Null besitzt ( $x$ - und  $y$ -Komponente verschwinden bekanntlich *automatisch*):

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \vec{v})_z &= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (e^{-\pi x} \cdot \sin(\pi y)) - \frac{\partial}{\partial y} (e^{-\pi x} \cdot \cos(\pi y)) = \\ &= \sin(\pi y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (e^{-\pi x}) - e^{-\pi x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\cos(\pi y)) = \\ &= \sin(\pi y) \cdot e^{-\pi x} \cdot (-\pi) - e^{-\pi x} \cdot [-\sin(\pi y)] \cdot \pi = \\ &= -\pi \cdot e^{-\pi x} \cdot \sin(\pi y) + \pi \cdot e^{-\pi x} \cdot \sin(\pi y) = 0 \end{aligned}$$

Differenziert wurde mit Hilfe der Kettenregel. Somit ist  $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ , das Vektorfeld daher *wirbelfrei*.



### 5.3.3 Laplace- und Poisson-Gleichung

Für ein *quellenfreies* und zugleich *wirbelfreies* Vektorfeld  $\vec{F}$  müssen die folgenden Gleichungen erfüllt sein:

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \vec{F} = 0 \quad (\text{I-200})$$

Ein solches Vektorfeld ist dann wegen seiner *Wirbelfreiheit* als *Gradient* eines skalaren Feldes  $\phi$  darstellbar:

$$\vec{F} = \operatorname{grad} \phi \quad (\text{I-201})$$

Wir setzen diese Beziehung in die *erste* der beiden Gleichungen (I-200) ein und erhalten

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div} (\operatorname{grad} \phi) = 0 \quad (\text{I-202})$$

Mit

$$\operatorname{grad} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{I-203})$$

wird daraus schließlich

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\operatorname{grad} \phi) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I-204})$$

Diese *partielle Differentialgleichung 2. Ordnung* für das skalare Feld  $\phi$  lässt sich mit Hilfe des sog. *Laplace-Operators*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{I-205})$$

verkürzt auch wie folgt schreiben:

$$\operatorname{div} (\operatorname{grad} \phi) = \Delta \phi = 0 \quad (\text{I-206})$$

Sie wird in den Anwendungen als *Laplacesche Differentialgleichung* oder kurz als *Laplace-Gleichung* bezeichnet. Der *Laplace-Operator*  $\Delta$  kann dabei formal als das *skalare Produkt* des *Nabla-Vektors*  $\vec{\nabla}$  mit sich selbst aufgefasst werden:

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{I-207})$$

In der *Operatorenenschreibweise* gilt somit:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \phi = \Delta \phi \quad (\text{I-208})$$

Die Lösungen der *Laplace-Gleichung*  $\Delta \phi = 0$  werden als *harmonische* Funktionen bezeichnet. Die *Laplace-Gleichung* ist dabei ein *Sonderfall* der sog. *Poissonschen-Differentialgleichung*

$$\Delta \phi = f(x; y; z) \quad (\text{I-209})$$

die auch als *Potentialgleichung* bezeichnet wird, da sie z. B. bei der Beschreibung des *Potentials* eines elektrischen *Feldes* von großer Bedeutung ist. Die Lösung  $\phi$  der *Poisson-* oder *Potentialgleichung* heißt daher auch *Potentialfunktion* oder kurz *Potential*.

### Laplace- und Poisson-Gleichung

#### Laplace-Operator $\Delta$

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{I-210})$$

(formales *Skalarprodukt* des *Nabla-Operators*  $\vec{\nabla}$  mit sich selbst)

#### Laplacesche Differentialgleichung (Laplace-Gleichung)

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{I-211})$$

Die Lösungen dieser *homogenen* partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung werden als *harmonische* Funktionen bezeichnet.

#### Poisson- oder Potentialgleichung

$$\Delta \phi = f(x; y; z) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = f(x; y; z) \quad (\text{I-212})$$

Die Lösungen dieser *inhomogenen* partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung werden als *Potentialfunktionen* bezeichnet.

#### Anmerkungen

- (1) Die *Hintereinanderanwendung* der Differentialoperatoren  $\operatorname{div}$  und  $\operatorname{grad}$  führt somit zum Laplace-Operator  $\Delta$ :

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \Delta \quad (\text{I-213})$$

- (2) Ein *wirbelfreies* Vektorfeld  $\vec{F}$  ( $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ ) lässt sich stets als *Gradient* eines skalaren Feldes  $\phi$  darstellen:  $\vec{F} = \operatorname{grad} \phi$ . Ist das Vektorfeld zusätzlich auch noch *quellenfrei* ( $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ ), so ist  $\phi$  eine Lösung der *Laplace-Gleichung*, ansonsten jedoch eine Lösung der *Poisson-Gleichung*.

- (3) Ein *wirbelfreies* Quellenfeld  $\vec{F}$  erfüllt die Bedingungen

$$\operatorname{div} \vec{F} \neq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0} \quad (\text{I-214})$$

und wird auch als ein *Poisson-Feld* bezeichnet, da in diesem Fall die zugehörige Potentialfunktion  $\phi$  eine Lösung der *Poisson-Gleichung* ist.

Ist das Vektorfeld  $\vec{F}$  jedoch quellen- und wirbelfrei, gilt somit

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0} \quad (\text{I-215})$$

so heißt dieses Feld auch ein *Laplace-Feld*. Denn die zugehörige Potentialfunktion  $\phi$  ist in diesem Fall eine Lösung der *Laplace-Gleichung*.

- (4) Bei einem *ebenen* Problem reduziert sich der *Laplace-Operator* auf

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{I-216})$$

## ■ Beispiele

- (1) Wir zeigen, dass die Funktion  $\phi = \ln\left(\frac{1}{r}\right)$  mit  $r > 0$  im *zweidimensionalen*

Raum eine *harmonische* Funktion ist, d. h. eine spezielle Lösung der *Laplace-Gleichung*  $\Delta\phi = 0$  darstellt.

Zunächst bringen wir die Funktion  $\phi$  durch *elementare* Umformungen und unter Berücksichtigung von  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{1/2}$  auf eine für die Differenziation *günstigere* Form:

$$\phi = \ln\left(\frac{1}{r}\right) = \underbrace{\ln 1}_0 - \ln r = -\ln(x^2 + y^2)^{1/2} = -\frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + y^2)$$

Die benötigten partiellen Ableitungen 2. Ordnung lauten dann (unter Verwendung der Ketten- bzw. Quotientenregel):

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + y^2) \right] = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{x}{x^2 + y^2} \right] = -\frac{1(x^2 + y^2) - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} =$$

$$= -\frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Analog erhalten wir:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}\Delta \phi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{x^2 - y^2 + y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{0}{(x^2 + y^2)^2} = 0\end{aligned}$$

Die Funktion  $\phi = \ln\left(\frac{1}{r}\right) = -\ln r$  ist daher eine Lösung der *Laplace-Gleichung*.

- (2) Das *räumliche* skalare Feld  $\phi = \ln r$  mit  $r > 0$  ist eine (spezielle) Lösung der *Poisson-Gleichung*  $\Delta \phi = \frac{1}{r^2}$ . Um dies zu zeigen, bringen wir die Funktion zunächst unter Beachtung der Beziehung  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  auf eine beim Differenzieren *günstigere* Form:

$$\phi = \ln r = \ln(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + y^2 + z^2)$$

Wir differenzieren jetzt zweimal *partiell* nach  $x$  und erhalten (unter Verwendung der Ketten- und Quotientenregel):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + y^2 + z^2) \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot 2x = \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \right] = \frac{1(x^2 + y^2 + z^2) - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\end{aligned}$$

Analog erhält man:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{x^2 - y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

Durch Aufaddieren der drei partiellen Ableitungen 2. Ordnung folgt schließlich:

$$\begin{aligned}
\Delta \phi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \\
&= \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{x^2 - y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \\
&= \frac{-x^2 + y^2 + z^2 + x^2 - y^2 + z^2 + x^2 + y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \\
&= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Funktion  $\phi = \ln r$  tatsächlich eine (spezielle) Lösung der *Poisson-Gleichung*  $\Delta \phi = \frac{1}{r^2}$  ist (im *Zweidimensionalen* ist dies aber *nicht* der Fall). ■

### 5.3.4 Ein Anwendungsbeispiel: Potentialgleichung des elektrischen Feldes

In einem elektrischen Feld besteht zwischen dem *elektrostatischen Potential*  $U$  und der *elektrischen Feldstärke*  $\vec{E}$  die Beziehung

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} U \quad (\text{I-217})$$

Das Feld wird dabei von einer *Raumladung* mit der (im Allgemeinen ortsabhängigen) Ladungsdichte  $\varrho_{e1} = \varrho_{e1}(x; y; z)$  erzeugt. Feldstärke  $\vec{E}$  und Ladungsdichte  $\varrho_{e1}$  sind durch die fundamentale *Maxwellsche Gleichung*

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\varrho_{e1}}{\varepsilon_0} \quad (\text{I-218})$$

miteinander verknüpft ( $\varepsilon_0$ : elektrische Feldkonstante). Das Potential  $U$  genügt dann einer *Poisson-Gleichung*. Denn aus

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} (-\operatorname{grad} U) = -\operatorname{div} (\operatorname{grad} U) = -\Delta U = \frac{\varrho_{e1}}{\varepsilon_0} \quad (\text{I-219})$$

folgt

$$\Delta U = -\frac{\varrho_{e1}}{\varepsilon_0} \quad (\text{I-220})$$

Diese *partielle Differentialgleichung 2. Ordnung* wird in der Elektrodynamik als *Potentialgleichung* bezeichnet. Sie geht im Fall eines *ladungsfreien* Feldes ( $\varrho_{e1} = 0$ ) in die *Laplacesche Differentialgleichung*

$$\Delta U = 0 \quad (\text{I-221})$$

über.

## 6 Spezielle ebene und räumliche Koordinatensysteme

### 6.1 Polarkoordinaten

#### 6.1.1 Definition und Eigenschaften der Polarkoordinaten

Polarkoordinaten verwendet man vorzugsweise bei ebenen Problemen mit *Kreis-* oder *Radialsymmetrie*. Wir haben sie bereits in Band 1 (Kap. III, Abschnitt 3.3) ausführlich beschrieben und beschränken uns daher auf eine kurze Zusammenfassung ihrer wichtigsten Eigenschaften, die für die weiteren Ausführungen benötigt werden.

##### Polarkoordinaten und ihre wichtigsten Eigenschaften

Die Polarkoordinaten  $r, \varphi$  eines Punktes  $P$  der Ebene bestehen aus einer *Abstandsordinate*  $r$  und einer *Winkelkoordinate*  $\varphi$  (Bild I-71):

$r$ : Abstand des Punktes  $P$  vom Koordinatenursprung  $O$  ( $r \geq 0$ )

$\varphi$ : Winkel zwischen dem Ortsvektor  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$  des Punktes  $P$  und der *positiven x-Achse*

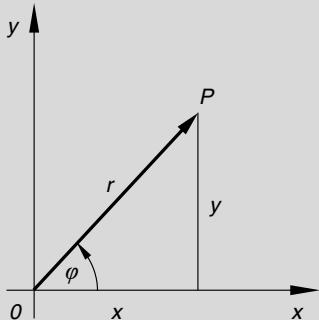


Bild I-71 Polarkoordinaten

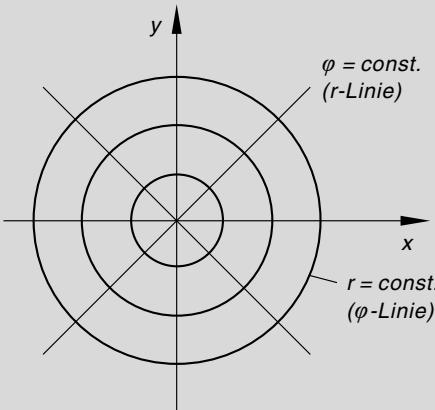


Bild I-72  
Koordinatenlinien des Polarkoordinatensystems

##### Koordinatenlinien (Bild I-72)

Das Polarkoordinatensystem ist ein sog. *krummliniges* Koordinatensystem mit den folgenden *Koordinatenlinien*:

$r = \text{const.}$ : Konzentrische Kreise um den Koordinatenursprung ( $\varphi$ -Linien)

$\varphi = \text{const.}$ : Radial vom Koordinatenursprung nach *außen* laufende Strahlen ( $r$ -Linien)

Die  $r$ - und  $\varphi$ -Linien schneiden sich in jedem Punkt *senkrecht*, d. h. die Polarkoordinaten sind (wie die kartesischen Koordinaten) *orthogonale* ebene Koordinaten.

**Zusammenhang zwischen den Polarkoordinaten  $r, \varphi$  und den kartesischen Koordinaten  $x, y$  (siehe Bild I-71)**

*Polarkoordinaten → Kartesische Koordinaten*

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi \quad (\text{I-222})$$

*Kartesische Koordinaten → Polarkoordinaten*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x} \quad (\text{I-223})$$

#### Anmerkungen

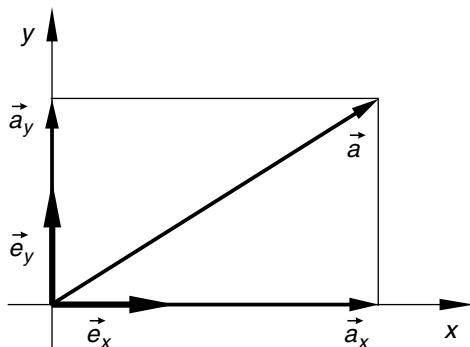
- (1) Die Abstandsvariable  $r$  ist die *Länge* (der *Betrag*) des Ortsvektors  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ .
- (2) Der Winkel  $\varphi$  wird *positiv* gezählt bei Drehung im *Gegenuhrzeigersinn* (mathematisch *positiver* Drehsinn), *negativ* dagegen bei Drehung im *Uhrzeigersinn* (mathematisch *negativer* Drehsinn). Er ist jedoch nur bis auf ganzzahlige Vielfache von  $360^\circ$  bzw.  $2\pi$  bestimmt. Man beschränkt sich bei der Winkelangabe daher meist auf den im Intervall  $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$  bzw.  $0 \leq \varphi < 2\pi$  (im Bogenmaß) gelegenen sog. *Hauptwert*.
- (3) Der Koordinatenursprung, hier auch als *Pol* bezeichnet, hat die Abstandsvariable  $r = 0$ , die Winkelvariable  $\varphi$  dagegen ist *unbestimmt*.

#### 6.1.2 Darstellung eines ebenen Vektors in Polarkoordinaten

In einem (ebenen) *kartesischen* Koordinatensystem wird ein Vektor  $\vec{a}$  in der Form

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y \quad (\text{I-224})$$

dargestellt (Bild I-73). Dabei sind  $\vec{e}_x$  und  $\vec{e}_y$  zwei *Einheitsvektoren* in Richtung der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse. Sie bilden die *Basis* für diese Vektordarstellung und werden daher als *Basisvektoren* bezeichnet.



**Bild I-73**

Darstellung eines ebenen Vektors im kartesischen Koordinatensystem

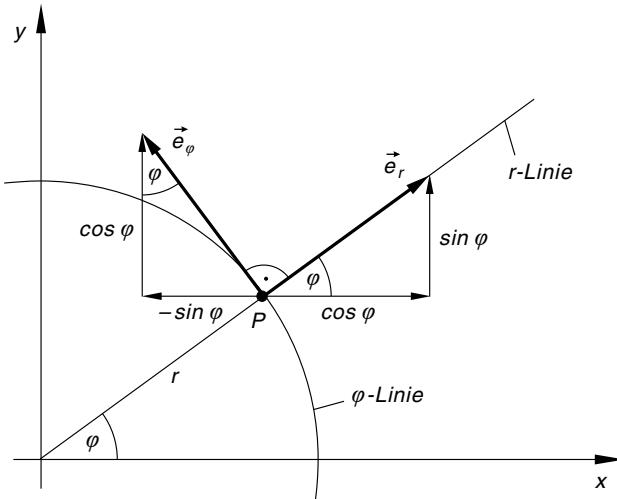
Die Vektorkoordinaten  $a_x$  und  $a_y$  sind dabei die *Projektionen* des Vektors  $\vec{a}$  auf diese Basisvektoren, unter Berücksichtigung der Richtung, in die diese Projektionen fallen<sup>8)</sup>. Unsere Aufgabe besteht nun darin, den Vektor  $\vec{a}$  in *Polarkoordinaten* darzustellen, wobei wir zunächst zwei geeignete Einheitsvektoren als *Basisvektoren* benötigen.

### Basisvektoren in Polarkoordinaten

Die im *kartesischen* Koordinatensystem verwendeten Basisvektoren  $\vec{e}_x$  und  $\vec{e}_y$  sind die (konstanten) *Tangenteneinheitsvektoren* an die  $x$ - bzw.  $y$ -Koordinatenlinien. Analog verfahren wir bei den Polarkoordinaten. Auch hier erweisen sich die *Tangenteneinheitsvektoren* an die  $r$ - bzw.  $\varphi$ -Koordinatenlinien als eine geeignete *Basis* für die Darstellung eines beliebigen Vektors (Bild I-74). Wir bezeichnen diese *Einheitsvektoren* (*Basisvektoren*) mit  $\vec{e}_r$  und  $\vec{e}_\varphi$ . Sie haben die folgende Bedeutung:

$\vec{e}_r$ : *Tangenteneinheitsvektor* an die  $r$ -Koordinatenlinie (*radial nach außen gerichtet*)

$\vec{e}_\varphi$ : *Tangenteneinheitsvektor* an die  $\varphi$ -Koordinatenlinie (*tangential zum Kreis*)



**Bild I-74**  
Basisvektoren im  
Polarkoordinatensystem

$\vec{e}_r$  und  $\vec{e}_\varphi$  verändern sich dabei von Punkt zu Punkt (Ausnahme: längs eines Radialstrahls  $\varphi = \text{const.}$  bleiben sie konstant), im Gegensatz zu den *kartesischen* Einheitsvektoren  $\vec{e}_x$  und  $\vec{e}_y$ , die überall gleich sind. Die *Basisvektoren* (Einheitsvektoren)  $\vec{e}_r$  und  $\vec{e}_\varphi$  besitzen im *kartesischen* Koordinatensystem die folgende Darstellung (siehe hierzu Bild I-74):

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{I-225}$$

<sup>8)</sup> Eine Vektorkoordinate wird *positiv* gezählt, wenn der Projektionsvektor die *gleiche* Richtung hat wie der entsprechende Einheitsvektor. Ansonsten wird die Vektorkoordinate *negativ* gezählt.

Diese Transformationsgleichungen lassen sich unmittelbar aus Bild I-74 ablesen. Denn die Projektion von  $\vec{e}_r$  auf die  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung ergibt  $\cos \varphi$  bzw.  $\sin \varphi$ . Analog führt die Projektion von  $\vec{e}_\varphi$  auf diese Richtungen zu  $\sin \varphi$  bzw.  $\cos \varphi$ , wobei die *erste* Projektion aber in die *negative*  $x$ -Richtung fällt und somit vereinbarungsgemäß mit einem *Minuszeichen* zu versehen ist. Die Basisvektoren  $\vec{e}_r$  und  $\vec{e}_\varphi$  sind *orthogonal*, da ihr Skalarprodukt verschwindet:

$$\begin{aligned}\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = \\ &= -\cos \varphi \cdot \sin \varphi + \sin \varphi \cdot \cos \varphi = 0\end{aligned}\quad (\text{I-226})$$

Der Übergang von der alten Basis  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$  zur neuen Basis  $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$  lässt sich auch wie folgt durch eine *Transformationsmatrix*  $\mathbf{A}$  beschreiben:

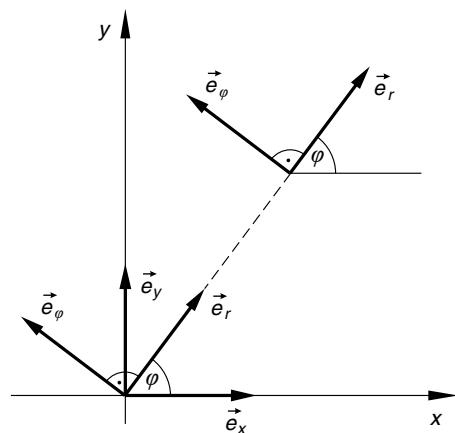
$$\begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix} \quad (\text{I-227})$$

Sie ist wegen

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \quad (\text{I-228})$$

sogar *orthogonal*.

Die Matrix  $\mathbf{A}$  entspricht dabei der Transformationsmatrix, die man bei einer *Drehung* des ebenen  $x, y$ -Koordinatensystems um den Winkel  $\varphi$  um den Nullpunkt erhält. Dies ist kein Zufall, denn das neue Basisvektorensystem  $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$  geht aus dem alten System  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$  durch *Drehung* um eben diesen Winkel  $\varphi$  hervor, wie man unmittelbar aus Bild I-75 entnehmen kann.



**Bild I-75**

Zusammenhang zwischen den kartesischen Basisvektoren  $\vec{e}_x$  und  $\vec{e}_y$  und den Basisvektoren  $\vec{e}_r$  und  $\vec{e}_\varphi$  des Polarkoordinatensystems

Umgekehrt lassen sich auch die alten Basisvektoren  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$  durch die neuen Basisvektoren  $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$  ausdrücken:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^{-1}} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} \quad (\text{I-229})$$

$\mathbf{A}^{-1}$  ist dabei die *inverse Matrix* von  $\mathbf{A}$ .

### Vektordarstellung in Polarkoordinaten

Wir wollen jetzt einen im *kartesischen* Koordinatensystem gegebenen Vektor

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y \quad (\text{I-230})$$

im *Polarkoordinatensystem* beschreiben. Dort besitzt dieser Vektor, bezogen auf die *neuen* Basisvektoren  $\vec{e}_r$  und  $\vec{e}_\varphi$ , die folgende Darstellung:

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\varphi \vec{e}_\varphi \quad (\text{I-231})$$

Dabei sind  $a_r$  und  $a_\varphi$  die mit einem *Vorzeichen* versehenen *Projektionen* des Vektors  $\vec{a}$  auf die beiden Basisvektoren  $\vec{e}_r$  und  $\vec{e}_\varphi$  (Bild I-76)<sup>9)</sup>. Mit anderen Worten: Die (positiven oder negativen) Größen  $a_r$  und  $a_\varphi$  sind die *Vektorkoordinaten* oder *skalaren Vektorkomponenten* des Vektors  $\vec{a}$ , bezogen auf die Basis  $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$ .

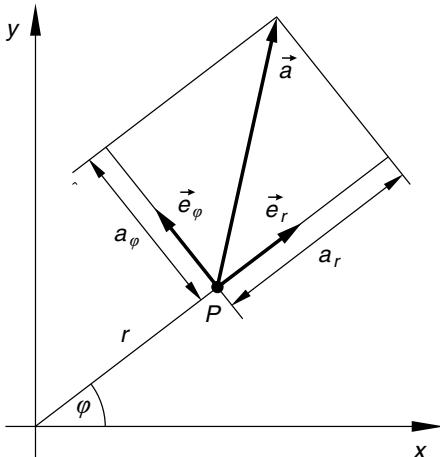


Bild I-76

Darstellung eines Vektors im Polarkoordinatensystem

Uns interessiert natürlich, wie sich die *neuen* Vektorkoordinaten  $a_r, a_\varphi$  aus den *alten* (kartesischen) Vektorkoordinaten  $a_x, a_y$  berechnen lassen.

<sup>9)</sup> Bezüglich des Vorzeichens gilt die gleiche Vereinbarung wie bei der *kartesischen* Vektordarstellung.

Aus diesem Grund drücken wir in Gleichung (I-224) die *alten* Basisvektoren  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  mittels der *Transformation* (I-229) durch die *neuen* Basisvektoren  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\varphi$  aus:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y = \\ &= a_x (\cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi) + a_y (\sin \varphi \vec{e}_r + \cos \varphi \vec{e}_\varphi) = \\ &= a_x \cdot \cos \varphi \vec{e}_r - a_x \cdot \sin \varphi \vec{e}_\varphi + a_y \cdot \sin \varphi \vec{e}_r + a_y \cdot \cos \varphi \vec{e}_\varphi = \\ &= \underbrace{(a_x \cdot \cos \varphi + a_y \cdot \sin \varphi)}_{a_r} \vec{e}_r + \underbrace{(-a_x \cdot \sin \varphi + a_y \cdot \cos \varphi)}_{a_\varphi} \vec{e}_\varphi \quad (I-232)\end{aligned}$$

Wir erhalten somit die folgenden *Transformationsgleichungen*:

$$\begin{aligned}a_r &= a_x \cdot \cos \varphi + a_y \cdot \sin \varphi \\ a_\varphi &= -a_x \cdot \sin \varphi + a_y \cdot \cos \varphi \quad (I-233)\end{aligned}$$

Oder – in der *Matrizenform* – :

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad (I-234)$$

Die *Transformationsmatrix*  $\mathbf{A}$  ist dabei die *gleiche* wie bei der entsprechenden Transformation der *Basisvektoren* (siehe Gleichung I-227). Die *Vektorkoordinaten* eines beliebigen Vektors  $\vec{a}$  transformieren sich somit beim Übergang von den kartesischen Koordinaten zu den Polarkoordinaten in der *gleichen* Weise wie die *Basisvektoren*!

Umgekehrt lassen sich auch die kartesischen Vektorkoordinaten  $a_x$ ,  $a_y$  durch die Vektorkoordinaten  $a_r$ ,  $a_\varphi$  im Polarkoordinatensystem ausdrücken. Die Transformation erfolgt dabei über die zu  $\mathbf{A}$  *inverse Matrix*  $\mathbf{A}^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^{-1}} \begin{pmatrix} a_r \\ a_\varphi \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} a_r \\ a_\varphi \end{pmatrix} \quad (I-235)$$

Wir fassen die wichtigsten Ergebnisse wie folgt zusammen:

### Darstellung eines Vektors in Polarkoordinaten

#### Basisvektoren $\vec{e}_r$ , $\vec{e}_\varphi$

In einem Polarkoordinatensystem werden die folgenden *orthogonalen* Einheitsvektoren als *Basisvektoren* verwendet (siehe Bild I-74):

$\vec{e}_r$ : *Tangenteneinheitsvektor* an die  $r$ -Koordinatenlinie  $\varphi = \text{const.}$  (*radial* nach außen gerichtet)

$\vec{e}_\varphi$ : *Tangenteneinheitsvektor* an die  $\varphi$ -Koordinatenlinie  $r = \text{const.}$  (*tangential* zum Kreis)

### Vektordarstellung in der Basis $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$

Ein Vektor  $\vec{a}$  lässt sich in diesem Basissystem in der Form

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\varphi \vec{e}_\varphi \quad (\text{I-236})$$

darstellen. Die (positiven oder negativen) Größen  $a_r$  und  $a_\varphi$  sind dabei die *Vektorkoordinaten (skalaren Vektorkomponenten)* des Vektors  $\vec{a}$ . Sie entstehen durch *Projektion* von  $\vec{a}$  auf die beiden Basisvektoren  $\vec{e}_r$  und  $\vec{e}_\varphi$  (siehe Bild I-76).

### Transformation aus dem kartesischen Koordinatensystem in das Polarkoordinatensystem

Beim Übergang von den kartesischen Koordinaten zu den Polarkoordinaten transformieren sich die *Basisvektoren*  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$  sowie die *Vektorkoordinaten*  $a_x, a_y$  eines beliebigen Vektors  $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$  in *gleicher Weise*. Die *orthogonale* Transformationsmatrix  $\mathbf{A}$  besitzt dabei die folgende Gestalt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (\text{I-237})$$

Der Vektor  $\vec{a}$  besitzt somit im *Polarkoordinatensystem* die Vektorkoordinaten

$$\begin{aligned} a_r &= a_x \cdot \cos \varphi + a_y \cdot \sin \varphi \\ a_\varphi &= -a_x \cdot \sin \varphi + a_y \cdot \cos \varphi \end{aligned} \quad (\text{I-238})$$

#### Anmerkung

Die *Rücktransformation*, d. h. der Übergang von den Polarkoordinaten zu den kartesischen Koordinaten, erfolgt über die zu  $\mathbf{A}$  *inverse Matrix*  $\mathbf{A}^{-1}$ . Sie lautet:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (\text{I-239})$$

### ■ Beispiel

In einem kartesischen Koordinatensystem ist das folgende ebene *Geschwindigkeitsfeld* einer Flüssigkeitsströmung gegeben:

$$\vec{v} = \vec{v}(x; y) = \frac{1}{x^2 + y^2} (-y \vec{e}_x + x \vec{e}_y) \quad (x^2 + y^2 \neq 0)$$

Es besitzt im *Polarkoordinatensystem* die Darstellung

$$\vec{v} = \vec{v}(r; \varphi) = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi$$

Die *neuen* Vektorkoordinaten  $v_r$  und  $v_\varphi$  lassen sich dann aus den Gleichungen (I-238) wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} v_r &= v_x \cdot \cos \varphi + v_y \cdot \sin \varphi = \frac{1}{x^2 + y^2} (-y \cdot \cos \varphi + x \cdot \sin \varphi) = \\ &= \frac{1}{r^2} \underbrace{(-r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi)}_0 = 0 \\ v_\varphi &= -v_x \cdot \sin \varphi + v_y \cdot \cos \varphi = \frac{1}{x^2 + y^2} (y \cdot \sin \varphi + x \cdot \cos \varphi) = \\ &= \frac{1}{r^2} (r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi) = \frac{1}{r^2} \cdot r \underbrace{(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}_1 = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Transformationsgleichungen

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi, \quad x^2 + y^2 = r^2$$

verwendet. Das Geschwindigkeitsfeld besitzt somit nur eine *tangentielle* Komponente:

$$\vec{v} = \vec{v}(r; \varphi) = 0 \vec{e}_r + \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi = \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \quad (r > 0)$$

■

### 6.1.3 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Polarkoordinaten

Die Differentialoperationen *Gradient*, *Divergenz* und *Rotation* sowie der *Laplace-Operator* lassen sich auch durch Polarkoordinaten ausdrücken. Sie besitzen dann die folgende Gestalt<sup>10)</sup>:

#### Gradient, Divergenz Rotation und Laplace-Operator in Polarkoordinaten

##### Skalarfeld in Polarkoordinaten

$$\phi = \phi(r; \varphi) \tag{I-240}$$

##### Vektorfeld in Polarkoordinaten

$$\vec{F} = \vec{F}(r; \varphi) = F_r(r; \varphi) \vec{e}_r + F_\varphi(r; \varphi) \vec{e}_\varphi \tag{I-241}$$

<sup>10)</sup> Auf die Herleitung dieser Ausdrücke wollen wir verzichten und verweisen den an Einzelheiten interessierten Leser auf die Spezialliteratur (siehe Literaturverzeichnis).

### Gradient des Skalarfeldes $\phi(r; \varphi)$

$$\text{grad } \phi(r; \varphi) = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \quad (\text{I-242})$$

### Divergenz des Vektorfeldes $\vec{F}(r; \varphi)$

$$\text{div } \vec{F}(r; \varphi) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \quad (\text{I-243})$$

### Rotation des Vektorfeldes $\vec{F}(r; \varphi)$

Es existiert nur eine Komponente *senkrecht* zur  $x$ ,  $y$ -Ebene ( $z$ -Richtung):

$$[\text{rot } \vec{F}(r; \varphi)]_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_\varphi) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \quad (\text{I-244})$$

### Laplace-Operator

$$\Delta \phi(r; \varphi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \quad (\text{I-245})$$

#### Anmerkung

Der in Polarkoordinaten ausgedrückte Laplace-Operator enthält auch eine partielle 1. Ableitung im Gegensatz zur kartesischen Darstellung, wo ausschließlich partielle Ableitungen 2. Ordnung auftreten.

## ■ Beispiele

- (1) Wir berechnen die *Divergenz* des ebenen Ortsvektors  $\vec{r} = r \vec{e}_r$ , der nur eine *Radialkomponente*  $r$  besitzt:

$$\text{div } \vec{r} = \text{div} (r \vec{e}_r) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot r) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2) = \frac{1}{r} \cdot 2r = 2$$

Zum gleichen Ergebnis kamen wir bereits in der *kartesischen* Darstellung (siehe Beispiel (2) aus Abschnitt 5.1.2).

- (2) Wir zeigen, dass das ebene *Geschwindigkeitsfeld*

$$\vec{v} = \vec{v}(x; y) = \frac{1}{x^2 + y^2} (-y \vec{e}_x + x \vec{e}_y) \quad (x^2 + y^2 \neq 0)$$

quellen- *und* wirbelfrei ist. In *Polarkoordinaten* besitzt dieses Vektorfeld die folgende, besonders einfache Darstellung:

$$\vec{v} = \vec{v}(r; \varphi) = \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \quad (r > 0)$$

(siehe hierzu das Beispiel aus dem vorherigen Abschnitt 6.1.2).

Für die *Divergenz* und *Rotation* des Geschwindigkeitsfeldes erhalten wir dann aus den Gleichungen (I-243) und (I-244) mit  $v_r = 0$  und  $v_\varphi = \frac{1}{r}$ :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \left( \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned} [\operatorname{rot} \vec{v}]_z &= \left[ \operatorname{rot} \left( \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \right) \right]_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_\varphi) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{1}{r} \right) = \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (1) = \frac{1}{r} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Wegen  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  und  $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$  handelt es sich in der Tat um ein quellen- und wirbelfreies Geschwindigkeitsfeld.

- (3) Wir bestimmen den *Gradient* des skalaren Feldes  $\phi(r; \varphi) = e^{3r+2\varphi}$ . Die benötigten partiellen Ableitungen 1. Ordnung erhalten wir mit Hilfe der Kettenregel:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 3 \cdot e^{3r+2\varphi}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = 2 \cdot e^{3r+2\varphi}$$

Gleichung (I-242) liefert dann den gesuchten Gradient. Er lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \phi &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi = 3 \cdot e^{3r+2\varphi} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot 2 \cdot e^{3r+2\varphi} \vec{e}_\varphi = \\ &= 3 \cdot e^{3r+2\varphi} \vec{e}_r + \frac{2}{r} \cdot e^{3r+2\varphi} \vec{e}_\varphi = e^{3r+2\varphi} \left( 3 \vec{e}_r + \frac{2}{r} \vec{e}_\varphi \right) \end{aligned}$$

- (4) Das Vektorfeld  $\vec{F}(r) = r^n \vec{e}_r$  mit  $n \in \mathbb{N}^*$  besitzt *Kreissymmetrie* (Radialsymmetrie), d. h. es hängt nur von der Abstandsvariable  $r$ , nicht aber vom Winkel  $\varphi$  ab. Wir zeigen, dass die *Rotation* dieses Feldes verschwindet. Aus Gleichung (I-244) erhalten wir für die  $z$ -Koordinate von  $\operatorname{rot} \vec{F}$  mit  $F_r = r^n$  und  $F_\varphi = 0$ :

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \vec{F})_z &= [\operatorname{rot} (r^n \vec{e}_r)]_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_\varphi) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} = \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot 0) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (r^n) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (0) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (r^n) = \\ &= \frac{1}{r} \cdot 0 - \frac{1}{r} \cdot 0 = 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

Somit gilt  $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$ , das Vektorfeld ist also *wirbelfrei*.

- (5) Wir interessieren uns für diejenigen Lösungen der *Laplace-Gleichung*  $\Delta\phi = 0$ , die *Rotationssymmetrie* besitzen, d. h. nur von der *Abstandskoordinate*  $r$  abhängen:  $\phi = \phi(r)$ . Die *Laplace-Gleichung* lautet in diesem Fall wie folgt (siehe Gleichung I-245):

$$\Delta\phi(r) = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial r} = 0 \quad \left( \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = 0 \right)$$

Diese Differentialgleichung 2. Ordnung können wir auch in der Form

$$\phi''(r) + \frac{1}{r} \cdot \phi'(r) = 0 \quad \left( \phi'(r) = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{d\phi}{dr}; \phi''(r) = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} \right)$$

schreiben (die partiellen Ableitungen fallen hier mit den gewöhnlichen Ableitungen zusammen, da  $\phi = \phi(r)$  nur von der einen Variablen  $r$  abhängt). Wir lösen sie mit Hilfe der *Substitution*

$$u = \phi'(r), \quad u' = \phi''(r)$$

durch „*Trennung der Variablen*“ (siehe Band 2, Kap IV, Abschnitt 2.2):

$$u' + \frac{1}{r} \cdot u = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0$$

*Trennung der Variablen:*

$$\frac{du}{dr} = -\frac{u}{r} \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{dr}{r}$$

*Integration beiderseits:*

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{u} &= - \int \frac{dr}{r} \Rightarrow \ln u = -\ln r + \ln C_1 \Rightarrow \underbrace{\ln u + \ln r}_{\ln(u r)} = \ln C_1 \\ &\Rightarrow \ln(u r) = \ln C_1 \Rightarrow u r = C_1 \Rightarrow u = \frac{C_1}{r} \end{aligned}$$

*Rücksubstitution* und anschließende unbestimmte *Integration* ergeben dann:

$$u = \phi'(r) = \frac{C_1}{r} \Rightarrow$$

$$\phi(r) = \int \phi'(r) dr = \int \frac{C_1}{r} dr = C_1 \cdot \int \frac{1}{r} dr = C_1 \cdot \ln r + C_2$$

Die *rotationssymmetrischen* Lösungen der Laplace-Gleichung sind somit (im *ebe-nen* Fall) durch die *logarithmischen* Funktionen

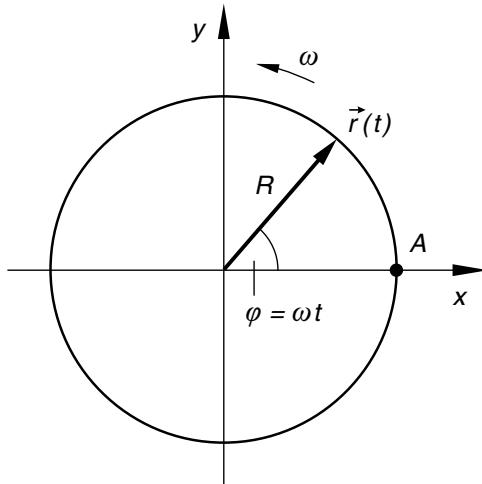
$$\phi(r) = C_1 \cdot \ln r + C_2 \quad (r > 0; C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

gegeben (siehe hierzu auch Beispiel (1) aus Abschnitt 5.3.3). ■

### 6.1.4 Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsvektor bei einer gleichförmigen Kreisbewegung

Ein Masseteilchen bewege sich *gleichförmig*, d. h. mit der *konstanten* Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  auf einer *Kreisbahn* mit dem Radius  $R$  (Bild I-77). Wir beschreiben diese Bahn durch den *zeitabhängigen* Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = R \cdot \cos(\omega t) \vec{e}_x + R \cdot \sin(\omega t) \vec{e}_y = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad (t \geq 0) \quad (\text{I-246})$$



**Bild I-77**

Gleichförmige Kreisbewegung einer Masse aus der Anfangslage  $A = (R; 0)$  heraus (Drehwinkel zur Zeit  $t$ :  $\varphi = \omega t$ )

Durch *Differentiation* nach dem Zeitparameter  $t$  erhalten wir daraus den *Geschwindigkeitsvektor*

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \dot{\vec{r}}(t) = R \begin{pmatrix} -\omega \cdot \sin(\omega t) \\ \omega \cdot \cos(\omega t) \end{pmatrix} = R\omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad (\text{I-247})$$

Das Teilchen besitzt somit die *kartesischen* Geschwindigkeitskomponenten

$$v_x = -R\omega \cdot \sin(\omega t) \quad \text{und} \quad v_y = R\omega \cdot \cos(\omega t) \quad (\text{I-248})$$

Wir interessieren uns jetzt für die Darstellung des Geschwindigkeitsvektors  $\vec{v}$  in *Polar-Koordinaten*, d. h. für eine Darstellung in der Form

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi \quad (\text{I-249})$$

Beim Übergang von den *kartesischen* Koordinaten zu den *Polar-Koordinaten* transformieren sich die kartesischen Geschwindigkeitskomponenten  $v_x$  und  $v_y$  nach Gleichung (I-234) bzw. (I-238) wie folgt:

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad (\text{I-250})$$

Wir setzen noch für  $v_x$  und  $v_y$  die Zeitabhängigkeiten nach Gleichung (I-247) ein und beachten ferner, dass bei einer *gleichförmigen* Kreisbewegung die Beziehung  $\varphi = \omega t$  gilt (siehe hierzu auch Bild I-77):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} R \omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} = \\ &= R \omega \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I-251})$$

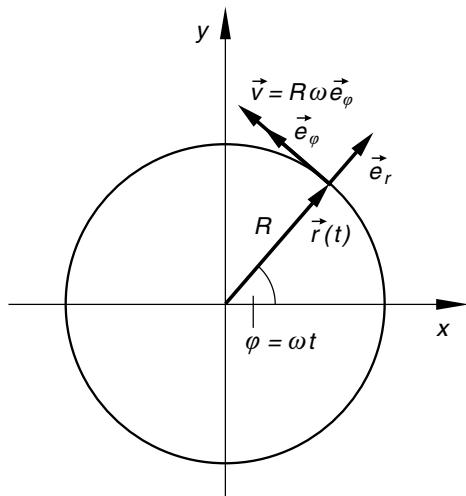
Die Matrizenmultiplikation liefert dann unter Berücksichtigung des „trigonometrischen Pythagoras“  $\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \end{pmatrix} &= R \omega \begin{pmatrix} -\cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t) + \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) \\ \sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) \end{pmatrix} = \\ &= R \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \omega \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I-252})$$

Somit gilt für die gesuchten Geschwindigkeitskomponenten  $v_r = 0$  und  $v_\varphi = R \omega$ .

Das Masseteilchen besitzt also nur eine (konstante) *tangentielle* Geschwindigkeitskomponente  $v_\varphi = R \omega$ , in Übereinstimmung mit unseren Überlegungen in Abschnitt 1.6. Der Geschwindigkeitsvektor lautet daher in der *Polarkoordinatendarstellung* wie folgt (siehe Bild I-78):

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi = 0 \vec{e}_r + R \omega \vec{e}_\varphi = R \omega \vec{e}_\varphi \quad (\text{I-253})$$



**Bild I-78**

Geschwindigkeitsvektor bei einer gleichförmigen Kreisbewegung, dargestellt im Polarkoordinatensystem

## 6.2 Zylinderkoordinaten

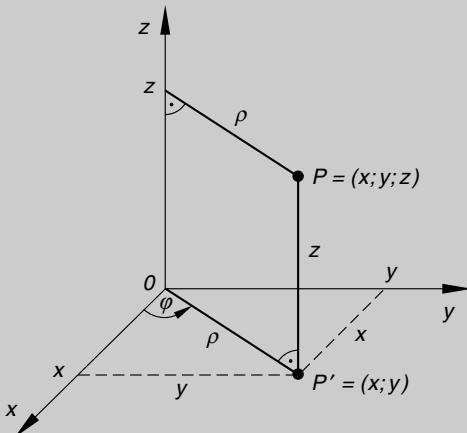
### 6.2.1 Definition und Eigenschaften der Zylinderkoordinaten

Zylinderkoordinaten werden vorzugsweise bei räumlichen Problemen mit Axial- oder Zylindersymmetrie bzw. Rotationssymmetrie verwendet. Wir haben sie bereits in knapper Form in Band 2 (Kap. III, Abschnitt 3.2.2.2) kennengelernt und beschränken uns daher auf eine kurze Zusammenfassung ihrer wichtigsten Eigenschaften.

#### Zylinderkoordinaten und ihre wichtigsten Eigenschaften

Die Zylinderkoordinaten  $\rho$ ,  $\varphi$  und  $z$  eines Raumpunktes  $P$  bestehen aus den Polarkoordinaten  $\rho$  und  $\varphi$  des Projektionspunktes  $P'$  in der  $x$ ,  $y$ -Ebene und der (kartesischen) Höhenkoordinate  $z$  (Bild I-79)<sup>11)</sup>:

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty \quad (\text{I-254})$$



**Bild I-79**  
Zylinderkoordinaten

#### Koordinatenflächen

Koordinatenflächen entstehen, wenn jeweils *eine* der drei Zylinderkoordinaten *festgehalten* wird:

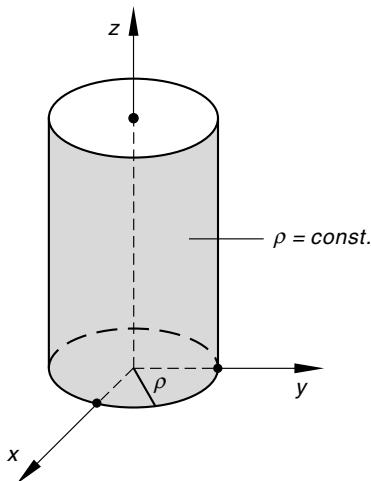
$\rho = \text{const.}$ : Zylindermantel<sup>12)</sup> (siehe Bild I-80)

$\varphi = \text{const.}$ : Halbebene durch die  $z$ -Achse (siehe Bild I-81)

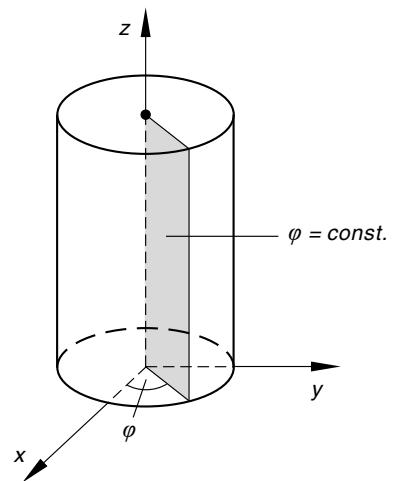
$z = \text{const.}$ : Parallelebene zur  $x$ ,  $y$ -Ebene in der „Höhe“  $z$  (siehe Bild I-82)

<sup>11)</sup> Die Zylinderkoordinate  $\rho$  gibt den *senkrechten* Abstand des Raumpunktes  $P$  von der  $z$ -Achse an und ist *nicht* zu verwechseln mit dem Abstand  $r$  desselben Punktes vom Koordinatenursprung  $O$ , d. h. mit der Länge des Ortsvektors  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ . Um solche Verwechslungen zu vermeiden, verwenden wir *ausschließlich* das Symbol  $\rho$  für die Abstandskoordinate. In der Ebene besteht *kein* Unterschied zwischen  $r$  und  $\rho$ .

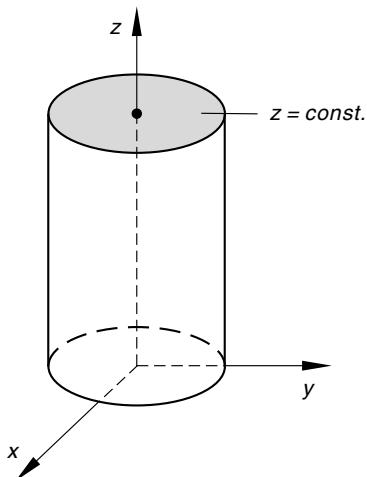
<sup>12)</sup> Dieser Eigenschaft verdanken die Zylinderkoordinaten ihren Namen.

**Bild I-80**

Koordinatenfläche  $\rho = \text{const.}$   
(Zylindermantel)

**Bild I-81**

Koordinatenfläche  $\varphi = \text{const.}$   
(Halbebene, begrenzt durch die  $z$ -Achse)

**Bild I-82**

Koordinatenfläche  $z = \text{const.}$   
(zur  $x$ ,  $y$ -Ebene parallele Ebene)

Die Koordinatenflächen stehen dabei paarweise *senkrecht* aufeinander.

### Koordinatenlinien

*Koordinatenlinien* entstehen, wenn jeweils *zwei* der drei Zylinderkoordinaten *festgehalten* werden. Sie sind somit *Schnittkurven* zweier Koordinatenflächen (siehe Bild I-83):

$\varphi, z = \text{const.}$ : Halbgerade senkrecht zur  $z$ -Achse ( $\rho$ -Linie;  $\rho \geq 0$ )

$\varrho, z = \text{const.}$ : Kreis um die  $z$ -Achse *parallel* zur  $x, y$ -Ebene ( $\varphi$ -Linie)

$\varrho, \varphi = \text{const.}$ : Mantellinie des Zylinders ( $z$ -Linie)

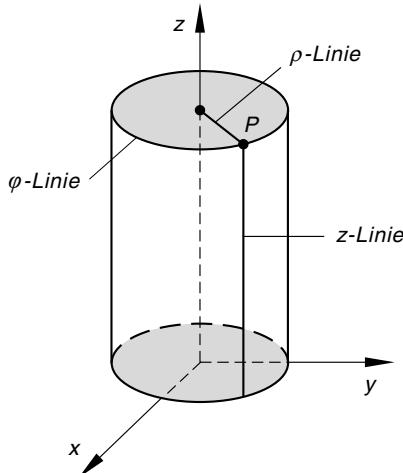


Bild I-83  
Koordinatenlinien  
des Zylinderkoordinatensystems

Die Koordinatenlinien stehen in jedem Punkt paarweise *senkrecht* aufeinander (Ausnahme: Koordinatenursprung). Die Zylinderkoordinaten sind daher (wie die kartesischen Koordinaten) *orthogonale* räumliche Koordinaten.

**Zusammenhang zwischen den Zylinderkoordinaten  $\varrho, \varphi, z$  und den kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  (siehe Bild I-79)**

Zylinderkoordinaten → Kartesische Koordinaten

$$x = \varrho \cdot \cos \varphi, \quad y = \varrho \cdot \sin \varphi, \quad z = z \quad (\text{I-255})$$

Kartesische Koordinaten → Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sin \varphi &= \frac{y}{\varrho}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\varrho}, \quad \tan \varphi = \frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned} \quad (\text{I-256})$$

### Linienelement $ds$

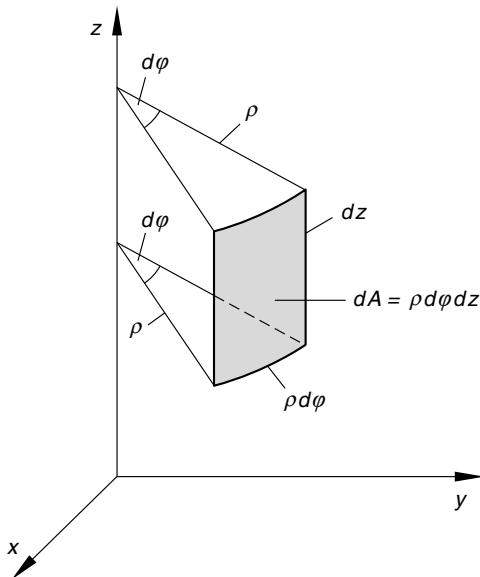
Das **Linienelement** ist die *geradlinige* Verbindung zweier differentiell benachbarter Punkte, die sich in ihren Zylinderkoordinaten der Reihe nach um  $d\varrho$ ,  $d\varphi$  und  $dz$  voneinander unterscheiden. Es besitzt die *Länge*

$$ds = \sqrt{(d\varrho)^2 + \varrho^2(d\varphi)^2 + (dz)^2} \quad (\text{I-257})$$

### Flächenelement $dA$ auf dem Zylindermantel ( $\varrho = \text{const.}$ ; siehe Bild I-84)

Das Flächenelement entspricht einem „Rechteck“ mit den Seiten  $\varrho d\varphi$  und  $dz$  und besitzt den Inhalt

$$dA = \varrho d\varphi dz \quad (\text{I-258})$$

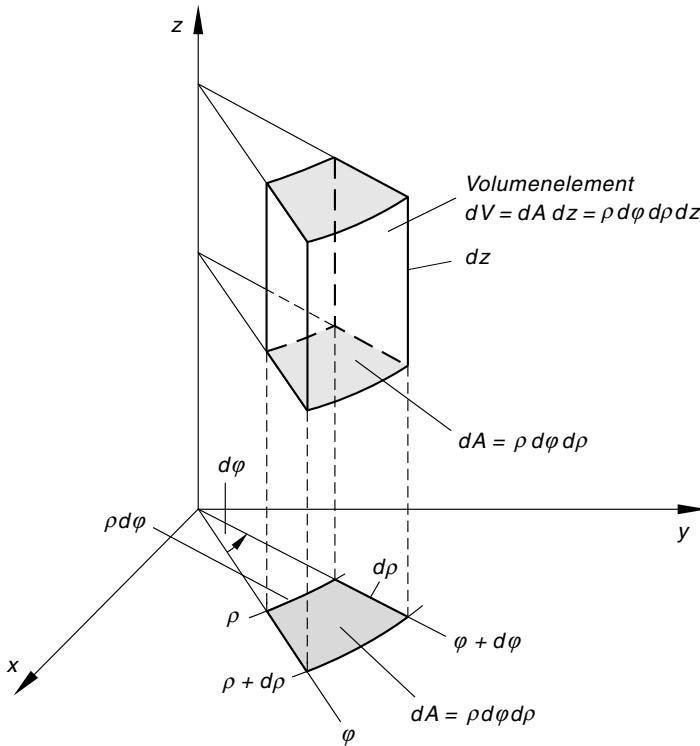


**Bild I-84** Flächenelement  $dA$  auf dem Zylindermantel

**Volumenelement  $dV$  (siehe Bild I-85)**

Das Volumenelement beträgt

$$dV = \rho d\varphi d\rho dz \quad (\text{I-259})$$



**Bild I-85** Volumenelement  $dV$  in Zylinderkoordinaten

### 6.2.2 Darstellung eines Vektors in Zylinderkoordinaten

In einem räumlichen *kartesischen* Koordinatensystem wird ein Vektor  $\vec{a}$  in der Form

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \quad (\text{I-260})$$

dargestellt. Dabei sind  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  und  $\vec{e}_z$  *Einheitsvektoren* in der positiven x-, y- und z-Richtung. Sie bilden die *Basis* für diese Vektdarstellung. Unsere Aufgabe besteht nun darin, den Vektor  $\vec{a}$  in *Zylinderkoordinaten* darzustellen. Dazu benötigen wir zunächst drei geeignete Einheitsvektoren als *Basisvektoren*.

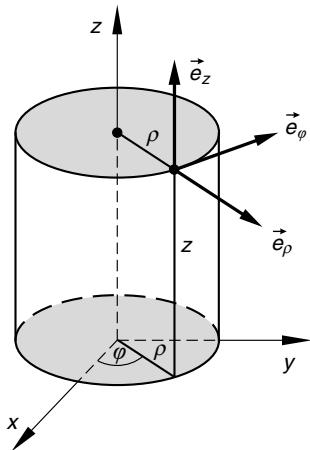
### Basisvektoren in Zylinderkoordinaten

Wir übernehmen die beiden Basisvektoren der *Polarkoordinaten*, also die Einheitsvektoren  $\vec{e}_\varrho$  und  $\vec{e}_\varphi$ , und ergänzen sie durch den *kartesischen* Einheitsvektor  $\vec{e}_z$  (siehe Bild I-86)<sup>13)</sup>:

$\vec{e}_\varrho$ : *Tangenteneinheitsvektor* an die  $\varrho$ -Koordinatenlinie (axial nach *außen* gerichtet)

$\vec{e}_\varphi$ : *Tangenteneinheitsvektor* an die  $\varphi$ -Koordinatenlinie (*tangiert* den Kreis  $\varrho = \text{const.}$  um die  $z$ -Achse in der Höhe  $z$ )

$\vec{e}_z$ : *Tangenteneinheitsvektor* an die  $z$ -Koordinatenlinie (verläuft *parallel* zur  $z$ -Achse, d. h. in der *Mantellinie des Zylinders*)



**Bild I-86**

Basisvektoren im Zylinderkoordinatensystem

Während sich die Einheitsvektoren  $\vec{e}_\varrho$  und  $\vec{e}_\varphi$  im Allgemeinen von Punkt zu Punkt verändern, bleibt der dritte Einheitsvektor  $\vec{e}_z$  unverändert.

Die *Basisvektoren* (Einheitsvektoren)  $\vec{e}_\varrho$ ,  $\vec{e}_\varphi$  und  $\vec{e}_z$  besitzen im *kartesischen* Koordinatensystem dabei die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}\vec{e}_\varrho &= \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{e}_z &= 0 \vec{e}_x + 0 \vec{e}_y + 1 \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (\text{I-261})$$

<sup>13)</sup> Den radial nach außen gerichteten Basisvektor  $\vec{e}_r$  der Polarkoordinaten bezeichnen wir jetzt aus den bereits genannten Gründen mit  $\vec{e}_\varrho$ .

Denn die Basisvektoren  $\vec{e}_\varrho$  und  $\vec{e}_\varphi$  sind *ebene* Vektoren (sie liegen in einer *Ebene* parallel zur  $x$ ,  $y$ -Ebene und sind mit den Basisvektoren des *Polarkoordinatensystems* dieser Ebene identisch), während der Basisvektor  $\vec{e}_z$  auf dieser Ebene *senkrecht* steht. Die Basisvektoren  $\vec{e}_\varrho$ ,  $\vec{e}_\varphi$  und  $\vec{e}_z$  sind daher *orthogonal*, d. h. sie stehen paarweise *senkrecht* aufeinander.

Der Übergang von der *kartesischen* Basis  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_z$  zur neuen Basis  $\vec{e}_\varrho$ ,  $\vec{e}_\varphi$ ,  $\vec{e}_z$  lässt sich wie bei den ebenen Polarkoordinaten durch eine *orthogonale* Transformationsmatrix  $\mathbf{A}$  wie folgt beschreiben:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_\varrho \\ \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} \quad (\text{I-262})$$

Auf die *gleiche* Matrix stößt man, wenn man das räumliche kartesische Koordinatensystem um die  $z$ -Achse *dreht* (Drehwinkel:  $\varphi$ ).

*Umgekehrt* können die alten Basisvektoren  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_z$  aus den neuen Basisvektoren  $\vec{e}_\varrho$ ,  $\vec{e}_\varphi$ ,  $\vec{e}_z$  bestimmt werden. Die *Transformationsmatrix* ist in diesem Fall die zu  $\mathbf{A}$  *inverse* Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^{-1}} \begin{pmatrix} \vec{e}_\varrho \\ \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{e}_\varrho \\ \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} \quad (\text{I-263})$$

### Vektordarstellung in Zylinderkoordinaten

Ein im *kartesischen* Koordinatensystem gegebener Vektor

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \quad (\text{I-264})$$

lässt sich in *Zylinderkoordinaten*, bezogen auf die Basis  $\vec{e}_\varrho$ ,  $\vec{e}_\varphi$ ,  $\vec{e}_z$  wie folgt darstellen:

$$\vec{a} = a_\varrho \vec{e}_\varrho + a_\varphi \vec{e}_\varphi + a_z \vec{e}_z \quad (\text{I-265})$$

Dabei sind  $a_\varrho$ ,  $a_\varphi$  und  $a_z$  der Reihe nach die mit einem Vorzeichen versehenen *Projektionen* von  $\vec{a}$  auf die drei Basisvektoren  $\vec{e}_\varrho$ ,  $\vec{e}_\varphi$  und  $\vec{e}_z$ . Diese (positiven oder negativen) *skalaren* Größen sind die *Vektorkoordinaten* oder *skalaren Vektorkomponenten* des Vektors  $\vec{a}$  im *Zylinderkoordinatensystem*. Sie lassen sich wie folgt aus den *kartesischen* Vektorkoordinaten  $a_x$ ,  $a_y$  und  $a_z$  bestimmen:

$$\begin{aligned} a_\varrho &= a_x \cdot \cos \varphi + a_y \cdot \sin \varphi \\ a_\varphi &= -a_x \cdot \sin \varphi + a_y \cdot \cos \varphi \\ a_z &= a_z \end{aligned} \quad (\text{I-266})$$

Die ersten beiden Transformationsgleichungen haben wir direkt von den *Polarkoordinaten* übernommen, während die dritte Vektorkoordinate  $a_z$  unverändert bleibt (denn sie wurde ja aus der *kartesischen* Darstellung übernommen). Die Transformationsgleichungen (I-266) lassen sich auch in der *Matrizenform* darstellen:

$$\begin{pmatrix} a_\varrho \\ a_\varphi \\ a_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (\text{I-267})$$

Wie bei den Polarkoordinaten gilt auch hier: Die *Vektorkoordinaten* eines beliebigen Vektors  $\vec{a}$  transformieren sich beim Übergang von den kartesischen Koordinaten zu den Zylinderkoordinaten in der *gleichen* Weise wie die *Basisvektoren*.

*Umgekehrt* erfolgt der Übergang von den skalaren Vektorkomponenten  $a_\varrho, a_\varphi, a_z$  des *Zylinderkoordinatensystems* zu den *kartesischen* Komponenten  $a_x, a_y, a_z$  mit Hilfe der zu  $\mathbf{A}$  *inversen Matrix*  $\mathbf{A}^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^{-1}} \begin{pmatrix} a_\varrho \\ a_\varphi \\ a_z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} a_\varrho \\ a_\varphi \\ a_z \end{pmatrix} \quad (\text{I-268})$$

Wir fassen die Ergebnisse wie folgt zusammen:

### Darstellung eines Vektors in Zylinderkoordinaten

#### Basisvektoren $\vec{e}_\varrho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$

In *Zylinderkoordinaten* werden die folgenden *orthogonalen* Einheitsvektoren als *Basisvektoren* verwendet (siehe Bild I-86):

- $\vec{e}_\varrho$ : *Tangenteneinheitsvektor* an die  $\varrho$ -Koordinatenlinie (*axial nach außen gerichtet*)
- $\vec{e}_\varphi$ : *Tangenteneinheitsvektor* an die  $\varphi$ -Koordinatenlinie (*tangentiert den Kreis  $\varrho = \text{const.}$  um die  $z$ -Achse in der Höhe  $z$* )
- $\vec{e}_z$ : *Tangenteneinheitsvektor* an die  $z$ -Koordinatenlinie (*verläuft parallel zur  $z$ -Achse in der Mantelfläche des Zylinders*)

#### Vektordarstellung in der Basis $\vec{e}_\varrho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$

Ein Vektor  $\vec{a}$  lässt sich in diesem Basissystem in der Form

$$\vec{a} = a_\varrho \vec{e}_\varrho + a_\varphi \vec{e}_\varphi + a_z \vec{e}_z \quad (\text{I-269})$$

darstellen.

Die (positiven oder negativen) *skalaren* Größen  $a_\varrho$ ,  $a_\varphi$  und  $a_z$  sind dabei die *Vektorkoordinaten* (*skalaren Vektorkomponenten*) des Vektors  $\vec{a}$ . Sie entstehen durch *Projektion* von  $\vec{a}$  auf die drei Basisvektoren  $\vec{e}_\varrho$ ,  $\vec{e}_\varphi$  und  $\vec{e}_z$ .

### Transformation aus dem kartesischen Koordinatensystem in das Zylinderkoordinatensystem

Beim Übergang von den *kartesischen* Koordinaten zu den *Zylinderkoordinaten* transformieren sich die Basisvektoren  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_z$  sowie die Vektorkoordinaten  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  eines *beliebigen* Vektors  $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$  in *gleicher* Weise. Die *orthogonale* Transformationsmatrix  $\mathbf{A}$  hat dabei die folgende Gestalt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I-270})$$

Der Vektor  $\vec{a}$  besitzt somit im *Zylinderkoordinatensystem* die Vektorkoordinaten

$$\begin{aligned} a_\varrho &= a_x \cdot \cos \varphi + a_y \cdot \sin \varphi \\ a_\varphi &= -a_x \cdot \sin \varphi + a_y \cdot \cos \varphi \\ a_z &= a_z \end{aligned} \quad (\text{I-271})$$

#### Anmerkung

Die *Rücktransformation*, d. h. der Übergang von den *Zylinderkoordinaten* zu den *kartesischen* Koordinaten, erfolgt über die zu  $\mathbf{A}$  *inverse Matrix*  $\mathbf{A}^{-1}$ . Sie lautet:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I-272})$$

### ■ Beispiel

Wir wollen das im *kartesischen* Koordinatensystem gegebene Vektorfeld

$$\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y) + z \vec{e}_z$$

in *Zylinderkoordinaten*, d. h. in der Form

$$\vec{F} = \vec{F}(\varrho; \varphi; z) = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

darstellen ( $x^2 + y^2 \neq 0$ ). Die gesuchten Vektorkoordinaten  $F_\varrho$ ,  $F_\varphi$  und  $F_z$  lassen sich unter Verwendung der Transformationsgleichungen

$$x = \varrho \cdot \cos \varphi, \quad y = \varrho \cdot \sin \varphi, \quad z = z, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \varrho$$

aus den Gleichungen (I-271) wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
F_\varrho &= F_x \cdot \cos \varphi + F_y \cdot \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi) = \\
&= \frac{1}{\varrho} (\varrho \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi + \varrho \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi) = \\
&= \frac{1}{\varrho} \cdot \varrho \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_1 = 1 \cdot 1 = 1 \\
F_\varphi &= -F_x \cdot \sin \varphi + F_y \cdot \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (-x \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi) = \\
&= \frac{1}{\varrho} \underbrace{(-\varrho \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \varrho \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi)}_0 = \frac{1}{\varrho} \cdot 0 = 0 \\
F_z &= z \quad (\text{unverändert})
\end{aligned}$$

Das Vektorfeld besitzt somit in *axialer* Richtung die *konstante* Komponente  $F_\varrho = 1$ , während die *tangentielle* Komponente  $F_\varphi$  verschwindet ( $F_\varphi = 0$ ) und die  $z$ -Komponente *unverändert* aus der kartesischen Darstellung übernommen wird. Der Feldvektor  $\vec{F}$  hängt daher in Zylinderkoordinaten *nur* von der „*Höhenkoordinatez ab. Seine Darstellung lautet:*

$$\vec{F} = \vec{F}(z) = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z = 1 \vec{e}_\varrho + 0 \vec{e}_\varphi + z \vec{e}_z = \vec{e}_\varrho + z \vec{e}_z \quad \blacksquare$$

### 6.2.3 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten

Die Differentialoperationen *Gradient*, *Divergenz* und *Rotation* sowie der *Laplace-Operator* besitzen in *Zylinderkoordinaten* das folgende Aussehen:

#### Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten

##### Skalarfeld in Zylinderkoordinaten

$$\phi = \phi(\varrho; \varphi; z) \quad (\text{I-273})$$

##### Vektorfeld in Zylinderkoordinaten

$$\vec{F} = \vec{F}(\varrho; \varphi; z) = F_\varrho(\varrho; \varphi; z) \vec{e}_\varrho + F_\varphi(\varrho; \varphi; z) \vec{e}_\varphi + F_z(\varrho; \varphi; z) \vec{e}_z \quad (\text{I-274})$$

##### Gradient des Skalarfeldes $\phi(\varrho; \varphi; z)$

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \varrho} \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z \quad (\text{I-275})$$

**Divergenz des Vektorfeldes  $\vec{F}(\varrho; \varphi; z)$** 

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \cdot F_\varrho) + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (\text{I-276})$$

**Rotation des Vektorfeldes  $\vec{F}(\varrho; \varphi; z)$** 

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} = & \left( \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\varrho + \left( \frac{\partial F_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \varrho} \right) \vec{e}_\varphi + \\ & + \frac{1}{\varrho} \left( \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \cdot F_\varphi) - \frac{\partial F_\varrho}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z \end{aligned} \quad (\text{I-277})$$

**Laplace-Operator**

$$\Delta \phi = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (\text{I-278})$$

**Anmerkung**

Der in *Zylinderkoordinaten* ausgedrückte *Laplace-Operator* enthält auch eine *erste Ableitung*, da der in Gleichung (I-278) auftretende 1. Summand (vom Faktor  $1/\varrho$  abgesehen)

$$\frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varrho} \right) = 1 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varrho} + \varrho \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varrho^2} = \frac{\partial \phi}{\partial \varrho} + \varrho \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varrho^2} \quad (\text{I-279})$$

ergibt (im Unterschied zum *kartesischen* Fall, wo ausschließlich partielle Ableitungen 2. Ordnung auftreten).

**Beispiele**

- (1) Das *axialsymmetrische* Vektorfeld  $\vec{F} = \frac{1}{\varrho} \vec{e}_\varrho$  mit  $\varrho \neq 0$  ist quellen- und wirbelfrei. Denn sowohl die *Divergenz* als auch die *Rotation* dieses Feldes verschwindet. Mit  $F_\varrho = \frac{1}{\varrho}$ ,  $F_\varphi = 0$  und  $F_z = 0$  folgt nämlich aus den Gleichungen (I-276) und (I-277):

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \cdot F_\varrho) = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \cdot \frac{1}{\varrho} \right) = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} (1) = \frac{1}{\varrho} \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} = & \frac{\partial F_\varrho}{\partial z} \vec{e}_\varphi - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial F_\varrho}{\partial \varphi} \vec{e}_z = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\varrho} \right) \vec{e}_\varphi - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\varrho} \right) \vec{e}_z = \\ = & 0 \vec{e}_\varphi - \frac{1}{\varrho} \cdot 0 \vec{e}_z = 0 \vec{e}_z = \vec{0} \end{aligned}$$

$\left( \text{die partiellen Ableitungen von } F_\varrho = \frac{1}{\varrho} \text{ nach } \varphi \text{ bzw. } z \text{ verschwinden jeweils} \right)$ .

Wegen  $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$  ist  $\vec{F}$  ein *Gradientenfeld*:  $\vec{F} = \operatorname{grad} \phi$ . Die skalare Funktion  $\phi$  ist somit eine Lösung der *Laplace-Gleichung*, die wir nun bestimmen wollen. Dabei berücksichtigen wir, dass  $\phi$  wegen der *Zylindersymmetrie* nur von  $\varrho$ , nicht aber von  $\varphi$  und  $z$  abhängen kann:  $\phi = \phi(\varrho)$ . Die Laplace-Gleichung mit dem Laplace-Operator (I-278) reduziert sich dann auf:

$$\Delta \phi = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varrho} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varrho} \right) = 0$$

Die (partielle) Ableitung des Produktes  $\varrho \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varrho}$  nach  $\varrho$  kann nur dann verschwinden, wenn das Produkt eine *Konstante* ist:

$$\varrho \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varrho} = \text{const.} = C_1$$

Wir lösen diese einfache *Differentialgleichung 1. Ordnung* nach  $\frac{\partial \phi}{\partial \varrho} = \phi'(\varrho)$  auf und *integrieren* anschließend unbestimmt:

$$\phi'(\varrho) = \frac{C_1}{\varrho} \quad \Rightarrow$$

$$\phi(\varrho) = \int \phi'(\varrho) d\varrho = \int \frac{C_1}{\varrho} d\varrho = C_1 \cdot \int \frac{1}{\varrho} d\varrho = C_1 \cdot \ln \varrho + C_2.$$

Die Konstante  $C_1$  können wir aus der Bedingung  $F_\varrho = \frac{\partial \phi}{\partial \varrho} = \frac{1}{\varrho}$  ermitteln:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \varrho} = \frac{\partial}{\partial \varrho} (C_1 \cdot \ln \varrho + C_2) = C_1 \cdot \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1.$$

Die zweite Konstante dagegen bleibt *unbestimmt*. Das gesuchte skalare Feld lautet damit:

$$\phi = \phi(\varrho) = \ln \varrho + C_2 \quad (\varrho > 0; C_2 \in \mathbb{R})$$

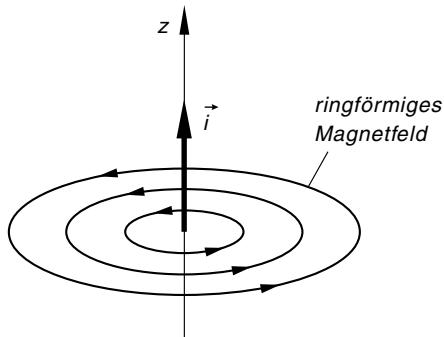
- (2) Ein *homogener* Elektronenstrahl mit der konstanten Stromdichte  $\vec{i} = i_0 \vec{e}_z$  erzeugt ein *ringförmiges* Magnetfeld mit der *magnetischen Feldstärke*

$$\vec{H} = \frac{1}{2} i_0 \varrho \vec{e}_\varphi$$

(die Elektronen fließen in Richtung der positiven  $z$ -Achse, siehe Bild I-87). Wir bestimmen die *Rotation* dieses Feldes.

Mit den Feldkomponenten  $H_\varrho = 0$ ,  $H_\varphi = \frac{1}{2} i_0 \varrho$  und  $H_z = 0$  erhalten wir nach Gleichung (I-277) zunächst:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \cdot H_\varphi) \vec{e}_z$$

**Bild I-87**

Ringförmiges Magnetfeld eines homogenen Elektronenstrahls mit der Stromdichte  $\vec{i}$

Da  $H_\varphi$  von  $z$  unabhängig ist, verschwindet die erste der beiden partiellen Ableitungen auf der rechten Seite der Gleichung. Für die zweite erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \cdot H_\varphi) = \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \cdot \frac{1}{2} i_0 \varrho \right) = \frac{1}{2} i_0 \cdot \varrho + \frac{1}{2} i_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho^2) = \frac{1}{2} i_0 \cdot 2\varrho = i_0 \varrho$$

Somit ist

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \cdot H_\varphi) \vec{e}_z = \frac{1}{\varrho} \cdot i_0 \varrho \vec{e}_z = i_0 \vec{e}_z = \vec{i}$$

Diese Beziehung besitzt allgemeine Gültigkeit und repräsentiert eine der vier *Maxwellschen Grundgleichungen* der Elektrodynamik. ■

## 6.2.4 Zylindersymmetrische Vektorfelder

Ein *zylindersymmetrisches* Vektorfeld vom allgemeinen Typ

$$\vec{F} = f(\varrho) \vec{e}_\varrho \quad (\text{I-280})$$

ist für  $\varrho > 0$  stets *wirbelfrei*. Denn das Feld besitzt nur eine einzige skalare Vektorkomponente in *axialer* Richtung und diese wiederum ist *nur* von  $\varrho$  abhängig:

$$F_\varrho = f(\varrho), \quad F_\varphi = 0, \quad F_z = 0 \quad (\text{I-281})$$

Die *Rotation* dieses Feldes verschwindet daher nach Gleichung (I-277):

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{rot} (f(\varrho) \vec{e}_\varrho) = \vec{0} \quad (\text{I-282})$$

(alle in der Gleichung (I-277) auftretenden partiellen Ableitungen verschwinden).

Dagegen ist ein *zylindersymmetrisches* Vektorfeld im Allgemeinen *nicht* quellenfrei. Denn aus Gleichung (I-276) erhalten wir für die *Divergenz* des Vektorfeldes den folgenden Ausdruck:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div} (f(\varrho) \vec{e}_\varrho) = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \cdot F_\varrho) = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \cdot f(\varrho)) \quad (\text{I-283})$$

Die Divergenz kann nur dann verschwinden, wenn das Produkt  $\varrho \cdot f(\varrho)$  eine Konstante ist, also

$$\varrho \cdot f(\varrho) = \text{const.} \quad \text{oder} \quad f(\varrho) = \frac{\text{const.}}{\varrho} \quad (\text{I-284})$$

gilt. Dieser Sonderfall tritt also genau dann ein, wenn der Betrag des Feldvektors  $\vec{F}$  umgekehrt proportional zum Abstand  $\varrho$  ist.

### Eigenschaften eines zylindersymmetrischen Vektorfeldes

Ein zylindersymmetrisches Vektorfeld vom allgemeinen Typ

$$\vec{F} = f(\varrho) \vec{e}_\varrho \quad (\text{I-285})$$

ist stets *wirbelfrei*, jedoch nur in Sonderfällen auch quellenfrei. Somit gilt für  $\varrho \neq 0$ :

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0} \quad \text{und} \quad \text{div } \vec{F} \neq 0 \quad (\text{I-286})$$

**Sonderfall:** Ist der Betrag des Vektorfeldes *umgekehrt proportional* zum Abstand  $\varrho$ , d. h. gilt

$$f(\varrho) \sim \frac{1}{\varrho} \quad \text{oder} \quad f(\varrho) = \frac{\text{const.}}{\varrho} \quad (\text{I-287})$$

so ist das Vektorfeld zusätzlich auch *quellenfrei*, d. h. die Divergenz des Vektorfeldes *verschwindet* dann.

## ■ Beispiele

- (1) Ein Musterbeispiel für ein wirbel- und quellenfreies Vektorfeld mit *Zylindersymmetrie* liefert das *elektrische Feld* in der Umgebung eines homogen geladenen Zylinders (Bild I-88 zeigt einen positiv geladenen Zylinder im Querschnitt).

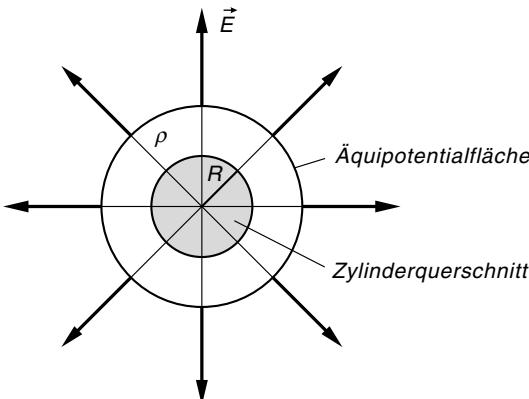


Bild I-88

Für die *elektrische Feldstärke*  $\vec{E}$  gilt nämlich<sup>14)</sup>:

$$\vec{E} = \vec{E}(\varrho) = \frac{\varrho_{\text{el}} R^2}{2 \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\varrho} \vec{e}_\varrho \quad (\varrho \geq R)$$

( $\varrho_{\text{el}} > 0$ ; Ladungsdichte;  $R$ : Zylinderradius;  $\varepsilon_0$ : elektrische Feldkonstante). Das elektrische Feld ist wegen der Zylindersymmetrie *wirbelfrei* und wegen

$$|\vec{E}| = E \sim 1/\varrho$$

auch *quellenfrei* (die Bedingung I-287 ist erfüllt).

## (2) Das zylindersymmetrische Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v}(\varrho) = \varrho \vec{e}_\varrho \quad (v_\varrho = \varrho, v_\varphi = v_z = 0)$$

ist *wirbelfrei*, jedoch *nicht quellenfrei*, da die Divergenz des Feldes nach Gleichung (I-276) nicht verschwindet:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \cdot v_\varrho) = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho \cdot \varrho) = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho^2) = \frac{1}{\varrho} \cdot 2\varrho = \\ &= 2 \neq 0 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

### 6.2.5 Ein Anwendungsbeispiel: Geschwindigkeitsvektor eines Massenpunktes in Zylinderkoordinaten

Ein Massenpunkt bewege sich auf einer *räumlichen* Bahnkurve mit dem *zeitabhängigen* Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{e}_x + y(t) \vec{e}_y + z(t) \vec{e}_z = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \quad (\text{I-288})$$

Der zugehörige *Geschwindigkeitsvektor*

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z \quad (\text{I-289})$$

mit den *kartesischen* Geschwindigkeitskoordinaten  $v_x = \dot{x}$ ,  $v_y = \dot{y}$  und  $v_z = \dot{z}$  soll nun in *Zylinderkoordinaten*, d. h. in der Form

$$\vec{v} = v_\varrho \vec{e}_\varrho + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z \quad (\text{I-290})$$

dargestellt werden.

Beim Übergang zu den Zylinderkoordinaten gelten die Transformationsgleichungen (I-271). Sie lauten hier:

$$\begin{aligned} v_\varrho &= v_x \cdot \cos \varphi + v_y \cdot \sin \varphi = \dot{x} \cdot \cos \varphi + \dot{y} \cdot \sin \varphi \\ v_\varphi &= -v_x \cdot \sin \varphi + v_y \cdot \cos \varphi = -\dot{x} \cdot \sin \varphi + \dot{y} \cdot \cos \varphi \\ v_z &= v_z = \dot{z} \end{aligned} \quad (\text{I-291})$$

<sup>14)</sup> Siehe hierzu auch das Anwendungsbeispiel in Abschnitt 5.1.3.

Wir drücken nun  $x$  und  $y$  durch die Zylinderkoordinaten  $\varrho$  und  $\varphi$  aus und differenzieren anschließend nach der Zeit  $t$  (unter Verwendung von Produkt- und Kettenregel)<sup>15)</sup>:

$$\begin{aligned} x = \varrho \cdot \cos \varphi \rightarrow \dot{x} &= \dot{\varrho} \cdot \cos \varphi + \varrho \cdot (-\sin \varphi) \cdot \dot{\varphi} = \\ &= \dot{\varrho} \cdot \cos \varphi - \varrho \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \end{aligned} \quad (\text{I-292})$$

$$\begin{aligned} y = \varrho \cdot \sin \varphi \rightarrow \dot{y} &= \dot{\varrho} \cdot \sin \varphi + \varrho \cdot (\cos \varphi) \cdot \dot{\varphi} = \\ &= \dot{\varrho} \cdot \sin \varphi + \varrho \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \end{aligned} \quad (\text{I-293})$$

Damit nehmen die gesuchten Geschwindigkeitskomponenten  $v_\varrho$  und  $v_\varphi$  die folgende Gestalt an (die Geschwindigkeitskomponente  $v_z$  ist in beiden Koordinatensystemen gleich:  $v_z = \dot{z}$ ):

$$\begin{aligned} v_\varrho &= \dot{x} \cdot \cos \varphi + \dot{y} \cdot \sin \varphi = \\ &= (\dot{\varrho} \cdot \cos \varphi - \varrho \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi) \cdot \cos \varphi + (\dot{\varrho} \cdot \sin \varphi + \varrho \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi) \cdot \sin \varphi = \\ &= \dot{\varrho} \cdot \cos^2 \varphi - \varrho \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \dot{\varrho} \cdot \sin^2 \varphi + \varrho \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi = \\ &= \dot{\varrho} \cdot \cos^2 \varphi + \dot{\varrho} \cdot \sin^2 \varphi = \dot{\varrho} \cdot \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_1 = \dot{\varrho} \end{aligned} \quad (\text{I-294})$$

$$\begin{aligned} v_\varphi &= -\dot{x} \cdot \sin \varphi + \dot{y} \cdot \cos \varphi = \\ &= -(\dot{\varrho} \cdot \cos \varphi - \varrho \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi) \cdot \sin \varphi + (\dot{\varrho} \cdot \sin \varphi + \varrho \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi) \cdot \cos \varphi = \\ &= -\dot{\varrho} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \varrho \dot{\varphi} \cdot \sin^2 \varphi + \dot{\varrho} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \varrho \dot{\varphi} \cdot \cos^2 \varphi = \\ &= \varrho \dot{\varphi} \cdot \sin^2 \varphi + \varrho \dot{\varphi} \cdot \cos^2 \varphi = \varrho \dot{\varphi} \underbrace{(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}_1 = \varrho \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (\text{I-295})$$

Somit ist

$$\vec{v} = v_\varrho \vec{e}_\varrho + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z = \dot{\varrho} \vec{e}_\varrho + (\varrho \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z \quad (\text{I-296})$$

der gesuchte *Geschwindigkeitsvektor* in Zylinderkoordinaten. Sein *Betrag* ist

$$v = \sqrt{v_\varrho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{\varrho}^2 + (\varrho \dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2} \quad (\text{I-297})$$

**Konkretes Beispiel:** Ein Massenpunkt bewege sich auf einer *Schraubenlinie* mit dem zeitabhängigen Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = R \cdot \cos(\omega t) \vec{e}_x + R \cdot \sin(\omega t) \vec{e}_y + c t \vec{e}_z \quad (t \geq 0) \quad (\text{I-298})$$

( $R > 0$ ;  $\omega > 0$ ;  $c > 0$ ; siehe Bild I-89). Mit

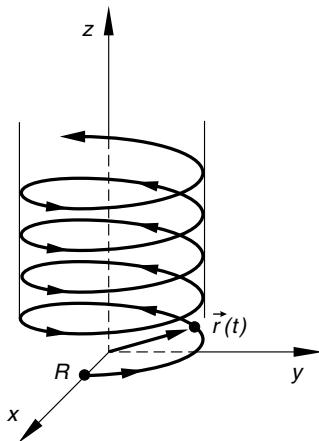
$$x = R \cdot \cos(\omega t), \quad y = R \cdot \sin(\omega t), \quad z = c t \quad (\text{I-299})$$

<sup>15)</sup> Die Zylinderkoordinaten sind ebenso wie die kartesischen Koordinaten *zeitabhängig*.

erhalten wir aus den Transformationsgleichungen (I-256) die zugehörigen *zeitabhängigen Zylinderkoordinaten*:

$$\begin{aligned}\varrho &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{R^2 \cdot \cos^2(\omega t) + R^2 \cdot \sin^2(\omega t)} = \\ &= \sqrt{R^2 \underbrace{[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)]}_1} = \sqrt{R^2} = R = \text{const.} \\ \tan \varphi &= \frac{y}{x} = \frac{R \cdot \sin(\omega t)}{R \cdot \cos(\omega t)} = \tan(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \varphi = \omega t\end{aligned}\tag{I-300}$$

$$z = c t$$



**Bild I-89**

Bewegung eines Massenpunktes auf einer Schraubenlinie  
(Anfangslage:  $x = R$ ,  $y = z = 0$ )

Die benötigten *Ableitungen* der Zylinderkoordinaten

$$\varrho = R, \quad \varphi = \omega t, \quad z = c t \tag{I-301}$$

nach der *Zeit*  $t$  lauten dann:

$$\dot{\varrho} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{z} = c \tag{I-302}$$

Damit erhalten wir nach Gleichung (I-296) den folgenden *Geschwindigkeitsvektor*, ausgedrückt in *Zylinderkoordinaten*:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{\varrho} \vec{e}_\varrho + (\varrho \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z = 0 \vec{e}_\varrho + (R \omega) \vec{e}_\varphi + c \vec{e}_z = \\ &= (R \omega) \vec{e}_\varphi + c \vec{e}_z\end{aligned}\tag{I-303}$$

Der *Betrag* der Geschwindigkeit ist *konstant*, wir erhalten das bereits aus Abschnitt 1.3 (Beispiel (2)) bekannte Ergebnis:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{\varrho}^2 + (\varrho \dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{(R \omega)^2 + c^2} = \sqrt{R^2 \omega^2 + c^2} \tag{I-304}$$

## 6.3 Kugelkoordinaten

### 6.3.1 Definition und Eigenschaften der Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten werden vorzugsweise bei räumlichen Problemen mit *Kugel-* oder *Radialsymmetrie* verwendet. Sie bestehen aus einer *Abstandscoordinate*  $r$  und zwei *Winkelkoordinaten*  $\vartheta$  und  $\varphi$  (Bild I-90).

#### Kugelkoordinaten und ihre wichtigsten Eigenschaften

Die Kugelkoordinaten  $r$ ,  $\vartheta$  und  $\varphi$  eines Raumpunktes  $P$  bestehen aus einer *Abstandscoordinate*  $r$  und zwei *Winkelkoordinaten*  $\vartheta$  und  $\varphi$  (Bild I-90):

$r$ : Länge des Ortsvektors  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$  ( $r \geq 0$ )

$\vartheta$ : Winkel zwischen dem Ortsvektor  $\vec{r}$  und der *positiven z-Achse* ( $0 \leq \vartheta \leq \pi$ )

$\varphi$ : Winkel zwischen der Projektion des Ortsvektors  $\vec{r}$  auf die  $x$ ,  $y$ -Ebene und der *positiven x-Achse* ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ )

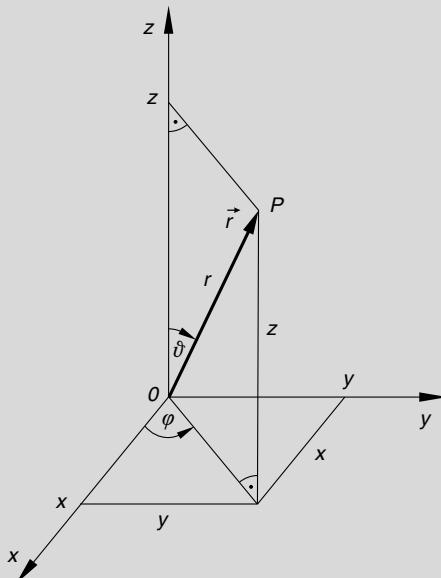


Bild I-90  
Kugelkoordinaten

#### Koordinatenflächen

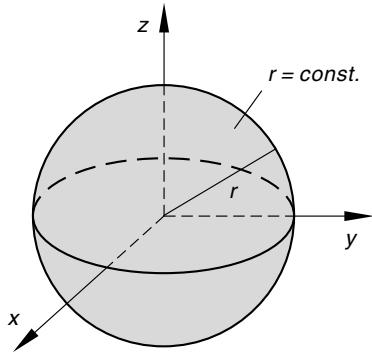
Koordinatenflächen entstehen, wenn jeweils *eine* der drei Kugelkoordinaten *festgehalten* wird:

$r = \text{const.}$ : Kugeloberfläche (Kugelschale; siehe Bild I-91)<sup>16)</sup>

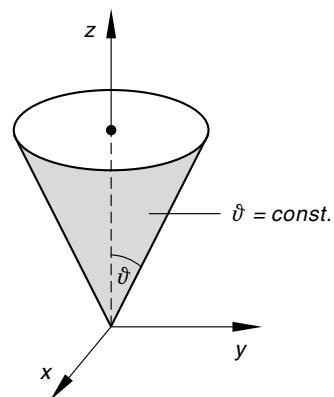
$\vartheta = \text{const.}$ : Mantelfläche eines Kegels (Kegelspitze im Koordinatenursprung. Öffnungswinkel:  $2\vartheta$ ; siehe Bild I-92)

$\varphi = \text{const.}$ : Halbebene durch die  $z$ -Achse (siehe Bild I-93)

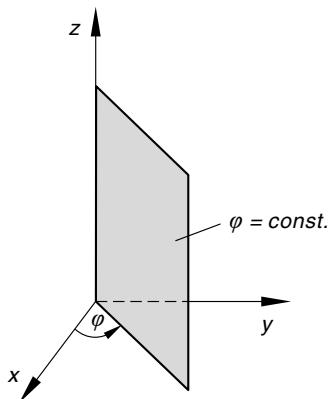
<sup>16)</sup> Dieser Eigenschaft verdanken die Kugelkoordinaten ihren Namen.

**Bild I-91**

Koordinatenfläche  $r = \text{const.}$   
(Kugelschale)

**Bild I-92**

Koordinatenfläche  $\vartheta = \text{const.}$   
(Kegelmantel)

**Bild I-93**

Koordinatenfläche  $\varphi = \text{const.}$   
(Halbebene, begrenzt durch die  $z$ -Achse)

Die Koordinatenflächen stehen in jedem Punkt paarweise *senkrecht* aufeinander.

### Koordinatenlinien

Koordinatenlinien entstehen, wenn jeweils *zwei* der drei Kugelkoordinaten *festgehalten* werden. Sie sind somit *Schnittkurven* zweier Koordinatenflächen:

$\vartheta, \varphi = \text{const.}$ : Radialer Strahl vorn Koordinatenursprung nach *außen* ( $r$ -Linie; siehe Bild I-94)

$r, \vartheta = \text{const.}$ : Breitenkreis mit dem Radius  $r \cdot \sin \vartheta$  ( $\varphi$ -Linie; siehe Bild I-95)

$r, \varphi = \text{const.}$ : Längenkreis ( $\vartheta$ -Linie; siehe Bild I-96)

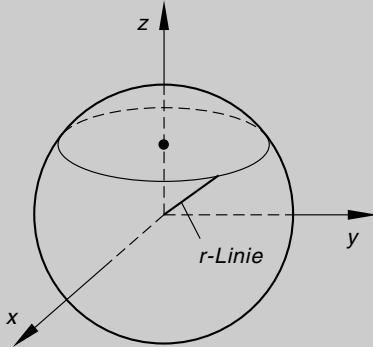


Bild I-94

$r$ -Koordinatenlinie (radialer Strahl)

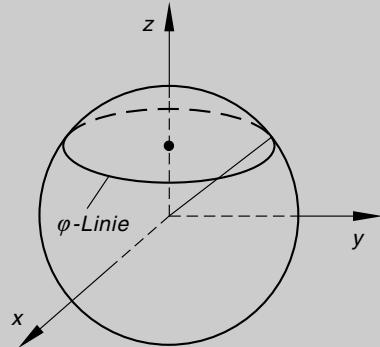


Bild I-95

$\varphi$ -Koordinatenlinie (Breitenkreis)

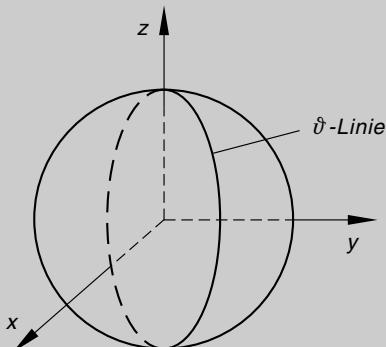


Bild I-96

$\vartheta$ -Koordinatenlinie (Längenkreis)

Die Koordinatenlinien stehen in jedem Punkt paarweise *senkrecht* aufeinander. Die Kugelkoordinaten sind daher (wie die kartesischen Koordinaten und die Zylinderkoordinaten) *orthogonale* räumliche Koordinaten.

**Zusammenhang zwischen den Kugelkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  und den kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  (siehe Bild I-90)**

Kugelkoordinaten → Kartesische Koordinaten

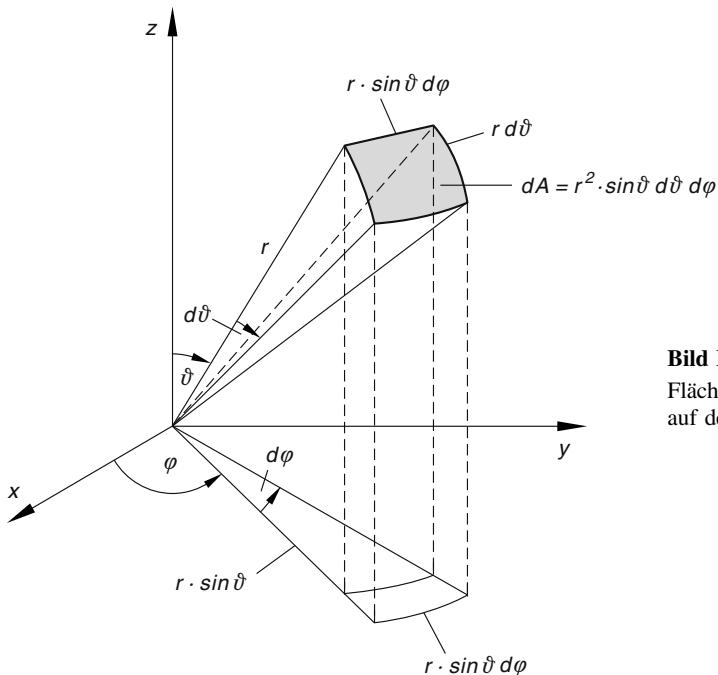
$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \\ z &= r \cdot \cos \vartheta \end{aligned} \quad (\text{I-305})$$

Kartesische Koordinaten → Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \vartheta &= \arccos\left(\frac{z}{r}\right) = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ \sin \vartheta &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \tan \vartheta = \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (\text{I-306})$$

**Flächenelement  $dA$  auf der Kugeloberfläche ( $r = \text{const.}$ ; siehe Bild I-97)**

$$dA = r^2 \cdot \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \quad (\text{I-307})$$



**Bild I-97**  
Flächenelement  $dA$   
auf der Kugeloberfläche

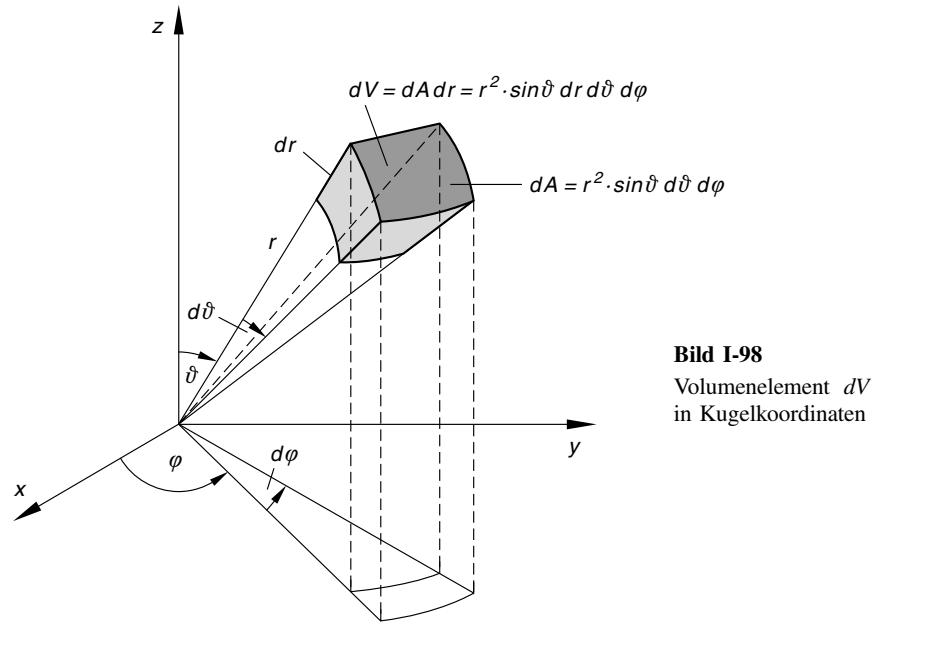
### Linienelement $ds$

Das *Linienelement* ist die *geradlinige* Verbindung zweier differentiell benachbarter Punkte, die sich in ihren Kugelkoordinaten um  $dr, d\vartheta, d\varphi$  voneinander unterscheiden. Es besitzt die *Länge*

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\vartheta)^2 + r^2 \cdot \sin^2 \vartheta (d\varphi)^2} \quad (\text{I-308})$$

### Volumenelement $dV$ (siehe Bild I-98)

$$dV = dA dr = r^2 \cdot \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi \quad (\text{I-309})$$



### Anmerkungen

- (1) Die Kugelkoordinaten werden auch als *räumliche Polarkoordinaten* bezeichnet.
- (2) Für die beiden Winkelkoordinaten sind auch folgende Bezeichnungen üblich:

$\vartheta$ : Breitenkoordinate       $\varphi$ : Längenkoordinate

- (3) Die durch  $\vartheta = 90^\circ$  bzw.  $\vartheta = \pi/2$  festgelegte  $x, y$ -Ebene heißt *Äquatorebene*.

### 6.3.2 Darstellung eines Vektors in Kugelkoordinaten

Um einen beliebigen Vektor  $\vec{a}$  in *Kugelkoordinaten* darstellen zu können, benötigen wir drei geeignete Einheitsvektoren als *Basis* für die gesuchte Darstellung.

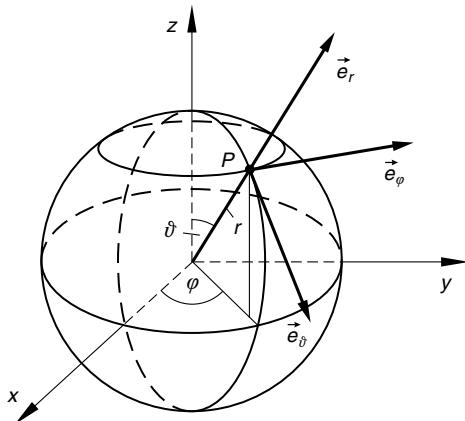
#### Basisvektoren in Kugelkoordinaten (Bild I-99)

Wir wählen als *Basisvektoren* die *Tangenteneinheitsvektoren* der drei Koordinatenlinien:

$\vec{e}_r$ : *Tangenteneinheitsvektor* an die  $r$ -Koordinatenlinie (*radial* nach *außen* gerichtet, steht *senkrecht* auf der Kugeloberfläche  $r = \text{const.}$ )

$\vec{e}_\vartheta$ : *Tangenteneinheitsvektor* an den *Längenkreis*, d. h. an die  $\vartheta$ -Koordinatenlinie (steht *senkrecht* auf der Koordinatenfläche  $\vartheta = \text{const.}$ , d. h. auf dem Kegelmantel mit dem Öffnungswinkel  $2\vartheta$ )

$\vec{e}_\varphi$ : *Tangenteneinheitsvektor* an den *Breitenkreis*, d. h. an die  $\varphi$ -Koordinatenlinie (steht *senkrecht* auf der Koordinatenfläche  $\varphi = \text{const.}$ )



**Bild I-99**  
Basisvektoren im Kugelkoordinatensystem

Die Lage der drei Basisvektoren *verändert* sich dabei von Punkt zu Punkt. Sie besitzen im *kartesischen* Koordinatensystem die folgende Darstellung (ohne Beweis):

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \vartheta \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \\ \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \\ \vec{e}_\vartheta &= \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \vartheta \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \\ \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I-310})\end{aligned}$$

Wir können den Übergang von der *kartesischen* Basis  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  zur *neuen* Basis  $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$  auch durch eine *orthogonale* Transformationsmatrix  $\mathbf{A}$  wie folgt beschreiben:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\vartheta \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi & \sin \vartheta \cdot \sin \varphi & \cos \vartheta \\ \cos \vartheta \cdot \cos \varphi & \cos \vartheta \cdot \sin \varphi & -\sin \vartheta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} \quad (\text{I-311})$$

Umgekehrt lassen sich die *alten* Einheitsvektoren aus den *neuen* Einheitsvektoren mittels der zu  $\mathbf{A}$  *inversen* Matrix  $\mathbf{A}^{-1}$  bestimmen:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi & \cos \vartheta \cdot \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \vartheta \cdot \sin \varphi & \cos \vartheta \cdot \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^{-1}} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\vartheta \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\vartheta \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} \quad (\text{I-312})$$

### Vektordarstellung in Kugelkoordinaten

Ein im *kartesischen* Koordinatensystem gegebener Vektor

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \quad (\text{I-313})$$

lässt sich in *Kugelkoordinaten*, bezogen auf die Basis  $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$ , wie folgt darstellen:

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\vartheta \vec{e}_\vartheta + a_\varphi \vec{e}_\varphi \quad (\text{I-314})$$

Dabei sind  $a_r, a_\vartheta$  und  $a_\varphi$  der Reihe nach die mit einem *Vorzeichen* versehenen *Projektionen* des Vektors  $\vec{a}$  auf die drei Basisvektoren  $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta$  und  $\vec{e}_\varphi$ . Diese (positiven oder negativen) *skalaren* Größen sind die *Vektorkoordinaten* oder *skalaren Vektorkomponenten* des Vektors  $\vec{a}$  im *Kugelkoordinatensystem*. Sie lassen sich wie folgt aus den *kartesischen* Vektorkoordinaten  $a_x, a_y$  und  $a_z$  bestimmen:

$$\begin{aligned} a_r &= a_x \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi + a_y \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + a_z \cdot \cos \vartheta \\ a_\vartheta &= a_x \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi + a_y \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi - a_z \cdot \sin \vartheta \\ a_\varphi &= -a_x \cdot \sin \varphi + a_y \cdot \cos \varphi \end{aligned} \quad (\text{I-315})$$

Diese Transformationsgleichungen lauten in der *Matrizenform*:

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\vartheta \\ a_\varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi & \sin \vartheta \cdot \sin \varphi & \cos \vartheta \\ \cos \vartheta \cdot \cos \varphi & \cos \vartheta \cdot \sin \varphi & -\sin \vartheta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (\text{I-316})$$

Auch für die Kugelkoordinaten gilt: Die *Vektorkoordinaten* eines beliebigen Vektors  $\vec{a}$  transformieren sich beim Übergang von den kartesischen Koordinaten zu den Kugelkoordinaten in der *gleichen* Weise wie die *Basisvektoren*.

Umgekehrt erfolgt der Übergang von der Darstellung in Kugelkoordinaten zur kartesischen Darstellung mit Hilfe der zu  $\mathbf{A}$  *inversen Matrix*  $\mathbf{A}^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi & \cos \vartheta \cdot \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \vartheta \cdot \sin \varphi & \cos \vartheta \cdot \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^{-1}} \begin{pmatrix} a_r \\ a_\vartheta \\ a_\varphi \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} a_r \\ a_\vartheta \\ a_\varphi \end{pmatrix} \quad (\text{I-317})$$

Wir fassen die wichtigsten Ergebnisse zusammen:

### Darstellung eines Vektors in Kugelkoordinaten

#### Basisvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$

In Kugelkoordinaten werden die folgenden *orthogonalen* Einheitsvektoren als Basisvektoren verwendet (siehe Bild I-99):

- $\vec{e}_r$ : Tangenteneinheitsvektor an die  $r$ -Koordinatenlinie (*radial nach außen gerichtet*)
- $\vec{e}_\vartheta$ : Tangenteneinheitsvektor an die  $\vartheta$ -Koordinatenlinie, d. h. an den *Längenkreis*
- $\vec{e}_\varphi$ : Tangenteneinheitsvektor an die  $\varphi$ -Koordinatenlinie, d. h. an den *Breitenkreis*

#### Vektordarstellung in der Basis $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$

Ein Vektor  $\vec{a}$  lässt sich in diesem Basissystem in der Form

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\vartheta \vec{e}_\vartheta + a_\varphi \vec{e}_\varphi \quad (\text{I-318})$$

darstellen. Die (positiven oder negativen) *skalaren* Größen  $a_r$ ,  $a_\vartheta$  und  $a_\varphi$  sind die Vektorkoordinaten (*skalaren Vektorkomponenten*) des Vektors  $\vec{a}$ . Sie entstehen durch *Projektion* von  $\vec{a}$  auf die drei Basisvektoren  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\vartheta$  und  $\vec{e}_\varphi$ .

### Transformation aus dem kartesischen Koordinatensystem in das Kugelkoordinatensystem

Beim Übergang von den *kartesischen* Koordinaten zu den *Kugelkoordinaten* transformieren sich die Basisvektoren  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  sowie die Vektorkoordinaten  $a_x, a_y, a_z$  eines *beliebigen* Vektors  $\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$  in *gleicher* Weise. Die *orthogonale* Transformationsmatrix  $\mathbf{A}$  besitzt dabei die folgende Gestalt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi & \sin \vartheta \cdot \sin \varphi & \cos \vartheta \\ \cos \vartheta \cdot \cos \varphi & \cos \vartheta \cdot \sin \varphi & -\sin \vartheta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I-319})$$

Der Vektor  $\vec{a}$  besitzt somit im Kugelkoordinatensystem die *Vektorkoordinaten*

$$\begin{aligned} a_r &= a_x \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi + a_y \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + a_z \cdot \cos \vartheta \\ a_\vartheta &= a_x \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi + a_y \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi - a_z \cdot \sin \vartheta \\ a_\varphi &= -a_x \cdot \sin \varphi + a_y \cdot \cos \varphi \end{aligned} \quad (\text{I-320})$$

*Anmerkung*

Die *Rücktransformation*, d. h. der Übergang von den *Kugelkoordinaten* zu den *kartesischen* Koordinaten, erfolgt über die zu  $\mathbf{A}$  *inverse Matrix*  $\mathbf{A}^{-1}$ . Sie lautet:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi & \cos \vartheta \cdot \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \vartheta \cdot \sin \varphi & \cos \vartheta \cdot \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I-321})$$

## ■ Beispiele

- (1) Wie lautet die Darstellung des Feldvektors

$$\vec{F} = \vec{F}(x; y; z) = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + \vec{e}_z$$

in *Kugelkoordinaten*?

*Lösung:* Der gegebene Feldvektor soll in der Form

$$\vec{F} = \vec{F}(r; \vartheta, \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

dargestellt werden. Die gesuchten Vektorkoordinaten  $F_r$ ,  $F_\vartheta$  und  $F_\varphi$  lassen sich dann unter Verwendung der Transformationsgleichungen

$$x = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi, \quad z = r \cdot \cos \vartheta$$

aus den Gleichungen (I-320) wie folgt berechnen (mit  $F_x = x$ ,  $F_y = y$  und  $F_z = 1$ ):

$$\begin{aligned} F_r &= F_x \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi + F_y \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + F_z \cdot \cos \vartheta = \\ &= x \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + 1 \cdot \cos \vartheta = \\ &= r \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \varphi + r \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi + \cos \vartheta = \\ &= r \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_1 + \cos \vartheta = r \cdot \sin^2 \vartheta + \cos \vartheta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_\vartheta &= F_x \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi + F_y \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi - F_z \cdot \sin \vartheta = \\ &= x \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi + y \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi - 1 \cdot \sin \vartheta = \\ &= r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \cos^2 \varphi + r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \sin^2 \varphi - \sin \vartheta = \\ &= r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_1 - \sin \vartheta = \\ &= r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta - \sin \vartheta = (r \cdot \cos \vartheta - 1) \cdot \sin \vartheta \end{aligned}$$

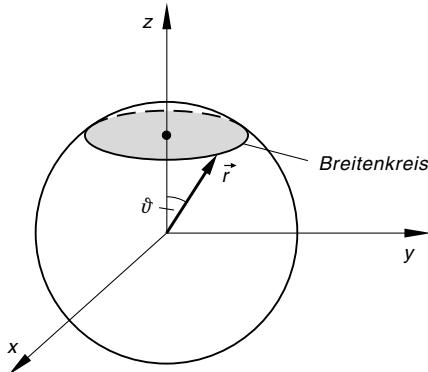
$$\begin{aligned} F_\varphi &= -F_x \cdot \sin \varphi + F_y \cdot \cos \varphi = -x \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi = \\ &= -r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = 0 \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi = \\ &= (r \cdot \sin^2 \vartheta + \cos \vartheta) \vec{e}_r + (r \cdot \cos \vartheta - 1) \cdot \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta + 0 \vec{e}_\varphi = \\ &= (r \cdot \sin^2 \vartheta + \cos \vartheta) \vec{e}_r + (r \cdot \cos \vartheta - 1) \cdot \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta\end{aligned}$$

die gesuchte Darstellung des Feldvektors in *Kugelkoordinaten*. Man beachte, dass diese Darstellung *unabhängig* vom Winkel  $\varphi$  ist und *keine* Komponente in Richtung des Breitenkreises besitzt.

- (2) Ein Massenpunkt bewege sich auf dem *Breitenkreis* einer Kugel mit dem Radius  $r$  (Bild I-100). Die Bahn ist dann durch Angabe der Breitenkoordinate  $\vartheta$  eindeutig festgelegt. Wir interessieren uns nun für den *Geschwindigkeitsvektor*  $\vec{v}$  des Teilchens, ausgedrückt in *Kugelkoordinaten*.



**Bild I-100**

Zur Bewegung eines Massenpunktes auf dem Breitenkreis  $\vartheta = \text{const.}$

Dabei gehen wir zunächst von *kartesischen* Koordinaten aus. *Ortsvektor*  $\vec{r}$  und *Geschwindigkeitsvektor*  $\vec{v}$  lauten dann (beide sind *zeitabhängig*):

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}(t) = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z \\ \vec{v} &= \vec{v}(t) = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z\end{aligned}$$

Der *Geschwindigkeitsvektor*  $\vec{v}$  besitzt in *Kugelkoordinaten* die Darstellung

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\vartheta \vec{e}_\vartheta + v_\varphi \vec{e}_\varphi$$

Zwischen den „alten“ und den „neuen“ Geschwindigkeitskomponenten bestehen dabei nach den Gleichungen (I-320) die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}v_r &= v_x \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi + v_y \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + v_z \cdot \cos \vartheta = \\ &= \dot{x} \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi + \dot{y} \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + \dot{z} \cdot \cos \vartheta \\ v_\vartheta &= v_x \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi + v_y \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi - v_z \cdot \sin \vartheta = \\ &= \dot{x} \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi + \dot{y} \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi - \dot{z} \cdot \sin \vartheta \\ v_\varphi &= -v_x \cdot \sin \varphi + v_y \cdot \cos \varphi = -\dot{x} \cdot \sin \varphi + \dot{y} \cdot \cos \varphi\end{aligned}$$

Wir drücken jetzt die kartesischen Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  mittels der Transformationsgleichungen (I-305) durch die Kugelkoordinaten  $r$ ,  $\vartheta$  und  $\varphi$  aus und *differenzieren* die Gleichungen anschließend nach der Zeit  $t$ . Da auf dem *Breitenkreis*  $r$  und  $\vartheta$  *feste* Größen sind, ist  $\dot{r} = 0$  und  $\dot{\vartheta} = 0$ . Bei den Ableitungen der Funktionen  $\cos \varphi$  und  $\sin \varphi$  ist zu beachten, dass die Winkelkoordinate  $\varphi$  *zeitabhängig* ist, d. h.  $\varphi = \varphi(t)$  gilt. Die *Kettenregel* liefert dann:

$$x = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \rightarrow \dot{x} = -r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$y = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \rightarrow \dot{y} = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$z = r \cdot \cos \vartheta \rightarrow \dot{z} = 0$$

Damit nehmen die gesuchten *Geschwindigkeitskomponenten*  $v_r$ ,  $v_\vartheta$  und  $v_\varphi$  die folgende Gestalt an:

$$v_r = \dot{x} \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi + \dot{y} \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + \dot{z} \cdot \cos \vartheta =$$

$$= -r \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} +$$

$$+ r \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} + 0 \cdot \cos \vartheta = 0$$

$$v_\vartheta = \dot{x} \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi + \dot{y} \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi - \dot{z} \cdot \sin \vartheta =$$

$$= -r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} +$$

$$+ r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} - 0 \cdot \sin \vartheta = 0$$

$$v_\varphi = -\dot{x} \cdot \sin \varphi + \dot{y} \cdot \cos \varphi =$$

$$= r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin^2 \varphi \cdot \dot{\varphi} + r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos^2 \varphi \cdot \dot{\varphi} =$$

$$= r \cdot \sin \vartheta \cdot \dot{\varphi} \underbrace{(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}_1 = r \cdot \sin \vartheta \cdot \dot{\varphi}$$

Das Teilchen bewegt sich somit auf dem Breitenkreis mit dem *Geschwindigkeitsvektor*

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\vartheta \vec{e}_\vartheta + v_\varphi \vec{e}_\varphi =$$

$$= 0 \vec{e}_r + 0 \vec{e}_\vartheta + r \cdot \sin \vartheta \cdot \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi = r \cdot \sin \vartheta \cdot \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

Erfolgt die Bewegung mit *konstanter* Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , so ist  $\varphi = \omega t$  und  $\dot{\varphi} = \omega$  und wir erhalten das bereits aus Abschnitt 6.1.4 bekannte Ergebnis

$$\vec{v} = r \cdot \sin \vartheta \cdot \omega \vec{e}_\varphi = \omega r \cdot \sin \vartheta \vec{e}_\varphi = R \omega \vec{e}_\varphi$$

Dabei ist  $R = r \cdot \sin \vartheta$  der Radius des Breitenkreises aus Bild I-100.

### 6.3.3 Darstellung von Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

Die Differentialoperationen *Gradient*, *Divergenz* und *Rotation* sowie der *Laplace-Operator* besitzen in *Kugelkoordinaten* das folgende Aussehen:

#### Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

##### Skalarfeld in Kugelkoordinaten

$$\phi = \phi(r; \vartheta; \varphi) \quad (\text{I-322})$$

##### Vektorfeld in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}(r; \vartheta; \varphi) = \\ &= F_r(r; \vartheta; \varphi) \vec{e}_r + F_\vartheta(r; \vartheta; \varphi) \vec{e}_\vartheta + F_\varphi(r; \vartheta; \varphi) \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (\text{I-323})$$

##### Gradient des Skalarfeldes $\phi(r; \vartheta; \varphi)$

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \quad (\text{I-324})$$

##### Divergenz des Vektorfeldes $\vec{F}(r; \vartheta; \varphi)$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot F_r) + \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot F_\vartheta) + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right] \quad (\text{I-325})$$

##### Rotation des Vektorfeldes $\vec{F}(r; \vartheta; \varphi)$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot F_\varphi) - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \\ &+ \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_\varphi) \right) \vec{e}_\vartheta + \\ &+ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_\vartheta) - \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta} \right) \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (\text{I-326})$$

##### Laplace-Operator

$$\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right\} \quad (\text{I-327})$$

*Anmerkung*

Der in Kugelkoordinaten ausgedrückte *Laplace-Operator* enthält auch partielle Ableitungen 1. *Ordnung* (im Unterschied zum *kartesischen* Fall, wo nur partielle Ableitungen 2. *Ordnung* auftreten):

$$\begin{aligned} \text{1. Summand: } & \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 2r \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} + r^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \text{2. Summand: } & \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right) = \cos \vartheta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} + \sin \vartheta \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2} \end{aligned} \quad (\text{I-328})$$

## ■ Beispiele

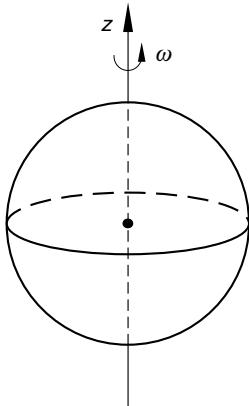
- (1) Wir bestimmen den *Gradient* des skalaren Feldes  $\phi = \phi(r; \vartheta; \varphi) = r + \vartheta + \varphi$  nach Gleichung (I-324). Die dabei benötigten partiellen Ableitungen 1. *Ordnung* besitzen alle den *konstanten* Wert 1:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (r + \vartheta + \varphi) = 1, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} = 1, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = 1$$

Somit gilt:

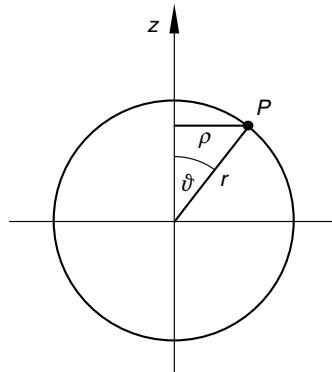
$$\begin{aligned} \text{grad } \phi &= \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi = \\ &= \vec{e}_r + \frac{1}{r} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

- (2) Eine Kugel mit dem Radius  $r$  rotiere mit der *konstanten* Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $z$ -Achse (Bild I-101). Unser Interesse gilt zunächst dem *Geschwindigkeitsfeld* auf der Kugeloberfläche.



**Bild I-101**

Gleichförmige Rotation einer Kugel um einen Durchmesser ( $z$ -Achse)



**Bild I-102**

Der Punkt  $P$  bewegt sich auf dem *Breitenkreis* mit dem Radius  $\rho = r \cdot \sin \vartheta$

Dazu betrachten wir einen beliebigen Punkt  $P$  auf der Kugeloberfläche. Er bewegt sich bei der Drehung der Kugel auf einem *Breitenkreis* mit dem Radius  $Q = r \cdot \sin \vartheta$ , wie man aus Bild I-102 leicht entnehmen kann. Der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  ist dabei *tangential* zum Breitenkreis orientiert und besitzt daher nur eine  $\varphi$ -Komponente

$$v_\varphi = \omega Q = \omega r \cdot \sin \vartheta$$

$(v_r = v_\vartheta = 0)$ . Das Geschwindigkeitsfeld auf der Kugeloberfläche hängt somit *nur* von der Winkelkoordinate  $\vartheta$  ab:

$$\vec{v} = \vec{v}(\vartheta) = v_\varphi \vec{e}_\varphi = \omega r \cdot \sin \vartheta \vec{e}_\varphi.$$

Für die *Rotation* des Feldvektors  $\vec{v}$  erhalten wir dann nach Gleichung (I-326):

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{v} &= \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot v_\varphi) \right) \vec{e}_r - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot v_\varphi) \right) \vec{e}_\vartheta = \\ &= \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\omega r \cdot \sin^2 \vartheta) \right) \vec{e}_r - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (\omega r^2 \cdot \sin \vartheta) \right) \vec{e}_\vartheta = \\ &= \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \omega r \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin^2 \vartheta) \vec{e}_r - \frac{1}{r} \cdot \omega \cdot \sin \vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2) \vec{e}_\vartheta = \\ &= \frac{\omega}{\sin \vartheta} \cdot 2 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \vec{e}_r - \frac{\omega \cdot \sin \vartheta}{r} \cdot 2r \vec{e}_\vartheta = \\ &= 2\omega \cdot \cos \vartheta \vec{e}_r - 2\omega \cdot \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta = 2\omega (\cos \vartheta \vec{e}_r - \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta) \end{aligned}$$

Der in der Klammer stehende Vektor ist aber nach Gleichung (I-312) genau der Einheitsvektor  $\vec{e}_z$ . Somit gilt:

$$\text{rot } \vec{v} = 2\omega \vec{e}_z = 2\vec{\omega}.$$

Dabei ist  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$  der in der *positiven z-Achse* liegende Vektor der Winkelgeschwindigkeit (siehe Bild I-101).

Das *Geschwindigkeitsfeld* auf einer rotierenden Kugel ist somit ein *Wirbelfeld*, ein Ergebnis, das wir bereits von einer rotierenden *Scheibe* her kennen (siehe hierzu Abschnitt 5.2.2). ■

### 6.3.4 Kugel- oder radialsymmetrische Vektorfelder (Zentraffelder)

Ein *kugel-* oder *radialsymmetrisches* Vektorfeld, in den naturwissenschaftlichen Anwendungen meist als *Zentraffeld* bezeichnet, vom allgemeinen Typ

$$\vec{F} = f(r) \vec{e}_r \tag{I-329}$$

ist für  $r \neq 0$  stets *wirbelfrei*. Denn das Feld besitzt nur eine Komponente in *radialer* Richtung und diese wiederum ist *nur* von  $r$  abhängig, *nicht* aber von den beiden Winkelkoordinaten  $\vartheta$  und  $\varphi$ :

$$F_r = f(r), \quad F_\vartheta = 0, \quad F_\varphi = 0 \tag{I-330}$$

Daher verschwinden in dem Formelausdruck (I-326) für die *Rotation* sämtliche partiellen Ableitungen, d. h. es gilt

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{rot} (f(r) \vec{e}_r) = \vec{0} \quad (\text{I-331})$$

Ein Zentraffeld ist somit immer *wirbelfrei*. Es ist dagegen im Allgemeinen *nicht quellenfrei*, da die *Divergenz* des Feldes nur in *Sonderfällen* verschwindet. Nach Gleichung (I-325) gilt nämlich:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot F_r) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot f(r)) \quad (\text{I-332})$$

Die *Divergenz* des Zentraffeldes  $\vec{F}(r) = f(r) \vec{e}_r$  kann daher nur dann den Wert *null* annehmen, wenn das Produkt  $r^2 \cdot f(r)$  eine *Konstante* ist, d. h.

$$r^2 \cdot f(r) = \text{const.} \quad \text{oder} \quad f(r) = \frac{\text{const.}}{r^2} \quad (\text{I-333})$$

gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn der *Betrag* des Feldvektors  $\vec{F}$  *umgekehrt proportional* zum Quadrat des Abstandes  $r$  ist.

Wir fassen zusammen:

### Eigenschaften eines kugel- oder radialsymmetrischen Vektorfeldes (Zentraffeldes)

Ein *kugel- oder radialsymmetrisches* Vektorfeld (*Zentraffeld*) vom allgemeinen Typ

$$\vec{F} = f(r) \vec{e}_r \quad (\text{I-334})$$

ist stets *wirbelfrei*, jedoch nur in *Sonderfällen* auch *quellenfrei*. Somit gilt für  $r > 0$ :

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0} \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \vec{F} \neq 0 \quad (\text{I-335})$$

**Sonderfall:** Ist der *Betrag* des Zentraffeldes *umgekehrt proportional* zum Quadrat des Abstandes  $r$ , d. h. gilt

$$f(r) \sim \frac{1}{r^2} \quad \text{oder} \quad f(r) = \frac{\text{const.}}{r^2} \quad (\text{I-336})$$

so ist das Zentraffeld zusätzlich auch *quellenfrei*, d. h. die Divergenz des Vektorfeldes *verschwindet* dann.

## ■ Beispiele

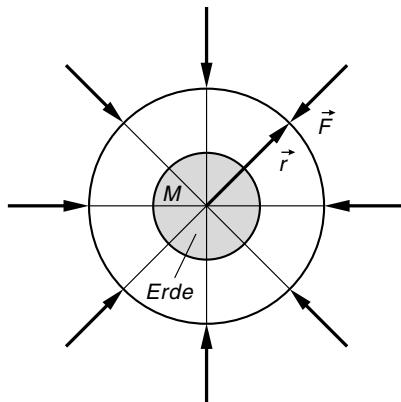
- (1) Das *Gravitationsfeld* der Erde ist ein wirbel- *und* quellenfreies Zentrafeld. Nach dem *Gravitationsgesetz* von Newton erfährt eine Einheitsmasse ( $m = 1$ ) die folgende Anziehungskraft:

$$\vec{F} = -\gamma \frac{M}{r^2} \vec{e}_r \quad (r > 0)$$

( $M$ : Erdmasse;  $\gamma$ : Gravitationskonstante; siehe Bild I-103). Für den Betrag dieser Kraft gilt somit:

$$|\vec{F}| = \gamma \frac{M}{r^2} = \frac{\gamma M}{r^2} = \text{const.} \sim \frac{1}{r^2}$$

Die Bedingung I-236 für ein *quellenfreies Zentrafeld* ist damit erfüllt.

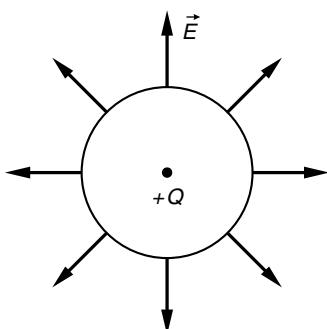


**Bild I-103**

Gravitationsfeld der Erde  
(ebener Schnitt durch den Erdmittelpunkt)

- (2) Auch das in Bild I-104 skizzierte *elektrische Feld* in der Umgebung einer (positiven) Punktladung  $Q$  ist ein wirbel- *und* quellenfreies Zentrafeld mit der elektrischen Feldstärke

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (r > 0; \epsilon_0: \text{elektrische Feldkonstante}).$$



**Bild I-104**

Radialsymmetrisches elektrisches Feld in der Umgebung einer *positiven* Punktladung  $Q$   
(ebener Schnitt durch die Punktladung)

Denn der *Feldstärkebetrag* ist dem Quadrat des Abstandes *umgekehrt proportional*, die Bedingung I-236 für ein *quellenfreies* Zentraffeld somit erfüllt:

$$|\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} = (\text{const.}) \cdot \frac{1}{r^2} \sim \frac{1}{r^2}$$

### (3) Das kugelsymmetrische Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v}(r) = v_0 \vec{r} = v_0 r \vec{e}_r \quad (v_0 > 0)$$

ist als Zentraffeld *wirbelfrei*, *nicht* aber quellenfrei, da  $\operatorname{div} \vec{v} \neq 0$  ist. Aus Gleichung (I-325) folgt mit  $v_r = v_0 r$  und  $v_\vartheta = v_\varphi = 0$ :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (v_0 r^3) = \frac{1}{r^2} \cdot v_0 \cdot 3r^2 = 3v_0 \neq 0$$

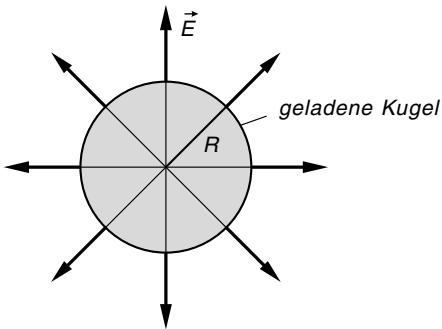
■

### 6.3.5 Ein Anwendungsbeispiel: Potential und elektrische Feldstärke in der Umgebung einer homogen geladenen Kugel

Eine *homogen* geladene Kugel mit dem Radius  $R$  und der (positiven) Ladung  $Q$  erzeugt in ihrer Umgebung ein *kugel-* oder *radialsymmetrisches* elektrisches Feld, dessen *Potential*  $U = U(r)$  der *Laplace-Gleichung*

$$\Delta U = \Delta U(r) = 0 \quad (r \geq R) \tag{I-337}$$

genügt (Bild I-105).



**Bild I-105**

Radialsymmetrisches elektrisches Feld in der Umgebung einer *positiv* geladenen Kugel (ebener Schnitt durch den Kugelmittelpunkt;  $\vec{E}$ : elektrischer Feldstärkevektor)

Unter Berücksichtigung der *Kugelsymmetrie* lautet diese Differentialgleichung 2. Ordnung dann wie folgt (der Laplace-Operator in (I-327) reduziert sich auf den 1. Summand, da  $U$  von den Winkeln  $\vartheta$  und  $\varphi$  unabhängig ist und somit die partiellen Ableitungen von  $U$  nach  $\vartheta$  bzw.  $\varphi$  verschwinden):

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \frac{\partial U}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} (r^2 \cdot U'(r)) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dr} (r^2 \cdot U'(r)) = 0 \quad (I-338)$$

$(U$  hängt wegen der Kugelsymmetrie nur von  $r$  ab, daher gilt  $\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{dU}{dr} = U'(r)$ ).

Die Ableitung des Produktes  $r^2 \cdot U'(r)$  nach  $r$  kann aber nur dann verschwinden, wenn das Produkt eine *Konstante* ist, d. h.

$$r^2 \cdot U'(r) = \text{const.} = C_1 \quad (I-339)$$

gilt. Wir lösen diese Differentialgleichung 1. Ordnung nach  $U'(r)$  auf und *integrieren* anschließend unbestimmt:

$$U'(r) = \frac{C_1}{r^2} \Rightarrow$$

$$U(r) = \int U'(r) dr = C_1 \cdot \int \frac{1}{r^2} dr = -\frac{C_1}{r} + C_2 \quad (I-340)$$

Das Potential wird dabei üblicherweise so festgelegt, dass es im Unendlichen verschwindet. Aus der Bedingung  $U(r = \infty) = 0$  folgt dann:

$$U(r = \infty) = 0 \Rightarrow -0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad (I-341)$$

Somit ist

$$U(r) = -\frac{C_1}{r} \quad (I-342)$$

Die Konstante  $C_1$  lässt sich aus der Kapazität  $C = 4\pi\epsilon_0 R$  der Kugel bestimmen ( $R$ : Kugelradius;  $\epsilon_0$ : elektrische Feldkonstante). Aus der Definitionsformel der Kapazität

$$C = \frac{Q}{U(R)} = 4\pi\epsilon_0 R \quad (I-343)$$

folgt dann für das Potential  $U(R)$  auf der *Kugeloberfläche*:

$$U(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (I-344)$$

Zusammen mit der Gleichung (I-342) erhalten wir daraus eine *Bestimmungsgleichung* für die Konstante  $C_1$ :

$$U(R) = -\frac{C_1}{R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow C_1 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \quad (I-345)$$

Das Potential im *Außenraum* der Kugel wird somit durch die *kugelsymmetrische* Funktion

$$U = U(r) = -\frac{C_1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r \geq R) \quad (\text{I-346})$$

beschrieben.

Die *elektrische Feldstärke*  $\vec{E}$  ist definitionsgemäß der *negative* Gradient des Potentials. Wegen der *Kugelsymmetrie* gilt dann nach Gleichung (I-324)

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} U = -\frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r = -\frac{dU}{dr} \vec{e}_r \quad (\text{I-347})$$

Mit der Ableitung

$$\frac{dU}{dr} = \frac{d}{dr} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{d}{dr} (r^{-1}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (-r^{-2}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (\text{I-348})$$

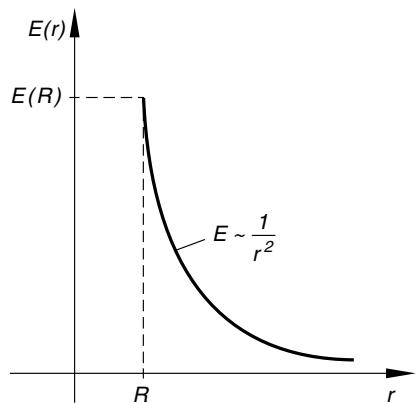
erhalten wir schließlich den *radial* nach *außen* gerichteten Feldstärkevektor

$$\vec{E} = -\frac{dU}{dr} \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (r \geq R) \quad (\text{I-349})$$

Der *Betrag* der Feldstärke nimmt dabei mit zunehmender Entfernung  $r$  vom Kugelmittelpunkt ab und zwar *umgekehrt proportional* zum Quadrat des Abstandes (siehe Bild I-106).

$$E = |\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \underbrace{|\vec{e}_r|}_{1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \sim \frac{1}{r^2} \quad (\text{I-350})$$

$\vec{E}$  ist somit ein *wirbel-* und *quellenfreies* Zentrafeld.



**Bild I-106**

Verlauf der elektrischen Feldstärke in der Umgebung einer *positiv* geladenen Kugel

## 7 Linien- oder Kurvenintegrale

### 7.1 Ein einführendes Beispiel

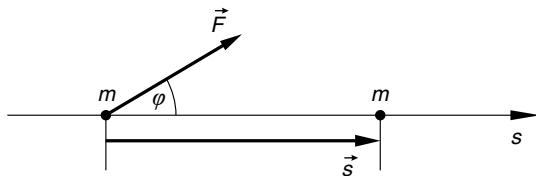
Wir führen den Begriff eines *Linien-* oder *Kurvenintegrals* in anschaulicher Weise am Beispiel der *physikalischen Arbeit* ein, die von einer *Kraft* bzw. einem *Kraftfeld* beim Verschieben eines Massenpunktes verrichtet wird. Schrittweise gehen wir dabei wie folgt vor:

#### Verschiebung längs einer Geraden durch eine konstante Kraft (Bild I-107)

Der Massenpunkt wird durch eine *konstante* Kraft  $\vec{F}$  längs einer *Geraden* um den Vektor  $\vec{s}$  verschoben. Die dabei verrichtete Arbeit ist definitionsgemäß das *skalare Produkt* aus dem Kraftvektor  $\vec{F}$  und dem Verschiebungsvektor  $\vec{s}$ :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \varphi = F \cdot s \cdot \cos \varphi \quad (\text{I-351})$$

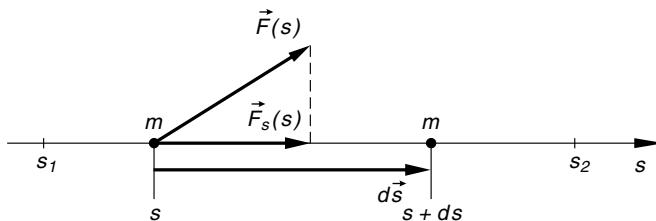
(siehe Band 1, Kap. II, Abschnitt 3.3.5).



**Bild I-107**

Zum Begriff der Arbeit einer *konsstanten* Kraft beim Verschieben einer Masse längs einer Geraden

#### Verschiebung längs einer Geraden durch eine ortsabhängige Kraft (Bild I-108)



**Bild I-108** Zum Begriff der Arbeit einer *ortsabhängigen* Kraft beim Verschieben einer Masse längs einer Geraden

Die auf den Massenpunkt einwirkende Kraft ist jetzt von Ort zu Ort *verschieden*:  $\vec{F} = \vec{F}(s)$ . Wir zerlegen das *geradlinige* Wegstück zwischen den Wegmarken  $s_1$  und  $s_2$  in eine große Anzahl von sehr kleinen *Wegelementen*, längs eines jeden Wegelementes darf dann die einwirkende Kraft als *nahezu konstant* betrachtet werden. Die bei einer *infinitesimal kleinen* Verschiebung des Massenpunktes um das vektorielle Wegelement  $d\vec{s}$  verrichtete Arbeit beträgt dann definitionsgemäß

$$dW = \vec{F}(s) \cdot d\vec{s} = F_s(s) ds \quad (\text{I-352})$$

(Skalarprodukt aus dem Kraftvektor  $\vec{F}(s)$  und dem Wegelement  $d\vec{s}$ ).

$F_s(s)$  ist dabei die *Kraftkomponente in Wegrichtung*,  $ds$  der Betrag von  $d\vec{s}$ . Durch *Integration* erhalten wir die insgesamt von der Kraft  $\vec{F}(s)$  längs des geradlinigen Weges von  $s_1$  nach  $s_2$  geleistete Arbeit. Sie führt uns zu dem *Arbeitsintegral*

$$W = \int_{s=s_1}^{s=s_2} dW = \int_{s=s_1}^{s=s_2} \vec{F}(s) \cdot d\vec{s} = \int_{s_1}^{s_2} F_s(s) ds \quad (\text{I-353})$$

(siehe hierzu auch Band 1, Kap. V, Abschnitt 10.6).

### Allgemeiner Fall: Verschiebung längs einer ebenen Kurve in einem Kraftfeld (Bild I-109)

Die bisher betrachteten Verschiebungswege waren ausschließlich *geradlinig*. Diese Einschränkung lassen wir jetzt fallen und wenden uns dem *allgemeinen Fall* zu:

In einem *ebenen Kraftfeld*  $\vec{F}(x; y)$  mit den skalaren Komponenten  $F_x(x; y)$  und  $F_y(x; y)$  soll ein Massenpunkt vom Punkt  $P_1$  aus längs einer Kurve  $C$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  in den Punkt  $P_2$  verschoben werden ( $t_1 \leq t \leq t_2$ ). Welche Arbeit wird dabei vom *Kraftfeld* an der Masse verrichtet?

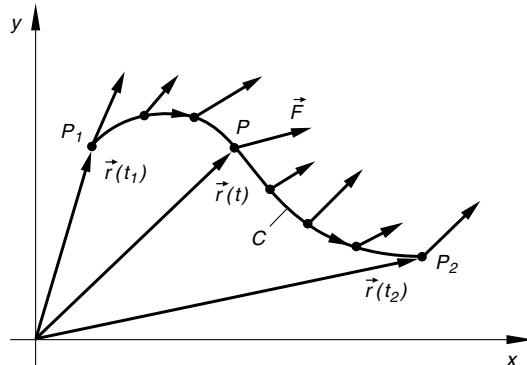


Bild I-109

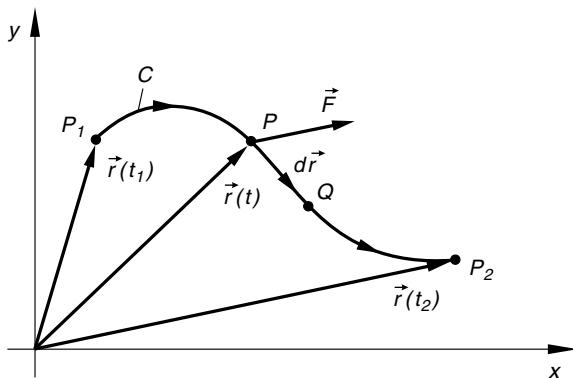
Zum Begriff der Arbeit in einem ebenen Kraftfeld beim Verschieben einer Masse längs einer Kurve

Bei der Berechnung der Arbeit müssen wir berücksichtigen, dass die auf den Massenpunkt längs der Kurve  $C$  einwirkende Kraft von Ort zu Ort *variiert*. Wir gehen daher analog vor wie in Fall 2 und zerlegen die Kurve  $C$  zunächst in eine große Anzahl von *Wegelementen*, wobei wiederum längs eines jeden Wegelementes eine *nahezu konstante* Kraft angenommen werden darf. Beim Verschieben des Massenpunktes vom Punkt  $P$  aus um ein *infinitesimal kleines* vektorielles Wegelement  $d\vec{r}$  in den Punkt  $Q$  verrichtet das Kraftfeld definitionsgemäß die Arbeit

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \begin{pmatrix} F_x(x; y) \\ F_y(x; y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = F_x(x; y) dx + F_y(x; y) dy \quad (\text{I-354})$$

(Bild I-110). Die bei einer Verschiebung auf der Kurve  $C$  von  $P_1$  nach  $P_2$  *insgesamt* vom Kraftfeld aufzubringende Arbeit erhalten wir dann durch *Integration*:

$$W = \int_C dW = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (F_x(x; y) dx + F_y(x; y) dy) \quad (\text{I-355})$$



**Bild I-110**  
Zur Herleitung  
des Arbeitsintegrals

Da die Integration längs einer bestimmten *Kurve*, auch *Weg* oder *Linie* genannt, erfolgt, bezeichnet man ein solches Integral als *Linien- oder Kurvenintegral* und schreibt verabredungsgemäß das Kurvensymbol (hier:  $C$ ) unten an das Integralzeichen.

Bei der Berechnung des Integrals ist dabei zu beachten, dass das Kraftfeld noch von den Koordinaten  $x$  und  $y$  des Kurvenpunktes  $P$  abhängt. Diese jedoch sind keineswegs voneinander unabhängig, sondern über die Kurvengleichung miteinander verknüpft. Für die Koordinaten  $x$  und  $y$  setzt man daher die *Parametergleichungen*  $x(t)$  bzw.  $y(t)$  der Integrationskurve  $C$  ein. Die längs dieses Weges wirkende Kraft hängt dann nur noch vom *Kurvenparameter*  $t$  ab. Das *Wegelement*  $d\vec{r}$  ersetzen wir noch durch den *Tangentenvektor*  $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t)$  und das Differential  $dt$  des Parameters  $t$ . Es ist

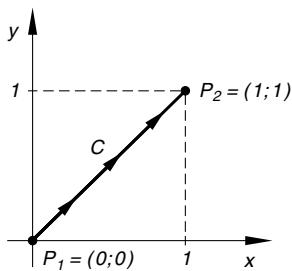
$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{und somit} \quad d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \dot{\vec{r}} dt = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} dt$$

Das *Arbeitsintegral* (*Linienintegral*)  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  geht mit Hilfe dieser Substitution in ein *gewöhnliches* Integral der Variablen  $t$  über:

$$\begin{aligned} W &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [F_x(x(t); y(t)) \cdot \dot{x}(t) + F_y(x(t); y(t)) \cdot \dot{y}(t)] dt \end{aligned} \quad (\text{I-356})$$

### ■ Beispiel

Wir berechnen die *Arbeit*, die das *ebene Kraftfeld*  $\vec{F}(x; y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ xy \end{pmatrix}$  an einer Masse bei einer *geradlinigen* Verschiebung vom Punkt  $P_1 = (0; 0)$  aus in den Punkt  $P_2 = (1; 1)$  verrichtet (Bild I-111).

**Bild I-111**

Geradliniger Verbindungsweg  $C$  vom Punkt  $P_1 = (0;0)$  aus zum Punkt  $P_2 = (1;1)$

Der *Integrationsweg*  $C$  lautet in *vektorieller* Darstellung:

$$C: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Für die Vektoren  $\vec{F}, \dot{\vec{r}}$  und das Skalarprodukt  $\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$  erhalten wir mit  $x = t$  und  $y = t$ :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} xy^2 \\ xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = t^3 + t^2$$

Die vom *Kraftfeld* geleistete *Arbeit* beträgt somit nach der Integralformel (I-356):

$$W = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) dt = \int_0^1 (t^3 + t^2) dt = \left[ \frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

■

## 7.2 Definition eines Linien- oder Kurvenintegrals

Die Berechnung der *Arbeit* eines ebenen Kraftfeldes an einer punktförmigen Masse führte uns zu dem Begriff eines *Linien-* oder *Kurvenintegrals*. Wir übertragen diesen Begriff nun auf ein *räumliches Vektorfeld*.

**Definition:**  $\vec{F}(x; y; z)$  sei ein räumliches Vektorfeld,  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  der Ortsvektor einer von  $P_1$  nach  $P_2$  verlaufenden Raumkurve  $C$  mit  $t_1 \leq t \leq t_2$  und  $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t)$  der zugehörige Tangentenvektor der Kurve. Dann heißt das Integral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) dt \tag{I-357}$$

das *Linien-* oder *Kurvenintegral* des Vektorfeldes  $\vec{F}(x; y; z)$  längs der Raumkurve  $C$ .

Das Linien- oder Kurvenintegral existiert, wenn die Komponenten von  $\vec{F}$  und  $\dot{\vec{r}}$  stetige Funktionen sind.

*Anmerkungen*

- (1) Das *Linien- oder Kurvenintegral* (I-357) lautet in ausführlicher Schreibweise:

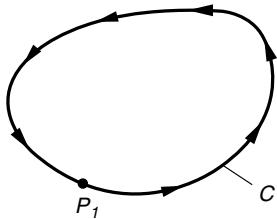
$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C [F_x(x; y; z) dx + F_y(x; y; z) dy + F_z(x; y; z) dz] = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) dt \end{aligned} \quad (\text{I-358})$$

$F_x, F_y, F_z$  sind dabei die ortsabhängigen Komponenten von  $\vec{F}$  und  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  die vom Parameter  $t$  abhängigen Komponenten von  $\vec{r}$ .

- (2) Die Definition (I-357) gilt sinngemäß auch für ein *ebenes* Vektorfeld  $\vec{F}(x; y)$  und eine *ebene* Kurve  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ .
- (3) Man beachte, dass der Wert eines Linien- oder Kurvenintegrals i. Allg. nicht nur vom *Anfangs-* und *Endpunkt* des Integrationsweges, sondern auch noch vom *eingeschlagenen* Verbindungsweg dieser Punkte abhängt.
- (4) Wird der Integrationsweg  $C$  in der *umgekehrten* Richtung durchlaufen (symbolische Schreibweise:  $-C$ ), so tritt im Integral ein *Vorzeichenwechsel* ein:

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{I-359})$$

- (5) Für ein Kurvenintegral längs einer *geschlossenen* Linie  $C$  verwenden wir das Symbol  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  oder auch  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$  (Bild I-112). Ein solches Kurvenintegral wird in den physikalisch-technischen Anwendungen auch als *Zirkulation* des Vektorfeldes  $\vec{F}$  längs der *geschlossenen* Kurve  $C$  bezeichnet.

**Bild I-112**

Geschlossener Integrationsweg  $C$  mit dem Anfangs- und Endpunkt  $P_1$

- (6) Das Kurvenintegral  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  lässt sich auch wie folgt ausdrücken:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (\vec{F} \cdot \vec{T}) ds \quad (\text{I-360})$$

Dabei ist  $\vec{T}$  der *Tangenteneinheitsvektor* und  $ds$  das *Linienelement* der Kurve  $C$  (Bild I-113). Integriert wird dann über die *Tangentialkomponente*  $\vec{F} \cdot \vec{T}$  des Vektorfeldes  $\vec{F}$  längs der Kurve  $C$ .

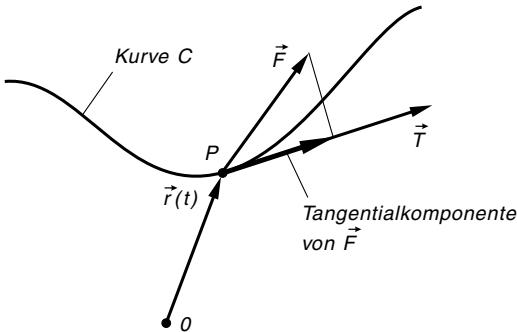


Bild I-113

Zur Integration über die Tangentialkomponente des Vektorfeldes  $\vec{F}$

Analog lässt sich auch ein Kurvenintegral über die *Normalkomponente*  $\vec{F} \cdot \vec{N}$  von  $\vec{F}$  längs des Weges  $C$  definieren:

$$\int_C (\vec{F} \cdot \vec{N}) ds \quad (I-361)$$

$\vec{N}$  ist dabei der *Hauptnormaleneinheitsvektor* der Kurve  $C$ .

### 7.3 Berechnung eines Linien- oder Kurvenintegrals

Die Berechnung eines Linien- oder Kurvenintegrals wird wie folgt vorgenommen:

#### Berechnung eines Linien- oder Kurvenintegrals

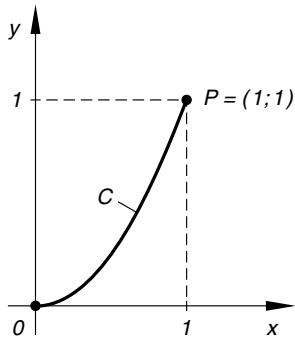
Die Berechnung eines Linien- oder Kurvenintegrals  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) dt$  erfolgt in zwei Schritten:

1. Zunächst werden in dem Feldvektor  $\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} F_x(x; y; z) \\ F_y(x; y; z) \\ F_z(x; y; z) \end{pmatrix}$  die Koordinaten  $x, y, z$  der Reihe nach durch die *parameterabhängigen* Koordinaten  $x(t), y(t), z(t)$  der Raumkurve  $C$  ersetzt. Der Feldvektor und seine Komponenten hängen dann nur noch vom *Parameter*  $t$  ab. Dann *differenziert* man den Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  nach dem Parameter  $t$ , erhält den *Tangentenvektor*  $\dot{\vec{r}}(t)$  und bildet das *skalare Produkt* aus Feld- und Tangentenvektor.

2. Das Skalarprodukt  $\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$  hängt jetzt nur noch vom *Parameter*  $t$  ab, ist also eine *Funktion* von  $t$  und wird nach dieser Variablen in den Grenzen von  $t_1$  bis  $t_2$  *integriert* (*gewöhnliche Integration*).

■ **Beispiele**

- (1) Wir berechnen das *Linienintegral*  $\int_C (y \cdot e^x dx + e^x dy)$  längs des *parabelförmigen* Verbindungsweges  $C: x = t, y = t^2$  der beiden Punkte  $O = (0; 0)$  und  $P = (1; 1)$  (siehe Bild I-114).



**Bild I-114** Parabelförmiger Integrationsweg  $C$  vom Ursprung zum Punkt  $P = (1; 1)$

Längs dieses Weges gilt  $x = t, y = t^2$  und somit:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 1, \quad dx = dt, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = 2t, \quad dy = 2t dt$$

$(0 \leq t \leq 1)$ . Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in das Linienintegral erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_C (y \cdot e^x dx + e^x dy) &= \int_0^1 (t^2 \cdot e^t dt + e^t \cdot 2t dt) = \\ &= \int_0^1 (t^2 \cdot e^t + 2t \cdot e^t) dt = \\ &= \left[ (t^2 - 2t + 2) \cdot e^t + 2(t - 1) \cdot e^t \right]_0^1 = \\ &= \left[ (t^2 - 2t + 2 + 2t - 2) \cdot e^t \right]_0^1 = \left[ t^2 \cdot e^t \right]_0^1 = \\ &= e^1 - 0 = e = 2,7183 \end{aligned}$$

Die anfallenden Integrale haben wir dabei der *Integraltafel* der **Mathematischen Formelsammlung** des Autors entnommen (Integrale Nr. 313 und Nr. 314, jeweils mit  $a = 1$ ).

(2) Welchen Wert besitzt das *Linien- oder Kurvenintegral* des räumlichen Vektorfeldes

$$\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} 2x + y^2 \\ x^2 yz \\ x + z \end{pmatrix} \text{ längs der Kurve } C, \text{ die durch den parameterabhängigen Ortsvektor } \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq t \leq 1 \text{ beschrieben wird?}$$

*Lösung:* Es ist  $x = t$ ,  $y = t^2$  und  $z = t$  und somit

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \begin{pmatrix} 2x + y^2 \\ x^2 yz \\ x + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t + t^4 \\ t^2 \cdot t^2 \cdot t \\ t + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t + t^4 \\ t^5 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} &= \begin{pmatrix} 2t + t^4 \\ t^5 \\ 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix} = (2t + t^4) \cdot 1 + t^5 \cdot 2t + 2t \cdot 1 = \\ &= 2t + t^4 + 2t^6 + 2t = 2t^6 + t^4 + 4t \\ \int_C (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) dt &= \int_0^1 (2t^6 + t^4 + 4t) dt = \left[ \frac{2}{7} t^7 + \frac{1}{5} t^5 + 2t^2 \right]_0^1 = \\ &= \frac{2}{7} + \frac{1}{5} + 2 = \frac{10 + 7 + 70}{7 \cdot 5} = \frac{87}{35} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

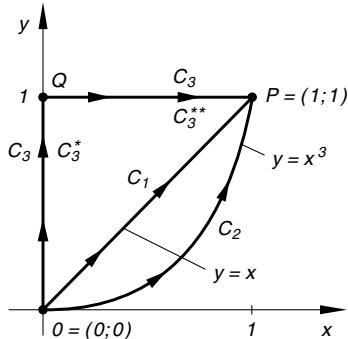
**Sonderfall:** Bei einem *ebenen* Problem, d. h. einem Linienintegral in der *Ebene*, liegt der Integrationsweg  $C$  häufig in Form einer *expliziten* Funktionsgleichung  $y = f(x)$  vor. Die Berechnung des Linienintegrals  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  wird dann wie folgt vorgenommen: Man ersetzt die Koordinate  $y$  durch die Funktion  $f(x)$  und das Differential  $dy$  durch  $f'(x) dx$  und erhält auf diese Weise ein *gewöhnliches* Integral mit der Integrationsvariablen  $x$  (die Integrationsgrenzen sind dabei die *Abszissenwerte* der beiden *Kurvenrandpunkte*):

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C [F_x(x; y) dx + F_y(x; y) dy] = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} [F_x(x; f(x)) + F_y(x; f(x)) \cdot f'(x)] dx \quad (I-362) \end{aligned}$$

■ **Beispiel**

Wir berechnen das *Kurvenintegral*  $\int_C (xy^2 dx + xy dy)$  für die in Bild I-115 skizzierten

Verbindungswege der Punkte  $O = (0; 0)$  und  $P = (1; 1)$ .



**Bild I-115**

Drei verschiedene Verbindungswege der Punkte  $O = (0; 0)$  und  $P = (1; 1)$

**Integrationsweg  $C_1$ :**  $y = x$ ,  $0 \leq x \leq 1$

$$\frac{dy}{dx} = 1, \quad dy = dx$$

$$\begin{aligned} \int_{C_1} (xy^2 dx + xy dy) &= \int_0^1 (x \cdot x^2 dx + x \cdot x dx) = \int_0^1 (x^3 + x^2) dx = \\ &= \left[ \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3+4}{4 \cdot 3} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

**Integrationsweg  $C_2$ :**  $y = x^3$ ,  $0 \leq x \leq 1$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2, \quad dy = 3x^2 dx$$

$$\begin{aligned} \int_{C_2} (xy^2 dx + xy dy) &= \int_0^1 (x \cdot x^6 dx + x \cdot x^3 \cdot 3x^2 dx) = \int_0^1 (x^7 + 3x^6) dx = \\ &= \left[ \frac{1}{8} x^8 + \frac{3}{7} x^7 \right]_0^1 = \frac{1}{8} + \frac{3}{7} = \frac{7+24}{8 \cdot 7} = \frac{31}{56} \end{aligned}$$

**Integrationsweg  $C_3 = C_3^* + C_3^{**}$**

Zerlegung des Integrationsweges  $C_3$  in zwei Teilwege  $C_3^*$  und  $C_3^{**}$ :

*Teilweg  $C_3^*$  längs der y-Achse von  $O = (0; 0)$  nach  $Q = (0; 1)$ :*

$$x = 0, \quad dx = 0, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$\int_{C_3^*} (xy^2 dx + xy dy) = \int_{C_3^*} xy dy = \int_0^1 0 \cdot y dy = \int_0^1 0 dy = 0$$

Teilweg  $C_3^{**}$  längs der Geraden  $y = 1$  von  $Q = (0; 1)$  nach  $P = (1; 1)$ :

$$y = 1, \quad dy = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\int_{C_3^{**}} (xy^2 dx + xy dy) = \int_{C_3^{**}} xy^2 dx = \int_0^1 x \cdot 1^2 dx = \int_0^1 x dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Längs des Gesamtweges  $C_3$  gilt somit:

$$\int_{C_3} (xy^2 dx + xy dy) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Wir stellen fest: In diesem Beispiel hängt das Linienintegral nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges, sondern auch noch von dem *eingeschlagenen Verbindungsweg* der beiden Punkte ab. Wir erhalten für jeden der drei Verbindungswwege einen anderen Wert. Im nächsten Abschnitt kommen wir auf dieses Beispiel zurück. ■

## 7.4 Wegunabhängigkeit eines Linien- oder Kurvenintegrals. Konservative Vektorfelder

Wir untersuchen in diesem Abschnitt die *Voraussetzungen*, unter denen der Wert eines Linien- oder Kurvenintegrals nur vom *Anfangs-* und *Endpunkt*, *nicht* aber vom *eingeschlagenen Verbindungsweg* der beiden Punkte abhängt, wobei wir uns zunächst auf *ebene* Vektorfelder beschränken werden.

Ein Linienintegral vom Typ

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C [F_x(x; y) dx + F_y(x; y) dy] \quad (\text{I-363})$$

ist *weganabhängig*, wenn die lineare Differentialform

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x(x; y) dx + F_y(x; y) dy \quad (\text{I-364})$$

*vollständig* ist, d. h. das *totale* oder *vollständige Differential*  $d\phi$  einer ortsabhängigen Funktion  $\phi(P) = \phi(x; y)$  darstellt:

$$F_x dx + F_y dy = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = d\phi \quad (\text{I-365})$$

Dann nämlich gilt:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C [F_x dx + F_y dy] = \int_C \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \right) = \int_{P_1}^{P_2} d\phi = [\phi(P)]_{P_1}^{P_2} = \\ &= \phi(P_2) - \phi(P_1) = \phi(x_2; y_2) - \phi(x_1; y_1) \end{aligned} \quad (\text{I-366})$$

Das Linienintegral hängt in diesem Fall nur vom *Anfangspunkt*  $P_1 = (x_1; y_1)$  und dem *Endpunkt*  $P_2 = (x_2; y_2)$  des Integrationsweges ab. Ein Vektorfeld mit dieser Eigenschaft wird in den Anwendungen als *konservatives Feld* oder *Potentialfeld*, die Funktion  $\phi(x; y)$  als *Potentialfunktion* oder kurz als *Potential* des Feldes bezeichnet.

**Definition:** Ein (ebenes oder räumliches) Vektorfeld  $\vec{F}$  heißt *konservativ* oder ein *Potentialfeld*, wenn das Linien- oder Kurvenintegral  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  nur vom *Anfangs-* und *Endpunkt*, nicht aber vom *eingeschlagenen* Verbindungsweg  $C$  der beiden Punkte abhängt.

Woran aber kann man nun erkennen, ob ein vorgegebenes (ebenes) Vektorfeld  $\vec{F}(x; y)$  mit den skalaren Komponenten  $F_x(x; y)$  und  $F_y(x; y)$  *konservativ* ist oder *nicht*? Die Beantwortung dieser Frage ist in der Praxis von großer Bedeutung.

Falls  $\vec{F}(x; y)$  *konservativ*, d. h. ein *Potentialfeld* ist und  $\phi(x; y)$  die zugehörige *Potentialfunktion*<sup>17)</sup>, so gilt jedenfalls:

$$F_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{und} \quad F_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (\text{I-367})$$

Die skalaren Komponenten des Feldvektors  $\vec{F}(x; y)$  sind in diesem Fall die *partiellen Ableitungen 1. Ordnung* der Potentialfunktion  $\phi(x; y)$ , d. h. der Feldvektor  $\vec{F}(x; y)$  ist der *Gradient* der Potentialfunktion  $\phi(x; y)$ :

$$\vec{F}(x; y) = \text{grad } \phi(x; y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{I-368})$$

Die *Wegunabhängigkeit* eines Linienintegrals bedeutet also, dass das Vektorfeld als *Gradient* einer Potentialfunktion darstellbar ist.

Unter den Voraussetzungen des *Schwarzschen Satzes* gilt dann weiter (siehe Band 2, Kap. III, Abschnitt 2.2):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \quad \text{und somit} \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad (\text{I-369})$$

Diese Bedingung ist *notwendig* und zugleich *hinreichend* für die *Wegunabhängigkeit* eines Linienintegrals vom Typ (I-363). Sie lässt sich auch durch die Gleichung

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0} \quad (\text{I-370})$$

beschreiben.

<sup>17)</sup> Die Potentialfunktion ist bis auf ein *konstantes* Glied eindeutig bestimmt.

Denn bekanntlich verschwindet bei einem *ebenen* Feld  $\vec{F} = \vec{F}(x; y)$  sowohl die  $x$ -Komponente als auch die  $y$ -Komponente des Vektors  $\text{rot } \vec{F}$  *automatisch*, während die  $z$ -Komponente

$$(\text{rot } \vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \quad (\text{I-371})$$

offensichtlich genau dann *Null* wird, wenn die Bedingung (I-369) erfüllt ist:

$$(\text{rot } \vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} \quad (\text{I-372})$$

Für ein *räumliches* Vektorfeld ergeben sich *analoge* Beziehungen zwischen den partiellen Ableitungen 1. Ordnung der skalaren Vektorkomponenten. Auch in diesem Fall ist  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$  eine *notwendige* und *hinreichende* Bedingung für die *Wegunabhängigkeit*.

### Über die Wegunabhängigkeit eines Linien- oder Kurvenintegrals

Ein Linien- oder Kurvenintegral  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  ist genau dann *wegunabhängig*, wenn

die skalaren Komponenten des Vektorfeldes  $\vec{F}$  in einem *einfach zusammenhängenden* Bereich, der den Integrationsweg  $C$  enthält, die folgenden Bedingungen erfüllen:

#### Für ein **ebenes** Vektorfeld:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad (\text{I-373})$$

#### Für ein **räumliches** Vektorfeld:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \quad (\text{I-374})$$

Diese Bedingungen lassen sich auch in beiden Fällen durch die Gleichung

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0} \quad (\text{I-375})$$

beschreiben. Im Falle eines *ebenen* Feldes reduziert sich diese Gleichung auf

$$(\text{rot } \vec{F})_z = 0 \quad (\text{I-376})$$

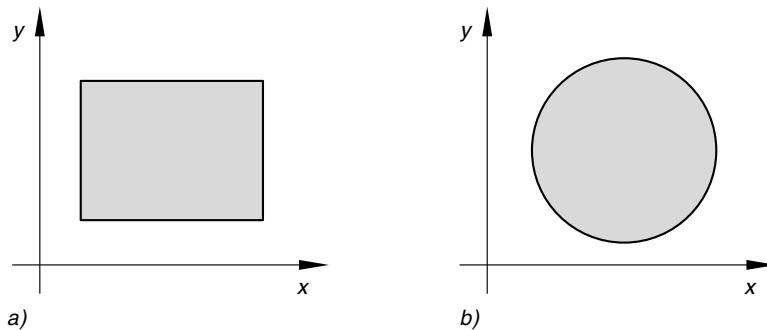
da die  $x$ - und  $y$ -Komponenten *automatisch* verschwinden. Die *Bedingung*

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0} \quad (\text{I-377})$$

ist somit in einem *einfach zusammenhängenden* Bereich *notwendig und hinreichend* für die *Wegunabhängigkeit* eines Linien- oder Kurvenintegrals  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .

*Anmerkungen*

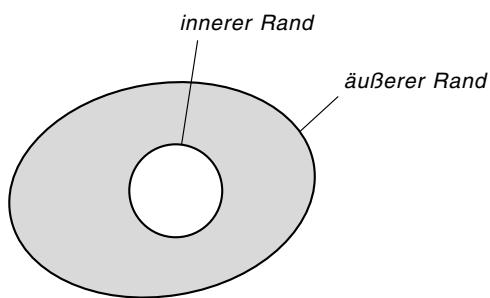
- (1) Ein Bereich heißt *einfach zusammenhängend*, wenn sich *jede* im Bereich gelegene *geschlossene* Kurve auf einen Punkt „zusammenziehen“ lässt. Ein *ebener* einfache zusammenhängender Bereich wird von einer einzigen geschlossenen Kurve begrenzt. Beispiele sind in Bild I-116 dargestellt (rechteckiger achsenparalleler bzw. kreisförmiger Bereich).



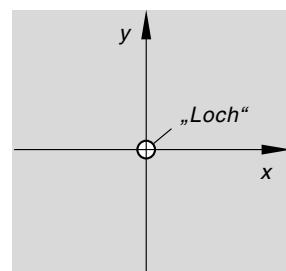
**Bild I-116** Einfach zusammenhängende ebene Bereiche

- a) Rechteckiger achsenparalleler Bereich
- b) Kreisförmiger Bereich

Besteht der Rand eines Bereiches jedoch aus *mehreren* geschlossenen Kurven, so liegt ein *mehrfach zusammenhängender* Bereich vor. Bild I-117 zeigt einen (ebenen) *zweifach zusammenhängenden* Bereich. Auch die  $x$ ,  $y$ -Ebene *ohne* den Nullpunkt stellt einen *zweifach zusammenhängenden* Bereich dar (Bereich mit einem sog. „Loch“; Bild I-118).



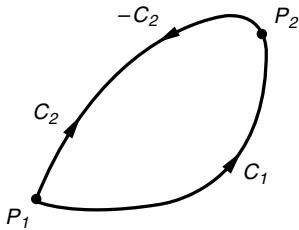
**Bild I-117**  
Zweifach zusammenhängender Bereich



**Bild I-118**  
 $x$ ,  $y$ -Ebene mit einem „Loch“ im Koordinatenursprung

- (2) Die Bedingung (I-373) bzw. (I-374) bzw. (I-375) wird auch als *Integrabilitätsbedingung* bezeichnet.
- (3) Im Falle der Wegunabhängigkeit *verschwindet* das Linienintegral längs einer *geschlossenen* Kurve. Sind nämlich  $C_1$  und  $C_2$  zwei *verschiedene* Verbindungswege der Punkte  $P_1$  und  $P_2$  (Bild I-119), so ist wegen der *Wegunabhängigkeit*

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{I-378})$$

**Bild I-119**

Im Fall der *Wegunabhängigkeit* verschwindet das Linienintegral längs des *geschlossenen* Weges  $C_1 - C_2$  ( $C_1$  und  $C_2$  sind zwei von  $P_1$  nach  $P_2$  orientierte Verbindungswege)

Für die *geschlossene* Kurve  $C_1 - C_2$ , die zunächst von  $P_1$  längs der Kurve  $C_1$  nach  $P_2$  und von dort längs der Kurve  $-C_2$  zurück nach  $P_1$  führt, gilt dann unter Berücksichtigung der Gleichungen (I-359) und (I-378):

$$\begin{aligned} \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \oint_{C_1 - C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{-C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \\ &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \\ &= \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I-379})$$

Wir hatten bereits erkannt, dass ein Linien- oder Kurvenintegral  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  genau dann *wegunabhängig* ist, wenn das (ebene oder räumliche) Vektorfeld  $\vec{F}$  als *Gradient* einer ortsabhängigen skalaren Funktion  $\phi$ , Potentialfunktion genannt, darstellbar ist:  $\vec{F} = \text{grad } \phi$ . Da die *konservativen* Vektorfelder in Naturwissenschaft und Technik eine überragende Rolle spielen, stellen wir ihre wichtigsten Eigenschaften wie folgt zusammen:

### Eigenschaften eines konservativen Vektorfeldes

Ein *konservatives* Vektorfeld  $\vec{F}$  besitzt in einem *einfach zusammenhängenden* Bereich die folgenden *gleichwertigen* Eigenschaften:

- (1) Das Linien- oder Kurvenintegral  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  längs einer Kurve  $C$ , die zwei

(beliebige) Punkte  $P_1$ , und  $P_2$  verbindet, ist *unabhängig* vom eingeschlagenen Verbindungsweg, solange dieser vollständig im Bereich liegt.

- (2) Das Linienintegral längs einer im Bereich liegenden *geschlossenen* Kurve  $C$  hat stets den Wert *Null*:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (\text{I-380})$$

- (3) Der Feldvektor  $\vec{F}$  ist überall im Bereich als *Gradient* einer Potentialfunktion  $\phi$  darstellbar:

$$\vec{F} = \text{grad } \phi \quad (\text{I-381})$$

- (4) Das Vektorfeld  $\vec{F}$  ist im Bereich *wirbelfrei*:

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0} \quad (\text{I-382})$$

- (5) Das Skalarprodukt  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$  ist das *totale* oder *vollständige Differential* einer Potentialfunktion  $\phi$ :

$$d\phi = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{I-383})$$

### ■ Beispiele

- (1) Das *ebene* Vektorfeld  $\vec{F}(x; y) = 3x^2y\vec{e}_x + x^3\vec{e}_y$  ist *konservativ*, d. h. ein *Potentialfeld*, da

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2y) = 3x^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^3) = 3x^2$$

und die *Integrabilitätsbedingung* (I-373) für ein ebenes Feld somit in der gesamten  $x, y$ -Ebene erfüllt ist:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 3x^2$$

Das Linienintegral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (3x^2y \, dx + x^3 \, dy)$$

ist daher *wegunabhängig*.

Dabei ist  $C$  ein *beliebiger* Verbindungsweg zweier Punkte  $P_1$  und  $P_2$ , d. h. es gilt:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} (3x^2y \, dx + x^3 \, dy)$$

Wir bestimmen nun die *Potentialfunktion*  $\phi(P) = \phi(x; y)$ , deren partielle Ableitungen 1. Ordnung wir bereits kennen. Denn es gilt ja

$$\vec{F} = \text{grad } \phi$$

und somit

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_x = 3x^2y \quad \text{und} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = F_y = x^3$$

Wir integrieren die partielle Ableitung  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  nach  $x$  und beachten dabei, dass die Integrationskonstante noch von der Variablen  $y$  abhängen kann:

$$\phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial x} \, dx = \int 3x^2y \, dx = y \cdot \int 3x^2 \, dx = x^3y + K(y)$$

Durch *partielle* Differentiation nach  $y$  und unter Berücksichtigung von  $\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^3$  erhalten wir daraus schließlich:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^3y + K(y)) = x^3 + K'(y) = x^3 \Rightarrow$$

$$K'(y) = 0 \Rightarrow K(y) = \text{const.} = K_0$$

Die *Potentialfunktion* lautet daher:

$$\phi(x; y) = x^3y + K_0$$

Für einen *beliebigen* von  $P_1 = (x_1; y_1)$  nach  $P_2 = (x_2; y_2)$  führenden Integrationsweg  $C$  gilt somit:

$$\begin{aligned} \int_C (3x^2y \, dx + x^3 \, dy) &= \int_{P_1}^{P_2} d\phi = \left[ \phi(x; y) \right]_{(x_1; y_1)}^{(x_2; y_2)} = \left[ x^3y + K_0 \right]_{(x_1; y_1)}^{(x_2; y_2)} \\ &= (x_2^3y_2 + K_0) - (x_1^3y_1 + K_0) = x_2^3y_2 - x_1^3y_1 \end{aligned}$$

(2) Wir betrachten das folgende in *Polarkoordinaten* definierte Vektorfeld:

$$\vec{F} = \vec{F}(r; \varphi) = r \vec{e}_r + \frac{\varphi}{r} \vec{e}_\varphi \quad (r > 0)$$

Die *Rotation* dieses Feldes *verschwindet* in jedem Bereich, der den Koordinatenursprung *nicht* enthält. Denn mit

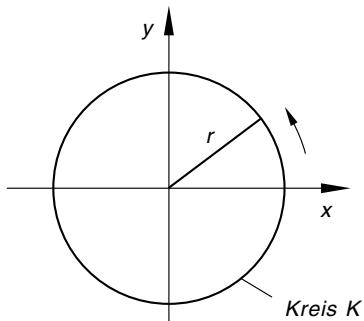
$$F_r = r \quad \text{und} \quad F_\varphi = \frac{\varphi}{r}$$

folgt nach Gleichung (I-244) für die *z-Komponente* der *Rotation* (die *x-* und *y-Komponenten verschwinden bei einem ebenen Feld bekanntlich automatisch*):

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{F})_z &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot F_\varphi) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\varphi}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r) \right] = \\ &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r) \right] = \frac{1}{r} (0 - 0) = 0 \end{aligned}$$

Das Vektorfeld  $\vec{F}$  ist somit für  $r > 0$  *wirbelfrei*.

Jetzt berechnen wir das *Linienintegral* dieses Feldes längs des Mittelpunktskreises  $K$  mit dem Radius  $r$  (Bild I-120).



**Bild I-120**

Zur Integration längs eines Mittelpunktskreises mit dem Radius  $r$

Da der Vektor  $d\vec{r}$  hier *tangentielle* Richtung hat und somit zum Tangenteneinheitsvektor (Basisvektor)  $\vec{e}_\varphi$  *parallel* verläuft, lässt er sich in der Form

$$d\vec{r} = ds \vec{e}_\varphi = (r d\varphi) \vec{e}_\varphi$$

darstellen<sup>18)</sup>. Damit erhalten wir für das Skalarprodukt  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$  den Ausdruck

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \left( r \vec{e}_r + \frac{\varphi}{r} \vec{e}_\varphi \right) \cdot d\vec{r} = \left( r \vec{e}_r + \frac{\varphi}{r} \vec{e}_\varphi \right) \cdot (r d\varphi \vec{e}_\varphi) = \\ &= r^2 d\varphi \underbrace{(\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi)}_0 + \varphi d\varphi \underbrace{(\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi)}_1 = \varphi d\varphi \end{aligned}$$

Zur Erinnerung: Die Basisvektoren  $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$  sind *orthogonale* Einheitsvektoren.

<sup>18)</sup>  $ds = r d\varphi$  ist das *Linienelement* des Kreises.

Das Linienintegral längs des Kreises  $K$  besitzt damit den folgenden Wert:

$$\oint_K \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \varphi \, d\varphi = \left[ \frac{1}{2} \varphi^2 \right]_0^{2\pi} = 2\pi^2$$

Wir erhalten somit längs der geschlossenen Kreislinie einen von Null *verschiedenen* Wert, obwohl die Rotation des Vektorfeldes  $\vec{F}$  verschwindet. Diesen nur *scheinbaren* Widerspruch lösen wir wie folgt auf:

Die Integrationskurve  $K$  umschließt eine *Singularität*, nämlich den *Nullpunkt*  $r = 0$ , in dem der Feldvektor  $\vec{F}$  nicht definiert ist. Unsere Kreislinie liegt somit *nicht* – wie im Kriterium (I-373) gefordert – in einem *einfach zusammenhängenden* Bereich, sondern in einem *zweifach zusammenhängenden* Bereich (gesamte  $x$ ,  $y$ -Ebene mit *Ausnahme* eines „Loches“ im Nullpunkt). Diese Aussage gilt im übrigen auch für jede andere *geschlossene* Kurve um den Nullpunkt. Mit anderen Worten: Die Kreislinie  $K$  liegt in einem Bereich, in dem die Bedingung  $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$  nur für  $r > 0$  erfüllt ist. Das Kriterium für die Wegunabhängigkeit eines Kurven- oder Linienintegrals ist somit in unserem konkreten Fall *nicht* anwendbar.

- (3) Im letzten Beispiel des Abschnitts 7.3 haben wir gesehen, dass der Wert des ebenen Kurvenintegrals

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (xy^2 \, dx + xy \, dy)$$

noch vom *eingeschlagenen* Verbindungsweg  $C$  der beiden Punkte  $O = (0; 0)$  und  $P = (1; 1)$  abhängt (siehe hierzu Bild I-115). Der Grund dafür ist, dass die Integrabilitätsbedingung (I-373) bzw. (I-376) für die Wegunabhängigkeit eines (ebenen) Kurvenintegrals hier *nicht* erfüllt ist. Für die  $z$ -Komponente der Rotation des ebenen Vektorfeldes  $\vec{F}(x; y)$  mit den Komponenten  $F_x = xy^2$  und  $F_y = xy$  gilt nämlich

$$[\operatorname{rot} \vec{F}]_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (xy) - \frac{\partial}{\partial y} (xy^2) = y - 2xy \neq 0$$

und somit  $\operatorname{rot} \vec{F} \neq \vec{0}$ .

- (4) Wir zeigen zunächst, dass das räumliche Vektorfeld  $\vec{F} = \begin{pmatrix} yz^2 \\ xz^2 \\ 2xyz \end{pmatrix}$  *konservativ* ist und berechnen dann das Linienintegral  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  längs der geradlinigen Verbindung der Punkte  $P_1 = (0; 0; 0)$  und  $P_2 = (1; 1; 2)$  auf direktem Wege und ein zweites Mal mit Hilfe des Potentials  $\phi$  des Vektorfeldes.

### Berechnung der Rotation des Vektorfeldes

Das Vektorfeld  $\vec{F}$  ist *wirbelfrei* und damit *konservativ*, da alle drei Komponenten der Rotation verschwinden:

*x-Komponente von  $\operatorname{rot} \vec{F}$*

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} (2xyz) - \frac{\partial}{\partial z} (xz^2) = 2xz - 2xz = 0$$

*y-Komponente von  $\operatorname{rot} \vec{F}$*

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} (yz^2) - \frac{\partial}{\partial x} (2xyz) = 2yz - 2yz = 0$$

*z-Komponente von  $\operatorname{rot} \vec{F}$*

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (xz^2) - \frac{\partial}{\partial y} (yz^2) = z^2 - z^2 = 0$$

Somit ist  $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$  und  $\vec{F}$  ein *konservatives* Vektorfeld.

### Direkte Berechnung des Linienintegrals

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) dt = ?$$

Parameterdarstellung des geradlinigen Verbindungsweges  $C$  der beiden Punkte  $P_1 = (0; 0; 0)$  und  $P_2 = (1; 1; 2)$ :

$$x = t, \quad y = t, \quad z = 2t \quad (\text{mit } 0 \leq t \leq 1)$$

Berechnung des *Skalarproduktes*  $\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$  im Linienintegral, ausgedrückt durch den Parameter  $t$ :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} yz^2 \\ xz^2 \\ 2xyz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot 4t^2 \\ t \cdot 4t^2 \\ 2 \cdot t \cdot t \cdot 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t^3 \\ 4t^3 \\ 4t^3 \end{pmatrix} = 4t^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = 4t^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4t^3 (1 + 1 + 2) = 4t^3 \cdot 4 = 16t^3$$

Damit erhalten wir für das gesuchte *Linienintegral* den folgenden Wert:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) dt = \int_0^1 16t^3 dt = \left[ 4t^4 \right]_0^1 = 4$$

### Bestimmung der Potentialfunktion $\phi$

Wegen  $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$  ist  $\vec{F}$  ein *Gradientenfeld*, d. h. es ist  $\vec{F} = \operatorname{grad} \phi$  mit der noch unbekannten Potentialfunktion  $\phi$ . Somit muss gelten:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_x = yz^2, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = F_y = xz^2, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = F_z = 2xyz$$

Aus diesen einfachen (partiellen) Differentialgleichungen lässt sich das gesuchte Potential  $\phi$  wie folgt bestimmen. Zunächst integrieren wir die erste Gleichung nach  $x$  und beachten dabei, dass die auftretende „Integrationskonstante“  $K_1$  noch von den beiden übrigen Variablen  $y$  und  $z$  abhängen kann, d. h. eine Funktion von  $y$  und  $z$  sein kann:

$$\phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \int yz^2 dx = yz^2 \cdot \int 1 dx = xyz^2 + K_1(y; z)$$

Wir bestimmen jetzt die „Integrationskonstante“  $K_1(y; z)$ . Die partielle Ableitung des Potentials  $\phi$  nach  $y$  muss  $F_y = xz^2$  ergeben. Somit gilt:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xyz^2 + K_1(y; z)) = xz^2 + \frac{\partial K_1}{\partial y} = xz^2$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\frac{\partial K_1}{\partial y} = 0 \Rightarrow K_1 = K_2(z)$$

$K_1$  ist somit von  $y$  unabhängig, kann aber noch von  $z$  abhängen.

Zwischenergebnis:

$$\phi = xyz^2 + K_2(z)$$

Die noch unbekannte „Integrationskonstante“  $K_2(z)$  bestimmen wir wie folgt aus der Bedingung  $\frac{\partial \phi}{\partial z} = F_z = 2xyz$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (xyz^2 + K_2(z)) = 2xyz + K'_2(z) = 2xyz \Rightarrow$$

$$K'_2(z) = 0 \Rightarrow K_2(z) = \text{const.} = C$$

Damit erhalten wir folgende *Potentialfunktion*:

$$\phi = \phi(x; y; z) = xyz^2 + C \quad (\text{mit } C \in \mathbb{R})$$

### Berechnung des Linienintegrals mit Hilfe der Potentialfunktion $\phi = xyz^2$

Das gesuchte Linienintegral ist *wegunabhängig*, hängt also nur vom Anfangspunkt  $P_1 = (0; 0; 0)$  und dem Endpunkt  $P_2 = (1; 1; 2)$  des Integrationsweges, *nicht* aber vom eingeschlagenen Verbindungsweg der beiden Punkte ab. Wir erhalten (in Übereinstimmung mit der direkten Integralberechnung längs der geradlinigen Verbindung der beiden Punkte):

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{P_1}^{P_2} d\phi = \left[ \phi(x; y; z) \right]_{P_1}^{P_2} = \left[ xyz^2 \right]_{(0; 0; 0)}^{(1; 1; 2)} = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 4 - 0 = 4 \end{aligned}$$

■

## 7.5 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik

### 7.5.1 Kugel- oder radialsymmetrische Vektorfelder (Zentralfelder)

Wie bereits aus Abschnitt 6.3.4 bekannt, verschwindet die Rotation eines *kugel- oder radialsymmetrischen* Vektorfeldes oder *Zentralfeldes*  $\vec{F} = f(r) \vec{e}_r$  in jedem Bereich, der den Nullpunkt  $r = 0$  *nicht* enthält:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{rot} [f(r) \vec{e}_r] = \vec{0} \quad (r > 0) \quad (\text{I-384})$$

Daher ist ein Zentralfeld in jedem *einfach* zusammenhängenden Gebiet, das den Nullpunkt ausschließt, *konservativ*. Da aber der Nullpunkt die *einige* singuläre Stelle im Raum ist, lässt sich *jede* geschlossene Kurve  $C$  ober- oder unterhalb des Nullpunktes auf einen Punkt zusammenziehen. Der Raum ohne Nullpunkt stellt also für ein Zentralfeld einen *einfach* zusammenhängenden Bereich dar. Somit gilt für *jede* geschlossene Kurve  $C$ , die *nicht* durch den Nullpunkt verläuft:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (\text{I-385})$$

Mit anderen Worten: Ein *kugel-* oder *radialsymmetrisches* Vektorfeld (Zentralfeld) ist stets *konservativ*.

**Über die Wegunabhängigkeit eines Linien- oder Kurvenintegrals in einem kugel- oder radialsymmetrischen Vektorfeld (Zentraffeld)**

Ein *kugel- oder radialsymmetrisches Vektorfeld (Zentraffeld)*  $\vec{F} = f(r) \vec{e}_r$  ist stets *konservativ*, das Linien- oder Kurvenintegral  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  ist daher nur vom *Anfangspunkt* und *Endpunkt* abhängig, nicht aber vom eingeschlagenen *Verbindungsweg C* der beiden Punkte.

■ **Beispiel**

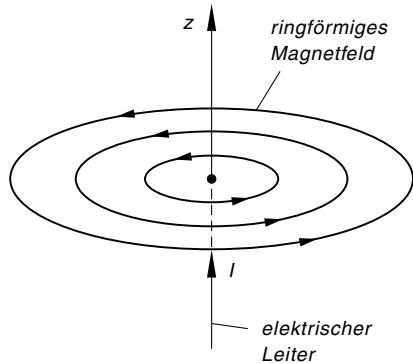
Sowohl das *Gravitationsfeld* der Erde als auch das *elektrische Feld* einer Punktladung sind *Zentraffelder* und somit *konservative Vektorfelder*.

### 7.5.2 Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters

In der Umgebung eines stromdurchflossenen linearen Leiters existiert ein *ringförmiges Magnetfeld* mit der *magnetischen Feldstärke*

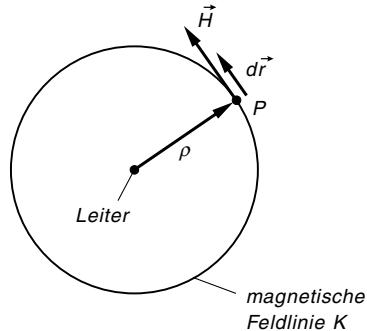
$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi \quad (\rho > 0) \quad (\text{I-386})$$

(in *Zylinderkoordinaten*;  $I$ : Stromstärke;  $\rho$ : senkrechter Abstand des Punktes  $P$  von der Leiterachse =  $z$ -Achse; siehe Bild I-121).



**Bild I-121**

Ringförmiges Magnetfeld in der Umgebung eines stromdurchflossenen linearen Leiters



**Bild I-122**

Zur Integration längs einer kreisförmigen magnetischen Feldlinie (die Leiterachse ist senkrecht zur Zeichenebene)

Wir interessieren uns nun für das geschlossene Linienintegral  $\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{r}$  längs einer *kreisförmigen Feldlinie K* um den Leiter (Berechnung der sog. „Zirkulation“; siehe Bild I-122).

Der *differentielle* Verschiebungsvektor  $d\vec{r}$  liegt dabei in der *Kreistangente* und ist somit in der Form

$$d\vec{r} = ds \vec{e}_\varphi \quad (\text{I-387})$$

darstellbar, wobei  $ds$  das *Linienelement* bedeutet. Daher gilt:

$$\vec{H} \cdot d\vec{r} = \left( \frac{I}{2\pi\varrho} \vec{e}_\varphi \right) \cdot (ds \vec{e}_\varphi) = \frac{I}{2\pi\varrho} ds \underbrace{(\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi)}_1 = \frac{I}{2\pi\varrho} ds \quad (\text{I-388})$$

Wir erhalten damit für die *Zirkulation* den folgenden Wert:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{r} = \frac{I}{2\pi\varrho} \cdot \oint_K ds = \frac{I}{2\pi\varrho} \cdot 2\pi\varrho = I \quad (\text{I-389})$$

Dabei haben wir berücksichtigt, dass das geschlossene Linienintegral  $\oint_K ds$  den *Umfang* der kreisförmigen magnetischen Feldlinie beschreibt und somit den Wert  $2\pi\varrho$  besitzt.

Die Zirkulation hat also den von Null *verschiedenen* Wert  $I$ . Dies aber bedeutet, dass das Magnetfeld *nicht konservativ* sein kann, obwohl *außerhalb* der Leiterachse, d. h. für  $\varrho > 0$  die *Rotation* des Feldes *verschwindet* (folgt aus Gleichung (I-277) mit  $H_\varrho = 0$ ,  $H_\varphi = \frac{I}{2\pi\varrho}$  und  $H_z = 0$ ):

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial\varrho} (\varrho \cdot H_\varphi) \vec{e}_z = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial\varrho} \left( \varrho \cdot \frac{I}{2\pi\varrho} \right) \vec{e}_z = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial\varrho} \left( \frac{I}{2\pi} \right) \vec{e}_z = \\ &= \frac{1}{\varrho} \cdot 0 \vec{e}_z = 0 \vec{e}_z = \vec{0} \quad \text{für} \quad \varrho > 0 \end{aligned} \quad (\text{I-390})$$

Diesen nur *scheinbaren* Widerspruch klären wir wie folgt auf:

Das Kriterium für die Wegunabhängigkeit eines Linienintegrals setzt bekanntlich voraus, dass der Bereich, in dem die Rotation des Feldes verschwinden muss, *einfach* zusammenhängend ist. Genau diese Voraussetzung ist jedoch in unserem Fall *nicht* gegeben. Denn die kreisförmige Feldlinie umschließt die (unendlich lange !) Leiterachse, längs der das Magnetfeld überhaupt *nicht* definiert ist, und lässt sich somit *nicht* auf einen Punkt zusammenziehen, ohne dabei die Leiterachse zu schneiden. Die Voraussetzung eines *einfach* zusammenhängenden Bereiches ist daher in diesem Anwendungsbeispiel *nicht* gegeben.

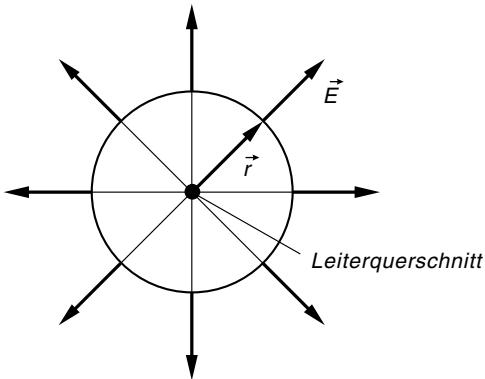
### 7.5.3 Elektrisches Feld in der Umgebung eines homogen geladenen Drahtes

Wir betrachten das *elektrische Feld* in der Umgebung eines unendlich langen homogen geladenen Drahtes. Wegen der *Zylindersymmetrie* des Feldes können wir uns auf einen *ebenen* Schnitt *senkrecht* zum Leiter beschränken. Das elektrische Feld besitzt dann die in Bild I-123 skizzierte Struktur.

Es lässt sich (in Polarkoordinaten) durch die *elektrische Feldstärke*

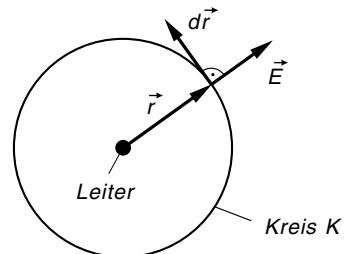
$$\vec{E} = \vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r \quad (r > 0) \quad (\text{I-391})$$

beschreiben ( $\lambda$ : Ladungsdichte, d. h. Ladung pro Längeneinheit;  $\epsilon_0$ : elektrische Feldkonstante).



**Bild I-123**

Elektrisches Feld in der Umgebung eines homogen geladenen Drahtes (*positive* Ladungsdichte; ebener Schnitt senkrecht zur Drahtachse)



**Bild I-124**

Zur Integration längs eines konzentrischen Kreises (Leiter senkrecht zur Zeichenebene)

Wir interessieren uns für die sog. *Umlaufspannung*  $\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{r}$ , wobei wir als Integrationsweg einen *konzentrischen Kreis*  $K$  mit dem Radius  $r$  wählen (Bild I-124). Da der *differentielle Verschiebungsvektor*  $d\vec{r}$  *tangentielle* Richtung besitzt und somit auf dem Feldstärkevektor  $\vec{E}$  *senkrecht* steht, verschwindet das Skalarprodukt dieser Vektoren, d. h. es gilt

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (\text{I-392})$$

und somit auch

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (\text{I-393})$$

Dieses Ergebnis ist aus *physikalischer* Sicht völlig einleuchtend, da die Integration längs einer *Äquipotentiallinie* des Feldes erfolgt, auf der das Potential bekanntlich einen *konstanten* Wert besitzt. Es lässt sich sogar zeigen, dass das Linienintegral  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$  für jede geschlossene Kurve  $C$  verschwindet.

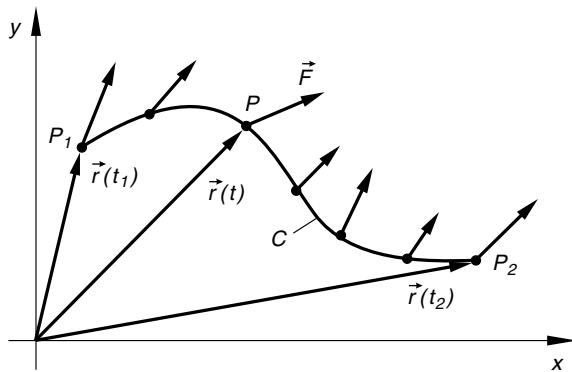
## 7.6 Arbeitsintegral

### 7.6.1 Arbeit eines Kraftfeldes

Unser einführendes Beispiel in Abschnitt 7.1 führte uns zu dem als *Arbeitsintegral* bezeichneten Linien- oder Kurvenintegral

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) dt \quad (I-394)$$

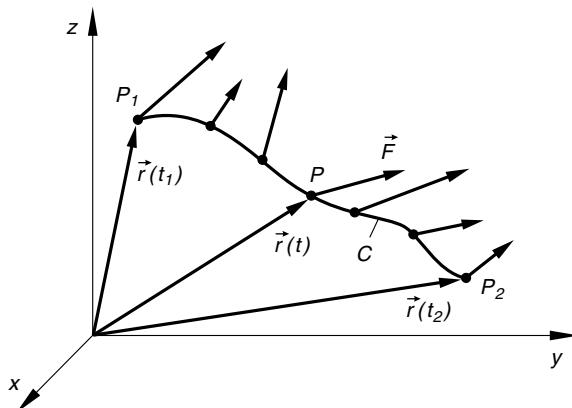
Es beschreibt die *physikalische Arbeit*, die das *ebene Kraftfeld*  $\vec{F}(x; y)$  an einem Massenpunkt verrichtet, wenn dieser unter dem Einfluss des Feldes von einem Punkt  $P_1$  aus längs der Kurve  $C$  in einen Punkt  $P_2$  verschoben wird (Bild I-125).  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  ist dabei der *Ortsvektor* der Kurve,  $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t)$  der zugehörige *Tangentenvektor* ( $t_1 \leq t \leq t_2$ ).



**Bild I-125**

Zum Begriff des Arbeitsintegrals  
in einem *ebenen* Kraftfeld

Die Integralformel (I-394) gilt sinngemäß auch für ein *räumliches* Kraftfeld  $\vec{F}(x; y; z)$  und eine *Raumkurve*  $C$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ,  $t_1 \leq t \leq t_2$  (Bild I-126).



**Bild I-126**

Zum Begriff des Arbeitsintegrals  
in einem *räumlichen* Kraftfeld

**Arbeit eines Kraftfeldes (Arbeitsintegral)**

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) dt \quad (I-395)$$

Dabei bedeuten:

- $\vec{F}$ : *Kraftfeld* mit den skalaren Komponenten  $F_x(x; y; z)$ ,  $F_y(x; y; z)$ ,  $F_z(x; y; z)$
- $d\vec{r}$ : *Wegelement* (*differentieller Verschiebungsvektor*) mit den skalaren Komponenten  $dx, dy, dz$
- $\vec{r}$ : *Ortsvektor* der Integrationskurve  $C$  mit den skalaren Komponenten  $x(t), y(t), z(t)$  ( $t_1 \leq t \leq t_2$ ).
- $\dot{\vec{r}}$ : *Tangentenvektor* der Integrationskurve  $C$  mit den skalaren Komponenten  $\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)$

**Anmerkungen**

- (1) Man beachte, dass das Arbeitsintegral (I-395) die vom *Kraftfeld* an einer Masse verrichtete Arbeit angibt. Sie kann positiv *oder* negativ ausfallen.
- (2) In den Anwendungen wird das *Wegelement*  $d\vec{r}$  häufig auch durch das Symbol  $d\vec{s}$  (*infinitesimaler Verschiebungsvektor*) gekennzeichnet.
- (3) Eine besondere Rolle spielen in den Anwendungen die *konservativen* Felder (*Potentialfelder*). Zu ihnen gehören z. B. die *homogenen* und *kugelsymmetrischen* Kraftfelder der Physik. Diese Felder erfüllen die Bedingungen (I-374) bzw. (I-375) für die *Wegunabhängigkeit* eines Linienintegrals. Das Arbeitsintegral (I-395) hängt daher in einem *konservativen* Kraftfeld nur vom *Anfangs-* und *Endpunkt* des We- ges, nicht aber vom *Verbindungsweg* der beiden Punkte ab.

### 7.6.2 Ein Anwendungsbeispiel: Elektronen im Magnetfeld

Wir betrachten einen *Elektronenstrahl*, der mit der (konstanten) Geschwindigkeit  $\vec{v}$  *senkrecht* in ein homogenes Magnetfeld mit der Flussdichte  $\vec{B}$  eingeschossen wird. Die Elektronen erfahren dort die sog. *Lorentz-Kraft*

$$\vec{F}_L = -e(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (I-396)$$

die als *Vektorprodukt* aus  $\vec{v}$  und  $\vec{B}$  daher sowohl zur Bewegungsrichtung als auch zur Richtung des Magnetfeldes *senkrecht* steht ( $e$ : Elementarladung; Elektronen tragen bekanntlich eine *negative* Elementarladung). Die Lorentz-Kraft wirkt dabei als *Zentripetalkraft* und zwingt die Elektronen auf eine *Kreisbahn*  $K$  um die Feldrichtung als Achse (Bild I-127).

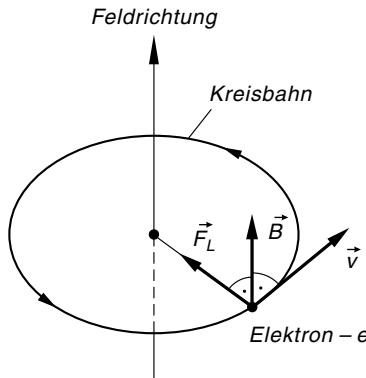


Bild I-127

Kreisförmige Elektronenbahn in einem homogenen Magnetfeld

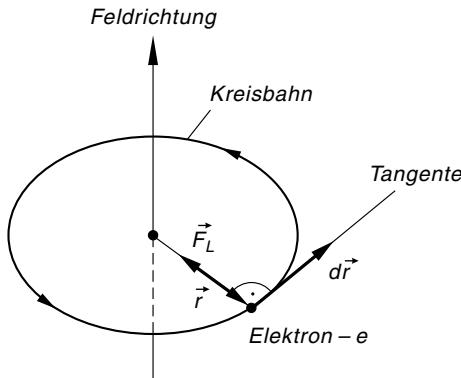


Bild I-128

Das homogene Magnetfeld verrichtet *keine* Arbeit an dem Elektron

Das Magnetfeld verrichtet jedoch *keine* Arbeit an den Elektronen, wie wir jetzt zeigen wollen. In dem Zeitintervall  $dt$  hat sich ein Elektron in der *Tangentenrichtung* um das (infinitesimal kleine) geradlinige Wegelement  $d\vec{r}$  fortbewegt. Die auf das Elektron einwirkende Lorentz-Kraft  $\vec{F}_L$  steht dabei *senkrecht* auf dem Verschiebungsvektor  $d\vec{r}$  (Bild I-128). Daher ist

$$dW = \vec{F}_L \cdot d\vec{r} = 0 \quad (\text{I-397})$$

und das Arbeitsintegral (I-395) *verschwindet* somit:

$$W = \oint_K dW = \oint_K \vec{F}_L \cdot d\vec{r} = 0 \quad (\text{I-398})$$

(das geschlossene Linienintegral gibt die vom Magnetfeld verrichtete Arbeit *pro Umlauf* an).

Zum *gleichen* Ergebnis gelangt man auch wie folgt. Es ist

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{und somit} \quad d\vec{r} = \vec{v} dt \quad (\text{I-399})$$

Die im Zeitintervall  $dt$  vom Magnetfeld  $\vec{B}$  an einem Elektron verrichtete Arbeit beträgt dann definitionsgemäß:

$$dW = \vec{F}_L \cdot d\vec{r} = -e \underbrace{(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}}_{[\vec{v} \vec{B} \vec{v}]} dt = -e \underbrace{[\vec{v} \vec{B} \vec{v}]}_0 dt = 0 \quad (\text{I-400})$$

Denn das *Spatprodukt*  $[\vec{v} \vec{B} \vec{v}] = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}$  *verschwindet*, da es zwei *gleiche* Vektoren enthält.

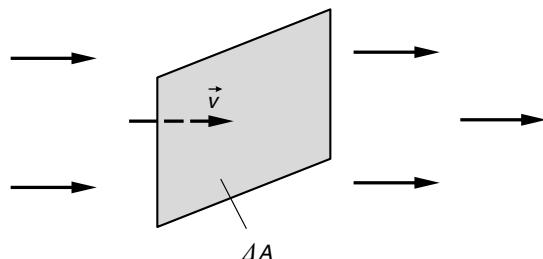
## 8 Oberflächenintegrale

### 8.1 Ein einführendes Beispiel

Der Begriff eines *Oberflächenintegrals* lässt sich in anschaulicher Weise am konkreten Beispiel einer *Flüssigkeitsströmung* einführen. Dabei interessieren wir uns zunächst für die Flüssigkeitsmenge, die in der Zeiteinheit durch ein (völlig durchlässiges) *ebenes Flächenelement* strömt, das in die strömende Flüssigkeit eingebracht wurde. Unser Strömungsmodell werden wir dann schrittweise erweitern, bis wir auf das sog. *Flussintegral* oder *Oberflächenintegral* stoßen. Dieses Integral ist dann ein *Maß* für die Flüssigkeitsmenge, die in der Zeiteinheit durch ein bestimmtes Flächenstück hindurchströmt, das in das Strömungsfeld der Flüssigkeit gebracht wurde.

#### Konstante Strömungsgeschwindigkeit, Flächenelement senkrecht zur Strömung (Bild I-129)

Wir betrachten eine Flüssigkeitsströmung mit der *konstanten* Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{v}$ . In diese Strömung bringen wir ein ebenes, völlig durchlässiges *Flächenelement*  $\Delta A$  und zwar *senkrecht* zur Strömungsrichtung (Bild I-129).



**Bild I-129**

Flüssigkeitsströmung durch ein Flächenelement  $\Delta A$ , das senkrecht zur Strömung orientiert ist

Welche Flüssigkeitsmenge fließt in der Zeiteinheit durch dieses Flächenelement? Wir lösen diese Aufgabe wie folgt:

Ein Flüssigkeitsteilchen legt in der Zeit  $\Delta t$  den Weg  $\Delta s = v \cdot \Delta t$  zurück ( $v = |\vec{v}|$ ). Dann fließen alle diejenigen Teilchen, die sich zum Zeitpunkt  $t$  *links* vom Flächenelement  $\Delta A$  befinden und von diesem einen Abstand haben, der *nicht größer* ist als  $\Delta s$ , in den folgenden  $\Delta t$  Sekunden durch diese Fläche hindurch. Dies aber sind genau diejenigen Flüssigkeitsteilchen, die sich zum Zeitpunkt  $t$  in dem *quaderförmigen* Volumenelement

$$\Delta V = (\Delta A) \Delta s = \Delta A \cdot v \cdot \Delta t \quad (\text{I-401})$$

*links* vom Flächenelement  $\Delta A$  befinden (Bild I-130).

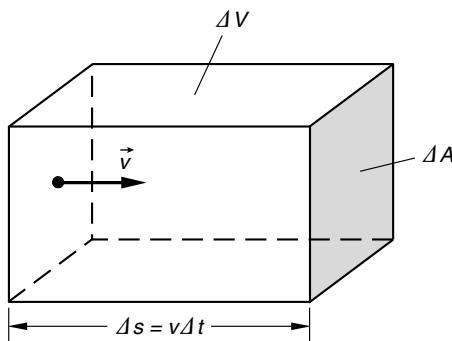


Bild I-130

Daher strömt in der Zeiteinheit die Flüssigkeitsmenge (Flüssigkeitsvolumen)

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = v \cdot \Delta A \quad (\text{I-402})$$

durch das Flächenelement  $\Delta A$ <sup>19)</sup>. Wir sprechen in diesem Zusammenhang auch von einem *Flüssigkeitsfluss* durch das Flächenelement  $\Delta A$ .

Wir führen nun ein *vektorielles* Flächenelement  $\Delta \vec{A}$  mit den folgenden Eigenschaften ein (Bild I-131):

- (1) Der Vektor  $\Delta \vec{A}$  steht *senkrecht* auf dem Flächenelement  $\Delta A$ .
- (2) Der *Betrag* des Vektors  $\Delta \vec{A}$  entspricht dem *Flächeninhalt* des Flächenelements  $\Delta A$ , d. h. es ist  $|\Delta \vec{A}| = \Delta A$ .

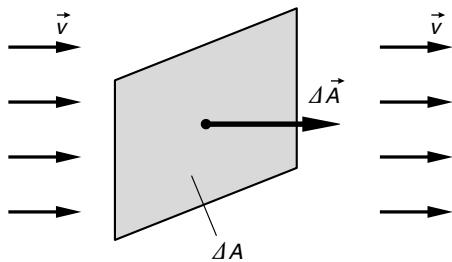


Bild I-131  
Vektorielles Flächenelement  $\Delta \vec{A}$

Wenn  $\vec{N}$  die *Flächennormale* ist (hier also ein *Einheitsvektor* in Richtung der Strömungsgeschwindigkeit  $v$ ), dann gilt (Bild I-132):

$$\Delta \vec{A} = \Delta A \vec{N} \quad (\text{I-403})$$

<sup>19)</sup> Wenn wir voraussetzen, dass die Dichte der Flüssigkeit den Wert  $\varrho = 1$  besitzt, sind Flüssigkeitsmenge (Masse) und Flüssigkeitsvolumen zahlenmäßig *gleich*.

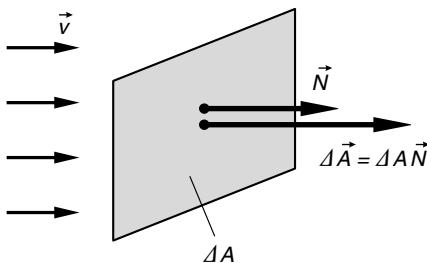


Bild I-132

Wir können jetzt die in der Zeiteinheit durch das Flächenelement  $\Delta A$  fließende Flüssigkeitsmenge auch wie folgt durch ein *Skalarprodukt* beschreiben (die Vektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{\Delta A}$  sind *parallel*):

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = v \cdot \Delta A = \vec{v} \cdot \Delta \vec{A} = \vec{v} \cdot (\Delta A \vec{N}) = (\vec{v} \cdot \vec{N}) \Delta A \quad (\text{I-404})$$

### Konstante Strömungsgeschwindigkeit, Flächenelement gegen die Strömung geneigt (Bild I-133)

Das Flächenelement  $\Delta A$  steht nicht mehr senkrecht zur Strömung, sondern liegt jetzt *schief* in dem Strömungsfeld. Die Flächennormale  $\vec{N}$  bzw. das vektorielle Flächenelement  $\vec{\Delta A}$  bildet dabei mit der Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{v}$  den Winkel  $\varphi$  (Bild I-133).

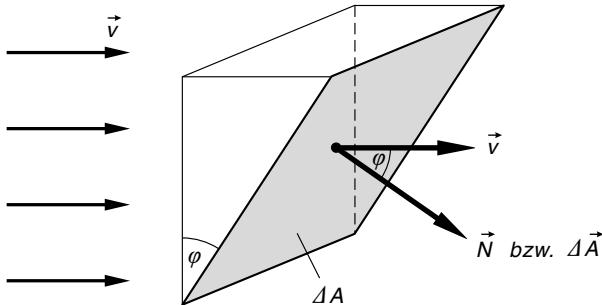


Bild I-133

Flüssigkeitsströmung durch ein Flächenelement  $\Delta A$ , das gegen die Strömung geneigt ist

Wir zerlegen nun den Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  in eine *Tangentialkomponente*  $\vec{v}_T$  und eine *Normalkomponente*  $\vec{v}_N$  (Bild I-134):

$$\vec{v} = \vec{v}_T + \vec{v}_N \quad (\text{I-405})$$

$\vec{v}_T$  liegt dabei im Flächenelement,  $\vec{v}_N$  steht senkrecht zum Flächenelement.

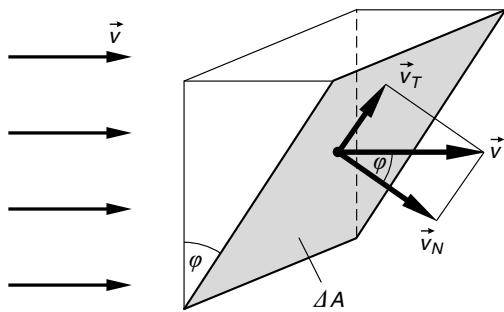


Bild I-134

Zerlegung des Geschwindigkeitsvektors  $\vec{v}$  in eine Tangential- und eine Normalkomponente

Zum Flüssigkeitsfluss durch das Flächenelement  $\Delta A$  liefert nur die *Normalkomponente*  $v_N = \vec{v} \cdot \vec{N}$  einen Beitrag ( $v_N$  ist die *Projektion* von  $\vec{v}$  auf die Flächennormale  $\vec{N}$ ). Der *Fluss* durch das Flächenelement  $\Delta A$  beträgt daher in der Zeiteinheit:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = v_N \cdot \Delta A = \vec{v} \cdot (\Delta A \vec{N}) = (\vec{v} \cdot \vec{N}) \Delta A = \vec{v} \cdot \Delta \vec{A} \quad (I-406)$$

Dabei ist  $\Delta \vec{A} = \Delta A \vec{N}$  wiederum das *orientierte* Flächenelement in Richtung der Flächennormale  $\vec{N}$ , d. h. der Vektor  $\Delta \vec{A}$  ist das *vektorielle Flächenelement*.

Wir betrachten noch einen *Sonderfall*: Das Flächenelement  $\Delta A$  liege jetzt *parallel* zur Strömungsrichtung ( $\varphi = 90^\circ$ ; Bild I-135).

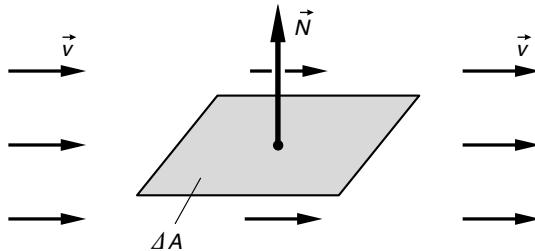


Bild I-135

In der Strömungsrichtung liegendes Flächenelement  $\Delta A$

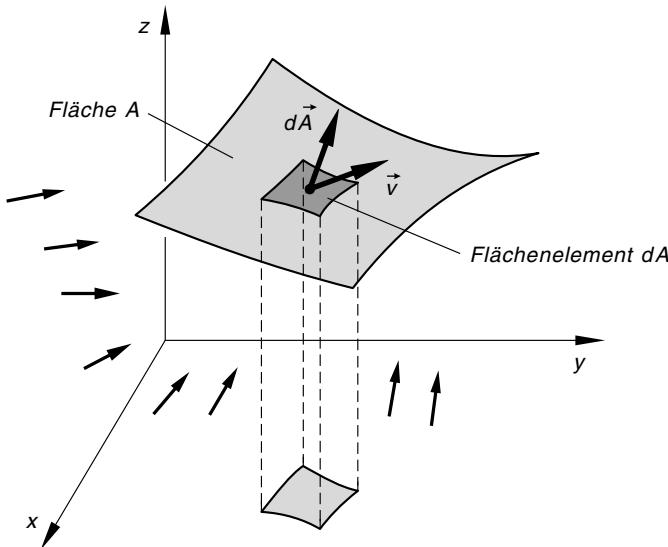
Dann steht die Flächennormale  $\vec{N}$  *senkrecht* auf dem Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$ , das Skalarprodukt  $\vec{v} \cdot \vec{N}$  *verschwindet* also und somit ist

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{N})}_{0} \Delta A = 0 \quad (I-407)$$

Mit anderen Worten: In diesem Fall strömt *keinerlei* Flüssigkeit durch das Flächenelement  $\Delta A$ , da die Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{v}$  *keine* Normalkomponente besitzt. Die Flüssigkeit strömt vielmehr entlang des Flächenelementes und somit an diesem *vorbei*.

**Allgemeiner Fall: Ortsabhängige Strömungsgeschwindigkeit, beliebig gekrümmtes Flächenstück (Bild I-136)**

Wir gehen jetzt von einer Flüssigkeitsströmung aus, deren Geschwindigkeit  $\vec{v}$  sich von Ort zu Ort verändert:  $\vec{v} = \vec{v}(x; y; z)$ . Den Fluss durch eine beliebig *gekrümmte* Fläche  $A$ , die wir in das Strömungsfeld eingebracht haben, ermitteln wir dann wie folgt (Bild I-136):



**Bild I-136**

Strömung einer Flüssigkeit durch ein Flächenelement  $dA$  einer (beliebig gekrümmten) räumlichen Fläche

Zunächst zerlegen wir die Fläche in eine sehr große Anzahl von *Flächenelementen*, die wir daher als *nahezu eben* betrachten dürfen. Ferner kann die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  der Flüssigkeitsteilchen auf einem solchen infinitesimal kleinen Flächenelement  $dA$  als *nahezu konstant* angenommen werden. Der Flüssigkeitsfluss durch ein solches Flächenelement  $dA$  ist dann wiederum durch das *skalare Produkt*

$$\vec{v} \cdot d\vec{A} = \vec{v} \cdot (dA \vec{N}) = (\vec{v} \cdot \vec{N}) dA \quad (I-408)$$

gegeben ( $d\vec{A} = dA \vec{N}$  ist das zu  $dA$  gehörige *vektorielle* Flächenelement,  $\vec{N}$  die Flächennormale). Den *Gesamtfluss* durch die Fläche  $A$  erhalten wir, indem wir über die Beiträge aller in der Fläche gelegenen Flächenelemente *summieren*, d. h. *integrieren*. Die in der Zeiteinheit durch die Fläche  $A$  strömende Flüssigkeitsmenge ist somit durch das *Integral*

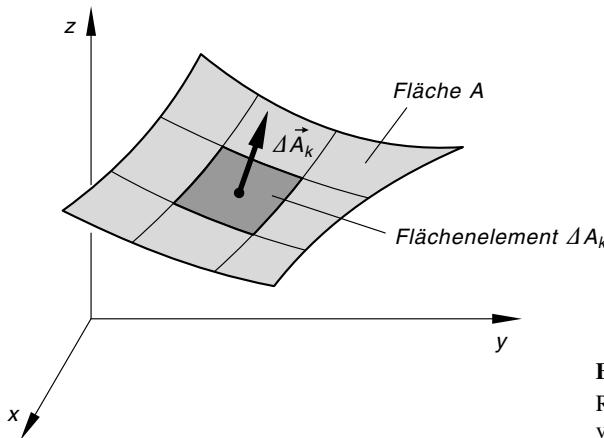
$$\iint_{(A)} \vec{v} \cdot d\vec{A} = \iint_{(A)} (\vec{v} \cdot \vec{N}) dA \quad (I-409)$$

gegeben, das wir als „*Oberflächenintegral*“ oder „*Flussintegral*“ bezeichnen wollen. Die Integration erfolgt dabei über eine *Fläche im Raum* („Oberfläche“) und lässt sich auf das bereits aus Band 2 bekannte *Doppelintegral* zurückführen.

## 8.2 Definition eines Oberflächenintegrals

Wir interessieren uns für den „Fluss“ eines (beliebigen) Vektorfeldes  $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z)$  durch eine *orientierte* Fläche  $A$  im Raum, wobei wir schrittweise wie folgt vorgehen werden<sup>20)</sup>.

- (1) Zunächst wird die Fläche  $A$  in eine sehr große Anzahl  $n$  von Teilflächen  $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_k, \dots, \Delta A_n$  zerlegt (Bild I-137). Jede Teilfläche kann dabei als *nahezu eben* betrachtet und somit durch ein *vektorielles* Flächenelement beschrieben werden. Der  $k$ -ten Teilfläche  $\Delta A_k$  entspricht also das *vektorielle* Flächenelement  $\Delta \vec{A}_k$  mit  $|\Delta \vec{A}_k| = \Delta A_k$  (für  $k = 1, 2, \dots, n$ ). Dieser Vektor steht somit *senkrecht* auf dem (nahezu ebenen) Teilflächenstück (Flächenelement)  $\Delta A_k$ .



**Bild I-137**

Räumliche Fläche mit einem vektoriellen Flächenelement  $\Delta \vec{A}_k$

- (2) Auf jeder Teilfläche (Flächenelement)  $\Delta A_k$  ist das Vektorfeld  $\vec{F}$  *nahezu homogen*, d. h. *konstant*. Ist  $P_k = (x_k; y_k; z_k)$  ein beliebig gewählter Punkt auf  $\Delta A_k$ , so gilt auf diesem kleinen Flächenstück  $\vec{F}(x; y; z) = \text{const.} \approx \vec{F}(x_k; y_k; z_k)$ . Der *Fluss* des Vektorfeldes  $\vec{F}$  durch diese Teilfläche ist dann nach den Überlegungen des vorherigen Abschnitts *näherungsweise* durch das *Skalarprodukt*

$$\vec{F}(x_k; y_k; z_k) \cdot \Delta \vec{A}_k \quad (\text{I-410})$$

gegeben (Bild I-138). Ist  $\vec{N}_k$  die Flächennormale im Flächenpunkt  $P_k$ , so können wir dafür auch schreiben:

$$\begin{aligned} \vec{F}(x_k; y_k; z_k) \cdot \Delta \vec{A}_k &= \vec{F}(x_k; y_k; z_k) \cdot (\Delta A_k \vec{N}_k) = \\ &= (\vec{F}(x_k; y_k; z_k) \cdot \vec{N}_k) \Delta A_k \end{aligned} \quad (\text{I-411})$$

<sup>20)</sup> Eine Fläche hat im Normalfall (von dem wir hier ausgehen) immer *zwei* Seiten. Sie heißt *orientiert*, wenn eine Vereinbarung getroffen wurde, die Flächennormale  $\vec{N}$  auf einer bestimmten Seite „anzuhafte[n]“.  $\vec{N}$  zeigt dann verabredungsgemäß in die *positive* Richtung.

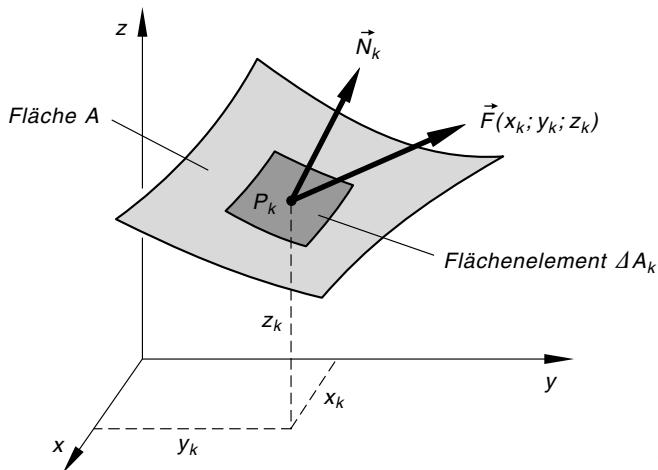


Bild I-138

Vektorfluss durch ein Flächenelement  $\Delta A_k$

Durch *Summierung* über alle Teilflächen erhalten wir für den gesuchten *Gesamtfluss* den folgenden *Näherungswert*:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}(x_k; y_k; z_k) \cdot \Delta \vec{A}_k = \sum_{k=1}^n (\vec{F}(x_k; y_k; z_k) \cdot \vec{N}_k) \Delta A_k \quad (I-412)$$

- (3) Dieser *Näherungswert* lässt sich noch *verbessern*, wenn wir in geeigneter Weise die Anzahl der Teilflächen *vergrößern*. Wir lassen nun die Anzahl  $n$  der Teilflächen *unbegrenzt wachsen* ( $n \rightarrow \infty$ ), wobei gleichzeitig der Durchmesser einer jeden Teilfläche gegen *Null* gehen soll. Bei diesem Grenzübergang strebt die Summe (I-412) gegen einen *Grenzwert*, der als *Oberflächenintegral* des Vektorfeldes  $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z)$  über die *orientierte* Fläche  $A$  bezeichnet wird. Wir definieren daher:

**Definition:** Der Grenzwert

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\Delta A_k \rightarrow 0)}} \sum_{k=1}^n \vec{F}(x_k; y_k; z_k) \cdot \Delta \vec{A}_k \quad (I-413)$$

wird (falls er *vorhanden* ist) als *Oberflächenintegral* des Vektorfeldes  $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z)$  über die *orientierte* Fläche  $A$  bezeichnet und durch das Symbol

$$\iint_{(A)} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA \quad (I-414)$$

gekennzeichnet.

### Anmerkungen

- (1) In dem Oberflächenintegral (I-414) bedeuten:

$d\vec{A}$ : Orientiertes (vektorielles) Flächenelement der Fläche  $A$  (mit  $|d\vec{A}| = dA$ )

$\vec{N}$ : Flächennormale ( $d\vec{A} = dA \vec{N}$ )

$A$ : Orientierte Fläche im Raum (Oberfläche)

- (2) Die Orientierung der Fläche ist durch die Flächennormale  $\vec{N}$  eindeutig festgelegt. Bei einer geschlossenen Fläche, z. B. der Oberfläche einer Kugel, eines Zylinders oder eines Quaders, zeigt dabei  $\vec{N}$  vereinbarungsgemäß nach außen.
- (3) Das Oberflächenintegral (I-414) wird mit der Normalkomponente von  $\vec{F}$ , nämlich  $F_N = \vec{F} \cdot \vec{N}$ , gebildet.

- (4) Auch die folgenden Bezeichnungen für das Oberflächenintegral sind allgemein gebräuchlich: Flussintegral des Vektorfeldes  $\vec{F}$  oder kurz Fluss des Feldvektors  $\vec{F}$  durch die Fläche  $A$  oder auch Flächenintegral des Vektorfeldes  $\vec{F}$  über die orientierte Fläche  $A$ .

- (5) Das Oberflächenintegral über eine geschlossene Fläche  $A$  wird durch das Symbol

$\iint_{(A)} \vec{F} \cdot d\vec{A}$  oder  $\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA$  gekennzeichnet. Folgende Bezeichnungen für

ein solches Integral sind in den Anwendungen üblich: Hullenintegral oder Fluss des Feldvektors  $\vec{F}$  durch die geschlossene Fläche  $A$  oder auch Ergiebigkeit des Feldvektors  $\vec{F}$ .

- (6) Durch die Gleichung  $\vec{F} = \vec{N}$  wird auf der räumlichen Fläche ein Vektorfeld definiert, das jedem Flächenpunkt die dortige Flächennormale  $\vec{N}$  als Feldvektor zuordnet. Die Gesamtheit der Flächennormalen kann also als ein spezielles Vektorfeld aufgefasst werden. Das Oberflächenintegral (I-414) geht dann wegen

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \vec{N} \cdot \vec{N} = 1 \quad (I-415)$$

in das spezielle Oberflächenintegral

$$\iint_{(A)} 1 dA = \iint_{(A)} dA = A \quad (I-416)$$

über, dessen Wert den Flächeninhalt  $A$  der räumlichen Fläche darstellt.  $dA$  ist dabei ein Flächenelement auf dieser Fläche.

## 8.3 Berechnung eines Oberflächenintegrals

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit der Berechnung eines Oberflächenintegrals unter Verwendung spezieller Raumkoordinaten bzw. geeigneter Flächenparameter. Stets lässt sich dabei das Oberflächenintegral auf ein Doppelintegral zurückführen (siehe hierzu Band 2, Kap. III, Abschnitt 3.1).

### 8.3.1 Oberflächenintegral in speziellen (symmetriegerechten) Koordinaten

Ein Oberflächenintegral  $\iint_{(A)} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA$  kann unter Verwendung geeigneter Koordinaten, die sich der *Symmetrie* des Problems in *optimaler* Weise anpassen, stets auf ein *Doppelintegral* zurückgeführt werden. Zur Verfügung stehen dabei *kartesische* Koordinaten, *Zylinderkoordinaten* und *Kugelkoordinaten*.

#### Berechnung eines Oberflächenintegrals unter Verwendung symmetriegerechter Koordinaten

Die Berechnung eines Oberflächenintegrals  $\iint_{(A)} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA$  erfolgt in vier Schritten:

1. Zunächst werden *geeignete* Koordinaten ausgewählt, die sich der *Symmetrie* des Problems in *optimaler* Weise anpassen. Zur Auswahl stehen dabei:
  - *Kartesische* Koordinaten  $x, y, z$
  - *Zylinderkoordinaten*  $q, \varphi, z$  (siehe Abschnitt 6.2)
  - *Kugelkoordinaten*  $r, \vartheta, \varphi$  (siehe Abschnitt 6.3)
2. Man bestimme dann die *Flächennormale*  $\vec{N}$ , berechne anschließend das *Skalarprodukt*  $\vec{F} \cdot \vec{N}$  und drücke dieses sowie das *Flächenelement*  $dA$  durch die gewählten Koordinaten aus.
3. Festlegung der *Integrationsgrenzen* im erhaltenen Doppelintegral.
4. Berechnung des Doppelintegrals in der bekannten Weise (siehe hierzu Band 2, Kap. III, Abschnitt 3.1.2).

Wir geben jetzt für die zur Verfügung stehenden Koordinaten jeweils ein ausführliches Rechenbeispiel.

#### ■ Beispiele

##### (1) Berechnung eines Oberflächenintegrals in kartesischen Koordinaten

Wie groß ist der *Fluss* des Vektorfeldes  $\vec{F} = \begin{pmatrix} 6z \\ -3y \\ 3 \end{pmatrix}$  durch die im *ersten Okta-*

*tant gelegene Fläche* der Ebene  $x + 2y + 2z = 2$ , die wir in Bild I-139 *grau* unterlegt haben?

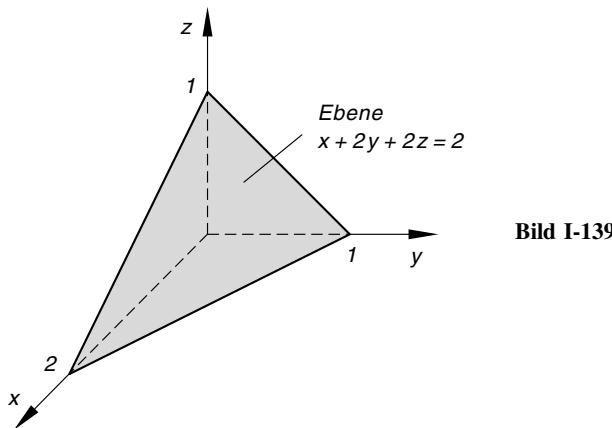


Bild I-139

*Lösung:* Wir verwenden in diesem Beispiel zweckmäßigerweise *kartesische Koordinaten*. Die Ebene mit der Gleichung  $x + 2y + 2z = 2$  können wir dabei als eine *Niveaumöglichkeit* des skalaren Feldes  $\phi(x; y; z) = x + 2y + 2z$  auffassen. Daher steht der *Gradient* dieses Feldes, d. h. der Vektor

$$\text{grad } \phi = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \\ \partial\phi/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

überall *senkrecht* auf dieser Ebene. Durch *Normierung* erhalten wir daraus dann die benötigte *Flächennormale*  $\vec{N}$ :

$$\vec{N} = \frac{1}{|\text{grad } \phi|} \text{grad } \phi = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen jetzt das *Skalarprodukt*  $\vec{F} \cdot \vec{N}$ :

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \begin{pmatrix} 6z \\ -3y \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} (6z - 6y + 6) = 2z - 2y + 2$$

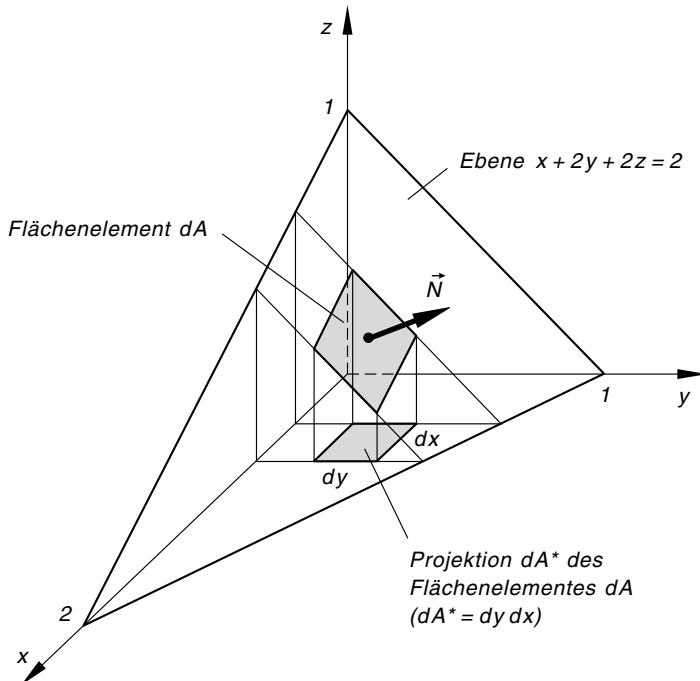
Da wir  $x$  und  $y$  als *unabhängige* Variable ansehen wollen, müssen wir noch  $z$  durch diese Variablen ausdrücken. Dies geschieht, in dem wir die Gleichung der Ebene nach  $z$  auflösen:

$$x + 2y + 2z = 2 \Rightarrow z = \frac{1}{2} (2 - x - 2y)$$

Diesen Ausdruck setzen wir dann in das Skalarprodukt  $\vec{F} \cdot \vec{N}$  ein:

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \vec{N} &= 2z - 2y + 2 = 2 \cdot \frac{1}{2} (2 - x - 2y) - 2y + 2 = \\ &= 2 - x - 2y - 2y + 2 = -x - 4y + 4\end{aligned}$$

Jetzt müssen wir uns noch mit dem in der Fläche (Ebene) liegenden *Flächenelement*  $dA$  beschäftigen (Bild I-140) und versuchen, dieses durch die *unabhängigen* kartesischen Koordinaten auszudrücken.



**Bild I-140** Projektion des Flächenelementes  $dA$  in die  $x, y$ -Ebene

Die *Projektion* des Flächenelementes  $dA$  in die  $x, y$ -Ebene ergibt ein infinitesimales Rechteck mit dem Flächeninhalt  $dA^* = dx dy = dy dx$ . Andererseits ist diese Projektion das *skalare Produkt* aus dem *vektoriellen Flächenelement*  $d\vec{A} = dA \vec{N}$  und dem *Einheitsvektor*  $\vec{e}_z$  in Richtung der positiven  $z$ -Achse. Somit gilt:

$$dA^* = d\vec{A} \cdot \vec{e}_z = (dA \vec{N}) \cdot \vec{e}_z = dA (\vec{N} \cdot \vec{e}_z) = (\vec{N} \cdot \vec{e}_z) dA = dy dx$$

Berechnung des Skalarproduktes  $\vec{N} \cdot \vec{e}_z$ :

$$\vec{N} \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} (0 + 0 + 2) = \frac{2}{3}$$

Somit ist

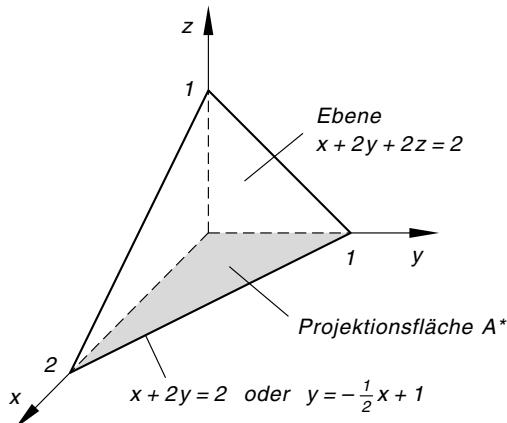
$$dA^* = (\vec{N} \cdot \vec{e}_z) dA = \frac{2}{3} dA = dy dx$$

und

$$dA = \frac{3}{2} dy dx$$

Damit haben wir das Flächenelement  $dA$  in *kartesischen* Koordinaten ausgedrückt. *Integriert* wird dabei über den in Bild I-141 *grau* unterlegten Bereich  $A^*$ , der durch *Projektion* der im 1. Oktant gelegenen Ebene auf die  $x, y$ -Ebene entstanden ist. Die *Schnittkurve* der Fläche  $x + 2y + 2z = 2$  mit der  $x, y$ -Ebene  $z = 0$  lautet dabei:

$$x + 2y = 2 \quad \text{oder} \quad y = -\frac{1}{2}x + 1$$



**Bild I-141** Projektion der im 1. Oktant gelegenen Ebene  $x + 2y + 2z = 2$  in die  $x, y$ -Ebene (Projektionsfläche:  $A^*$ )

Aus Bild I-141 ergeben sich die folgenden *Integrationsgrenzen*:

*y-Integration:* Von  $y = 0$  bis  $y = -\frac{1}{2}x + 1$

*x-Integration:* Von  $x = 0$  bis  $x = 2$

Das *Flussintegral (Oberflächenintegral)*  $\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA$  lässt sich dann wie folgt

durch ein *Doppelintegral* in kartesischen Koordinaten darstellen:

$$\begin{aligned} \iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA &= \iint_{(A^*)} (-x - 4y + 4) \cdot \frac{3}{2} dy dx = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \underbrace{\int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{-\frac{1}{2}x+1} (-x - 4y + 4) dy dx}_{I} = \frac{3}{2} I \end{aligned}$$

Gelöst wird das Doppelintegral  $I$  in der bekannten Weise durch *zwei* nacheinander auszuführende gewöhnliche Integrationen:

*Innere Integration (nach der Variablen y):*

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{-\frac{1}{2}x+1} (-x - 4y + 4) dy &= \left[ -xy - 2y^2 + 4y \right]_{y=0}^{-\frac{1}{2}x+1} = \\ &= -x \left( -\frac{1}{2}x + 1 \right) - 2 \left( -\frac{1}{2}x + 1 \right)^2 + 4 \left( -\frac{1}{2}x + 1 \right) = \\ &= \frac{1}{2}x^2 - x - 2 \left( \frac{1}{4}x^2 - x + 1 \right) - 2x + 4 = \\ &= \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 - 2x + 4 = -x + 2 \end{aligned}$$

(an der unteren Grenze  $y = 0$  verschwindet die in der eckigen Klammer stehende Stammfunktion)

*Außere Integration (nach der Variablen x):*

$$\int_{x=0}^2 (-x + 2) dx = \left[ -\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^2 = -2 + 4 = 2$$

Somit ist  $I = 2$  und unser *Oberflächenintegral* besitzt damit den folgenden Wert:

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \frac{3}{2} I = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$$

## (2) Berechnung eines Oberflächenintegrals in Zylinderkoordinaten<sup>21)</sup>

Der in Bild I-142 dargestellte Zylinder mit dem Radius  $R = 5$  und der Höhe  $H = 10$  wird von dem Vektorfeld  $\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z^2 \end{pmatrix}$  „durchflutet“. Wir wollen den

„Fluss“ dieses Vektorfeldes durch den Zylindermantel  $A$  bestimmen, wobei wir schrittweise wie folgt vorgehen:

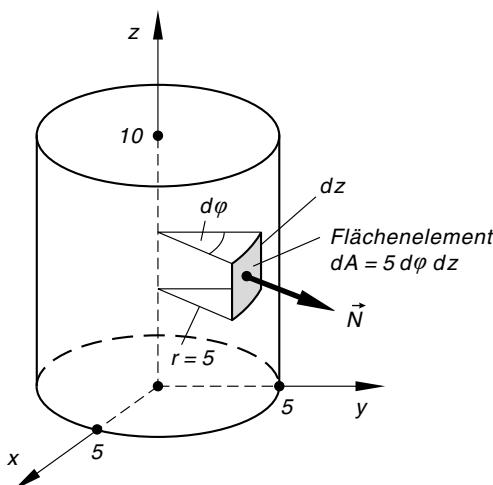


Bild I-142

### Wahl geeigneter (symmetriegerechter) Koordinaten

Hier eignen sich wegen der Zylinderfläche natürlich *Zylinderkoordinaten*. Zwischen ihnen und den kartesischen Koordinaten besteht dann der folgende Zusammenhang (mit  $\rho = R = 5$ ):

$$x = 5 \cdot \cos \varphi, \quad y = 5 \cdot \sin \varphi, \quad z = z$$

$$(0 \leq \varphi < 2\pi; 0 \leq z \leq 10)$$

*Flächennormale*  $\vec{N}$

Der *Zylindermantel* lässt sich durch die Gleichung  $x^2 + y^2 = 25$  in Verbindung mit  $0 \leq z \leq 10$  beschreiben und kann somit als eine *Niveaupläche* des skalaren Feldes  $\phi(x; y; z) = x^2 + y^2$  aufgefasst werden.

<sup>21)</sup> Im nächsten Abschnitt kommen wir auf dieses Beispiel nochmals zurück und berechnen das Oberflächenintegral unter Verwendung von *Flächenparametern* (siehe Abschnitt 8.3.2).

Daher steht der *Gradient* von  $\phi$ , nämlich der Vektor

$$\operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} \partial \phi / \partial x \\ \partial \phi / \partial y \\ \partial \phi / \partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

senkrecht auf dem Zylindermantel. Durch *Normierung* erhalten wir daraus dann die benötigte Flächennormale  $\vec{N}$ :

$$\vec{N} = \frac{1}{|\operatorname{grad} \phi|} \operatorname{grad} \phi = \frac{1}{2 \sqrt{x^2 + y^2}} 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dabei haben wir bereits berücksichtigt, dass für die Punkte auf dem *Zylindermantel* stets  $x^2 + y^2 = 25$  und somit  $\sqrt{x^2 + y^2} = 5$  gilt.

*Berechnung des Skalarproduktes*  $\vec{F} \cdot \vec{N}$

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} (xy + xy + 0) = \frac{1}{5} \cdot 2xy = \frac{2}{5} xy$$

In *Zylinderkoordinaten* lautet dieses Skalarprodukt wie folgt:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{N} &= \frac{2}{5} (5 \cdot \cos \varphi) (5 \cdot \sin \varphi) = 2 \cdot \cos \varphi \cdot 5 \cdot \sin \varphi = \\ &= 5 \underbrace{(2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi)}_{\sin (2\varphi) \text{ (siehe Formelsammlung)}} = 5 \cdot \sin (2\varphi) \end{aligned}$$

*Flächenelement dA auf der Zylinderfläche (siehe Bild I-142)*

$$dA = 5 d\varphi dz = 5 dz d\varphi$$

(nach Gleichung (I-258) mit  $\varrho = 5$ )

*Festlegung der Integrationsgrenzen*

Der *Fluss* des Vektorfeldes  $\vec{F}$  durch den Zylindermantel  $A$  lässt sich damit durch das folgende *Doppelintegral in Zylinderkoordinaten* darstellen:

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(A)} 5 \cdot \sin (2\varphi) \cdot 5 dz d\varphi = 25 \cdot \iint_{(A)} \sin (2\varphi) dz d\varphi$$

Die *Integrationsgrenzen* lauten dabei (siehe hierzu Bild I-142):

*z-Integration:* Von  $z = 0$  bis  $z = 10$

*φ-Integration:* Von  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = 2\pi$

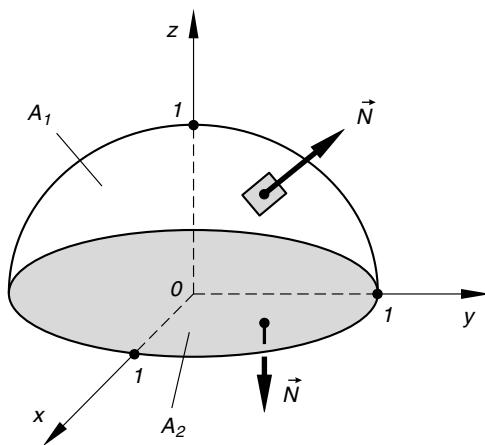
### Berechnung des Flussintegrals

$$\begin{aligned}
 \iint_A (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA &= 25 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{10} \sin(2\varphi) dz d\varphi = \\
 &= 25 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin(2\varphi) d\varphi \cdot \int_{z=0}^{10} dz = 25 \left[ -\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \right]_{\varphi=0}^{2\pi} \cdot \left[ z \right]_{z=0}^{10} = \\
 &= -\frac{25}{2} \left[ \cos(2\varphi) \right]_0^{2\pi} \cdot \left[ z \right]_0^{10} = -\frac{25}{2} (\cos(4\pi) - \cos 0) (10 - 0) = \\
 &= -\frac{25}{2} (1 - 1) 10 = 0
 \end{aligned}$$

Der *Gesamtfluss* des Vektorfeldes durch den Zylindermantel ist also *Null*.

### (3) Berechnung eines Oberflächenintegrals in Kugelkoordinaten

Wir interessieren uns für den *Fluss* des Vektorfeldes  $\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$  durch die geschlossene Oberfläche der Halbkugel  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$  (Bild I-143).



**Bild I-143**  
Zum Vektorfluss durch die Oberfläche der Halbkugel

Zunächst zerlegen wir die Oberfläche in *zwei* Teilflächen  $A_1$  und  $A_2$ :

$A_1$ : Mantelfläche der Halbkugel

$A_2$ : Kreisförmiger „Boden“ (in Bild I-143 grau unterlegt)

Wir berechnen jetzt den Fluss des Vektorfeldes  $\vec{F}$  durch die beiden Teilflächen.

### Fluss durch die Mantelfläche $A_1$ der Halbkugel (siehe Bild I-143)

Wir verwenden zweckmäßigerweise *Kugelkoordinaten*. Zwischen diesen und den kartesischen Koordinaten bestehen dann die folgenden Transformationsgleichungen (mit  $r = 1$ ; siehe Abschnitt 6.3.1):

$$x = \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \quad y = \sin \vartheta \cdot \sin \varphi, \quad z = \cos \vartheta$$

$$(0 \leq \vartheta \leq \pi/2; 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

#### Flächennormale $\vec{N}$

Die durch die Gleichung  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$  beschriebene Oberfläche der Halbkugel ist eine *Niveaumenge* des skalaren Feldes  $\phi(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2$ . Daher steht der *Gradient* von  $\phi$ , also der Vektor

$$\operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} \partial \phi / \partial x \\ \partial \phi / \partial y \\ \partial \phi / \partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

auf dieser Fläche *senkrecht*. Durch *Normierung* gewinnen wir daraus die gesuchte *Flächennormale*  $\vec{N}$ :

$$\vec{N} = \frac{1}{|\operatorname{grad} \phi|} \operatorname{grad} \phi = \frac{1}{2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dabei haben wir bereits berücksichtigt, dass für die Punkte auf der Oberfläche der Halbkugel stets  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  gilt.

#### Berechnung des Skalarproduktes $\vec{F} \cdot \vec{N}$

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -xy + xy + x^2 z = x^2 z$$

In *Kugelkoordinaten* lautet dieses Skalarprodukt (unter Verwendung der weiter oben angegebenen Transformationsgleichungen):

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = x^2 z = (\sin \vartheta \cdot \cos \varphi)^2 \cdot \cos \vartheta = \sin^2 \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \cos^2 \varphi$$

#### Flächenelement $dA$ auf der Oberfläche der Halbkugel

$$dA = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

(nach Gleichung (I-307) mit  $r = 1$ )

### Festlegung der Integrationsgrenzen

Das Flussintegral (Oberflächenintegral) lässt sich somit durch das folgende *Doppelintegral* darstellen:

$$\begin{aligned} \iint_{(A_1)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA &= \iint_{(A_1)} \sin^2 \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \\ &= \iint_{(A_1)} \sin^3 \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \cos^2 \varphi d\vartheta d\varphi \end{aligned}$$

Die *Integrationsgrenzen* lauten dabei wie folgt (siehe Bild I-143):

*$\vartheta$ -Integration:* Von  $\vartheta = 0$  bis  $\vartheta = \pi/2$

*$\varphi$ -Integration:* Von  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = 2\pi$

### Berechnung des Flussintegrals

$$\begin{aligned} \iint_{(A_1)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \sin^3 \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \cos^2 \varphi d\vartheta d\varphi = \\ &= \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi}_{I_1} \cdot \underbrace{\int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \sin^3 \vartheta \cdot \cos \vartheta d\vartheta}_{I_2} = I_1 \cdot I_2 \end{aligned}$$

Für die beiden Teilintegrale entnehmen wir aus der *Integraltafel der Formelsammlung* die folgenden Lösungen:

$$I_1 = \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi}_{\text{Integral Nr. 229 mit } a=1} = \left[ \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right]_0^{2\pi} =$$

Integral Nr. 229 mit  $a=1$

$$= \pi + \frac{\sin(4\pi)}{4} - 0 - \frac{\sin 0}{4} = \pi + 0 - 0 - 0 = \pi$$

$$I_2 = \underbrace{\int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \sin^3 \vartheta \cdot \cos \vartheta d\vartheta}_{\text{Integral Nr. 255 mit } n=3 \text{ und } a=1} = \left[ \frac{\sin^4 \vartheta}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} \left[ \sin^4 \vartheta \right]_0^{\pi/2} =$$

Integral Nr. 255 mit  $n=3$  und  $a=1$

$$= \frac{1}{4} (\sin^4(\pi/2) - \sin^4 0) = \frac{1}{4} (1 - 0) = \frac{1}{4}$$

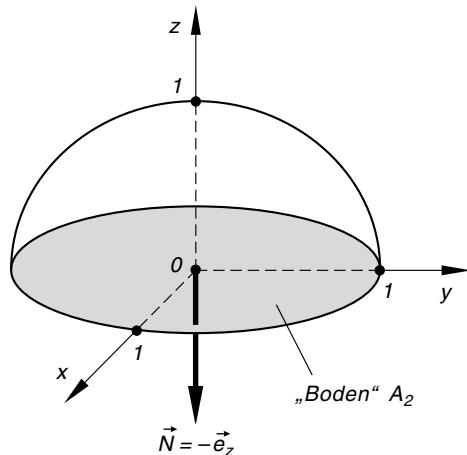
Damit ist

$$\iint_{(A_1)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = I_1 \cdot I_2 = \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$

### Fluss durch die Bodenfläche $A_2$ (siehe Bild I-144)

Der „Boden“ der Halbkugel wird durch den *Einheitskreis* der  $x, y$ -Ebene berandet (Bild I-144). Wir verwenden hier zweckmäßigerweise *Polarkoordinaten*. Sie stehen mit den kartesischen Koordinaten in dem folgenden Zusammenhang (siehe Abschnitt 6.1.1.1):

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi \quad (0 \leq r \leq 1; 0 \leq \varphi < 2\pi)$$



**Bild I-144**

Zum Vektorfluss durch den „Boden“  $A_2$  der Halbkugel

### Flächennormale $\vec{N}$

Die Flächennormale  $\vec{N}$  zeigt bei einer *geschlossenen* Fläche stets nach *außen*, hier also in die *negative*  $z$ -Richtung. Daher ist

$$\vec{N} = -\vec{e}_z = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

### Berechnung des Skalarproduktes $\vec{F} \cdot \vec{N}$

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 + 0 - x^2 = -x^2$$

In *Polarkoordinaten* ausgedrückt:

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = -x^2 = -(r \cdot \cos \varphi)^2 = -r^2 \cdot \cos^2 \varphi$$

*Flächenelement  $dA$  in Polarkoordinaten*

$$dA = r \, dr \, d\varphi$$

(nach Gleichung (III-114) aus Band 2, Kap. III, Abschnitt 3.1.2.2)

*Festlegung der Integrationsgrenzen*

Der Vektorfluss durch den kreisförmigen Boden  $A_2$  lässt sich somit durch das folgende *Doppelintegral in Polarkoordinaten* darstellen:

$$\iint_{(A_2)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) \, dA = \iint_{(A_2)} (-r^2 \cdot \cos^2 \varphi) \cdot r \, dr \, d\varphi = - \iint_{(A_2)} r^3 \cdot \cos^2 \varphi \, dr \, d\varphi$$

Die *Integrationsgrenzen* lauten dabei wie folgt (siehe Bild I-144):

*r-Integration:* Von  $r = 0$  bis  $r = 1$

*$\varphi$ -Integration:* Von  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = 2\pi$

*Berechnung des Flussintegrals*

$$\begin{aligned} \iint_{(A_2)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) \, dA &= - \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 r^3 \cdot \cos^2 \varphi \, dr \, d\varphi = \\ &= - \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi}_{I_1} \cdot \underbrace{\int_{r=0}^1 r^3 \, dr}_{I_2} = -I_1 \cdot I_2 \end{aligned}$$

Die Teilintegrale liefern die folgenden Werte (Integral  $I_1$  wurde bereits zwei Seiten vorher berechnet):

$$I_1 = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \left[ \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$I_2 = \int_{r=0}^1 r^3 \, dr = \left[ \frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

Damit beträgt der Vektorfluss durch die Bodenfläche  $A_2$ :

$$\iint_{(A_2)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) \, dA = -I_1 \cdot I_2 = -\pi \cdot \frac{1}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

### Gesamtfluss durch die geschlossene Oberfläche der Halbkugel

Der *Gesamtfluss* des Vektorfeldes  $\vec{F}$  durch die *geschlossene* Oberfläche der Halbkugel *verschwindet*:

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(A_1)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA + \iint_{(A_2)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0 \quad \blacksquare$$

### 8.3.2 Oberflächenintegral in Flächenparametern

Ist die vom Vektorfeld  $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z)$  durchflossene Fläche  $A$  in der *vektoriellen Form (Parameterform)*

$$\vec{r} = \vec{r}(u; v) = \begin{pmatrix} x(u; v) \\ y(u; v) \\ z(u; v) \end{pmatrix} \quad (I-417)$$

gegeben, so geht man bei der Berechnung des Oberflächenintegrals  $\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA$  wie folgt vor:

Das Vektorfeld  $\vec{F}$  wird zunächst in den *Flächenparametern*  $u$  und  $v$  ausgedrückt:

$$\vec{F}(x; y; z) \longrightarrow \vec{F}(x(u; v); y(u; v); z(u; v)) = \vec{F}(u; v) \quad (I-418)$$

Für die *Flächennormale*  $\vec{N}$  und das *Flächenelement*  $dA$  verwenden wir die folgenden bereits in Abschnitt 2.3 hergeleiteten Ausdrücke:

$$\vec{N} = \frac{\vec{t}_u \times \vec{t}_v}{|\vec{t}_u \times \vec{t}_v|}, \quad dA = |\vec{t}_u \times \vec{t}_v| du dv \quad (I-419)$$

Dabei sind  $\vec{t}_u$  und  $\vec{t}_v$ , die *Tangentenvektoren* an die Parameterlinien der Fläche ( $u$ -Linien und  $v$ -Linien). Mit diesen Formeln erhalten wir dann für den Integranden des Oberflächenintegrals:

$$(\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \vec{F} \cdot \left( \frac{\vec{t}_u \times \vec{t}_v}{|\vec{t}_u \times \vec{t}_v|} \right) |\vec{t}_u \times \vec{t}_v| du dv = \vec{F} \cdot (\vec{t}_u \times \vec{t}_v) du dv \quad (I-420)$$

Das Oberflächenintegral geht damit in das folgende *Doppelintegral* über:

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(A)} \vec{F} \cdot (\vec{t}_u \times \vec{t}_v) du dv \quad (I-421)$$

Die Berechnung wird dabei *schrittweise* nach dem folgenden Schema vorgenommen:

### Berechnung eines Oberflächenintegrals unter Verwendung von Flächenparametern

Die von einem Vektorfeld  $\vec{F} = \vec{F}(x; y; z)$  durchflossene Fläche  $A$  sei durch einen von den beiden *Parametern*  $u$  und  $v$  abhängigen Ortsvektor  $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$  gegeben.

Dann besitzt das *Oberflächenintegral*  $\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA$  die folgende Gestalt:

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(A)} \vec{F} \cdot (\vec{t}_u \times \vec{t}_v) du dv \quad (\text{I-422})$$

Die Integralberechnung erfolgt dabei in *vier* Schritten:

1. Das Vektorfeld  $\vec{F}$  wird zunächst durch die *Flächenparameter*  $u$  und  $v$  ausgedrückt:

$$\vec{F}(x; y; z) \longrightarrow \vec{F} = \vec{F}(u; v) \quad (\text{I-423})$$

2. Man bilde dann die *Tangentenvektoren* an die Parameterlinien der Fläche, also die Vektoren

$$\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \quad \text{und} \quad \vec{t}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \quad (\text{I-424})$$

und bestimme anschließend mit ihnen das *gemischte Produkt (Spatprodukt)*

$$\vec{F} \cdot (\vec{t}_u \times \vec{t}_v) \quad (\text{I-425})$$

3. Festlegung der *Integrationsgrenzen* im erhaltenen Doppelintegral.
4. Berechnung des Doppelintegrals in der bekannten Weise (siehe Band 2, Abschnitt III.3.1.2).

### Anmerkung

Setzt man  $\vec{F} = \vec{N}$ , so erhält man das folgende Doppelintegral zur Berechnung des *Flächeninhalts* der räumlichen Fläche:

$$A = \iint_{(A)} 1 dA = \iint_{(A)} dA = \iint_{(A)} |\vec{t}_u \times \vec{t}_v| du dv \quad (\text{I-426})$$

Das Flächenelement  $dA = |\vec{t}_u \times \vec{t}_v| du dv$  ist uns bereits aus Abschnitt 2 bekannt (Gleichung (I-78)).

## ■ Beispiele

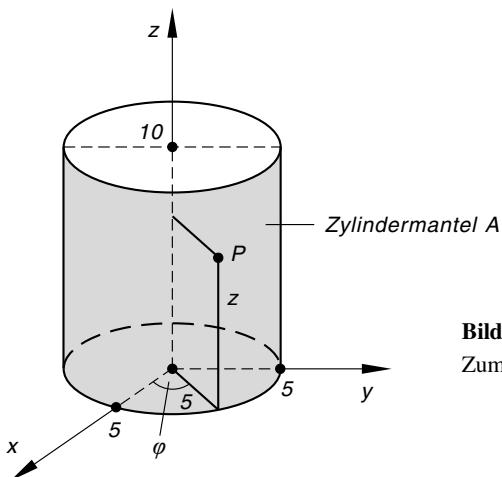
- (1) Wir kehren zum Beispiel (2) des vorherigen Abschnitts zurück und berechnen

nochmals den *Fluss* des Vektorfeldes  $\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z^2 \end{pmatrix}$  durch die Mantelfläche  $A$  des

in Bild I-145 dargestellten Zylinders. Diesmal jedoch gehen wir von dem *parameterabhängigen* Ortsvektor

$$\vec{r} = \vec{r}(\varphi; z) = \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos \varphi \\ 5 \cdot \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi; 0 \leq z \leq 10)$$

der Mantelfläche aus. Als *Flächenparameter* dienen dabei die beiden *Zylinderkoordinaten*  $\varphi$  und  $z$ .



**Bild I-145**

Zum Vektorfluss durch den Zylindermantel  $A$

Zunächst drücken wir das gegebene Vektorfeld mit Hilfe der Transformationsgleichungen

$$x = 5 \cdot \cos \varphi, \quad y = 5 \cdot \sin \varphi, \quad z = z$$

wie folgt durch die *Flächenparameter*  $\varphi$  und  $z$  aus:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot \sin \varphi \\ 5 \cdot \cos \varphi \\ z^2 \end{pmatrix}$$

Als nächstes bestimmen wir die *Tangentenvektoren* an die Parameterlinien der Zylinderfläche ( $\varphi$ - und  $z$ -Linien) und deren *Vektorprodukt*:

$$\vec{t}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -5 \cdot \sin \varphi \\ 5 \cdot \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_z = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t}_\varphi \times \vec{t}_z = \begin{pmatrix} -5 \cdot \sin \varphi \\ 5 \cdot \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos \varphi - 0 \\ 0 + 5 \cdot \sin \varphi \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos \varphi \\ 5 \cdot \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir für das benötigte *Spatprodukt*  $\vec{F} \cdot (\vec{t}_\varphi \times \vec{t}_z)$  den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot (\vec{t}_\varphi \times \vec{t}_z) &= \begin{pmatrix} 5 \cdot \sin \varphi \\ 5 \cdot \cos \varphi \\ z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos \varphi \\ 5 \cdot \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= 25 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + 25 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + 0 = \\ &= 50 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = 25 \cdot \sin(2\varphi) \end{aligned}$$

(unter Verwendung der trigonometrischen Formel  $\sin(2\varphi) = 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$ ).  
Unser Flussintegral lautet damit:

$$\begin{aligned} \iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA &= \iint_{(A)} \vec{F} \cdot (\vec{t}_\varphi \times \vec{t}_z) d\varphi dz = \iint_{(A)} 25 \cdot \sin(2\varphi) d\varphi dz = \\ &= 25 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{10} \sin(2\varphi) dz d\varphi \end{aligned}$$

Dieses Integral haben wir bereits im vorherigen Abschnitt berechnet. Es besitzt den Wert *Null*.

- (2) Durch die Gleichung  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $0 \leq z \leq 4$  wird der in Bild I-146 dargestellte *Kegelmantel* beschrieben. Wir wollen die *Mantelfläche*  $M$  dieses Kegels nach Gleichung (I-426) berechnen.

Dazu wählen wir die *kartesischen* Koordinaten  $x$  und  $y$  als *Flächenparameter*. Der Kegelmantel lässt sich dann durch den folgenden *Ortsvektor* darstellen, wobei die Gleichung  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  den Zusammenhang zwischen der Höhenkoordinate  $z$  und den beiden übrigen Koordinaten beschreibt:

$$\vec{r} = \vec{r}(x; y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

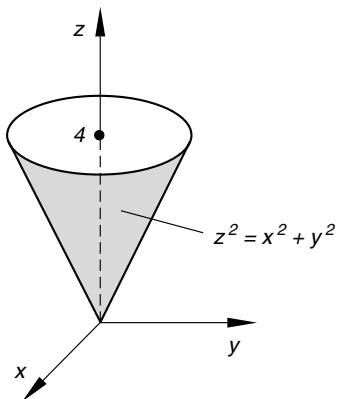


Bild I-146

Zur Berechnung der Mantelfläche  $M$  des Kegels  
 $z^2 = x^2 + y^2$  mit  $0 \leq z \leq 4$

Die *Tangentenvektoren* an die Parameterlinien ( $x$ - und  $y$ -Linien) lauten dann (die partielle Ableitung von  $\sqrt{x^2 + y^2}$  nach  $x$  bzw.  $y$  erfolgt mit der Kettenregel):

$$\vec{t}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x/\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x/\varrho \end{pmatrix}$$

$$\vec{t}_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y/\sqrt{x^2 + y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y/\varrho \end{pmatrix}$$

Dabei haben wir (vorübergehend) die Abkürzung  $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$  eingeführt. Wir bestimmen jetzt das benötigte *Vektorprodukt* dieser Vektoren sowie den *Betrag* dieses Produktes:

$$\vec{t}_x \times \vec{t}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x/\varrho \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y/\varrho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - x/\varrho \\ 0 - y/\varrho \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x/\varrho \\ -y/\varrho \\ 1 \end{pmatrix}$$

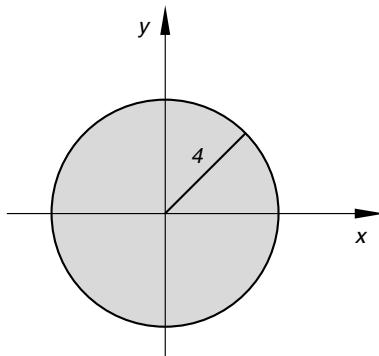
$$|\vec{t}_x \times \vec{t}_y| = \sqrt{\left(-\frac{x}{\varrho}\right)^2 + \left(-\frac{y}{\varrho}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2} + 1} =$$

$$= \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + \varrho^2}{\varrho^2}} = \sqrt{\frac{\varrho^2 + \varrho^2}{\varrho^2}} = \sqrt{\frac{2\varrho^2}{\varrho^2}} = \sqrt{2}$$

Die Berechnung der *Mantelfläche*  $M$  führt somit auf das folgende Doppelintegral (Gleichung I-426 mit  $u = x$  und  $v = y$ ):

$$M = \iint_{(A)} |\vec{t}_u \times \vec{t}_v| dx dy = \iint_{(A)} \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \cdot \iint_{(A)} 1 dx dy$$

Der *Integrationsbereich*  $(A)$  entspricht dabei der *Projektion* des Kegelmantels in die  $x$ ,  $y$ -Ebene. Wir erhalten als Projektionsfläche einen *Kreis* mit dem Radius  $R = 4$  (Bild I-147).



**Bild I-147**  
Kreisförmiger Integrationsbereich

Das Doppelintegral  $\iint_{(A)} 1 dx dy$  beschreibt dann den Flächeninhalt  $A$  dieses Kreises

und besitzt somit den Wert  $A = \pi R^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$ . Die *Mantelfläche* unseres Kegels beträgt damit

$$M = \sqrt{2} \cdot \iint_{(A)} 1 dx dy = \sqrt{2} A = \sqrt{2} \cdot 16\pi = 16\sqrt{2}\pi \approx 71,09 \quad \blacksquare$$

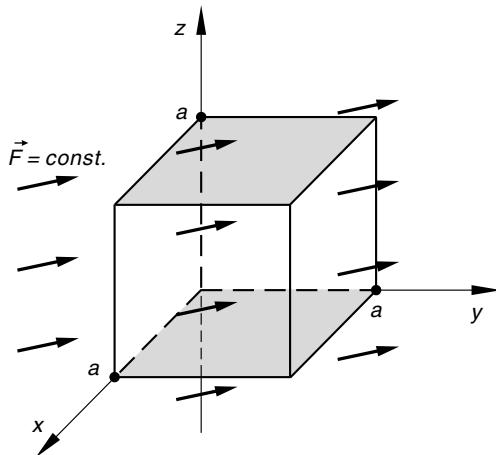
## 8.4 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik

### 8.4.1 Fluss eines homogenen Vektorfeldes durch die Oberfläche eines Würfels

Wir wollen uns jetzt mit dem Fluss eines *homogenen*, d. h. *konstanten* Vektorfeldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \text{ durch die Oberfläche eines achsenparallelen Würfels mit der Kantenlänge } a$$

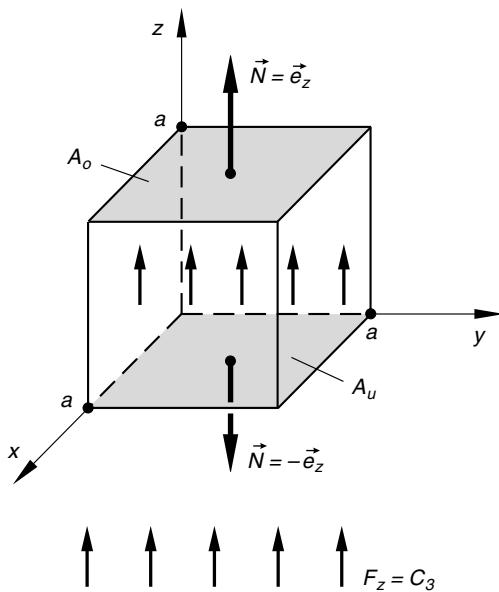
beschäftigen ( $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ : reelle Konstanten; Bild I-148). Dabei dürfen wir uns unter dem homogenen Vektorfeld  $\vec{F}$  zum Beispiel das konstante *Geschwindigkeitsfeld*  $\vec{v}$  einer strömenden Flüssigkeit vorstellen. Zunächst untersuchen wir den Fluss in der *z-Richtung*.

**Bild I-148**

Homogener Vektorfluss durch die Oberfläche eines Würfels

### Vektorfluss in der $z$ -Richtung (Bild I-149)

Für den Fluss in der  $z$ -Richtung durch die beiden in Bild I-149 grau unterlegten Würfelflächen  $A_u$  und  $A_o$  ist ausschließlich die  $z$ -Komponente  $C_3$  des Vektorfeldes  $\vec{F}$  verantwortlich.

**Bild I-149**

Zur Berechnung des Vektorflusses in der  $z$ -Richtung

*Fluss durch die untere Würfelfläche  $A_u$*

Die Flächennormale  $\vec{N}$  der *unteren* Würfelfläche  $A_u = a^2$  zeigt in die *negative*  $z$ -Richtung. Somit ist  $\vec{N} = -\vec{e}_z$  und

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \vec{N} &= \vec{F} \cdot (-\vec{e}_z) = -(\vec{F} \cdot \vec{e}_z) = - \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= -(0 + 0 + C_3) = -C_3\end{aligned}\tag{I-427}$$

Der Fluss des Vektorfeldes  $\vec{F}$  durch die Würfelfläche  $A_u$  beträgt damit:

$$\iint_{(A_u)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(A_u)} (-C_3) dA = -C_3 \cdot \underbrace{\iint_{(A_u)} dA}_{A_u = a^2} = -C_3 \cdot a^2\tag{I-428}$$

*Fluss durch die obere Würfelfläche  $A_o$*

Analog erhalten wir für den Fluss durch die *obere* Würfelfläche  $A_o = a^2$ :

$$\iint_{(A_o)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(A_o)} C_3 dA = C_3 \cdot \underbrace{\iint_{(A_o)} dA}_{A_o = a^2} = C_3 \cdot a^2\tag{I-429}$$

Denn diesmal zeigt die Flächennormale  $\vec{N}$  in die *positive*  $z$ -Richtung, d. h. es ist  $\vec{N} = \vec{e}_z$  und somit

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \vec{F} \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + 0 + C_3 = C_3\tag{I-430}$$

*Fluss durch  $A_u$  und  $A_o$*

Der *Gesamtfluss* durch die beiden Würfelflächen in  $z$ -Richtung ist somit gleich *Null*:

$$\iint_{(A_u)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA + \iint_{(A_o)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = -C_3 \cdot a^2 + C_3 \cdot a^2 = 0\tag{I-431}$$

Mit anderen Worten: Das, was *unten* durch die Fläche  $A_u$  in den Würfel *hineinfließt*, fließt durch die *obere* Fläche  $A_o$  wieder *heraus*.

### Vektorfluss in der $x$ - bzw. $y$ -Richtung

Analoge Überlegungen führen bei den übrigen Koordinatenrichtungen jeweils zu dem *gleichen* Ergebnis wie in der  $z$ -Richtung: Der Vektorfluss durch die Würfelflächen ist in allen drei Richtungen jeweils gleich *Null*. Diese Aussage gilt im Übrigen nicht nur für einen Würfel, sondern für beliebige *geschlossene* Oberflächen.

### Vektorfluss durch die (geschlossene) Würfeloberfläche (Gesamtfluss)

Bei einem *Würfel* ist somit der Vektorfluss in allen drei Koordinatenrichtungen jeweils gleich *Null*. Daher verschwindet auch der *Gesamtfluss* eines homogenen Vektorfeldes durch eine Würfeloberfläche. Es lässt sich zeigen, dass diese Aussage nicht nur für die Oberfläche eines (beliebigen) Würfels gilt, sondern für beliebige *geschlossene* Oberflächen. So verschwindet beispielsweise auch der Vektorfluss durch die Oberfläche einer *Kugel* oder eines *Zylinders*, sofern das Vektorfeld *homogen* ist.

#### Fluss eines homogenen Vektorfeldes durch eine geschlossene Oberfläche

Der Fluss eines *homogenen* Vektorfeldes  $\vec{F} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{\text{const.}}$  durch die Ober-

fläche eines *Würfels* ist gleich *Null*. Diese Aussage gilt auch für eine beliebige *geschlossene* Oberfläche  $A$ :

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = 0 \quad (\text{I-432})$$

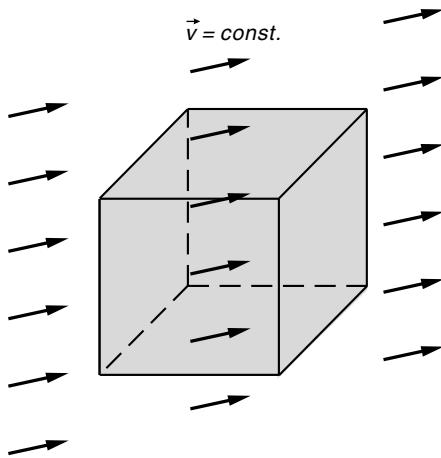
( $C_1, C_2, C_3$ : reelle Konstanten)

### ■ Beispiel

Wir betrachten eine Flüssigkeitsströmung mit dem *homogenen* (konstanten) Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \\ v_{oz} \end{pmatrix} = \overrightarrow{\text{const.}}$$

An jeder Stelle der Strömung besitzt die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  die *gleiche* Richtung und den *gleichen* Betrag (Bild I-150). Die Durchflutung eines Würfels erfolgt dann so, dass in den Würfel pro Sekunde genau so viel Flüssigkeit *eintritt* wie *austritt*.

**Bild I-150**

Der eingezeichnete Würfel wird von einer Flüssigkeit mit einem *konstanten* Geschwindigkeitsfeld durchströmt

### 8.4.2 Fluss eines zylinder- oder axialsymmetrischen Vektorfeldes durch die Oberfläche eines Zylinders

Wir betrachten den Fluss eines *zylinder- oder axialsymmetrischen* Vektorfeldes

$$\vec{F} = \vec{F}(\varrho) = f(\varrho) \vec{e}_\varrho \quad (\text{I-433})$$

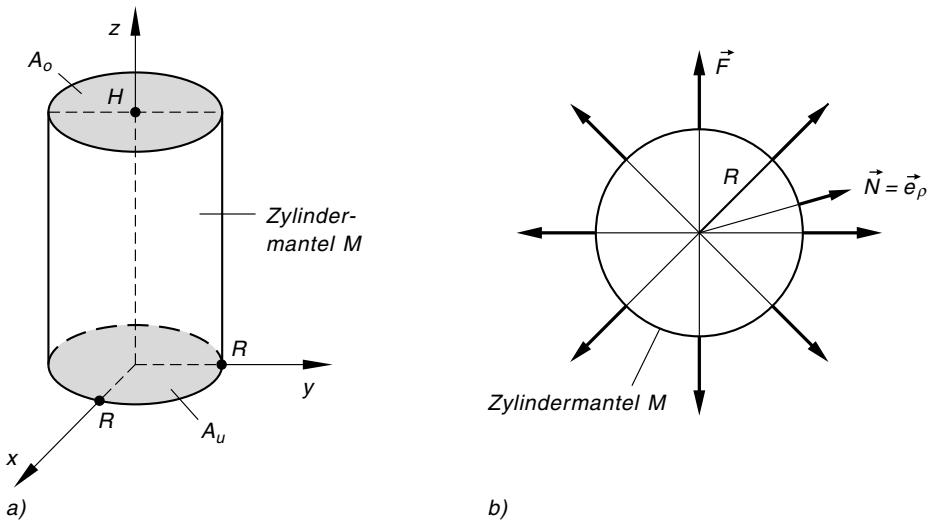
durch die Oberfläche eines *koaxialen* Zylinders mit dem Radius  $R$  und der Höhe  $H$  (siehe Bild I-151).  $\varrho$  ist dabei der *senkrechte* Abstand von der Symmetriechse des Feldes (identisch mit der Zylinderachse und  $z$ -Achse). Die Zylinderoberfläche besteht aus dem *Zylindermantel*  $M$  und einem jeweils kreisförmigen *Boden*  $A_u$  und *Deckel*  $A_o$  (beide Flächen sind in Bild I-151 a) grau unterlegt). Wir beschäftigen uns nun mit dem *Vektorfluss* durch diese Teilflächen.

#### Vektorfluss durch den Zylindermantel $M$ (Bild I-151)

Die nach *außen* weisende Flächennormale  $\vec{N}$  ist mit dem Einheitsvektor  $\vec{e}_\varrho$  identisch:  $\vec{N} = \vec{e}_\varrho$ . Der Fluss durch den *Zylindermantel* ist dann durch das Oberflächenintegral

$$\begin{aligned} \iint_{(M)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA &= \iint_{(M)} (\vec{F} \cdot \vec{e}_\varrho) dA = \iint_{(M)} (f(\varrho) \vec{e}_\varrho \cdot \vec{e}_\varrho) dA = \\ &= \iint_{(M)} f(\varrho) \underbrace{(\vec{e}_\varrho \cdot \vec{e}_\varrho)}_1 dA = \iint_{(M)} f(\varrho) dA \end{aligned} \quad (\text{I-434})$$

gegeben.



**Bild I-151** Zum Fluss eines zylindersymmetrischen Vektorfeldes durch eine Zylinderoberfläche

- a) Zylinderoberfläche
- b) Ebener Schnitt durch den Zylinder senkrecht zur Zylinderachse

Auf dem Zylindermantel ist überall  $\varrho = R$  und somit  $f(\varrho) = f(R)$ . Damit erhalten wir für den Vektorfluss durch den Zylindermantel

$$\iint_{(M)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(M)} f(R) dA = f(R) \cdot \underbrace{\iint_{(M)} 1 dA}_{M=2\pi RH} = f(R) \cdot 2\pi RH \quad (\text{I-435})$$

Denn das Doppelintegral  $\iint_{(M)} 1 dA$  beschreibt die Mantelfläche  $M = 2\pi RH$  des Zylinders.

#### Vektorfluss durch den Boden $A_u$ und den Deckel $A_o$ des Zylinders (Bild I-151a))

Da das Vektorfeld wegen der Zylindersymmetrie *keine* Komponente in der  $z$ -Richtung besitzt, ist der Vektorfluss durch Boden und Deckel des Zylinders jeweils gleich Null (grau unterlegte Flächen in Bild I-151a)):

$$\iint_{(A_u + A_o)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \underbrace{\iint_{(A_u)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA}_0 + \underbrace{\iint_{(A_o)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA}_0 = 0 + 0 = 0 \quad (\text{I-436})$$

### Gesamtfluss durch die Zylinderoberfläche A

Der Vektorfluss durch die *geschlossene* Zylinderoberfläche  $A$  beträgt damit:

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(M)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA + \iint_{(A_u + A_o)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \\ = f(R) \cdot 2\pi RH + 0 = f(R) \cdot 2\pi RH \quad (I-437)$$

Wir fassen zusammen:

**Fluss eines zylinder- oder axialsymmetrischen Vektorfeldes durch die Oberfläche eines Zylinders (Symmetriearchse =  $z$ -Achse; siehe Bild I-151)**

Der Fluss eines *zylinder- oder axialsymmetrischen* Vektorfeldes

$$\vec{F} = \vec{F}(\varrho) = f(\varrho) \vec{e}_\varrho \quad (I-438)$$

durch die *geschlossene* Oberfläche  $A$  eines (koaxialen) *Zylinders* beträgt

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = f(R) \cdot 2\pi RH \quad (I-439)$$

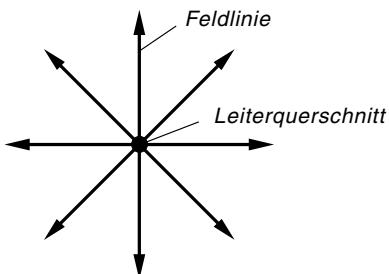
( $R$ : Zylindrerradius;  $H$ : Zylinderhöhe)

### ■ Beispiel

Das *elektrische Feld* in der Umgebung eines homogen geladenen linearen Leiters ist *zylinder- oder axialsymmetrisch* (Bild I-152; Leiterachse =  $z$ -Achse):

$$\vec{E} = \vec{E}(\varrho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 Q} \vec{e}_\varrho \quad (\varrho > 0)$$

( $\lambda$ : Ladungsdichte, d. h. Ladung pro Längeneinheit;  $\epsilon_0$ : elektrische Feldkonstante).



**Bild I-152**

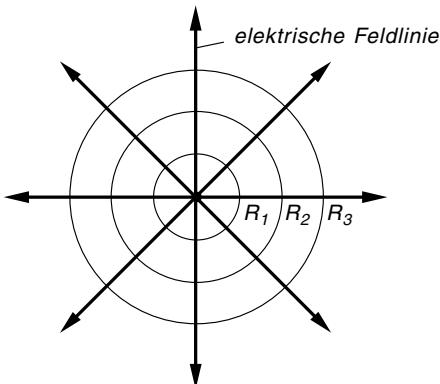
Axialsymmetrisches elektrisches Feld in der Umgebung eines homogen geladenen linearen Leiters (*positive* Ladungsdichte; ebener Schnitt senkrecht zur Leiterachse)

Für den *Fluss* des Feldstärkevektors  $\vec{E}$  durch die (geschlossene) Oberfläche  $A$  eines *koaxialen Zylinders* mit dem Radius  $R$  und der Höhe  $H$  gilt dann nach Gleichung

$$(I-439) \text{ mit } f(R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}:$$

$$\iint_{(A)} (\vec{E} \cdot \vec{N}) dA = f(R) \cdot 2\pi RH = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot 2\pi RH = \frac{\lambda H}{\epsilon_0}$$

Der Fluss durch die Zylinderoberfläche ist demnach *proportional* zur Zylinderhöhe  $H$ , aber *unabhängig* vom Radius  $R$  des Zylinders. Durch die Oberflächen *koaxialer* Zylinder *gleicher* Höhe erfolgt somit stets der *gleiche* Vektorfluss (Bild I-153).



**Bild I-153**

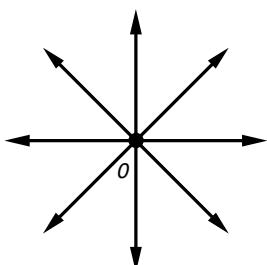
Zum Vektorfluss durch die Oberfläche coaxialer Zylinder gleicher Höhe (ebener Schnitt senkrecht zur Zylinderachse;  $R_1, R_2, R_3$ : Zylinderradien)

### 8.4.3 Fluss eines kugel- oder radialsymmetrischen Vektorfeldes durch die Oberfläche einer Kugel

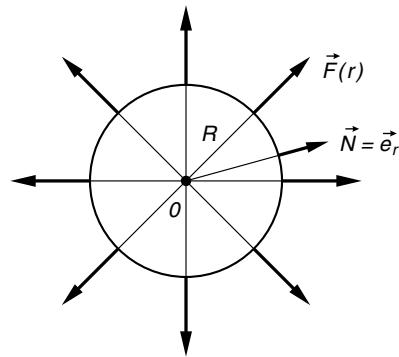
Ein *kugel-* oder *radialsymmetrisches* Vektorfeld (*Zentrafeld*) besitzt in *Kugelkoordinaten* die Darstellung

$$\vec{F} = \vec{F}(r) = f(r) \vec{e}_r \quad (I-440)$$

wobei  $r$  der Abstand vom *Koordinatenursprung* ist. Bild I-154 zeigt einen *ebenen* Schnitt durch das Symmetriezentrum. Uns interessiert der *Fluss* dieses Feldes durch die Oberfläche  $A$  einer *Kugel* vom Radius  $R$  (der Kugelmittelpunkt liegt dabei im Koordinatenursprung, Bild I-155).

**Bild I-154**

Zentraffeld (kugel- oder radial-symmetrisches Vektorfeld; ebener Schnitt durch das Symmetriezentrum)

**Bild I-155**

Zum Vektorfluss eines Zentraffeldes durch die Oberfläche einer Kugel (ebener Schnitt durch den Kugelmittelpunkt)

Wegen der *Kugelsymmetrie* verwenden wir natürlich *Kugelkoordinaten*. Die Flächennormale  $\vec{N}$  ist daher identisch mit dem *radial* nach *außen* gerichteten Einheitsvektor  $\vec{e}_r$ , d. h. es gilt  $\vec{N} = \vec{e}_r$  (Bild I-155). Der Vektorfluss durch die *Kugelschale* wird dann durch das folgende *Oberflächenintegral* beschrieben:

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{e}_r) dA \quad (I-441)$$

Dabei gilt:

$$\vec{F} \cdot \vec{e}_r = (f(r) \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r = f(r) \underbrace{(\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r)}_1 = f(r) \quad (I-442)$$

Auf der betrachteten *Kugeloberfläche* ist überall  $r = R$  und somit  $\vec{F} \cdot \vec{e}_r = f(R)$ . Damit erhalten wir schließlich für den Vektorfluss durch die Kugeloberfläche:

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(A)} f(R) dA = f(R) \cdot \underbrace{\iint_{(A)} 1 dA}_{\begin{array}{c} A = 4\pi R^2 \\ \hline \end{array}} = f(R) \cdot 4\pi R^2 \quad (I-443)$$

Dabei haben wir berücksichtigt, dass das Integral  $\iint_{(A)} 1 dA$  die *Oberfläche*  $A$  unserer Kugel beschreibt und somit den Wert  $A = 4\pi R^2$  besitzt.

**Fluss eines kugel- oder radialsymmetrischen Vektorfeldes durch die Oberfläche einer Kugel (Kugelmittelpunkt = Koordinatenursprung; siehe Bild I-155).**

Der Fluss eines *kugel-* oder *radialsymmetrischen* Vektorfeldes (*Zentralfeldes*)

$$\vec{F} = \vec{F}(r) = f(r) \vec{e}_r \quad (\text{I-444})$$

durch die *geschlossene* Oberfläche  $A$  einer (konzentrischen) *Kugel* beträgt

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = f(R) \cdot 4\pi R^2 \quad (\text{I-445})$$

( $R$ : Kugelradius)

### Anmerkung

Für ein Zentralfeld vom *speziellen* Typ

$$f(r) \sim \frac{1}{r^2} \quad \text{oder} \quad f(r) = \frac{c}{r^2} \quad (c: \text{ reelle Konstante}) \quad (\text{I-446})$$

gilt *unabhängig* vom Kugelradius  $R$ :

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = f(R) \cdot 4\pi R^2 = \frac{c}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi c = \text{const.} \quad (\text{I-447})$$

Der Vektorfluss durch *konzentrische* Kugelschalen bleibt also *gleich!* Beispiele hierfür liefern das *elektrische Feld* einer *Punktladung* (siehe nachfolgendes Beispiel) und das *Gravitationsfeld* in der Umgebung einer Masse (z. B. das Gravitationsfeld der Erde).

## ■ Beispiel

Das elektrische Feld einer *Punktladung*  $Q$  ist *kugel-* oder *radialsymmetrisch* und wird durch den Feldstärkevektor

$$\vec{E} = \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (r > 0)$$

beschrieben ( $\epsilon_0$ : elektrische Feldkonstante).

Der Feldlinienverlauf ist in Bild I-156 dargestellt. Der Fluss dieses Vektorfeldes durch die Oberfläche  $A$  einer *konzentrischen* Kugel mit dem Radius  $R$  beträgt dann nach Gleichung (I-445) mit  $f(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ :

$$\iint_{(A)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint_{(A)} (\vec{E} \cdot \vec{N}) dA = f(R) \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

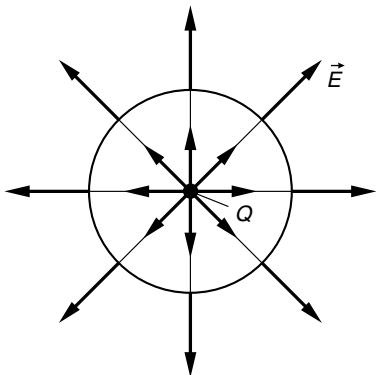


Bild I-156

Kugelsymmetrisches elektrisches Feld in der Umgebung einer *positiven* Punktladung  $Q$  (ebener Schnitt durch die Punktladung)

Der Vektorfluss ist somit *unabhängig* vom Kugelradius  $R$ , d. h. der Fluss des elektrischen Feldes durch die Oberflächen *konzentrischer* Kugeln ist immer der *gleiche*!

Es lässt sich sogar zeigen, dass der Fluss des  $\vec{E}$ -Feldes durch *jede* geschlossene Fläche (Oberfläche), die die Punktladung  $Q$  enthält, den *konstanten* Wert  $Q/\varepsilon_0$  besitzt. Der Vektorfluss des elektrischen Feldes einer Punktladung hängt somit ausschließlich von der *Ladung* ab und ist dieser direkt *proportional*. ■

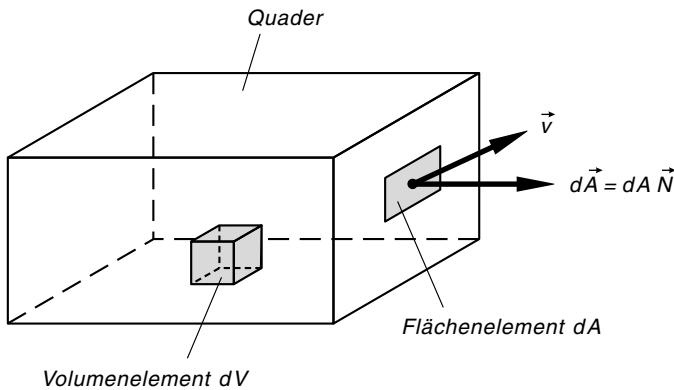
## 9 Integralsätze von Gauß und Stokes

### 9.1 Gaußscher Integralsatz

#### 9.1.1 Ein einführendes Beispiel

Wir gehen wiederum von unserem anschaulichen *Modell* einer Flüssigkeitsströmung aus. Eine Flüssigkeit mit dem Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v} = \vec{v}(x; y; z)$  durchströme dabei den in Bild 1-157 dargestellten *quaderförmigen* Bereich vom Volumen  $V$ . Durch das *grau* unterlegte Flächenelement  $dA$  der Quaderoberfläche fließt dann nach den Ausführungen aus Abschnitt 8.1 in der Zeiteinheit die folgende Flüssigkeitsmenge (Flüssigkeitsvolumen):

$$(\vec{v} \cdot \vec{N}) dA = \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad (\text{I-448})$$



**Bild I-157** Zur Flüssigkeitsströmung durch einen quaderförmigen Bereich

Dabei ist  $\vec{N}$  die *Flächennormale* und  $d\vec{A} = dA \vec{N}$  das *vektorielle Flächenelement*. Der Gesamtfluss durch die *geschlossene Hülle*  $A$  (Oberfläche des Quaders) pro Zeiteinheit ist somit durch das *Oberflächenintegral*

$$\iint_{(A)} (\vec{v} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(A)} \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad (I-449)$$

gegeben.

Nun beschäftigen wir uns mit der Flüssigkeitsmenge, die in dem quaderförmigen Bereich durch die dortigen *Quellen* und *Senken* der Flüssigkeit in der Zeiteinheit erzeugt bzw. vernichtet wird. Dazu betrachten wir ein *Volumenelement*  $dV$  im Innern des Quaders (Bild I-157). In ihm wird – wie wir bereits im Zusammenhang mit dem Begriff der *Divergenz* eines Vektorfeldes erkannt haben – pro Zeiteinheit die Flüssigkeitsmenge

$$\operatorname{div} \vec{v} dV \quad (I-450)$$

erzeugt oder vernichtet, je nachdem, ob sich dort eine Quelle *oder* Senke befindet. Somit wird *insgesamt* im Quadervolumen  $V$  pro Zeiteinheit die Flüssigkeitsmenge

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{v} dV \quad (I-451)$$

erzeugt oder vernichtet (die Summierung, d. h. Integration erfolgt über die Beiträge aller im Volumen  $V$  gelegenen Volumenelemente). Diese Menge muss aber bei einer Flüssigkeit mit *konstanter* Dichte in der Zeiteinheit durch die Quaderoberfläche  $A$  hindurchfließen. Mit anderen Worten: Die in der Zeiteinheit im Quadervolumen  $V$  erzeugte bzw. vernichtete Flüssigkeitsmenge  $\iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{v} dV$  muss dem Gesamtfluss

$$\iint_{(A)} (\vec{v} \cdot \vec{N}) dA$$

durch die Quaderoberfläche entsprechen.

Somit gilt:

$$\iint_{(A)} (\vec{v} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(A)} \vec{v} \cdot d\vec{A} = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{v} dV \quad (\text{I-452})$$

Damit haben wir auf anschauliche Weise eine wichtige Beziehung zwischen einem *Oberflächenintegral* und einem *Volumenintegral* (Dreifachintegral) hergeleitet. Es handelt sich dabei um den sog. *Gaußschen Integralsatz* der Vektoranalysis.

Wir wollen dieses einführende Beispiel mit einer Bemerkung abschließen:

Die *skalare* Größe  $\operatorname{div} \vec{v}$  wird bekanntlich auch als „*Quelldichte*“ des Geschwindigkeitsfeldes  $\vec{v}$  bezeichnet. Sie ist im Allgemeinen von Ort zu Ort *verschieden*. Für ein Geschwindigkeitsfeld *ohne* Quellen und Senken, d. h. ein sog. *quellenfreies* Feld, gilt dann überall im betrachteten Volumen  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ . Aus dem *Gaußschen Integralsatz* (I-452) folgt dann unmittelbar, dass der Gesamtfluss der Flüssigkeit durch die *geschlossene* äußere Hülle gleich *Null* ist. Mit anderen Worten: Es fließt in das Volumen  $V$  in der Zeiteinheit genau so viel Flüssigkeit *herein* wie *heraus*.

### 9.1.2 Gaußscher Integralsatz im Raum

Im einführenden Beispiel sind wir erstmals auf den in den Anwendungen so wichtigen *Integralsatz von Gauß* gestoßen. Er stellt eine *Verbindung* her zwischen einem *Oberflächenintegral* und einem *Volumenintegral*, d. h. zwischen einem *zwei-* und einem *dreedimensionalen* Integral.

Wir formulieren jetzt den *Gaußschen Integralsatz* in der allgemeingültigen Form (ohne Beweis):

#### Gaußscher Integralsatz im Raum

Das *Oberflächenintegral* eines räumlichen Vektorfeldes  $\vec{F}$  über eine *geschlossene* Fläche  $A$  ist gleich dem *Volumenintegral* der *Divergenz* von  $\vec{F}$ , erstreckt über das von der Fläche  $A$  eingeschlossene *Volumen*  $V$ :

$$\iint_{(A)} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{F} dV \quad (\text{I-453})$$

Dabei bedeuten:

$\vec{F} = \vec{F}(x; y; z)$ : Stetig differenzierbares räumliches Vektorfeld

$A$ : *Geschlossene* Fläche (Oberfläche), die das Volumen  $V$  einschließt

$V$ : *Räumlicher* Bereich (Volumen) mit der geschlossenen Oberfläche  $A$

$\vec{N}$ : Nach außen gerichtete Flächennormale

### Anmerkungen

- (1) Mit Hilfe des *Gaußschen Integralsatzes* lässt sich ein *Volumenintegral* über die *Divergenz* eines Vektorfeldes in ein *Oberflächenintegral* des Vektorfeldes über die (geschlossene) Oberfläche dieses Volumens *umwandeln* und umgekehrt.
- (2) Im „Strömungsmodell“ hat das Vektorfeld  $\vec{F}$  die Bedeutung des *Geschwindigkeitsfeldes* einer strömenden Flüssigkeit, und die durch den *Gaußschen Integralsatz* miteinander verknüpften Oberflächen- und Volumenintegrale haben dann die folgende anschauliche Bedeutung:

$\oint\limits_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA$ : Flüssigkeitsmenge, die in der Zeiteinheit durch die *geschlossene Hülle*  $A$  fließt

$\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \vec{F} dV$ : Im Gesamtvolumen  $V$  in der Zeiteinheit „erzeugte“ bzw. „vernichtete“ Flüssigkeitsmenge

- (3) Bei einem *quellenfreien* Feld ( $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ ) ist der *Gesamtfluss* durch die geschlossene Oberfläche gleich *null*.

### ■ Beispiele

- (1) Mit Hilfe des *Gaußschen Integralsatzes* soll der *Fluss* des Vektorfeldes  $\vec{F} = \begin{pmatrix} x^3 \\ -y \\ z \end{pmatrix}$  durch die Oberfläche eines *Zylinders* mit dem Radius  $R = 2$  und der Höhe  $H = 5$  berechnet werden (Bild I-158). Es gilt:

$$\oint\limits_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \vec{F} dV$$

$A$ : Zylinderoberfläche

$V$ : Zylindervolumen

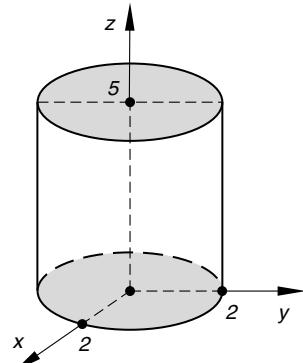


Bild I-158

Zur Berechnung des Vektorflusses durch die Zylinderoberfläche

Die Berechnung des Flusses soll dabei über das *Volumenintegral* der rechten Seite erfolgen. Dazu benötigen wir zunächst die *Divergenz* des Vektorfeldes  $\vec{F}$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (x^3) + \frac{\partial}{\partial y} (-y) + \frac{\partial}{\partial z} (z) = \\ &= 3x^2 - 1 + 1 = 3x^2 \end{aligned}$$

Somit ist

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{F} dV = \iiint_{(V)} 3x^2 dV = 3 \cdot \iiint_{(V)} x^2 dV$$

Um dieses Volumenintegral zu berechnen, führen wir zweckmäßigerweise *Zylinderkoordinaten* ein (siehe Abschnitt 6.2.1):

$$x = \varrho \cdot \cos \varphi, \quad y = \varrho \cdot \sin \varphi, \quad z = z, \quad dV = \varrho dz d\varrho d\varphi$$

Die *Integrationsgrenzen* des Volumenintegrals (Dreifachintegrals) lauten:

*z-Integration*: Von  $z = 0$  bis  $z = 5$

*ρ-Integration*: Von  $\varrho = 0$  bis  $\varrho = 2$

*φ-Integration*: Von  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = 2\pi$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{F} dV &= 3 \cdot \iiint_{(V)} x^2 dV = \\ &= 3 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\varrho=0}^2 \int_{z=0}^5 (\varrho \cdot \cos \varphi)^2 \cdot \varrho dz d\varrho d\varphi = \\ &= 3 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\varrho=0}^2 \int_{z=0}^5 \varrho^3 \cdot \cos^2 \varphi dz d\varrho d\varphi = \\ &= 3 \cdot \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi}_{\text{Integral Nr. 229 mit } a=1} \cdot \int_{\varrho=0}^2 \varrho^3 d\varrho \cdot \int_{z=0}^5 1 dz = \\ &= 3 \left[ \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right]_{\varphi=0}^{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{4} \varrho^4 \right]_{\varrho=0}^2 \cdot \left[ z \right]_{z=0}^5 = \\ &= 3(\pi + 0 - 0 - 0)(4 - 0)(5 - 0) = \\ &= 3\pi \cdot 4 \cdot 5 = 60\pi \end{aligned}$$

Der *Fluss* des Vektorfeldes  $\vec{F}$  durch die (geschlossene) *Zylinderoberfläche*  $A$  beträgt demnach:

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{F} dV = 60\pi$$

**Hinweis:** Die *direkte* Berechnung des Vektorflusses über ein Oberflächenintegral ist mit einem deutlich höheren Rechenaufwand verbunden, da die Zylinderoberfläche in drei Teilflächen zerlegt werden muss (Boden, Deckel und Mantelfläche). Dies führt zu drei Doppelintegralen (siehe hierzu Übungsaufgabe 5, Abschnitt 8, Seite 247).

- (2) Wie groß ist der *Fluss* des kugelsymmetrischen Vektorfeldes  $\vec{F} = \vec{F}(r) = k \vec{r}$  durch die Oberfläche  $A$  einer *konzentrischen* Kugel vom Radius  $R$  ( $k$  ist eine reelle Konstante)?

*Lösung:* Mit Hilfe des *Gaußschen Integralsatzes* lässt sich das gesuchte *Flussintegral* relativ einfach über ein *Volumenintegral* bestimmen:

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{F} dV = \iiint_{(V)} \operatorname{div} (k \vec{r}) dV = k \cdot \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{r} dV$$

Wegen  $\vec{r} = r \vec{e}_r$  erhalten wir für die *Divergenz* dieses Feldes (unter Verwendung von *Kugelkoordinaten* und Gleichung (I-325) mit  $F_r = r, F_\vartheta = F_\varphi = 0$ ):

$$\operatorname{div} \vec{r} = \operatorname{div} (r \vec{e}_r) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot r) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^3) = \frac{1}{r^2} \cdot 3r^2 = 3$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA &= k \cdot \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{r} dV = k \cdot \iiint_{(V)} 3 dV = 3k \cdot \iiint_{(V)} dV = \\ &= 3k \cdot V = 3k \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi k R^3 \end{aligned}$$

der gesuchte Vektorfluss durch die Kugeloberfläche. Denn das Dreifachintegral  $\iiint_{(V)} dV$  ist nichts anderes als das *Volumen*  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$  unserer Kugel.

Zum gleichen Ergebnis kommen wir durch Anwendung der Formel (I-445) für den Fluss eines *kugelsymmetrischen* Vektorfeldes  $\vec{F}(r) = f(r) \vec{e}_r$  durch die Oberfläche einer *konzentrischen* Kugel. Mit

$$\vec{F}(r) = k \vec{r} = k r \vec{e}_r \quad \text{und somit} \quad f(r) = k r$$

folgt dann:

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = f(R) \cdot 4\pi R^2 = kR \cdot 4\pi R^2 = 4\pi k R^3$$

**Hinweis:** *Direkte* Berechnung des Flussintegrals: siehe Übungsaufgabe 10, Abschnitt 8, Seite 248 für den Sonderfall  $n = 1$ . ■

### 9.1.3 Gaußscher Integralsatz in der Ebene

Der *Gaußsche Integralsatz* gilt sinngemäß auch in der Ebene, wobei „Volumen“ durch „Fläche“ und „Oberfläche“ durch „geschlossene Kurve“ (Randkurve der Fläche) zu ersetzen sind. Er verbindet dabei ein *Kurven-* oder *Linienintegral* mit einem *zweidimensionalen Bereichsintegral* (*Doppelintegral*).

#### Gaußscher Integralsatz in der Ebene

$$\oint_C (\vec{F} \cdot \vec{N}) ds = \iint_A \operatorname{div} \vec{F} dA \quad (\text{I-454})$$

Dabei bedeuten (Bild I-159):

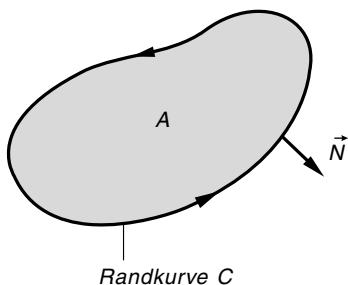
$\vec{F} = \vec{F}(x; y)$ : Stetig differenzierbares *ebenes* Vektorfeld

A: *Ebenes* Flächenstück

C: *Geschlossene* und *orientierte* Randkurve der Fläche A, wobei die Randkurve so zu durchlaufen ist, dass die Fläche A *linker Hand* liegen bleibt

$\vec{N}$ : Nach *außen* gerichtete Kurvennormale (Normaleinheitsvektor der Randkurve)

ds: Linienelement der Randkurve C



**Bild I-159**

Ebenes Flächenstück A mit orientierter Randkurve C (beim Durchlaufen der Kurve in der eingezzeichneten Richtung bleibt die Fläche linker Hand liegen)

#### Anmerkungen

- (1) Man beachte, dass beim Kurvenintegral über die *Normalkomponente*  $\vec{F} \cdot \vec{N}$  des Feldvektors  $\vec{F}$  zu integrieren ist.
- (2) Der *Gaußsche Integralsatz* liefert in der *Ebene* eine Verbindung zwischen einem *Kurvenintegral* und einem *zweidimensionalen Bereichsintegral* (*Doppelintegral*). Dabei wird das Kurvenintegral der *Normalkomponente* eines ebenen Vektorfeldes  $\vec{F}$  längs einer geschlossenen Kurve C in ein Bereichsintegral über die *Divergenz* von  $\vec{F}$ , erstreckt über die von der Kurve C eingeschlossene Fläche A, umgewandelt (und umgekehrt).

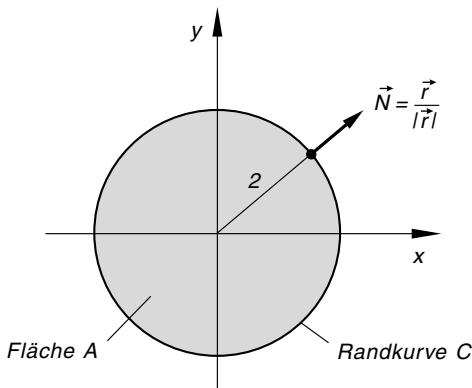
- (3) Wir können den *Gaußschen Integralsatz* in der *Ebene* auch wie folgt anschaulich deuten:  $A$  ist ein (ebenes) Flächenstück auf der Oberfläche einer *Flüssigkeitsströmung* mit dem Geschwindigkeitsfeld  $\vec{F} = \vec{v} = \vec{v}(x; y)$ ,  $C$  die *orientierte* Randkurve dieser Fläche. Dann besitzen Kurvenintegral und Bereichsintegral folgende physikalische Bedeutung:

$\oint_C (\vec{F} \cdot \vec{N}) ds$ : Flüssigkeitsmenge, die in der Zeiteinheit durch die Randkurve  $C$  in die Fläche  $A$  *ein-* bzw. *austritt*.

$\iint_{(A)} \operatorname{div} \vec{F} dA$ : Flüssigkeitsmenge, die in der Zeiteinheit in der Fläche  $A$  in den dortigen *Quellen* und *Senken* „erzeugt“ bzw. „vernichtet“ wird.

## ■ Beispiel

Wir „verifizieren“ den *Gaußschen Integralsatz* in der *Ebene* für das Vektorfeld  $\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  und die in Bild I-160 dargestellte Kreisfläche  $A$  mit dem Radius  $R = 2$ .



**Bild I-160**  
Kreisfläche  $A$  mit Randkurve  $C$

**Berechnung des Kurvenintegrals**  $\oint_C (\vec{F} \cdot \vec{N}) ds$

Integriert wird über die *Normalkomponente* des Vektorfeldes  $\vec{F}$  längs der *geschlossenen* Kreislinie  $C$  mit dem Radius  $R = 2$  um den Nullpunkt. Die *Kurvennormale*  $\vec{N}$  zeigt dabei verabredungsgemäß radial nach *außen*. Somit gilt:

$$\vec{N} = \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \left( \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}: \text{Ortsvektor} \right)$$

Für die *Normalkomponente* von  $\vec{F}$  erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \vec{N} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x^2 + y^2) = \sqrt{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

Längs des Kreises  $x^2 + y^2 = 4$  besitzt sie den *konstanten* Wert

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4} = 2$$

Das *Kurvenintegral* hat daher den folgenden Wert:

$$\oint_C (\vec{F} \cdot \vec{N}) ds = \oint_C 2 ds = 2 \cdot \oint_C ds = 2U = 2 \cdot 4\pi = 8\pi$$

Dabei haben wir bereits berücksichtigt, dass das Kurvenintegral  $\oint_C ds$  den *Umfang*  $U$  des Kreises bedeutet ( $U = 2\pi R = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$ ).

**Berechnung des Doppelintegrals**  $\iint_A \operatorname{div} \vec{F} dA$

*Integrationsbereich ist die Kreisfläche A aus Bild I-160.* Mit

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) = 1 + 1 = 2$$

erhalten wir dann:

$$\iint_A \operatorname{div} \vec{F} dA = \iint_A 2 dA = 2 \cdot \iint_A dA = 2A = 2 \cdot 4\pi = 8\pi$$

Denn das Doppelintegral  $\iint_A dA$  beschreibt den Flächeninhalt  $A$  des Kreises und besitzt somit den Wert  $A = \pi R^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$ .

### Gaußscher Integralsatz

Somit gilt in Übereinstimmung mit dem *Gaußschen Integralsatz*:

$$\oint_C (\vec{F} \cdot \vec{N}) ds = \iint_A \operatorname{div} \vec{F} dA = 8\pi$$

■

## 9.2 Stokesscher Integralsatz

Der *Integralsatz von Stokes* ermöglicht die Umwandlung eines *Oberflächenintegrals* in ein *Kurven- oder Linienintegral* und umgekehrt. Wir formulieren diese in den Anwendungen wichtige Integralbeziehung wie folgt (ohne Beweis):

### Stokesscher Integralsatz

Das *Kurven- oder Linienintegral* eines räumlichen Vektorfeldes  $\vec{F}$  längs einer einfach *geschlossenen* Kurve  $C$  ist gleich dem *Oberflächenintegral* der Rotation von  $\vec{F}$  über eine beliebige räumliche Fläche  $A$ , die durch die Kurve  $C$  berandet wird:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{(A)} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{A} = \iint_{(A)} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{N} dA \quad (\text{I-455})$$

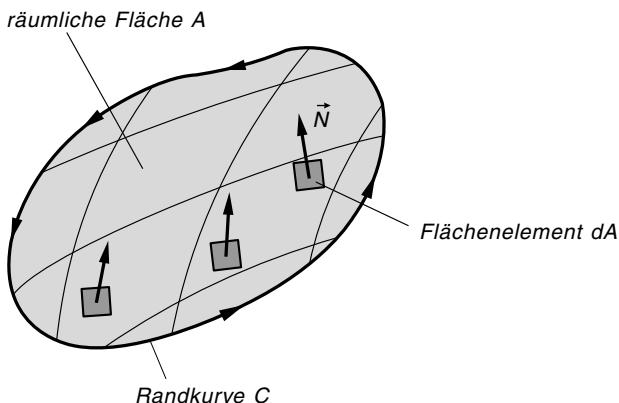
Dabei bedeuten:

$\vec{F} = \vec{F}(x; y; z)$ : Stetig differenzierbares räumliches Vektorfeld

$A$ : Räumliche Fläche mit der Randkurve  $C$

$\vec{N}$ : Flächennormale

$C$ : Orientierte Randkurve der Fläche  $A$ , wobei die *positive* Umlaufsrichtung wie folgt festgelegt wird: Ein Beobachter, der in die Richtung der Flächennormale  $\vec{N}$  schaut, durchläuft die Randkurve  $C$  dabei so, dass die Fläche *links* liegen bleibt (Bild I-161).



**Bild I-161** Räumliche Fläche  $A$  mit orientierter Randkurve  $C$  und einigen Flächenelementen  $dA$

### Anmerkungen

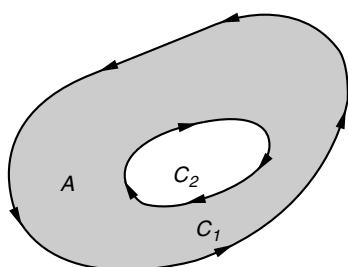
- (1) Der *Stokessche Integralsatz* stellt eine Verbindung her zwischen der *Zirkulation* und der *Rotation* eines Vektorfeldes.
- (2) Das Oberflächenintegral  $\iint_{(A)} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{A}$  beschreibt den *Fluss* des Vektors  $\operatorname{rot} \vec{F}$  durch die Fläche  $A$  und wird daher in den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen auch als *Wirbelfluss* bezeichnet. Der *Stokessche Integralsatz* lässt sich dann auch wie folgt formulieren: Der *Wirbelfluss* eines Vektorfeldes  $\vec{F}$  durch eine Fläche  $A$  ist gleich der *Zirkulation* von  $\vec{F}$  längs der Randkurve  $C$  dieser Fläche.
- (3) Der *Wirbelfluss* durch eine *geschlossene* Fläche  $A$  (d. h. durch die Oberfläche eines räumlichen Bereiches) ist gleich *null*:

$$\iint_{(A)} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{A} = 0 \quad (\text{I-456})$$

Diese Aussage lässt sich aus dem *Gaußschen Integralsatz* gewinnen, wenn man dort formal  $\vec{F}$  durch  $\operatorname{rot} \vec{F}$  ersetzt und dabei beachtet, dass  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$  ist:

$$\iint_{(A)} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{A} = \iiint_{(V)} \underbrace{\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F})}_{0} dV = 0 \quad (\text{I-457})$$

- (4) Der *Wirbelfluss* eines Vektorfeldes  $\vec{F}$  ist für alle Flächen  $A$ , die von der *gleichen* Kurve  $C$  berandet werden, *gleich groß*, d. h. völlig *unabhängig* von der Gestalt der Fläche (siehe hierzu das nachfolgende Beispiel (1)).
- (5) Der *Stokessche Integralsatz* gilt auch für Flächen, die von *mehreren* (einfach) geschlossenen Kurven begrenzt werden. Dabei ist die Orientierung der Kurven so festzusetzen, dass die Fläche beim Durchlaufen der Kurven in positiver Richtung stets *links* liegen bleibt. Bild I-162 zeigt die Orientierung der Randkurven bei einer Fläche, die durch *zwei* geschlossene Kurven begrenzt wird.



**Bild I-162**

Beim Durchlaufen der Randkurven  $C_1$  und  $C_2$  in *positiver* Richtung (Pfeilrichtung) bleibt die Fläche  $A$  stets *links* liegen

## ■ Beispiele

(1) Die folgenden Flächen besitzen jeweils die *gleiche* Randkurve  $C: x^2 + y^2 = 1$ .

(a)  $A_1$ : Mantelfläche der *Halbkugel*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0 \quad (\text{Bild I-163})$$

(b)  $A_2$ : Mantelfläche des *Rotationsparaboloids*

$$z = 1 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0 \quad (\text{Bild I-164})$$

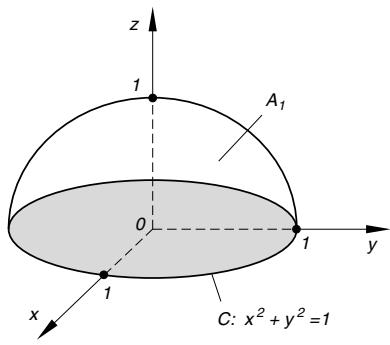


Bild I-163

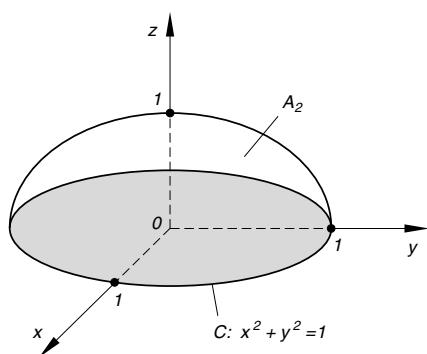


Bild I-164

(c)  $A_3$ : *Kreisfläche*  $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$  (Bild I-165)

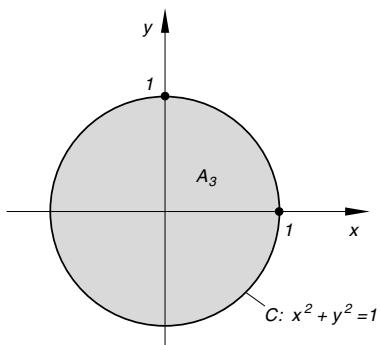
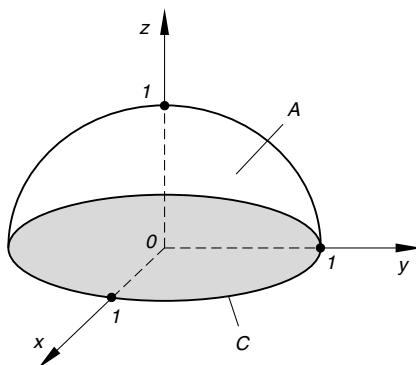


Bild I-165

Die *Randkurve* ist in allen drei Fällen der *Ursprungskreis* mit dem Radius  $R = 1$ . Der jeweilige *Wirbelfluss* eines beliebigen (stetig differenzierbaren) Vektorfeldes  $\vec{F}$  durch die drei Flächen ist daher nach dem Stokeschen Integralsatz *gleich*.

(2) Wir „verifizieren“ den *Integralsatz von Stokes* für das spezielle Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ y \\ z^2 \end{pmatrix} \text{ und die Mantelfläche } A \text{ der Halbkugel } x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0 \text{ (Bild I-166).}$$



**Bild I-166**

Zur Berechnung des Vektorflusses durch die Mantelfläche der (oberen) Halbkugel  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$

**Berechnung des Kurvenintegrals**  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Die Mantelfläche der Halbkugel wird in der  $x, y$ -Ebene durch den *Einheitskreis*  $C$  mit der Parameterdarstellung

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 0 \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

berandet. Mit

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \cos t, \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt} = 0$$

und somit

$$dx = -\sin t dt, \quad dy = \cos t dt, \quad dz = 0 dt$$

erhalten wir für das *skalare Produkt*  $\vec{F} \cdot d\vec{r}$  den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ y \\ z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = (x^2 + y^2) dx + y dy + z^2 dz = \\ &= \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_1 (-\sin t dt) + \sin t \cdot \cos t dt + 0 dt = \\ &= -\sin t dt + \sin t \cdot \cos t dt = (-\sin t + \sin t \cdot \cos t) dt \end{aligned}$$

Das Kurvenintegral besitzt damit den Wert *null*:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\sin t + \underbrace{\sin t \cdot \cos t}_{\text{Integral Nr. 254 mit } a=1}) dt = \left[ \cos t + \frac{1}{2} \cdot \sin^2 t \right]_0^{2\pi} =$$

$$= \cos(2\pi) + \frac{1}{2} \cdot \sin^2(2\pi) - \cos 0 - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 0 =$$

$$= 1 + 0 - 1 - 0 = 0$$

**Berechnung des „Wirbelflusses“**  $\iint_{(A)} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{A} = \iint_{(A)} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{N} dA$

Wir bestimmen zunächst die *Rotation* des Vektorfeldes  $\vec{F}$  mit Hilfe der „Determinendarstellung“ nach Gleichung (I-171) und der *Regel von Sarrus*:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y^2 & y & z^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial y} (z^2) + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2) + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial x} (y) -$$

$$- \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2) - \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial z} (y) - \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial x} (z^2) =$$

$$= 0 \vec{e}_x + 0 \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z - 2y \vec{e}_z - 0 \vec{e}_x - 0 \vec{e}_y =$$

$$= 0 \vec{e}_x + 0 \vec{e}_y - 2y \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2y \end{pmatrix}$$

Wir benötigen noch die *Flächennormale*  $\vec{N}$ . Da die Oberfläche der Halbkugel als eine *Niveaumenge* der skalaren Funktion  $\phi = x^2 + y^2 + z^2$  aufgefasst werden kann, steht der *Gradient* von  $\phi$  *senkrecht* auf dieser Fläche:

$$\operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} \partial \phi / \partial x \\ \partial \phi / \partial y \\ \partial \phi / \partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Durch *Normierung* des Gradienten erhalten wir die *Flächennormale*  $\vec{N}$ :

$$\vec{N} = \frac{1}{|\operatorname{grad} \phi|} \operatorname{grad} \phi = \frac{1}{2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

(unter Berücksichtigung von  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  für die Punkte auf der *Oberfläche* der Halbkugel). Die im Oberflächenintegral auftretende *Normalkomponente* von  $\operatorname{rot} \vec{F}$  lautet damit:

$$(\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 + 0 - 2yz = -2yz$$

Wir gehen jetzt zweckmäßigerweise zu *Kugelkoordinaten* über. Sie lauten (mit  $r = 1$ ; siehe Abschnitt 6.3.1, Gleichung I-305):

$$x = \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \quad y = \sin \vartheta \cdot \sin \varphi, \quad z = \cos \vartheta$$

Damit wird

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{N} &= -2yz = -2 \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \vartheta = \\ &= -2 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

Das benötigte *Flächenelement*  $dA$  auf der Kugeloberfläche lautet für  $r = 1$ :

$$dA = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (\text{Gleichung III-307})$$

Die *Integrationsgrenzen* des Doppelintegrals sind (siehe Bild I-166):

$\vartheta$ -Integration: Von  $\vartheta = 0$  bis  $\vartheta = \pi/2$

$\varphi$ -Integration: Von  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = 2\pi$

Wir sind jetzt in der Lage, den *Wirbelfluss* zu berechnen:

$$\begin{aligned} \iint_{(A)} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{A} &= \iint_{(A)} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{N} dA = \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} (-2 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi) \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \\ &= -2 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \sin^2 \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi d\vartheta d\varphi = \\ &= -2 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \cdot \underbrace{\int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \sin^2 \vartheta \cdot \cos \vartheta d\vartheta}_{\text{Integral Nr. 255 } (n=2, a=1)} = \\ &= -2 \cdot \left[ -\cos \varphi \right]_0^{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot \sin^3 \vartheta \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3} \left[ \cos \varphi \right]_0^{2\pi} \cdot \left[ \sin^3 \vartheta \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{2}{3} [\cos(2\pi) - \cos 0] \cdot [\sin^3(\pi/2) - \sin^3 0] = \frac{2}{3} (1 - 1)(1 - 0) = 0 \end{aligned}$$

Damit haben wir den *Stokeschen Integralsatz* verifiziert. In diesem Beispiel gilt also:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{(A)} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{N} dA = 0$$

- (3) Mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes soll der *Wirbelfluss* des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x + z \\ xz \\ -y^3 \end{pmatrix} \quad \text{durch die kreisförmige Schnittfläche } A \text{ des Zylindermantels}$$

$x^2 + y^2 = 1, z \in \mathbb{R}$  mit der Ebene  $z = 2$  bestimmt werden (*grau* unterlegte Fläche in Bild I-167).

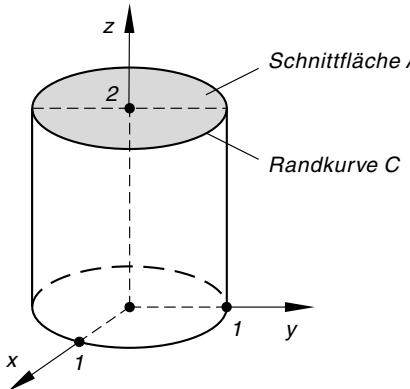


Bild I-167

Nach *Stokes* gilt für den gesuchten Wirbelfluss:

$$\iint_{(A)} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) dt$$

Wir berechnen den Fluss über das *Kurvenintegral* der rechten Seite. Die geschlossene Randkurve  $C$  ist dabei der Einheitskreis um den Mittelpunkt  $M = (0; 0; 2)$  in der Schnittebene  $z = 2$  mit der Parameterdarstellung  $x = \cos t, y = \sin t, z = 2$ . Der zugehörige *Ortsvektor* lautet damit:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z = 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{mit } 0 \leq t \leq 2\pi)$$

Zunächst müssen wir noch das im Kurvenintegral auftretende *Skalarprodukt* der Vektoren  $\vec{F}$  und  $\dot{\vec{r}}$  in Abhängigkeit vom Parameter  $t$  bestimmen:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \begin{pmatrix} x+z \\ xz \\ -y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + 2 \\ 2 \cdot \cos t \\ -\sin^3 t \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} &= \begin{pmatrix} \cos t + 2 \\ 2 \cdot \cos t \\ -\sin^3 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= (\cos t + 2) \cdot (-\sin t) + 2 \cdot \cos^2 t + 0 = \\ &= -\sin t \cdot \cos t - 2 \cdot \sin t + 2 \cdot \cos^2 t\end{aligned}$$

**Berechnung des Kurvenintegrals** (unter Verwendung der Integraltafel, Integrale Nr. 254 und Nr. 229, jeweils mit  $a = 1$ ):

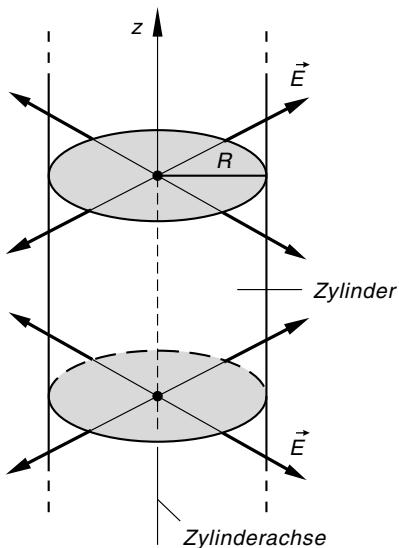
$$\begin{aligned}\oint_C (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) dt &= \int_0^{2\pi} (-\sin t \cdot \cos t - 2 \cdot \sin t + 2 \cdot \cos^2 t) dt = \\ &= \left[ -\frac{1}{2} \cdot \sin^2 t + 2 \cdot \cos t + 2 \left( \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right) \right]_0^{2\pi} = \\ &= \left[ -\frac{1}{2} \cdot \sin^2 t + 2 \cdot \cos t + t + \frac{1}{2} \cdot \sin(2t) \right]_0^{2\pi} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \sin^2(2\pi) + 2 \cdot \cos(2\pi) + 2\pi + \frac{1}{2} \cdot \sin(4\pi) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \sin^2 0 - 2 \cdot \cos 0 - 0 - \frac{1}{2} \cdot \sin 0 = \\ &= 0 + 2 \cdot 1 + 2\pi + 0 + 0 - 2 \cdot 1 - 0 - 0 = \\ &= 2 + 2\pi - 2 = 2\pi \\ (\sin 0 &= \sin(2\pi) = \sin(4\pi) = 0; \cos 0 = \cos(2\pi) = 1)\end{aligned}$$

Der gesuchte Wirbelfluss beträgt somit  $2\pi$ . ■

## 9.3 Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik

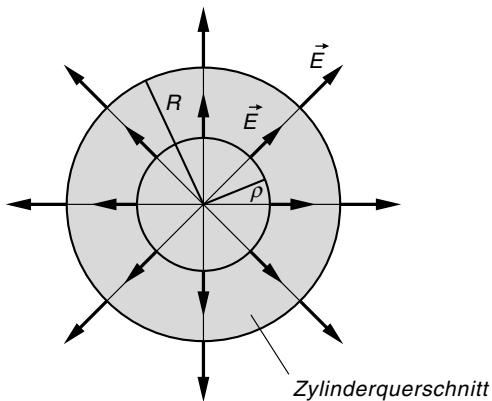
### 9.3.1 Elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders

Wir interessieren uns für das *elektrische Feld* im Innen- und Außenraum eines homogen geladenen sehr langen Zylinders (Bild I-168;  $R$ : Zylinderradius;  $l$ : Zylinderlänge;  $\rho_{\text{el}}$ : konstante Ladungsdichte). Die elektrischen Feldlinien verlaufen dabei aus Symmetriegründen *axial* nach außen, wie in Bild I-169 im Querschnitt angedeutet (wir haben dabei eine *positive* Ladungsdichte vorausgesetzt). Das elektrische Feld besitzt also *Zylindersymmetrie*.



**Bild I-168**

Elektrisches Feld eines homogen geladenen Zylinders (positive Ladungsdichte)



**Bild I-169**

Axialsymmetrisches elektrisches Feld im Innenraum und Außenraum eines homogen geladenen Zylinders (positive Ladungsdichte; ebener Schnitt senkrecht zur Zylinderachse)

Unsere Aufgabe besteht nun darin, aus der vorgegebenen (konstanten) Ladungsverteilung mit Hilfe des *Integralsatzes von Gauß* die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  zu bestimmen. Aus diesem Grund betrachten wir einen *koaxialen Zylinder gleicher Länge*  $l$  mit dem Radius  $\varrho$  (siehe Bild I-169). Für den *Fluss* des Feldvektors  $\vec{E}$  durch die *Zylinderoberfläche*  $A$  gilt dann nach dem *Gaußschen Integralsatz*:

$$\oint\limits_{(A)} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint\limits_{(A)} (\vec{E} \cdot \vec{N}) dA = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \vec{E} dV \quad (\text{I-458})$$

Wegen der *Zylindersymmetrie* ist (in Zylinderkoordinaten)

$$\vec{E} = E(\varrho) \vec{e}_\varrho \quad \text{und} \quad \vec{N} = \vec{e}_\varrho \quad (\text{I-459})$$

und damit

$$\vec{E} \cdot \vec{N} = (E(\varrho) \vec{e}_\varrho) \cdot \vec{e}_\varrho = E(\varrho) \underbrace{(\vec{e}_\varrho \cdot \vec{e}_\varrho)}_1 = E(\varrho) \quad (\text{I-460})$$

( $\vec{e}_\varrho$  ist der axial nach außen zeigende Einheitsvektor).

Der *Gaußsche Integralsatz* geht dann über in

$$\oint\limits_{(A)} E(\varrho) dA = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \vec{E} dV \quad (\text{I-461})$$

Wegen der *Zylindersymmetrie* des Feldes gibt es *keine* Feldstärkekomponente in Richtung der *Zylinderachse* ( $z$ -Achse). Daher ist der Fluss des elektrischen Feldes durch Boden und Deckel des Zylinders jeweils gleich *null* und wir können die Integration im

Flussintegral  $\oint\limits_{(A)} E(\varrho) dA$  auf den *Zylindermantel*  $A^*$  beschränken:

$$\oint\limits_{(A)} E(\varrho) dA = \iint\limits_{(A^*)} E(\varrho) dA = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \vec{E} dV \quad (\text{I-462})$$

Wir beschäftigen uns zunächst mit der Berechnung des *Flussintegrals*. Es gilt:

$$\iint\limits_{(A^*)} E(\varrho) dA = E(\varrho) \cdot \underbrace{\iint\limits_{(A^*)} 1 dA}_{2\pi\varrho l} = E(\varrho) \cdot 2\pi\varrho l \quad (\text{I-463})$$

Denn  $E(\varrho)$  ist auf dem Mantel des koaxialen Zylinders *konstant* und das Doppelintegral

$\iint\limits_{(A^*)} 1 dA$  ist nichts anderes als die *Mantelfläche*  $2\pi\varrho l$  dieses Zylinders. Damit erhalten wir:

$$E(\varrho) \cdot 2\pi\varrho l = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \vec{E} dV \quad (\text{I-464})$$

An dieser Stelle müssen wir eine *Fallunterscheidung* vornehmen und den *Innen-* bzw. *Außenraum* des geladenen Zylinders *getrennt* untersuchen. Wir betrachten zunächst den *Innenraum* ( $\varrho \leq R$ ) und wenden uns dann dem *Außenraum* ( $\varrho \geq R$ ) zu.

### Feldstärke $\vec{E}$ innerhalb des geladenen Zylinders ( $\varrho \leq R$ ; siehe Bild I-170)

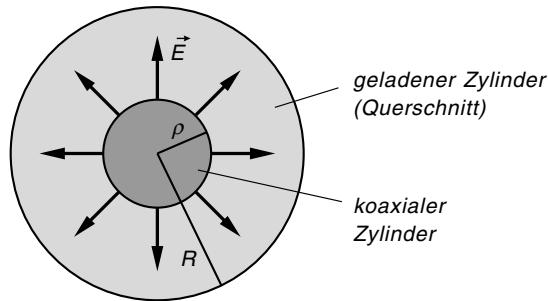


Bild I-170

Zur Berechnung der elektrischen Feldstärke im Innenraum eines homogen geladenen Zylinders (positive Ladungsdichte)

Im *Innenraum* des geladenen Zylinders haben wir eine *konstante* Ladungsdichte  $\varrho_{\text{el}}$ . Zwischen dem Feldstärkevektor  $\vec{E}$  und der Ladungsdichte  $\varrho_{\text{el}}$  besteht dabei nach *Maxwell* die Beziehung

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\varrho_{\text{el}}}{\varepsilon_0} \quad (\text{I-465})$$

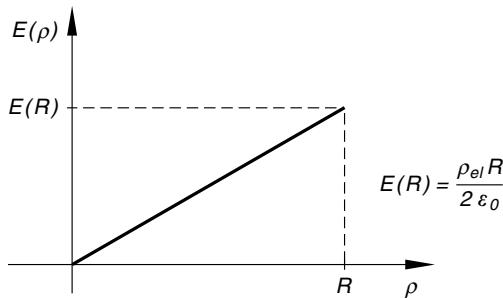
( $\varepsilon_0$ : elektrische Feldkonstante). Der *Gaußsche Integralsatz* (I-464) nimmt jetzt die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} E(\varrho) \cdot 2\pi\varrho l &= \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{E} dV = \iiint_{(V)} \frac{\varrho_{\text{el}}}{\varepsilon_0} dV = \frac{\varrho_{\text{el}}}{\varepsilon_0} \cdot \iiint_{(V)} 1 dV = \\ &= \frac{\varrho_{\text{el}}}{\varepsilon_0} \cdot V_\varrho = \frac{\varrho_{\text{el}}}{\varepsilon_0} \cdot \pi\varrho^2 l \end{aligned} \quad (\text{I-466})$$

Denn das Dreifachintegral  $\iiint_{(V)} 1 dV$  beschreibt das *Volumen*  $V_\varrho$  des koaxialen Zylinders mit dem Radius  $\varrho$  und der Länge  $l$  und besitzt somit den Wert  $V_\varrho = \pi\varrho^2 l$ . Damit erhalten wir für die elektrische Feldstärke im *Innern* des geladenen Zylinders die folgende Abhängigkeit vom Abstand  $\varrho$  von der Zylinderachse:

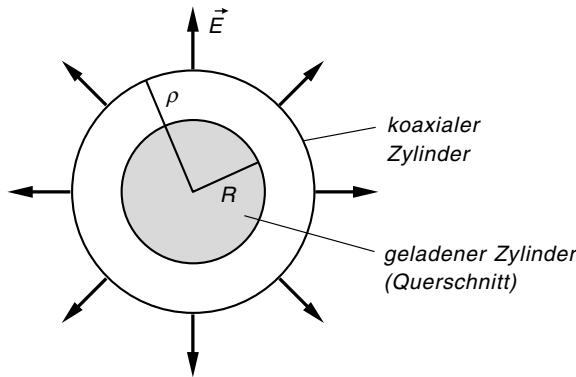
$$E(\varrho) = \frac{\varrho_{\text{el}}}{2\varepsilon_0} \cdot \varrho \quad (\varrho \leq R) \quad (\text{I-467})$$

Im *Innern* des Zylinders nimmt also die Feldstärke  $E(\varrho)$  *linear* mit dem Abstand  $\varrho$  zu (Bild I-171).

**Bild I-171**

Linearer Anstieg der elektrischen Feldstärke im Innenraum eines homogen geladenen Zylinders

**Feldstärke  $\vec{E}$  außerhalb des geladenen Zylinders ( $\rho \geq R$ ; siehe Bild I-172)**

**Bild I-172**

Zur Berechnung der elektrischen Feldstärke im Außenraum eines homogen geladenen Zylinders (positive Ladungsdichte)

Das elektrische Feld im Außenraum des geladenen Zylinders ist *quellenfrei*, d. h. hier gilt

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \text{für} \quad \rho > R \quad (\text{I-468})$$

Für das Volumenintegral  $\iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{E} dV$  erhalten wir daher *außerhalb* des geladenen Zylinders *keine* Beiträge. Somit kann die Integration auf das Volumen  $V_z$  dieses Zylinders beschränkt werden. *Innerhalb* dieses Bereiches gilt nach wie vor

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{el}}{\epsilon_0} \quad (\text{I-469})$$

Wir erhalten dann aus dem *Gaußschen Integralsatz* (I-464) die folgende Beziehung:

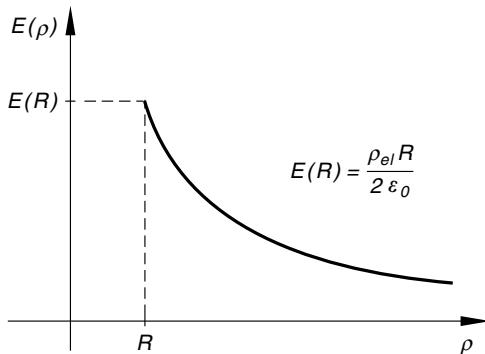
$$\begin{aligned} E(\rho) \cdot 2\pi\rho l &= \iiint_{(V_z)} \operatorname{div} \vec{E} dV = \iiint_{(V_z)} \frac{\rho_{el}}{\epsilon_0} dV = \frac{\rho_{el}}{\epsilon_0} \cdot \iiint_{(V_z)} 1 dV = \\ &= \frac{\rho_{el}}{\epsilon_0} \cdot V_z = \frac{\rho_{el}}{\epsilon_0} \cdot \pi R^2 l \end{aligned} \quad (\text{I-470})$$

( $V_z = \pi R^2 l$ : Volumen des geladenen Zylinders)

Im Außenraum des geladenen Zylinders gilt daher:

$$E(\rho) = \frac{\rho_{\text{el}} R^2}{2 \epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho} \quad (\rho \geq R) \quad (\text{I-471})$$

D. h. die elektrische Feldstärke  $E(\rho)$  ist dort *umgekehrt proportional* zum Abstand  $\rho$  von der Zylinderachse, das Feld nimmt also nach außen hin *ab* (Bild I-173).



**Bild I-173**

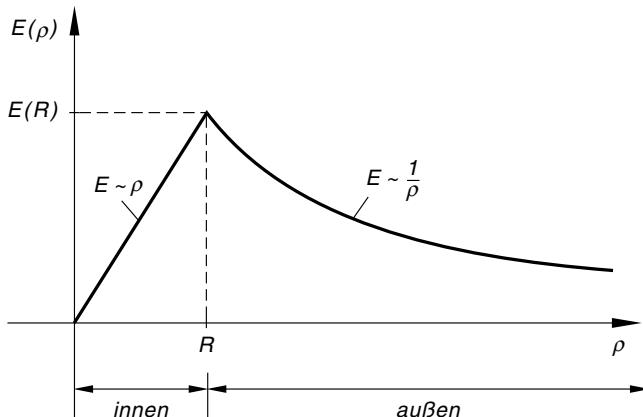
Im Außenraum eines homogen geladenen Zylinders nimmt die elektrische Feldstärke nach außen hin ab

### Gesamtfeld des geladenen Zylinders

Insgesamt haben wir damit die folgende *Feldstärkeverteilung*:

$$E(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho_{\text{el}}}{2 \epsilon_0} \cdot \rho & \text{für } \rho \leq R \\ \frac{\rho_{\text{el}} R^2}{2 \epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho} & \text{für } \rho \geq R \end{cases} \quad (\text{I-472})$$

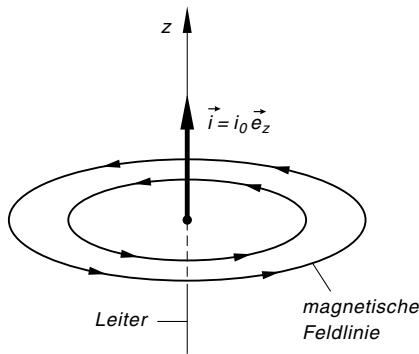
Bild I-174 zeigt den Verlauf dieser Verteilung.



**Bild I-174** Verlauf der elektrischen Feldstärke im Innen- und Außenraum eines homogen geladenen Zylinders in axialer Richtung (positive Ladungsdichte; Zylindradius  $R$ )

### 9.3.2 Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters

Ein sehr langer linearer Leiter wird von einem *konstanten* Strom mit der Stromdichte  $\vec{i} = i_0 \vec{e}_z$  durchflossen ( $\vec{e}_z$ : Einheitsvektor in  $z$ -Richtung). Er erzeugt in seiner Umgebung ein *ringförmiges* Magnetfeld (Bild I-175).

**Bild I-175**

Ringförmiges Magnetfeld  
eines stromdurchflossenen linearen Leiters

Der magnetische Feldstärkevektor  $\vec{H}$  tangiert dabei die kreisförmigen Feldlinien, sein Betrag kann daher wegen der Zylindersymmetrie nur vom Abstand  $q$  von der Leiterachse abhängen. Bei Verwendung von *Zylinderkoordinaten* gilt somit:

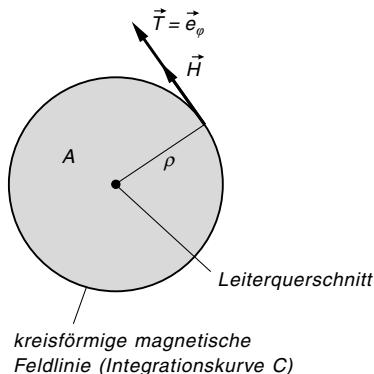
$$\vec{H} = \vec{H}(q) = H(q) \vec{e}_\varphi \quad (\text{I-473})$$

( $\vec{e}_\varphi$ : tangentialer Einheitsvektor)

Wir stellen uns nun die Aufgabe, den funktionalen Zusammenhang zwischen der magnetischen Feldstärke und dem Abstand vom Leiter herzuleiten. Dabei verwenden wir den *Integralsatz von Stokes*. Er lautet hier:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \iint_{(A)} (\operatorname{rot} \vec{H}) \cdot \vec{N} dA \quad (\text{I-474})$$

Dabei ist  $C$  eine *kreisförmige* magnetische Feldlinie mit dem Radius  $q$  und  $A$  die eingeschlossene (in Bild I-176 grau unterlegte) Kreisfläche.

**Bild I-176**

Zur Integration längs einer kreisförmigen magnetischen Feldlinie

Wir berechnen zunächst das *Kurvenintegral* im Stokesschen Integralsatz. Da der Feldstärkevektor  $\vec{H}$  in die *Tangentenrichtung* fällt, d. h. zum Tangenteneinheitsvektor  $\vec{T} = \vec{e}_\varphi$  parallel ist, gilt unter Verwendung der Gleichung (I-473)

$$\begin{aligned}\vec{H} \cdot d\vec{r} &= (H(\varrho) \vec{e}_\varphi) \cdot (ds \vec{T}) = H(\varrho) ds (\vec{e}_\varphi \cdot \vec{T}) = \\ &= H(\varrho) ds \underbrace{(\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi)}_1 = H(\varrho) ds\end{aligned}\quad (\text{I-475})$$

und somit

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \oint_C H(\varrho) ds = H(\varrho) \cdot \underbrace{\oint_C 1 ds}_{2\pi\varrho} = H(\varrho) \cdot 2\pi\varrho\quad (\text{I-476})$$

Denn der *Betrag*  $H(\varrho)$  der Feldstärke ist längs der magnetischen Feldlinie *konstant* und das verbliebene Kurvenintegral  $\oint_C 1 ds$  beschreibt den *Umfang*  $U$  der kreisförmigen Feldlinie, besitzt also den Wert  $U = 2\pi\varrho$ .

Jetzt wenden wir uns dem *Wirbelfluss* im Stokesschen Integralsatz zu. Nach *Maxwell* besteht dabei zwischen der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$  und der Stromdichte  $\vec{i}$  in jedem Punkt des Feldes der folgende Zusammenhang:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{i} \quad (\text{I-477})$$

(es handelt sich hierbei um eine der vier *Maxwellschen Gleichungen*). Beim *Fluss* des Vektors  $\operatorname{rot} \vec{H}$  durch die in Bild I-176 *grau* unterlegte Kreisfläche beachten wir ferner, dass die Flächennormale  $\vec{N}$  in die positive  $z$ -Richtung zeigt und somit mit dem Basisvektor (Einheitsvektor)  $\vec{e}_z$  identisch ist. Dann aber gilt mit  $\vec{i} = i_0 \vec{e}_z$ :

$$(\operatorname{rot} \vec{H}) \cdot \vec{N} = \vec{i} \cdot \vec{e}_z = (i_0 \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z = i_0 \underbrace{(\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z)}_1 = i_0 \quad (\text{I-478})$$

Bei der Berechnung des *Wirbelflusses* müssen wir berücksichtigen, dass die Stromdichte *außerhalb* des Leiterquerschnitts überall den Wert *null* hat (Bild I-177). Die Integration ist daher nur über die Querschnittsfläche  $A^*$  des *Leiters* zu erstrecken, und dort hat die Stromdichte den *konstanten* Wert  $i_0$ .

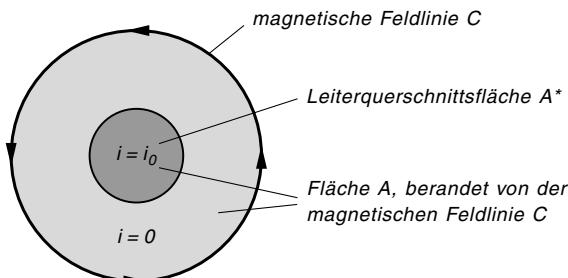


Bild I-177

Damit erhalten wir:

$$\iint_{(A)} (\operatorname{rot} \vec{H}) \cdot \vec{N} dA = \iint_{(A^*)} i_0 dA \quad (\text{I-479})$$

Das verbliebene Doppelintegral ist definitionsgemäß die (hier konstante) *Stromstärke*  $I$  des Leiters. Der *Wirbelfluss* des Magnetfeldes beträgt damit:

$$\iint_{(A)} (\operatorname{rot} \vec{H}) \cdot \vec{N} dA = \iint_{(A^*)} i_0 dA = i_0 \cdot \underbrace{\iint_{(A^*)} 1 dA}_{A^*} = i_0 A^* = I \quad (\text{I-480})$$

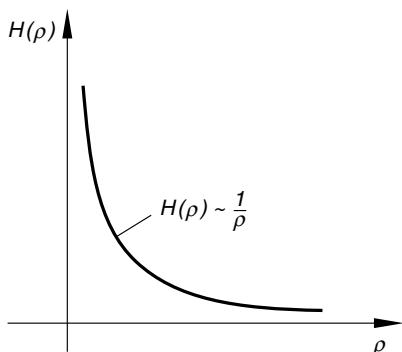
Der *Stokessche Integralsatz* führt also zu dem folgenden Ergebnis:

$$H(\rho) \cdot 2\pi\rho = I \quad (\text{I-481})$$

Die magnetische Feldstärke  $H(\rho)$  ist daher dem Abstand  $\rho$  vom Leiter *umgekehrt proportional*, nimmt also nach außen hin *ab*:

$$H(\rho) = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho} \quad (\rho > 0) \quad (\text{I-482})$$

Diese Abhängigkeit wird in Bild I-178 verdeutlicht.



**Bild I-178**

Verlauf der magnetischen Feldstärke in der Umgebung eines stromdurchflossenen linearen Leiters

## Übungsaufgaben

### Zu Abschnitt 1

- 1) Wie lautet die *vektorielle* Darstellung der in Bild I-179 skizzierten *Wurfparabel* im luftleeren Raum (*waagerechter Wurf*)?

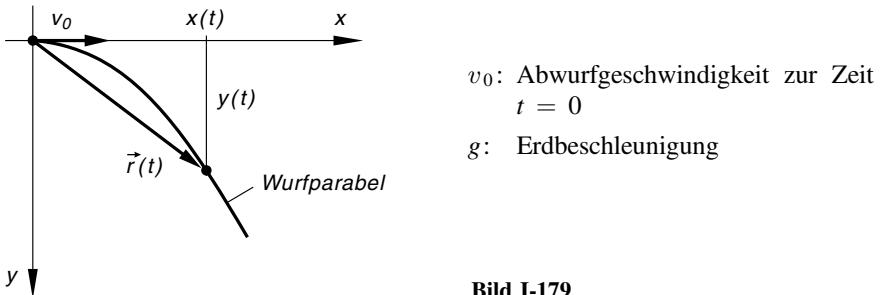


Bild I-179

- 2) Beschreiben Sie die folgenden Kurven durch *parameterabhängige* Ortsvektoren und bestimmen Sie den jeweiligen *Tangentenvektor*:
- Parabel  $y = 4x^2$ ,  $x \geq 0$
  - Mittelpunktkreis (Radius  $R$ , positiver Umlaufsinn)
  - Gerade durch den Ursprung mit der Steigung  $m = 2$
- 3) Auf dem Bildschirm eines Oszillosgraphen durchlaufe ein Elektronenstrahl eine ebene Bahn mit dem *zeitabhängigen* Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\omega t) \\ b \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad (t \geq 0; a > 0; b > 0; \omega > 0)$$

- Zeichnen Sie die Bahnkurve. Welche Bedeutung haben die positiven Konstanten  $a$ ,  $b$  und  $\omega$ ?
  - Bestimmen Sie den *Geschwindigkeits-* und *Beschleunigungsvektor*.
  - Zeigen Sie: Der Beschleunigungsvektor  $\vec{a}(t)$  ist stets dem Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  entgegengerichtet.
- 4) Bestimmen Sie für die folgenden ebenen Bewegungen eines Massenpunktes den *Geschwindigkeitsvektor*  $\vec{v}(t)$  und den *Beschleunigungsvektor*  $\vec{a}(t)$ :

- Kreisbahn:  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\omega t) \\ R \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad (t \geq 0; R > 0, \omega > 0)$
- Gewöhnliche Zykloide:  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R(t - \sin t) \\ R(1 - \cos t) \end{pmatrix} \quad (t \geq 0; R > 0)$

- 5) Differenzieren Sie die folgenden, vom Parameter  $t$  abhängigen Vektoren *zweimal* nach  $t$ :

a)  $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ e^t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$

b)  $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \cdot \cos t \\ e^{-t} \cdot \sin t \\ t \end{pmatrix}$

- 6) Gegeben sind die folgenden *parameterabhängigen* Vektoren:

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos t \\ 2 \cdot \sin t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ t \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die *1. Ableitung* der folgenden Skalar- und Vektorprodukte mit Hilfe der entsprechenden Produktregel:

a)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$       b)  $\vec{b} \cdot \vec{c}$       c)  $\vec{a} \times \vec{b}$       d)  $\vec{a} \times \vec{c}$

- 7) Gegeben ist die Raumkurve mit dem Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = 2 \cdot \cos(5t) \vec{e}_x + 2 \cdot \sin(5t) \vec{e}_y + 10t \vec{e}_z$$

Bestimmen Sie den *Tangenten-* und *Hauptnormaleneinheitsvektor* sowie die *Krümmung* der Kurve für den Parameterwert  $t = \pi/4$ .

- 8) Berechnen Sie für die Raumkurve  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$  die folgenden Größen:

- a) *Bogenlänge* im Intervall  $0 \leq t \leq 1$ .  
 b) Krümmung und Krümmungsradius für den Parameterwert  $t = 1$ .

- 9) Die Gleichung einer *ebenen* Bewegung laute:

$$\vec{r}(t) = t \vec{e}_x + t^2 \vec{e}_y \quad (-\infty < t < \infty)$$

- a) Stellen Sie die Bahnkurve in *expliziter* Form dar.  
 b) Berechnen Sie die *Bogenlänge*  $s$  der Kurve im Intervall  $0 \leq t \leq 2$ .  
 c) Berechnen Sie die *Krümmung* der Kurve für  $t = 1$ .  
 d) Bestimmen Sie den *Geschwindigkeits-* und *Beschleunigungsvektor*.  
 e) Wie lauten die *Tangential-* und *Normalkomponenten* von Geschwindigkeit und Beschleunigung?

- 10) Ein Teilchen bewege sich auf der *ebenen* Kurve mit dem Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = e^{-t} \cdot \cos t \vec{e}_x + e^{-t} \cdot \sin t \vec{e}_y \quad (t \geq 0)$$

Bestimmen Sie die *Tangential-* und *Normalkomponente* des zugehörigen Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektors.

- 11) Leiten Sie die auf Seite 24 in Gleichung (I-50) angegebene Formel für die *Krümmung* einer ebenen Kurve mit der expliziten Gleichung  $y = f(x)$  her.

Anleitung: Die Kurve kann auch in der *Parameterform*  $x = x$ ,  $y = f(x)$  mit der Koordinate  $x$  als Parameter dargestellt werden.

## Zu Abschnitt 2

- 1) Bilden Sie die *partiellen Ableitungen 1. Ordnung* der folgenden, von *zwei* Parametern abhängigen Ortsvektoren:

$$\text{a) } \vec{r}(u; v) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(2u) \\ 2 \cdot \sin(2u) \\ v^2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{r}(u; v) = \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \\ v \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \vec{r}(\lambda; \mu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (\lambda^2 - \mu^2) \\ \lambda\mu \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \vec{r}(u; v) = \begin{pmatrix} uv \\ \cos(uv) \\ 1 - uv \end{pmatrix}$$

- 2) Beschreiben Sie die *Mantelfläche* des in Bild I-180 skizzierten Zylinders durch einen von *zwei* geeigneten Parametern abhängigen Ortsvektor.

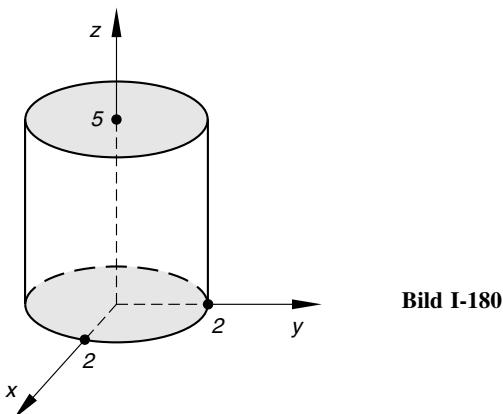


Bild I-180

- 3) Ein Massenpunkt bewege sich auf einer *Ebene*  $E$ , die den Punkt  $P_1 = (1; 1; 1)$

enthält und durch die Richtungsvektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  eindeutig

festgelegt ist (Bild I-181). Wie lautet die *Parameterdarstellung* dieser Ebene (Angabe des Ortsvektors)?

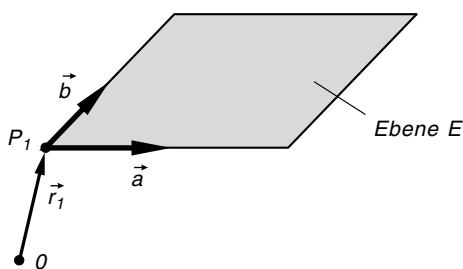


Bild I-181

- 4) Die *Parameterdarstellung* einer Fläche laute:

$$\vec{r} = \vec{r}(u; v) = \begin{pmatrix} \cos u \cdot \sin v \\ \sin u \cdot \sin v \\ \cos v \end{pmatrix} \quad (0 \leq u < 2\pi; 0 \leq v \leq \pi)$$

Zeigen Sie:

- a) Es handelt sich um die Oberfläche einer *Kugel*.
- b) Die Tangentenvektoren  $\vec{t}_u$  und  $\vec{t}_v$  an die Parameterlinien stehen *senkrecht* aufeinander.

- 5) Der Ortsvektor  $\vec{r}(\vartheta; \varphi) = 2 \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot \sin \vartheta \\ \sin \varphi \cdot \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$  beschreibt eine *Kugelschale* mit dem Radius  $R = 2$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq \vartheta \leq \pi$ ).

Wie lautet der *Geschwindigkeitsvektor*  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t)$  eines Massenpunktes, der sich auf dieser Kugeloberfläche längs der folgenden Bahnen bewegt ( $t$ : Zeit)?

- a) Breitenkreis:  $\vartheta = \text{const.} = \vartheta_0, \quad \varphi = t$
- b) Längenkreis:  $\varphi = \text{const.} = \varphi_0, \quad \vartheta = t$
- c)  $\vartheta = t, \quad \varphi = t^2$

Wie groß ist die Geschwindigkeit dem *Betrage* nach zum Zeitpunkt  $t = \pi$ ?

- 6) Gegeben ist die Oberfläche einer *Kugel* vom Radius  $R$  mit der folgenden *Parameterdarstellung*:

$$\vec{r} = \vec{r}(u; v) = \begin{pmatrix} R \cdot \sin u \cdot \cos v \\ R \cdot \sin u \cdot \sin v \\ R \cdot \cos u \end{pmatrix} \quad (0 \leq u \leq \pi; 0 \leq v < 2\pi)$$

- a) Bestimmen Sie die *Tangentenvektoren*  $\vec{t}_u$  und  $\vec{t}_v$  der Parameterlinien sowie die *Flächennormale*  $\vec{N}$  in Abhängigkeit von den Parametern  $u$  und  $v$  sowie für die speziellen Parameterwerte  $u = v = \pi/2$ .

- b) Wie lautet das *Flächenelement*  $dA$  der Kugeloberfläche?
- c) Welcher Flächenpunkt  $P$  gehört zu den Parameterwerten  $u = v = \pi/4$  der Einheitskugel ( $R = 1$ )? Wie lautet die Gleichung der in diesem Punkt errichteten *Tangentialebene*?
- 7) Gegeben ist eine *Rotationsfläche* mit der *Parameterdarstellung*
- $$x = u, \quad y = v, \quad z = \sqrt{u^2 + v^2 + 4} \quad (u, v \in \mathbb{R})$$
- Bestimmen Sie im Flächenpunkt  $P$ , der zu den Parameterwerten  $u = 1$  und  $v = 2$  gehört, die folgenden Größen:
- Tangentenvektoren*  $\vec{t}_u$  und  $\vec{t}_v$  an die Parameterlinien
  - Flächennormale*  $\vec{N}$
  - Tangentialebene*
- 8) Wie lautet die Gleichung der *Tangentialebene* an die Fläche  $z = x^2 - y^2$  im Punkt  $P = (2; 1; 3)$ ?
- 9) Bestimmen Sie die Gleichung der *Ebene*, die im Punkt  $P = (2; 5; 10)$  die Fläche  $z = xy$  berührt.

## Zu Abschnitt 3

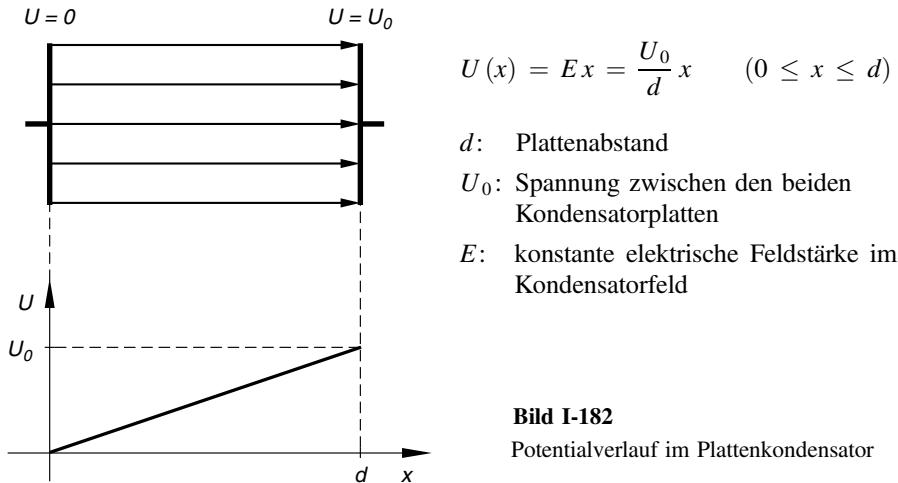
- Bestimmen und zeichnen Sie die *Niveaulinien* der folgenden ebenen Skalarfelder:
  - $\phi(x; y) = x^2 + y^2$
  - $\phi(x; y) = x^2 - y$
- Bestimmen und deuten Sie die *Niveauflächen* der folgenden räumlichen Skalarfelder:
  - $\phi(x; y; z) = z - x^2 - y^2$
  - $\phi(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2$
- Wie lauten die *Niveauflächen* des räumlichen Skalarfeldes  $\phi(x; y; z) = 2x^2 + 2y^2$ ?
- Das *elektrostatische Potential* einer homogen geladenen Kugel wird im *Außenraum* der Kugel durch die skalare Funktion

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (r \geq R)$$

beschrieben ( $Q$ : Ladung der Kugel;  $\epsilon_0$ : elektrische Feldkonstante;  $r$ : Abstand vom Kugelmittelpunkt;  $R$ : Kugelradius).

Bestimmen und deuten Sie die *Äquipotentialflächen* dieses skalaren Feldes.

- 5) Bei einem homogen geladenen Plattenkondensator steigt das Potential *linear* von  $U = 0$  auf den Endwert  $U = U_0 > 0$  an, wenn man sich längs einer Feldlinie von der linken Platte ( $x = 0$ ) zur rechten Platte ( $x = d$ ) bewegt (Bild I-182). Bestimmen und deuten Sie die Äquipotentialflächen des elektrischen Feldes.



- 6) Skizzieren Sie das ebene *Geschwindigkeitsfeld*  $\vec{v}(x; y) = x \vec{e}_x$  einer strömenden Flüssigkeit ( $x \geq 0$ ).

- 7) Bestimmen Sie die Eigenschaften des ebenen Vektorfeldes

$$\vec{F}(x; y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (x^2 + y^2 > 0)$$

und skizzieren Sie das Feld.

- 8) Welche Eigenschaften besitzt das folgende ebene Kraftfeld?

$$\vec{F}(x; y) = \frac{1}{r} (-y \vec{e}_x + x \vec{e}_y) \quad (r > 0)$$

( $r$  ist der Abstand des Punktes  $P = (x; y)$  vom Koordinatenursprung). Skizzieren Sie das Vektorfeld.

- 9) Ein Masseteilchen bewegt sich in dem ebenen *Geschwindigkeitsfeld*  $\vec{v}(x; y) = \vec{e}_x + y \vec{e}_y$ . Wie lautet die *Bahnkurve* des Teilchens, wenn es sich zur Zeit  $t = 0$  im Punkt  $P = (0; 2)$  befindet?

*Anleitung:* Das Teilchen bewegt sich auf einer *Feldlinie*, die hier als „Stromlinie“ des Geschwindigkeitsfeldes bezeichnet wird.

- 10) Gegeben sind die folgenden physikalischen Vektorfelder:

- a) Elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  in der Umgebung einer Punktladung  $Q$ :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \vec{r} \quad (r > 0)$$

( $\epsilon_0$ : elektrische Feldkonstante;  $\vec{e}_r$ : Einheitsvektor in *radialer* Richtung, d. h. in Richtung des Ortsvektors  $\vec{r}$ ;  $r = |\vec{r}|$ ).

- b) Magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  eines linearen vom Strom  $I$  durchflossenen Leiters:

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi o} \vec{e}_\varphi \quad (\varrho > 0)$$

( $\varrho$ : senkrechter Abstand von der Leiterachse =  $z$ -Achse;  $\vec{e}_\varphi$ : Einheitsvektor in tangentialer Richtung senkrecht zur  $z$ -Achse)

Bestimmen und charakterisieren Sie die Flächen, auf denen der *Betrag* der jeweiligen Feldstärke einen *konstanten* Wert annimmt.

## Zu Abschnitt 4

- 1) Bestimmen Sie die *Niveaulinien* sowie den *Gradient* der folgenden ebenen Skalarfelder:

  - $\phi(x; y) = y$
  - $\phi(x; y) = x^2 + y^2$

2) Welche *ebenen* Skalarfelder  $\phi(x; y)$  gehören zu dem Gradientenfeld  $\vec{F}(x; y) = \text{grad } \phi = y \vec{e}_x + x \vec{e}_y$ ?

3) Berechnen Sie den *Gradient* des skalaren Feldes  $\phi$  sowie den *Betrag* des Gradienten im jeweiligen Punkt  $P$ :

  - $\phi(x; y; z) = 10x^2y^3 - 5xyz^2$ ,  $P = (1; -1; 2)$
  - $\phi(x; y; z) = x^2 \cdot e^{yz} + yz^3$ ,  $P = (2; 0; 1)$
  - $\phi(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $P = (1; 2; -2)$

4) Zeigen Sie: Das skalare Feld  $\phi = \ln r$  besitzt den *Gradient*  $\text{grad } \phi = \frac{1}{r^2} \vec{r}$  ( $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ) ist dabei der räumliche Abstand des Punktes  $P = (x; y; z)$  vom Ursprung;  $\vec{r}$ : Ortsvektor von  $P$ ).

5) Gegeben sind die räumlichen Skalarfelder  $\phi = x^2yz + x \cdot e^y$  und  $\psi = y \cdot e^x$ . Bestimmen Sie den *Gradient* des Produktes  $U = \phi \cdot \psi$  auf zwei *verschiedene* Arten.

- 6) Bestimmen Sie die *Richtungsableitung* des Feldes  $\phi(x; y; z) = xyz + 3xz^3$  in Richtung des Vektors  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  im Raumpunkt  $P = (1; 2; 1)$ .
- 7) Berechnen Sie die *Richtungsableitung* des ebenen Skalarfeldes  $\phi$  in *radialer* Richtung im jeweiligen Punkt  $P$ :
- $\phi(x; y) = x^2 - y^2, \quad P = (3; 4)$
  - $\phi(x; y) = 4x^2 + 9y^2, \quad P = (1; 0)$
- 8) Wie lautet die *Flächennormale* der Bildfläche von  $x^2 + (y - 1)^2 - z^2 = 10$  im Punkt  $P = (1; 2; 5)$ ?
- 9) Bestimmen Sie die Gleichung der *Tangentialebene*, die man im Punkt  $P$  an die Fläche  $F(x; y; z) = 0$  anlegen kann:
- Zylindermantelfläche:  $x^2 + y^2 - 5 = 0, \quad 0 \leq z \leq 10, \quad P = (2; 1; 5)$
  - $xy^2z + 6x^2z^2 - 22 = 0, \quad P = (2; 1; -1)$
- 10) Das *elektrostatische Potential* in der Umgebung einer negativ geladenen Kugel lautet wie folgt:

$$U(r) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r \geq R)$$

( $-Q < 0$ : Ladung der Kugel;  $\epsilon_0$ : elektrische Feldkonstante;  $R$ : Kugelradius).

$P$  sei ein beliebiger Punkt des elektrischen Feldes im Außenraum der Kugel (Abstand  $r \geq R$ ). In welcher Richtung von  $P$  aus nimmt das Potential  $U$  am stärksten zu? Wie groß ist dieser *Maximalwert*?

## Zu Abschnitt 5

- 1) Bestimmen Sie die *Divergenz* der folgenden ebenen Vektorfelder:
- $\vec{F}(x; y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$
  - $\vec{F}(x; y) = \begin{pmatrix} x^3 + 1 \\ xy^2 \end{pmatrix}$
  - $\vec{v}(x; y) = \begin{pmatrix} x \cdot e^{-y} \\ y \cdot e^{-x} \end{pmatrix}$
  - $\vec{F}(x; y) = (x^2 + y^2)^{-1} (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y)$
- 2) In welchen Punkten der  $x, y$ -Ebene verschwindet die *Divergenz* des ebenen Vektorfeldes  $\vec{F}(x; y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y - 4y \end{pmatrix}$ ?

- 3) Bestimmen Sie die *Divergenz* der folgenden räumlichen Vektorfelder:

$$\text{a)} \quad \vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} 2x^3z^2 \\ x^2 - z^2 \\ xyz \end{pmatrix} \quad \text{b)} \quad \vec{v}(x; y; z) = \begin{pmatrix} xy - x^2z \\ 2yz^2 \\ x^2y + yz \end{pmatrix}$$

- 4) Berechnen Sie die *Divergenz* des Vektorfeldes  $\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ 2yz^3 \\ xyz \end{pmatrix}$  in den fol-

genden Punkten:  $P_1 = (2; 0; 1)$ ,  $P_2 = (1; 2; -1)$ ,  $P_3 = (3; 2; 3)$ .

- 5) Bestimmen Sie die *Divergenz* des Gradienten der skalaren Funktion  $\phi(x; y; z) = (x - 1)^2 + (y - 5)^2 + z^2$ .

- 6) Gegeben sind das Skalarfeld  $\phi(x; y; z) = x^2 \cdot e^{yz}$  und das Vektorfeld  $\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$ . Bestimmen Sie die *Divergenz* des Vektorfeldes  $\vec{A} = \phi \vec{F}$  auf zwei *verschiedene* Arten.

- 7) Wie muss man die Funktion  $f(r)$  wählen, damit das räumliche Zentraffeld  $\vec{F}(r) = f(r) \vec{r}$  quellenfrei ist?

- 8) Bestimmen Sie den *Gradient* des radialsymmetrischen räumlichen Skalarfeldes  $\phi(r) = a + \frac{b}{r}$  und zeigen Sie, daß die *Divergenz* des Gradienten *verschwindet* ( $a, b$ : Konstanten;  $r > 0$ ).

- 9) Bestimmen Sie die *Rotation* der folgenden ebenen Vektorfelder:

$$\text{a)} \quad \vec{F}(x; y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\text{b)} \quad \vec{F}(x; y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x - y + 2 \\ x + y - 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)} \quad \vec{F}(x; y) = (x^2y^3 - x)\vec{e}_x + (xy^2 + e^y)\vec{e}_y$$

- 10) Zeigen Sie: Das ebene Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (-x\vec{e}_x - y\vec{e}_y)$  ist *wirbelfrei*.

- 11) Bestimmen Sie die *Rotation* der folgenden räumlichen Vektorfelder:

$$\text{a)} \quad \vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} xy - z^2 \\ 2xyz \\ x^2z - y^2z \end{pmatrix}$$

b)  $\vec{F}(x; y; z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z)$

- 12) Wie sind die *Parameter*  $a$  und  $b$  zu wählen, damit die *Rotation* des Vektorfeldes

$$\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} 2xz^2 + y^3 z \\ axy^2 z \\ 2x^2 z + bxy^3 \end{pmatrix} \text{ überall verschwindet?}$$

- 13) Welchen Wert besitzt die *Rotation* von  $\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} xy^3 \\ 2xy^2 z \\ x^2 y - z^2 \end{pmatrix}$  im Punkt  $P = (1; 2; 1)$ ?

- 14) Zeigen Sie: Das *räumliche* Vektorfeld (Zentralfeld)  $\vec{F}(r) = f(r) \vec{r}$  ist *wirbelfrei* ( $f(r)$  ist dabei eine *differenzierbare* Funktion des Abstandes  $r$ ).

- 15) Es ist  $\phi(x; y; z) = x^2 y z^2$  ein Skalarfeld und  $\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} xy \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}$  ein Vektor-

feld. Bestimmen Sie auf zwei *verschiedene* Arten die *Rotation* des Vektorfeldes  $\vec{A} = \phi \vec{F}$ .

- 16) Zeigen Sie, dass das räumliche Vektorfeld  $\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} 2xz + y^2 \\ 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}$  *wirbelfrei*

und somit als *Gradient* eines skalaren Feldes  $\phi(x; y; z)$  darstellbar ist. Bestimmen Sie dieses *Potentialfeld*.

- 17) Zeigen Sie: Die skalare Funktion  $\phi(r) = \frac{1}{r}$  mit  $r > 0$  ist eine Lösung der *Laplace-Gleichung*  $\Delta \phi = 0$  im Raum, nicht aber in der Ebene.

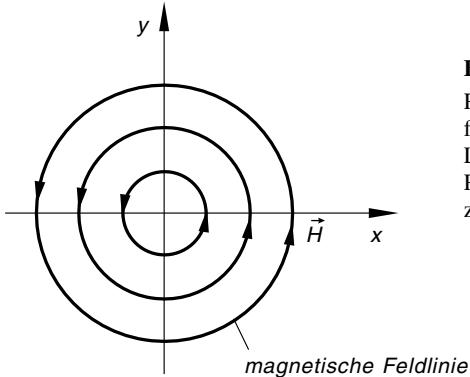
- 18) Welche Funktion erhält man, wenn man den *Laplace-Operator*  $\Delta$  auf das Skalarfeld  $\phi(x; y; z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$  anwendet?

## Zu Abschnitt 6

- 1) Stellen Sie die folgenden *ebenen* Vektorfelder in *Polarkoordinaten* dar:

a)  $\vec{F}(x; y) = \frac{1}{x^2 + y^2} (y \vec{e}_x - x \vec{e}_y)$       b)  $\vec{F}(x; y) = \begin{pmatrix} xy \\ y^2 \end{pmatrix}$

- 2) Ein vom konstanten Strom  $I$  durchflossener linearer Leiter erzeugt in seiner Umgebung ein *ringförmiges Magnetfeld*, das in einer Schnittebene *senkrecht* zur Leiterachse (=  $z$ -Achse) durch das *ebene* Feld  $\vec{H}(x; y) = \frac{I}{2\pi r^2} (-y \vec{e}_x + x \vec{e}_y)$  beschrieben werden kann (Schnittebene:  $x, y$ -Ebene;  $r^2 = x^2 + y^2$ ; siehe Bild I-183). Wie lautet die Darstellung des magnetischen Feldstärkevektors  $\vec{H}$  im *Polar-Koordinatensystem*?

**Bild 1-183**

Ringförmiges Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters (Schnitt senkrecht zur Leiterachse =  $z$ -Achse; Strom fließt in Richtung der positiven  $z$ -Achse senkrecht zur Papierebene nach oben)

- 3) Berechnen Sie *Divergenz* und *Rotation* der folgenden in Polarkoordinaten dargestellten (ebenen) Vektorfelder:
- $\vec{F}(r; \varphi) = \vec{e}_r$
  - $\vec{F}(r; \varphi) = r^2 \vec{e}_r$
- 4) Zeigen Sie, dass das ebene (in Polarkoordinaten dargestellte) Vektorfeld  $\vec{F}(r; \varphi) = e^{r+\varphi} \left( \vec{e}_r + \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \right)$  *wirbelfrei* ist und daher als *Gradient* eines skalaren Feldes  $\phi(r; \varphi)$  dargestellt werden kann. Bestimmen Sie diese skalare Funktion.
- 5) Wie lautet die Darstellung des (ebenen) *Geschwindigkeitsvektors*  $\vec{v}$  eines Teilchens in *Polarkoordinaten*?  
*Anleitung:* Gehen Sie von dem Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}(x; y) = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y$  in kartesischen Koordinaten aus.  $x = x(t)$  und  $y = y(t)$  sind die (zeitabhängigen) kartesischen Koordinaten des Teilchens.
- 6) Bestimmen Sie diejenigen Lösungen der *Laplace-Gleichung*  $\Delta\phi = 0$  in der *Ebene*, die nur vom *Polarwinkel*  $\varphi$ , nicht aber vom Abstand  $r$  abhängen (Lösungen vom Typ  $\phi = \phi(\varphi)$ ).
- 7) Die folgenden räumlichen Vektorfelder sind in *Zylinderkoordinaten* darzustellen:
- $\vec{F}(x; y; z) = \vec{r} = (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z)$
  - $\vec{F}(x; y; z) = y \vec{e}_x - 2 \vec{e}_y + x \vec{e}_z$

- 8) Das *Geschwindigkeitsfeld* einer Flüssigkeit laute:

$$\vec{v}(x; y; z) = \frac{(1+z)^2 - x^2 - y^2}{(1+z)^4} \vec{e}_z$$

Drücken Sie dieses Feld in *Zylinderkoordinaten* aus.

- 9) Die Bahnkurve eines Masseteilchens besitzt die folgende *Parameterdarstellung*:

$$x = e^{-t} \cdot \cos t, \quad y = e^{-t} \cdot \sin t, \quad z = 2t \quad (t: \text{Zeit}; t \geq 0).$$

- a) Bestimmen Sie den *Geschwindigkeitsvektor*  $\vec{v}$ , ausgedrückt in *Zylinderkoordinaten*.  
 b) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit zur Zeit  $t = 1$ .

- 10) Bilden Sie den *Gradient* der folgenden in *Zylinderkoordinaten* dargestellten Skalarfelder:

$$\text{a) } \phi(\varrho; \varphi; z) = \varrho \cdot e^\varphi + z \quad \text{b) } \phi(\varrho; \varphi; z) = \frac{1}{\varrho} + e^{\varphi+z}$$

- 11) Bestimmen Sie *Divergenz* und *Rotation* der folgenden in *Zylinderkoordinaten* ausgedrückten Vektorfelder:

$$\text{a) } \vec{F}(\varrho; \varphi; z) = \frac{1}{\varrho^2} \vec{e}_\varrho \quad \text{b) } \vec{F}(\varrho; \varphi; z) = \frac{1}{\varrho} \vec{e}_\varrho + z \vec{e}_\varphi + \vec{e}_z$$

- 12) Gesucht sind diejenigen Lösungen der *Laplace-Gleichung*  $\Delta\phi = 0$ , die nur von *einer* der drei Zylinderkoordinaten abhängen:

$$\text{a) } \phi = \phi(\varrho) \quad \text{b) } \phi = \phi(\varphi) \quad \text{c) } \phi = \phi(z)$$

- 13) Stellen Sie die folgenden räumlichen Vektorfelder in *Kugelkoordinaten* dar:

$$\text{a) } \vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ y \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{F}(x; y; z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- 14) Eine Flüssigkeitsströmung besitze das folgende *Geschwindigkeitsfeld*:

$$\vec{v}(x; y; z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x^2 + y^2 > 0)$$

Wie lauten die Geschwindigkeitskomponenten im *Kugelkoordinatensystem*?

- 15) Stellen Sie den Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}(x; y; z) = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z$  eines Masseteilchens in *Kugelkoordinaten* dar.  $x(t)$ ,  $y(t)$  und  $z(t)$  sind dabei die zeitabhängigen kartesischen Koordinaten des Teilchens.

- 16) Wie lautet das *Linienelement*  $ds$  auf dem *Breitenkreis*  $\vartheta = \text{const.} = \vartheta_0$  einer Kugel mit dem Radius  $R$ ?

- 17) Zeigen Sie, dass das in *Kugelkoordinaten* ausgedrückte Vektorfeld

$$\vec{F}(r; \vartheta; \varphi) = e^{\vartheta + \varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/\sin \vartheta \end{pmatrix}$$

wirbelfrei und somit als *Gradient* eines skalaren Feldes  $\phi(r; \vartheta; \varphi)$  darstellbar ist. Wie lautet diese *Potentialfunktion*?

- 18) Wie muss man den Exponent  $n$  wählen, damit das *radialsymmetrische* Vektorfeld

$$\vec{F}(r; \vartheta; \varphi) = r^n \vec{e}_r$$

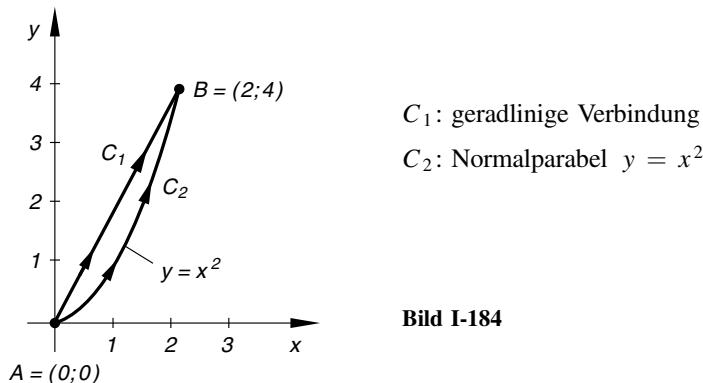
- a) quellenfrei,
- b) wirbelfrei,
- c) quellen- und wirbelfrei ist?

- 19) Bestimmen Sie diejenigen Lösungen der *Laplace-Gleichung*  $\Delta\phi = 0$ , die nur von *einer* der drei Kugelkoordinaten abhängen:

- a)  $\phi = \phi(r)$
- b)  $\phi = \phi(\vartheta)$
- c)  $\phi = \phi(\varphi)$

## Zu Abschnitt 7

- 1) Berechnen Sie das *Linienintegral*  $\int_C [y dx + (x^2 + xy) dy]$  längs der in Bild I-184 skizzierten Verbindungswege der Punkte  $A = (0; 0)$  und  $B = (2; 4)$ .



- 2) Zeigen Sie, dass die folgenden Linienintegrale *wegunabhängig* sind und bestimmen Sie die jeweils zugehörige *Potentialfunktion*  $\phi(x; y)$ :

a)  $\int_C [(2xy + 4x) dx + (x^2 - 1) dy]$       b)  $\int_C (e^y dx + x \cdot e^y dy)$

c)  $\int_C [(3x^2 y + y^3) dx + (x^3 + 3xy^2) dy]$

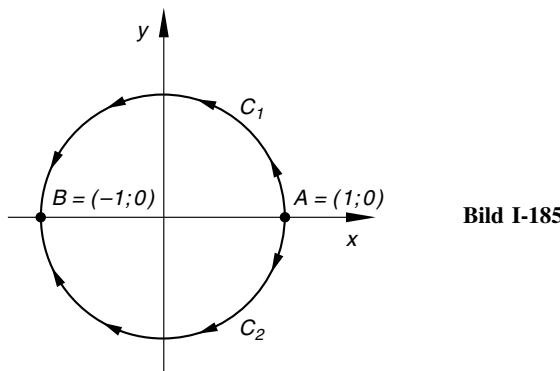
- 3) Gegeben ist das ebene Kraftfeld  $\vec{F}(x; y) = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y$ .

- a) Zeigen Sie, daß dieses Feld *konservativ* ist.  
 b) Bestimmen Sie das *Potential*  $\phi(x; y)$  des Feldes.  
 c) Berechnen Sie das *Arbeitsintegral*  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  für einen beliebigen vom Punkt  $P_1 = (1; 0)$  zum Punkt  $P_2 = (3; 5)$  führenden Verbindungsweg  $C$ .

- 4) Berechnen Sie die *Arbeit* des ebenen Kraftfeldes

$$\vec{F}(x; y) = \frac{y}{1 + x^2 + y^2} \vec{e}_x - \frac{x}{1 + x^2 + y^2} \vec{e}_y$$

beim Verschieben einer Masse von  $A = (1; 0)$  nach  $B = (-1; 0)$  längs der in Bild I-185 skizzierten *halbkreisförmigen* Verbindungswege  $C_1$  und  $C_2$ . Warum hängt die Arbeit noch vom eingeschlagenen Weg ab?



- 5) In dem ebenen Kraftfeld  $\vec{F}(x; y) = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 0 \end{pmatrix}$  wird eine Masse vom Punkt

$P_1 = (1; 0)$  aus auf dem Einheitskreis im Gegenuhrzeigersinn einmal herumgeführt. Welche *Arbeit* wird dabei vom Kraftfeld verrichtet?

- 6) Zeigen Sie, dass es sich bei der *linearen Differentialform*

$$\frac{C_V}{T} dT + \frac{R}{V} dV$$

um das *vollständige Differential*  $dS$  einer von  $T$  und  $V$  abhängigen Funktion  $S(T; V)$  handelt und bestimmen Sie diese Funktion.

*Anmerkung:*  $S(T; V)$  ist die *Entropiefunktion* des idealen Gases und gehört zu den *thermodynamischen Zustandsfunktionen*, die in der physikalischen Chemie eine bedeutende Rolle spielen ( $T$ : absolute Temperatur;  $V$ : Volumen;  $R$ : allgemeine Gaskonstante;  $C_V$ : Molwärme bei konstantem Volumen (Stoffkonstante)).

- 7) Berechnen Sie das *Linienintegral*  $\int_C (xy^2 dx - x^2 yz dy + xz^2 dz)$  längs des Weges  $C$  mit dem Ortsvektor  $\vec{r}(t) = t \vec{e}_x + t^2 \vec{e}_y + t^3 \vec{e}_z$  ( $1 \leq t \leq 2$ ).
- 8) Welche *Arbeit* verrichtet das Kraftfeld  $\vec{F}(x; y; z) = xy \vec{e}_x + \vec{e}_y + yz \vec{e}_z$  an einer Masse, wenn diese längs der Schraubenlinie  $\vec{r}(t) = \cos t \vec{e}_x + \sin t \vec{e}_y + t \vec{e}_z$  von  $P_1(t=0)$  aus nach  $P_2(t=2\pi)$  bewegt wird?
- 9) Zeigen Sie, dass das Linienintegral  $\int_C (x dx + y dy + z dz)$  unabhängig vom Integrationsweg ist. Wie lautet das *Potential*  $\phi(x; y; z)$  des Feldes?
- 10) Zeigen Sie, dass das räumliche Kraftfeld  $\vec{F}(r) = r^2 \vec{r}$  *konservativ* ist. Wie lautet die zugehörige *Potentialfunktion*  $\phi(x; y; z)$ ?
- 11) Führen Sie den Nachweis, dass die *Zirkulation* des ebenen Vektorfeldes  $\vec{F}(x; y) = (2x + y^2) \vec{e}_x + (2xy + y^2) \vec{e}_y$  längs des in *positiver* Richtung (Genuhrzeigersinn) durchlaufenen Einheitskreises *verschwindet*. Gilt diese Aussage für jeden geschlossenen Integrationsweg?
- 12) Stellen Sie fest, ob die folgenden Vektorfelder *konservativ* sind und bestimmen Sie gegebenenfalls das zugehörige *Potential*:
- a)  $\vec{F}(x; y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ xy + y^2 \end{pmatrix}$       b)  $\vec{F}(x; y) = \begin{pmatrix} y^2 \cdot \sin x - 2x \\ -2y \cdot \cos x + 4y \end{pmatrix}$
- c)  $\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} 2xy - z^3 \\ 2xy \\ -3xz^2 \end{pmatrix}$       d)  $\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} x^2 \cdot e^y \\ x - z \\ z^2 \end{pmatrix}$

- 13) Eine Masse wird in dem Kraftfeld  $\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} x + yz \\ xz \\ y + yz \end{pmatrix}$  längs der in Bild I-186

dargestellten (geschlossenen) Kreislinie  $C$  mit der Parameterdarstellung

$$x = 5 \cdot \cos t, \quad y = 5 \cdot \sin t, \quad z = 2 \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

bewegt.

- Welche *Arbeit* wird dabei vom Kraftfeld verrichtet?
- Berechnen Sie die Rotation von  $\vec{F}$  (Determinantenschreibweise verwenden).
- Ist das Kraftfeld *konservativ*?

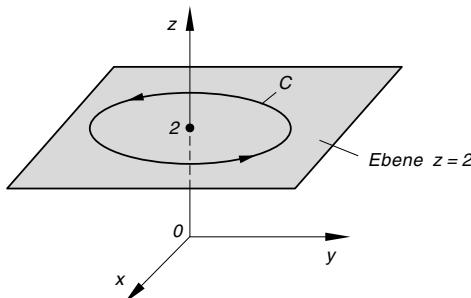


Bild I-186

- 14) Gegeben ist das räumliche Vektorfeld  $\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} \sin y \\ x \cdot \cos y + \sin z \\ y \cdot \cos z \end{pmatrix}$ .

- Zeigen Sie, dass es sich hierbei um ein *konservatives* Feld handelt.
- Bestimmen Sie die zugehörige *Potentialfunktion*  $\phi(x; y; z)$ .
- Berechnen Sie mit Hilfe des unter b) ermittelten Potentials das *Linien-* oder *Kurvenintegral*  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  für einen *beliebigen* Verbindungsweg  $C$  der beiden Punkte  $P_1 = (0; 0; 0)$  und  $P_2 = (5; \pi; 3\pi)$ .

## Zu Abschnitt 8

*Hinweis:* Bei einer *geschlossenen* Oberfläche ist die Flächennormale  $\vec{N}$  stets nach *außen* gerichtet.

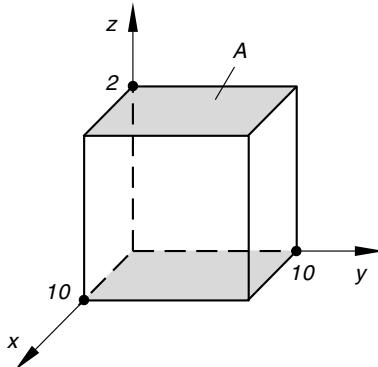
- 1) Berechnen Sie mit dem Vektorfeld  $\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} 4y \\ x^2 \\ xz \end{pmatrix}$  das *Oberflächenintegral*  $\iint_A (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA$ , wobei  $A$  das im 1. Oktant gelegene Teilstück der Ebene mit der

Gleichung  $x + y + z = 1$  bedeutet (Flächennormale  $\vec{N}$ : normierter Gradient der Ebene  $x + y + z - 1 = 0$ ).

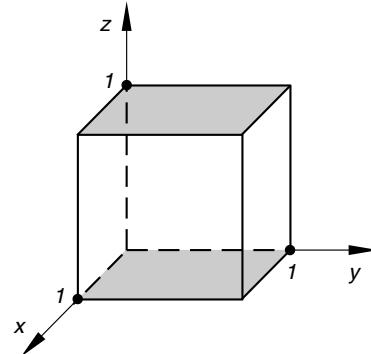
- 2) Gegeben ist das folgende *Geschwindigkeitsfeld* einer Flüssigkeit:

$$\vec{v}(x; y; z) = 0 \vec{e}_x + 1 \vec{e}_y + z^2 \vec{e}_z$$

Berechnen Sie den *Fluss* dieses Feldes durch das in Bild I-187 skizzierte ebene Flächenstück  $A$  (Teil der Ebene  $z = 2$ ; Flächennormale:  $\vec{N} = \vec{e}_z$ ).



**Bild I-187**

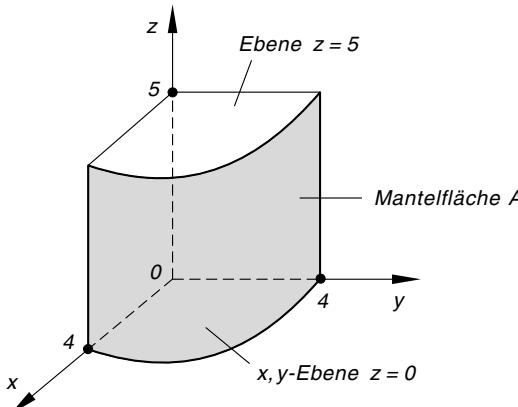


**Bild I-188**

- 3) Berechnen Sie den *Fluss* des Vektorfeldes  $\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ xyz \end{pmatrix}$  durch die *geschlossene* Oberfläche des in Bild I-188 dargestellten Würfels.

- 4) Berechnen Sie das *Oberflächenintegral* des (räumlichen) Vektorfeldes  $\vec{F}(x; y; z) = y \vec{e}_x + x \vec{e}_y + xz \vec{e}_z$  über die in Bild I-189 skizzierte grau unterlegte Teilfläche  $A$  eines Zylindermantels (Mantelfläche des Zylinders mit dem Radius  $R = 4$  und der Höhe  $H = 5$  im 1. Oktant). Flächennormale  $\vec{N}$  ist der normierte Gradient der Mantelfläche.

Anleitung: Verwenden Sie *Zylinderkoordinaten*.



**Bild I-189**

- 5) Wie groß ist der Fluss des Vektorfeldes  $\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} x^3 \\ -y \\ z \end{pmatrix}$  durch die *geschlossene* Oberfläche des in Bild I-190 skizzierten Zylinders (Radius:  $R = 2$ ; Höhe:  $H = 5$ )?

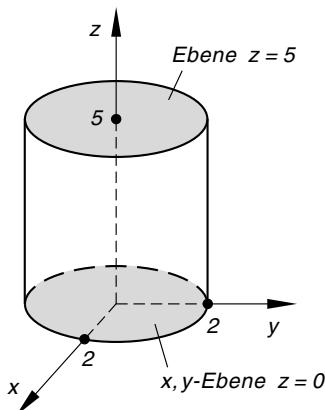


Bild I-190

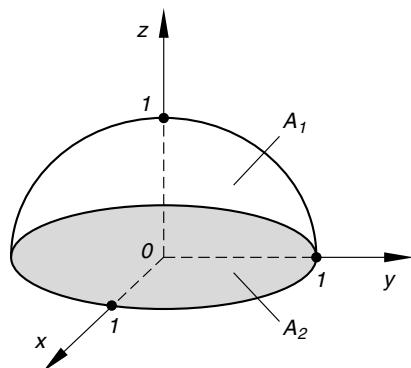


Bild I-191

- 6) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes  $\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} xy \\ z \\ -y \end{pmatrix}$  durch die *geschlossene* Oberfläche  $A = A_1 + A_2$  der Halbkugel  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z \geq 0$  (siehe Bild I-191).
- 7) Durch Rotation der Normalparabel  $z = x^2$  um die  $z$ -Achse entsteht ein *Rotationsparaboloid*, dessen Mantel durch die Gleichung  $z = x^2 + y^2$  beschrieben werden kann (Bild I-192). Berechnen Sie den Flächeninhalt  $M$  dieses Mantels bis zur Höhe  $h = 2$ .

*Anleitung:* Verwenden Sie als Flächenparameter zunächst die *kartesischen* Koordinaten  $x$  und  $y$  und gehen Sie dann bei der Berechnung des anfallenden Doppelintegrals zu *Polarkoordinaten* über.

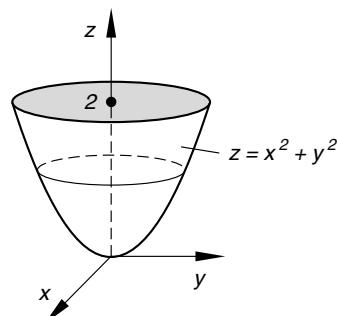


Bild I-192

- 8) Berechnen Sie den *Fluss* des Vektorfeldes  $\vec{F}(x; y; z) = 2x\vec{e}_x - x\vec{e}_y + z\vec{e}_z$  durch die Oberfläche  $A$  der Kugel  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ .
- Hinweis:* Verwenden Sie *Kugelkoordinaten*.
- 9) Berechnen Sie den *Fluss* des in Zylinderkoordinaten dargestellten Vektorfeldes  $\vec{F}(\varrho) = \frac{a}{\varrho}\vec{e}_\varrho$  mit  $\varrho > 0$  durch die Oberfläche eines *koaxialen* Zylinders mit dem Radius  $R$  und der Höhe  $H$  (Zylinderachse =  $z$ -Achse;  $a$ : reelle Konstante).
- 10) Das *radialsymmetrische* Vektorfeld mit der (in *Kugelkoordinaten* gegebenen) Darstellung  $\vec{F}(r) = r^n\vec{e}_r$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) durchflutet eine *Kugelschale* vom Radius  $R$  (der Kugelmittelpunkt liege im Koordinatenursprung). Wie groß ist der *Vektorfluss*?

## Zu Abschnitt 9

*Hinweis:* Bei einer *geschlossenen* Oberfläche ist die Flächennormale  $\vec{N}$  stets nach *außen* gerichtet.

- 1) Berechnen Sie den *Fluss* des Vektorfeldes  $\vec{F}(x; y; z) = xy\vec{e}_x + y^2\vec{e}_y + xz\vec{e}_z$  durch die geschlossene Oberfläche  $A$  des in Bild I-193 skizzierten Würfels unter Verwendung des *Gaußschen Integralsatzes*.
- 2) Der in Bild I-194 dargestellte Zylinder mit dem Radius  $R = 3$  wird durch die Parallelebenen  $z = 0$  und  $z = 2$  begrenzt. Wie groß ist der *Fluss* des Vektorfeldes  $\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -x \\ z^2 \end{pmatrix}$  durch die geschlossene Oberfläche des Zylinders?

Verwenden Sie bei der Lösung dieser Aufgabe den *Integralsatz von Gauß*.

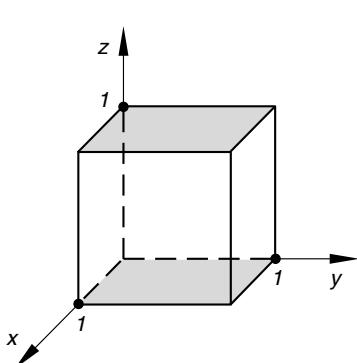


Bild I-193

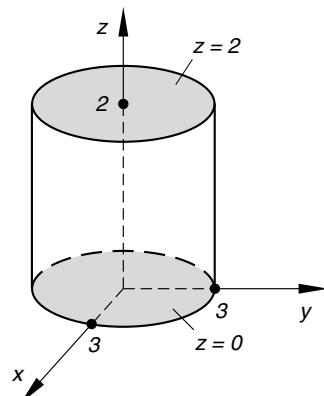


Bild I-194

- 3) Verifizieren Sie den *Gaußschen Integralsatz* für das Vektorfeld  $\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$  und die Oberfläche  $A$  der Kugel  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .
- 4) Ein Vektorfeld  $\vec{F}$  sei als *Rotation* eines weiteren Feldes  $\vec{E}$  darstellbar:  $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{E}$ . Dann verschwindet das Oberflächenintegral von  $\vec{F}$  für jede geschlossene Fläche  $A$ , d. h. es gilt:

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(A)} [(\operatorname{rot} \vec{E}) \cdot \vec{N}] dA = 0$$

Beweisen Sie diese Aussage mit Hilfe des *Gaußschen Integralsatzes*.

- 5) Verifizieren Sie den *Gaußschen Integralsatz* in der *Ebene* für das Vektorfeld  $\vec{F}(x; y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix}$  und die in Bild I-195 skizzierte Kreisfläche  $A$  mit der Randkurve  $C$ .

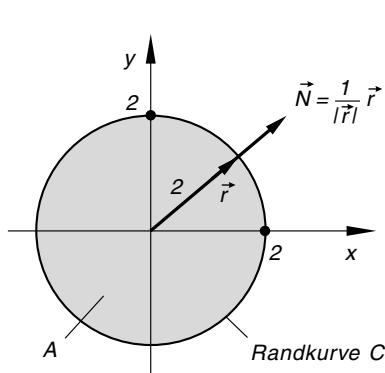


Bild I-195

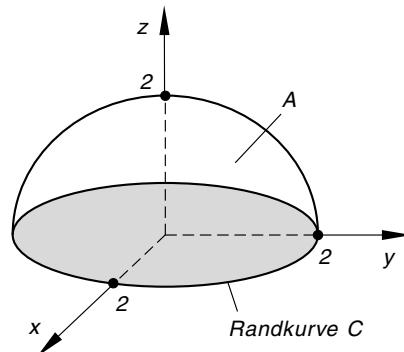


Bild I-196

- 6)  $A$  sei die Mantelfläche der Halbkugel  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  mit  $z \geq 0$  und  $C$  die (kreisförmige) Randkurve in der  $x, y$ -Ebene (Bild I-196). Berechnen Sie den

Wirbelfluss des Vektorfeldes  $\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} -y^3 \\ yz^2 \\ y^2 z \end{pmatrix}$  durch diese Fläche auf

zwei verschiedene Arten mit Hilfe des *Integralsatzes von Stokes* (die Flächennormale  $\vec{N}$  ist nach *außen* gerichtet, die Randkurve  $C$  wird von der  $x$ -Achse aus betrachtet im *Gegenuhrzeigersinn* durchlaufen).

- 7) Bild I-197 zeigt den im *I. Oktant* gelegenen Teil der Ebene  $x + y + z = 2$ . Dieses dreieckige ebene Flächenstück  $A$  wird von der (geschlossenen) Kurve  $C$  begrenzt. Berechnen Sie mit dem Vektorfeld  $\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} x \\ xz \\ y \end{pmatrix}$  das *Kurvenintegral*

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ unter Verwendung des } \textit{Stokeschen Integralsatzes}.$$

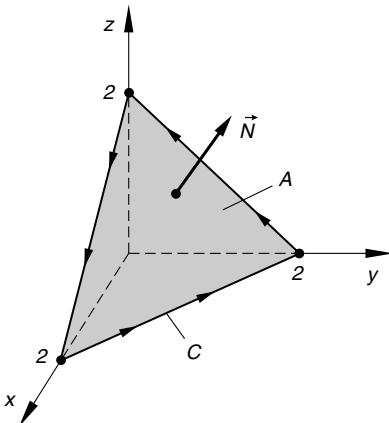


Bild I-197

- 8) Ein Vektorfeld besitze in *Kugelkoordinaten* die folgende Darstellung:

$$\vec{F}(r; \vartheta; \varphi) = (r^2 \cdot \cos \varphi) \vec{e}_\vartheta$$

- a) Begründen Sie, warum der Vektorfluss durch eine Kugelschale mit dem Radius  $R$  verschwindet (Kugelmittelpunkt = Koordinatenursprung).
- b) Bestätigen Sie diese Aussage mit Hilfe des *Integralsatzes von Stokes*.

- 9) Gegeben ist das räumliche Vektorfeld  $\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} -y \\ 2x \\ z \end{pmatrix}$  und die Halbkugel  $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$ . Berechnen Sie das *Oberflächenintegral*

$$\iint_{(A)} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{N} dA = \iint_{(A)} (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{N} dA$$

- a) auf *direktem Wege*,
- b) mit Hilfe des *Integralsatzes von Stokes*.

( $A$ : Mantelfläche der angegebenen Halbkugel mit kreisförmiger Randkurve in der  $x, y$ -Ebene; Orientierung von Fläche und Randkurve wie in Aufgabe 6, siehe hierzu auch Bild I-196).

## II Wahrscheinlichkeitsrechnung

### 1 Hilfsmittel aus der Kombinatorik

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit den *Permutationen*, *Kombinationen* und *Variationen*. Diese aus der Kombinatorik stammenden Abzählmethoden sind ein wichtiges Hilfsmittel bei der Lösung zahlreicher Probleme in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik und lassen sich in sehr anschaulicher Weise anhand des *Urnenmodells* einführen.

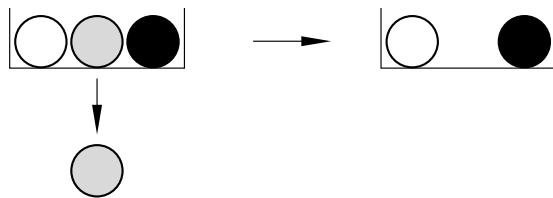
#### 1.1 Urnenmodell

In einer Urne befinden sich  $n$  verschiedene Kugeln, die sich z. B. in ihrer Farbe von einander unterscheiden. Wir wollen uns dann in den nächsten Teilabschnitten mit den folgenden, in der Wahrscheinlichkeitsrechnung häufig vorkommenden Fragestellungen beschäftigen:

1. Auf wie viel *verschiedene* Arten lassen sich diese Kugeln anordnen? Dies führt uns zu dem Begriff *Permutation*.
2. Aus der Urne werden *nacheinander*  $k$  Kugeln gezogen, wobei wir noch die folgenden Fälle unterscheiden müssen:

##### a) Ziehung ohne Zurücklegen (Bild II-1):

Die jeweils gezogene Kugel wird *nicht* in die Urne zurückgelegt und scheidet somit für alle weiteren Ziehungen aus. Jede der  $n$  Kugeln kann also nur *einmal* gezogen werden.

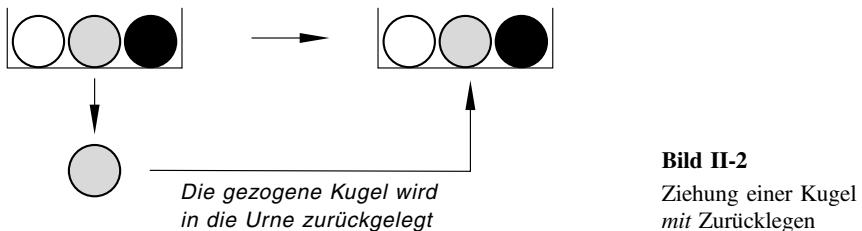


*Die gezogene Kugel  
scheidet aus*

**Bild II-1**  
Ziehung einer Kugel ohne Zurücklegen

**b) Ziehung mit Zurücklegen (Bild II-2):**

Jede Kugel darf *mehrmals* verwendet werden, d. h. dass jede gezogene Kugel vor der nächsten Ziehung in die Urne *zurückgelegt* wird und somit bei der nachfolgenden Ziehung abermals gezogen werden kann.



In beiden Fällen unterscheiden wir ferner, ob die *Reihenfolge* der Ziehung berücksichtigt werden soll oder nicht. Wir stoßen so auf die Begriffe *Variation* und *Kombination*.

In der *Statistik* wird eine solche *zufällige* Entnahme von  $k$  Kugeln als *Stichprobe* vom Umfang  $k$  bezeichnet<sup>1)</sup>. Sie heißt *geordnet*, wenn die *Reihenfolge*, in der die Stichprobenelemente (hier: Kugeln) gezogen werden, *berücksichtigt* wird. Spielt die Reihenfolge jedoch *keine* Rolle, so liegt eine *ungeordnete* Stichprobe vor.

## 1.2 Permutationen

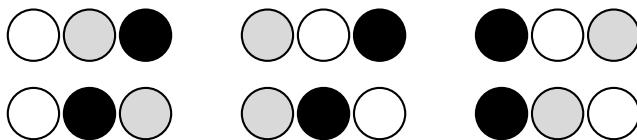
Wir beschäftigen uns zunächst mit dem folgenden Problem:

In einer Urne befinden sich  $n$  *verschiedenfarbige* Kugeln. Auf wie viel verschiedene Arten lassen sich diese Kugeln (beispielsweise nebeneinander) anordnen?

Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel.

### ■ Beispiel

Drei *verschiedenfarbige* Kugeln, z. B. je eine weiße, graue und schwarze Kugel, lassen sich auf genau 6 *verschiedene* Arten wie folgt anordnen (Bild II-3):



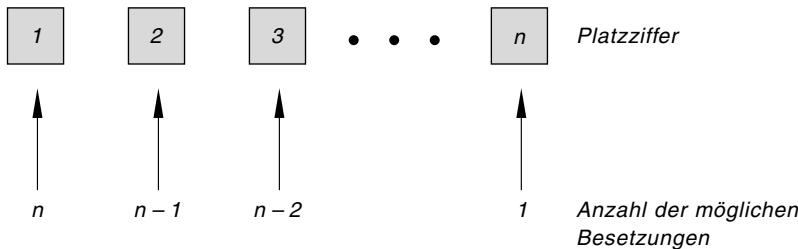
**Bild II-3** Drei verschiedenfarbige Kugeln lassen sich auf sechs verschiedene Arten (nebeneinander) anordnen

<sup>1)</sup> Der in der Statistik grundlegende Begriff *Stichprobe aus einer Grundgesamtheit* wird in Kap. III, Abschnitt 1.2 noch ausführlich erörtert.

Allgemein heißt eine Anordnung von  $n$  verschiedenen Elementen (Kugeln) in einer bestimmten Reihenfolge eine *Permutation* der  $n$  Elemente (Kugeln). Wie viele Möglichkeiten gibt es dann,  $n$  verschiedene Elemente (Kugeln) anzuordnen? Wie groß ist somit die *Anzahl* der Permutationen von  $n$  Elementen?

Wir lösen dieses Problem wie folgt:

Es sind  $n$  Plätze vorhanden, die wir in der üblichen Weise von 1 bis  $n$  durchnummerieren, und  $n$  verschiedene Kugeln, mit denen wir diese Plätze besetzen wollen. Den Platz Nr. 1 können wir mit *jeder* der  $n$  Kugeln belegen. Ist diese Stelle jedoch einmal besetzt, so bleiben für die Besetzung des 2. Platzes nur noch  $n - 1$  Möglichkeiten. Denn *jede* der  $n - 1$  übrig gebliebenen Kugeln kann diesen Platz einnehmen. Ist schließlich auch dieser Platz besetzt, so bleiben für die Besetzung des 3. Platzes nur noch  $n - 2$  Möglichkeiten übrig u. s. w.. Für die Besetzung der Plätze 1, 2, 3, ...,  $n$  gibt es daher der Reihe nach  $n, n - 1, n - 2, \dots, 1$  Möglichkeiten. Bild II-4 verdeutlicht diese Aussage.

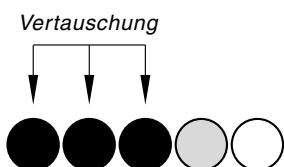


**Bild II-4** Besetzungsmöglichkeiten für die verschiedenen Plätze

Die *Anzahl* der Permutationen von  $n$  verschiedenen Kugeln (oder allgemein: von  $n$  verschiedenen Elementen) ist daher

$$P(n) = n(n - 1)(n - 2) \dots 1 = n! \quad (\text{II-1})$$

Befinden sich jedoch unter den  $n$  Kugeln  $n_1$  gleiche (z. B.  $n_1$  schwarze Kugeln), so fallen alle jene Anordnungen zusammen, die durch *Vertauschungen* der gleichen Kugeln untereinander hervorgehen (alle übrigen Kugeln behalten dabei ihre Plätze). Bild II-5 verdeutlicht dies für eine Anordnung von 5 Kugeln, unter denen sich 3 gleiche (nämlich schwarze) Kugeln befinden. Werden diese *untereinander* vertauscht, was auf genau  $P(3) = 3! = 6$  verschiedene Arten möglich ist, so entstehen dabei *keine* neuen Anordnungen.



**Bild II-5**

Durch Vertauschung der schwarzen Kugeln untereinander entstehen *keine* neuen Anordnungen

Bei  $n_1$  gleichfarbigen Kugeln gibt es somit  $P(n_1) = n_1!$  verschiedene Möglichkeiten, diese untereinander zu vertauschen. Daher gibt es genau

$$P(n; n_1) = \frac{P(n)}{P(n_1)} = \frac{n!}{n_1!} \quad (\text{II-2})$$

verschiedene Anordnungsmöglichkeiten für  $n$  Kugeln, unter denen sich  $n_1$  gleiche Kugeln befinden.

Analog lässt sich zeigen: Die Anzahl der verschiedenen Permutationen von  $n$  Kugeln, unter denen sich jeweils  $n_1, n_2, \dots, n_k$  gleiche befinden, ist

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad (\text{II-3})$$

$$(n_1 + n_2 + \dots + n_k = n)^{2)}.$$

Wir fassen diese Ergebnisse in etwas allgemeinerer Form wie folgt zusammen:

### Permutationen von $n$ Kugeln (Elementen)

Jede mögliche Anordnung von  $n$  Kugeln (Elementen) heißt eine Permutation der  $n$  Kugeln (Elemente). Die Anzahl der Permutationen hängt dabei noch davon ab, ob alle  $n$  Kugeln (Elemente) voneinander verschieden sind oder ob gewisse Kugeln (Elemente) unter ihnen mehrmals auftreten:

- Alle  $n$  Kugeln (Elemente) sind voneinander verschieden. Die Anzahl der Permutationen ist dann

$$P(n) = n! \quad (\text{II-4})$$

- Unter den  $n$  Kugeln (Elementen) befinden sich jeweils  $n_1, n_2, \dots, n_k$  einander gleiche. Es gibt dann

$$P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad (\text{II-5})$$

verschiedene Anordnungsmöglichkeiten für die  $n$  Kugeln (Elemente) ( $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$  und  $k \leq n$ ).

<sup>2)</sup> Die  $n$  Kugeln zerfallen somit in  $k$  verschiedene Klassen, wobei die Kugeln einer jeden Klasse gleichfarbig sind. Es treten somit nur  $k \leq n$  verschiedene Farben auf.

## ■ Beispiele

- (1) Auf einem Regal sollen 5 *verschiedene* Gegenstände angeordnet werden. Es gibt dann

$$P(5) = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

*verschiedene* Anordnungsmöglichkeiten (Permutationen).

- (2) Wir betrachten 6 Kugeln, darunter 3 weiße, 2 graue und 1 schwarze Kugel (Bild II-6):



Bild II-6

Es gibt dann genau

$$P(6; 3, 2, 1) = \frac{6!}{3!2!1!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{3! \cdot 2 \cdot 1} = 2 \cdot 5 \cdot 6 = 60$$

*verschiedene* Anordnungsmöglichkeiten (Permutationen). ■

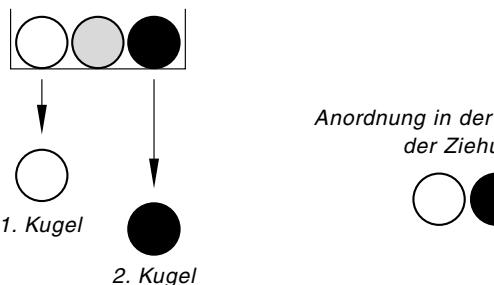
## 1.3 Kombinationen

### Kombinationen ohne Wiederholung

Einer Urne mit  $n$  *verschiedenen* Kugeln entnehmen wir nacheinander  $k$  Kugeln *ohne* Zurücklegen. Die Reihenfolge der gezogenen Kugeln soll dabei *ohne* Bedeutung sein, bleibt also *unberücksichtigt*. Eine solche *ungeordnete* Stichprobe von  $k$  Kugeln (oder allgemein: von  $k$  Elementen) heißt eine *Kombination k-ter Ordnung ohne Wiederholung*<sup>3)</sup>.

## ■ Beispiel

Befinden sich in einer Urne drei *verschiedenfarbige* Kugeln (z. B. je eine weiße, graue und schwarze Kugel) und ziehen wir nacheinander wahllos zwei Kugeln *ohne* Zurücklegen, so ist z. B. die folgende Ziehung eine von mehreren *möglichen* (Bild II-7):



Anordnung in der Reihenfolge  
der Ziehung:



Bild II-7

<sup>3)</sup> Jede Kugel darf nur *einmal* verwendet werden und ist daher in der Stichprobe *höchstens einmal* vertreten.

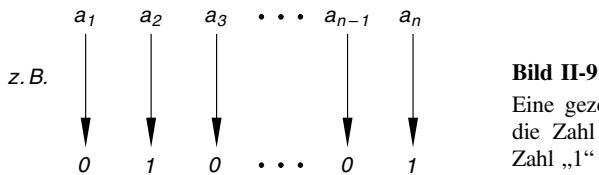
Spielt dabei die Reihenfolge, in der die beiden Kugeln gezogen werden, *keine* Rolle, so wird diese Ziehung *nicht* von der folgenden Ziehung unterschieden (Bild II-8):



Die beiden Stichproben (Anordnungen) unterscheiden sich lediglich in der *Reihenfolge* ihrer Elemente und werden daher als *ungeordnete* Stichproben oder Kombinationen 2. Ordnung *nicht* unterschieden.

Die Fragestellung lautet jetzt: Auf wie viel *verschiedene* Arten lassen sich  $k$  Kugeln aus einer Urne mit  $n$  verschiedenen Kugeln *ohne* Zurücklegen und *ohne* Berücksichtigung der Reihenfolge ziehen? Wie groß ist somit die *Anzahl* der Kombinationen  $k$ -ter Ordnung *ohne* Wiederholung bei  $n$  verschiedenen Kugeln (Elementen)?

Zur Klärung dieser Frage ordnen wir die  $n$  verschiedenen Kugeln  $a_1, a_2, \dots, a_n$  zunächst in einer Reihe an und kennzeichnen dann diejenigen  $k$  Kugeln, die wir *gezogen* haben, durch die Zahl 0, alle übrigen  $n - k$  Kugeln durch die Zahl 1 (Bild II-9):



Eine gezogene Kugel kennzeichnen wir durch die Zahl „0“, alle übrigen Kugeln durch die Zahl „1“

In dieser Anordnung tritt somit die Zahl 0 genau  $k$ -mal und die Zahl 1 genau  $(n - k)$ -mal auf. Wir können nun unsere Fragestellung auch wie folgt formulieren:

Wie viel *verschiedene* Anordnungsmöglichkeiten gibt es für die insgesamt  $n$  Zahlen, unter denen  $k$ -mal die Zahl 0 und  $(n - k)$ -mal die Zahl 1 vorkommt?

Offensichtlich handelt es sich dabei um die *Permutationen* von  $n$  Zahlen, die sich in zwei Klassen wie folgt aufteilen lassen (Bild II-10):

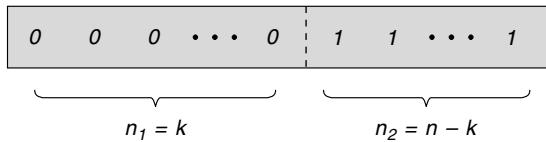


Bild II-10

Daher gibt es nach Gleichung (II-5) genau

$$C(n; k) = P(n; k, n - k) = \frac{n!}{k!(n - k)!} = \binom{n}{k} \quad (k \leq n) \quad (\text{II-6})$$

verschiedene Möglichkeiten, aus einer Urne mit  $n$  verschiedenen Kugeln  $k$  Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge herauszugreifen.

### Kombinationen mit Wiederholungen

Darf jedoch jede der  $n$  verschiedenen Kugeln mehrmals verwendet werden, so erhält man *Kombinationen k-ter Ordnung mit Wiederholung*<sup>4)</sup>. Ihre Anzahl ist

$$C_w(n; k) = \binom{n + k - 1}{k} \quad (\text{II-7})$$

Dabei ist zu beachten, dass  $k$  jetzt auch größer als  $n$  sein kann. Auf die Herleitung dieser Formel soll verzichtet werden.

Wir fassen die bisherigen Ergebnisse in etwas allgemeinerer Form wie folgt zusammen:

### Kombinationen k-ter Ordnung mit und ohne Wiederholung

Aus einer Urne mit  $n$  verschiedenen Kugeln (Elementen) werden nacheinander  $k$  Kugeln (Elemente) entnommen (mit oder ohne Zurücklegen), wobei die Reihenfolge der Ziehung unberücksichtigt bleibt. Die gezogenen  $k$  Kugeln (Elemente) bilden dann (in beliebiger Reihenfolge angeordnet) eine sog. *Kombination k-ter Ordnung*. Die Anzahl der möglichen Kombinationen k-ter Ordnung hängt dabei noch davon ab, ob die Ziehung der Kugeln (Elemente) mit oder ohne Zurücklegen erfolgt, d. h. ob eine Kugel (ein Element) mehrmals oder höchstens einmal verwendet werden darf. Wir unterscheiden daher zwischen Kombinationen k-ter Ordnung mit und ohne Wiederholung.

<sup>4)</sup> Jede gezogene Kugel wird dabei vor der nächsten Ziehung in die Urne zurückgelegt und hat somit die Chance, mehrmals gezogen zu werden (Ziehung mit Zurücklegen).

### 1. Kombinationen $k$ -ter Ordnung ohne Wiederholung

Die Ziehung der  $k$  Kugeln (Elemente) erfolgt *ohne* Zurücklegen. Jede Kugel (jedes Element) kann also *höchstens einmal* gezogen werden und scheidet somit nach erfolgter Ziehung automatisch für alle weiteren Ziehungen aus. Die Anzahl der Kombinationen  $k$ -ter Ordnung *ohne* Wiederholung beträgt dann

$$C(n; k) = \binom{n}{k} \quad (k \leq n) \quad (\text{II-8})$$

### 2. Kombinationen $k$ -ter Ordnung mit Wiederholung

Die Ziehung der  $k$  Kugeln (Elemente) erfolgt *mit* Zurücklegen. Jede Kugel (jedes Element) kann also *mehrmales* gezogen werden. Es gibt dann genau

$$C_w(n; k) = \binom{n + k - 1}{k} \quad (\text{II-9})$$

verschiedene Kombinationen  $k$ -ter Ordnung *mit* Wiederholung, wobei auch  $k > n$  sein kann.

#### Anmerkung

Bei *Kombinationen* findet also die Reihenfolge oder Anordnung der Elemente grundsätzlich *keine* Berücksichtigung. Sie können daher auch als *ungeordnete* Stichproben aufgefasst werden, die man einer sog. *Grundgesamtheit* mit  $n$  Elementen entnommen hat. Die Urne mit ihren  $n$  verschiedenen Kugeln liefert ein sehr anschauliches *Modell* für eine solche Grundgesamtheit<sup>5)</sup>.

## ■ Beispiele

- (1) Einer Warenlieferung von 12 Glühbirnen soll zu Kontrollzwecken eine *Stichprobe* von 3 Glühbirnen entnommen werden. Wie viel *verschiedene* Stichproben sind dabei möglich?

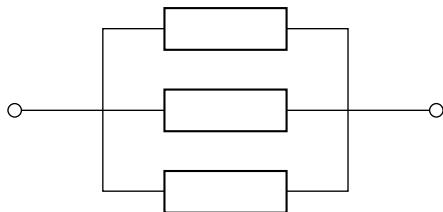
*Lösung:* Da es bei dieser (ungeordneten) Stichprobe auf die Reihenfolge der gezogenen Glühbirnen *nicht* ankommt und die Ziehung (wie in der Praxis allgemein üblich) *ohne* Zurücklegen erfolgt, gibt es genau

$$C(12; 3) = \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2 \cdot 11 \cdot 10 = 220$$

*verschiedene* Möglichkeiten, aus 12 Glühbirnen 3 auszuwählen (*Kombinationen 3. Ordnung* von 12 Elementen *ohne* Wiederholung).

<sup>5)</sup> Der Begriff „Grundgesamtheit“ wird in Kap. III, Abschnitt 1.2 näher erläutert.

- (2) Für die in Bild II-11 dargestellte *Parallelschaltung* dreier Widerstände stehen uns insgesamt 5 *verschiedene* ohmsche Widerstände  $R_1, R_2, \dots, R_5$  zur Verfügung. Wie viel *verschiedene* Schaltmöglichkeiten gibt es, wenn jeder der 5 Widerstände
- höchstens *einmal*,
  - mehrmals*, d. h. hier bis zu dreimal verwendet werden darf?



**Bild II-11**  
Parallelschaltung dreier Widerstände

*Lösung:* Aus 5 Widerständen müssen wir 3 Widerstände auswählen, wobei die Anordnung (Reihenfolge) im Schaltkreis *keine* Rolle spielt. Es handelt sich also um *Kombinationen* 3. Ordnung von 5 Elementen (Widerständen)<sup>6)</sup>.

- Da jeder Widerstand nur *einmal* verwendet werden darf, haben wir es hier mit Kombinationen 3. Ordnung *ohne* Wiederholung zu tun. In diesem Fall gibt es somit

$$C(5; 3) = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 2 = 10$$

*verschiedene* Parallelschaltungen.

- Jeder Widerstand kann bis zu *dreimal* verwendet werden. Es handelt sich daher diesmal um Kombinationen 3. Ordnung *mit* Wiederholung. Wir haben somit

$$C_w(5; 3) = \binom{5 + 3 - 1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 7 \cdot 5 = 35$$

*verschiedene* Möglichkeiten für eine Parallelschaltung aus drei Widerständen. ■

<sup>6)</sup> Der Gesamtwiderstand ist *unabhängig* von der Reihenfolge, in der die Einzelwiderstände geschaltet werden.

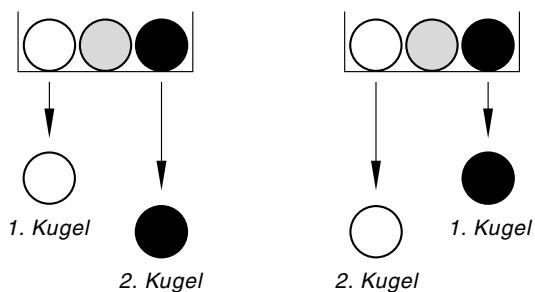
## 1.4 Variationen

### Variationen ohne Wiederholung

Wir gehen von den gleichen Überlegungen aus wie im vorangegangenen Abschnitt, *berücksichtigten* diesmal jedoch die *Reihenfolge*, in der wir die  $k$  Kugeln aus der Urne entnommen haben. Eine solche *geordnete* Stichprobe von  $k$  Kugeln heißt dann eine *Variation  $k$ -ter Ordnung ohne Wiederholung*, wenn die Ziehung *ohne Zurücklegen* der Kugeln erfolgte. Jede der  $n$  verschiedenen Kugeln ist in solch einer Anordnung also *höchstens einmal* vertreten.

#### ■ Beispiel

In einer Urne befinden sich je eine weiße, graue und schwarze Kugel. Wir ziehen nacheinander zwei Kugeln *ohne Zurücklegen* und vergleichen die beiden folgenden *möglichen* Ergebnisse miteinander (Bild II-12):



**Bild II-12**  
Ziehung zweier Kugeln  
*ohne Zurücklegen*

Unter *Berücksichtigung* der Reihenfolge der gezogenen Kugeln notieren wir das Ergebnis der beiden Experimente wie folgt:

1. Experiment: ○ ● (zuerst weiß, dann schwarz)
2. Experiment: ● ○ (zuerst schwarz, dann weiß)

Die beiden Anordnungen unterscheiden sich lediglich in der *Reihenfolge* ihrer Elemente und werden daher *definitionsgemäß* als zwei *verschiedene* Variationen 2. Ordnung *ohne Wiederholung* betrachtet.

Die Fragestellung lautet jetzt allgemein: Auf *wie viel verschiedene* Arten lassen sich  $k$  Kugeln *ohne Zurücklegen*, aber unter *Berücksichtigung* der Reihenfolge ziehen? Wie groß ist somit die *Anzahl* der Variationen  $k$ -ter Ordnung *ohne Wiederholung* bei  $n$  Elementen?

Bei der Lösung dieses Problems gehen wir zunächst von einer *beliebigen* Kombination  $k$ -ter Ordnung *ohne* Wiederholung aus. Sie enthält genau  $k$  verschiedene Kugeln, die wir der Reihe nach mit  $a_1, a_2, \dots, a_k$  bezeichnen, in einer beliebigen Anordnung, z. B.

$$a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_k$$

Da sich die  $k$  Kugeln auf  $k!$  verschiedene Arten *permutieren* lassen, erhalten wir aus dieser Kombination genau  $k!$  *Variationen*. Dies aber gilt für *jede* Kombination  $k$ -ter Ordnung. Somit ist

$$V(n; k) = k! C(n; k) = k! \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (k \leq n) \quad (\text{II-10})$$

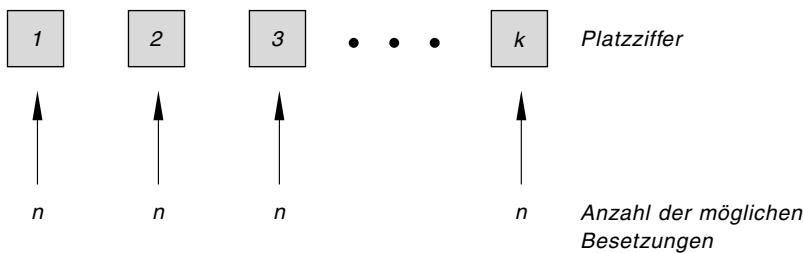
die *Anzahl* der möglichen Variationen  $k$ -ter Ordnung *ohne* Wiederholung.

### Variationen mit Wiederholung

Darf dagegen jede der insgesamt  $n$  verschiedenen Kugeln in der Urne *mehrmals* verwendet werden, so erhält man *Variationen  $k$ -ter Ordnung mit Wiederholung*. Jede gezogene Kugel muss daher *vor* der nächsten Ziehung in die Urne *zurückgelegt* werden (Ziehung *mit Zurücklegen*). Die *Anzahl* der Variationen  $k$ -ter Ordnung beträgt in diesem Fall

$$V_w(n; k) = n^k \quad (\text{II-11})$$

Denn wir können *jeden* der  $k$  Plätze in einer solchen Anordnung mit *jeder* der  $n$  verschiedenen Kugeln belegen, da Mehrfachziehung jetzt *zulässig* ist (Bild II-13):



**Bild II-13** Besetzungsmöglichkeiten für die  $k$  vorhandenen Plätze

Somit gibt es genau

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{k \text{ Faktoren}} = n^k \quad (\text{II-12})$$

*verschiedene* Anordnungen.

Wir fassen die Ergebnisse in etwas allgemeinerer Form wie folgt zusammen:

### Variationen $k$ -ter Ordnung mit und ohne Wiederholung

Aus einer Urne mit  $n$  verschiedenen Kugeln (Elementen) werden nacheinander  $k$  Kugeln (Elemente) entnommen und in der Reihenfolge ihrer Ziehung angeordnet. Sie bilden eine sog. *Variation  $k$ -ter Ordnung*. Die Anzahl der möglichen Variationen  $k$ -ter Ordnung hängt dabei noch davon ab, ob die Ziehung der Kugeln (Elemente) *mit* oder *ohne* Zurücklegen erfolgt, d. h. ob eine Kugel (ein Element) *mehr-mals* oder *höchstens einmal* verwendet werden darf. Wir unterscheiden daher zwischen Variationen  $k$ -ter Ordnung *mit* und *ohne* Wiederholung.

#### 1. Variationen $k$ -ter Ordnung ohne Wiederholung

Die Ziehung der  $k$  Kugeln (Elemente) erfolgt *ohne* Zurücklegen. *Jede* Kugel (*jedes* Element) kann also *höchstens einmal* gezogen werden und scheidet somit für alle weiteren Ziehungen aus. Die Anzahl der Variationen  $k$ -ter Ordnung *ohne* Wiederholung beträgt dann

$$V(n; k) = \frac{n!}{(n - k)!} \quad (k \leq n) \quad (\text{II-13})$$

#### 2. Variationen $k$ -ter Ordnung mit Wiederholung

Die Ziehung der  $k$  Kugeln (Elemente) erfolgt *mit* Zurücklegen. *Jede* Kugel (*jedes* Element) kann also *mehr-mals* gezogen werden. Es gibt dann genau

$$V_w(n; k) = n^k \quad (\text{II-14})$$

*verschiedene* Variationen  $k$ -ter Ordnung *mit* Wiederholung, wobei auch  $k > n$  sein darf.

### Anmerkungen

- (1) Variationen unterscheiden sich somit von *Kombinationen* grundsätzlich dadurch, dass die *Reihenfolge* oder *Anordnung* der Elemente *berücksichtigt* wird. Sie können daher auch als *geordnete* Stichproben aufgefasst werden, die einer sog. Grundgesamtheit mit  $n$  Elementen entnommen wurden.
- (2) Variationen  $k$ -ter Ordnung werden häufig auch als *Kombinationen  $k$ -ter Ordnung unter Berücksichtigung der Anordnung* bezeichnet.

### ■ Beispiele

- (1) Beim Pferdetoto muss in der sog. *Dreierwette* der Zieleinlauf der ersten drei Pferde in der richtigen Reihenfolge vorausgesagt werden. Wie viel *verschiedene* Dreier-Wetten sind möglich, wenn 10 Pferde starten?

*Lösung:* Drei der zehn Pferde erreichen in einer bestimmten Reihenfolge als erste das Ziel. Es handelt sich in diesem Beispiel somit um *Variationen 3. Ordnung* von 10 Elementen *ohne Wiederholung*. Daher gibt es

$$V(10; 3) = \frac{10!}{(10 - 3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$$

*verschiedene Dreier-Wetten.*

- (2) Beim gleichzeitigen Wurf zweier *unterschiedlich* gekennzeichneter homogener Würfel interessieren wir uns für die dabei auftretenden *Augenpaare*. Wie viel *verschiedene* Augenpaare sind möglich?

*Lösung:* Als *Augenzahlen* eines jeden der beiden Würfel kommen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 in Frage. Bei den *Augenpaaren*  $(i; j)$  handelt es sich dann um *geordnete* Zahlenpaare, da die Würfel *unterschiedlich* gekennzeichnet sind (z. B. ein weißer und ein schwarzer Würfel) und somit um *Variationen 2. Ordnung* der 6 Zahlen 1 bis 6 *mit Wiederholung*. Es gibt daher

$$V_w(6; 2) = 6^2 = 36$$

*verschiedene* Augenpaare, nämlich

$$(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6)$$

$$(2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6)$$

⋮

$$(6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5), (6; 6)$$

- (3) Aus den Ziffern 1 bis 9 sollen *dreistellige* Zahlen gebildet werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn jede Ziffer nur *einmal* verwendet werden darf?

*Lösung:* 9 Ziffern werden auf 3 Plätze verteilt, wobei jede Ziffer nur *einmal* verwendet werden darf und die Anordnung der Ziffern von Bedeutung ist. Es handelt sich also um *Variationen 3. Ordnung ohne Wiederholung*. Ihre Anzahl beträgt

$$V(9; 3) = \frac{9!}{(9 - 3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$$

■

## 1.5 Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Formeln

Ungeordnete Stichproben sind *Kombinationen*, geordnete Stichproben dagegen *Variationen*. Tabelle 1 zeigt den Zusammenhang zwischen den *Stichproben* einerseits und den *Kombinationen* und *Variationen* andererseits und enthält eine Zusammenstellung wichtiger Formeln aus der Kombinatorik, die sich in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik als sehr nützlich erweisen.

**Tabelle 1:** Hilfreiche Formeln aus der Kombinatorik

	ohne Wiederholung	mit Wiederholung	
Kombinationen $k$ -ter Ordnung	$C(n; k) = \binom{n}{k}$	$C_w(n; k) = \binom{n + k - 1}{k}$	ungeordnete Stichproben
Variationen $k$ -ter Ordnung	$V(n; k) = \frac{n!}{(n - k)!}$	$V_w(n; k) = n^k$	geordnete Stichproben
	Ziehung ohne Zurücklegen	Ziehung mit Zurücklegen	

## 2 Grundbegriffe

### 2.1 Einführende Beispiele

Wir beginnen mit drei einfachen Beispielen, die uns durch das gesamte Kapitel begleiten werden.

#### Standardbeispiel 1: Augenzahlen beim Wurf eines homogenen Würfels<sup>7)</sup>

Beim Wurf eines *homogenen* Würfels notieren wir die jeweils *oben* liegende Zahl, auch *Augenzahl* oder kurz *Augen* genannt. Dabei sind genau 6 *verschiedene* Ergebnisse oder Versuchsausgänge möglich: Die Augenzahl wird stets eine der 6 Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 sein. Wir nennen ein solches Ergebnis ein *Elementarereignis*  $\omega$ . Die Elementarergebnisse bilden in ihrer Gesamtheit die *Ergebnismenge*  $\Omega$ .

<sup>7)</sup> Homogen bedeutet in diesem Zusammenhang: Der Würfel ist aus einem *homogenen* Material und *geometrisch einwandfrei*. Keine der 6 Seiten ist gegenüber einer anderen Seite in irgendeiner Weise bevorzugt. Diese Eigenschaften wollen wir bei allen weiteren Würfelexperimenten stets voraussetzen.

Unser Würfelexperiment führt demnach zu der *Ergebnismenge*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad (\text{II-15})$$

bestehend aus den 6 Elementarereignissen  $\omega_i = i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ). Es lässt sich jedoch *nicht* voraussagen, welches der 6 Elementarereignisse bei einem bestimmten Wurf tatsächlich eintreten wird. Der Ausgang des Experiments ist somit *nicht* vorhersehbar, sondern *zufallsbedingt*. Wir sprechen daher in diesem Zusammenhang von einem *Zufallsexperiment*. Erhalten wir z. B. bei einem bestimmten Wurf die Augenzahl „5“, so können wir dieses Elementarereignis auch durch die *Menge*  $A = \{5\}$  beschreiben, die eine aus genau einem Element bestehende *Teilmenge* von  $\Omega$  ist. Ebenso beschreibt die Teilmenge  $B = \{2\}$  ein Elementarereignis, nämlich das „Würfeln der Augenzahl 2“.

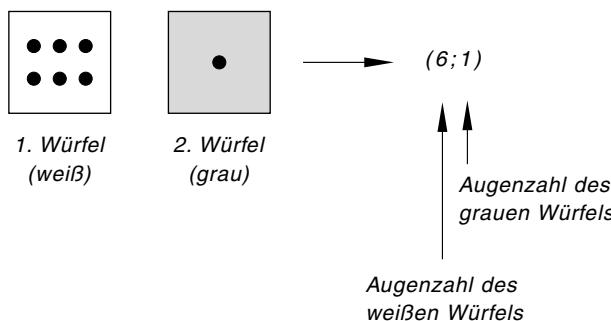
Neben den *Elementarereignissen* sind aber noch weitere Versuchsausgänge möglich, die wir ganz allgemein als *Ereignisse* bezeichnen wollen. Ein solches Ereignis ist z. B. das „Würfeln einer *ungeraden* Augenzahl“. Dieses Ereignis lässt sich dann durch die *Teilmenge*

$$C = \{1, 3, 5\} \quad (\text{II-16})$$

darstellen. Damit bringen wir zum Ausdruck, dass dieses Ereignis genau dann eintritt, wenn die erzielte Augenzahl *entweder* eine „1“ *oder* eine „3“ *oder* eine „5“ ist. Das Ereignis  $C$  enthält somit als Elemente genau 3 *Elementarereignisse*. Allgemein gilt: *Ereignisse sind Teilmengen der Ergebnismenge*  $\Omega$ .

### Standardbeispiel 2: Augenpaare beim Wurf mit zwei unterscheidbaren homogenen Würfeln

Wir würfeln gleichzeitig mit zwei *unterscheidbaren* homogenen Würfeln, z. B. mit einem weißen und einem grauen Würfel und notieren dabei die erzielten *Augenpaare*. Ein mögliches Ergebnis ist dann beispielsweise



Dieses Elementarereignis beschreiben wir durch das *geordnete* Zahlenpaar  $(6; 1)$ .

Insgesamt gibt es dann  $6^2 = 36$  verschiedene Augenpaare oder Elementarereignisse<sup>8)</sup>:

Augenzahl des 2. Würfels

		1	2	3	4	5	6	
		1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)
Augenzahl des 1. Würfels	1	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)	
	2	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)	
	3	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)	
	4	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)	
	5	(6; 1)	(6; 2)	(6; 3)	(6; 4)	(6; 5)	(6; 6)	
	6							

Sie bilden in ihrer Gesamtheit die *Ergebnismenge*  $\Omega$  dieses Würfelexperiments:

$$\Omega = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), \dots, (6; 5), (6; 6)\} \quad (\text{II-17})$$

Wiederum gilt die Aussage: Es lässt sich *nicht* vorausbestimmen, *welches* Elementarergebnis (Augenpaar) bei einer bestimmten Durchführung des Würfelexperiments tatsächlich eintritt. Das jeweilige Ergebnis ist *rein zufallsbedingt*. Es handelt sich also auch hier um ein *Zufallsexperiment*.

Neben diesen *Elementarereignissen* sind noch weitere *Ereignisse* möglich, die als *Teilmengen* der Ergebnismenge  $\Omega$  darstellbar sind. So wird z. B. das *Ereignis*

*A: Die Augenzahl des 1. Würfels (weiß) ist eine „2“*

durch die 6 verschiedenen Elementarereignisse

$$(2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6)$$

*realisiert* und lässt sich somit durch die *Teilmenge*

$$A = \{(2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6)\} \quad (\text{II-18})$$

beschreiben. Das ebenfalls mögliche *Ereignis*

*B: Die Augensumme beider Würfel ist gleich 4*

wird durch die 3 Elementarereignisse

$$(1; 3), (2; 2), (3; 1)$$

*realisiert*. Daher gilt

$$B = \{(1; 3), (2; 2), (3; 1)\} \quad (\text{II-19})$$

<sup>8)</sup> Es handelt sich dabei um *Variationen 2. Ordnung* der 6 Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 mit Wiederholung.

### Standardbeispiel 3: Ziehung von Kugeln aus einer Urne mit Zurücklegen

Eine Urne enthalte 5 Kugeln, darunter 3 weiße und 2 schwarze Kugeln<sup>9)</sup> (Bild II-14):



Bild II-14

Nacheinander ziehen wir ganz zufällig 3 Kugeln, wobei wir nach jedem Zug die jeweils gezogene Kugel in die Urne zurücklegen, und notieren dabei die Farbe der gezogenen Kugeln. Es ergeben sich dann unter Berücksichtigung der Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, die folgenden 8 Möglichkeiten (Elementarereignisse) (Bild II-15):

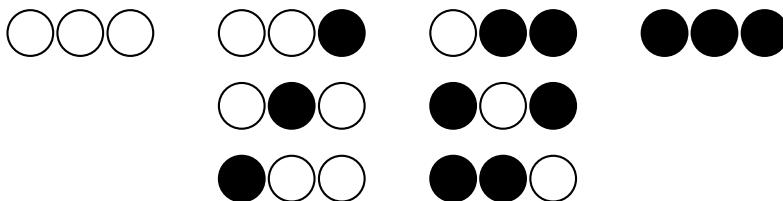


Bild II-15

Die Ergebnismenge  $\Omega$  dieses Zufallsexperiments enthält daher genau diese 8 Elementarereignisse als Elemente:

$$\Omega = \{\text{○○○}, \text{○○●}, \text{○●○}, \text{●○○}, \text{○●●}, \text{●○●}, \text{●●○}, \text{●●●}\}$$

Das Ereignis

$A$ : Zwei der drei gezogenen Kugeln sind weiß

wird dabei durch die 3 Elementarereignisse

$$\text{○○●}, \text{○●○}, \text{●○○}$$

realisiert und lässt sich somit durch die Teilmenge

$$A = \{\text{○○●}, \text{○●○}, \text{●○○}\} \quad (\text{II-20})$$

darstellen. Fordert man zusätzlich, dass die erste der drei gezogenen Kugeln weiß ist, so wird dieses Ereignis  $B$  nur durch 2 Elementarereignisse realisiert:

$$B = \{\text{○○●}, \text{○●○}\} \quad (\text{II-21})$$

<sup>9)</sup> Die Kugeln unterscheiden sich lediglich in ihrer Farbe, sind ansonsten aber „baugleich“ (d. h. gleicher Durchmesser, gleiches Material u. s. w.). Dies gilt auch für alle weiteren Urnenmodelle.

Das Ereignis

*C: Die drei gezogenen Kugeln sind gleichfarbig*

wird durch *zwei* Elementarereignisse, nämlich

$\bullet\bullet\bullet$  und  $\circ\circ\circ$

realisiert („alle drei gezogenen Kugeln sind *entweder* weiß *oder* schwarz“). Daher gilt:

$$C = \{\circ\circ\circ, \bullet\bullet\bullet\} \quad (\text{II-22})$$

## 2.2 Zufallsexperimente

In den einführenden Beispielen haben wir den wichtigen Grundbegriff *Zufallsexperiment* bereits kennengelernt. Wir definieren ihn allgemein wie folgt:

**Definition:** Ein *Zufallsexperiment* ist ein Experiment, bei dem die folgenden Bedingungen (Voraussetzungen) erfüllt sind:

1. Das Experiment lässt sich unter den gleichen äußereren Bedingungen *beliebig oft* wiederholen.
2. Bei der Durchführung des Experiments sind *mehrere* sich gegenseitig *ausschließende* Ergebnisse möglich.
3. Das Ergebnis einer konkreten Durchführung des Experiments lässt sich dabei *nicht* mit Sicherheit voraussagen, sondern ist *zufallsbedingt*.

### ■ Beispiele

- (1) Erste Beispiele für *Zufallsexperimente* haben wir bereits in unseren 3 Standardbeispielen aus Abschnitt 2.1 kennengelernt. So ist das *Würfeln* mit einem oder zwei homogenen Würfeln ebenso ein Zufallsexperiment wie die *zufällige* Entnahme von Kugeln aus einer Urne.
- (2) Ein weiteres einfaches Beispiel liefert das Zufallsexperiment „*Wurf einer homogenen Münze*“ mit den beiden möglichen Ergebnissen (Elementarereignissen) „Zahl“ und „Wappen“. Das Ergebnis eines Münzwurfs lässt sich jedoch *nicht* vorausberechnen, sondern ist *ausschließlich zufallsbedingt*.
- (3) Um die Qualität des Produktes zu sichern, wird der Hersteller eines *Massenartikels* die laufende Produktion einer sog. *Qualitätskontrolle* unterziehen, indem er in *regelmäßigen* Zeitabständen *Stichproben* entnimmt und diese dann auf die geforderten Merkmale hin überprüft. Auf diese Weise können eventuell festgestellte unzulässige Abweichungen von vorgegebenen Sollwerten durch einen Eingriff in die Produktion noch *korrigiert* werden.

## 2.3 Elementarereignisse und Ergebnismenge eines Zufallsexperiments

Bei einem *Zufallsexperiment* sind stets *mehrere* Versuchsergebnisse möglich, die sich jedoch  *gegenseitig ausschließen*. Dies führt uns zu den wichtigen Grundbegriffen *Elementarereignis* und *Ergebnismenge*.

Definitionen: (1) Die möglichen, sich aber  *gegenseitig ausschließenden* Ergebnisse eines Zufallsexperiments heißen *Elementarereignisse* (symbolische Schreibweise:  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ ).  
(2) Die Menge aller Elementarereignisse heißt *Ergebnismenge*  $\Omega$ .

### Anmerkung

Wir beschränken uns im Rahmen dieser Einführung auf *endliche* bzw. *abzählbar unendliche* Ergebnismengen. Eine *endliche* Ergebnismenge  $\Omega$  enthält nur *endlich* viele Elemente (Elementarereignisse):

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} \quad (\text{II-23})$$

Eine *abzählbar unendliche* Ergebnismenge  $\Omega$  dagegen enthält *unendlich* viele Elemente, die wir aber wie die natürlichen Zahlen durchnummernieren können:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n, \dots\} \quad (\text{II-24})$$

### ■ Beispiele

- (1) Beobachten wir beim Zufallsexperiment „*Wurf eines homogenen Würfels*“ (Standardbeispiel 1) die erreichte *Augenzahl*  $i$ , so erhalten wir eine *endliche* Ergebnismenge mit genau 6 verschiedenen Elementarereignissen  $\omega_i = i$  (mit  $i = 1, 2, \dots, 6$ ). Sie lautet demnach wie folgt:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- (2) Wir führen mit einem homogenen Würfel das folgende *Zufallsexperiment* durch:  
Es wird solange gewürfelt, bis *erstmals* die Augenzahl „6“ erscheint. Dies *kann* bereits nach dem ersten, zweiten oder dritten Wurf der Fall sein. Es *kann* aber auch länger dauern, theoretisch sogar *unendlich* lange. Die Anzahl  $i$  der ausgeführten Würfe bis zum *erstmaligen* Auftreten der Augenzahl „6“ kann somit *irgendeine* natürliche Zahl sein. Die möglichen sich  *gegenseitig ausschließenden* Ergebnisse oder Elementarereignisse sind daher in der Form  $\omega_i = i$  (mit  $i = 1, 2, 3, \dots$ ) darstellbar. Die *Ergebnismenge*  $\Omega$  dieses Zufallsexperiments enthält somit (*abzählbar*) *unendlich* viele Elemente (Elementarereignisse):

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$$

■

## 2.4 Ereignisse und Ereignisraum

Durch Zusammenfassungen von einzelnen Elementarereignissen erhält man *Teilmengen* der Ergebnismenge  $\Omega$ . Im einfachsten Fall enthält eine Teilmenge genau *ein* Element und repräsentiert somit ein *Elementarereignis*. Wir verdeutlichen dies an einem Beispiel.

### ■ Beispiel

Beim Zufallsexperiment „Wurf eines homogenen Würfels“ (Standardbeispiel 1) erhielten wir die folgende Ergebnismenge:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Aus ihr lassen sich 6 *verschiedene* Teilmengen mit genau *einem* Element bilden:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$$

Sie repräsentieren der Reihe nach die insgesamt 6 möglichen Ergebnisse (Elementarereignisse) beim Würfeln, nämlich der Reihe nach das Auftreten der Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6. ■

Allgemein beschreiben die Teilmengen von  $\Omega$  sog. *Ereignisse*, d. h. Versuchsausgänge, die bei der Durchführung eines Zufallsexperiments eintreten *können*, aber nicht unbedingt eintreten müssen. Wir definieren daher:

- Definitionen:**
- (1) Eine *Teilmenge*  $A$  der Ergebnismenge  $\Omega$  eines Zufallsexperiments heißt *Ereignis*.
  - (2) Die Menge *aller* Ereignisse, die sich aus der Ergebnismenge eines Zufallsexperiments bilden lassen, heißt *Ereignisraum* oder *Ereignisfeld*.

### Anmerkungen

- (1) Die möglichen *Ereignisse* eines Zufallsexperiments mit der Ergebnismenge  $\Omega$  werden somit durch die *Teilmengen* von  $\Omega$  beschrieben.
- (2) Ein Ereignis  $A$  ist dabei *eingetreten*, wenn das Ergebnis des Zufallsexperiments ein *Element* von  $A$  ist.
- (3) Zu beachten ist, dass sowohl die *leere* Menge  $\emptyset$  als auch die *Ergebnismenge*  $\Omega$  definitionsgemäß *Teilmengen* von  $\Omega$  sind und somit *Ereignisse* mit folgender Bedeutung darstellen:

$\emptyset$ : Die *leere* Menge enthält *kein* Element und symbolisiert das sog. *unmögliche* Ereignis, d. h. ein Ereignis, das *nie* eintreten kann.

$\Omega$ : Die *Ergebnismenge* dagegen enthält *alle* Elementarereignisse und repräsentiert somit das sog. *sichere Ereignis*, d. h. ein Ereignis, das *immer* eintritt. Denn bei *jeder* Durchführung des Zufallsexperiments tritt genau *eines* der Elementarereignisse ein.

- (4) Ein *Ereignis A* ist somit *entweder*

- das *unmögliche* Ereignis  $\emptyset$  ( $A$  enthält *kein* Element von  $\Omega$ ) oder
- ein *Elementarereignis* ( $A$  enthält genau *ein* Element von  $\Omega$ ) *oder*
- eine *Zusammenfassung* von *mehreren* Elementarereignissen ( $A$  enthält somit *mehrere* Elemente von  $\Omega$ ) *oder*
- das *sichere Ereignis*  $\Omega$  ( $A$  enthält *alle* Elemente von  $\Omega$ , d. h.  $A = \Omega$ ).

## ■ Beispiele

- (1) Beim Zufallsexperiment „*Wurf eines homogenen Würfels*“ (Standardbeispiel 1) lautet die Ergebnismenge  $\Omega$  für die beobachtete Augenzahl bekanntlich wie folgt:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Wir bilden einige *Teilmengen* von  $\Omega$  und erläutern die zugeordneten *Ereignisse*:

Ereignis (Teilmenge von $\Omega$ )	Beschreibung des Ereignisses
$A = \{2\}$	Würfeln einer „2“ ( <i>Elementarereignis</i> )
$B = \{2, 4, 6\}$	Würfeln einer <i>geraden</i> Zahl
$C = \{3, 6\}$	Würfeln einer durch „3“ <i>teilbaren</i> Zahl
$D = \{1, 3, 5\}$	Würfeln einer <i>ungeraden</i> Zahl
$E = \{5, 6\}$	Würfeln einer „5“ <i>oder</i> „6“

- (2) Beim Zufallsexperiment „*Viermaliger Wurf einer homogenen Münze*“ sind  $2^4 = 16$  verschiedene Ergebnisse (Elementarereignisse) möglich, zum Beispiel

$$ZZZW = \text{zunächst 3-mal Zahl (Z), dann Wappen (W)}$$

Durch welche Teilmenge lässt sich das Ereignis

$$A: \text{2-mal Zahl bei 4 Würfen}$$

beschreiben?

*Lösung:* Es gilt genau 6 Elementarereignisse, die das Ereignis  $A$  beschreiben, nämlich

$$ZZWW, ZWZW, ZWWZ, WWZZ, WZWZ, WZZW$$

Somit gilt:

$$A = \{ZZWW, ZWZW, ZWWZ, WWZZ, WZWZ, WZZW\}$$

- (3) In unserem *Urnenbeispiel* aus Abschnitt 2.1 (Urne mit 5 Kugeln, darunter 3 weiße und 2 schwarze) erhielten wir bei 3 nacheinander *mit Zurücklegen* gezogenen Kugeln die folgende Ergebnismenge:

$$\Omega = \{\textcircled{O}\textcircled{O}\textcircled{O}, \textcircled{O}\textcircled{O}\bullet, \textcircled{O}\bullet\textcircled{O}, \bullet\textcircled{O}\textcircled{O}, \\ \textcircled{O}\bullet\bullet, \bullet\textcircled{O}\bullet, \bullet\bullet\textcircled{O}, \bullet\bullet\bullet\}$$

Die *Teilmenge*

$$A = \{\textcircled{O}\textcircled{O}\bullet, \textcircled{O}\bullet\textcircled{O}, \bullet\textcircled{O}\textcircled{O}\}$$

beschreibt dann das Ereignis „Unter den 3 gezogenen Kugeln befindet sich genau eine schwarze Kugel“. Dieses Ereignis wird dabei durch 3 verschiedene Elementarereignisse realisiert, nämlich:

$$\textcircled{O}\textcircled{O}\bullet, \textcircled{O}\bullet\textcircled{O}, \bullet\textcircled{O}\textcircled{O}$$

In *allen* drei Fällen werden jeweils 2 weiße und eine schwarze Kugel gezogen (jedoch in unterschiedlicher Reihenfolge).

Die *Teilmenge*

$$B = \{\textcircled{O}\textcircled{O}\textcircled{O}, \bullet\bullet\bullet\}$$

dagegen beschreibt das Ereignis „Die drei gezogenen Kugeln sind gleichfarbig“. Es wird durch *zwei* Elementarereignisse realisiert (entweder sind *alle* gezogenen Kugeln *weiß* oder sie sind *alle schwarz*).

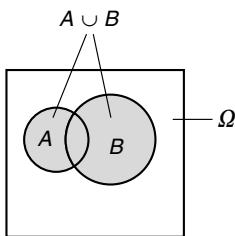
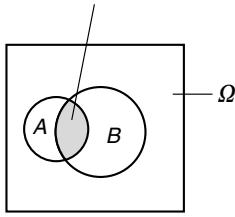
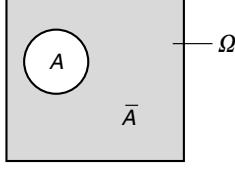
$\Omega$  selbst bedeutet das *sichere* Ereignis, das *immer* eintritt. Denn  $\Omega$  enthält *jedes* mögliche Ergebnis (Elementarereignis) unseres Zufallsexperiments.

■

## 2.5 Verknüpfungen von Ereignissen

Ereignisse sind, wie wir inzwischen wissen, Teilmengen der Ergebnismenge  $\Omega$ . Sie lassen sich daher wie Mengen verknüpfen. Man erhält auf diese Weise neue Ereignisse, sog. zusammengesetzte Ereignisse. Die wichtigsten Verknüpfungen mit ihren Symbolen haben wir in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

**Tabelle 2:** Verknüpfungen von Ereignissen und ihre Bedeutung ( $\Omega$ : Ergebnismenge eines Zufallsexperiments;  $A, B$ : Beliebige Ereignisse, d. h. Teilmengen von  $\Omega$ )

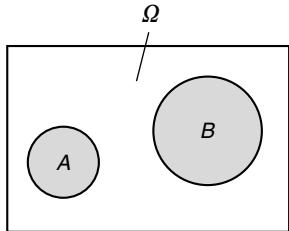
Verknüpfungssymbol mit Euler-Venn-Diagramm <sup>10)</sup>	Bedeutung des zusammengesetzten Ereignisses
	<p>Vereinigung der Ereignisse <math>A</math> und <math>B</math>:  <i>Entweder tritt <math>A</math> ein oder <math>B</math> oder <math>A</math> und <math>B</math> gleichzeitig.</i>          Symbolische Schreibweise: <math>A \cup B</math></p>
	<p>Durchschnitt der Ereignisse <math>A</math> und <math>B</math>:  <i><math>A</math> und <math>B</math> treten gleichzeitig ein.</i>          Symbolische Schreibweise: <math>A \cap B</math></p>
	<p>Zu <math>A</math> komplementäres Ereignis:  <i><math>A</math> tritt nicht ein.</i>          Symbolische Schreibweise: <math>\bar{A}</math></p>

### Anmerkungen zur Tabelle 2

- (1) Das Ereignis  $A \cup B$  wird auch als *Summe* aus  $A$  und  $B$  bezeichnet (symbolische Schreibweise:  $A + B$ ).
- (2) Das Ereignis  $A \cap B$  heißt auch *Produkt* aus  $A$  und  $B$  (symbolische Schreibweise:  $A \cdot B$  oder kurz  $AB$ ).
- (3)  $\bar{A}$  ist die *Restmenge* (*Differenzmenge*) von  $\Omega$  und  $A$ :  $\bar{A} = \Omega \setminus A$

<sup>10)</sup> Die hier verwendeten Verknüpfungen von Mengen wurden bereits in Band 1 (Kap. I, Abschnitt 1.2) ausführlich erörtert.

- (4) Schließen sich zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  gegenseitig aus, so gilt  $A \cap B = \emptyset$  (siehe Bild II-16).  $A$  und  $B$  sind sog. *disjunkte* Mengen. Ein wichtiges Beispiel liefern die *Elementarereignisse* eines Zufallsexperiments, die sich stets *paarweise* gegenseitig ausschließen.

**Bild II-16**

Die Ereignisse  $A$  und  $B$  schließen sich gegenseitig aus („disjunkte“ Mengen)

## ■ Beispiele

- (1) Beim „Wurf einer homogenen Münze“ sei  $A$  das Ereignis „Zahl liegt oben“. Dann ist das Ereignis „Wappen liegt oben“ das zu  $A$  komplementäre Ereignis  $\bar{A}$ .
- (2) Beim Zufallsexperiment „Wurf eines homogenen Würfels“ wird die Augenzahl beobachtet. Die Ergebnismenge  $\Omega$  lautet dann (siehe Standardbeispiel 1):

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Wir betrachten die folgenden Teilmengen (Ereignisse):

$$A = \{1, 3, 5\} \quad (\text{Würfeln einer ungeraden Zahl})$$

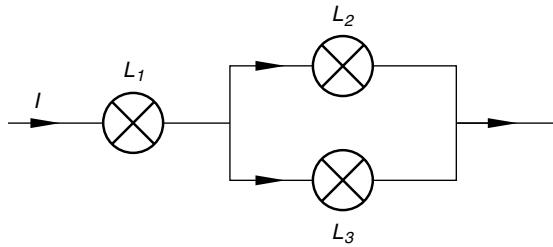
$$B = \{2, 4, 6\} \quad (\text{Würfeln einer geraden Zahl})$$

$$C = \{3, 6\} \quad (\text{Würfeln einer durch 3 teilbaren Zahl})$$

Dann aber gilt:

Ereignis (Teilmenge von $\Omega$ )	Beschreibung des Ereignisses
$\bar{A} = \{2, 4, 6\} = B$	Würfeln einer geraden Zahl
$\bar{B} = \{1, 3, 5\} = A$	Würfeln einer ungeraden Zahl
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$	Sicheres Ereignis (tritt bei jedem Wurf ein)
$A \cap B = \emptyset$	Unmögliches Ereignis (tritt nie ein, da eine Zahl nicht zugleich gerade und ungerade sein kann)
$A \cap C = \{3\}$	Würfeln der Zahl 3

- (3) Der in Bild II-17 dargestellte stromdurchflossene Schaltkreis enthält drei Glühlämpchen  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$ .

**Bild II-17**

Stromkreis mit drei Glühlämpchen ( $I$ : Strom)

Mit  $A_i$  bezeichnen wir das Ereignis, dass das  $i$ -te Glühlämpchen  $L_i$  durchbrennt ( $i = 1, 2, 3$ ). Dann lässt sich das Ereignis

$B$ : Unterbrechung des Stromkreises

wie folgt als *zusammengesetztes* Ereignis darstellen:

$$B = A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$$

Denn der Stromkreis wird genau dann unterbrochen, wenn *entweder*  $L_1$  durchbrennt (Ereignis  $A_1$ ) *oder* zum gleichen Zeitpunkt die Lämpchen  $L_2$  und  $L_3$  (Ereignis  $A_2 \cap A_3$ ) *oder* wenn alle drei Glühlämpchen gleichzeitig durchbrennen (Ereignis  $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ ). ■

Zum Abschluss erwähnen wir noch die sog. *De Morganschen Regeln*, die sich beim Lösen mancher Probleme in der Wahrscheinlichkeitsrechnung als sehr nützlich erweisen:

### De Morgansche Regeln für Ereignisse

Für zwei beliebige Ereignisse (Teilmengen)  $A$  und  $B$  gelten die folgenden *De Morganschen Regeln*:

$$(1) \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad (\text{II-25})$$

$$(2) \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad (\text{II-26})$$

## 3 Wahrscheinlichkeit

### 3.1 Laplace-Experimente

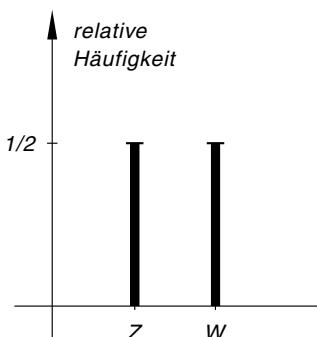
Wird ein Zufallsexperiment mit einer *endlichen* Ergebnismenge  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$  genügend oft wiederholt und zeigt sich dabei, dass *alle* Elementarereignisse mit nahezu gleicher Häufigkeit auftreten, so spricht man von einem *Laplace-Experiment*<sup>11)</sup>. Bei einem solchen Experiment sind demnach alle Elementarereignisse „gleichmöglich“, d. h. kein Elementarereignis ist in irgendeiner Weise gegenüber den anderen Elementarereignissen bevorzugt oder benachteiligt. Wir geben hierzu zunächst zwei einfache Beispiele.

#### ■ Beispiele

- (1) Beim wiederholten Wurf einer (unverfälschten) Münze *erwarten* wir, dass die beiden möglichen Ergebnisse (Elementarereignisse) „Zahl“ und „Wappen“ mit nahezu gleicher absoluter bzw. relativer Häufigkeit auftreten. Es handelt sich also beim Wurf einer Münze im *Idealfall* um ein *Laplace-Experiment*. Bei 1000 Würfen liegt unsere Erwartung somit bei je 500-mal „Zahl“ (Z) und „Wappen“ (W). Mit zunehmender Anzahl  $n$  der Wiederholungen stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten  $h_n(Z)$  und  $h_n(W)$  und werden sich dann nur noch unwesentlich vom *erwarteten* Wert 1/2 unterscheiden:

$$h_n(Z) \approx h_n(W) \approx \frac{1}{2} \quad (\text{für großes } n)$$

Bild II-18 zeigt das zugehörige sog. *Stabdiagramm*.



**Bild II-18**

Stabdiagramm beim Münzwurf  
(theoretisch „erwartetes“ Ergebnis)

<sup>11)</sup> Man unterscheidet noch zwischen *absoluter* und *relativer* Häufigkeit. Wird ein Zufallsexperiment  $n$ -mal durchgeführt und tritt dabei das Ereignis  $A$  genau  $n(A)$ -mal ein, so gilt *definitionsgemäß*:

absolute Häufigkeit:  $n(A)$       relative Häufigkeit:  $h_n(A) = \frac{n(A)}{n}$

- (2) In einer Urne befinden sich 5 Kugeln, darunter 3 weiße und 2 schwarze (Bild II-19):



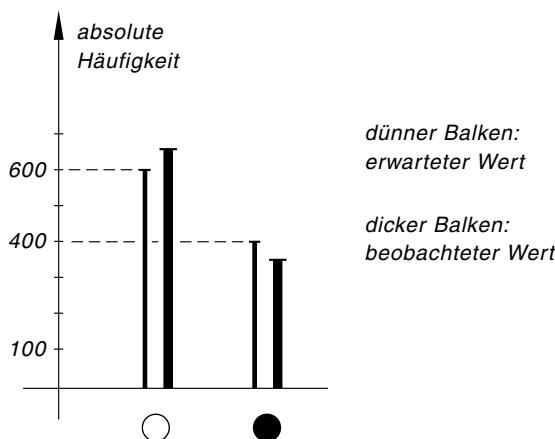
Bild II-19

Wir entnehmen rein zufällig eine Kugel, notieren ihre Farbe und legen sie dann wieder zurück in die Urne (Ziehung *mit Zurücklegen*). Wenn wir dieses Zufalls-experiment nur *genügend oft* wiederholen, beispielsweise 1000 Ziehungen vornehmen, so erwarten wir in  $3/5 = 60\%$  aller Fälle eine *weiße* Kugel und in  $2/5 = 40\%$  aller Fälle eine *schwarze* Kugel. Denn grundsätzlich besteht für *jede* der 5 Kugeln die *gleiche* Chance, gezogen zu werden. Es handelt sich also auch hier um ein *Laplace-Experiment*.

Unsere „Erwartung“ lautet daher bei 1000 Ziehungen (*mit Zurücklegen*) wie folgt:

○ 600-mal      ● 400-mal

In einer konkreten Versuchsserie vom gleichen Umfang wird man jedoch *zufallsbedingt* meist etwas abweichende Häufigkeitswerte erhalten. Bild II-20 verdeutlicht dies in einem *Stabdiagramm*.



**Bild II-20** Für die absolute Häufigkeit gilt: Der beobachtete Wert wird im Allgemeinen (zufallsbedingt) vom erwarteten (theoretischen) Wert abweichen

Eine Ergebnismenge  $\Omega$  mit  $m$  gleichmöglichen Elementarereignissen wird auch *Laplace-Raum* genannt. Einem Elementarereignis  $\omega_i$  wird dabei definitionsgemäß die positive Zahl

$$p(\omega_i) = \frac{1}{m} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (\text{II-27})$$

als sog. *Wahrscheinlichkeit* zugeordnet<sup>12)</sup>. Die Wahrscheinlichkeit für ein *Ereignis*  $A$  ist dann durch die Gleichung

$$P(A) = \sum_i p(\omega_i) = g(A) \cdot \frac{1}{m} = \frac{g(A)}{m} \quad (\text{II-28})$$

definiert, wobei  $g(A)$  die *Anzahl* der Elemente (Elementarereignisse) von  $A$  ist (summiert wird über alle in  $A$  enthaltenen Elementarereignisse  $\omega_i$ ).

Wir fassen zusammen:

### Definition der Wahrscheinlichkeit bei einem Laplace-Experiment

Bei einem *Laplace-Experiment* mit der Ergebnismenge  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$  besitzen alle Elementarereignisse  $\omega_i$  die gleiche Wahrscheinlichkeit

$$p(\omega_i) = \frac{1}{m} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (\text{II-29})$$

Die *Wahrscheinlichkeit* eines *Ereignisses*  $A$  ist dann durch die Formel

$$P(A) = \frac{g(A)}{m} \quad (\text{II-30})$$

gegeben.

Dabei bedeuten:

$g(A)$ : Anzahl der für das Ereignis  $A$  günstigen Fälle (d. h. der Fälle, in denen das Ereignis  $A$  eintritt)

$m$ : Anzahl der insgesamt möglichen Fälle (Anzahl der gleichmöglichen oder gleichwahrscheinlichen Elementarereignisse)

<sup>12)</sup> Wir verwenden hier die Kurzschreibweise  $P(\{\omega_i\}) = p(\omega_i)$ .

### Anmerkungen

- (1) Man beachte, dass diese sog. *klassische* Definition der Wahrscheinlichkeit nur *begrenzt* anwendbar ist. Sie gilt nur für *Laplace-Experimente*, d. h. Zufallsexperimente, bei denen folgende Voraussetzungen erfüllt sind:
  1. Die Ergebnismenge  $\Omega$  ist *endlich*;
  2. Alle Elementarereignisse (Ergebnisse) sind *gleichwahrscheinlich*.
- (2) Die Definitionsformel (II-30) für die *Wahrscheinlichkeit*  $P(A)$  eines *Ereignisses A* lässt sich auch in der Form

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl } g(A) \text{ der Elemente von } A}{\text{Anzahl } m \text{ der Elemente von } \Omega} \quad (\text{II-31})$$

angeben.

### ■ Beispiele

- (1) Beim Zufallsexperiment „*Wurf eines homogenen Würfels*“ (Standardbeispiel 1) treten alle 6 möglichen Augenzahlen (Elementarereignisse) mit der *gleichen* Wahrscheinlichkeit auf<sup>13)</sup>:

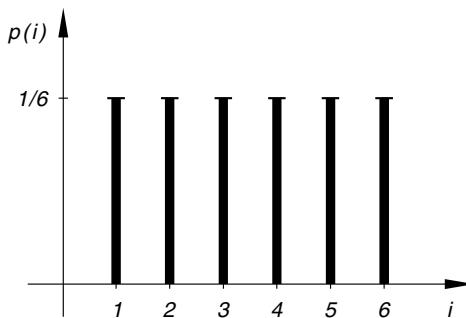
$$p(i) = \frac{g(i)}{m} = \frac{1}{6} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

Denn für *jedes* Elementarereignis gilt:

Anzahl der *günstigen* Fälle:  $g(i) = 1$

Anzahl der möglichen Fälle:  $m = 6$

Bild II-21 verdeutlicht diesen Sachverhalt in einem *Stabdiagramm*.



**Bild II-21** Beim Wurf eines homogenen Würfels treten alle Augenzahlen mit *gleicher* Wahrscheinlichkeit auf („Gleichverteilung“)

<sup>13)</sup>  $p(i)$  ist die Wahrscheinlichkeit für das Elementarereignis „Augenzahl  $i$ “ ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ).

Für das Ereignis

$$A = \{2, 4, 6\} \quad (\text{„gerade Augenzahl“})$$

erhalten wir somit nach Formel (II-30) die *Wahrscheinlichkeit*

$$P(A) = \frac{g(A)}{m} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Denn die Anzahl der für das Ereignis  $A$  *günstigen* Fälle ist  $g(A) = 3$ , da  $A$  durch genau *drei* Elementarereignisse realisiert wird ( $A$  tritt ein bei der Augenzahl „2“ oder „4“ oder „6“), während die Anzahl der *möglichen* Fälle  $m = 6$  beträgt (es gibt genau 6 Elementarereignisse).

- (2) In einer Warenlieferung von 100 Glühbirnen befinden sich 20 *defekte* (was dem belieferten Kunden jedoch unbekannt ist). Zu Kontrollzwecken wird der Lieferung wahllos eine Glühbirne entnommen. Die Wahrscheinlichkeit für das *Zufallsereignis*

$A$ : *Ziehung einer defekten Glühbirne*

ist dann

$$P(A) = \frac{g(A)}{m} = \frac{20}{100} = 0,2$$

Denn jede der  $m = 100$  Glühbirnen hat die *gleiche* Chance (Wahrscheinlichkeit), gezogen zu werden, wobei es  $g(A) = 20$  für das Eintreten des Ereignisses  $A$  *günstige* Fälle gibt. Es liegt also ein *Laplace-Experiment* vor.

Das zum Ereignis  $A$  *komplementäre* Ereignis

$\bar{A}$ : *Ziehung einer einwandfreien Glühbirne*

hat dann die Wahrscheinlichkeit

$$P(\bar{A}) = \frac{g(\bar{A})}{m} = \frac{80}{100} = 0,8$$

Man beachte die (sogar allgemein gültige) Beziehung

$$P(A) + P(\bar{A}) = 0,2 + 0,8 = 1$$

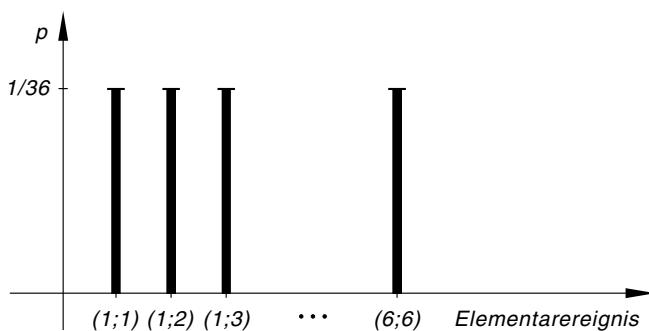
- (3) Beim Zufallsexperiment „*Wurf mit zwei unterscheidbaren homogenen Würfeln*“ (Standardbeispiel 2) interessieren wir uns für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$A$ : *Die Augensumme ist gleich 9*

Die Ergebnismenge  $\Omega$  dieses Zufallsexperiments enthält bekanntlich 36 *gleichmögliche* Elementarereignisse:

$$\Omega = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), \dots, (6; 5), (6; 6)\}$$

Es handelt sich also um einen *Laplace-Raum*, bei dem *jedes* Elementarereignis die *gleiche* Wahrscheinlichkeit  $p = 1/36$  besitzt (Bild II-22).



**Bild II-22** Beim Wurf mit zwei homogenen Würfeln treten alle geordneten „Augenpaare“ mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf

Unter den 36 Elementarereignissen befinden sich genau 4 für das Ereignis  $A$  günstige Fälle, da es genau 4 verschiedene Elementarereignisse gibt, die zur Augensumme 9 führen. Dies sind die Augenpaare

$$(3; 6), (4; 5), (5; 4) \quad \text{und} \quad (6; 3)$$

Somit ist  $g(A) = 4$  und  $m = 36$ . Die Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  beträgt daher

$$P(A) = \frac{g(A)}{m} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Wir deuten dieses Ergebnis wie folgt: Würden wir dieses *Laplace-Experiment* z. B. 900-mal durchführen, so dürfen wir in nahezu 100 Fällen eine Augensumme von 9 erwarten. ■

## 3.2 Wahrscheinlichkeitsaxiome

Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff lässt sich nur sehr begrenzt, nämlich ausschließlich auf *Laplace-Experimente* anwenden. In der modernen Wahrscheinlichstheorie betrachtet man daher den Begriff der Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses als einen *Grundbegriff*, der gewissen *Axiomen*, den sog. *Wahrscheinlichkeitsaxiomen*, genügt. Der Aufbau dieses Axiomensystems geschieht dabei in enger Anlehnung an die Eigenschaften der *relativen Häufigkeiten* von zufälligen Ereignissen, die man aus umfangreichen Versuchsserien gewonnen hat.

### 3.2.1 Eigenschaften der relativen Häufigkeiten

Anhand eines einfachen Urnenbeispiels wollen wir uns zunächst mit den wesentlichen Eigenschaften der *relativen Häufigkeiten* von zufälligen Ereignissen näher vertraut machen.

In einer Urne befinden sich 6 Kugeln, darunter 1 weiße, 2 graue und 3 schwarze Kugeln. Wir entnehmen der Urne zufällig eine Kugel und beschreiben die dabei möglichen Ergebnisse (Elementarereignisse) durch die in Bild II-23 näher beschriebenen Mengen  $A$ ,  $B$  und  $C$ :

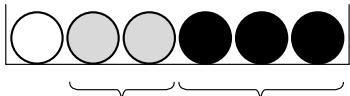


Bild II-23

- $A = \{\bigcirc\}$  Ziehung einer weißen Kugel
- $B = \{\bigcirc\}$  Ziehung einer grauen Kugel
- $C = \{\bullet\}$  Ziehung einer schwarzen Kugel

Dann ist  $\Omega = \{\bigcirc, \bigcirc, \bullet\}$  die *Ergebnismenge* dieses Zufallsexperiments.

### Eigenschaften der relativen Häufigkeiten

Bei einer  $n$ -fachen Ausführung unseres Zufallsexperiments „Ziehung einer Kugel“ treten die Ereignisse  $A$ ,  $B$  und  $C$  der Reihe nach mit den *absoluten Häufigkeiten*  $n(A)$ ,  $n(B)$  und  $n(C)$  auf, wobei stets

$$n(A) + n(B) + n(C) = n \quad (\text{II-32})$$

gilt. Die Werte der zugehörigen *relativen Häufigkeiten*

$$h_n(A) = \frac{n(A)}{n}, \quad h_n(B) = \frac{n(B)}{n} \quad \text{und} \quad h_n(C) = \frac{n(C)}{n} \quad (\text{II-33})$$

liegen dann zwischen 0 und 1. Damit haben wir bereits eine *erste Eigenschaft* der *relativen Häufigkeit* erkannt: Die *relative Häufigkeit*  $h_n(A)$  eines *beliebigen* Ereignisses  $A$  liegt stets zwischen 0 und 1.

Wir beschäftigen uns jetzt mit dem Ereignis „Ziehung einer weißen oder grauen Kugel“. Es wird beschrieben durch die Menge

$$A \cup B = \{\bigcirc, \bigcirc\} \quad (\text{II-34})$$

Da sich die Ereignisse  $A$  und  $B$  *gegenseitig ausschließen*, tritt das Ereignis  $A \cup B$  genau dann ein, wenn *entweder A oder B* eintritt. Der Fall, dass die Ereignisse  $A$  und  $B$  *gleichzeitig* eintreten, ist unter der gegebenen Voraussetzung hier *nicht* möglich. So mit erhalten wir bei den  $n$  Ausführungen unseres Zufallsexperiments in genau  $n(A) + n(B)$  Fällen eine weiße *oder* eine graue Kugel. Das Ereignis  $A \cup B$  tritt daher mit der *relativen Häufigkeit*

$$h_n(A \cup B) = \frac{n(A) + n(B)}{n} = \frac{n(A)}{n} + \frac{n(B)}{n} = h_n(A) + h_n(B) \quad (\text{II-35})$$

ein.

Diese Aussage lässt sich wie folgt verallgemeinern: Für zwei sich *gegenseitig ausschließende* Ereignisse  $A$  und  $B$  gilt stets:

$$h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B) \quad (A \cap B = \emptyset) \quad (\text{II-36})$$

Damit haben wir eine weitere Eigenschaft der *relativen Häufigkeit* erkannt.

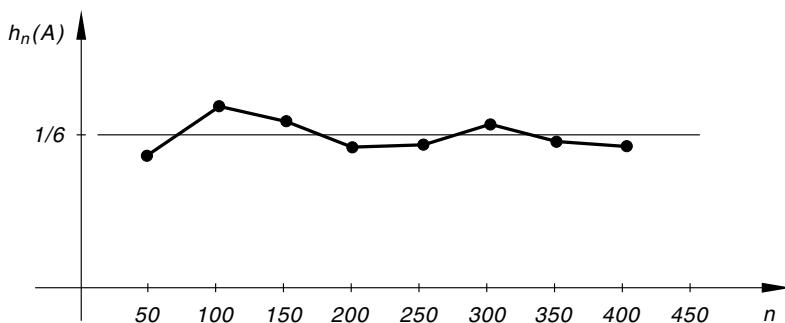
Eine *dritte* allgemeine Eigenschaft der *relativen Häufigkeit* beruht darauf, dass das *sichere* Ereignis  $\Omega = A \cup B \cup C$  *immer* eintritt. Daher gilt:

$$h_n(\Omega) = h_n(A \cup B \cup C) = \frac{n(A) + n(B) + n(C)}{n} = \frac{n}{n} = 1 \quad (\text{II-37})$$

### Stabilisierung der relativen Häufigkeit bei umfangreichen Versuchsreihen

Wir konzentrieren uns jetzt auf das Ereignis  $A = \{\circlearrowleft\}$  („Ziehung einer weißen Kugel“). Die *relative Häufigkeit*  $h_n(A)$  ist das Ergebnis eines Zufallsexperiments und hängt somit selbst vom *Zufall* ab. Daher werden wir bei *verschiedenen* Versuchsreihen vom *gleichen* Umfang  $n$  im Allgemeinen auch *verschiedene* Werte für die *relativen Häufigkeiten* erhalten. Bei einer genügend oft wiederholten Ausführung unseres Zufallsexperiments „erwarten“ wir jedoch, dass im *Mittel* jede 6. Ziehung eine *weiße* Kugel bringt. Unser „Erwartungswert“ für die *relative Häufigkeit*  $h_n(A)$  liegt somit bei  $1/6$ .

Die in der *Praxis* tatsächlich beobachteten Werte für  $h_n(A)$  werden jedoch als *Zufallsprodukte* mehr oder weniger stark um diesen Wert schwanken. Die Erfahrung lehrt aber, dass die *relative Häufigkeit* eines Ereignisses bei sehr *umfangreichen* Versuchsreihen *nahezu konstant* ist. Mit *zunehmender* Anzahl  $n$  der Versuche werden sich daher i. Allg. die beobachteten Werte für  $h_n(A)$  immer mehr „stabilisieren“, wie in Bild II-24 verdeutlicht wird.



**Bild II-24** Die *Erfahrung* zeigt: Die *relative Häufigkeit* eines Ereignisses ist bei *umfangreichen* Versuchsreihen *nahezu konstant*, „stabilisiert“ sich also mit zunehmendem Umfang  $n$  (hier:  $h_n(A) \rightarrow 1/6$ )

Wir fassen die wichtigsten Aussagen zusammen:

### Eigenschaften der relativen Häufigkeiten von zufälligen Ereignissen

Die *relativen Häufigkeiten* von zufälligen Ereignissen, die bei einem genügend oft wiederholten Zufallsexperiment mit der Ergebnismenge  $\Omega$  beobachtet werden, genügen den folgenden *Gesetzmäßigkeiten* und *Regeln* ( $n$ : Anzahl der Versuche):

- (1) Die *relative Häufigkeit*  $h_n(A)$  eines beliebigen Ereignisses  $A$  ist eine *nicht-negative Zahl*, die *höchstens* gleich 1 sein kann. Es gilt also stets:

$$0 \leq h_n(A) \leq 1 \quad (\text{II-38})$$

- (2) Für das *sichere Ereignis*  $\Omega$ , das *immer* eintritt, gilt:

$$h_n(\Omega) = 1 \quad (\text{II-39})$$

- (3) Für zwei sich *gegenseitig ausschließende* Ereignisse  $A$  und  $B$  gilt stets:

$$h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B) \quad (A \cap B = \emptyset) \quad (\text{II-40})$$

(*Additionssatz* für relative Häufigkeiten).

- (4) **Erfahrungsregel:** Mit *zunehmender* Anzahl  $n$  der Versuche „stabilisiert“ sich im Allgemeinen die *relative Häufigkeit*  $h_n(A)$  eines zufälligen Ereignisses  $A$  und schwankt somit immer weniger um einen bestimmten Wert  $h(A)$  (siehe hierzu Bild II-24).

### 3.2.2 Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogoroff

Es liegt nun nahe, den Begriff der *Wahrscheinlichkeit*  $P(A)$  eines Ereignisses  $A$  als *Grenzwert* der relativen Häufigkeit  $h_n(A)$  für  $n \rightarrow \infty$  zu definieren. In der Tat ist dies auch versucht worden, führte jedoch zu *unüberbrückbaren* Schwierigkeiten, auf die wir im Rahmen dieser Darstellung nicht näher eingehen können.

In der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie verzichtet man daher auf die Definition des Begriffes „Wahrscheinlichkeit“ und betrachtet ihn vielmehr als einen *Grundbegriff*, der gewissen *Axiomen* genügt. Die beobachteten Eigenschaften der *relativen Häufigkeiten* werden „idealisiert“ und führen dann zu den folgenden *Wahrscheinlichkeitsaxiomen* von *Kolmogoroff*:

### Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogoroff

Jedem Ereignis  $A$  eines Zufallsexperiments mit der Ergebnismenge  $\Omega$  wird eine reelle Zahl  $P(A)$ , *Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses  $A$  genannt, so zugeordnet, dass die folgenden *Axiome* (Grundsätze) erfüllt sind:

**Axiom 1:**  $P(A)$  ist eine *nichtnegative* Zahl, die *höchstens* gleich 1 ist:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (\text{II-41})$$

**Axiom 2:** Für das *sichere Ereignis* (Ergebnismenge)  $\Omega$  gilt:

$$P(\Omega) = 1 \quad (\text{II-42})$$

**Axiom 3:** Für paarweise sich *gegenseitig ausschließende* Ereignisse  $A_1, A_2, A_3, \dots$  gilt:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots \quad (\text{II-43})$$

### Anmerkungen

- (1) *Axiom 3* wird auch als *Additionssatz* für sich *gegenseitig ausschließende* Ereignisse bezeichnet.
- (2) Bei einem *Laplace-Experiment* lässt sich die Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  eines zufälligen Ereignisses  $A$  nach der Definitionsformel (II-30) *exakt* berechnen (sog. *klassische* Definition der Wahrscheinlichkeit). Selbstverständlich werden dabei alle Wahrscheinlichkeitsaxiome erfüllt.
- (3) Die Wahrscheinlichkeitsaxiome enthalten *keinerlei* Aussagen darüber, wie man in einem konkreten Zufallsexperiment die Wahrscheinlichkeiten der dabei auftretenden Ereignisse ermittelt. Sie legen den Wahrscheinlichkeiten aber *Bedingungen* auf, die erfüllt werden müssen und stellen somit in gewisser Hinsicht *Rechenregeln* für den Umgang mit Wahrscheinlichkeiten dar.

Mit der Ermittlung der (meist unbekannten) Wahrscheinlichkeiten in der *Praxis* werden wir uns im nächsten Abschnitt 3.2.3 näher beschäftigen.

Aus den Wahrscheinlichkeitsaxiomen lassen sich weitere Eigenschaften der Wahrscheinlichkeiten herleiten, die wir wie folgt zusammenstellen:

### Eigenschaften der Wahrscheinlichkeiten

#### (Folgerungen aus den Wahrscheinlichkeitsaxiomen von Kolmogoroff)

- (1) Für das *unmöglich* Ereignis  $\emptyset$  gilt:

$$P(\emptyset) = 0 \quad (\text{II-44})$$

- (2) Für das zum Ereignis  $A$  *komplementäre* Ereignis  $\bar{A}$  gilt:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (\text{II-45})$$

- (3) Für zwei sich *gegenseitig ausschließende* Ereignisse  $A$  und  $B$  folgt aus *Axiom 3*:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (A \cap B = \emptyset) \quad (\text{II-46})$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von  $A$  oder  $B$  ist gleich der *Summe* der Wahrscheinlichkeiten von  $A$  und  $B$  (*Additionssatz* für sich *gegenseitig ausschließende* Ereignisse).

### 3.2.3 Festlegung unbekannter Wahrscheinlichkeiten in der Praxis („statistische“ Definition der Wahrscheinlichkeit)

Wir beschäftigen uns jetzt mit der für die Praxis so außerordentlich wichtigen, bisher aber offen gebliebenen Frage, *wie* man in einem *konkreten* Fall die *unbekannten* Wahrscheinlichkeiten der zufälligen Ereignisse *festlegen* bzw. *ermitteln* kann.

Im einfachsten Fall liegt ein *Laplace-Experiment* vor. Dann lässt sich die Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  eines Ereignisses  $A$  aus der „klassischen“ Definitionsformel (II-30) sogar *exakt* berechnen, wobei die Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogoroff *automatisch* erfüllt sind.

Bei vielen Zufallsexperimenten sind die Wahrscheinlichkeiten jedoch *unbekannt* und müssen dann erst *festgelegt* werden. Dies gilt insbesondere für solche Experimente, die *keine* Laplace-Experimente darstellen. Als Grundlage für die Festlegung der Wahrscheinlichkeitswerte dient dabei die *Erfahrungstatsache*, dass sich die *relativen Häufigkeiten* der zufälligen Ereignisse bei *umfangreichen* Versuchsreihen im Allgemeinen „stabilisieren“ und sich mit zunehmender Anzahl  $n$  der Versuche immer weniger von einem bestimmten Wert unterscheiden (siehe hierzu Abschnitt 3.2.1). Die *Festlegung* der noch unbekannten Werte der Wahrscheinlichkeiten erfolgt daher im Regelfall anhand der bei umfangreichen Versuchsreihen beobachteten *relativen Häufigkeiten*. Man betrachtet dabei die relative Häufigkeit  $h_n(A)$  eines Ereignisses  $A$  als einen *Näherungs-* oder *Schätz-*wert für die *unbekannte* Wahrscheinlichkeit  $P(A)$ , mit der das Ereignis  $A$  eintritt:

$$P(A) \approx h_n(A) \quad (\text{für hinreichend großes } n) \quad (\text{II-47})$$

Diese Art der Festlegung der Wahrscheinlichkeit wird daher auch als „statistische“ *Definition* der Wahrscheinlichkeit bezeichnet, obwohl es sich dabei um keine Definition im mathematischen Sinne handelt.

Somit gilt folgende **Regel**:

**Festlegung unbekannter Wahrscheinlichkeiten in der Praxis  
(sog. „statistische“ oder „empirische“ Wahrscheinlichkeitswerte)**

In der Praxis wird die *unbekannte* Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  eines zufälligen Ereignisses  $A$  *näherungsweise* durch die in *umfangreichen* Versuchsreihen beobachtete *relative Häufigkeit*  $h_n(A)$  ersetzt:

$$P(A) \approx h_n(A) \quad (\text{II-48})$$

( $n$ : Anzahl der Einzelversuche in der Versuchsreihe, wobei  $n$  einen *hinreichend großen* Wert annehmen muss). Die relative Häufigkeit  $h_n(A)$  ist dabei als ein *Schätz-* oder *Näherungswert* für die meist unbekannt bleibende Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  zu betrachten. Diese sog. „statistische“ Festlegung der Wahrscheinlichkeit muss dabei aber im *Einklang* mit den drei Wahrscheinlichkeitsaxiomen von Kolmogoroff stehen.

**Anmerkung**

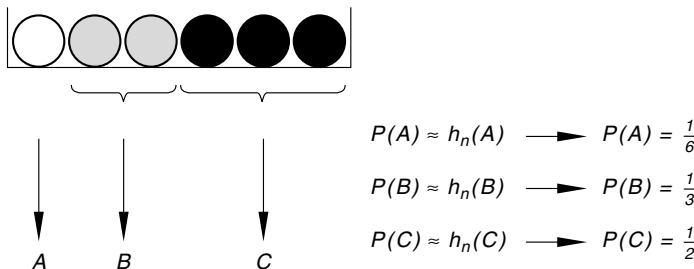
Man spricht bei dieser Art der Festlegung von Wahrscheinlichkeiten auch von den *empirisch* bestimmten Wahrscheinlichkeitswerten.

### ■ Beispiel

Wir kehren zu dem Urnenbeispiel aus Abschnitt 3.2.1 zurück (Bild II-25). Aus *umfangreichen* Versuchsreihen erhalten wir für die 3 Elementarereignisse  $A$ ,  $B$  und  $C$  der Reihe nach die relativen Häufigkeiten

$$h_n(A) \approx 1/6, \quad h_n(B) \approx 2/6 = 1/3 \quad \text{und} \quad h_n(C) \approx 3/6 = 1/2.$$

Sie liefern geeignete *Schätzwerte* für die unbekannten Wahrscheinlichkeiten  $P(A)$ ,  $P(B)$  und  $P(C)$  (Bild II-25).



**Bild II-25** Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse  $A$ ,  $B$  und  $C$

### 3.2.4 Wahrscheinlichkeitsraum

In der Praxis geht man bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten oft so vor, dass man den *Elementarereignissen* eines Zufallsexperiments mit der Ergebnismenge  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$  Wahrscheinlichkeiten  $p_i \geq 0$  so zuordnet, dass die sog. *Normierungsbedingung*

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \dots = 1 \tag{II-49}$$

erfüllt ist. Die *Wahrscheinlichkeit*  $P(A)$  eines *Ereignisses*  $A$  aus dem zugehörigen Ereignisraum ist dann durch den Ausdruck

$$P(A) = \sum_i p_i \tag{II-50}$$

gegeben, wobei über alle in  $A$  enthaltenen Elementarereignisse  $\omega_i$  summiert wird. Der Ereignisraum wird auf diese Weise zu einem *Wahrscheinlichkeitsraum*.

### Wahrscheinlichkeitsraum

Jedem *Elementarereignis*  $\omega_i$  aus der Ergebnismenge  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$  eines Zufallsexperiments ordnen wir eine reelle Zahl  $p_i$  so zu, dass die beiden folgenden *Bedingungen* erfüllt sind:

$$(1) \quad p_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{II-51})$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \dots = 1 \quad (\text{II-52})$$

Der Ereignisraum wird damit zu einem *Wahrscheinlichkeitsraum*.

Die *Wahrscheinlichkeit*  $P(A)$  eines Ereignisses  $A$  aus dem Ereignis- oder Wahrscheinlichkeitsraum ist dann die *Summe* der Wahrscheinlichkeiten der in  $A$  enthaltenen Elemente (Elementarereignisse):

$$P(A) = \sum_i p_i \quad (\text{II-53})$$

(summiert wird über *alle* in  $A$  enthaltenen Elementarereignisse).

#### Anmerkung

Bei einem *endlichen* Ereignisraum läuft der Index  $i$  von 1 bis  $n$  ( $n$ : Anzahl der Elementarereignisse in  $\Omega$ ).

### ■ Beispiel

Eine (unverfälschte) Münze wird solange geworfen, bis erstmals „Zahl“ erscheint. Dies kann bereits beim 1. Wurf der Fall sein, kann aber auch (theoretisch) unendlich lange dauern. Wir beschreiben die *Elementarereignisse*

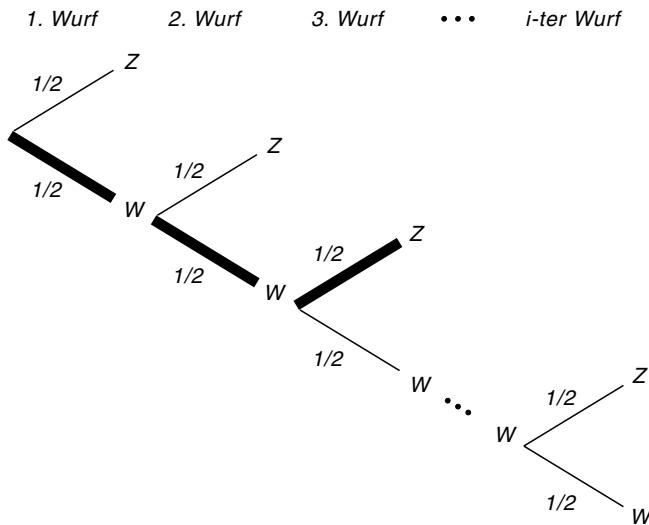
$A_i$ : Beim  $i$ -ten Wurf erstmals „Zahl“

durch die Angabe der Anzahl  $i$  der Würfe bis zum *erstmaligen* Auftreten der „Zahl“. Dabei kann  $i$  eine *beliebige* natürliche Zahl sein. So tritt beispielsweise das Elementarereignis  $A_3$  genau dann ein, wenn beim 3. Wurf der Münze erstmals „Zahl“ erscheint. Die Ergebnismenge  $\Omega$  enthält somit *unendlich* viele Elemente:

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Der auf dieser Ergebnismenge beruhende Ergebnisraum soll jetzt zu einem *Wahrscheinlichkeitsraum* erweitert werden. Dazu benötigen wir zunächst die Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  der *Elementarereignisse*, die wir mit Hilfe des in Bild II-26 dargestellten Diagramms wie folgt bestimmen können<sup>14)</sup>:

<sup>14)</sup> Das Diagramm liefert ein erstes Beispiel für ein sehr anschauliches graphisches Hilfsmittel, den sog. *Ereignisbaum*. Dieses Verfahren wird später in Abschnitt 3.7 noch näher erläutert.



**Bild II-26** Ereignisbaum beim wiederholten Münzwurf

Bei jedem Wurf gilt dann, dass „Zahl“ (Z) und „Wappen“ (W) *gleichwahrscheinliche* Ereignisse sind (der Wurf einer homogenen Münze ist ein *Laplace-Experiment*). Ihre Wahrscheinlichkeiten bezeichnen wir mit  $p(Z)$  und  $p(W)$ . Dann ist bei jedem Wurf  $p(Z) = p(W) = 1/2$ . Das Elementarereignis

$A_1$ : „Zahl“ beim 1. Wurf

besitzt somit die Wahrscheinlichkeit

$$p_1 = P(A_1) = p(1) = p(Z) = \frac{1}{2}$$

Für das *Elementarereignis*

$A_2$ : Erstmals „Zahl“ beim 2. Wurf

erhalten wir die Wahrscheinlichkeit

$$p_2 = P(A_2) = p(2) = p(W) \cdot p(Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Allgemein ist dann offenbar

$$p_i = P(A_i) = p(i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, beim  $i$ -ten Münzwurf *erstmals* „Zahl“ zu erhalten. Dieses Ergebnis lässt sich leicht aus dem in Bild II-26 gezeichneten (unvollständigen) *Ereignisbaum* ermitteln. Jedes Elementarereignis erreicht man dabei auf einem ganz bestimmten Weg oder *Pfad* über mehrere Äste oder Zweige. Z. B. erreicht man das *Elementarereignis*

$A_3$ : Erstmals „Zahl“ beim 3. Wurf

längs des im Bild *dick* eingezeichneten Weges über drei Zweige.

Man *multipliziert* dabei die an den Zweigen angegebenen Wahrscheinlichkeiten und erhält das gewünschte Ergebnis, hier also

$$p_3 = P(A_3) = p(3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

in Übereinstimmung mit obiger Gleichung für  $i = 3$ .

Der Ereignisraum wird durch die Zuordnung

$$A_i \longrightarrow p_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

zu einem *Wahrscheinlichkeitsraum*, da die Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  die Bedingungen (II-51) und (II-52) erfüllen. Denn es gilt

$$p_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i > 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

und somit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} p_i &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots = \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots\right]}_{\text{geometrische Reihe } (q = 1/2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \end{aligned}$$

Anmerkung:  $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}$  (geometrische Reihe,  $|q| < 1$ ) ■

### 3.3 Additionssatz für beliebige Ereignisse

Für zwei sich gegenseitig ausschließende Ereignisse  $A$  und  $B$  gilt nach dem 3. Wahrscheinlichkeitsaxiom:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (A \cap B = \emptyset) \quad (\text{II-54})$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis  $A$  oder  $B$  eintritt, ist in diesem Sonderfall gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten von  $A$  und  $B$ . Trifft diese Voraussetzung jedoch nicht zu, gilt der folgende allgemeinere *Additionssatz*:

#### Additionssatz für beliebige Ereignisse

Für zwei beliebige Ereignisse  $A$  und  $B$  gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (\text{II-55})$$

*Anmerkung*

Der Additionssatz (II-55) führt im Sonderfall  $A \cap B = \emptyset$  (die Ereignisse  $A$  und  $B$  schließen sich gegenseitig aus) wegen  $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$  zum 3. Wahrscheinlichkeitsaxiom (Gleichung (II-43) bzw. (II-46)).

### ■ Beispiel

Ein homogener Würfel wird *zweimal* geworfen. Wie groß ist dabei die Wahrscheinlichkeit, *mindestens einmal* die Augenzahl „6“ zu erzielen?

*Lösung:* Wir betrachten zunächst die folgenden Ereignisse:

$A$ : Augenzahl „6“ beim 1. Wurf

$B$ : Augenzahl „6“ beim 2. Wurf

Sie treten mit den Wahrscheinlichkeiten  $P(A) = P(B) = 1/6$  ein. Das uns interessierende Ereignis lautet: „*Bei zwei Würfen tritt die Augenzahl 6 mindestens einmal auf*“. Dieses Ereignis tritt somit ein, wenn *entweder* im 1. Wurf *oder* im 2. Wurf *oder* in *beiden* Würfen die Augenzahl „6“ erzielt wird. Unser Interesse gilt also dem Ereignis  $A \cup B$ , dessen Wahrscheinlichkeit  $P(A \cup B)$  wir berechnen wollen. Um den *Additionssatz* (II-55) hier anwenden zu können, benötigen wir noch die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$(A \cap B)$ : Augenzahl „6“ bei *beiden* Würfen

Aus unserem *Standardbeispiel 2* (Abschnitt 2.1) wissen wir bereits, dass dieses Ereignis, beschrieben durch das *geordnete Zahlenpaar* (Augenpaar) (6; 6), unter den insgesamt 36 *gleichwahrscheinlichen* Elementarereignissen (1; 1), (1; 2), (1; 3), …, (6; 5), (6; 6) genau *einmal* auftritt und somit die Wahrscheinlichkeit  $P(A \cap B) = 1/36$  besitzt. Aus dem *Additionssatz* erhalten wir dann für die gesuchte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $A \cup B$  den folgenden Wert:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{6 + 6 - 1}{36} = \frac{11}{36}$$

**Alternativer Lösungsweg**

Zum gleichen Ergebnis in diesem *Laplace-Experiment* gelangen wir auch wie folgt. Das Ereignis

$C = (A \cup B)$ : Bei 2 Würfen *mindestens einmal* die Augenzahl „6“

wird in genau 11 von insgesamt 36 möglichen Fällen (Elementarereignissen) realisiert:

(6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5), (6; 6)

(1; 6), (2; 6), (3; 6), (4; 6), (5; 6)

Damit erhalten wir nach *Laplace* die folgende Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses  $C = A \cup B$  (siehe Definitionsgleichung (II-30)):

$$P(C) = P(A \cup B) = \frac{g(C)}{m} = \frac{11}{36}$$

■

### 3.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit

In den Anwendungen interessiert häufig die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines bestimmten Ereignisses  $B$  unter der *Voraussetzung* oder *Bedingung*, dass ein anderes Ereignis  $A$  bereits *eingetreten* ist. Diese Wahrscheinlichkeit wird daher als *bedingte Wahrscheinlichkeit von  $B$  unter der Bedingung  $A$*  bezeichnet und durch das Symbol  $P(B|A)$  gekennzeichnet. Wir wollen diesen wichtigen Begriff zunächst an einem einfachen Urnenbeispiel näher erläutern.

#### ■ Beispiel

In einer Urne befinden sich drei weiße und drei schwarze Kugeln. Wir entnehmen nun der Urne ganz zufällig und nacheinander zwei Kugeln *ohne Zurücklegen* und interessieren uns dabei für die Wahrscheinlichkeit, bei der 2. Ziehung eine *weiße* Kugel zu erhalten.

Bei der Lösung dieser Aufgabe müssen wir *zwei* Fälle unterscheiden. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit hängt nämlich noch ganz wesentlich vom Ergebnis der 1. Ziehung ab, d. h. davon, ob zuerst eine weiße *oder* eine schwarze Kugel gezogen wurde.

**1. Fall:** Bei der 1. Ziehung wird eine *weiße* Kugel gezogen (Bild II-27)

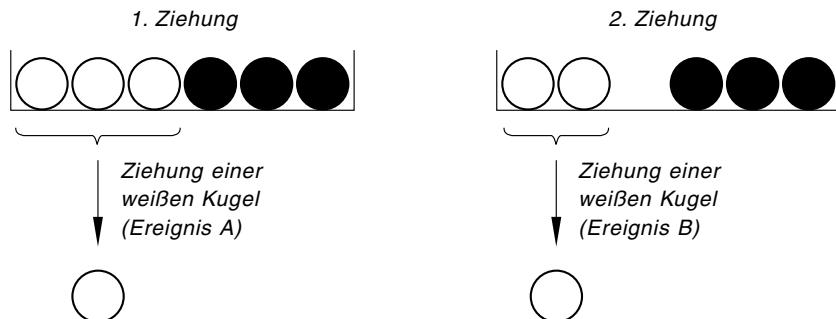


Bild II-27

Nach der 1. Ziehung befinden sich noch 2 weiße und 3 schwarze Kugeln in der Urne. Somit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, auch bei der 2. Ziehung eine *weiße* Kugel zu erhalten (Ereignis  $B$ ), durch  $P(B|A) = 2/5$  gegeben. Denn es gibt unter den  $m = 5$  möglichen Fällen genau  $g_1 = 2$  für die Ziehung einer *weißen* Kugel *günstige* Fälle.

**2. Fall:** Bei der 1. Ziehung wird eine *schwarze Kugel* gezogen (Bild II-28)

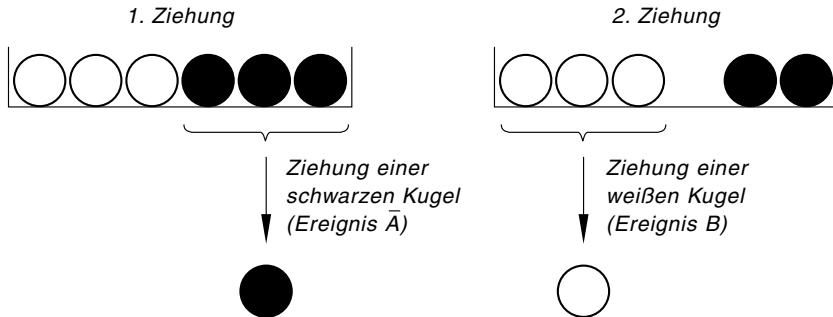


Bild II-28

Bei der 1. Ziehung wurde eine *schwarze Kugel* gezogen, d. h. es ist das zu  $A$  *komplementäre Ereignis*  $\bar{A}$  eingetreten. Dann befinden sich in der Urne noch 3 weiße und 2 schwarze Kugeln. Für die Ziehung einer *weißen Kugel* gibt es daher unter  $m = 5$  möglichen Fällen genau  $g_2 = 3$  günstige Fälle. Die Wahrscheinlichkeit, bei der 2. Ziehung eine *weiße Kugel* zu erhalten, ist daher  $P(B|\bar{A}) = 3/5$ .

**Folgerung:** Die gesuchte Wahrscheinlichkeit dafür, bei der 2. Ziehung eine *weiße Kugel* zu erhalten, ist noch abhängig vom Ausgang (Ergebnis) der 1. Ziehung. Es lassen sich daher in diesem Beispiel nur Wahrscheinlichkeiten unter bestimmten *Bedingungen* oder *Voraussetzungen* angeben. Diese Bedingungen lauten in diesem Beispiel: Bei der 1. Ziehung ist das Ereignis  $A$  (weiße Kugel) bzw. das zu  $A$  *komplementäre Ereignis*  $\bar{A}$  (schwarze Kugel) eingetreten. Es handelt sich hier also um Wahrscheinlichkeiten, die an bestimmte *Bedingungen* oder *Voraussetzungen* geknüpft sind und daher folgerichtig als *bedingte Wahrscheinlichkeiten* bezeichnet werden. ■

Wir definieren nun den Begriff der *bedingten Wahrscheinlichkeit* wie folgt:

**Definition:** Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses  $B$  unter der *Bedingung* oder *Voraussetzung*, dass das Ereignis  $A$  bereits eingetreten ist, heißt *bedingte Wahrscheinlichkeit* von  $B$  unter der Bedingung  $A$  und wird durch das Symbol  $P(B|A)$  gekennzeichnet. Sie wird durch die Gleichung

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (P(A) \neq 0) \quad (\text{II-56})$$

definiert.

## ■ Beispiel

Wir würfeln gleichzeitig mit *zwei* homogenen und unterscheidbaren Würfeln und interessieren uns dabei ausschließlich für Würfe mit der *Augensumme* 8. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem solchen Wurf *beide* Augenzahlen *gerade* sind?

*Lösung:* Wir betrachten zunächst die folgenden Ereignisse:

*A: Die Augensumme beträgt 8*

*B: Die Augenzahlen beider Würfel sind gerade*

Unser Interesse gilt dann dem Ereignis *B* unter der *Bedingung*, dass das Ereignis *A* bereits *eingetreten* ist. Wir suchen somit die *bedingte* Wahrscheinlichkeit  $P(B|A)$ .

**1. Lösungsweg** (ohne Verwendung der Definitionsformel (II-56)  
für die *bedingte* Wahrscheinlichkeit):

Die Ergebnismenge  $\Omega$  unseres Zufallsexperiments enthält genau 36 *gleichmögliche* Elementarereignisse (es handelt sich um ein *Laplace-Experiment*, siehe hierzu *Standardbeispiel 2* in Abschnitt 2.1)):

$$\Omega = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), \dots, (6; 5), (6; 6)\}$$

Das Ereignis *A* („*Augensumme 8*“) wird dabei durch die 5 Elementarereignisse

$$(2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3) \quad \text{und} \quad (6; 2)$$

realisiert. Von diesen 5 Elementen führen genau 3 zum Ereignis *B* („*gerade Augenzahlen*“), nämlich

$$(2; 6), (4; 4) \quad \text{und} \quad (6; 2)$$

Damit gibt es unter den  $m = 5$  möglichen Fällen mit der *Augensumme 8* genau  $g = 3$  *günstige* Fälle, in denen beide Augenzahlen *gerade* sind. Nach der *klassischen* Wahrscheinlichkeitsdefinition gilt dann:

$$P(B|A) = \frac{g}{m} = \frac{3}{5}$$

**2. Lösungsweg** (unter Verwendung der Definitionsformel (II-56)  
für die *bedingte* Wahrscheinlichkeit):

Wir bestimmen zunächst die benötigten Wahrscheinlichkeiten  $P(A)$  und  $P(A \cap B)$ .

Das Ereignis *A* („*Augensumme 8*“) wird nach den Ausführungen beim 1. Lösungsweg durch genau  $g_1 = 5$  der insgesamt  $m = 36$  *gleichmöglichen* Elementarereignisse realisiert. Daher ist nach der *klassischen* Wahrscheinlichkeitsdefinition

$$P(A) = \frac{g_1}{m} = \frac{5}{36}$$

Das Ereignis

$(A \cap B)$ : Die Augensumme beträgt 8 und beide Augenzahlen sind gerade

wird durch die 3 Elementarereignisse

$(2; 6), (4; 4)$  und  $(6; 2)$

realisiert. Daher gibt es unter den  $m = 36$  möglichen Fällen  $g_2 = 3$  für das Ereignis  $(A \cap B)$  günstige Fälle. Somit ist

$$P(A \cap B) = \frac{g_2}{m} = \frac{3}{36}$$

Aus der Definitionsformel (II-56) folgt dann für die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(B|A)$ :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{3}{5}$$
■

### 3.5 Multiplikationssatz

Wir lösen die Definitionsgleichung (II-56) der bedingten Wahrscheinlichkeit nach  $P(A \cap B)$  auf und erhalten daraus den folgenden *Multiplikationssatz* der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

#### Multiplikationssatz

Die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreten zweier Ereignisse  $A$  und  $B$  ist

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad (\text{II-57})$$

#### Anmerkungen

- (1) Die beiden Faktoren im Produkt der Gleichung (II-57) haben dabei folgende Bedeutung:

$P(A)$ : Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses  $A$  (*ohne jede Bedingung*)

$P(B|A)$ : Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses  $B$  unter der *Bedingung*, dass das Ereignis  $A$  bereits *eingetreten* ist (*bedingte Wahrscheinlichkeit von  $B$  unter der Bedingung  $A$* )

- (2) Wegen  $A \cap B = B \cap A$  gilt stets:

$$P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B) \quad (\text{II-58})$$

- (3) Der *Multiplikationssatz* lässt sich *verallgemeinern*. Er lautet beispielsweise für *drei* gleichzeitig eintretende Ereignisse  $A$ ,  $B$  und  $C$  wie folgt:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B) \quad (\text{II-59})$$

Die einzelnen Faktoren bedeuten dabei:

$P(A)$ : Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses  $A$  (*ohne jede Bedingung*)

$P(B|A)$ : Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses  $B$  unter der *Bedingung*, dass das Ereignis  $A$  bereits *eingetreten* ist

$P(C|A \cap B)$ : Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses  $C$  unter der *Bedingung*, dass die Ereignisse  $A$  und  $B$  bereits *eingetreten* sind

Die Wahrscheinlichkeiten  $P(B|A)$  und  $P(C|A \cap B)$  sind dabei *bedingte* Wahrscheinlichkeiten.

## ■ Beispiele

- (1) In einer Urne befinden sich 6 Kugeln, darunter 4 weiße und 2 schwarze Kugeln. Wir entnehmen der Urne nacheinander und ganz zufällig *zwei* Kugeln, wobei die jeweils gezogene Kugel *nicht* zurückgelegt wird (Ziehung *ohne Zurücklegen*). Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten wir in *beiden* Fällen eine *weiße* Kugel?

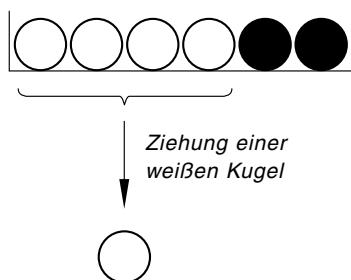
*Lösung*: Wir betrachten die beiden zufälligen Ereignisse

$A$ : Die bei der 1. Ziehung erhaltene Kugel ist weiß

$B$ : Die bei der 2. Ziehung erhaltene Kugel ist weiß

und bestimmen zunächst ihre Wahrscheinlichkeiten:

**1. Ziehung**: Ereignis  $A$  tritt ein (Bild II-29)



Anzahl der *günstigen* Fälle:  $g_1 = 4$

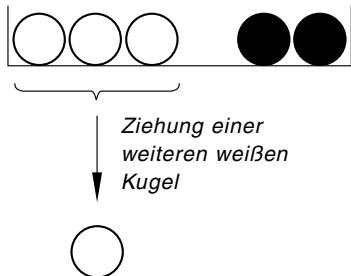
Anzahl der *möglichen* Fälle:  $m_1 = 6$

$$P(A) = \frac{g_1}{m_1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Bild II-29

**2. Ziehung:** Ereignis  $B$  tritt ein (Bild II-30)

Da das Ereignis  $A$  bereits *eingetreten* ist, befinden sich in der Urne nur noch 5 Kugeln, darunter 3 weiße und 2 schwarze Kugeln.



Anzahl der *günstigen* Fälle:  $g_2 = 3$

Anzahl der *möglichen* Fälle:  $m_2 = 5$

$$P(B|A) = \frac{g_2}{m_2} = \frac{3}{5}$$

**Bild II-30**

Uns interessiert die Wahrscheinlichkeit  $P(A \cap B)$  für das *gleichzeitige* Eintreten der Ereignisse  $A$  und  $B$ . Aus dem *Multiplikationssatz* erhalten wir dann den folgenden Wert:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Wir erwarten daher (wenn wir unser Zufallsexperiment nur *genügend oft* wiederholen), dass wir in 40 % aller Fälle zwei *weiße* Kugeln ziehen.

- (2) Ein Händler erhält eine Lieferung von 20 Leuchtstoffröhren, unter denen sich (was er jedoch nicht weiß) 3 *defekte* Röhren befinden. Bei der Warenübergabe überprüft er *stichprobenartig* die Ware, indem er der Lieferung *dreimal* nacheinander rein zufällig eine Röhre entnimmt. Wie in der Praxis allgemein üblich, werden dabei die gezogenen Röhren *nicht* zurückgelegt (Ziehung *ohne Zurücklegen*). Uns interessiert die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler *ausschließlich brauchbare* Röhren zieht.

Wir lösen dieses Problem wie folgt:

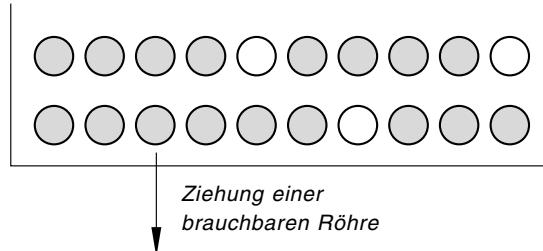
Das Zufallsexperiment „Ziehung einer Leuchtstoffröhre aus der angelieferten Ware“ ist ein *Laplace-Experiment*. Die Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden, ist nämlich für *jede* der (brauchbaren oder defekten) Röhren *gleich*. Unser Interesse gilt jetzt den folgenden Ereignissen:

$A_i$ : Bei der  $i$ -ten Ziehung erhalten wir eine *brauchbare Leuchtstoffröhre*

( $i = 1, 2, 3$ ). Dann wird die Ziehung *dreier* brauchbarer Röhren durch das Ereignis  $A_1 \cap A_2 \cap A_3$  beschrieben, dessen Wahrscheinlichkeit  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$  wir nun schrittweise wie folgt bestimmen:

**1. Ziehung:** Das Ereignis  $A_1$  tritt ein (Bild II-31)

Symbole: brauchbare Röhre      defekte Röhren



Karton mit 20 Röhren

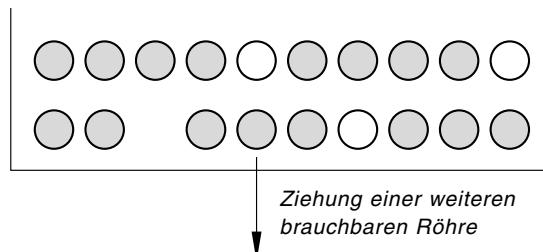
$$m_1 = 20 \text{ Röhren}$$

$$g_1 = 17 \text{ brauchbare Röhren}$$

$$P(A_1) = \frac{g_1}{m_1} = \frac{17}{20}$$

**Bild II-31****2. Ziehung:** Das Ereignis  $A_2$  tritt ein (Bild II-32)

Das Ereignis  $A_1$  ist bereits *eingetreten*. Daher enthält der Karton nur noch 19 Röhren, darunter 16 brauchbare.



Karton mit 19 Röhren

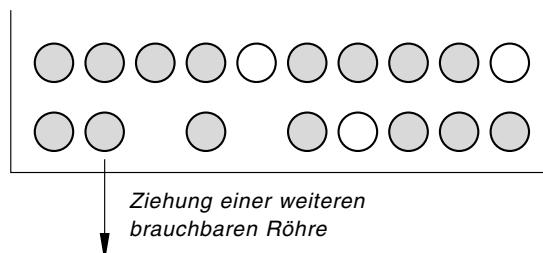
$$m_2 = 19 \text{ Röhren}$$

$$g_2 = 16 \text{ brauchbare Röhren}$$

$$P(A_2 | A_1) = \frac{g_2}{m_2} = \frac{16}{19}$$

**Bild II-32****3. Ziehung:** Das Ereignis  $A_3$  tritt ein (Bild II-33)

Die Ereignisse  $A_1$  und  $A_2$ , d. h. das Ereignis  $A_1 \cap A_2$  sind bereits *eingetreten*. Im Karton befinden sich damit nur noch 18 Röhren, darunter 15 brauchbare.



Karton mit 18 Röhren

$$m_3 = 18 \text{ Röhren}$$

$$g_3 = 15 \text{ brauchbare Röhren}$$

$$P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{g_3}{m_3} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

**Bild II-33**

Die Wahrscheinlichkeit dafür, eine Stichprobe mit drei *einwandfreien* Leuchtmittelfröhren zu erhalten, berechnet sich dann nach dem *Multiplikationssatz* (II-59) zu

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \\ &= \frac{17}{20} \cdot \frac{16}{19} \cdot \frac{5}{6} = \frac{17 \cdot 2^4 \cdot 5}{2^2 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{17 \cdot 2}{19 \cdot 3} = \frac{34}{57} = \\ &= 0,60 = 60\% \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 3.6 Stochastisch unabhängige Ereignisse

In Abschnitt 3.4 haben wir gesehen, dass die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $B$  noch vom Eintreten eines weiteren Ereignisses  $A$  abhängen kann. Dies führte uns zu dem Begriff der *bedingten* Wahrscheinlichkeit  $P(B|A)$ .

In vielen Fällen jedoch ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses  $B$  völlig *unabhängig* davon, ob das Ereignis  $A$  eingetreten ist oder nicht, und umgekehrt. In diesem Fall gelten somit die folgenden Beziehungen:

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{und} \quad P(B|A) = P(B) \quad (\text{II-60})$$

Aus dem *Multiplikationssatz* (II-57) folgt dann unmittelbar:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B) \quad (\text{II-61})$$

Man bezeichnet solche Ereignisse als *stochastisch unabhängig*. Die Aussagen der Gleichungen (II-60) und (II-61) sind dabei völlig *gleichwertig*. Wir definieren daher den außerordentlich wichtigen Begriff der *stochastischen Unabhängigkeit* zweier Ereignisse  $A$  und  $B$  wie folgt:

**Definition:** Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  heißen *stochastisch unabhängig*, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (\text{II-62})$$

gilt.

#### Anmerkungen

- (1) Die Definitionsgleichung (II-62) für die *stochastisch unabhängigen* Ereignisse  $A$  und  $B$  ist zugleich der *Multiplikationssatz* für diesen Sonderfall. Mit anderen Worten: Ist von zwei Ereignissen  $A$  und  $B$  bekannt, dass sie *stochastisch unabhängig* sind, so besitzt der *Multiplikationssatz* (II-57) die *spezielle* Form

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (\text{II-63})$$

- (2) Stochastisch unabhängige Ereignisse werden häufig auch als *statistisch unabhängige* Ereignisse bezeichnet.

- (3) Die *stochastische Unabhängigkeit* zweier Ereignisse ist immer *wechselseitig*. Der Definitionsformel (II-62) *gleichwertig* sind die beiden Beziehungen

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{und} \quad P(B|A) = P(B) \quad (\text{II-64})$$

- (4) Der Nachweis der *stochastischen Unabhängigkeit* zweier Ereignisse  $A$  und  $B$  anhand der Bedingung (II-62) ist in der Praxis oft sehr *mühsam*. In vielen Fällen jedoch lässt sich die Unabhängigkeit *logisch* begründen (siehe hierzu das nachfolgende 1. Beispiel).
- (5) *Drei Ereignisse  $A$ ,  $B$  und  $C$  sind stochastisch unabhängig*, wenn die Wahrscheinlichkeiten  $P(A)$ ,  $P(B)$  und  $P(C)$  nicht davon abhängen, ob die übrigen Ereignisse eingetreten sind oder nicht. In diesem Fall lautet der *Multiplikationssatz*:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \quad (\text{II-65})$$

## ■ Beispiele

- (1) Eine homogene Münze wird *dreimal* geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten wir in diesem Zufallsexperiment zunächst zweimal „Zahl“ und dann (im 3. Wurf) „Wappen“?

*Lösung:* Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

$A$ : „Zahl“ beim 1. Wurf

$B$ : „Zahl“ beim 2. Wurf

$C$ : „Wappen“ beim 3. Wurf

Sie sind *stochastisch unabhängig*. Denn das Ergebnis eines bestimmten Wurfs ist vollkommen *unabhängig* vom Ergebnis des *vorangegangenen* Wurfs und beeinflusst auch in keiner Weise den Ausgang des *nachfolgenden* Münzwurfs. Die drei Ereignisse  $A$ ,  $B$  und  $C$  treten ferner mit der gleichen Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

ein. Unser Interesse gilt nun dem zusammengesetzten Ereignis

$(A \cap B \cap C)$ : *Zunächst zweimal „Zahl“, dann „Wappen“ beim dreimaligen Wurf einer Münze*

Wegen der *stochastischen Unabhängigkeit* der Ereignisse  $A$ ,  $B$  und  $C$  erhalten wir für die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $P(A \cap B \cap C)$  nach dem *Multiplikationssatz* (II-65) den folgenden Wert:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Wir dürfen daher die folgende *Erwartung* aussprechen: Wiederholen wir das Zufallsexperiment „*Dreimaliger Wurf einer Münze*“ genügend oft, so wird im *Mittel* in jedem 8. Experiment zunächst zweimal „Zahl“ und dann „Wappen“ erscheinen.

- (2) Zwei Schützen versuchen in einem Wettkampf eine Zielscheibe zu treffen. Aufgrund der Trainingsergebnisse schätzt man, dass der 1. Schütze mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\frac{3}{4}$  und der 2. Schütze mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\frac{2}{3}$  die Scheibe trifft. Im Wettkampf schießt nun jeder *einmal* auf die Scheibe. Wie groß ist dabei die Wahrscheinlichkeit, dass *genau einer* von ihnen die Scheibe trifft?

*Lösung:* Wir betrachten die Ereignisse

A: *Der 1. Schütze trifft*

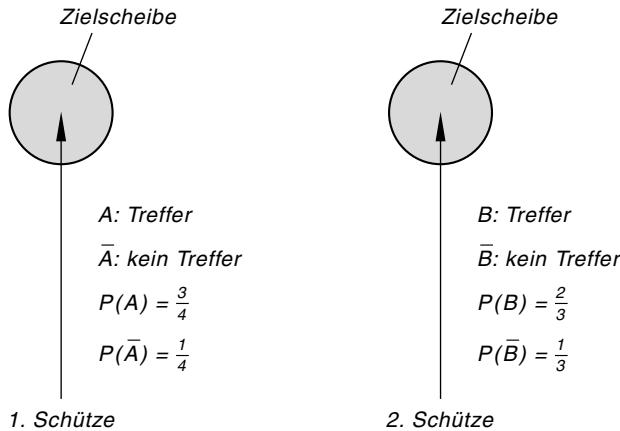
B: *Der 2. Schütze trifft*

sowie die dazu *komplementären* Ereignisse

$\bar{A}$ : *Der 1. Schütze trifft nicht*

$\bar{B}$ : *Der 2. Schütze trifft nicht*

anhand von Bild II-34:



**Bild II-34**

Hieraus bilden wir die zusammengesetzten Ereignisse

$(A \cap \bar{B})$ : *Nur der 1. Schütze trifft*

und

$(\bar{A} \cap B)$ : *Nur der 2. Schütze trifft*

Die Zielscheibe wird daher genau dann *einmal* getroffen, wenn das Ereignis

$$C = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

eintritt. In diesem Fall trifft nämlich *entweder* der 1. Schütze *oder* der 2. Schütze, da sich die Ereignisse  $A \cap \bar{B}$  (nur der 1. Schütze trifft) und  $\bar{A} \cap B$  (nur der 2. Schütze trifft)  *gegenseitig ausschließen*. Nach dem *Additionsaxiom* (II-43) gilt dann:

$$P(C) = P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$$

Da  $A$  und  $\bar{B}$  bzw.  $\bar{A}$  und  $B$  *stochastisch unabhängige* Ereignisse sind (das Ergebnis des einen Schützen hat *keinerlei* Einfluss auf das Ergebnis des anderen Schützen), folgt weiter

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) \quad \text{und} \quad P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B)$$

und somit

$$P(C) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B)$$

Nach Voraussetzung ist  $P(A) = 3/4$ ,  $P(B) = 2/3$  und daher  $P(\bar{A}) = 1/4$ ,  $P(\bar{B}) = 1/3$  (siehe hierzu auch Bild II-34). Damit erhalten wir für das Ereignis  $C$  („*nur einer der beiden Schützen trifft*“) die folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P(C) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3+2}{12} = \frac{5}{12}$$

Wir interpretieren dieses Ergebnis wie folgt:

Wenn die beiden Schützen 120-mal gegeneinander antreten, dann wird die Zielscheibe in *ungefähr* 50 Fällen von genau einem der beiden Schützen getroffen.

■

### 3.7 Ereignisbäume

Häufig stößt man auf komplizierte *Zufallsprozesse*, die aus *mehreren* nacheinander ablaufenden Zufallsexperimenten bestehen. Ein solcher Prozess besteht also aus einer (endlichen) Folge von Zufallsexperimenten. Es handelt sich um ein sog. *mehrstufiges* Zufallsexperiment.

#### ■ Beispiel

In einer Urne befinden sich 6 Kugeln, darunter 2 weiße und 4 schwarze. Der Urne werden nacheinander 2 Kugeln entnommen, die gezogenen Kugeln jedoch *nicht* zurückgelegt (Ziehung *ohne Zurücklegen*). Es handelt sich hierbei um einen *Zufallsprozess*, bei dem nacheinander *zwei* einfache Zufallsexperimente ablaufen (*2-stufiges* Zufallsexperiment, siehe Bild II-35).

- 1. Zufallsexperiment (Stufe 1):** Ziehung einer ersten Kugel aus den vorhandenen 6 Kugeln
- 2. Zufallsexperiment (Stufe 2):** Ziehung einer weiteren Kugel aus den verbliebenen 5 Kugeln

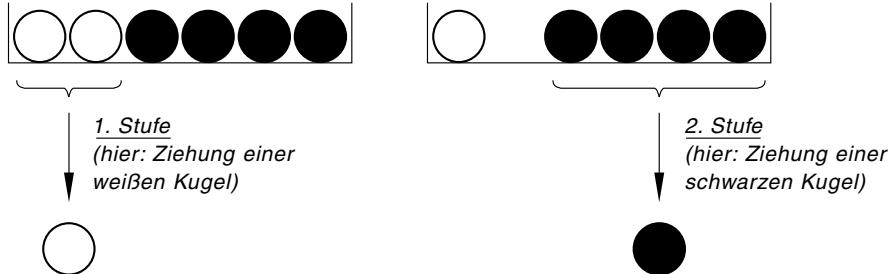


Bild II-35 Zweistufiges Zufallsexperiment ■

Ein äußerst anschauliches Hilfsmittel bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei *mehrstufigen* Zufallsexperimenten ist der sog. *Ereignisbaum* (häufig auch als *Baumdiagramm* bezeichnet). Er besteht aus einer *Wurzel* (Ausgangspunkt), mehreren *Verzweigungspunkten* und einer Vielzahl von *Zweigen*. In Bild II-36 ist ein solcher Ereignisbaum für ein 2-stufiges Zufallsexperiment dargestellt. Die Verzweigungspunkte  $A_1$  und  $A_2$  charakterisieren dabei die möglichen *Zwischenergebnisse* nach der 1. Stufe, die von diesen Verzweigungspunkten ausgehenden Zweige führen zu den jeweils möglichen Ergebnissen der nachfolgenden 2. Stufe (hier sind es die möglichen *Endergebnisse*  $B_1$  bis  $B_5$ ).

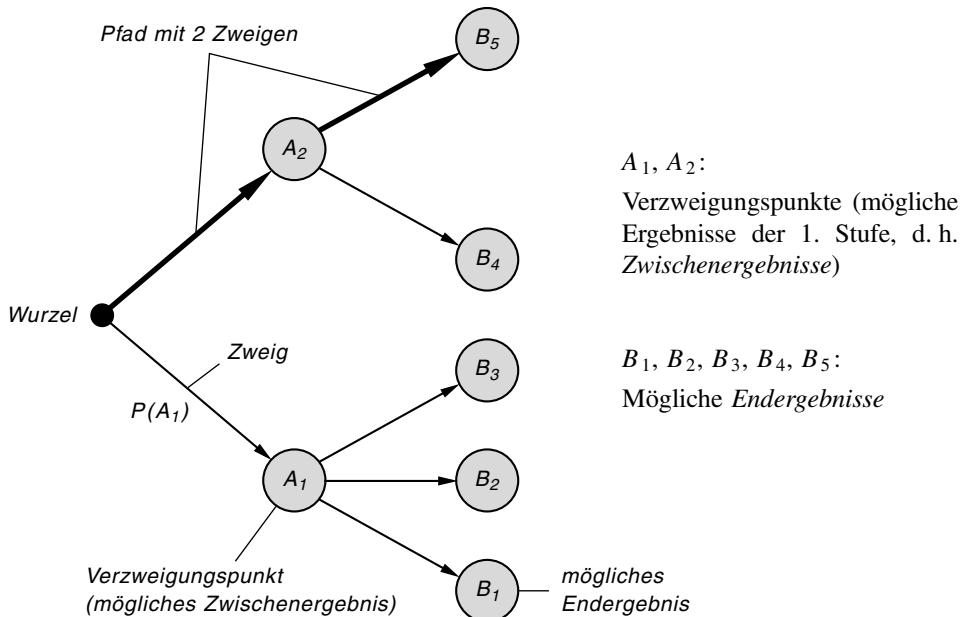


Bild II-36 Ereignisbaum oder Baumdiagramm für ein *mehrstufiges* Zufallsexperiment

Die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ereignisses (Ergebnisses) schreibt man an den betreffenden Zweig. So ist z. B.  $P(A_1)$  die Wahrscheinlichkeit des *Zwischenergebnisses* (Ereignisses)  $A_1$ . Ein mögliches *Endergebnis* erreicht man dann (immer von der Wurzel ausgehend) längs eines bestimmten *Pfades*. Dieser besteht meist aus mehreren *Zweigen*, wie z. B. der in Bild II-36 *dick* gekennzeichnete Pfad, der von der Wurzel über das Zwischenergebnis  $A_2$  zum Endergebnis  $B_5$  führt.

Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Endergebnisses gelten dann die folgenden *Regeln*:

### **Regeln für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten mit Hilfe des Ereignisbaumes (sog. Pfadregeln)**

Bei einem in *mehreren* Stufen ablaufenden Zufallsexperiment lässt sich jedes mögliche Endergebnis durch einen bestimmten *Pfad* im zugehörigen *Ereignisbaum* anschaulich darstellen (siehe Bild II-36). Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Endergebnisse erfolgt dabei mit Hilfe der folgenden *Regeln*:

- (1) Die Wahrscheinlichkeiten längs eines *Pfades* werden miteinander *multipliziert*.
- (2) Führen *mehrere* Pfade zum *gleichen* Endergebnis, so *addieren* sich ihre Wahrscheinlichkeiten.

#### *Anmerkung*

Bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten für die *Zweige* des Ereignisbaumes ist zu beachten, dass von der 2. Stufe ab alle *Zwischenergebnisse* (Ereignisse) noch vom Ausgang der *vorangegangenen* Stufe abhängen. Es handelt sich daher um *bedingte* Wahrscheinlichkeiten. Bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten längs eines bestimmten Pfades ist demnach der *Multiplikationssatz* zu verwenden.

**Beispiel:** Das Endergebnis  $B_5$  im Ereignisbaum von Bild II-36 wird längs des *dick* gezeichneten Pfades erreicht. Daher gilt:

$$P(B_5) = P(A_2) \cdot P(B_5 | A_2)$$

#### ■ **Beispiel**

In einer Urne befinden sich 6 Kugeln, darunter 2 weiße und 4 schwarze Kugeln. Wir entnehmen nacheinander ganz zufällig *zwei* Kugeln, legen jedoch die jeweils gezogene Kugel *nicht* in die Urne zurück (Ziehung *ohne* Zurücklegen). Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten wir

- a) zwei *gleichfarbige*,
- b) zwei *verschiedenfarbige*

Kugeln?

*Lösung:* Dieser Zufallsprozess besteht aus *zwei* nacheinander ablaufenden Zufallsexperimenten (*2-stufiges* Zufallsexperiment).

### 1. Stufe: Ziehung einer ersten Kugel

Eine *weiße* Kugel (Ereignis  $W$ ) wird mit der Wahrscheinlichkeit  $P(W) = 2/6 = 1/3$ , eine *schwarze* Kugel (Ereignis  $S$ ) mit der Wahrscheinlichkeit  $P(S) = 4/6 = 2/3$  gezogen (Bild II-37).

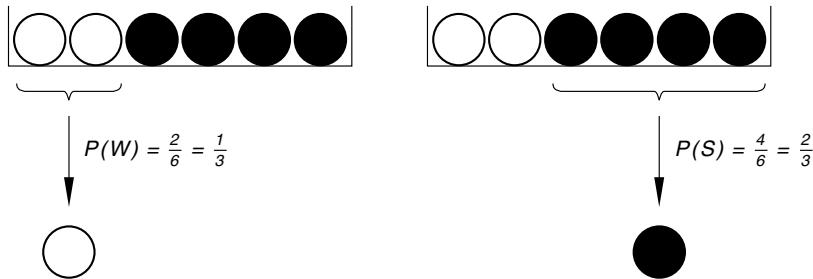


Bild II-37

Wir zeichnen daher, ausgehend von der Wurzel  $O$ , zwei Zweige, die den beiden möglichen Zwischenergebnissen  $W$  und  $S$  entsprechen und versehen diese Zweige mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten (Bild II-38).

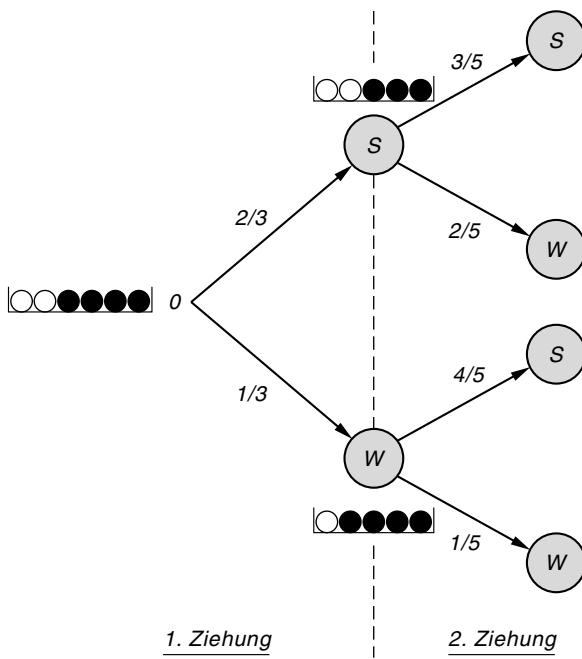


Bild II-38

Ereignisbaum für das beschriebene Urnenbeispiel

## 2. Stufe: Ziehung einer zweiten Kugel

Nach der 1. Ziehung befinden sich noch 5 Kugeln in der Urne, entweder 1 weiße und 4 schwarze oder 2 weiße und 3 schwarze, je nachdem, ob bei der 1. Ziehung eine weiße oder eine schwarze Kugel gezogen wurde. Die beiden Fälle sind im Ereignisbaum durch die beiden Verzweigungspunkte  $W$  und  $S$  dargestellt.

Wir bestimmen jetzt die Wahrscheinlichkeiten für die 2. Ziehung.

### Verzweigungspunkt $W$

In der Urne befinden sich jetzt 1 weiße und 4 schwarze Kugeln. Daher ergeben sich in der 2. Stufe die Wahrscheinlichkeiten  $P(W|W) = 1/5$  für die Ziehung einer weißen Kugel und  $P(S|W) = 4/5$  für die Ziehung einer schwarzen Kugel (siehe Bild II-39)<sup>15)</sup>.

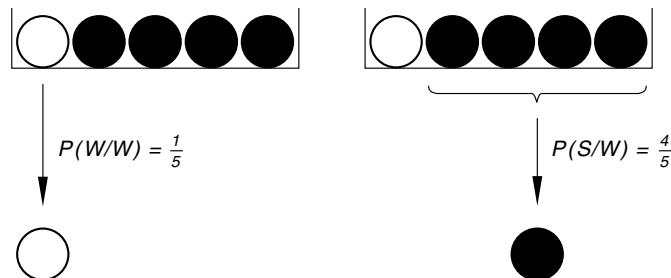


Bild II-39

Im Ereignisbaum (Bild II-38) zeichnen wir vom Verzweigungspunkt  $W$  aus zwei weitere Zweige. Sie führen zu den möglichen Endergebnissen  $W$  und  $S$ .

### Verzweigungspunkt $S$

In diesem Fall befinden sich 2 weiße und 3 schwarze Kugeln in der Urne. Daher ergeben sich in der 2. Stufe die Wahrscheinlichkeiten  $P(W|S) = 2/5$  für die Ziehung einer weißen Kugel und  $P(S|S) = 3/5$  für die Ziehung einer schwarzen Kugel (Bild II-40).

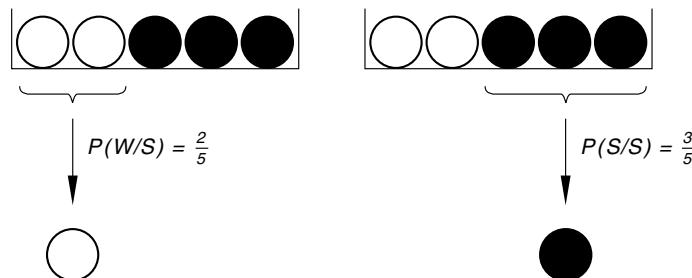


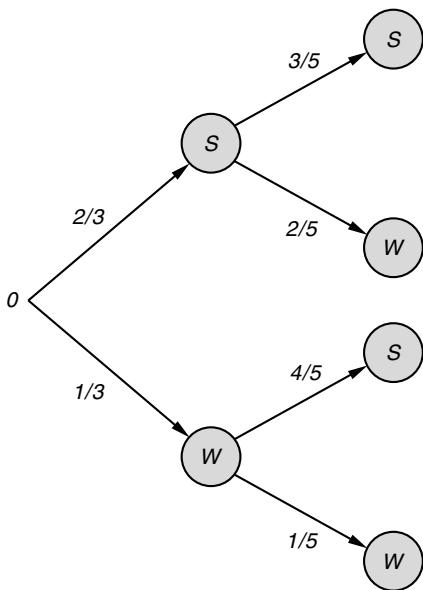
Bild II-40

<sup>15)</sup> Man beachte, dass es sich hier um bedingte Wahrscheinlichkeiten handelt.

Im Ereignisbaum (Bild II-38) sind daher vom Verzweigungspunkt  $S$  aus zwei Zweige einzuziehen, die zu den möglichen Endergebnissen  $W$  und  $S$  führen.

### Vollständiger Ereignisbaum (Baumdiagramm)

Der *vollständige* Ereignisbaum besitzt damit die in Bild II-41 dargestellte Struktur:



**Bild II-41**

Vollständiger Ereignisbaum für das beschriebene Urnenbeispiel

Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten für die Ziehung zweier *gleichfarbiger* bzw. *verschiedenfarbiger* Kugeln lassen sich dann aus diesem Baumdiagramm wie folgt leicht bestimmen:

- a) *Gleichfarbige* Kugeln erhalten wir längs der beiden Pfade  $OWW$  und  $OSS$  (Bild II-41). Somit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, zwei *gleichfarbige* Kugeln zu ziehen:

$$P_1 = P(OWW) + P(OSS) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1+6}{15} = \frac{7}{15}$$

- b) *Verschiedenfarbige* Kugeln, d. h. je eine weiße und schwarze Kugel erhalten wir längs der beiden Pfade  $OWS$  und  $OSW$  (Bild II-41). Daher ist

$$P_2 = P(OWS) + P(OSW) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4+4}{15} = \frac{8}{15}$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, zwei *verschiedenfarbige* Kugeln zu ziehen.

■

### 3.8 Totale Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und Bayessche Formel

Wir wollen den wichtigen Begriff der *totalen* Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zunächst an einem einfachen Urnenbeispiel erläutern.

## Urnenebeispiel

Für ein Zufallsexperiment stehen drei Urnen  $A$ ,  $B$  und  $C$  zur Verfügung, die wie folgt weiße und schwarze Kugeln enthalten (Bild II-42):



Zunächst wählen wir rein zufällig eine der drei Urnen aus und entnehmen ihr dann (wiederum zufällig) eine Kugel. Dabei interessieren uns die folgenden Fragestellungen:

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dabei eine *schwarze* Kugel zu ziehen?
  2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene schwarze Kugel aus der *Urne A* stammt?

Bei der *ersten* angeschnittenen Fragestellung interessieren wir uns also für das Ereignis

*S: Ziehung einer schwarzen Kugel*

und insbesondere für die Wahrscheinlichkeit  $P(S)$  dieses Ereignisses. Bei der zweiten Frage interessiert uns die *bedingte* Wahrscheinlichkeit  $P(A|S)$ . Sie beschreibt unter der Voraussetzung, dass eine schwarze Kugel gezogen wurde, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Kugel aus der Urne A stammt.

Wir sind nun in der Lage, beide Probleme mit Hilfe des *Ereignisbaumes* zu lösen, wobei wir nur diejenigen Pfade einzeichnen, die zum Ereignis  $S$  führen. Bild II-43 zeigt den zu unserem 2-stufigen Urnenexperiment gehörigen *unvollständigen Ereignisbaum*<sup>16)</sup>.

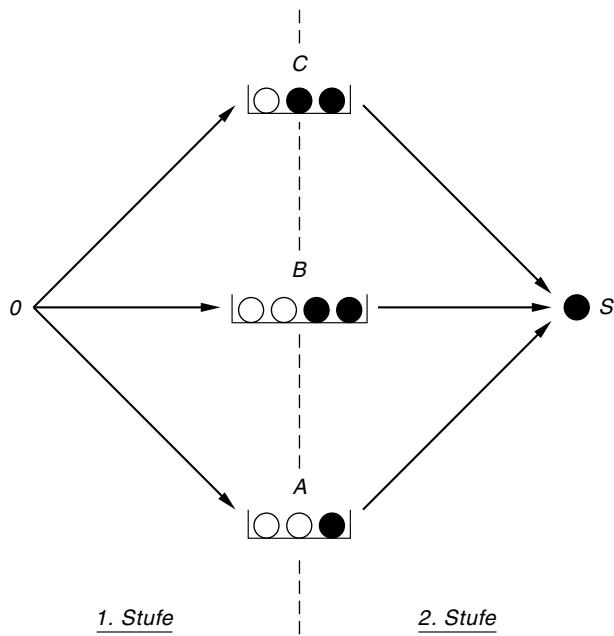
Wir bestimmen nun die benötigten Wahrscheinlichkeiten für die Zweige der 1. und 2. Stufe.

### **1. Stufe:** Zufällige Auswahl einer Urne

Die Wahrscheinlichkeit dafür, ausgewählt zu werden, ist für alle drei Urnen *gleich*. Somit gilt:

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

<sup>16)</sup> In der 2. Stufe werden nur die zum interessierenden Ereignis  $S$  führenden Pfade eingezeichnet, alle übrigen Pfade spielen für die Lösung des Problems *keine* Rolle und werden daher weggelassen. Der Ereignisbaum ist daher in diesem Sinne *unvollständig*.

**Bild II-43**

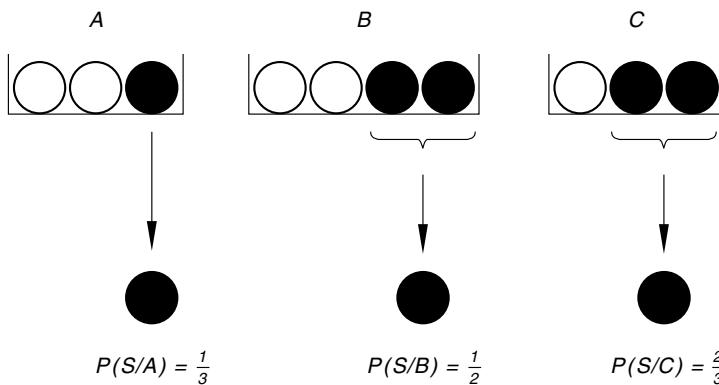
Unvollständiger Ereignisbaum  
für das beschriebene 2-stufige  
Urneneperiment

### 2. Stufe: Ziehung einer schwarzen Kugel (Bild II-44)

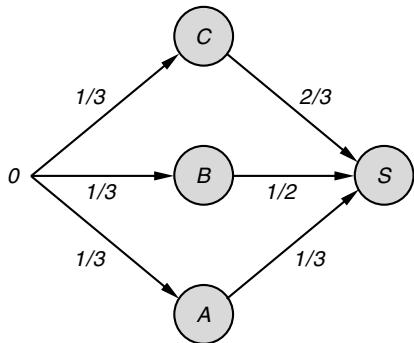
Die Wahrscheinlichkeit für die Ziehung einer *schwarzen* Kugel beträgt für die drei Urnen A, B und C der Reihe nach

$$P(S|A) = \frac{1}{3}, \quad P(S|B) = \frac{1}{2}, \quad P(S|C) = \frac{2}{3}$$

(siehe Bild II-44).

**Bild II-44**

Der Ereignisbaum erhält damit die in Bild II-45 skizzierte endgültige Gestalt.



**Bild II-45**

Endgültige Struktur des Ereignisbaumes

Das Ereignis  $S$  (Ziehung einer schwarzen Kugel) lässt sich dabei auf *drei* verschiedenen Pfaden  $OAS$ ,  $OBS$  und  $OCS$  erreichen. Für diese Pfade erhalten wir unmittelbar aus dem Ereignisbaum unter Verwendung der bekannten Pfadregeln die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(OAS) = P(A) \cdot P(S|A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$P(OBS) = P(B) \cdot P(S|B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

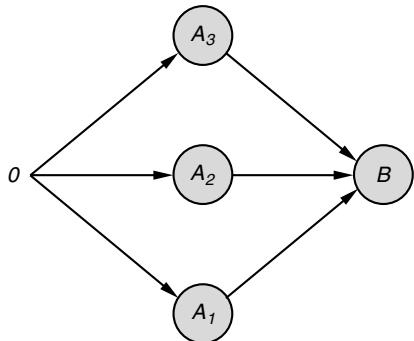
$$P(OCS) = P(C) \cdot P(S|C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, auf *irgendeinem* der drei Pfade das Ereignis  $S$  zu erreichen, wird als *totale* Wahrscheinlichkeit  $P(S)$  bezeichnet. Wir erhalten somit durch abermalige Anwendung der bekannten Regeln:

$$P(S) = P(OAS) + P(OBS) + P(OCS) = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{2}{9} = \frac{2+3+4}{18} = \frac{1}{2}$$

### Totale Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

Im Urnenbeispiel hatte der *unvollständige Ereignisbaum* die folgende Struktur (Bild II-46):



**Bild II-46**

Unvollständiger Ereignisbaum zum Urnenbeispiel

Die Ereignisse  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$  entsprechen dabei den drei *Urnen* und  $B$  repräsentiert das Ereignis „*Ziehung einer schwarzen Kugel*“. Das Ereignis  $B$  tritt dabei nur in *Verbindung* mit einem der drei sich gegenseitig ausschließenden Ereignisse  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$  auf, d. h. das Ereignis  $B$  wird nur über die *Zwischenergebnisse*  $A_1$ ,  $A_2$  oder  $A_3$  erreicht. Die *totale* Wahrscheinlichkeit  $P(B)$  für das Eintreten des Ereignisses  $B$  erhält man dann, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs der drei Pfade  $OA_1B$ ,  $OA_2B$  und  $OA_3B$  addiert:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(OA_1B) + P(OA_2B) + P(OA_3B) = \\ &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) \end{aligned} \quad (\text{II-66})$$

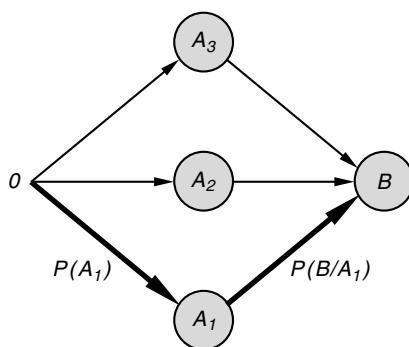
Durch Anwendung des *Multiplikationssatzes* auf die drei Summanden der rechten Seite erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) = \\ &= \sum_{i=1}^3 P(A_i) \cdot P(B|A_i) \end{aligned} \quad (\text{II-67})$$

Dies ist die Berechnungsformel für die *totale* Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $B$  bei einem *2-stufigen* Zufallsexperiment mit dem in Bild II-46 dargestellten Ereignisbaum.

### Bayessche Formel

Aus dem (unvollständigen) Ereignisbaum in Bild II-46 entnehmen wir, dass das Ereignis  $B$  längs *drei* verschiedener Pfade über die *Zwischenergebnisse*  $A_1$ ,  $A_2$  oder  $A_3$  erreicht werden kann. Wir interessieren uns nun dafür, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass das *eingetretene* Ereignis  $B$  mit dem *Zwischenergebnis* (Ereignis)  $A_1$  verbunden war. Mit anderen Worten: Unter der *Voraussetzung*, dass das Ereignis  $B$  bereits eingetreten ist, interessiert uns die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Ereignis auf dem Pfade über die *Zwischenstation*  $A_1$  erreicht wurde. Wir suchen somit die *bedingte* Wahrscheinlichkeit  $P(A_1|B)$ . Diese erhalten wir, indem wir die Wahrscheinlichkeit  $P(OA_1B)$  längs des *einzigen* „günstigen“ Pades  $OA_1B$  ins Verhältnis setzen zur *totalen* Wahrscheinlichkeit  $P(B)$ , die ja *sämtliche* nach  $B$  führenden Pfade berücksichtigt (Bild II-47; der *günstige* Pfad  $OA_1B$  ist dort *dick* eingezeichnet):



**Bild II-47**

Das Ereignis  $B$  ist über verschiedene „Zwischenstationen“ (hier:  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$ ) erreichbar

Somit gilt:

$$P(A_1 | B) = \frac{P(OA_1 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1) \cdot P(B | A_1)}{\sum_{i=1}^3 P(A_i) \cdot P(B | A_i)} \quad (\text{II-68})$$

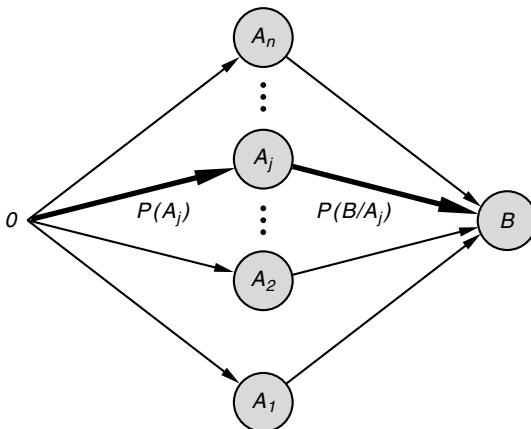
Analoge Formeln ergeben sich für die beiden übrigen Pfade. Sie führen zu der sog. *Bayesschen Formel*

$$P(A_j | B) = \frac{P(OA_j B)}{P(B)} = \frac{P(A_j) \cdot P(B | A_j)}{\sum_{i=1}^3 P(A_i) \cdot P(B | A_i)} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (\text{II-69})$$

Wir fassen diese wichtigen Ergebnisse in allgemeiner Form zusammen.

### Totale Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (Bayessche Formel)

Ein Ereignis  $B$  trete stets in Verbindung mit genau einem der sich *paarweise ausschließenden* Ereignisse  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) auf, d. h. die Ereignisse  $A_i$  sind die möglichen *Zwischenstationen* auf dem Wege zum Ereignis  $B$  (siehe hierzu den Ereignisbaum in Bild II-48).



**Bild II-48**

Das Ereignis  $B$  ist auf verschiedenen Pfaden über die Zwischenstationen  $A_i$  erreichbar ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

Dann gilt:

1. Die *totale Wahrscheinlichkeit* für das Eintreten des Ereignisses  $B$  ist

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B | A_i) \quad (\text{II-70})$$

Der Summand  $P(A_i) \cdot P(B|A_i)$  ist dabei die Wahrscheinlichkeit dafür, das Ereignis  $B$  längs des Pfades  $OA_iB$ , d. h. über die Zwischenstation  $A_i$  zu erreichen ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

**Regel:** Die *totale Wahrscheinlichkeit*  $P(B)$  für das Eintreten des Ereignisses  $B$  erhält man aus dem Ereignisbaum, indem man über die Wahrscheinlichkeiten aller nach  $B$  führenden Pfade *summiert*.

2. Unter der *Voraussetzung*, dass das Ereignis  $B$  bereits eingetreten ist, gilt dann für die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Ereignis auf dem Pfade  $OA_jB$  über die Zwischenstation  $A_j$  erreicht wurde, die sog. *Bayessche Formel*:

$$P(A_j|B) = \frac{P(OA_jB)}{P(B)} = \frac{P(A_j) \cdot P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)} \quad (\text{II-71})$$

Der Pfad  $OA_jB$  ist in Bild II-48 *dick* eingezeichnet.

**Regel:** Die *bedingte Wahrscheinlichkeit*  $P(A_j|B)$  erhält man aus dem Ereignisbaum, indem man die Wahrscheinlichkeit längs des *einzigen günstigen* Pfaes  $OA_jB$  bestimmt und diese dann durch die *totale Wahrscheinlichkeit*  $P(B)$  dividiert, die *sämtliche* nach  $B$  führenden Pfade berücksichtigt.

## ■ Beispiel

In einem Werk werden auf vier Maschinen  $M_1, M_2, M_3$  und  $M_4$  Glühbirnen hergestellt. Ihr Anteil an der Gesamtproduktion beträgt der Reihe nach 10 %, 20 %, 30 % und 40 %. Die *Ausschussanteile* der Maschinen sind der Reihe nach 2 %, 1 %, 4 % und 2 %. Aus der Gesamtproduktion wird zufällig *eine* Glühbirne herausgegriffen und auf ihre Funktionstüchtigkeit hin überprüft.

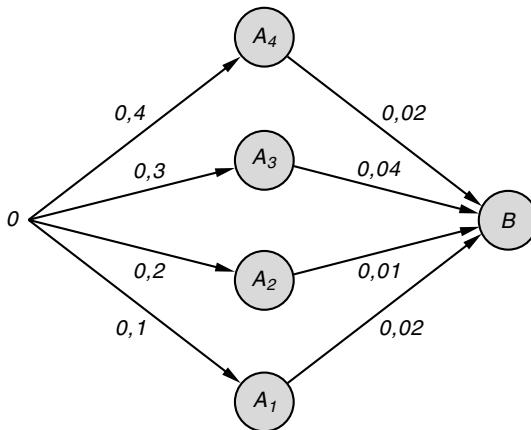
- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man dabei eine *funktionsuntüchtige*, d. h. *defekte* Glühbirne?
- b) *Vorausgesetzt*, die entnommene Glühbirne ist *defekt*. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese auf der Maschine  $M_3$  produziert wurde?

*Lösung:* Wir führen zunächst die folgenden Ereignisse ein:

$A_i$ : *Die aus der Gesamtproduktion zufällig entnommene Glühbirne wurde auf der Maschine  $M_i$  produziert ( $i = 1, 2, 3, 4$ )*

$B$ : *Die der Gesamtproduktion entnommene Glühbirne ist defekt*

Das Ereignis  $B$  ist dann über eine der vier Zwischenstationen  $A_1, A_2, A_3$  und  $A_4$  zu erreichen. Wir erhalten den folgenden *unvollständigen Ereignisbaum* (Bild II-49):

**Bild II-49**

Unvollständiger Ereignisbaum  
für das beschriebene Beispiel

Zunächst berechnen wir unter Verwendung der aus Abschnitt 3.7 bekannten *Pfadregeln* die Wahrscheinlichkeiten längs der vier zum Ereignis  $B$  führenden Pfade:

$$P(OA_1B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) = 0,1 \cdot 0,02 = 0,002$$

$$P(OA_2B) = P(A_2) \cdot P(B|A_2) = 0,2 \cdot 0,01 = 0,002$$

$$P(OA_3B) = P(A_3) \cdot P(B|A_3) = 0,3 \cdot 0,04 = 0,012$$

$$P(OA_4B) = P(A_4) \cdot P(B|A_4) = 0,4 \cdot 0,02 = 0,008$$

Zu a): Gesucht ist die *totale Wahrscheinlichkeit* für das Eintreten des Ereignisses  $B$ . Da dieses Ereignis auf *vier* Pfaden erreicht werden kann, gilt unter Verwendung des in Bild II-49 dargestellten Ereignisbaumes nach Gleichung (II-70):

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^4 P(OA_iB) = \sum_{i=1}^4 P(A_i) \cdot P(B|A_i) = \\ &= 0,002 + 0,002 + 0,012 + 0,008 = 0,024 = 2,4\% \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, aus der Gesamtproduktion rein zufällig eine *defekte* Glühbirne zu ziehen, beträgt somit 2,4 %.

Zu b): Es gibt genau einen *günstigen* Pfad, nämlich den Pfad  $OA_3B$ . Somit ist nach der *Bayesschen Formel* (Gleichung (II-71)):

$$P(A_3|B) = \frac{P(OA_3B)}{P(B)} = \frac{P(A_3) \cdot P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{0,012}{0,024} = 0,5 = 50\%$$

Wir *deuten* dieses Ergebnis wie folgt: Wenn wir der Gesamtproduktion nur genügend oft eine Glühbirne entnehmen, so wird im Mittel jede *zweite* der gezogenen *defekten* Glühbirnen aus der Produktion der Maschine  $M_3$  stammen.

## 4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen

### 4.1 Zufallsvariable oder Zufallsgrößen

Wir kehren zunächst zu den drei Standardbeispielen aus Abschnitt 2.1 zurück, um an ihnen den wichtigen Begriff *Zufallsvariable* oder *Zufallsgröße* vorzubereiten.

#### 4.1.1 Einführende Beispiele

##### Standardbeispiel 1: Augenzahl beim Wurf eines homogenen Würfels

Die *Augenzahl*  $X$  nimmt bei jedem Wurf genau einen der sechs Werte 1, 2, 3, 4, 5 und 6 an. Sie kann daher als eine *Funktion* angesehen werden, die jedem Elementarereignis genau eine reelle Zahl zuordnet. Da jedoch der spezielle Wert, den die Größe  $X$  (Augenzahl) bei einem bestimmten Wurf annimmt, einzig und alleine vom *Zufall* abhängt, nennt man diese Größe folgerichtig *Zufallsgröße* oder *Zufallsvariable*. Ihr Wert ist *nicht* vorhersehbar, sondern ausschließlich *zufallsbedingt*.

##### Standardbeispiel 2: Augensumme beim Wurf mit zwei unterscheidbaren homogenen Würfeln

Wir interessieren uns in diesem Zufallsexperiment für die folgende Größe:

$$X = \text{Augensumme beider Würfel}$$

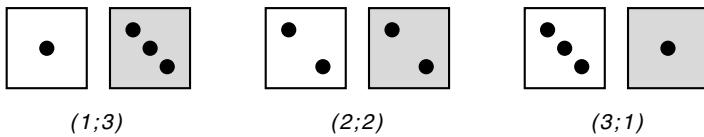
Sie kann als *Zufallsprodukt* jeden der insgesamt 11 möglichen Werte 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 und 12 annehmen. Die Augensumme  $X$  ist daher eine *Zufallsgröße* oder *Zufallsvariable*. Jedem der 36 Elementarereignisse

$$(1; 1), (1; 2), (1; 3), \dots, (6; 5), (6; 6)$$

entspricht dabei ein bestimmter Wert der Augensumme  $X$ . Die folgende Tabelle zeigt, welche Elementarereignisse dabei zu welcher Augensumme gehören.

$X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)	(2; 6)	(3; 6)	(4; 6)	(5; 6)	(6; 6)
	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(3; 5)	(4; 5)	(5; 5)	(6; 5)		
		(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(4; 4)	(5; 4)	(6; 4)			
			(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(5; 3)	(6; 3)				
				(5; 1)	(5; 2)	(6; 2)					
					(6; 1)						

Zum Beispiel wird die Augensumme  $X = 4$  durch die folgenden drei Elementarereignisse (geordneten Augenpaare) realisiert (1. Würfel: weiß; 2. Würfel: grau; Bild II-50):



**Bild II-50** Augenpaare mit der Augensumme 4

### Standardbeispiel 3: Zufällige Entnahme von Kugeln aus einer Urne (mit Zurücklegen)

Eine Urne enthalte 5 Kugeln, darunter 3 weiße und 2 schwarze Kugeln (Bild II-51):



**Bild II-51**

Nacheinander ziehen wir ganz zufällig 3 Kugeln, wobei wir nach jeder Ziehung die gezogene Kugel wieder in die Urne *zurücklegen*, und notieren dabei die Farbe der gezogenen Kugeln. Unser Interesse gilt nun der Größe

$$X = \text{Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln}$$

Sie kann nur die vier reellen Werte 0, 1, 2 und 3 annehmen. Welchen dieser Werte sie in einem konkreten Fall dabei annimmt, lässt sich jedoch *nicht* vorausbestimmen, sondern ist *zufallsbedingt*, d. h.  $X$  ist eine *Zufallsgröße* oder *Zufallsvariable*. Zu jedem der insgesamt 8 Elementarereignisse

○○○, ●○○, ○●○, ○○●, ●●○, ●○●, ○●●, ●●●

gehört genau *ein* Wert der Zufallsgröße  $X$ . Die folgende Tabelle zeigt, welche Elementarereignisse zu welchen  $X$ -Werten gehören.

$X$	0	1	2	3
	○○○	●○○ ○●○ ○○●	●●○ ●○● ○●●	●●●

### 4.1.2 Definition einer Zufallsvariablen

Der anhand unserer Standardbeispiele eingeführte Begriff *Zufallsvariable* oder *Zufallsgröße* lässt sich allgemein wie folgt definieren:

**Definition:** Unter einer *Zufallsgröße* oder *Zufallsvariablen*  $X$  verstehen wir eine *Funktion*, die jedem Elementarereignis  $\omega$  aus der Ergebnismenge  $\Omega$  eines Zufallsexperiments genau *eine* reelle Zahl  $X(\omega)$  zuordnet.

#### Anmerkungen

- (1) *Zufallsvariable* werden üblicherweise mit *großen* lateinischen Buchstaben, ihre *Werte* dagegen mit *kleinen* lateinischen Buchstaben gekennzeichnet.
- (2) Wir unterscheiden noch zwischen einer *diskreten* und einer *stetigen* Zufallsvariablen. Eine Zufallsvariable  $X$  heißt dabei *diskret*, wenn sie nur *endlich* viele oder *abzählbar unendlich* viele reelle Werte annehmen kann. Sie heißt dagegen *stetig*, wenn sie *jeden* beliebigen Wert aus einem (reellen) endlichen oder unendlichen *Intervall* annehmen kann.

## ■ Beispiele

- (1) Ein homogener Würfel wird *fünfmal* geworfen und dabei wird festgestellt, wie oft die Augenzahl „1“ auftritt. Dann ist die Größe

$$X = \text{Anzahl von Würfen mit der Augenzahl „1“}$$

eine *diskrete* Zufallsvariable mit den möglichen Werten 0, 1, 2, 3, 4 und 5.

- (2) Die *Augensumme*  $X$  beim gleichzeitigen Wurf zweier unterschiedbarer homogener Würfel ist eine *diskrete* Zufallsgröße (Zufallsvariable) mit den *endlich vielen* möglichen Werten

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.$$

- (3) Die *Anzahl*  $X$  der Atome, die in einem bestimmten Zeitintervall in einer *radioaktiven* Substanz zerfallen, lässt sich mit einem Zählgerät leicht feststellen.  $X$  ist dabei eine *diskrete* Zufallsvariable mit den *abzählbar unendlich* vielen Werten 0, 1, 2, 3, 4, 5, ....

- (4) In einem Werk werden zylinderförmige Scheiben mit einem *vorgeschriebenen* Durchmesser von 5 mm (dem sog. *Sollwert*) in großer Stückzahl hergestellt. Infolge *zufallsbedingter* Schwankungen wird jedoch der Durchmesser  $X$  einer aus der Gesamtproduktion *wahllos* herausgegriffenen Zylinderscheibe mehr oder weniger stark von diesem Sollwert *abweichen*. Der Durchmesser  $X$  einer solchen Scheibe kann dabei als eine *stetige* Zufallsvariable aufgefasst werden, deren Werte sich in einem bestimmten Intervall bewegen.

## 4.2 Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen

Bei einer Zufallsvariablen  $X$  sind folgende Eigenschaften von besonderer Bedeutung:

1. Der *Wertebereich*;
2. Die *Wahrscheinlichkeit*  $P$  dafür, dass die Zufallsvariable  $X$  einen *bestimmten* Wert annimmt (bei einer *diskreten* Variablen) bzw. wertemäßig in einem *bestimmten* Intervall liegt (bei einer *stetigen* Variablen).

Mit dem *Wertebereich* einer Zufallsvariablen haben wir uns bereits in dem vorangegangenen Abschnitt beschäftigt. Die *zweite* Eigenschaft führt uns nun zu dem Begriff der *Verteilungsfunktion*  $F(x)$  einer Zufallsvariablen  $X$ . Diese Funktion bestimmt dabei definitionsgemäß die *Wahrscheinlichkeit* dafür, dass die Zufallsvariable  $X$  einen Wert annimmt, der *kleiner oder gleich* einer *vorgegebenen* reellen Zahl  $x$  ist. Demnach gilt ganz allgemein:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (\text{II-72})$$

Wir fassen zusammen und ergänzen:

### Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen

Die *Verteilungsfunktion*  $F(x)$  einer Zufallsvariablen  $X$  ist die *Wahrscheinlichkeit* dafür, dass die Zufallsvariable  $X$  einen Wert annimmt, der *kleiner oder gleich* einer vorgegebenen reellen Zahl  $x$  ist:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (\text{II-73})$$

Eine Zufallsvariable  $X$  wird dabei durch ihre Verteilungsfunktion  $F(x)$  *vollständig* beschrieben.

Verteilungsfunktionen besitzen ganz allgemein die folgenden *Eigenschaften* (siehe hierzu auch die Bilder II-52 und II-53):

(1)  $F(x)$  ist eine *monoton wachsende* Funktion mit  $0 \leq F(x) \leq 1$ .

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad (\text{unmögliches Ereignis}) \quad (\text{II-74})$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1 \quad (\text{sicheres Ereignis}) \quad (\text{II-75})$$

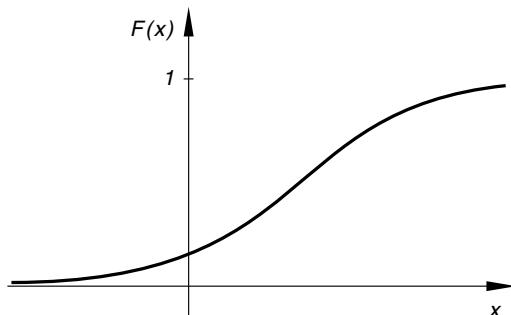
(4) Die Wahrscheinlichkeit  $P(a < X \leq b)$  dafür, dass die Zufallsvariable  $X$  einen Wert zwischen  $a$  (ausschließlich) und  $b$  (einschließlich) annimmt, lässt sich mit Hilfe der Verteilungsfunktion  $F(x)$  wie folgt berechnen ( $a < b$ )<sup>17)</sup>:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \quad (\text{II-76})$$

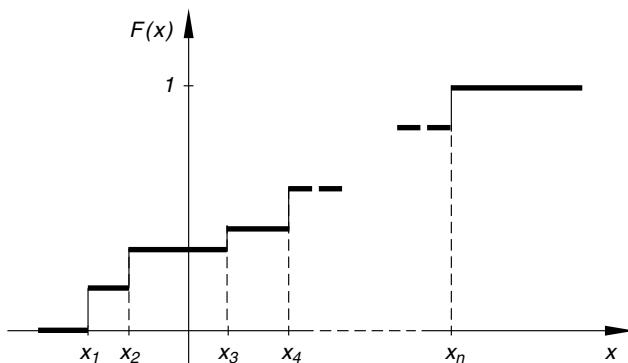
<sup>17)</sup> Bei einer *stetigen* Zufallsvariablen gilt diese Formel auch für das *abgeschlossene* Intervall  $a \leq X \leq b$ :

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Bild II-52 zeigt den typischen Verlauf der Verteilungsfunktion  $F(x)$  für eine *stetige* Zufallsvariable  $X$ . Im Falle einer *diskreten* Zufallsvariablen verläuft die Verteilungsfunktion *treppenförmig* wie in Bild II-53 skizziert.



**Bild II-52** Typischer Verlauf der Verteilungsfunktion  $F(x)$  einer *stetigen* Zufallsvariablen  $X$



**Bild II-53** Treppenförmiger Verlauf der Verteilungsfunktion  $F(x)$  einer *diskreten* Zufallsvariablen  $X$

#### 4.3 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen (diskrete Verteilung)

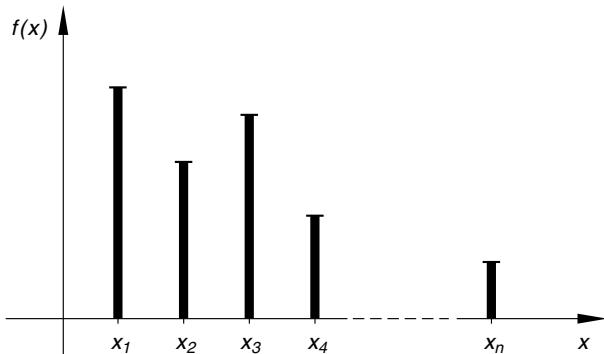
Bei einer *diskreten* Zufallsvariablen  $X$  gehört zu jedem Wert  $x_i$  eine bestimmte Wahrscheinlichkeit  $P(X = x_i) = p_i$ . Wir erhalten eine sog. *Verteilungstabelle* von folgendem Aussehen:

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_n$	$\dots$
$P(X = x_i)$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\dots$	$p_n$	$\dots$

Die *diskrete* Funktion

$$f(x) = \begin{cases} p_i & \text{für } x = x_i \\ 0 & \text{alle übrigen } x \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{II-77})$$

heißt *Wahrscheinlichkeitsfunktion* der *diskreten* Verteilung. Sie lässt sich graphisch durch ein *Stabdiagramm*, auch *Wahrscheinlichkeitsdiagramm* genannt, darstellen. Bild II-54 zeigt das Wahrscheinlichkeitsdiagramm einer diskreten Zufallsvariablen mit *endlich* vielen Werten.



**Bild II-54**

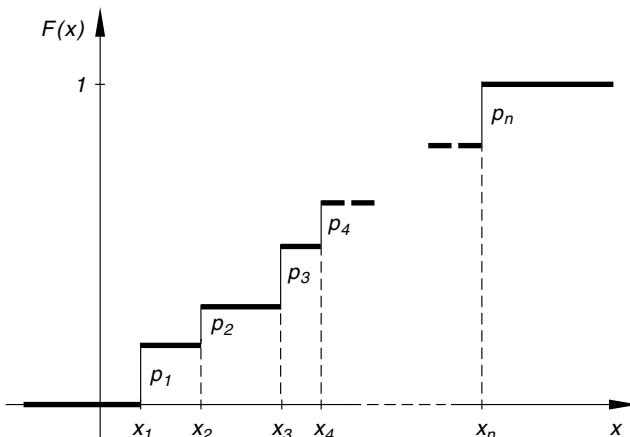
Stabdiagramm für die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$  einer *diskreten* Verteilung („Wahrscheinlichkeitsdiagramm“)

Dabei gilt stets

$$f(x_i) = p_i \geq 0 \quad (\text{II-78})$$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$  ist ferner *normiert*:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \quad (\text{II-79})$$



**Bild II-55**

Verteilungsfunktion  $F(x)$  einer *diskreten* Verteilung („Treppenfunktion“)

Die zugehörige *Verteilungsfunktion* der diskreten Zufallsvariablen  $X$  ist

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \quad (\text{II-80})$$

wobei über alle Werte  $x_i \leq x$  zu summieren ist. Die graphische Darstellung der Verteilungsfunktion  $F(x)$  führt uns zu einer sog. *Treppenfunktion*. Bild II-55 zeigt eine solche Treppenfunktion im Falle einer *diskreten* Zufallsvariablen mit *endlich* vielen Werten. Sie macht an den *Sprungstellen*  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  der Reihe nach Sprünge der Größe  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  und ist zwischen zwei aufeinander folgenden Sprungstellen *konstant*.

Wir fassen zusammen:

### Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen (diskrete Verteilung)

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer *diskreten* Zufallsvariablen  $X$  lässt sich durch die *Wahrscheinlichkeitsfunktion*

$$f(x) = \begin{cases} p_i & \text{für } x = x_i \\ 0 & \text{alle übrigen } x \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{II-81})$$

oder durch die zugehörige *Verteilungsfunktion*

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \quad (\text{II-82})$$

vollständig beschreiben ( $p_i$ : Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsvariable  $X$  den Wert  $x_i$  annimmt; siehe hierzu die Bilder II-54 und II-55).

Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$  und Verteilungsfunktion  $F(x)$  besitzen dabei die folgenden Eigenschaften:

$$(1) f(x_i) \geq 0 \quad (\text{II-83})$$

(2)  $f(x)$  ist *normiert*, d. h. es gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1 \quad (\text{II-84})$$

(3)  $F(x)$  ist eine *monoton wachsende* Funktion mit  $0 \leq F(x) \leq 1$ .

(4) Die *Wahrscheinlichkeit* dafür, dass die diskrete Zufallsvariable  $X$  einen Wert zwischen  $a$  (ausschließlich) und  $b$  (einschließlich) annimmt, berechnet sich dann mit Hilfe der Verteilungsfunktion  $F(x)$  wie folgt:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \quad (\text{II-85})$$

## ■ Beispiele

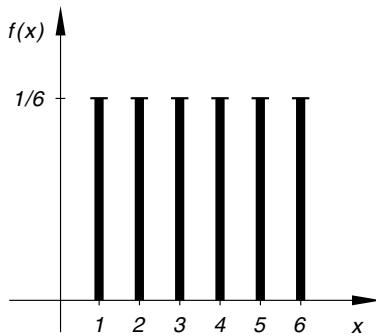
- (1) Beim Zufallsexperiment „Wurf eines homogenen Würfels“ (Standardbeispiel 1) ist die *diskrete* Zufallsvariable

$$X = \text{Erreichte Augenzahl}$$

wie folgt verteilt (es handelt sich um ein *Laplace-Experiment*):

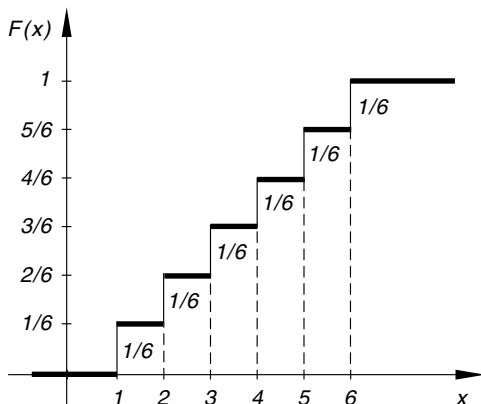
$x_i$	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Bild II-56 verdeutlicht diese sog. *Gleichverteilung* durch ein *Stabdiagramm (Wahrscheinlichkeitsdiagramm)*.



**Bild II-56** Stabdiagramm für die Zufallsvariable „ $X = \text{Erreichte Augenzahl}$ “ beim Wurf eines homogenen Würfels

Die zugehörige *Verteilungsfunktion*  $F(x)$  ist in Bild II-57 dargestellt.

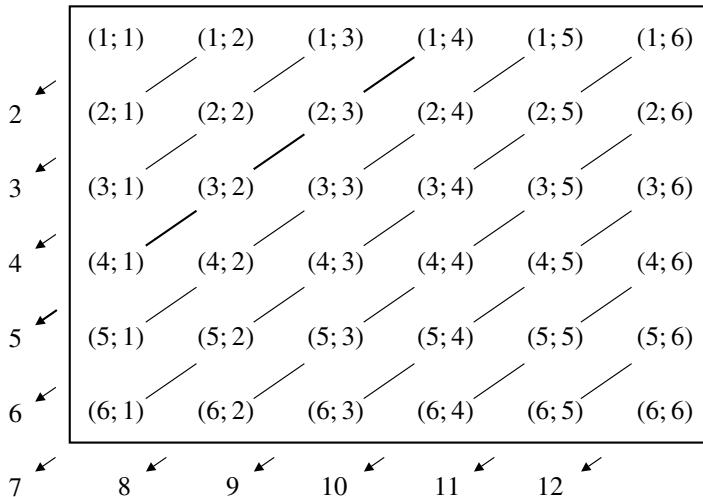


**Bild II-57** Verteilungsfunktion für die Zufallsvariable „ $X = \text{Erreichte Augenzahl}$ “ beim Wurf eines homogenen Würfels

- (2) Beim Zufallsexperiment „Wurf mit zwei unterscheidbaren homogenen Würfeln“ (Standardbeispiel 2) besteht die Ergebnismenge  $\Omega$  aus den insgesamt 36 gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen (geordneten Augenpaaren)  $(1; 1)$ ,  $(1; 2)$ ,  $(1; 3), \dots, (6; 5)$ ,  $(6; 6)$ . Wir betrachten die Zufallsvariable

$$X = \text{Erreichte Augensumme}$$

Sie ist *diskret* und nimmt die möglichen Werte 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 und 12 mit *unterschiedlichen* Wahrscheinlichkeiten an. Zunächst bestimmen wir mit dem nachfolgenden Schema, welche und wie viele Elementarereignisse zu den einzelnen Werten der Augensumme  $X$  gehören:



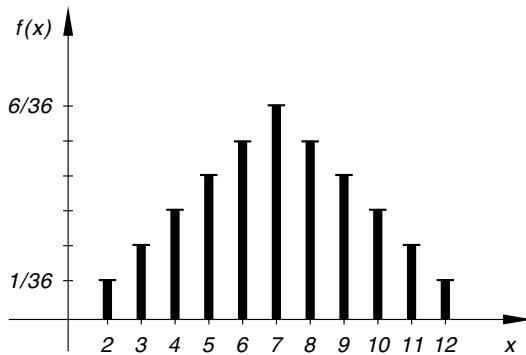
Elementarereignisse, die zur *gleichen* Augensumme führen, sind durch eine Linie miteinander verbunden. Z. B. verbindet die *dick* gezeichnete Linie alle Elementarereignisse mit der Augensumme  $X = 5$ . Daraus ergibt sich dann die folgende Häufigkeitstabelle ( $n_i$ : absolute Häufigkeit):

$x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)	(2; 6)	(3; 6)	(4; 6)	(5; 6)	(6; 6)
$n_i$	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

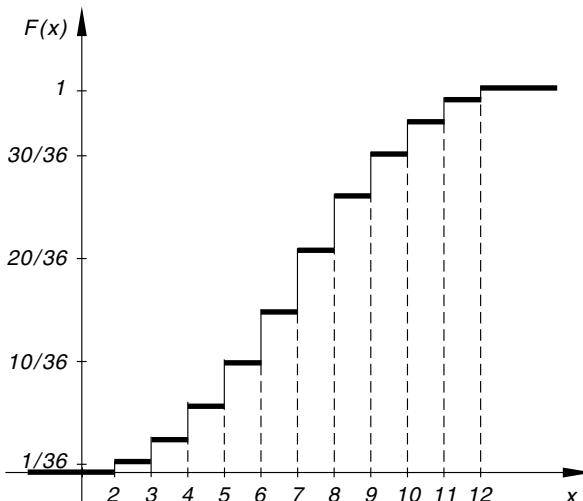
Alle 36 Elementarereignisse sind dabei gleichwahrscheinlich ( $p_i = p = 1/36$  mit  $i = 1, 2, \dots, 36$ ). Daher erhalten wir die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Werte der Zufallsvariablen  $X$  („Augensumme“), indem wir die *absoluten Häufigkeiten* mit  $1/36$  multiplizieren. Dies führt zu der folgenden Verteilungstabelle:

$x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Bild II-58 zeigt das *Stabdiagramm*, Bild II-59 die zugehörige *Verteilungsfunktion*.



**Bild II-58** Stabdiagramm für die Zufallsvariable „ $X = \text{Augensumme}$ “ beim Wurf mit zwei unterscheidbaren homogenen Würfeln



**Bild II-59** Verteilungsfunktion für die Zufallsvariable „ $X = \text{Augensumme}$ “ beim Wurf mit zwei unterscheidbaren homogenen Würfeln

- (3) Wir kommen auf unser *Urnenbeispiel* aus Abschnitt 2.1 (Standardbeispiel 3: Ziehung von 3 Kugeln aus einer Urne mit 3 weißen und 2 schwarzen Kugeln *mit Zurücklegen*) zurück und berechnen zunächst die *Wahrscheinlichkeiten* für das Eintreten der insgesamt 8 Elementarereignisse

$\bigcirc\bigcirc\bigcirc, \bullet\bigcirc\bigcirc, \bigcirc\bullet\bigcirc, \bigcirc\bigcirc\bullet, \bullet\bullet\bigcirc, \bullet\bigcirc\bullet, \bigcirc\bullet\bullet, \bullet\bullet\bullet$

Dabei beachten wir, dass eine *weiße* Kugel mit der Wahrscheinlichkeit  $p(\bigcirc) = 3/5$  und eine *schwarze* Kugel mit der Wahrscheinlichkeit  $p(\bullet) = 2/5$  gezogen wird. Da wir die jeweils gezogene Kugel stets *zurücklegen*, sind alle Ziehungen *voneinander unabhängig*. Die insgesamt 8 möglichen Elementarereignisse treten daher mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten ein (berechnet mit dem *Multiplikationssatz für stochastisch unabhängige Ereignisse*).

Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln	Elementarereignis	Wahrscheinlichkeit
0	$\bigcirc\bigcirc\bigcirc$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{27}{125}$
1	$\bullet\bigcirc\bigcirc$ $\bigcirc\bullet\bigcirc$ $\bigcirc\bigcirc\bullet$	$\left\{ \text{jeweils } \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{125} \right.$
2	$\bullet\bullet\bigcirc$ $\bullet\bigcirc\bullet$ $\bigcirc\bullet\bullet$	$\left\{ \text{jeweils } \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{125} \right.$
3	$\bullet\bullet\bullet$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$

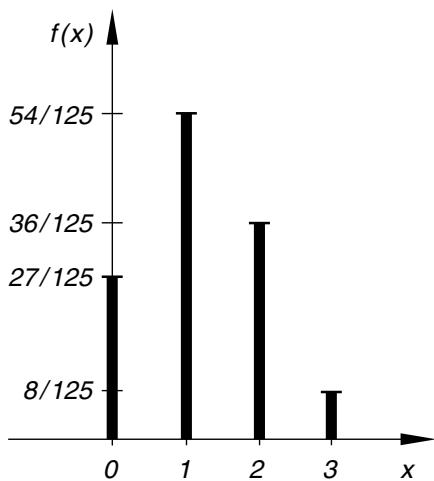
Die *diskrete* Zufallsvariable

$X = \text{Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln bei drei Ziehungen mit Zurücklegen}$

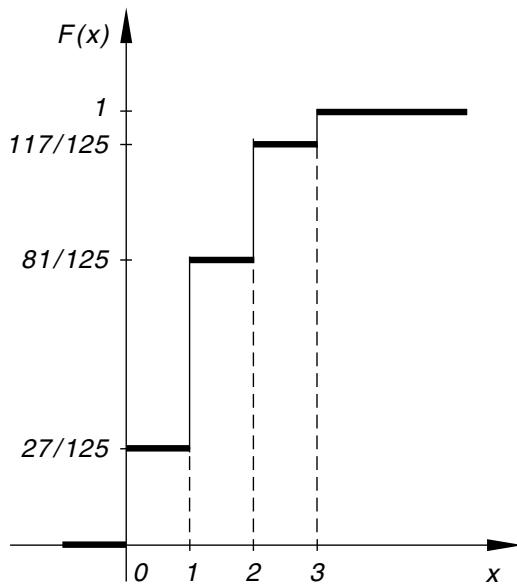
kann dabei die Werte 0, 1, 2 und 3 annehmen. Sie sind wie folgt verteilt:

$x_i$	0	1	2	3
$f(x_i)$	$\frac{27}{125}$	$3 \cdot \frac{18}{125} = \frac{54}{125}$	$3 \cdot \frac{12}{125} = \frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

Bild II-60 zeigt das *Stabdiagramm* dieser Wahrscheinlichkeitsfunktion. Die zugehörige *Verteilungsfunktion*  $F(x)$  ist in Bild II-61 dargestellt.



**Bild II-60** Stabdiagramm zum Urnenbeispiel



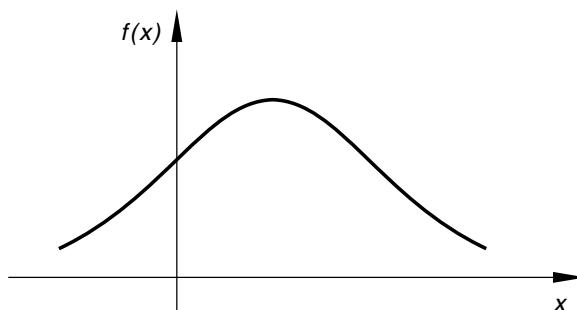
**Bild II-61** Verteilungsfunktion zum Urnenbeispiel

## 4.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen Zufallsvariablen (stetige Verteilung)

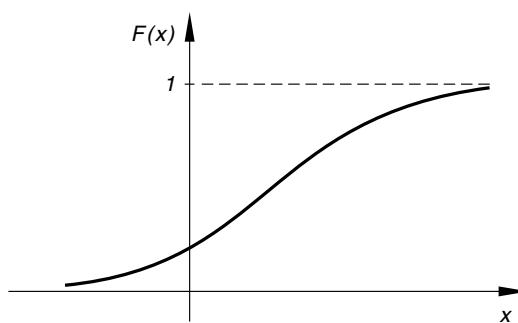
Bei einer *stetigen* Zufallsvariablen  $X$  mit dem Wertebereich  $-\infty < X < \infty$  wird die *Verteilungsfunktion*  $F(x)$  in der *Integralform*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad (\text{II-86})$$

dargestellt (uneigentliches Integral). Der Integrand  $f(x)$  heißt *Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion* oder kurz *Dichtefunktion* der stetigen Verteilung<sup>18)</sup>. Der typische Verlauf beider Funktionen ist in den Bildern II-62 und II-63 dargestellt.



**Bild II-62** Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f(x)$  einer *stetigen* Verteilung



**Bild II-63** Verteilungsfunktion  $F(x)$  einer *stetigen* Verteilung

<sup>18)</sup> Wir haben in dem Integrand  $f(u)$  die Integrationsvariable  $u$  wieder (wie allgemein üblich) durch  $x$  ersetzt.

Dichtefunktion  $f(x)$  und Verteilungsfunktion  $F(x)$  einer stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzen dabei die folgenden Eigenschaften:

- (1) Es gilt stets  $f(x) \geq 0$  (siehe Bild II-62).
- (2) Die Dichtefunktion  $f(x)$  ist die 1. Ableitung der Verteilungsfunktion  $F(x)$ :

$$f(x) = F'(x) \quad (\text{II-87})$$

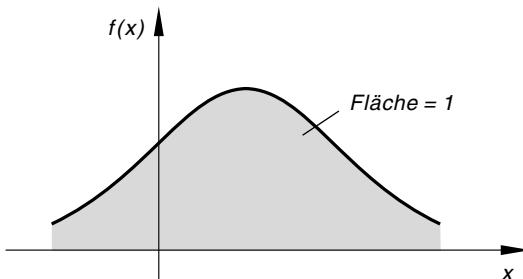
- (3) Die Verteilungsfunktion  $F(x)$  ist eine *monoton wachsende* Funktion mit  $0 \leq F(x) \leq 1$  und strebt für  $x \rightarrow \infty$  *asymptotisch* gegen den Wert 1. Dies aber bedeutet anschaulich, dass der *Flächeninhalt* unter der Dichtefunktion  $f(x)$  genau den Wert 1 besitzt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (\text{II-88})$$

(sog. *Normierung* der Dichtefunktion, siehe Bild II-64). Diese Eigenschaft ist unmittelbar einleuchtend, da der Wert der stetigen Zufallsvariablen  $X$  mit *Sicherheit* im Intervall  $-\infty < x < \infty$  liegt und somit

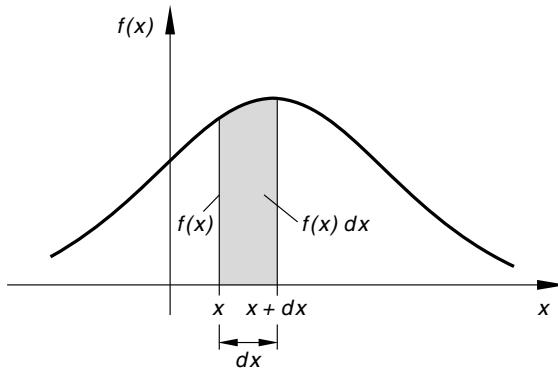
$$P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (\text{II-89})$$

sein muss (es handelt sich nämlich um das *sichere Ereignis*, das *immer* eintritt).



**Bild II-64** Zur Normierung der Dichtefunktion  $f(x)$

- (4) Bei einer *stetigen* Zufallsvariablen  $X$  betrachtet man immer die Wahrscheinlichkeit in einem *Intervall*. Dann ist  $f(x) dx$  die *Wahrscheinlichkeit* dafür, dass der Wert der Zufallsvariablen  $X$  in dem *Intervall* mit den Grenzen  $x$  und  $x + dx$  liegt. Diese Wahrscheinlichkeit entspricht dem Flächeninhalt des *grau* unterlegten Streifens in Bild II-65.

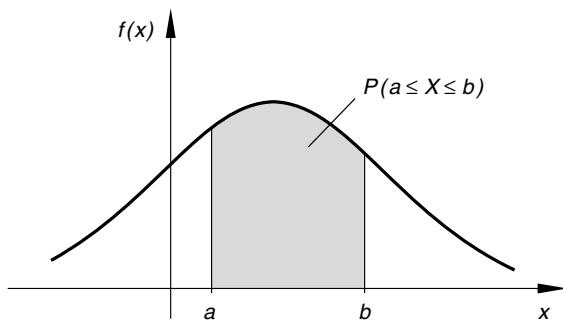


**Bild II-65** Der grau unterlegte Streifen vom Flächeninhalt  $f(x) dx$  ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert der Zufallsvariablen  $X$  im Intervall  $[x; x + dx]$  liegt

(5) Für  $b > a$  gilt:

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= F(b) - F(a) = \\ &= \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \end{aligned} \quad (\text{II-90})$$

Dies aber bedeutet<sup>19)</sup>: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsvariable  $X$  einen Wert zwischen  $a$  und  $b$  annimmt, entspricht dem Flächeninhalt unter der Dichtefunktion  $f(x)$  zwischen den Grenzen  $x = a$  und  $x = b$  (grau unterlegte Fläche in Bild II-66).



**Bild II-66** Die grau unterlegte Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit  $P(a \leq X \leq b)$  dafür, dass die Zufallsvariable  $X$  einen Wert zwischen  $a$  und  $b$  annimmt

<sup>19)</sup> Diese Aussage gilt auch für ein offenes oder halboffenes Intervall.

Wir fassen die Ergebnisse wie folgt zusammen:

### **Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen Zufallsvariablen (stetige Verteilung)**

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer *stetigen* Zufallsvariablen  $X$  lässt sich durch die *Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion*  $f(x)$  (kurz auch *Dichtefunktion* genannt) oder durch die zugehörige *Verteilungsfunktion*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad (\text{II-91})$$

vollständig beschreiben (siehe hierzu die Bilder II-62 und II-63). Dichtefunktion  $f(x)$  und Verteilungsfunktion  $F(x)$  besitzen dabei die folgenden Eigenschaften:

$$(1) f(x) \geq 0 \quad (\text{II-92})$$

(2)  $f(x)$  ist *normiert*, d. h. es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (\text{II-93})$$

(die Fläche unter der Dichtefunktion  $f(x)$  besitzt den Wert 1; siehe hierzu Bild II-64).

(3) Die *monoton wachsende* Verteilungsfunktion  $F(x)$  ist eine *Stammfunktion* der Dichtefunktion  $f(x)$ , d. h. es gilt:

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{II-94})$$

(4) Die *Wahrscheinlichkeit* dafür, dass die stetige Zufallsvariable  $X$  einen Wert zwischen  $a$  und  $b$  annimmt, berechnet sich dann wie folgt:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (\text{II-95})$$

( $a < b$ ; grau unterlegte Fläche in Bild II-66).

## ■ Beispiele

### (1) Stetige Gleichverteilung (Rechteckverteilung)

Im Zusammenhang mit der Simulation von Zufallszahlen spielt die sog. *stetige Gleichverteilung* (auch *gleichmäßige Verteilung* oder *Rechteckverteilung* genannt) mit der *Dichtefunktion*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{alle übrigen } x \end{cases}$$

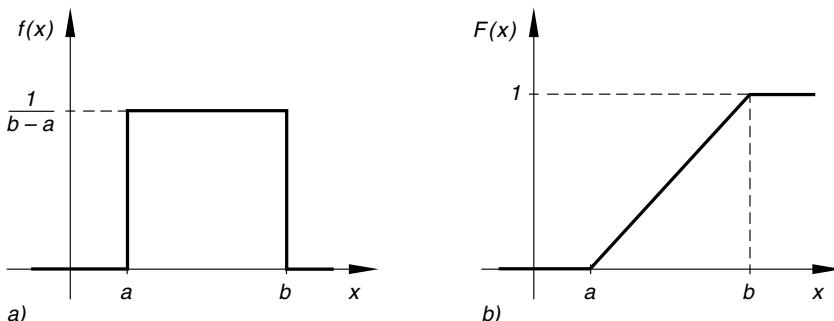
eine besondere Rolle (siehe Bild II-67 a)). Wir bestimmen die zugehörige *Verteilungsfunktion*  $F(x)$ . Im Intervall  $a \leq x \leq b$  gilt:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(u) du = \int_a^x \frac{1}{b-a} du = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^x 1 du = \frac{1}{b-a} [u]_a^x = \\ &= \frac{1}{b-a} (x - a) = \frac{x - a}{b - a} \end{aligned}$$

Für  $x < a$  ist  $F(x) = 0$ , für  $x > b$  ist  $F(x) = 1$ :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x - a}{b - a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Bild II-67 zeigt den Verlauf der Dichtefunktion  $f(x)$  und der Verteilungsfunktion  $F(x)$ .



**Bild II-67** Stetige Gleichverteilung (Rechteckverteilung)

- a) Dichtefunktion  $f(x)$
- b) Verteilungsfunktion  $F(x)$

(2)  $X$  sei eine *stetige* Zufallsvariable mit der *linearen* Dichtefunktion

$$f(x) = 0,02x \quad (0 \leq x \leq 10)$$

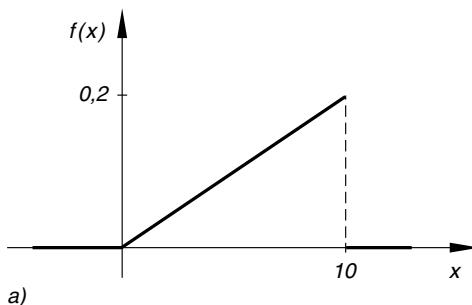
(im übrigen Bereich ist  $f(x) = 0$ , siehe Bild II-68 a)). Zunächst bestimmen wir die *Verteilungsfunktion*  $F(x)$  im Intervall  $0 \leq x \leq 10$ :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(u) du = \int_0^x 0,02u du = 0,02 \cdot \int_0^x u du = 0,02 \left[ \frac{1}{2} u^2 \right]_0^x = \\ &= 0,01 \left[ u^2 \right]_0^x = 0,01(x^2 - 0) = 0,01x^2 \end{aligned}$$

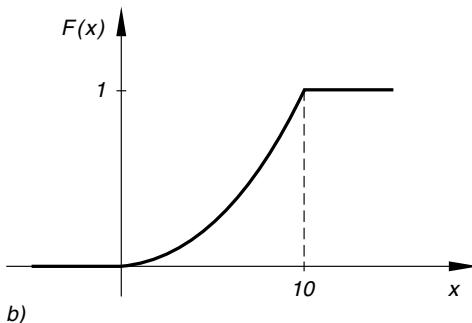
Sie verläuft dort *parabelförmig*. Für  $x < 0$  ist  $F(x) = 0$ , für  $x > 10$  ist  $F(x) = 1$ . Somit gilt:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0,01x^2 & \text{für } 0 \leq x \leq 10 \\ 1 & x > 10 \end{cases}$$

Der Verlauf der Verteilungsfunktion ist in Bild II-68 b) dargestellt.



a)



b)

**Bild II-68** a) Dichtefunktion  
b) Verteilungsfunktion

- (3) Die *Lebensdauer*  $T$  eines bestimmten elektronischen Bauelements sei eine sog. *exponentialverteilte* Zufallsgröße mit der *Dichtefunktion*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ c \cdot e^{-0,1t} & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{mit } c > 0)$$

- a) Wie lautet die zugehörige *Verteilungsfunktion*  $F(t)$ ?
- b) Wie groß ist der *Anteil* an Bauelementen, deren Lebensdauer den Wert  $t = 10$  überschreitet?

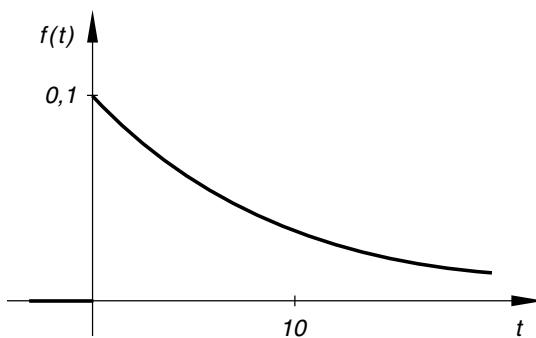
*Lösung:* Wir bestimmen zunächst die noch unbekannte Konstante  $c$  aus der *Normierungsbedingung* (II-93):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt &= \int_0^{\infty} c \cdot e^{-0,1t} dt = c \cdot \int_0^{\infty} e^{-0,1t} dt = c \left[ \frac{e^{-0,1t}}{-0,1} \right]_0^{\infty} = \\ &= -10c \left[ e^{-0,1t} \right]_0^{\infty} = -10c(0 - 1) = 10c = 1 \end{aligned}$$

(Integral Nr. 312 mit  $a = -0,1$ ). Somit ist  $c = 0,1$  und die *Dichtefunktion*  $f(t)$  besitzt für  $t \geq 0$  die folgende Gestalt:

$$f(t) = 0,1 \cdot e^{-0,1t}$$

(für  $t < 0$  ist  $f(t) = 0$ ). Ihr Verlauf ist in Bild II-69 dargestellt.



**Bild II-69** Dichtefunktion der exponentialverteilten Zufallsvariablen „ $T$  = Lebensdauer eines elektronischen Bauelements“

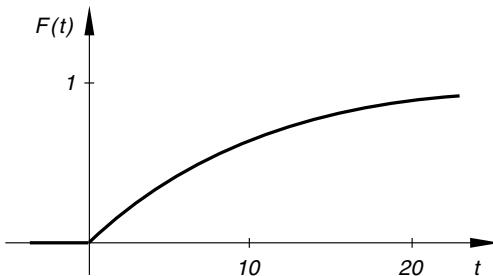
- a) Für die *Verteilungsfunktion*  $F(t)$  erhalten wir damit im Intervall  $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-\infty}^t f(u) du = \int_0^t 0,1 \cdot e^{-0,1u} du = 0,1 \cdot \int_0^t e^{-0,1u} du = \\ &= 0,1 \left[ \frac{e^{-0,1u}}{-0,1} \right]_0^t = - \left[ e^{-0,1u} \right]_0^t = \\ &= -(e^{-0,1t} - 1) = 1 - e^{-0,1t} \end{aligned}$$

(Integral Nr. 312 mit  $a = -0,1$ ). Daher gilt:

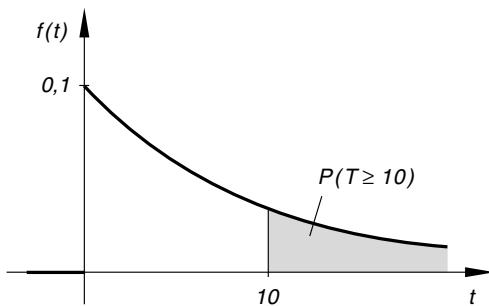
$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-0,1t} & t \geq 0 \end{cases}$$

Die *Verteilungsfunktion*  $F(t)$  ist in Bild II-70 graphisch dargestellt.



**Bild II-70** Verteilungsfunktion für die exponentialverteilte Lebensdauer  $T$  eines elektronischen Bauelements

- b) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $P(T \geq 10)$  entspricht der in Bild II-71 grau unterlegten Fläche unter der Dichtefunktion  $f(t)$ .



**Bild II-71**

Wir berechnen sie wie folgt:

$$\begin{aligned} P(T \geq 10) &= 1 - P(T \leq 10) = 1 - F(10) = 1 - (1 - e^{-1}) = \\ &= 1 - 1 + e^{-1} = e^{-1} = 0,368 \end{aligned}$$

Rund 36,8 % der elektronischen Bauelemente sind demnach zur Zeit  $t = 10$  noch *funktionstüchtig*.

- (4) Zur Beschreibung von Ermüdungserscheinungen bei Werkstoffen wird häufig die sog. *Weibull-Verteilung* herangezogen. Die Lebensdauer  $T$  eines Werkstücks, eines Geräts oder einer Maschine besitzt dann eine Verteilungsfunktion vom Typ

$$F(t) = 1 - e^{(-\alpha t^\beta)} \quad (t > 0)$$

mit den Parametern  $\alpha$  und  $\beta$  (für  $t \leq 0$  ist  $F(t) = 0$ ). Die zugehörige *Dichtefunktion* erhalten wir hieraus durch *Differentiation* nach der Variablen  $t$  (unter Verwendung der Kettenregel):

$$\begin{aligned} f(t) &= F'(t) = \frac{d}{dt} \left[ 1 - e^{(-\alpha t^\beta)} \right] = 0 - e^{(-\alpha t^\beta)} \cdot (-\alpha \beta t^{\beta-1}) = \\ &= \alpha \beta t^{\beta-1} \cdot e^{(-\alpha t^\beta)} \end{aligned}$$

(für  $t > 0$ , ansonsten ist  $f(t) = 0$ ).

*Anmerkung:* Die *Weibull-Verteilung* geht für  $\beta = 1$  in die *Exponentialverteilung* über (siehe hierzu Abschnitt 6.5). ■

## 5 Kennwerte oder Maßzahlen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer (diskreten oder stetigen) Zufallsvariablen  $X$  lässt sich in eindeutiger und vollständiger Weise entweder durch die *Verteilungsfunktion*  $F(x)$  oder aber durch die zugehörige *Wahrscheinlichkeits-* bzw. *Dichtefunktion*  $f(x)$  beschreiben. Die Verteilung kann aber auch durch bestimmte *Parameter*, die man als *Kennwerte* oder *Maßzahlen* der Verteilung bezeichnet, charakterisiert werden. Zu ihnen zählen u. a.

- der *Mittel-* oder *Erwartungswert*  $\mu$ ,
- die *Varianz*  $\sigma^2$  und
- die *Standardabweichung*  $\sigma$ .

Sie sind wichtige *Sonderfälle* einer Gruppe von Kennwerten, die als *Momente* einer Wahrscheinlichkeitsverteilung bezeichnet werden<sup>20)</sup>. Der *Mittelwert*  $\mu$  kennzeichnet da-

<sup>20)</sup> Im Rahmen dieser einführenden Darstellung können wir auf die *Momente* einer Verteilung nicht näher eingehen und verweisen den Leser auf die spezielle Fachliteratur (siehe Literaturverzeichnis).

bei in gewisser Weise das *Zentrum* oder die *Mitte* der Wahrscheinlichkeitsverteilung, während die *Varianz*  $\sigma^2$  und die *Standardabweichung*  $\sigma$  geeignete Maßzahlen für die *Streuung* der Werte um diesen Mittelwert darstellen.

## 5.1 Erwartungswert einer Zufallsvariablen

### 5.1.1 Ein einführendes Beispiel

Beim Zufallsexperiment „*Wurf eines homogenen Würfels*“ treten die 6 möglichen Werte 1, 2, 3, 4, 5 und 6 der *diskreten* Zufallsvariablen

$$X = \text{Erzielte Augenzahl}$$

mit *gleicher* Wahrscheinlichkeit auf. Wenn wir dieses Experiment nur oft genug wiederholen, können wir „erwarten“, dass die *mittlere* Augenzahl in der Nähe des *arithmetischen* Mittels aus den 6 möglichen Werten 1 bis 6 liegt. Wir „erwarten“ somit bei hinreichend großen Versuchsserien eine *mittlere* Augenzahl von nahezu

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5 \quad (\text{II-96})$$

Dieser Wert ist der sog. *Erwartungswert* der Zufallsvariablen  $X$  in dem beschriebenen Würfelexperiment. Bei einer großen Anzahl von Würfen können wir daher erwarten, dass wir pro Wurf eine *mittlere* Augenzahl von 3,5 erhalten.

### 5.1.2 Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen

In dem soeben beschriebenen Beispiel traten die möglichen Werte der diskreten Zufallsvariablen  $X$  („*Erzielte Augenzahl beim Würfeln*“) alle mit der *gleichen* Wahrscheinlichkeit auf. Im Allgemeinen jedoch sind die Werte einer diskreten Zufallsvariablen  $X$  *nicht* gleichverteilt. Bei der Berechnung des Erwartungswertes spielt daher die *Wahrscheinlichkeitsfunktion*  $f(x)$  eine *entscheidende* Rolle. Sie bestimmt in gewisser Weise die *Gewichtungsfaktoren*, mit denen die möglichen Werte  $x_i$  in die Berechnung eingehen. Den *Erwartungswert* der Zufallsvariablen  $X$  erhält man dann als Summe der gewichteten Werte  $x_i \cdot f(x_i)$ . Dies führt zu der folgenden *Definition*:

**Definition:** Unter dem *Erwartungswert*  $E(X)$  einer *diskreten* Zufallsvariablen  $X$  mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$  versteht man die Größe

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot f(x_i) \quad (\text{II-97})$$

#### Anmerkung

In der Definitionsformel (II-97) wird über alle möglichen Werte  $x_i$  summiert. Bei einer *diskreten* Zufallsvariablen mit *abzählbar unendlich* vielen Werten wird dabei die *absolute Konvergenz* der (unendlichen) Reihe in Gleichung (II-97) vorausgesetzt. Andernfalls besitzt die Verteilung *keinen* Erwartungswert.

## ■ Beispiele

- (1) Gegeben ist eine *diskrete* Zufallsvariable  $X$  mit der *Verteilungstabelle*

$x_i$	1	2	3	4
$f(x_i)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

Sie besitzt den folgenden *Erwartungswert*:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^4 x_i \cdot f(x_i) = 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} = \\ &= \frac{1}{8} + \frac{6}{8} + \frac{9}{8} + \frac{4}{8} = \frac{20}{8} = 2,5 \end{aligned}$$

- (2) Beim „Wurf eines homogenen Würfels“ ist die *diskrete* Zufallsvariable

$$X = \text{Erzielte Augenzahl}$$

gleichverteilt ( $p_i = f(x_i) = 1/6$  für  $i = 1, 2, \dots, 6$ ):

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Sie besitzt den folgenden *Erwartungswert*:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^6 x_i \cdot f(x_i) = \\ &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \\ &= \frac{1}{6} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{1}{6} \cdot 21 = \frac{7}{2} = 3,5 \quad ■ \end{aligned}$$

### 5.1.3 Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariablen

Im Falle einer *stetigen* Zufallsvariablen  $X$  definieren wir den *Erwartungswert*  $E(X)$  wie folgt:

**Definition:** Unter dem *Erwartungswert*  $E(X)$  einer *stetigen* Zufallsvariablen  $X$  mit der Dichtefunktion  $f(x)$  versteht man die Größe

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \quad (\text{II-98})$$

*Anmerkung*

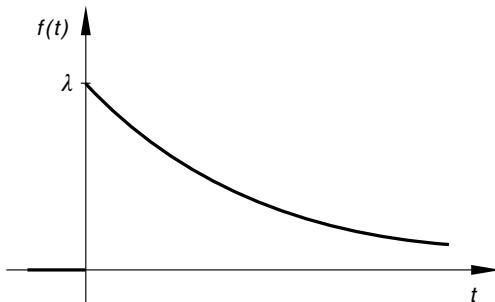
Es wird vorausgesetzt, dass das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x) dx$  existiert. Andernfalls besitzt die Verteilung *keinen* Erwartungswert.

### ■ Beispiel

Die *Lebensdauer*  $T$  eines bestimmten elektronischen Bauelements kann in guter Näherung als eine *exponentialverteilte* Zufallsvariable mit der *Dichtefunktion*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

betrachtet werden (mit  $\lambda > 0$ ; Bild II-72).



**Bild II-72**

Dichtefunktion der exponentialverteilten Zufallsvariablen „ $T$  = Lebensdauer eines elektronischen Bauelements“

Die *mittlere* Lebensdauer ist dann durch den *Erwartungswert*  $E(T)$  gegeben. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} t \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = \lambda \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} t \cdot e^{-\lambda t} dt}_{\text{Integral Nr. 313 mit } a = -\lambda} = \\ &= \lambda \left[ \frac{-\lambda t - 1}{\lambda^2} \cdot e^{-\lambda t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} \left[ (-\lambda t - 1) \cdot e^{-\lambda t} \right]_0^{\infty} = \\ &= \frac{1}{\lambda} (0 + 1) = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Wir erinnern: Die Exponentialfunktion  $e^{\lambda t}$  strebt für  $t \rightarrow \infty$  schneller gegen unendlich als die lineare Funktion  $-\lambda t - 1$ . Daher gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (-\lambda t - 1) \cdot e^{-\lambda t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\lambda t - 1}{e^{\lambda t}} = 0$$

## 5.2 Erwartungswert einer Funktion

Wir ordnen der Zufallsvariablen  $X$  durch die Funktionsgleichung  $Z = g(X)$  in eindeutiger Weise eine neue, von  $X$  abhängige Zufallsvariable  $Z$  zu. Der *Erwartungswert*  $E(Z) = E[g(X)]$  dieser Funktion wird dann wie folgt definiert:

**Definition:**  $X$  sei eine Zufallsvariable mit der *Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion*  $f(x)$  und  $Z = g(X)$  eine von  $X$  abhängige *Funktion*. Unter dem *Erwartungswert*  $E(Z) = E[g(X)]$  der Funktion  $Z = g(X)$  versteht man dann die folgende Größe:

- (1) Falls  $X$  eine *diskrete* Zufallsvariable ist:

$$E(Z) = E[g(X)] = \sum_i g(x_i) \cdot f(x_i) \quad (\text{II-99})$$

- (2) Falls  $X$  eine *stetige* Zufallsvariable ist:

$$E(Z) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx \quad (\text{II-100})$$

### Anmerkungen

- (1) Für eine *konstante* Funktion  $Z = g(X) = \text{const.} = c$  gilt:

$$E(Z) = E(c) = c \quad (\text{II-101})$$

- (2) Sind  $g_1(X)$  und  $g_2(X)$  zwei von der gleichen Zufallsgröße  $X$  abhängige Funktionen, so gilt der *Linearitätssatz*:

$$E[a \cdot g_1(X) + b \cdot g_2(X)] = a \cdot E[g_1(X)] + b \cdot E[g_2(X)] \quad (\text{II-102})$$

( $a, b$ : reelle Konstanten).

### ■ Beispiele

- (1)  $X$  sei eine *stetige* Zufallsvariable mit der *Dichtefunktion*

$$f(x) = e^{-x} \quad (\text{für } x \geq 0, \text{ sonst } f(x) = 0)$$

Dann besitzt die Zufallsvariable (Funktion)  $Z = 2X + 1$  den folgenden *Erwartungswert*:

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(2X + 1) = 2 \cdot E(X) + E(1) = 2 \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x} dx}_{\text{Integral Nr. 313 mit } a = -1} + 1 = \\ &= 2 \left[ (-x - 1) \cdot e^{-x} \right]_0^{\infty} + 1 = 2(0 + 1) + 1 = 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

- (2) Gegeben ist eine *diskrete* Zufallsvariable  $X$  mit der folgenden *Verteilungstabelle*:

$x_i$	1	2	3	4
$f(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Wir berechnen den *Erwartungswert* der von  $X$  abhängigen Funktion  $Z = X^2$  nach der Definitionsformel (II-99) mit  $g(x) = x^2$ :

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(X^2) = \sum_{i=1}^4 x_i^2 \cdot f(x_i) = \\ &= 1^2 \cdot \frac{1}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{3}{8} + 4^2 \cdot \frac{1}{8} = \\ &= \frac{1}{8} + \frac{12}{8} + \frac{27}{8} + \frac{16}{8} = \frac{56}{8} = 7 \end{aligned}$$

■

### 5.3 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer diskreten Zufallsvariablen

Im Falle einer *diskreten* Zufallsvariablen  $X$  lautet die Definition der drei Kennwerte *Mittelwert*  $\mu$ , *Varianz*  $\sigma^2$  und *Standardabweichung*  $\sigma$  wie folgt:

**Definitionen:** Der *diskreten* Zufallsvariablen  $X$  mit der *Wahrscheinlichkeitsfunktion*  $f(x)$  werden die folgenden *Kennwerte* oder *Maßzahlen* zugeordnet:

**(1) Mittelwert  $\mu$**

$$\mu = E(X) = \sum_i x_i \cdot f(x_i) \quad (\text{II-103})$$

**(2) Varianz  $\sigma^2$**

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i) \quad (\text{II-104})$$

**(3) Standardabweichung  $\sigma$**

Die *Standardabweichung*  $\sigma$  ist die Quadratwurzel aus der Varianz  $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ :

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} \quad (\text{II-105})$$

### Anmerkungen

- (1) Der *Mittelwert*  $\mu$  ist somit definitionsgemäß der *Erwartungswert*  $E(X)$  der diskreten Zufallsvariablen  $X$ .
- (2) Die *Varianz*  $\sigma^2$  ist der *Erwartungswert* der diskreten Zufallsvariablen (Funktion)  $Z = (X - \mu)^2$ , durch die die *mittlere quadratische Abweichung* vom Mittelwert  $\mu$  beschrieben wird:

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i) \quad (\text{II-106})$$

- (3) Für die *Varianz* gilt stets  $\sigma^2 \geq 0$ . Sie ist ein geeignetes Maß für die *Streuung* der einzelnen Werte  $x_i$  um den Mittelwert  $\mu$ . Bei *kleiner* Varianz liegen die meisten Werte in der Nähe von  $\mu$  und größere Abweichungen vom Mittelwert treten nur mit *geringen* Wahrscheinlichkeiten auf.
- (4) Häufig wird auch die *Standardabweichung*  $\sigma \geq 0$  als *Streuungsmaß* verwendet. Sie beschreibt die *durchschnittliche (mittlere) Abweichung* der Zufallsvariablen  $X$  von ihrem Mittelwert  $\mu$  und besitzt gegenüber der Varianz den *Vorteil*, dass sie die *gleiche Dimension* und Einheit hat wie die Zufallsvariable  $X$ .
- (5) Bei einer *symmetrischen* Verteilung mit dem *Symmetriezentrum*  $x_0$  gilt:

$$\mu = E(X) = x_0 \quad (\text{II-107})$$

(falls der Mittelwert  $\mu$  existiert; siehe hierzu das nachfolgende Beispiel (2)).

- (6) Die der Zufallsvariablen  $X$  zugeordneten Kennwerte  $\mu$ ,  $\sigma^2$  und  $\sigma$  werden häufig auch als Kennwerte der *diskreten Verteilung* bezeichnet (z. B.  $\mu$ : Mittelwert der Verteilung).
- (7) Für die *Varianz*  $\sigma^2$  wird häufig auch das Symbol  $D^2(X)$  verwendet.

Für die *Varianz*  $\sigma^2$  einer Zufallsvariablen  $X$  lässt sich noch eine *spezielle* Formel herleiten, die in den Anwendungen oft *bequemer* ist als die Definitionsformel (II-104):

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[(X - \mu)^2] = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = \\ &= E(X^2) - 2\mu \cdot \underbrace{E(X)}_{\mu} + \mu^2 \cdot \underbrace{E(1)}_1 = \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 \end{aligned} \quad (\text{II-108})$$

Somit gilt allgemein:

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2 \quad (\text{II-109})$$

## ■ Beispiele

- (1) Beim „Wurf mit zwei unterscheidbaren homogenen Würfeln“ ist die diskrete Zufallsvariable

$$X = \text{Erzielte Augensumme}$$

nach Beispiel 2 aus Abschnitt 4.3 wie folgt verteilt:

$x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Mittelwert  $\mu$ , Varianz  $\sigma^2$  und Standardabweichung  $\sigma$  berechnen wir zweckmäßigerweise mit Hilfe der folgenden (schrittweise) erweiterten Verteilungstabelle (jetzt in spaltenförmiger Anordnung):

$x_i$	$36 \cdot f(x_i)$	$36 \cdot x_i \cdot f(x_i)$	$x_i - \mu$	$(x_i - \mu)^2 \cdot 36 \cdot f(x_i)$
2	1	2	-5	$25 \cdot 1 = 25$
3	2	6	-4	$16 \cdot 2 = 32$
4	3	12	-3	$9 \cdot 3 = 27$
5	4	20	-2	$4 \cdot 4 = 16$
6	5	30	-1	$1 \cdot 5 = 5$
7	6	42	0	$0 \cdot 6 = 0$
8	5	40	1	$1 \cdot 5 = 5$
9	4	36	2	$4 \cdot 4 = 16$
10	3	30	3	$9 \cdot 3 = 27$
11	2	22	4	$16 \cdot 2 = 32$
12	1	12	5	$25 \cdot 1 = 25$
$\sum$		252	0	210

### Zum Aufbau dieser Tabelle

**1. Schritt:** Die beiden Zeilen der ursprünglichen Verteilungstabelle werden als Spalten 1 und 2 übernommen, wobei wir die Wahrscheinlichkeitswerte  $f(x_i)$  mit dem gemeinsamen Nenner 36 multipliziert haben, um die Brüche zu beseitigen. Die 3. Spalte enthält das zeilenweise berechnete Produkt der Spalten 1 und 2 (also die Werte  $x_i \cdot 36 \cdot f(x_i) = 36 \cdot x_i \cdot f(x_i)$ ), aus ihrer grau unterlegten Summe in der letzten Zeile erhält man den Mittelwert  $\mu$ :

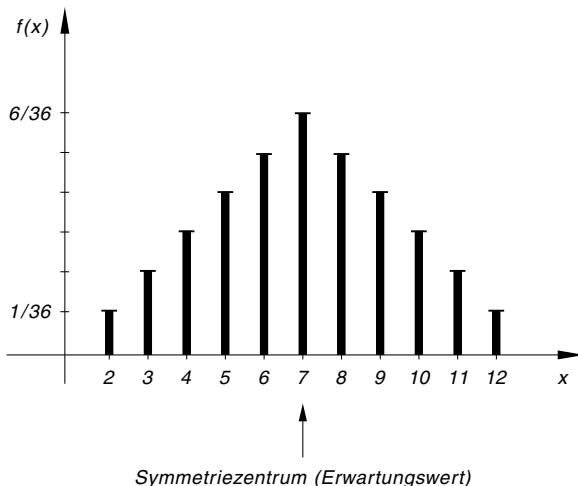
$$\mu = \sum_i x_i \cdot f(x_i) = \frac{1}{36} \cdot \sum_i 36 \cdot x_i \cdot f(x_i) = \frac{1}{36} \cdot 252 = \frac{252}{36} = 7$$

**2. Schritt:** Nach der erfolgten Berechnung des Mittelwertes wird die Tabelle sinnvoller Weise um zwei weitere Spalten erweitert. Spalte 4 enthält die Abweichungen  $x_i - \mu$  der Einzelwerte  $x_i$  vom Mittelwert  $\mu$ , Spalte 5 die Abweichungsquadrate, multipliziert mit den Werten der 2. Spalte. Ihre Summe wird für die Berechnung der Varianz  $\sigma^2$  benötigt:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i) = \frac{1}{36} \cdot \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot 36 \cdot f(x_i) = \\ &= \frac{1}{36} \cdot 210 = \frac{210}{36} = 5,833\end{aligned}$$

Die Standardabweichung beträgt somit  $\sigma = \sqrt{5,833} = 2,415$ .

Der Mittelwert  $\mu = 7$  fällt dabei erwartungsgemäß mit dem Symmetriezentrum  $x_0 = 7$  der Verteilung zusammen (Bild II-73). Bei *oftmaliger* Wiederholung des Würfelexperiments „erwarten“ wir daher eine durchschnittliche Augensumme von nahezu 7.



**Bild II-73** Stabdiagramm für die Verteilung der „Augensumme  $X$ “ beim Wurf mit zwei unterschiedbaren homogenen Würfeln

- (2) Einer Urne mit 3 weißen und 2 schwarzen Kugeln entnehmen wir nacheinander drei Kugeln *mit Zurücklegen* (Standardbeispiel 3, Abschnitt 2.1). Die diskrete Zufallsvariable

$X = \text{Anzahl der schwarzen Kugeln bei drei Ziehungen mit Zurücklegen}$   
besitzt dann die folgende Verteilung (siehe hierzu auch Beispiel 3 aus Abschnitt 4.3):

$x_i$	0	1	2	3
$f(x_i)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

Der *Erwartungs-* oder *Mittelwert* ist somit nach Gleichung (II-103):

$$\begin{aligned}\mu &= \sum_{i=1}^4 x_i \cdot f(x_i) = 0 \cdot \frac{27}{125} + 1 \cdot \frac{54}{125} + 2 \cdot \frac{36}{125} + 3 \cdot \frac{8}{125} = \\ &= 0 + \frac{54}{125} + \frac{72}{125} + \frac{24}{125} = \frac{150}{125} = \frac{6}{5} = 1,2\end{aligned}$$

Wir interpretieren dieses Ergebnis wie folgt: Wenn wir dieses Zufallsexperiment beispielsweise 1000-mal wiederholen (dabei werden insgesamt 3000 Kugeln gezogen), so dürfen wir „erwarten“, dass sich unter den 3000 gezogenen Kugeln nahezu 1200 *schwarze* Kugeln befinden.

Die *Varianz*  $\sigma^2$  wollen wir diesmal nicht nach der Definitionsformel (II-104), sondern nach der rechnerisch bequemeren Formel (II-109) bestimmen. Dazu benötigen wir noch den Erwartungswert  $E(X^2)$ , der sich wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \sum_{i=1}^4 x_i^2 \cdot f(x_i) = 0^2 \cdot \frac{27}{125} + 1^2 \cdot \frac{54}{125} + 2^2 \cdot \frac{36}{125} + 3^2 \cdot \frac{8}{125} = \\ &= 0 + \frac{54}{125} + \frac{144}{125} + \frac{72}{125} = \frac{270}{125} = \frac{54}{25} = 2,16\end{aligned}$$

Für die *Varianz* erhalten wir damit nach Formel (II-109):

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = 2,16 - 1,2^2 = 2,16 - 1,44 = 0,72$$

Die *Standardabweichung* beträgt demnach  $\sigma = \sqrt{0,72} = 0,85$ . ■

## 5.4 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer stetigen Zufallsvariablen

Bei einer *stetigen* Zufallsvariablen  $X$  werden die drei Kennwerte *Mittelwert*  $\mu$ , *Varianz*  $\sigma^2$  und *Standardabweichung*  $\sigma$  wie folgt in der Integralform definiert:

**Definitionen:** Der *stetigen* Zufallsvariablen  $X$  mit der Dichtefunktion  $f(x)$  werden die folgenden *Kennwerte* oder *Maßzahlen* zugeordnet:

### (1) Mittelwert $\mu$

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \quad (\text{II-110})$$

### (2) Varianz $\sigma^2$

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx \quad (\text{II-111})$$

**(3) Standardabweichung  $\sigma$** 

Die *Standardabweichung*  $\sigma$  ist die Quadratwurzel aus der Varianz  $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ :

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} \quad (\text{II-112})$$

*Anmerkungen*

- (1) Alle Anmerkungen aus Abschnitt 5.3 gelten sinngemäß auch für den Fall einer *stetigen* Zufallsvariablen.
- (2) Auch bei einer *stetigen* Zufallsvariablen  $X$  erfolgt die Berechnung der *Varianz*  $\sigma^2$  meist *bequemer* nach der Formel

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 \quad (\text{II-113})$$

**■ Beispiele**

- (1) Wir berechnen den Mittelwert  $E(X) = \mu$  und die Varianz  $\text{Var}(X) = \sigma^2$  einer gleichmäßig verteilten stetigen Zufallsvariable  $X$  mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{alle übrigen } x \end{cases}$$

(siehe hierzu auch Beispiel (1) in Abschnitt 4.4 sowie Bild II-67).

**Mittelwert  $\mu$  (nach Gleichung II-110)**

$$\begin{aligned} \mu &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_a^b = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{b-a} \left[ x^2 \right]_a^b = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(b+a)(b-a)}{b-a} = \frac{1}{2} (a+b) \end{aligned}$$

(unter Verwendung des 3. Binoms:  $(b+a)(b-a) = b^2 - a^2$ )

### Varianz $\sigma^2$ (nach Gleichung II-113)

Wir benötigen noch den Erwartungswert der Zufallsvariablen  $X^2$ :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b x^2 dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_a^b = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{b-a} \left[ x^3 \right]_a^b = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^3 - a^3}{b-a} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{(b-a)(a^2 + ab + b^2)}{b-a} = \frac{1}{3} (a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

(unter Verwendung der Formel  $b^3 - a^3 = (b-a)(a^2 + ab + b^2)$ )

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E(X^2) - \mu^2 = \frac{1}{3} (a^2 + ab + b^2) - \frac{1}{4} (a+b)^2 = \\ &= \frac{4(a^2 + ab + b^2) - 3(a^2 + 2ab + b^2)}{12} = \\ &= \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12} = \frac{1}{12} (a-b)^2 \end{aligned}$$

(2)  $X$  sei eine *stetige* Zufallsvariable mit der *linearen* Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x) = 0,02x \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 10$$

(für alle übrigen  $x$  ist  $f(x) = 0$ ). Ihr *Erwartungs-* oder *Mittelwert*  $\mu$  berechnet sich mit der Definitionsformel (II-110) wie folgt:

$$\begin{aligned} \mu &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^{10} x \cdot (0,02x) dx = 0,02 \cdot \int_0^{10} x^2 dx = \\ &= 0,02 \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^{10} = \frac{0,02}{3} \left[ x^3 \right]_0^{10} = \frac{0,02}{3} (1000 - 0) = \frac{20}{3} = 6,67 \end{aligned}$$

Die *Varianz*  $\sigma^2$  wollen wir nach der bequemeren Formel (II-113) berechnen. Dazu benötigen wir zunächst den Erwartungswert der Zufallsvariablen  $X^2$ :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_0^{10} x^2 \cdot (0,02x) dx = 0,02 \cdot \int_0^{10} x^3 dx = \\ &= 0,02 \left[ \frac{1}{4} x^4 \right]_0^{10} = 0,02 \cdot \frac{1}{4} \left[ x^4 \right]_0^{10} = 0,005 (10000 - 0) = 50 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die *Varianz* den folgenden Wert:

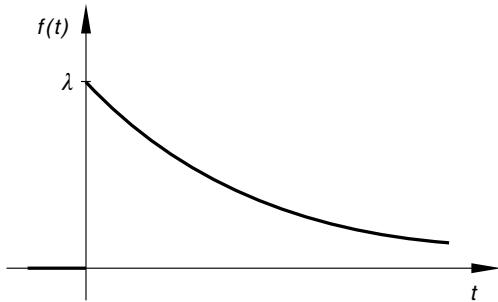
$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = 50 - \left(\frac{20}{3}\right)^2 = 50 - \frac{400}{9} = \frac{450 - 400}{9} = \frac{50}{9} = 5,56$$

Die *Standardabweichung* beträgt somit  $\sigma = \sqrt{5,56} = 2,36$ .

- (3) Die *Lebensdauer*  $T$  eines bestimmten elektronischen Bauelements kann als eine *exponentialverteilte* Zufallsgröße mit der *Dichtefunktion*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}$$

angesehen werden ( $\lambda > 0$ ; Bild II-74 zeigt den Verlauf der Dichtefunktion).



**Bild II-74**

Dichtefunktion der exponentialverteilten Zufallsvariablen „ $T$  = Lebensdauer eines elektronischen Bauelements“

Den *Erwartungs-* oder *Mittelwert* der Zufallsvariablen  $T$  haben wir bereits in Abschnitt 5.1.3 zu

$$\mu = E(T) = 1/\lambda$$

bestimmt. Jetzt interessieren wir uns für die *Varianz*  $\sigma^2$  dieser Exponentialverteilung. Um diese mit Hilfe der Formel (II-113) berechnen zu können, benötigen wir noch den Erwartungswert  $E(T^2)$ . Für ihn erhalten wir den folgenden Wert:

$$\begin{aligned} E(T^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} t^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = \lambda \cdot \int_0^{\infty} t^2 \cdot e^{-\lambda t} dt = \\ &= \lambda \left[ \frac{\lambda^2 t^2 + 2\lambda t + 2}{-\lambda^3} \cdot e^{-\lambda t} \right]_0^{\infty} = \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} \left[ (\lambda^2 t^2 + 2\lambda t + 2) \cdot e^{-\lambda t} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{\lambda^2} (0 - 2) = \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Die Auswertung des Integrals erfolgte dabei mit der *Integraltafel* der *Formelsammlung* (Integral Nr. 314 mit  $a = -\lambda$ ).

Für die *Varianz*  $\sigma^2$  erhalten wir damit unter Verwendung von Formel (II-113):

$$\sigma^2 = E(T^2) - \mu^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Die *Standardabweichung* der exponentialverteilten Zufallsvariablen  $T$  beträgt somit  $\sigma = 1/\lambda$  und stimmt mit dem Mittelwert  $\mu$  überein (siehe hierzu auch Abschnitt 6.5). ■

## 5.5 Mittelwert und Varianz einer linearen Funktion

$X$  sei eine diskrete oder stetige Zufallsvariable mit dem *Mittelwert*  $E(X) = \mu_X$  und der *Varianz*  $\text{Var}(X) = \sigma_X^2$ . Dann lassen sich die entsprechenden Kennwerte der von  $X$  abhängigen *linearen* Funktion (Zufallsvariablen)

$$Z = g(X) = aX + b \quad (\text{II-114})$$

aus diesen Maßzahlen leicht bestimmen ( $a, b$ : Konstanten). Für den *Mittelwert*  $\mu_Z$  erhalten wir unter Verwendung der Gleichungen (II-101) und (II-102):

$$\mu_Z = E(Z) = E(aX + b) = a \cdot \underbrace{E(X)}_{\mu_X} + b \cdot \underbrace{E(1)}_1 = a \cdot \mu_X + b \quad (\text{II-115})$$

Analog bestimmen wir die *Varianz* von  $Z$  mit Hilfe der Formel

$$\sigma_Z^2 = \text{Var}(Z) = \text{Var}(aX + b) = E[(Z - \mu_Z)^2] = E(Z^2) - \mu_Z^2 \quad (\text{II-116})$$

Zunächst aber müssen wir noch den benötigten Erwartungswert  $E(Z^2)$  berechnen:

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= E[(aX + b)^2] = E(a^2 X^2 + 2abX + b^2) = \\ &= a^2 \cdot \underbrace{E(X)^2}_{\mu_X} + 2ab \cdot \underbrace{E(X)}_{\mu_X} + b^2 \cdot \underbrace{E(1)}_1 = \\ &= a^2 \cdot E(X^2) + 2ab \cdot \mu_X + b^2 \end{aligned} \quad (\text{II-117})$$

Diesen Ausdruck setzen wir in Gleichung (II-116) ein, berücksichtigen dabei noch die Beziehung  $\mu_Z = a \cdot \mu_X + b$  aus Gleichung (II-115) und erhalten auf diese Weise für die gesuchte *Varianz*  $\sigma_Z^2$  den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \sigma_Z^2 &= E(Z^2) - \mu_Z^2 = a^2 \cdot E(X^2) + 2ab \cdot \mu_X + b^2 - (a \cdot \mu_X + b)^2 = \\ &= a^2 \cdot E(X^2) + 2ab \cdot \mu_X + b^2 - a^2 \cdot \mu_X^2 - 2ab \cdot \mu_X - b^2 = \\ &= a^2 \cdot E(X^2) - a^2 \cdot \mu_X^2 = a^2 \underbrace{[E(X^2) - \mu_X^2]}_{\sigma_X^2 \text{ nach Gleichung (II-113)}} = a^2 \cdot \sigma_X^2 \end{aligned} \quad (\text{II-118})$$

Wir fassen zusammen:

### Mittelwert und Varianz einer linearen Funktion

*Mittelwert* und *Varianz* einer *linearen* Funktion  $Z = aX + b$  lassen sich aus den entsprechenden Kennwerten der *unabhängigen* Zufallsvariablen  $X$  wie folgt berechnen:

(1) **Mittelwert**  $E(Z) = \mu_Z$

$$E(Z) = E(aX + b) = a \cdot E(X) + b \quad (\text{II-119})$$

oder – in anderer Schreibweise –

$$\mu_Z = a \cdot \mu_X + b \quad (\text{II-120})$$

(2) **Varianz**  $\text{Var}(Z) = \sigma_Z^2$

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}(aX + b) = a^2 \cdot \text{Var}(X) \quad (\text{II-121})$$

oder – in anderer Schreibweise –

$$\sigma_Z^2 = a^2 \cdot \sigma_X^2 \quad (\text{II-122})$$

Dabei bedeuten:

$E(X) = \mu_X$ : Mittelwert der Zufallsvariablen  $X$

$\text{Var}(X) = \sigma_X^2$ : Varianz der Zufallsvariablen  $X$

### Anmerkungen

- (1) Die *lineare* Funktion  $Z = aX + b$  kann auch als eine *lineare Transformation* gedeutet werden, durch die die Zufallsvariable  $X$  in die Zufallsvariable  $Z$  übergeführt wird. Der *Mittelwert*  $\mu_X$  wird dabei auf die *gleiche* Weise transformiert wie  $X$  selbst. Die Transformation der *Varianz*  $\sigma_X^2$  ist dagegen nur von  $a$ , nicht aber vom konstanten Summanden  $b$  abhängig. Die *Standardabweichung*  $\sigma_X$  transformiert sich dabei wie folgt:

$$\sigma_Z = \sqrt{\text{Var}(Z)} = \sqrt{a^2 \cdot \sigma_X^2} = |a| \cdot \sigma_X \quad (\text{II-123})$$

- (2) Nützliche *Rechenregeln* ergeben sich aus den folgenden *Sonderfällen*:

$a = 0$	$E(b) = b, \quad \text{Var}(b) = 0$	(II-124)
---------	-------------------------------------	----------

$a = 1$	$E(X + b) = E(X) + b$	(II-125)
---------	-----------------------	----------

$$\text{Var}(X + b) = \text{Var}(X) \quad (\text{II-126})$$

$b = 0$	$E(aX) = a \cdot E(X)$	(II-127)
---------	------------------------	----------

$$\text{Var}(aX) = a^2 \cdot \text{Var}(X) \quad (\text{II-128})$$

## ■ Beispiele

- (1) Die Zufallsvariable  $X$  besitze die beiden Kennwerte  $\mu_X = 10$  und  $\sigma_X^2 = 1$ . Daraus berechnen sich *Mittelwert*  $\mu_Z$  und *Varianz*  $\sigma_Z^2$  der *linearen Funktion*  $Z = 2X + 1$  wie folgt ( $a = 2$ ,  $b = 1$ ):

$$\mu_Z = a \cdot \mu_X + b = 2 \cdot 10 + 1 = 20 + 1 = 21$$

$$\sigma_Z^2 = a^2 \cdot \sigma_X^2 = 2^2 \cdot 1 = 4$$

Die *Standardabweichung* beträgt somit  $\sigma_Z = \sqrt{4} = 2$ .

- (2)  $X$  sei eine Zufallsvariable mit dem *Mittelwert*  $\mu_X = \mu$  und der *Varianz*  $\sigma_X^2 = \sigma^2$ . Durch die *lineare Transformation*

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} (X - \mu) = \frac{1}{\sigma} \cdot X - \frac{\mu}{\sigma}$$

wird die Zufallsvariable  $X$  in eine Zufallsvariable  $Z$  mit dem *Mittelwert*  $\mu_Z = 0$  und der *Varianz*  $\sigma_Z^2 = 1$  übergeführt:

$$\mu_Z = a \cdot \mu_X + b = \frac{1}{\sigma} \cdot \mu - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = 0$$

$$\sigma_Z^2 = a^2 \cdot \sigma_X^2 = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 \cdot \sigma^2 = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2 = 1$$

Die durchgeführte Transformation heißt *Standardisierung* oder *Standardtransformation*, die Zufallsvariable  $Z$  ist die zu  $X$  gehörige *standardisierte Zufallsvariable*.

■

## 6 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen

### 6.1 Binomialverteilung

#### Bernoulli-Experiment

Zufallsexperimente mit nur *zwei* verschiedenen möglichen Ausgängen (Ergebnissen) führen zur *Binomialverteilung*. Bei einem solchen Experiment tritt ein Ereignis  $A$  mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  und das zu  $A$  *komplementäre* Ereignis  $\bar{A}$  mit der Wahrscheinlichkeit  $q = 1 - p$  ein. Dies gilt auch für *jede* Wiederholung des Experiments, d. h. das Ereignis  $A$  tritt bei *jeder* Durchführung des Experiments mit der gleichen und somit *konstanten* Wahrscheinlichkeit  $p$  ein. Man bezeichnet ein Experiment dieser Art, bei dem nur zwei verschiedene sich  *gegenseitig ausschließende* Ereignisse mit konstanten Wahrscheinlichkeiten eintreten können, als ein *Bernoulli-Experiment*. Wir geben zunächst drei einfache Beispiele.

## ■ Beispiele

- (1) Beim *Münzwurf* (Wurf einer homogenen Münze) sind nur die beiden sich gegenseitig ausschließenden Ereignisse

$$A: \text{ „Zahl“} \quad \text{und} \quad \bar{A}: \text{ „Wappen“}$$

möglich. Sie treten bei *jedem* Wurf mit den Wahrscheinlichkeiten

$$p = P(A) = 1/2 \quad \text{und} \quad q = P(\bar{A}) = 1/2$$

auf. Es handelt sich also beim Münzwurf um ein *Bernoulli-Experiment*.

- (2) In einer Urne befinden sich 5 weiße und 3 schwarze Kugeln. Bei der (zufälligen) Entnahme einer Kugel sind nur die beiden sich gegenseitig ausschließenden Ereignisse

$$A: \text{ Ziehung einer weißen Kugel}$$

und

$$\bar{A}: \text{ Ziehung einer schwarzen Kugel}$$

möglich. Sie treten mit den Wahrscheinlichkeiten

$$p = P(A) = 5/8 \quad \text{und} \quad q = P(\bar{A}) = 3/8$$

auf. Wird dabei die jeweils gezogene Kugel *vor* der nächsten Ziehung in die Urne *zurückgelegt*, so erfolgen auch alle weiteren Ziehungen mit diesen *konstanten* Wahrscheinlichkeiten. Auch in diesem Beispiel handelt es sich somit um ein *Bernoulli-Experiment* mit den Wahrscheinlichkeiten  $p = 5/8$  und  $q = 3/8$ .

- (3) Bei der *Massenproduktion* eines bestimmten elektronischen Bauteils ist aus langjähriger Erfahrung bekannt, dass der *Ausschussanteil* 3 % beträgt (d. h. 3 % der produzierten Bauteile sind unbrauchbar). Die Fertigung der einzelnen Bauteile soll dabei völlig unabhängig voneinander erfolgen. Wir können dann die Herstellung eines Bauteils als ein *Zufallsexperiment* auffassen, bei dem nur die beiden sich gegenseitig ausschließenden Ereignisse

$$A: \text{ brauchbares Teil} \quad \text{und} \quad \bar{A}: \text{ unbrauchbares Teil}$$

möglich sind. Sie treten mit den (konstanten) Wahrscheinlichkeiten

$$p = P(A) = 0,97 \quad \text{und} \quad q = P(\bar{A}) = 0,03$$

auf. Auch hier handelt es sich also um ein *Bernoulli-Experiment*. ■

Wir betrachten jetzt ein sog. *Mehrstufen-Experiment*, das aus einer  $n$ -fachen Ausführung eines *Bernoulli-Experiments* mit den beiden möglichen (und sich gegenseitig ausschließenden) Ereignissen  $A$  und  $\bar{A}$  besteht. Dabei setzen wir voraus, dass das Ereignis  $A$  in *jedem* der  $n$  Teilexperimente mit der *gleichen* Wahrscheinlichkeit  $P(A) = \text{const.} = p$  eintritt und die Ergebnisse der einzelnen Stufen *voneinander unabhängig* sind.

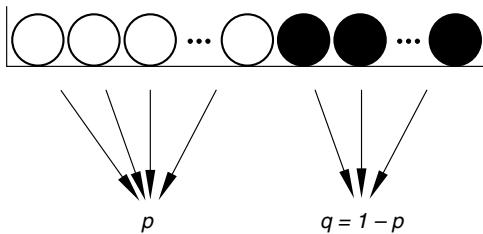
Diese Voraussetzungen sind z. B. in den beiden weiter oben angeführten Beispielen „Münzwurf“ und „Ziehung einer Kugel mit Zurücklegen“ bei einer mehrfachen Versuchsausführung stets erfüllt. Ein derartiges *Mehrstufen-Experiment* nennen wir ein *Bernoulli-Experiment vom Umfang n*. Dann kann die Zufallsvariable

$X = \text{Anzahl der Versuche, in denen das Ereignis } A \text{ bei einer } n\text{-fachen Ausführung des Bernoulli-Experiments eintritt}$

jeden der Werte  $0, 1, 2, \dots, n$  annehmen. Wir interessieren uns nun für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $X = x$  („das Ereignis A tritt bei  $n$  Versuchsausführungen genau  $x$ -mal ein“). Die Verteilung dieser Zufallsvariablen  $X$  soll im Folgenden anhand eines einfachen *Urnenmodells* hergeleitet werden.

### Herleitung der Binomialverteilung am Urnenmodell

In einer Urne befinden sich *weiße* und *schwarze* Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Ziehung eine *weiße* Kugel zu erhalten, sei  $p$ . Dann ist  $q = 1 - p$  die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Ziehung eine *schwarze* Kugel zu erhalten (Bild II-75).

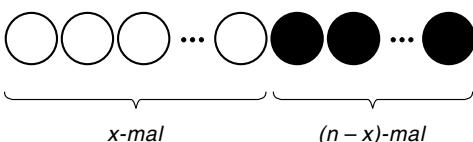


**Bild II-75**

Die Ziehung einer *weißen* Kugel erfolgt mit der Wahrscheinlichkeit  $p$ , die einer *schwarzen* Kugel mit der Wahrscheinlichkeit  $q = 1 - p$

Das Ereignis  $A$  wird dabei durch eine *weiße* Kugel, das *Komplementäreignis*  $\bar{A}$  durch eine *schwarze* Kugel symbolisch dargestellt. Die Ziehung einer weißen Kugel ist daher gleichbedeutend mit dem Eintreten des Ereignisses  $A$ .

Nach jeder Ziehung wird die jeweils gezogene Kugel in die Urne *zurückgelegt* (Ziehung mit Zurücklegen). Daher bleiben die Wahrscheinlichkeiten  $p$  und  $q$  für jede Ziehung konstant<sup>21)</sup>. Wir ziehen nun nacheinander  $n$  Kugeln, darunter mögen sich dann genau  $x$  *weiße* und somit  $n - x$  *schwarze* Kugeln befinden. Unser *mehrstufiges Bernoulli-Experiment* vom Umfang  $n$  führt dabei zu der in Bild II-76 dargestellten Anordnung der gezogenen Kugeln<sup>22)</sup>.



**Bild II-76**

<sup>21)</sup> Befinden sich in der Urne insgesamt  $N$  Kugeln, darunter  $M$  weiße und somit  $N - M$  schwarze Kugeln, so ist  $p = \frac{M}{N}$  und  $q = \frac{N - M}{N}$ .

<sup>22)</sup> Bei dieser *speziellen* Realisierung sind wir von der *Annahme* ausgegangen, dass *zunächst*  $x$  weiße und *anschließend*  $n - x$  schwarze Kugeln gezogen wurden.

Da *jede* der  $x$  weißen Kugeln mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  und *jede* der  $n - x$  schwarzen Kugeln mit der Wahrscheinlichkeit  $q$  gezogen wurde, ist die Wahrscheinlichkeit für diese spezielle Realisierung der Zufallsvariablen

$$X = \text{Anzahl der gezogenen weißen Kugeln bei } n \text{ Ziehungen mit Zurücklegen}$$

nach dem *Multiplikationssatz* für *stochastisch unabhängige* Ereignisse (II-62) durch das Produkt

$$\underbrace{(p \cdot p \cdot p \dots p)}_{x\text{-mal}} \cdot \underbrace{(q \cdot q \cdot q \dots q)}_{(n-x)\text{-mal}} = p^x \cdot q^{n-x} \quad (\text{II-129})$$

gegeben. Es sind jedoch noch weitere Realisierungen des Ereignisses  $X = x$  möglich. Sie entstehen offensichtlich durch *Permutation* der insgesamt  $n$  gezogenen Kugeln. Diese zerfallen dabei in *zwei* Klassen zu je  $x$  weißen und  $n - x$  schwarzen Kugeln. Die Anzahl der Permutationen ist dann nach Gleichung (II-5) mit  $n_1 = x$  und  $n_2 = n - x$  durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$P(n; x; n - x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} = \binom{n}{x} \quad (\text{II-130})$$

Jede der Permutationen beschreibt dabei eine ganz *spezielle* Realisierung des Ereignisses  $X = x$  und tritt daher mit der Wahrscheinlichkeit  $p^x \cdot q^{n-x}$  ein. Da alle Realisierungen sich  *gegenseitig ausschließen*, addieren sich nach dem *Additionsaxiom* (II-43) die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Realisierungen und wir erhalten<sup>23)</sup>:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (\text{II-131})$$

Dies aber ist die gesuchte *Wahrscheinlichkeitsfunktion*  $f(x)$  der *diskreten Binomialverteilung*:

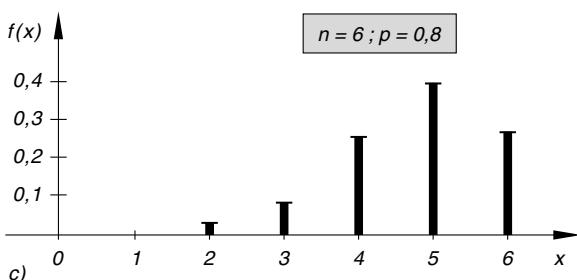
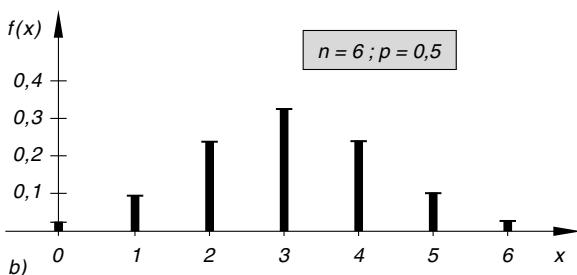
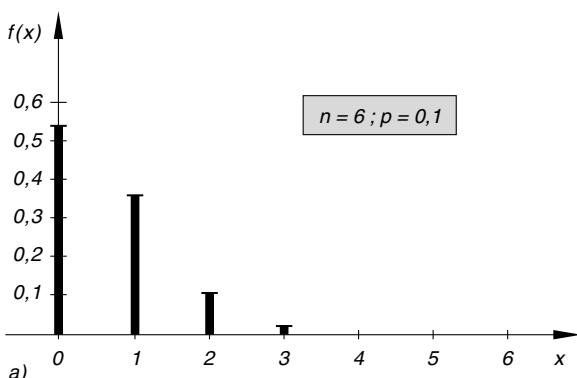
$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (\text{II-132})$$

$n$  und  $p$  sind dabei die *Parameter* der Binomialverteilung, deren *Verteilungstabelle* das folgende Aussehen hat:

$x$	0	1	2	$\dots$	$n$
$f(x)$	$q^n$	$\binom{n}{1} q^{n-1} \cdot p$	$\binom{n}{2} q^{n-2} \cdot p^2$	$\dots$	$p^n$

Bild II-77 zeigt die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Binomialverteilung für  $n = 6$  und verschiedene Werte der Wahrscheinlichkeit  $p$ .

<sup>23)</sup> Es gibt genau  $\binom{n}{x}$  Realisierungen des Ereignisses  $X = x$ , jede tritt dabei mit der Wahrscheinlichkeit  $p^x \cdot q^{n-x}$  ein.



**Bild II-77** Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Binomialverteilung für den Parameter  $n = 6$  und verschiedene Werte der Wahrscheinlichkeit  $p$

- a)  $p = 0,1$     b)  $p = 0,5$     c)  $p = 0,8$

Die Bezeichnung *Binomialverteilung* erklärt sich aus der Eigenschaft, dass die in der Verteilungstabelle angegebenen Wahrscheinlichkeiten der Reihe nach den Summanden in der *binomischen Entwicklung* von  $(q + p)^n$  entsprechen<sup>24)</sup>.

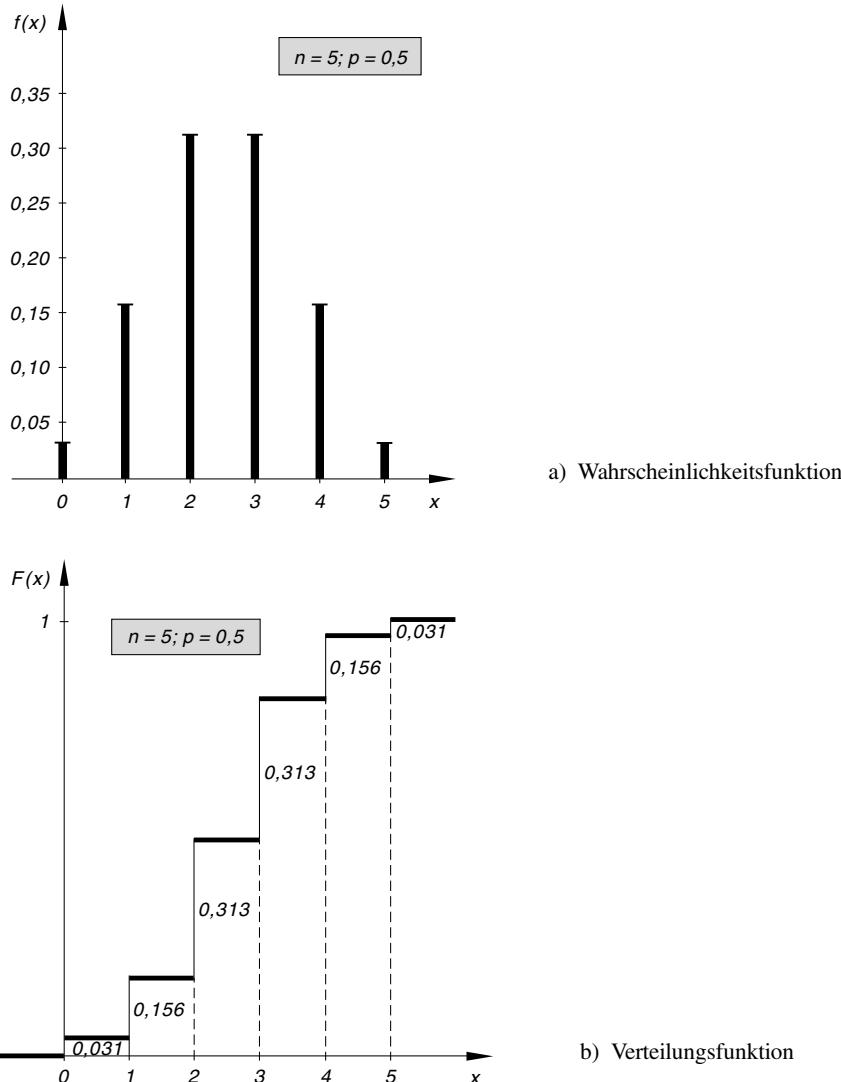
$$(q + p)^n = \underbrace{q^n}_{f(0)} + \underbrace{\binom{n}{1} q^{n-1} \cdot p}_{f(1)} + \underbrace{\binom{n}{2} q^{n-2} \cdot p^2}_{f(2)} + \dots + \underbrace{p^n}_{f(n)} \quad (\text{II-133})$$

<sup>24)</sup> Vergleiche hierzu den *Binomischen Lehrsatz* in Band 1, Kap. I, Abschnitt 6.

Die *Verteilungsfunktion* der Binomialverteilung lautet wie folgt:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \quad (\text{II-134})$$

Bild II-78 zeigt den Verlauf der *Wahrscheinlichkeitsfunktion*  $f(x)$  und der zugehörigen *Verteilungsfunktion*  $F(x)$  für die Parameterwerte  $n = 5$  und  $p = 0,5$ .



**Bild II-78** Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$  und zugehörige Verteilungsfunktion  $F(x)$  einer Binomialverteilung mit den Parametern  $n = 5$  und  $p = 0,5$

- a) Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$
- b) Verteilungsfunktion  $F(x)$

Wir fassen die wichtigsten Aussagen wie folgt zusammen:

### Binomialverteilung

Ein *Bernoulli-Experiment* mit den beiden sich  *gegenseitig ausschließenden* Ergebnissen (Ereignissen)  $A$  und  $\bar{A}$  werde  $n$ -mal nacheinander ausgeführt (sog. *mehrstufiges Bernoulli-Experiment* vom Umfang  $n$ ). Dann genügt die *diskrete Zufallsvariable*

$X = \text{Anzahl der Versuche, in denen das Ereignis } A \text{ eintritt}$

der sog. *Binomialverteilung* mit der *Wahrscheinlichkeitsfunktion*

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (\text{II-135})$$

und der zugehörigen *Verteilungsfunktion*

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \quad (x \geq 0) \quad (\text{II-136})$$

(für  $x < 0$  ist  $F(x) = 0$ ).  $n$  und  $p$  sind dabei die *Parameter* der Verteilung.

Die *Kennwerte* oder *Maßzahlen* der Binomialverteilung lauten:

$$\text{Mittelwert: } \mu = np \quad (\text{II-137})$$

$$\text{Varianz: } \sigma^2 = npq = np(1-p) \quad (\text{II-138})$$

$$\text{Standardabweichung: } \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)} \quad (\text{II-139})$$

Dabei bedeuten:

$p$ : *Konstante Wahrscheinlichkeit* für das Eintreten des Ereignisses  $A$  beim Einzelversuch ( $0 < p < 1$ )

$q$ : *Konstante Wahrscheinlichkeit* für das Eintreten des zu  $A$  *komplementären* Ereignisses  $\bar{A}$  beim Einzelversuch ( $q = 1 - p$ )

$n$ : Anzahl der Ausführungen des *Bernoulli-Experiments* (*Umfang* des mehrstufigen *Bernoulli-Experiments*)

### Anmerkungen

- (1) Die Binomialverteilung ist durch die beiden Parameter  $n$  und  $p$  *vollständig* bestimmt und wird daher häufig durch das Symbol  $B(n, p)$  gekennzeichnet. Für die *Wahrscheinlichkeitsfunktion*  $f(x)$  verwendet man auch die Schreibweise  $b(x; n, p)$ .
- (2) Die Binomialverteilung findet überall dort Anwendung, wo *alternative Entscheidungen* zu treffen sind wie z. B. beim *Münzwurf* (*Alternative*: „Zahl“ oder „Wappen“) oder bei der *Qualitätskontrolle* (*Alternative*: „Einwandfrei“ oder „Auschluss“). *Voraussetzung* dabei ist, dass die Wahrscheinlichkeiten  $p = P(A)$  und  $q = P(\bar{A}) = 1 - p$  von Experiment zu Experiment *konstant* bleiben. Dies aber bedeutet, dass bei einem *mehrstufigen Bernoulli-Experiment* alle Stufen *voneinander unabhängig* sind. Jede einzelne Ausführung des Bernoulli-Experiments ist also völlig *unabhängig* von den Ergebnissen der *vorangegangenen Durchführungen* und beeinflusst auch in *keiner Weise nachfolgende Ausführungen*.
- (3) Das Eintreten des Ereignisses  $A$  wird häufig auch als *Erfolg*, das Nichteintreten von  $A$  (d. h. das Eintreten des *komplementären* Ereignisses  $\bar{A}$ ) als *Misserfolg* bezeichnet. Der Parameter  $p$  wird daher auch als *Erfolgswahrscheinlichkeit* bezeichnet.

**Beispiel:** Beim Zufallsexperiment „*Wurf eines homogenen Würfels*“ interessieren wir uns für das Ereignis  $A$ : *Augenzahl „6“*. Jeder Wurf mit dieser Augenzahl als Ergebnis wird dann als ein *Erfolg*, jeder zu einem anderen Ergebnis führende Wurf als ein *Misserfolg* gewertet. Die *Erfolgswahrscheinlichkeit* beträgt hier demnach  $p = 1/6$ .

- (4) Die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$  der Binomialverteilung ist i. Allg. *unsymmetrisch* und besitzt nur im Sonderfall  $p = 0,5$  ein Symmetriezentrum (siehe hierzu Bild II-77 b)). Dieser Fall tritt beispielsweise beim Zufallsexperiment „*Wurf einer homogenen Münze*“ ein (Ereignisse sind  $A$ : „Zahl“ und  $\bar{A}$ : „Wappen“;  $p = q = 0,5$ ; Zufallsvariable  $X = \text{Anzahl „Zahl“ bei } n \text{ Würfen}$ ).
- (5) In der Praxis ist die folgende *Rekursionsformel* oft von großem Nutzen:

$$f(x+1) = \frac{(n-x)p}{(x+1)q} \cdot f(x) \quad (x = 0, 1, \dots, n-1) \quad (\text{II-140})$$

- (6) Im *Sonderfall*  $n = 1$ , d. h. bei einer *einmaligen* Ausführung des *Bernoulli-Experiments*, kann die Zufallsvariable  $X$  nur die Werte 0 und 1 annehmen. Diese Werte beschreiben dabei die beiden möglichen sich aber *ausschließenden* Ereignisse  $A$  und  $\bar{A}$  wie folgt:

$X = 0$ : Das Ereignis  $\bar{A}$  ist eingetreten (d. h. das Ereignis  $A$  ist *nicht* eingetreten)

$X = 1$ : Das Ereignis  $A$  ist eingetreten

Die Verteilung der Zufallsvariablen  $X$  wird daher in diesem Sonderfall auch als sog. *Null-Eins-Verteilung* bezeichnet (Verteilung einer *alternativen* Grundgesamtheit).

## ■ Beispiele

- (1) In einer Urne befinden sich 5 weiße und 3 schwarze Kugeln. Wir ziehen *dreimal* nacheinander eine Kugel *mit Zurücklegen*.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden *genau zwei* weiße Kugeln gezogen?
  - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass *höchstens zwei* weiße Kugeln gezogen werden?

*Lösung:* Bei jeder der 3 Ziehungen hat das Ereignis

A: *Ziehung einer weißen Kugel*

die gleiche *Erfolgswahrscheinlichkeit*  $p = 5/8$ . Das *komplementäre* Ereignis  $\bar{A}$  ist dann die Ziehung einer *schwarzen Kugel*. Dies geschieht mit einer Wahrscheinlichkeit von  $q = 1 - p = 3/8$ . Die Zufallsvariable

$X = \text{Anzahl der gezogenen weißen Kugeln bei drei Ziehungen mit Zurücklegen}$

ist somit *binomialverteilt* mit den *Parametern*  $n = 3$  und  $p = 5/8$ . Die zugehörige *Wahrscheinlichkeitsfunktion* lautet daher:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{3}{x} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^{3-x} \quad (x = 0, 1, 2, 3)$$

- a) Für  $x = 2$  erhalten wir hieraus die gesuchte *Wahrscheinlichkeit*  $P(X = 2)$ :

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= f(2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^1 = 3 \cdot \frac{25}{64} \cdot \frac{3}{8} = \frac{225}{512} = \\ &= 0,439 \approx 44\% \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 44 % befinden sich unter den drei gezogenen Kugeln *genau zwei* weiße. Mit anderen Worten: Wird dieses *3-stufige Bernoulli-Experiment* 100-mal durchgeführt, so können wir in *ungefähr* 44 Fällen „erwarten“, dass sich unter den drei gezogenen Kugeln *genau zwei* weiße Kugeln befinden.

- b) Wir berechnen zunächst die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis  $X = 3$  („*Ziehung von 3 weißen Kugeln*“) und daraus nach der Formel

$$P(X \leq 2) = 1 - P(X = 3)$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $P(X \leq 2)$  für das Ereignis  $X \leq 2$ . Es ist

$$P(X = 3) = f(3) = \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^0 = 1 \cdot \frac{125}{512} \cdot 1 = \frac{125}{512}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= 1 - P(X = 3) = 1 - \frac{125}{512} = \frac{512 - 125}{512} = \frac{387}{512} = \\ &= 0,756 \approx 76\% \end{aligned}$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Wir können daher in *rund* dreiviertel aller Fälle erwarten, dass sich unter den 3 gezogenen Kugeln *höchstens* 2 weiße befinden.

- (2) In einer Fabrik werden serienmäßig Schrauben mit einem *Ausschussanteil* von 2 % hergestellt, d. h. unter 100 hergestellten Schrauben befinden sich im *Mittel* genau 2 unbrauchbare. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten finden wir in einer Zufallsstichprobe von 5 Schrauben *genau* 0, 1, 2, 3, 4 bzw. 5 unbrauchbare Schrauben?

*Lösung:* Auch hier handelt es sich um ein *Bernoulli-Experiment*. Die Alternative lautet dabei: *Brauchbare* oder *unbrauchbare* Schraube (*Ausschuss*). Die Wahrscheinlichkeit, beim Ziehen einer Schraube eine *unbrauchbare* zu erhalten, ist dabei  $p = 0,02$ <sup>25)</sup>. Die Zufallsvariable

$$X = \text{Anzahl der unbrauchbaren Schrauben unter den 5 entnommenen Schrauben}$$

ist dann annähernd *binomialverteilt* mit den Parametern  $n = 5$  und  $p = 0,02$ . Ihre *Wahrscheinlichkeitsfunktion* lautet daher ( $q = 1 - p = 1 - 0,02 = 0,98$ ):

$$f(x) = P(X = x) = \binom{5}{x} \cdot 0,02^x \cdot 0,98^{5-x} \quad (x = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

Die zugehörige *Verteilungstabelle* liefert dann die gesuchten Wahrscheinlichkeiten. Sie hat das folgende Aussehen:

$x$	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,9039	0,0922	0,0038	0,00008	0	0
$P(X = x)$ (in %)	90,4	9,2	0,4	0	0	0

Bild II-79 verdeutlicht diese Verteilung in einem *Wahrscheinlichkeitsdiagramm* (*Stabdiagramm*). So beträgt beispielsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Stichprobe *genau eine* unbrauchbare Schraube enthält:

$$P(X = 1) = f(1) = 0,0922 \approx 9,2\%$$

Stichproben mit *mehr* als 2 unbrauchbaren Schrauben treten dagegen *praktisch kaum* auf.

<sup>25)</sup> Dies gilt streng genommen nur bei einer Ziehung *mit Zurücklegen*. In der Praxis jedoch ist dies aus verschiedenen Gründen *nicht* üblich. Bei großen Stückzahlen spielt es jedoch *keine* Rolle, ob die Ziehung *mit* oder *ohne* Zurücklegen erfolgt. Im nächsten Abschnitt 6.2 werden wir die sog. *hypergeometrische* Verteilung kennenlernen und kommen dabei nochmals auf das angeschnittene Problem zurück.

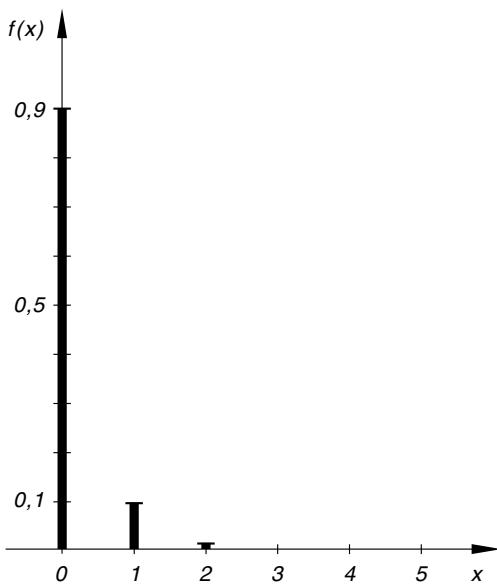


Bild II-79

- (3) Ein homogener Würfel wird 100-mal geworfen. Wie oft dürfen wir dabei eine *gerade* Augenzahl erwarten?

*Lösung:* In diesem Beispiel lautet die Alternative: *Gerade* oder *ungerade* Augenzahl. Das Ereignis

A: *Gerade Augenzahl*

hat die *Erfolgswahrscheinlichkeit*  $p = 1/2$ . Denn es tritt genau dann ein, wenn die erzielte Augenzahl eine „2“ oder eine „4“ oder eine „6“ ergibt, d. h. in 3 von 6 möglichen Fällen. Die Zufallsvariable

$X = \text{Anzahl der Würfe mit einer geraden Augenzahl}$   
 $\text{bei insgesamt } 100 \text{ Würfen}$

ist daher *binomialverteilt* mit den *Parametern*  $n = 100$  und  $p = 1/2$ . Ihr *Erwartungs-* oder *Mittelwert* beträgt dann:

$$\mu = np = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$$

Wir erwarten daher, dass wir bei 100 Würfen *nahezu* 50-mal eine *gerade* Augenzahl erhalten. Die *Varianz* ist

$$\sigma^2 = npq = np(1-p) = 100 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25$$

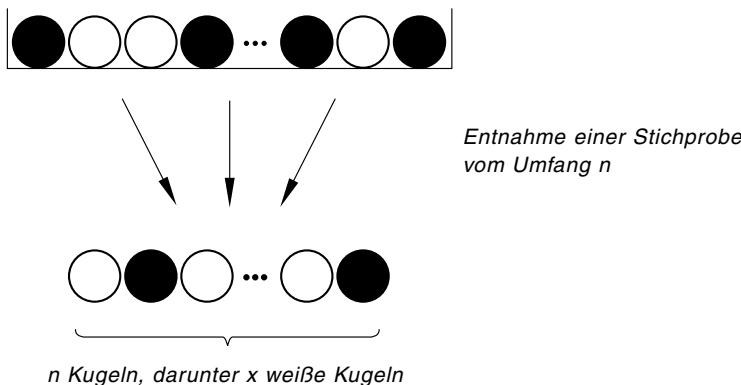
Die zugehörige *Standardabweichung*  $\sigma = \sqrt{25} = 5$  ist dann ein Maß für die *Streuung* der Zufallsvariablen  $X$  um ihren Mittelwert  $\mu = 50$ .

## 6.2 Hypergeometrische Verteilung

In den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen wird häufig eine spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilung benötigt, die unter der Bezeichnung *hypergeometrische Verteilung* bekannt ist. Sie spielt z. B. bei den *Qualitäts-* und *Endkontrollen* eines Herstellers oder den *Abnahmekontrollen* eines Kunden eine große Rolle. Bei der Herleitung dieser *diskreten* Verteilung greifen wir wiederum auf das anschauliche *Urnenmodell* zurück, das uns bereits bei der Binomialverteilung so nützlich war.

### Herleitung der hypergeometrischen Verteilung am Urnenmodell

In einer Urne befinden sich  $N$  Kugeln, darunter  $M$  weiße und  $N - M$  schwarze Kugeln. Nacheinander entnehmen wir ganz zufällig  $n$  Kugeln und interessieren uns dabei für die *Wahrscheinlichkeit*, dass sich unter diesen Kugeln genau  $x$  weiße Kugeln befinden (Bild II-80):



**Bild II-80** Zur Herleitung der hypergeometrischen Verteilung anhand des Urnenmodells

Die Lösung unserer Aufgabe hängt dabei noch ganz wesentlich davon ab, ob die Ziehung der Kugeln mit *oder* ohne Zurücklegen erfolgt. Bei einer Ziehung *mit* Zurücklegen ist die Zufallsvariable

$$X = \text{Anzahl der weißen Kugeln unter den } n \text{ gezogenen Kugeln}$$

*binomialverteilt* mit den Parametern  $n$  und  $p = M/N$  (siehe hierzu den vorangegangenen Abschnitt 6.1).

Wird dagegen *ohne* Zurücklegen gezogen (wie in der Praxis allgemein üblich), so genügt die Zufallsvariable  $X$  *nicht* der Binomialverteilung, sondern der sog. *hypergeometrischen Verteilung*, die wir gleich näher kennenlernen werden.

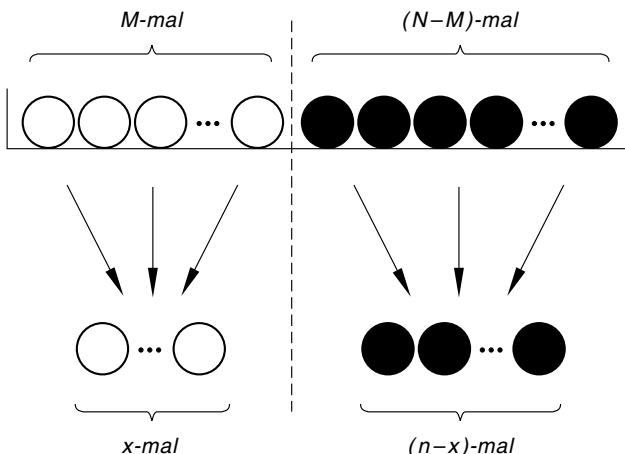
Zunächst jedoch geben wir noch einige Beispiele für Stichproben, die auf einer Ziehung *ohne* Zurücklegen beruhen:

- *Qualitätskontrollen* eines Herstellers bei laufender Produktion: In *regelmäßigen* Zeitabständen wird dabei durch Stichproben kontrolliert, ob z. B. ein bestimmter *Sollwert* auch tatsächlich eingehalten wird.

- *Endkontrollen* eines Herstellers: Sie sollen die Auslieferung *einwandfreier* Ware im vereinbarten Rahmen (z. B. *maximal 2 %* Ausschussware) gewährleisten.
- *Abnahmekontrollen* eines Kunden: Überprüfung der angelieferten Ware, ob die Vereinbarungen bezüglich eines bestimmten *maximalen* Anteils an Ausschussware (z. B. *3 %*) auch tatsächlich eingehalten wurden.

Bei der Herleitung der hypergeometrischen Verteilung anhand des Urnenmodells gehen wir nun schrittweise wie folgt vor:

- (1) Wir entnehmen der Urne nacheinander  $n$  Kugeln *ohne Zurücklegen* (Bild II-80). Dies ist auf genau  $m = \binom{N}{n}$  verschiedene Arten möglich. Denn es handelt sich dabei um *Kombinationen  $n$ -ter Ordnung* von  $N$  Elementen (Kugeln) *ohne Wiederholung* (siehe hierzu Abschnitt 1.3).
- (2) Unter den  $n$  gezogenen Kugeln sollen sich genau  $x$  *weiße* Kugeln befinden. Diese müssen daher aus den insgesamt  $M$  *weißen* Kugeln der Urne stammen. Bild II-81 soll diese Aussage verdeutlichen.



**Bild II-81** Entnahme von  $n$  Kugeln, darunter befinden sich  $x$  weiße und  $n - x$  schwarze

Bekanntlich können wir aber aus  $M$  Elementen (*weißen* Kugeln)  $x$  Elemente (*weiße* Kugeln) auf genau  $g_1 = \binom{M}{x}$  verschiedene Arten auswählen (wiederum handelt es sich um *Kombinationen ohne Wiederholung*).

- (3) Unter den  $n$  gezogenen Kugeln befinden sich genau  $n - x$  schwarze Kugeln. Sie entstammen den insgesamt  $N - M$  *schwarzen* Kugeln der Urne und können auf  $g_2 = \binom{N - M}{n - x}$  verschiedene Arten gezogen werden (*Kombinationen  $(n - x)$ -ter Ordnung ohne Wiederholung*; siehe hierzu Bild II-81).

- (4) Somit gibt es nach dem Multiplikationssatz II-62 genau

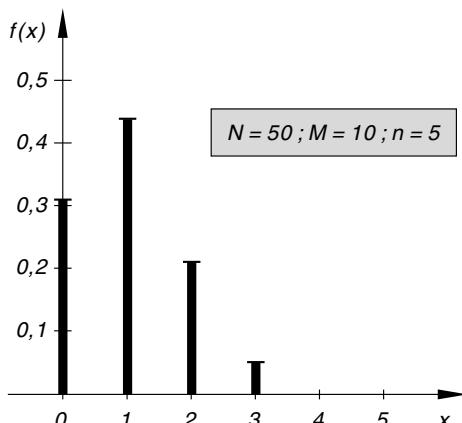
$$g = g_1 \cdot g_2 = \binom{M}{x} \cdot \binom{N - M}{n - x} \quad (\text{II-141})$$

verschiedene Möglichkeiten, der Urne  $n$  Kugeln so zu entnehmen, dass sich darunter genau  $x$  weiße und daher  $n - x$  schwarze Kugeln befinden. Setzen wir diese Anzahl der für das Ereignis  $X = x$  günstigen Fälle ins Verhältnis zur Anzahl  $m = \binom{N}{n}$  der insgesamt möglichen Fälle, so erhalten wir die folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion der sog. hypergeometrischen Verteilung:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{g}{m} = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N - M}{n - x}}{\binom{N}{n}} \quad (\text{II-142})$$

$$(x = 0, 1, 2, \dots, n)$$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$  der hypergeometrischen Verteilung ist unsymmetrisch. Bild II-82 zeigt den Verlauf dieser Funktion für die Parameter  $N = 50$ ,  $M = 10$  und  $n = 5$ .



**Bild II-82** Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$  einer hypergeometrischen Verteilung mit den Parametern  $N = 50$ ,  $M = 10$  und  $n = 5$

Wir fassen zusammen und ergänzen:

### Hypergeometrische Verteilung

In einer Urne befinden sich  $N$  Kugeln, darunter  $M$  weiße und  $N - M$  schwarze Kugeln. Wir entnehmen der Urne ganz zufällig  $n$  Kugeln ohne Zurücklegen (siehe Bild II-81). Dann genügt die *diskrete* Zufallsvariable

$X = \text{Anzahl der weißen Kugeln unter den } n \text{ gezogenen Kugeln}$

der sog. *hypergeometrischen Verteilung* mit der *Wahrscheinlichkeitsfunktion*

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N - M}{n - x}}{\binom{N}{n}} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (\text{II-143})$$

(siehe Bild II-82) und der *Verteilungsfunktion*

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N - M}{n - k}}{\binom{N}{n}} \quad (x \geq 0) \quad (\text{II-144})$$

(für  $x < 0$  ist  $F(x) = 0$ ).  $N, M$  und  $n$  sind die *Parameter* der Verteilung ( $N = 1, 2, 3, \dots$ ;  $M = 1, 2, 3, \dots, N$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots, N$ ;  $M \leq N$ ;  $n \leq N$ ).

Die *Kennwerte* oder *Maßzahlen* der hypergeometrischen Verteilung lauten:

$$\text{Mittelwert: } \mu = n \frac{M}{N} \quad (\text{II-145})$$

$$\text{Varianz: } \sigma^2 = \frac{nM(N - M)(N - n)}{N^2(N - 1)} \quad (\text{II-146})$$

$$\text{Standardabweichung: } \sigma = \sqrt{\frac{nM(N - M)(N - n)}{N^2(N - 1)}} \quad (\text{II-147})$$

### Anmerkungen

- (1) Die Urne repräsentiert eine *Grundgesamtheit* mit  $N$  Elementen, die entweder die Eigenschaft  $A$  oder  $\bar{A}$  besitzen:

$\circlearrowleft$ : Träger der Eigenschaft  $A$       (weiße Kugel)

$\bullet$ : Träger der Eigenschaft  $\bar{A}$       (schwarze Kugel)

Die Parameter  $N$ ,  $M$  und  $n$  der hypergeometrischen Verteilung haben dann die folgende Bedeutung:

$N$ : Anzahl der Elemente in der *Grundgesamtheit*

$M$ : Anzahl der Elemente in der *Grundgesamtheit* mit der Eigenschaft  $A$

$n$ : Anzahl der *entnommenen* Elemente (Umfang der Stichprobe)

$x$ : Anzahl der Elemente in der *Stichprobe* mit der Eigenschaft  $A$

- (2) Die hypergeometrische Verteilung ist durch die drei Parameter  $N$ ,  $M$  und  $n$  *vollständig* bestimmt und wird daher häufig durch das Symbol  $H(N, M, n)$  gekennzeichnet. Für die *Wahrscheinlichkeitsfunktion*  $f(x)$  ist auch die Schreibweise  $h(x; N, M, n)$  üblich.

- (3) In der Praxis ist die folgende *Rekursionsformel* oft sehr nützlich:

$$f(x+1) = \frac{(n-x)(M-x)}{(x+1)(N-M-n+x+1)} \cdot f(x) \quad (\text{II-148})$$

$(x = 0, 1, 2, \dots, n-1).$

- (4) **Merke:** Grundsätzlich gilt:

Ziehung *mit Zurücklegen*  $\rightarrow$  *Binomialverteilung*

Ziehung *ohne Zurücklegen*  $\rightarrow$  *hypergeometrische Verteilung*

- (5) Bei einer Ziehung *mit Zurücklegen* wird eine *weiße* Kugel bei *jeder* Ziehung mit der *konstanten* Wahrscheinlichkeit  $p = M/N$  gezogen. Erfolgt die Ziehung jedoch *ohne Zurücklegen*, so *verändert* sich die Wahrscheinlichkeit  $p$  von Ziehung zu Ziehung. Es gilt dann z. B. für die

$$1. \text{ Ziehung: } p = \frac{M}{N}$$

$$2. \text{ Ziehung: } p = \frac{M-1}{N-1} \quad \text{oder} \quad p = \frac{M}{N-1}$$

je nachdem, ob bei der 1. Ziehung eine *weiße* oder eine *schwarze* Kugel gezogen wurde.

u.s.w.. Für *großes*  $N$  jedoch, d. h. für  $N \gg n$  sind diese Änderungen so *gering*, dass sie keine nennenswerte Rolle spielen. Die hypergeometrische Verteilung lässt sich dann *näherungsweise* durch die rechnerisch bequemere *Binomialverteilung* mit den Parametern  $n$  und  $p = M/N$  ersetzen:

$$h(x; N, M, n) \approx b(x; n, p) \quad \text{mit} \quad p = \frac{M}{N} \quad (\text{II-149})$$

In diesem Fall spielt es daher keine große Rolle, ob die entnommene Stichprobe vom Umfang  $n$  durch Ziehung *mit oder ohne Zurücklegen* zustande kam.

**Faustregel:** Die hypergeometrische Verteilung kann *näherungsweise* durch die rechnerisch bequemere *Binomialverteilung* ersetzt werden, wenn die Bedingung  $n < 0,05N$  erfüllt ist.

- (6) Für  $N \rightarrow \infty$  und *konstantes*  $p = M/N$  strebt die hypergeometrische Verteilung gegen eine *Binomialverteilung* mit den Parametern  $n$  und  $p$ .

## ■ Beispiel

Eine Lieferung enthält  $N = 100$  Transistoren, die aus einer Massenproduktion mit 5% Ausschuss stammen. Bei der Anlieferung der Ware wird vom Kunden eine *Abnahmekontrolle* in Form einer Stichprobe vom Umfang  $n = 4$  ohne Zurücklegen durchgeführt. Die entnommenen Transistoren werden dabei auf ihre Funktionstüchtigkeit überprüft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält die durchgeführte Stichprobe nur *einwandfreie* Ware?

*Lösung:* Die Zufallsvariable

$$X = \text{Anzahl der in der Stichprobe vom Umfang } n = 4 \text{ enthaltenen defekten Transistoren}$$

ist *hypergeometrisch* verteilt. Mit  $N = 100$ ,  $M = 5$  (5% Ausschuss) und  $n = 4$  lautet die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* dieser Verteilung wie folgt:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{5}{x} \cdot \binom{100 - 5}{4 - x}}{\binom{100}{4}} = \frac{\binom{5}{x} \cdot \binom{95}{4 - x}}{\binom{100}{4}}$$

( $x = 0, 1, 2, 3, 4$ ). Für  $x = 0$  folgt daraus:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= f(0) = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{95}{4}}{\binom{100}{4}} = \frac{1 \cdot \frac{95 \cdot 94 \cdot 93 \cdot 92}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}}{\frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = \\ &= \frac{95 \cdot 94 \cdot 93 \cdot 92}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97} = 0,8119 \approx 81,2\% \end{aligned}$$

Zu einem ähnlichen Ergebnis kommen wir, wenn wir die hypergeometrische Verteilung *näherungsweise* durch die *Binomialverteilung* mit den Parametern  $n = 4$  und  $p = M/N = 5/100 = 0,05$  ersetzen. Diese Näherung ist erlaubt, da die *Faustregel*  $n < 0,05N$  hier *erfüllt* ist ( $n = 4 < 0,05 \cdot 100 = 5$ ). Die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* der Binomialverteilung lautet dann:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{4}{x} \cdot 0,05^x \cdot 0,95^{4-x} \quad (x = 0, 1, 2, 3, 4)$$

Aus ihr erhalten wir für die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $P(X = 0)$  den *Näherungswert*

$$P(X = 0) = f(0) = \binom{4}{0} \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^4 = 1 \cdot 1 \cdot 0,8145 = 0,8145 \approx 81,5\%$$

in guter Übereinstimmung mit dem *exakten* Wert von 81,2%. ■

### 6.3 Poisson-Verteilung

In Naturwissenschaft und Technik stößt man manchmal in Verbindung mit einem *Bernoulli-Experiment* auf Ereignisse, die mit nur *geringen* Wahrscheinlichkeiten und daher sehr *selten* auftreten. Ein Musterbeispiel für ein solches seltenes Ereignis liefert der *radioaktive Zerfall* eines chemischen Elementes, bei dem die einzelnen Atomkerne mit einer *kleinen* Wahrscheinlichkeit zerfallen, d. h. die Anzahl der pro Sekunde zerfallenden Atomkerne ist *äußerst gering* im Vergleich zur Anzahl der insgesamt vorhandenen Kerne.

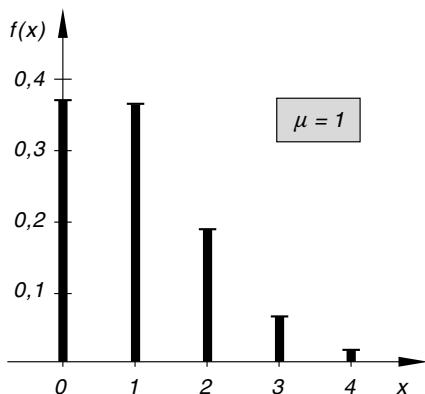
Ereignisse dieser Art, die also relativ *selten*, d. h. mit *kleiner* Wahrscheinlichkeit  $p$  auftreten, genügen der diskreten *Poisson-Verteilung* mit der *Wahrscheinlichkeitsfunktion*

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu} \quad (x = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{II-150})$$

Der in der Verteilung auftretende positive *Parameter*  $\mu$  ist zugleich der *Erwartungswert* oder *Mittelwert* der Verteilung:  $E(X) = \mu$ . Die *Varianz* ist  $\text{Var}(X) = \sigma^2 = \mu$ , d. h. bei einer *Poisson-verteilten* Zufallsvariablen  $X$  stimmen Mittelwert  $p$  und Varianz  $\sigma^2$  *stets* überein. Die *Verteilungsfunktion* der Poisson-Verteilung lautet:

$$F(x) = P(X \leq x) = e^{-\mu} \cdot \sum_{k \leq x} \frac{\mu^k}{k!} \quad (\text{II-151})$$

Bild II-83 zeigt den Verlauf der *Wahrscheinlichkeitsfunktion*  $f(x)$  für den Parameterwert  $\mu = 1$ .



**Bild II-83** Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$  einer Poisson-Verteilung mit dem Parameter  $\mu = 1$

### Poisson-Verteilung

Die Verteilung einer *diskreten* Zufallsvariablen  $X$  mit der *Wahrscheinlichkeitsfunktion*

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu} \quad (x = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{II-152})$$

und der zugehörigen *Verteilungsfunktion*

$$F(x) = P(X \leq x) = e^{-\mu} \cdot \sum_{k \leq x} \frac{\mu^k}{k!} \quad (x \geq 0) \quad (\text{II-153})$$

heißt *Poisson-Verteilung* mit dem *Parameter*  $\mu > 0$  (für  $x < 0$  ist  $F(x) = 0$ ).

Die *Kennwerte* oder *Maßzahlen* dieser Verteilung lauten:

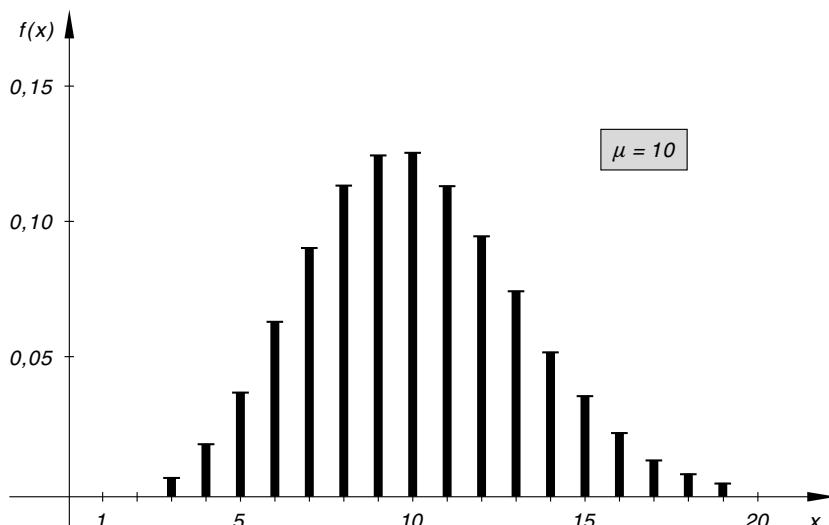
$$\text{Mittelwert: } \mu \quad (\text{II-154})$$

$$\text{Varianz: } \sigma^2 = \mu \quad (\text{II-155})$$

$$\text{Standardabweichung: } \sigma = \sqrt{\mu} \quad (\text{II-156})$$

### Anmerkungen

- (1) Die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$  ist i. Allg. *unsymmetrisch* (siehe Bild II-83). Für *große* Mittelwerte  $\mu$  jedoch wird  $f(x)$  *nahezu symmetrisch*, das *Symmetriezentrum*  $x_0$  liegt dann in der Nähe des Mittelwertes, d. h.  $x_0 \approx \mu$  (Bild II-84).



**Bild II-84** Für *große* Werte des Parameters  $\mu$  verläuft die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$  der Poisson-Verteilung *nahezu symmetrisch* zum Mittelwert  $\mu$  (gezeichnet ist die Verteilung für  $\mu = 10$ )

- (2) Die Poisson-Verteilung ist durch den Parameter  $\mu$  *vollständig* bestimmt und wird daher häufig auch durch das Symbol  $Ps(\mu)$  gekennzeichnet.
- (3) In der Praxis ist die folgende *Rekursionsformel* oft von großem Nutzen:

$$f(x+1) = \frac{\mu}{x+1} \cdot f(x) \quad (x = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{II-157})$$

- (4) Die Poisson-Verteilung lässt sich aus der *Binomialverteilung* für den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  und  $p \rightarrow 0$  herleiten, wobei vorausgesetzt wird, dass dabei der Mittelwert  $\mu = np$  *konstant* bleibt. Wir folgern daraus: Die *Binomialverteilung* mit den Parametern  $n$  und  $p$  darf für *großes*  $n$  und *kleines*  $p$  in guter Näherung durch die rechnerisch bequemere *Poisson-Verteilung* mit dem Parameter (Mittelwert)  $\mu = np$  ersetzt werden. Dabei gilt die folgende *Faustregel*:

**Faustregel:** Die *Binomialverteilung* darf *näherungsweise* durch die *Poisson-Verteilung* ersetzt werden, wenn die beiden Bedingungen

$$np < 10 \quad \text{und} \quad n > 1500p \quad (\text{II-158})$$

erfüllt sind.

## ■ Beispiele

- (1) Beim *radioaktiven Zerfall* ist die Zufallsvariable

$$X = \text{Anzahl der Atomkerne, die in einer Sekunde zerfallen}$$

*Poisson-verteilt* mit dem Parameter  $\mu$ . Dieser gibt dabei an, wie viele Atomkerne *durchschnittlich* pro Sekunde zerfallen.

Bei einem speziellen radioaktiven Präparat zerfallen im *Mittel* pro Minute 120 Atomkerne. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, mit einem Zählgerät *mehr* als zwei Zerfälle pro Sekunde zu registrieren?

*Lösung:* Im *Mittel* zerfallen pro Minute 120 und damit pro Sekunde 2 Atomkerne auf natürliche Art und Weise. Somit ist  $\mu = 2$  und die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* der *Poisson-verteilten* Zufallsvariablen  $X$  lautet daher:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{2^x}{x!} \cdot e^{-2} \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

Das uns interessierende Ereignis  $X > 2$  besitzt dann die folgende Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = \\ &= 1 - f(0) - f(1) - f(2) = \\ &= 1 - \frac{2^0}{0!} \cdot e^{-2} - \frac{2^1}{1!} \cdot e^{-2} - \frac{2^2}{2!} \cdot e^{-2} = \\ &= 1 - (1 + 2 + 2) \cdot e^{-2} = 1 - 5 \cdot e^{-2} = 0,323 \approx 32\% \end{aligned}$$

*Physikalische Deutung:* Bei 100 Messungen dürfen wir daher in *ungefähr* 32 Fällen erwarten, dass unser Zählgerät während einer Messzeit von 1 Sekunde *mehr* als 2 radioaktive Zerfälle registriert.

- (2) Die Serienproduktion von Glühbirnen erfolge mit einem *Ausschussanteil* von 1%, d. h. im *Mittel* befindet sich unter 100 Glühbirnen *eine* unbrauchbare (defekte). Aus der laufenden Produktion wird eine *Stichprobe* vom Umfang  $n = 100$  entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält diese Stichprobe *drei oder mehr* defekte Glühbirnen?

*Lösung:* Die Zufallsvariable

$$X = \text{Anzahl der defekten Glühbirnen in der entnommenen Stichprobe vom Umfang } n = 100$$

ist *binomialverteilt* mit den Parametern  $n = 100$  und  $p = 0,01$ . Wegen der *kleinen* Wahrscheinlichkeit und der *umfangreichen* Stichprobe genügt die Zufallsvariable  $X$  *näherungsweise* einer *Poisson-Verteilung* mit dem Parameter (Mittelwert)

$$\mu = np = 100 \cdot 0,01 = 1$$

und der diskreten *Wahrscheinlichkeitsfunktion*

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1^x}{x!} \cdot e^{-1} = \frac{e^{-1}}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

Denn die Bedingungen der *Faustregel* (II-158) sind erfüllt:

$$np = 100 \cdot 0,01 = 1 < 10$$

$$n = 100 > 1500p = 1500 \cdot 0,01 = 15$$

Wir können dabei den Rechenaufwand noch erheblich reduzieren, in dem wir zunächst die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis

*A: In einer Stichprobe vom Umfang  $n = 100$  befinden sich höchstens 2 defekte Glühbirnen*

ermitteln. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = f(0) + f(1) + f(2) = \\ &= \frac{e^{-1}}{0!} + \frac{e^{-1}}{1!} + \frac{e^{-1}}{2!} = e^{-1} + e^{-1} + \frac{1}{2} \cdot e^{-1} = \\ &= e^{-1} \left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right) = e^{-1} \cdot 2,5 = 0,9197 \end{aligned}$$

Damit besitzt das zu A *komplementäre* Ereignis

*$\bar{A}$ : In einer Stichprobe vom Umfang  $n = 100$  befinden sich mindestens 3 defekte Glühbirnen*

die Wahrscheinlichkeit

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,9197 = 0,0803 \approx 8\% \quad \blacksquare$$

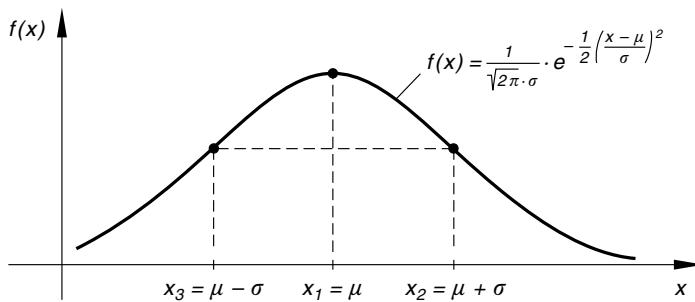
## 6.4 Gaußsche Normalverteilung

### 6.4.1 Allgemeine Normalverteilung

Zahlreiche Zufallsvariable in Naturwissenschaft und Technik wie z. B. physikalisch-technische Messgrößen genügen einer *stetigen* Verteilung mit der *Dichtefunktion*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (\text{II-159})$$

Bild II-85 zeigt den typischen Verlauf dieser Funktion. Eine Verteilung mit dieser Dichtefunktion heißt *Gaußsche Normalverteilung* oder kurz *Normalverteilung*.



**Bild II-85** Dichtefunktion  $f(x)$  der Gaußschen Normalverteilung („Gaußsche Glockenkurve“)

Die *Gaußsche Normalverteilung* spielt in den Anwendungen eine überragende und zentrale Rolle. Wir nennen einige Anwendungsgebiete:

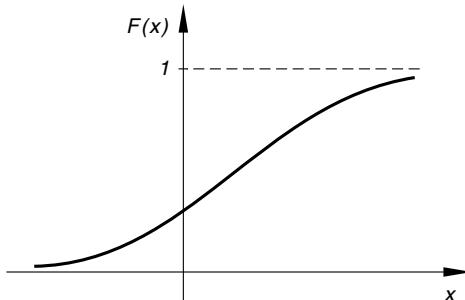
- Messwerte sowie Mess- und Beobachtungsfehler unterliegen in der Regel der *Gaußschen Normalverteilung* (siehe hierzu Kapitel IV).
- Bei Serienproduktionen wird der „Istwert“ einer Größe i. Allg. vom „Sollwert“ geringfügig abweichen. Konkretes Beispiel: Die serienmäßige Herstellung von Kondensatoren mit einer vorgeschriebenen Kapazität von  $C = 10 \mu\text{F}$  („Sollwert“) unterliegt gewissen (zufallsbedingten) *Schwankungen*. Die tatsächlichen Werte der Kapazität („Istwerte“) werden daher vom „Sollwert“  $C = 10 \mu\text{F}$  in beiden Richtungen geringfügig abweichen. Diese Abweichungen genügen dann (zumindest näherungsweise) der *Gaußschen Normalverteilung*.
- Statistische Qualitäts- und Fertigungskontrollen beruhen im Regelfall auf der *Gaußschen Normalverteilung* (siehe hierzu Kapitel III, Abschnitt 4.6).
- Unter gewissen Voraussetzungen lassen sich Binomialverteilungen, hypergeometrische Verteilungen und Poisson-Verteilungen durch die rechnerisch bequemere Gaußsche Normalverteilung *approximieren* (siehe hierzu Abschnitt 6.7).

Die in der Dichtefunktion (II-159) auftretenden *Parameter*  $\mu$  und  $\sigma > 0$  sind zugleich spezielle *Kennwerte* dieser allgemeinen Normalverteilung:  $\mu$  ist der *Mittel- oder Erwartungswert*,  $\sigma$  die *Standardabweichung* und  $\sigma^2$  die *Varianz* der normalverteilten stetigen Zufallsvariablen  $X$ .

Die *Verteilungsfunktion* der allgemeinen Normalverteilung besitzt dabei die folgende Integraldarstellung:

$$F(x) = P(-\infty < X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt \quad (\text{II-160})$$

Ihr Verlauf ist in Bild II-86 wiedergegeben.



**Bild II-86**

Verteilungsfunktion  $F(x)$  der Gaußschen Normalverteilung

Wir fassen zusammen:

### Gaußsche Normalverteilung

Die Verteilung einer *stetigen Zufallsvariablen*  $X$  mit der *Dichtefunktion*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (\text{II-161})$$

und der *Verteilungsfunktion*

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt \quad (\text{II-162})$$

heißt *Gaußsche Normalverteilung* mit den beiden *Parametern*  $\mu$  und  $\sigma > 0$  (siehe hierzu die Bilder II-85 und II-86).

Die *Kennwerte* oder *Maßzahlen* dieser Verteilung lauten:

$$\text{Mittelwert: } \mu \quad (\text{II-163})$$

$$\text{Varianz: } \sigma^2 \quad (\text{II-164})$$

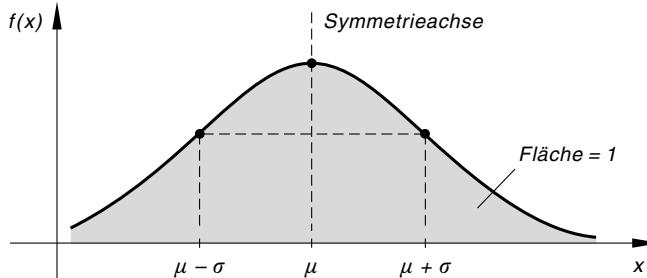
$$\text{Standardabweichung: } \sigma \quad (\text{II-165})$$

### Anmerkungen

- (1) Die *Dichtefunktion*  $f(x)$  besitzt die folgenden Eigenschaften (Bild II-87):
  - a)  $f(x)$  ist *spiegelsymmetrisch* bezüglich der Geraden  $x = \mu$ .
  - b) Das absolute *Maximum* liegt bei  $x_1 = \mu$  und ist zugleich *Symmetriezentrum*, die beiden *Wendepunkte* liegen *symmetrisch* zum Maximum an den Stellen  $x_{2/3} = \mu \pm \sigma$ .

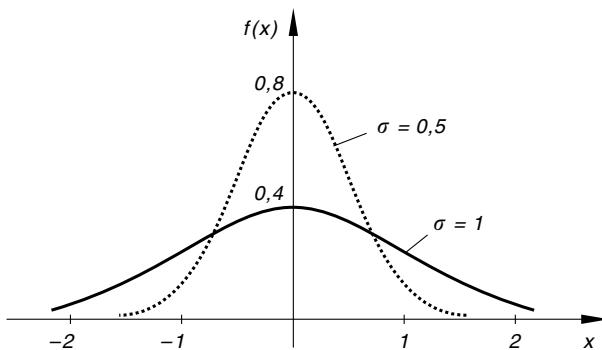
- c)  $f(x)$  ist *normiert*, d. h. die Fläche unter der Dichtefunktion hat den Wert 1 (grau unterlegte Fläche in Bild II-87):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1 \quad (\text{II-166})$$



**Bild II-87** Eigenschaften der Gaußschen Normalverteilung

- (2) Die Gestalt der Dichtefunktion  $f(x)$  erinnert an eine *Glocke*. Man spricht daher auch häufig von der *Gaußschen Glockenkurve*.
- (3) Während der Parameter  $\mu$  die Lage des *Maximums* festlegt, bestimmt der zweite Parameter  $\sigma$  *Breite* und *Höhe* der Glockenkurve. Dabei gilt: Je *kleiner* die Standardabweichung  $\sigma$  ist, umso  *höher* liegt das Maximum und umso *steiler* fällt die Dichtekurve nach beiden Seiten hin ab. In Bild II-88 wird diese Aussage für den speziellen Wert  $\mu = 0$  und verschiedene Werte von  $\sigma$  verdeutlicht.



**Bild II-88** Die Standardabweichung  $\sigma$  bestimmt die Höhe (absolutes Maximum) und die Breite der Normalverteilungsdichtefunktion  $f(x)$  (gezeichnet wurden die Kurven für die Parameterwerte  $\sigma = 0,5$  und  $\sigma = 1$ )

- (4) Die Gaußsche Normalverteilung mit den *Parametern*  $\mu$  (Mittelwert) und  $\sigma$  (Standardabweichung) wird häufig auch durch das Symbol  $N(\mu; \sigma)$  gekennzeichnet.

### 6.4.2 Standardnormalverteilung

Die im vorangegangenen Abschnitt behandelte *allgemeine* Gaußsche Normalverteilung mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$  lässt sich stets auf die sog. *Standardnormalverteilung* mit den speziellen Parameterwerten  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$  zurückführen. Dies entspricht einem Übergang von der *normalverteilten* Zufallsvariablen  $X$  zur sog. *standardnormalverteilten* Zufallsvariablen  $U$  mit Hilfe der linearen *Transformation* (Substitution)

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (\text{II-167})$$

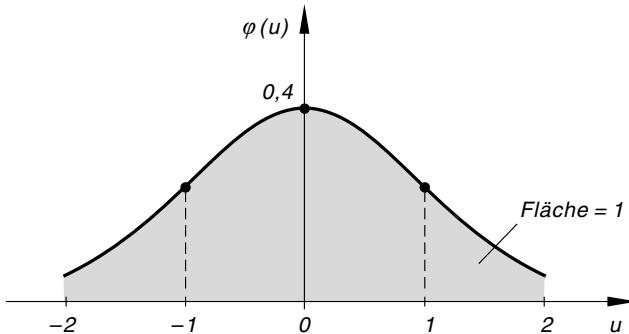
Die *Standardnormalverteilung* besitzt dabei die folgenden Eigenschaften:

#### Standardnormalverteilung einer stetigen Zufallsvariablen $U$

Eine *Normalverteilung* mit den Parametern  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$  heißt *Standardnormalverteilung* oder auch *standardisierte Normalverteilung*. Ihre *Dichtefunktion* ist

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2} \quad (-\infty < u < \infty) \quad (\text{II-168})$$

und besitzt den in Bild II-89 dargestellten typischen Verlauf („Glockenkurve“).

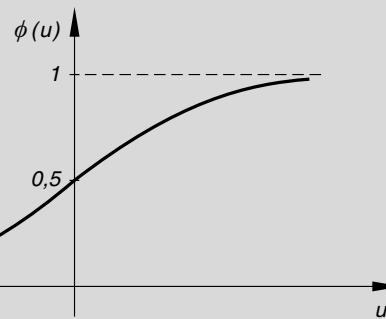


**Bild II-89** Dichtefunktion  $\varphi(u)$  der Standardnormalverteilung

Die zugehörige *Verteilungsfunktion* lautet:

$$\phi(u) = P(U \leq u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^u e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (\text{II-169})$$

( $-\infty < u < \infty$ ; siehe Bild II-90).



**Bild II-90** Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  der Standardnormalverteilung

Eine *normalverteilte* Zufallsvariable  $X$  mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$  lässt sich dabei stets mit Hilfe der *Variablentransformation*

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (\text{II-170})$$

in die *standardnormalverteilte* Zufallsvariable  $U$  überführen (sog. *Standardisierung* oder Umrechnung in *Standardeinheiten*).

#### Anmerkungen

- (1) Die wichtigsten Eigenschaften der *Dichtefunktion*  $\varphi(u)$  der *Standardnormalverteilung* sind (Bild II-89):
  - a)  $\varphi(u)$  ist *achsensymmetrisch*, d. h. eine *gerade* Funktion:  $\varphi(-u) = \varphi(u)$ .
  - b) Das absolute *Maximum* liegt bei  $u_1 = 0$  und ist zugleich *Symmetriezentrum*, die beiden *Wendepunkte* befinden sich an den Stellen  $u_{2/3} = \pm 1$ .
  - c)  $\varphi(u)$  ist *normiert*, die in Bild II-89 *grau* unterlegte Fläche besitzt somit den Flächeninhalt 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 1 \quad (\text{II-171})$$

- (2) Die Standardnormalverteilung wird häufig auch durch das spezielle Symbol  $N(0; 1)$  gekennzeichnet ( $\mu = 0, \sigma = 1$ ).
- (3) Die Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  wird häufig auch als *Gaußsches Fehlerintegral* bezeichnet.
- (4) Eine ausführliche Tabelle der Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  der *Standardnormalverteilung* befindet sich im Anhang (Tabelle 1).

### 6.4.3 Erläuterungen zur tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

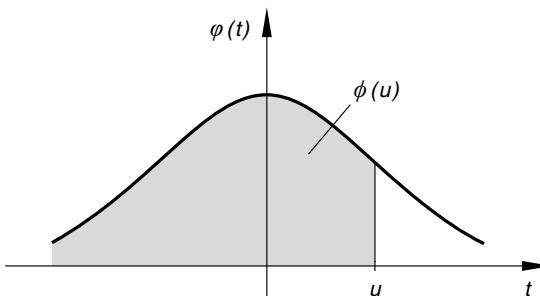
Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei einer *normalverteilten* Zufallsvariablen  $X$  erfolgt in der Anwendung stets mit Hilfe der in der Integralform dargestellten *Verteilungsfunktion*

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^u e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (\text{II-172})$$

der *Standardnormalverteilung*. Dieses *uneigentliche* Integral ist jedoch *nicht* elementar lösbar. Die Werte dieser Funktion müssen daher mit speziellen Näherungsmethoden wie z. B. der numerischen Integration berechnet werden<sup>26)</sup>.

Im **Anhang** dieses Bandes befindet sich eine ausführliche *Tabelle* mit den auf das Intervall  $u \geq 0$  beschränkten Funktionswerten der Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  (Tabelle 1). Aus dieser Tabelle lassen sich dann die benötigten Funktionswerte von  $\phi(u)$  wie folgt ablesen:

- (1) Für  $u \geq 0$  wird die Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  durch die in Bild II-91 *grau* unterlegte Fläche dargestellt. Der Funktionswert  $\phi(u)$  kann dabei *direkt* aus der Tabelle 1 im Anhang entnommen werden. Es gilt dabei stets  $\phi(u) \geq 0,5$  (siehe nachfolgende Zahlenbeispiele).



**Bild II-91** Die tabellierte Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  wird durch die *grau* unterlegte Fläche repräsentiert ( $u \geq 0$ )

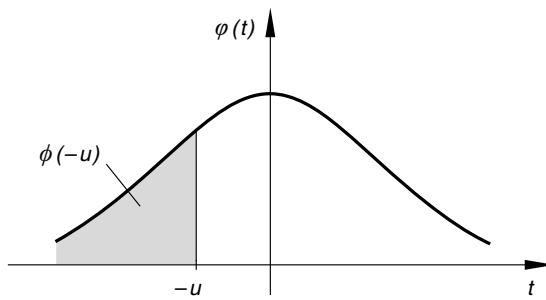
#### Zahlenbeispiele

$$\phi(1,58) = 0,9429$$

$$\phi(2,315) = 0,9897 \quad (\text{durch lineare Interpolation})$$

- (2) Für *negative* Argumente (wir setzen dafür  $-u$  mit  $u > 0$ ) wird der Funktionswert  $\phi(-u)$  durch die in Bild II-92 *grau* unterlegte Fläche repräsentiert. Dabei gilt in diesem Bereich stets  $\phi(-u) < 0,5$  (siehe nachfolgende Zahlenbeispiele).

<sup>26)</sup> Siehe hierzu die in Band 1 ausführlich behandelten Integrationsmethoden (Kap. V, Abschnitt 8.4).

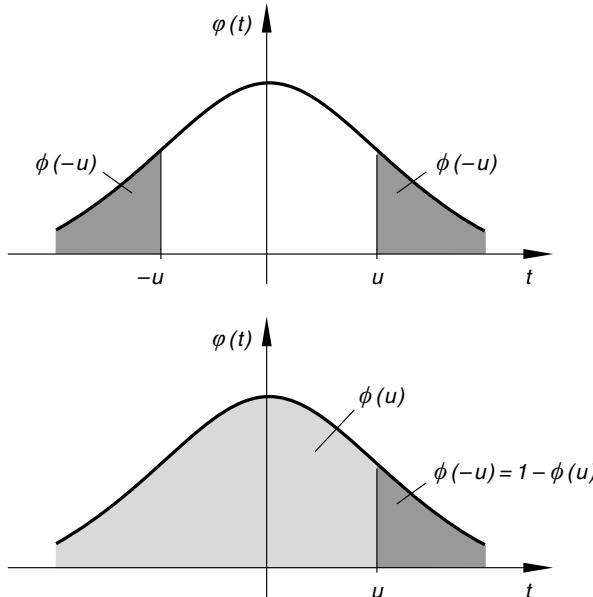


**Bild II-92** Zur Berechnung des Funktionswertes  $\phi(-u)$  mit Hilfe der Tabelle 1 im Anhang, Teil A

Die Berechnung des Funktionswertes  $\phi(-u)$  erfolgt dabei nach der Formel

$$\phi(-u) = 1 - \phi(u) \quad (u > 0) \quad (\text{II-173})$$

wiederum unter Verwendung von Tabelle 1. Diese wichtige Beziehung lässt sich unmittelbar aus Bild II-93 entnehmen, wenn man die *Achsenymmetrie* und die *Normierung* der Dichtefunktion  $\varphi(t)$  beachtet (es gilt stets  $\phi(u) + \phi(-u) = 1$ ).



**Bild II-93** Zur Herleitung der Beziehung  $\phi(-u) = 1 - \phi(u)$  für  $u > 0$

### Zahlenbeispiele

$$\phi(-1,25) = 1 - \phi(1,25) = 1 - 0,8944 = 0,1056$$

$$\phi(-2,423) = 1 - \phi(2,423) = 1 - 0,9923 = 0,0077 \quad (\text{linear interpoliert})$$

Wir fassen wie folgt zusammen:

**Über den Umgang mit der tabellierten Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  der Standardnormalverteilung (Tabelle 1 im Anhang)**

Tabelle 1 im Anhang (Teil A) enthält die Werte der *Verteilungsfunktion  $\phi(u)$*  der *Standardnormalverteilung* für  $u \geq 0$ . Dabei gilt:

1. Für *positive* Argumente kann der gesuchte Funktionswert  $\phi(u)$  sofort aus der Tabelle 1 entnommen werden.
2. Für *negative* Argumente lässt sich der gesuchte Funktionswert  $\phi(-u)$  nach der Formel

$$\phi(-u) = 1 - \phi(u) \quad (u > 0) \quad (\text{II-174})$$

und unter Verwendung von Tabelle 1 bestimmen (der dabei benötigte Funktionswert  $\phi(u)$  wird aus der Tabelle 1 entnommen).

■ **Beispiele**

$$(1) \quad \phi(0,854) = 0,8034$$

$$(2) \quad \phi(-1,432) = 1 - \phi(1,432) = 1 - 0,9239 = 0,0761 \quad (\text{linear interpoliert})$$

**6.4.4 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung**

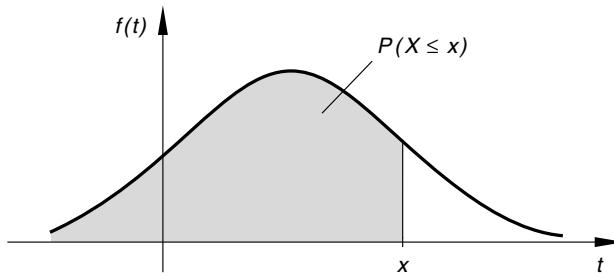
Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei einer *normalverteilten* Zufallsvariablen  $X$  unter ausschließlicher Verwendung der tabellierten Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  der *Standardnormalverteilung* (Tabelle 1 im Anhang, Teil A).

**(1) Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $P(X \leq x)$**

Definitionsgemäß ist

$$P(X \leq x) = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt \quad (\text{II-175})$$

und wird durch die in Bild II-94 *grau* unterlegte Fläche dargestellt.



**Bild II-94** Die grau unterlegte Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit  $P(X \leq x)$

Wir führen nun die folgende *Integralsubstitution* durch<sup>27)</sup>:

$$u = \frac{t - \mu}{\sigma}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{\sigma}, \quad dt = \sigma du \quad (\text{II-176})$$

Dabei transformieren sich die *Integralgrenzen* wie folgt:

*Untere Grenze:*  $t = -\infty \rightarrow u = -\infty$

*Obere Grenze:*  $t = x \rightarrow u = \frac{x - \mu}{\sigma}$

Dann aber gilt:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \cdot \sigma du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \sigma \cdot \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du}_{\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)} = \\ &= \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad (\text{II-177}) \end{aligned}$$

<sup>27)</sup> Sie entspricht dem Übergang von der *normalverteilten* Zufallsvariablen  $X$  zur zugehörigen *standard-normalverteilten* Zufallsvariablen

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

(sog. Transformation in *Standardeinheiten*).

Das *letzte* Integral der rechten Seite ist aber genau der Wert, den die Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  der *Standardnormalverteilung* an der Stelle  $u = (x - \mu)/\sigma$  annimmt. Daher besteht zwischen den Verteilungsfunktionen  $F(x)$  und  $\phi(u)$  ganz allgemein der folgende für die Praxis wichtige Zusammenhang:

$$F(x) = \phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \quad (\text{II-178})$$

Für die Wahrscheinlichkeit  $P(X \leq x)$  erhalten wir damit die Formel

$$P(X \leq x) = F(x) = \phi\left(\underbrace{\frac{x - \mu}{\sigma}}_u\right) = \phi(u) \quad (\text{II-179})$$

die wir auch in der Form

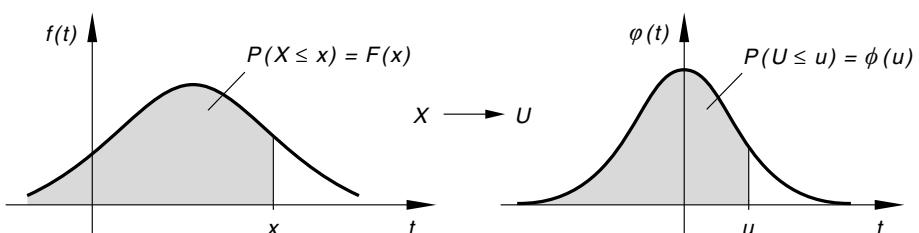
$$P(X \leq x) = P(U \leq u) = \phi(u) \quad (\text{II-180})$$

darstellen können (mit  $u = (x - \mu)/\sigma$ ).

Dies aber bedeutet: Beim Übergang von der *normalverteilten* Zufallsvariablen  $X$  zur zugehörigen *standardnormalverteilten* Zufallsvariablen  $U$  geht die Verteilungsfunktion  $F(x)$  in die Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  mit  $u = (x - \mu)/\sigma$  über:

$$F(x) \xrightarrow{u = \frac{x - \mu}{\sigma}} \phi(u) \quad (\text{II-181})$$

Diese *lineare* Transformation lässt sich in sehr anschaulicher Weise auch wie folgt bildlich verdeutlichen (Bild II-95).



**Bild II-95** Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $P(X \leq x)$  mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  der Standardnormalverteilung

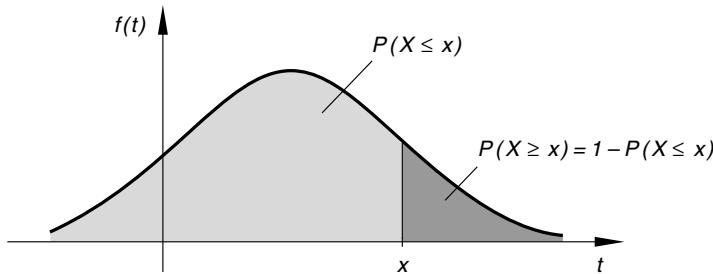
Die *grau* unterlegten Flächen sind dabei *gleich*, da sich die Wahrscheinlichkeit  $P(X \leq x)$  bei der linearen Transformation *nicht* verändert:  $P(X \leq x) = P(U \leq u)$ .

**(2) Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $P(X \geq x)$** 

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $P(X \geq x)$  erfolgt nach der Formel

$$P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \phi\left(\underbrace{\frac{x-\mu}{\sigma}}_u\right) = 1 - \phi(u) \quad (\text{II-182})$$

(Bild II-96; die *Gesamtfläche* unter der Dichtefunktion  $f(t)$  besitzt den Wert 1).



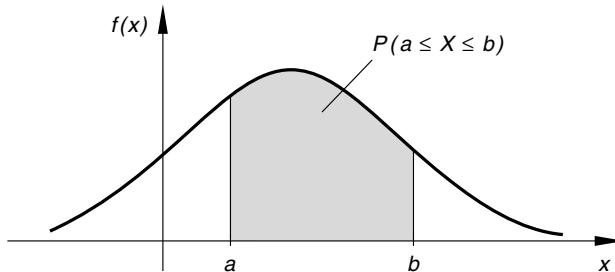
**Bild II-96** Zur Herleitung der Beziehung  $P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x)$

**(3) Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $P(a \leq X \leq b)$** 

Die Wahrscheinlichkeit

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = F(b) - F(a) \quad (\text{II-183})$$

entspricht der in Bild II-97 *grau* unterlegten Fläche.



**Bild II-97** Die *grau* unterlegte Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit  $P(a \leq X \leq b)$

Beim Übergang von der *normalverteilten* Zufallsvariablen  $X$  zur zugehörigen *standardnormalverteilten* Zufallsvariablen  $U = (X - \mu)/\sigma$  wird daraus unter Berücksichtigung der Beziehung (III-179)

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \phi\left(\underbrace{\frac{b - \mu}{\sigma}}_{b^*}\right) - \phi\left(\underbrace{\frac{a - \mu}{\sigma}}_{a^*}\right) \quad (\text{II-184})$$

oder

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \phi(b^*) - \phi(a^*) \quad (\text{II-185})$$

Dabei sind  $a^*$  und  $b^*$  die *neuen* Intervallgrenzen, die sich aus den *alten* Grenzen  $a$  und  $b$  mit Hilfe der *Substitution (Transformation)*  $u = (x - \mu)/\sigma$  wie folgt berechnen:

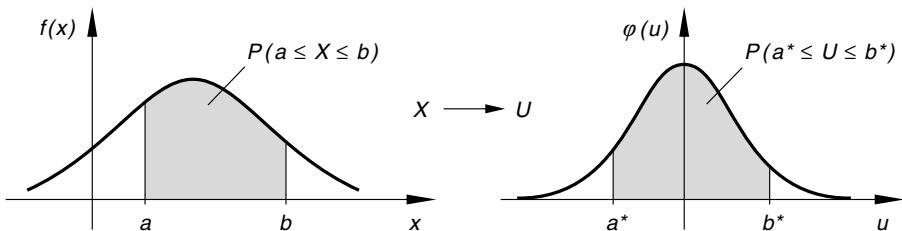
$$\text{Untere Grenze: } a \rightarrow a^* = \frac{a - \mu}{\sigma}$$

$$\text{Obere Grenze: } b \rightarrow b^* = \frac{b - \mu}{\sigma}$$

Somit gilt:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a^* \leq U \leq b^*) = \phi(b^*) - \phi(a^*) \quad (\text{II-186})$$

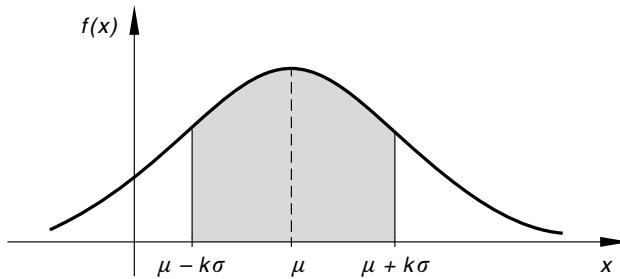
Beim Übergang von der *normalverteilten* Zufallsvariablen  $X$  zur *standardnormalverteilten* Zufallsvariablen  $U = (X - \mu)/\sigma$  werden somit die *Intervallgrenzen*  $a$  und  $b$  in *gleicher* Weise mittransformiert. Das Intervall  $a \leq X \leq b$  geht dabei in das Intervall  $a^* \leq U \leq b^*$  über, wobei sich die Wahrscheinlichkeit *nicht* ändert. In Bild II-98 ist die *Transformation*  $X \rightarrow U$  *bildlich* dargestellt. Die *grau* unterlegten Flächen, die den Wahrscheinlichkeiten  $P(a \leq X \leq b)$  bzw.  $P(a^* \leq U \leq b^*)$  entsprechen, stimmen dabei überein.



**Bild II-98** Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $P(a \leq X \leq b)$  mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  der Standardnormalverteilung

#### (4) Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(|X - \mu| \leq k\sigma)$

Von besonderem Interesse sind häufig Intervalle, die *symmetrisch* zum Mittelwert  $\mu$  liegen (Bild II-99).

**Bild II-99**

Die grau unterlegte Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit  $P(|X - \mu| \leq k\sigma)$

Der Abstand der beiden Intervallgrenzen von der Intervallmitte  $\mu$  betrage  $k\sigma$  (mit  $k > 0$ )<sup>28)</sup>. Das Intervall lässt sich dann in der Form

$$\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma \quad (\text{II-187})$$

oder auch

$$|X - \mu| \leq k\sigma \quad \text{oder} \quad \left| \frac{X - \mu}{\sigma} \right| \leq k \quad (\text{II-188})$$

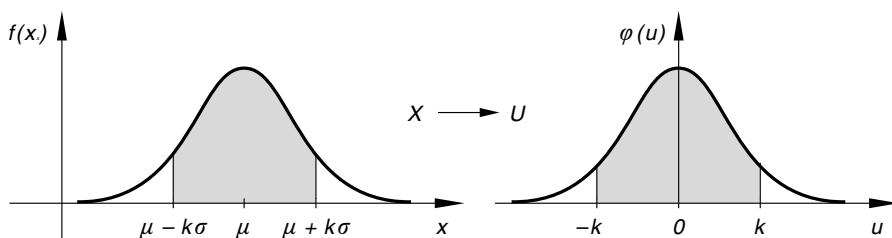
darstellen. Beim Übergang von der normalverteilten Zustandsvariablen  $X$  zur standardnormalverteilten Zufallsvariablen  $U = (X - \mu)/\sigma$  wird daraus das Intervall

$$|U| \leq k \quad \text{oder} \quad -k \leq U \leq k \quad (\text{II-189})$$

Für die Wahrscheinlichkeit  $P(|X - \mu| \leq k\sigma)$  erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} P(|X - \mu| \leq k\sigma) &= P(|U| \leq k) = P(-k \leq U \leq k) = \phi(k) - \phi(-k) = \\ &= \phi(k) - [1 - \phi(k)] = \phi(k) - 1 + \phi(k) = \\ &= 2 \cdot \phi(k) - 1 \end{aligned} \quad (\text{II-190})$$

Bei der vorgenommenen Transformation  $X \rightarrow U$  bleibt wiederum die Fläche unter der betreffenden Dichtefunktion und somit die Wahrscheinlichkeit erhalten. Bild II-100 verdeutlicht diese Aussage.

**Bild II-100** Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $P(|X - \mu| \leq k\sigma)$  mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  der Standardnormalverteilung

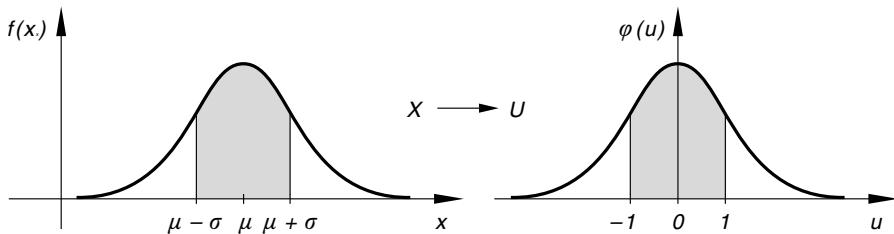
<sup>28)</sup> Wir geben den Abstand zweckmäßigerweise in Vielfachen der Standardabweichung  $\sigma$  an.

Speziell für  $k = 1, 2, 3$  erhalten wir die folgenden Ergebnisse:

$k = 1$  (siehe Bild II-101)

$$\begin{aligned} P(|X - \mu| \leq \sigma) &= P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(-1 \leq U \leq 1) = \\ &= 2 \cdot \phi(1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826 \end{aligned} \quad (\text{II-191})$$

Somit liegen rund 68,3% aller Werte der Zufallsvariablen  $X$  im abgeschlossenen Intervall  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ .

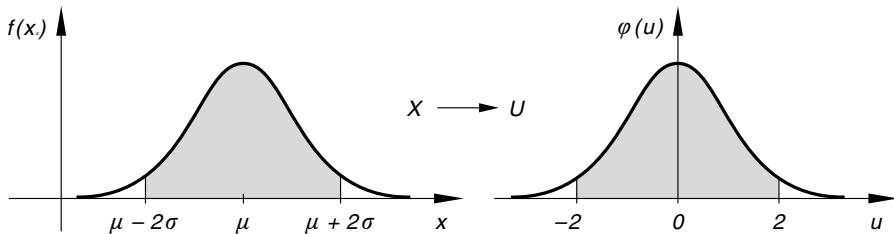


**Bild II-101** Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $P(|X - \mu| \leq \sigma)$  mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  der Standardnormalverteilung

$k = 2$  (siehe Bild II-102)

$$\begin{aligned} P(|X - \mu| \leq 2\sigma) &= P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(-2 \leq U \leq 2) = \\ &= 2 \cdot \phi(2) - 1 = 2 \cdot 0,9772 - 1 = 0,9544 \end{aligned} \quad (\text{II-192})$$

Somit liegen rund 95,4% aller Werte der Zufallsvariablen  $X$  im abgeschlossenen Intervall  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ .

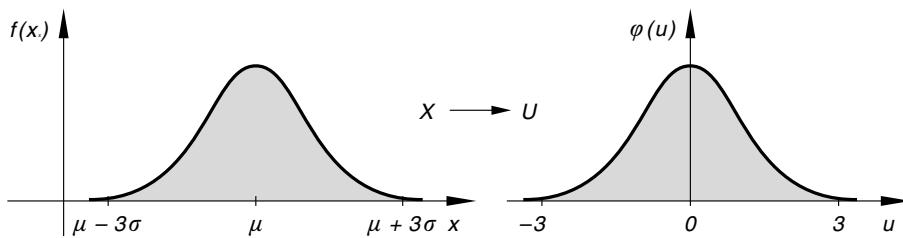


**Bild II-102** Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $P(|X - \mu| \leq 2\sigma)$  mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  der Standardnormalverteilung

$k = 3$  (siehe Bild II-103)

$$\begin{aligned} P(|X - \mu| \leq 3\sigma) &= P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = P(-3 \leq U \leq 3) = \\ &= 2 \cdot \phi(3) - 1 = 2 \cdot 0,9987 - 1 = 0,9974 \quad (\text{II-193}) \end{aligned}$$

99,7%, d. h. *fast alle* Werte der Zufallsvariablen  $X$  liegen somit im  $3\sigma$ -Streuungsbereich  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ .



**Bild II-103** Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $P(|X - \mu| \leq 3\sigma)$  mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  der Standardnormalverteilung

Wir fassen die wichtigsten Ergebnisse wie folgt zusammen:

**Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei einer normalverteilten Zufallsvariablen mit Hilfe der Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  der Standardnormalverteilung**

Bei einer *normalverteilten* Zufallsvariablen  $X$  mit dem Mittelwert  $\mu$  und der Standardabweichung  $\sigma$  lassen sich die Wahrscheinlichkeiten wie folgt mit Hilfe der Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  der *Standardnormalverteilung* berechnen (Tabelle 1 im Anhang, Teil A):

$$(1) \quad P(X \leq x) = \phi \underbrace{\left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)}_u = \phi(u) \quad (\text{II-194})$$

(siehe hierzu die Bilder II-94 und II-95).

$$(2) \quad P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \phi \underbrace{\left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)}_u = 1 - \phi(u) \quad (\text{II-195})$$

(siehe hierzu Bild II-96).

$$(3) \quad P(a \leq X \leq b) = \underbrace{\phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right)}_{b^*} - \underbrace{\phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)}_{a^*} = \phi(b^*) - \phi(a^*) \quad (\text{II-196})$$

(siehe hierzu die Bilder II-97 und II-98).

$$(4) \quad P(|X - \mu| \leq k\sigma) = P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = \\ = 2 \cdot \phi(k) - 1 \quad (\text{II-197})$$

(siehe hierzu die Bilder II-99 und II-100).

**Regel:** Die Umrechnung in *Standardeinheiten* erfolgt durch den Übergang von der normalverteilten Zufallsvariablen  $X$  mit dem Mittelwert  $\mu$  und der Standardabweichung  $\sigma$  zur *standardnormalverteilten* Zufallsvariablen

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (\text{II-198})$$

(sog. *Standardtransformation*). Dabei geht die Verteilungsfunktion  $F(x)$  in die Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  der *Standardnormalverteilung* über (Tabelle 1 im Anhang, Teil A). Die Intervallgrenzen werden dabei *mittransformiert*.

## ■ Beispiele

- (1) In einem Werk werden serienmäßig *Gewindeschrauben* hergestellt, deren Durchmesser eine *normalverteilte* Zufallsvariable  $X$  mit dem *Mittelwert* (*Sollwert*)  $\mu = 10$  mm und der *Standardabweichung*  $\sigma = 0,2$  mm sei. Toleriert werden dabei noch (zufallsbedingte) Abweichungen vom Solldurchmesser bis zu *maximal* 0,3 mm. Welcher Anteil an *Ausschussware* ist zu erwarten?

*Lösung:* Wir berechnen zunächst die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Schraubendurchmesser  $X$  im *tolerierten* Bereich  $(10 \pm 0,3)$  mm, d. h. zwischen 9,7 mm und 10,3 mm liegt (*hellgrau* unterlegte Fläche in Bild II-104).

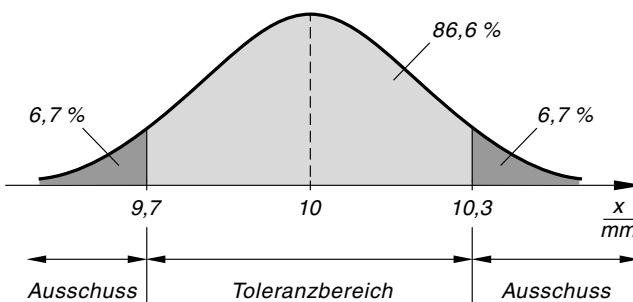


Bild II-104

Zuvor aber rechnen wir die Maximalabweichung von 0,3 mm noch in *Standard-einheiten* um, d. h. in ein Vielfaches ( $k$ -faches) der Standardabweichung  $\sigma = 0,2$  mm:

$$0,3 \text{ mm} = k\sigma = k \cdot 0,2 \text{ mm} \Rightarrow k = \frac{0,3 \text{ mm}}{0,2 \text{ mm}} = 1,5$$

Somit ist

$$\begin{aligned} P(|X - 10 \text{ mm}| \leq 0,3 \text{ mm}) &= P\left(\underbrace{\left|\frac{X - 10 \text{ mm}}{0,2 \text{ mm}}\right|}_{U} \leq 1,5\right) = \\ &= P(|U| \leq 1,5) = 2 \cdot \phi(1,5) - 1 = 2 \cdot 0,9332 - 1 = 0,8664 \end{aligned}$$

Rund 86,6% der Schrauben besitzen demnach einen Durchmesser, der innerhalb des *tolerierten* Bereiches  $(10 \pm 0,3)$  mm liegt (*hellgrauer* Bereich im Bild II-104). Der zu erwartende *Ausschuss* (Anteil an *nicht brauchbaren* Schrauben) beträgt somit rund 13,4% und entspricht der in Bild II-104 *dunkelgrau* unterlegten Fläche.

- (2) Die Zufallsvariable  $X$  sei *normalverteilt* mit dem *Mittelwert*  $\mu = 10$  und der *Varianz*  $\sigma^2 = 4$ . Wie viel Prozent aller Werte liegen dann im abgeschlossenen Intervall  $5 \leq X \leq 12$ ?

*Lösung:* Die Umrechnung der Intervallgrenzen  $a = 5$  und  $b = 12$  in *Standard-einheiten* ergibt (mit  $\mu = 10$  und  $\sigma = 2$ ):

$$\text{Untere Grenze: } a \rightarrow a^* = \frac{a - \mu}{\sigma} = \frac{5 - 10}{2} = -2,5$$

$$\text{Obere Grenze: } b \rightarrow b^* = \frac{b - \mu}{\sigma} = \frac{12 - 10}{2} = 1$$

Damit erhalten wir für die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $P(5 \leq X \leq 12)$  den folgenden Wert:

$$\begin{aligned} P(5 \leq X \leq 12) &= P(-2,5 \leq U \leq 1) = \phi(1) - \phi(-2,5) = \\ &= \phi(1) - [1 - \phi(2,5)] = \phi(1) + \phi(2,5) - 1 = \\ &= 0,8413 + 0,9938 - 1 = 0,8351 \end{aligned}$$

Somit fallen rund 83,5% aller Werte in das Intervall  $5 \leq X \leq 12$  (grau unterlegte Fläche in Bild II-105).

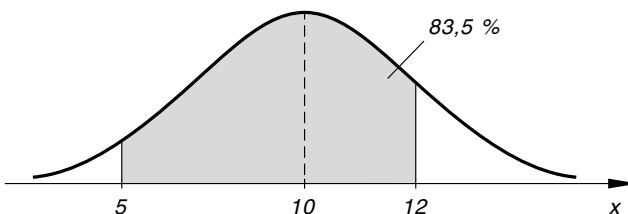
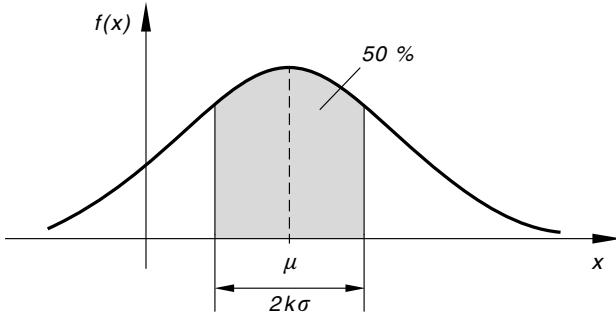


Bild II-105

- (3) Die *normalverteilte* Zufallsvariable  $X$  mit dem *Mittelwert*  $\mu$  und der *Standardabweichung*  $\sigma$  soll 50% ihrer Werte in dem *symmetrischen* Intervall  $|X - \mu| \leq k\sigma$  annehmen (Bild II-106).



**Bild II-106** Im Mittel sollte jeder zweite Wert der Zufallsvariablen  $X$  im eingezeichneten symmetrischen Intervall der Länge  $2k\sigma$  liegen

Wir bestimmen den Faktor  $k$  aus der Bedingung

$$\begin{aligned} P(|X - \mu| \leq k\sigma) &= P(|U| \leq k) = 2 \cdot \phi(k) - 1 = 0,5 \Rightarrow \\ 2 \cdot \phi(k) &= 1,5 \Rightarrow \phi(k) = 0,75 \end{aligned}$$

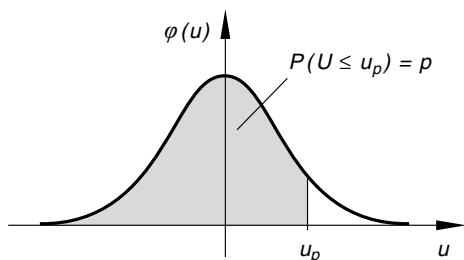
Aus der Tabelle 1 im Anhang (Teil A) erhalten wir für  $k$  den folgenden Wert:

$$\phi(k) = 0,75 \Rightarrow k = 0,674 \quad (\text{linear interpoliert}) \quad \blacksquare$$

#### 6.4.5 Quantile der Standardnormalverteilung

In den Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie in der mathematischen Statistik stellt sich häufig das folgende Problem:

Eine *standardnormalverteilte* Zufallsvariable  $U$  soll mit einer *vorgegebenen* Wahrscheinlichkeit  $p$  einen Wert unterhalb, oberhalb oder innerhalb bestimmter Grenzen (Schranken) annehmen. Probleme dieser Art treten beispielsweise im Zusammenhang mit *Parameterschätzungen* und *statistischen Prüfverfahren* auf und werden uns noch im nächsten Kapitel des Öfteren beschäftigen. Bei einer *einseitigen* Abgrenzung nach *oben* (auf die wir uns hier beschränken wollen) muss dann die zur vorgegebenen Wahrscheinlichkeit  $p$  gehörende *Grenze* oder *Schranke*  $u_p$  bestimmt werden (Bild II-107).



**Bild II-107**

Zur vorgegebenen Wahrscheinlichkeit  $p$  (*grau* unterlegte Fläche) gehört die eindeutig bestimmte Schranke  $u_p$ , die als *Quantil* der Standardnormalverteilung bezeichnet wird

Diese Schranke genügt somit der Gleichung

$$P(U \leq u_p) = \phi(u_p) = p \quad (\text{II-199})$$

Dabei gehört zu jedem  $p$  genau ein  $u_p$ . Die Werte dieser Schranken heißen *Quantile* der Standardnormalverteilung. Sie lassen sich prinzipiell aus der Wertetabelle der Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  der *Standardnormalverteilung* (Tabelle 1 im Anhang) ermitteln. Allerdings ist das Aufsuchen des Quantils  $u_p$  zum vorgegebenen Wahrscheinlichkeitswert  $p$  meist recht mühsam. Da solche Probleme in den Anwendungen jedoch sehr häufig auftreten ist es sinnvoll, die gängigen Werte in einer Tabelle zu sammeln.

Im Anhang dieses Buches befindet sich daher eine Tabelle mit den wichtigsten Quantilen der Standardnormalverteilung (Tabelle 2). Mit Hilfe dieser Tabelle lassen sich auch die Intervallgrenzen bei einer *einseitigen* Abgrenzung nach *unten* bzw. einer (symmetrischen) *zweiseitigen* Abgrenzung leicht ermitteln. Die nachfolgenden Beispiele werden dies verdeutlichen.

### ■ Beispiele

- (1) Die standardnormalverteilte Zufallsvariable  $U$  soll mit der Wahrscheinlichkeit  $p = 90\% = 0,9$  einen Wert aus dem Intervall  $U \leq c$  annehmen (*einseitige Abgrenzung nach oben*, *grau* unterlegte Fläche in Bild II-108).

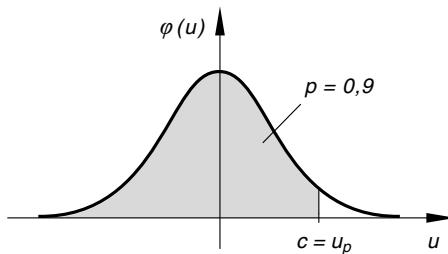


Bild II-108

Die gesuchte Schranke (Intervallgrenze)  $c$  ist in diesem Fall das zum Wahrscheinlichkeitswert  $p = 0,9$  gehörende *Quantil*  $u_p = u_{0,9}$  der Standardnormalverteilung. Wir erhalten unter Verwendung von Tabelle 2 im Anhang:

$$P(U \leq c) = \phi(c) = 0,9 \Rightarrow c = u_{0,9} = 1,282$$

- (2) Die Werte der *standardnormalverteilten* Zufallsvariablen  $U$  sollen mit der Wahrscheinlichkeit  $p = 90\% = 0,9$  *oberhalb* der (noch unbekannten) Schranke  $c$  liegen (*hellgrau* unterlegter Bereich in Bild II-109).

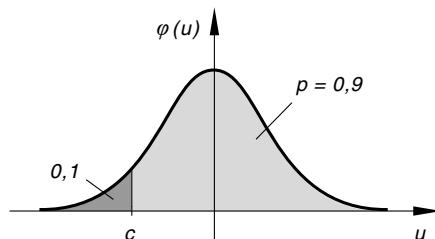


Bild II-109

Bei dieser *einseitigen* Abgrenzung nach *unten* gilt also  $P(U > c) = 0,9$ . Mit Hilfe von Tabelle 2 aus dem Anhang erhalten wir dann:

$$P(U > c) = 1 - P(U \leq c) = 1 - \phi(c) = 0,9 \Rightarrow$$

$$\phi(c) = 0,1 \Rightarrow c = u_{0,1} = -1,282$$

- (3) Bei einer *zweiseitigen symmetrischen* Abgrenzung nach Bild II-110 sollen die Werte der *standardnormalverteilten* Zufallsvariablen  $U$  mit der Wahrscheinlichkeit  $p = 95\% = 0,95$  im *symmetrischen* Intervall  $-c \leq U \leq c$  liegen (*hellgrau* unterlegte Fläche).

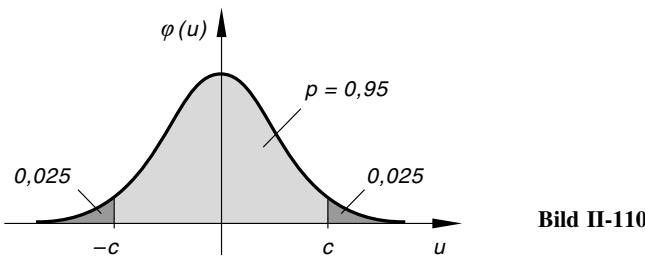


Bild II-110

Wegen der *Achsensymmetrie* der Dichtefunktion  $\varphi(u)$  besitzen die beiden *dunkelgrau* unterlegten Flächenstücke jeweils den Flächeninhalt 0,025. Unter Verwendung von Tabelle 2 im Anhang lässt sich dann die obere Grenze  $c$  wie folgt bestimmen:

$$P(U \leq c) = \phi(c) = 0,95 + 0,025 = 0,975 \Rightarrow c = u_{0,975} = 1,960$$

Das gesuchte Intervall lautet somit:  $-1,960 \leq U \leq 1,960$

■

## 6.5 Exponentialverteilung

Ein wichtiges Merkmal bei Zuverlässigkeitssuchungen technischer Systeme ist die *Funktions-* oder *Lebensdauer* des Systems. Sie lässt sich durch eine *stetige* Zufallsvariable  $T$  beschreiben, die in vielen Fällen einer sog. *Exponentialverteilung* mit den folgenden Eigenschaften genügt.

### Exponentialverteilung

Die Verteilung einer *stetigen* Zufallsvariablen  $X$  mit der *Dichtefunktion*

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (\text{II-200})$$

und der zugehörigen *Verteilungsfunktion*

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (\text{II-201})$$

heißt *Exponentialverteilung* mit dem Parameter  $\lambda > 0$  (siehe hierzu Bild II-111).

Die Kennwerte oder *Maßzahlen* dieser Verteilung lauten:

$$\text{Mittelwert: } \mu = 1/\lambda \quad (\text{II-202})$$

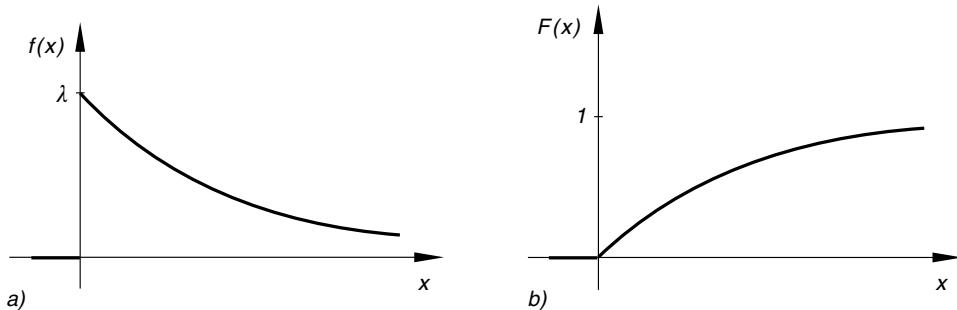
$$\text{Varianz: } \sigma^2 = 1/\lambda^2 \quad (\text{II-203})$$

$$\text{Standardabweichung: } \sigma = 1/\lambda \quad (\text{II-204})$$

#### Anmerkung

Man beachte: Bei einer *exponentialverteilten* Zufallsvariablen stimmen Mittelwert und Standardabweichung stets überein:  $\mu = \sigma = 1/\lambda$  (siehe hierzu auch Beispiel (3) aus Abschnitt 5.4).

Dichtefunktion  $f(x)$  und Verteilungsfunktion  $F(x)$  zeigen den in Bild II-111 skizzierten typischen Verlauf.



**Bild II-111** Exponentialverteilung

- a) Dichtefunktion  $f(x)$
- b) Verteilungsfunktion  $F(x)$

Bei *Zuverlässigkeitstests* technischer Systeme wird die Funktions- oder Lebensdauer des untersuchten Systems meist als eine *exponentialverteilte* Zufallsvariable  $T$  mit der Dichtefunktion  $f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$  für  $t \geq 0$  angesehen (für  $t < 0$  ist  $f(t) = 0$ ). Die zugehörige Verteilungsfunktion

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0) \quad (\text{II-205})$$

wird dabei als *Ausfallwahrscheinlichkeit* bezeichnet (für  $t < 0$  gilt  $F(t) = 0$ ).

Denn sie gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die Lebensdauer  $T$  des Systems den Zeitpunkt  $t$  *nicht* überschreitet (das System fällt also *voher* aus). Die Funktion

$$\begin{aligned} R(t) &= P(T \geq t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = \\ &= 1 - 1 + e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \end{aligned} \quad (\text{II-206})$$

heißt in diesem Zusammenhang *Zuverlässigungsfunktion*. Sie gibt die „Überlebenswahrscheinlichkeit“ des Systems an, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lebensdauer  $T$  den Zeitpunkt  $t$  *überschreitet* (das System „überlebt“ den Zeitpunkt  $t$ ). Der Mittelwert von  $T$  wird auch als *mittlere Lebensdauer*  $\bar{T}$  bezeichnet.

## ■ Beispiele

- (1) *Exponentialverteilte* Zustandsvariable sind beispielsweise:
  - Lebensdauer eines Verschleißteils (mechanisches oder elektronisches Bauteil)
  - Reparaturzeit von Maschinen
  - Instandsetzungsdauer eines PKW
  - Dauer eines Telefongesprächs
  - Funktions- oder Lebensdauer von elektronischen Bauteilen oder Baugruppen (bei nicht abnutzungsbedingtem Ausfall)
- (2) Die mittlere Lebensdauer eines elektronischen Bauteils betrage  $\bar{T} = 1000$  Stunden. Bei angenommener *Exponentialverteilung* der Zustandsvariablen  $T$  (Lebensdauer des Bauteils) gilt für den Parameter  $\lambda$  der Verteilung:

$$\bar{T} = \frac{1}{\lambda} = 1000 \text{ h} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{1000 \text{ h}} = 0,001 \text{ h}^{-1}$$

Damit lautet die Verteilungsfunktion (in diesem Zusammenhang auch *Ausfallwahrscheinlichkeit* genannt):

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-0,001t} \quad (t \text{ in h})$$

Die „Überlebenswahrscheinlichkeit“ des elektronischen Bauteils wird durch die *Zuverlässigungsfunktion*

$$R(t) = P(T \geq t) = e^{-0,001t} \quad (t \text{ in h})$$

beschrieben.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauelement innerhalb der ersten 2000 Betriebsstunden ausfällt?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauelement die Zeitmarke  $T = 2000 \text{ h}$  überlebt?
- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt das Bauelement zwischen der 1000. und der 2000. Betriebsstunde aus?

*Lösung:*

$$\begin{aligned} \text{a) } P(T \leq 2000) &= F(2000) = 1 - e^{-0,001 \cdot 2000} = 1 - e^{-2} = \\ &= 1 - 0,1353 = 0,8647 \end{aligned}$$

Die Ausfallwahrscheinlichkeit beträgt also rund 86,5 %.

b) Die Überlebenswahrscheinlichkeit beträgt

$$P(T \geq 2000) = R(2000) = e^{-0,001 \cdot 2000} = e^{-2} = 0,1353 \approx 13,5\%.$$

c) Die Ausfallwahrscheinlichkeit im Zeitintervall  $1000 \leq T \leq 2000$  beträgt

$$\begin{aligned} P(1000 \leq T \leq 2000) &= F(2000) - F(1000) = \\ &= (1 - e^{-0,001 \cdot 2000}) - (1 - e^{-0,001 \cdot 1000}) = \\ &= (1 - e^{-2}) - (1 - e^{-1}) = -e^{-2} + e^{-1} = \\ &= -0,1353 + 0,3679 = 0,2326 \approx 23,3\%. \end{aligned}$$

■

## 6.6 Zusammenhang zwischen der Binomialverteilung und der Gaußschen Normalverteilung

Die Berechnung der Verteilungsfunktion einer *Binomialverteilung* mit der *Wahrscheinlichkeitsfunktion*

$$f_B(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (\text{II-207})$$

erweist sich in der Praxis oft als sehr mühsam und aufwendig. Für *große* Werte von  $n$  und  $p$ -Werte, die sich deutlich von 0 und 1 unterscheiden, lässt sich jedoch die Binomialverteilung  $B(n; p)$  durch die rechnerisch wesentlich bequemere *Gaußsche Normalverteilung*  $N(\mu; \sigma)$  mit den Parametern

$$\mu = np \quad \text{und} \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)} \quad (\text{II-208})$$

*näherungsweise ersetzen*<sup>29)</sup>. Unter den genannten Voraussetzungen gilt also:

$$f_B(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{npq}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-np}{\sqrt{npq}} \right)^2} \quad (\text{II-209})$$

$(x = 0, 1, 2, \dots, n)$ . Diese Näherung wird dabei mit *zunehmendem*  $n$  immer besser. Wir geben zunächst ein Beispiel.

<sup>29)</sup> Diese Näherung ist eine Folge des *Grenzwertsatzes von Moivre und Laplace* (siehe hierzu den späteren Abschnitt 7.6.3).

## ■ Beispiel

Für  $n = 10$ ,  $p = 1/2$  und somit  $q = 1/2$  lautet die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* der *Binomialverteilung* wie folgt:

$$\begin{aligned} f_B(x) &= \binom{10}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} = \binom{10}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+10-x} = \binom{10}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \\ &= \frac{1}{2^{10}} \cdot \binom{10}{x} = \frac{1}{1024} \cdot \binom{10}{x} \end{aligned}$$

( $x = 0, 1, 2, \dots, 10$ ). *Näherungsweise* dürfen wir diese Funktion durch die *Dichtefunktion*  $f_N(x)$  der *Normalverteilung* mit den Parametern

$$\mu = np = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \quad \text{und} \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{2,5}$$

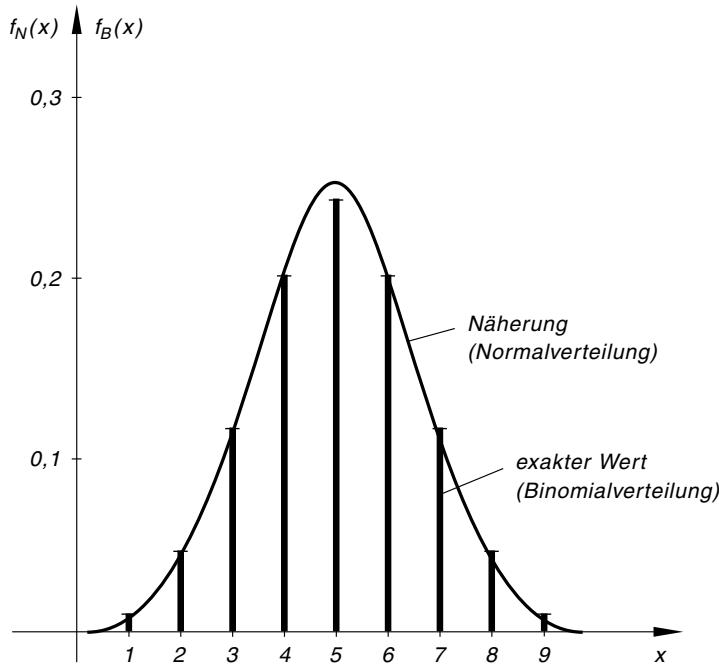
ersetzen:

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{2,5}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-5}{\sqrt{2,5}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{5}(x-5)^2}$$

Die folgende Tabelle zeigt einen *Vergleich* zwischen der *exakten* Verteilung und ihrer *Näherung*:

$x$	exakter Wert $f_B(x)$	Näherungswert $f_N(x)$
0	0,0010	0,0017
1	0,0098	0,0103
2	0,0439	0,0417
3	0,1172	0,1134
4	0,2051	0,2066
5	0,2461	0,2523
6	0,2051	0,2066
7	0,1172	0,1134
8	0,0439	0,0417
9	0,0098	0,0103
10	0,0010	0,0017

Auch Bild II-112 zeigt deutlich die brauchbare Annäherung der Binomialverteilung  $B(10; 1/2)$  durch die Normalverteilung  $N(5; \sqrt{2,5})$ .



**Bild II-112** Annäherung einer Binomialverteilung durch eine Normalverteilung: Die eingezeichneten Punkte (Stabköpfe) liegen in guter Näherung auf der Dichtefunktion einer Normalverteilung

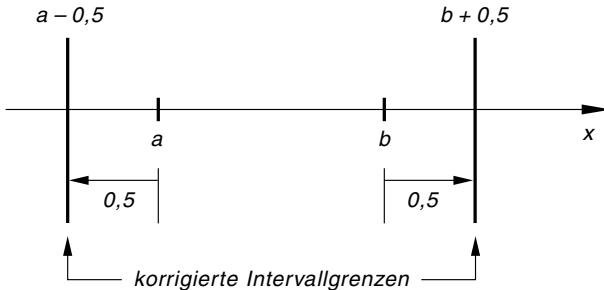
Die Annäherung der *Binomialverteilung*  $B(n; p)$  durch die Gaußsche *Normalverteilung*  $N(\mu = np; \sigma = \sqrt{npq})$  für große  $n$  ermöglicht eine wesentlich *bequemere* Berechnung von Wahrscheinlichkeiten. Eine in der Praxis häufig verwendete *Näherungsformel* lautet:

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= \sum_{x=a}^b \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x} \approx F(b + 0,5) - F(a - 0,5) = \\ &= P(a^* \leq U \leq b^*) = \phi(b^*) - \phi(a^*) \end{aligned} \quad (\text{II-210})$$

Dabei ist  $F(x)$  die Verteilungsfunktion der *Normalverteilung* mit dem Mittelwert  $\mu = np$  und der Standardabweichung  $\sigma = \sqrt{npq}$  und  $\phi(u)$  die Verteilungsfunktion der *Standardnormalverteilung*.  $a^*$  und  $b^*$  sind die in *Standardeinheiten* umgerechneten (neuen) Intervallgrenzen:

$$a^* = \frac{(a - 0,5) - \mu}{\sigma}, \quad b^* = \frac{(b + 0,5) - \mu}{\sigma} \quad (\text{II-211})$$

Dabei wurde an den alten Intervallgrenzen  $a$  und  $b$  eine sog. *Stetigkeitskorrektur* vorgenommen. Die Zufallsvariable  $X$  ist nämlich eine *diskrete* Größe, erscheint jedoch in der Näherung durch die Normalverteilung als eine *stetige* Variable. Im folgenden Beispiel zeigen wir, warum es bei dieser Näherung *sinnvoll* ist, die Intervallgrenzen  $a$  und  $b$  um jeweils 0,5 Einheiten nach *außen* hin zu verschieben (Bild II-113).



**Bild II-113** Wird eine *diskrete* Verteilung durch eine *stetige* Verteilung angenähert, so müssen die Intervallgrenzen korrigiert werden (sog. *Stetigkeitskorrektur*)

## ■ Beispiel

Eine homogene Münze wird 10-mal geworfen. Wir interessieren uns dabei für die Wahrscheinlichkeit, dass die *diskrete* Zufallsvariable

$$X = \text{Anzahl der Würfe mit dem Ergebnis „Zahl“}$$

einen Wert zwischen 3 und 5 annimmt (*einschließlich* der beiden Grenzen).

## Exakte Lösung

Die Zufallsvariable  $X$  ist *binomialverteilt* mit den *Parametern*  $n = 10$  und  $p = 1/2$ . Ihre *Wahrscheinlichkeitsfunktion* lautet somit ( $q = 1 - p = 1/2$ ):

$$f_B(x) = \binom{10}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} = \binom{10}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} \cdot \binom{10}{x}$$

( $x = 0, 1, 2, \dots, 10$ ). Die *Wahrscheinlichkeit* dafür, bei 10 Würfen mit der Münze drei-, vier- bzw. fünfmal das Ereignis „Zahl“ zu erhalten, ist dann:

$$\begin{aligned} P(3 \leq X \leq 5) &= f_B(3) + f_B(4) + f_B(5) = \\ &= \frac{1}{1024} \cdot \binom{10}{3} + \frac{1}{1024} \cdot \binom{10}{4} + \frac{1}{1024} \cdot \binom{10}{5} = \\ &= \frac{1}{1024} (120 + 210 + 252) = \frac{582}{1024} = 0,5684 \end{aligned}$$

Wir versuchen jetzt, dieses Ergebnis anschaulich zu deuten und gehen dabei von dem in Bild II-114 dargestellten *Stabdiagramm* aus. Verschieben wir jeden der drei Stäbe um jeweils 0,5 einmal nach links und einmal nach rechts, so erhalten wir die in Bild II-115 grau unterlegten Rechtecke. Aus dem Stabdiagramm ist nun ein *Histogramm* geworden.

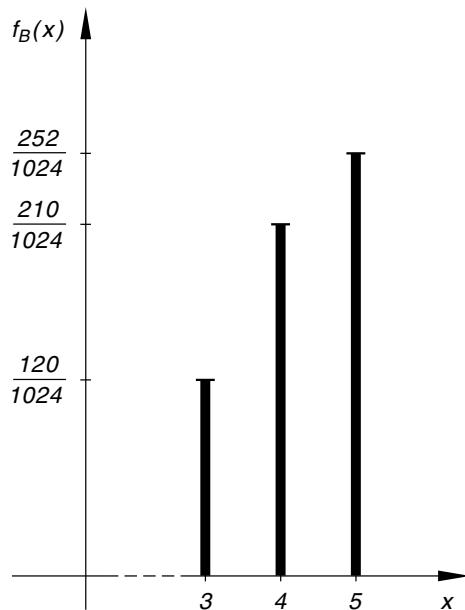


Bild II-114 Stabdiagramm

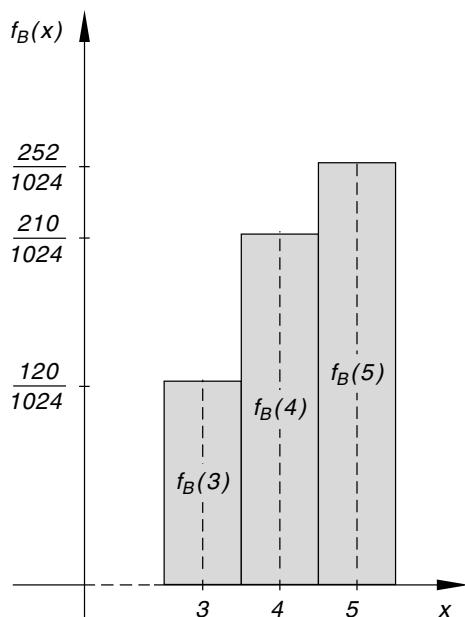


Bild II-115 Histogramm

Die Rechtecke haben dabei die gleiche Breite  $\Delta x = 1$ , ihre Höhen entsprechen der Reihe nach den Stablängen  $f_B(3)$ ,  $f_B(4)$  und  $f_B(5)$ . Die *Flächeninhalte* der drei Rechtecke stimmen dann zahlenmäßig mit den Wahrscheinlichkeitswerten  $f_B(3)$ ,  $f_B(4)$  bzw.  $f_B(5)$  überein und repräsentieren daher der Reihe nach genau die *Wahrscheinlichkeiten*, dass wir bei 10 Würfen mit der Münze dreimal, viermal bzw. fünfmal das Ereignis „Zahl“ erhalten.

Die *Gesamtfläche* des Histogramms ist dann die *gesuchte* Wahrscheinlichkeit  $P(3 \leq X \leq 5)$ . Sie besitzt den Wert 0,5684. Das entspricht einer Wahrscheinlichkeit von 56,8 %.

### Näherungslösung

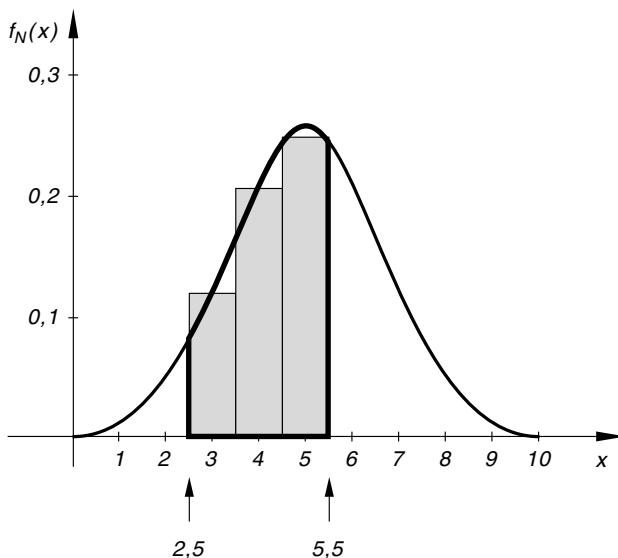
Die *Binomialverteilung* wird jetzt durch die *Normalverteilung* mit den *Parametern*

$$\mu = np = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \quad \text{und} \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{2,5}$$

und der *Dichtefunktion*

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{2,5}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-5}{\sqrt{2,5}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{5}(x-5)^2}$$

angenähert. Bild II-116 zeigt den Verlauf der Dichtefunktion. Zusätzlich sind die bereits aus dem *Histogramm* (Bild II-115) vertrauten *Rechtecke* eingezeichnet, die mit ihrer Gesamtfläche die gesuchte *exakte* Wahrscheinlichkeit  $P(3 \leq X \leq 5)$  darstellen.



**Bild II-116** Zur Begründung der „Stetigkeitskorrektur“

In der *Näherung* durch die *Normalverteilung* werden die drei Rechtecke durch die im Bild *stark* umrandete Fläche unter der Gaußschen Glockenkurve ersetzt. Dabei müssen offensichtlich die alten Intervallgrenzen  $a = 3$  und  $b = 5$  um jeweils 0,5 nach *außen* hin verschoben werden, um eine *vernünftige* Approximation zu erreichen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $P(3 \leq X \leq 5)$  wird dann *näherungsweise* durch die Fläche unter der Gaußschen Glockenkurve zwischen den Grenzen

$$\tilde{a} = a - 0,5 = 3 - 0,5 = 2,5 \quad \text{und} \quad \tilde{b} = b + 0,5 = 5 + 0,5 = 5,5$$

dargestellt. Man bezeichnet diese Korrektur als *Stetigkeitskorrektur*. Sie beruht darauf, dass eine *diskrete* Verteilung (hier: Binomialverteilung) durch eine *stetige* Verteilung (hier: Normalverteilung) *approximiert* wird und ist daher grundsätzlich durchzuführen. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt dann näherungsweise:

$$P(3 \leq X \leq 5) \approx \int_{2,5}^{5,5} \frac{1}{\sqrt{5\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{5}(x-5)^2} dx = F(5,5) - F(2,5)$$

Wir rechnen die bereits *korrigierten* Intervallgrenzen noch in *Standardeinheiten* um, d. h. gehen von der normalverteilten Zufallsvariablen  $X$  zur zugehörigen *standardisierten* Zufallsvariablen  $U$  über:

$$\tilde{a} = 2,5 \longrightarrow a^* = \frac{\tilde{a} - \mu}{\sigma} = \frac{2,5 - 5}{\sqrt{2,5}} = -1,581$$

$$\tilde{b} = 5,5 \longrightarrow b^* = \frac{\tilde{b} - \mu}{\sigma} = \frac{5,5 - 5}{\sqrt{2,5}} = 0,316$$

Somit ist

$$\begin{aligned} P(3 \leq X \leq 5) &\approx P(-1,581 \leq U \leq 0,316) = \phi(0,316) - \phi(-1,581) = \\ &= \phi(0,316) - [1 - \phi(1,581)] = \phi(0,316) + \phi(1,581) - 1 = \\ &= 0,6240 + 0,9430 - 1 = 0,5670 \end{aligned}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt somit rund 56,7% in *guter* Übereinstimmung mit dem *exakten* Wert 56,8%. ■

Wir fassen diese für die Praxis so wichtigen Ergebnisse wie folgt zusammen:

### Approximation der Binomialverteilung durch die Gaußsche Normalverteilung (für große Werte von $n$ )

Die *Binomialverteilung*  $B(n; p)$  lässt sich für *große* Werte von  $n$  durch die rechnerisch wesentlich bequemere *Normalverteilung*  $N(\mu; \sigma)$  mit dem *Mittelwert*

$$\mu = np \quad (\text{II-212})$$

und der *Standardabweichung*

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)} \quad (q = 1 - p) \quad (\text{II-213})$$

*approximieren*. Für die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* der Binomialverteilung gilt dann *näherungsweise*:

$$f(x) = P(X = x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{npq}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-np}{\sqrt{npq}} \right)^2} \quad (\text{II-214})$$

$(x = 0, 1, 2, \dots, n)$ .

Bei der Berechnung von *Wahrscheinlichkeiten* mit dieser Näherung ist zu beachten, dass die Intervallgrenzen einer sog. *Stetigkeitskorrektur* unterzogen werden müssen. Sie besteht in einer *Verschiebung* der Grenzen jeweils um 0,5 nach *außen* hin (siehe hierzu Bild II-113). Somit gilt unter den genannten Voraussetzungen für die Wahrscheinlichkeit  $P(a \leq X \leq b)$  die folgende *Näherungsformel*:

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &\approx F(b + 0,5) - F(a - 0,5) = \\ &= \phi \underbrace{\left( \frac{(b + 0,5) - \mu}{\sigma} \right)}_{b^*} - \phi \underbrace{\left( \frac{(a - 0,5) - \mu}{\sigma} \right)}_{a^*} = \\ &= \phi(b^*) - \phi(a^*) \end{aligned} \quad (\text{II-215})$$

Dabei bedeuten:

$F(x)$ : Verteilungsfunktion der *Normalverteilung* mit dem Mittelwert  $\mu = np$  und der Standardabweichung  $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)}$

$\phi(u)$ : Verteilungsfunktion der *Standardnormalverteilung* (Tabelle 1 im Anhang)

$a^*, b^*$ : In *Standardeinheiten* umgerechnete (*korrigierte*) Intervallgrenzen

**Faustregel:** Die *Annäherung* der *Binomialverteilung* durch die *Normalverteilung* ist zulässig, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$npq = np(1 - p) > 9 \quad (\text{II-216})$$

*Anmerkung*

Die *Stetigkeitskorrektur* ist eine unmittelbare Folge der Annäherung einer *diskreten* Verteilung durch eine *stetige* Verteilung (*hier*: Binomialverteilung → Gaußsche Normalverteilung).

## 6.7 Approximation einer diskreten Verteilung durch eine andere Verteilung, insbesondere durch die Normalverteilung

Zwischen den verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen bestehen gewisse Zusammenhänge. So ist uns aus Abschnitt 6.6 bereits bekannt, dass zwischen der diskreten *Binomialverteilung* und der stetigen *Gaußschen Normalverteilung* der folgende wichtige Zusammenhang besteht:

Eine *binomialverteilte* Zufallsvariable  $X$  mit den Parametern  $n$  und  $p$  lässt sich für hinreichend großes  $n$  näherungsweise durch eine *Normalverteilung* mit den Parametern

$$\mu = np \quad \text{und} \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)} \quad (\text{II-217})$$

beschreiben ( $q = 1 - p$ ). Die Verteilungsfunktion  $F(x) = P(X \leq x)$  der Binomialverteilung  $B(n; p)$  kann dann durch die entsprechende Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung approximiert werden<sup>30)</sup>:

$$F(x) = P(X \leq x) \approx \phi\left(\frac{(x + 0,5) - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \quad (\text{II-218})$$

(unter Berücksichtigung der *Stetigkeitskorrektur*).

Da die *exakte* Bestimmung der Verteilungsfunktion  $F(x)$  der Binomialverteilung für großes  $n$  sehr aufwendig und mühsam ist, bringt die Annäherung durch die Normalverteilung in der Praxis enorme *Rechenvorteile*. Als *Faustregel* gilt dabei: Die Approximation ist *zulässig*, wenn die Bedingung  $np(1-p) > 9$  erfüllt ist.

Analog lassen sich auch andere diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen wie die *hypergeometrische* Verteilung  $H(N; M; n)$  oder die *Poisson-Verteilung*  $Ps(\mu)$  unter gewissen Voraussetzungen z. B. durch die *Gaußsche Normalverteilung*  $N(\mu; \sigma)$  annähern.

Tabelle 3 gibt eine Übersicht über wichtige Approximationen und nennt die jeweiligen Voraussetzungen in Form einer *Faustregel*.

---

<sup>30)</sup> Die Normalverteilung ist die *Grenzverteilung* der Binomialverteilung für  $n \rightarrow \infty$ .

**Tabelle 3:** Wichtige Approximationen diskreter Wahrscheinlichkeitsverteilungen

		Approximation durch eine ...
	... Binomialverteilung	... Poisson-Verteilung
(1) Binomialverteilung $B(n; p)$	<p><b>Faustregel:</b></p> $\begin{cases} np \leq 10 & \text{und} \\ n \geq 1500p \end{cases}$ $P_S(\mu = np)$	<p><b>Faustregel:</b></p> $np(1-p) > 9$ $N(\mu = np; \sigma = \sqrt{np(1-p)})$
(2) Hypergeometrische Verteilung $H(N; M; n)$	<p><b>Faustregel:</b></p> $\begin{cases} 0,1 < \frac{M}{N} < 0,9 \\ n < 0,05N, n > 10 \end{cases}$	<p><b>Faustregel:</b></p> $\begin{cases} \frac{M}{N} \leq 0,1 \quad \text{oder} \quad \frac{M}{N} \geq 0,9 \\ n < 0,05N, n > 30 \end{cases}$
	$B\left(n; p = \frac{M}{N}\right)$	$P_S\left(\mu = n \frac{M}{N}\right)$ $N\left(\mu = n \frac{M}{N}; \sigma = \sqrt{n \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N-n}{N-1}}\right)$
(3) Poisson-Verteilung $P_S(\mu)$		<p><b>Faustregel:</b></p> $\mu > 10$ $N(\mu; \sigma = \sqrt{\mu})$

### Anmerkungen zur Tabelle 3

- (1) Diese Tabelle verdeutlicht die *überragende* und *zentrale* Rolle, die die Gaußsche Normalverteilung in den Anwendungen spielt: Binomialverteilung, hypergeometrische Verteilung und Poisson-Verteilung lassen sich jeweils unter den genannten Voraussetzungen durch eine Normalverteilung *approximieren*. Die Näherungen beruhen dabei in erster Linie auf dem sog. *zentralen Grenzwertsatz* der Wahrscheinlichkeitsrechnung, den wir am Ende dieses Kapitels noch kennenlernen werden (Abschnitt 7.6.1). Dort kommen wir nochmals auf das Problem der Approximation diskreter Verteilungen zurück.
- (2) Bei der Approximation einer *diskreten* Verteilung mit der Verteilungsfunktion  $F(x) = P(X \leq x)$  durch die *Normalverteilung* mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$  muss die *Stetigkeitskorrektur* berücksichtigt werden. Diese besteht bekanntlich darin, dass man die Intervallgrenzen um jeweils 0,5 Einheiten nach *außen* hin verschiebt (siehe hierzu Abschnitt 6.6 und insbesondere Bild II-113).

## 7 Wahrscheinlichkeitsverteilungen von mehreren Zufallsvariablen

Bisher haben wir uns ausschließlich mit Zufallsexperimenten beschäftigt, bei denen die Beobachtung eines *einzigem* Merkmals im Vordergrund stand. In diesem Abschnitt geben wir nun eine kurze Einführung in Zufallsexperimente, bei denen gleichzeitig *zwei* (oder auch mehr) Zufallsgrößen oder Zufallsvariable beobachtet werden. Wir stoßen in diesem Zusammenhang auf *zweidimensionale* Wahrscheinlichkeitsverteilungen und beschreiben diese wiederum durch *Wahrscheinlichkeits-* bzw. *Dichtefunktionen* oder durch die zugehörigen *Verteilungsfunktionen*, die in diesem Fall dann von *zwei* Variablen abhängen.

Von besonderem Interesse in den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen, insbesondere in der Statistik und Fehlerrechnung, sind dabei die Eigenschaften von *Summen* und *Produkten* von (stochastisch unabhängigen) Zufallsvariablen wie z. B. deren Mittelwerte, Varianzen und Standardabweichungen. Abschließend behandeln wir dann zwei für die Praxis besonders wichtige Verteilungen, die sog. *Chi-Quadrat-Verteilung* und die *t-Verteilung von Student*. Sie bilden die Grundlage für *statistische Prüfverfahren* („Tests“), die wir im nächsten Kapitel über *Statistik* noch ausführlich beschreiben werden.

### 7.1 Ein einführendes Beispiel

Wir werfen *gleichzeitig* eine homogene Münze und einen homogenen Würfel und beobachten dabei die beiden Zufallsvariablen

$$X = \text{Anzahl „Wappen“ bei der Münze}$$

und

$$Y = \text{Augenzahl beim Würfel}$$

Für die Zufallsvariable  $X$  gibt es dann nur die beiden möglichen Werte 0 und 1. Sie charakterisieren die folgenden Ereignisse:

$X = 0$ : Auftreten der „Zahl“ (d. h. 0-mal „Wappen“)

$X = 1$ : Auftreten des „Wappens“ (d. h. 1-mal „Wappen“)

Die Zufallsvariable  $Y$  dagegen kann jeden der 6 möglichen Werte 1, 2, 3, 4, 5 und 6 annehmen. Insgesamt gibt es daher  $2 \cdot 6 = 12$  verschiedene *Elementarereignisse*, die wir durch eine sog. *zweidimensionale* Zufallsvariable  $(X; Y)$  mit der folgenden Wertetabelle beschreiben können:

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6
0	(0; 1)	(0; 2)	(0; 3)	(0; 4)	(0; 5)	(0; 6)
1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)

So bedeutet z. B. das Wertepaar (1; 5), dass bei der Münze „Wappen“ und beim Würfel „5 Augen“ oben liegen. Da es sich bei unserem Zufallsexperiment um ein *Laplace-Experiment* handelt, treten alle 12 Elementarereignisse mit der *gleichen* Wahrscheinlichkeit auf<sup>31)</sup>:

$$P(X = x; Y = y) = \frac{1}{12} \quad (x = 0, 1; y = 1, 2, \dots, 6) \quad (\text{II-219})$$

Die *gemeinsame* Verteilung der beiden Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  ist somit durch die folgende *Verteilungstabelle* gegeben:

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6
0	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12
1	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12

Die *Wahrscheinlichkeitsfunktion*  $f(x; y)$  dieser sog. *zweidimensionalen* Verteilung beschreibt dann das Ereignis „ $X = x; Y = y$ “ und ist somit eine Funktion von *zwei* unabhängigen Variablen  $x$  und  $y$ . In unserem Beispiel gilt dann:

$$f(x; y) = P(X = x; Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{12} & \begin{array}{l} x = 0, 1 \\ y = 1, 2, \dots, 6 \end{array} \\ 0 & \text{für alle übrigen } (x; y) \end{cases} \quad (\text{II-220})$$

<sup>31)</sup> Zur symbolischen Schreibweise:  $P(X = x; Y = y)$  ist die *Wahrscheinlichkeit* dafür, dass bei dem Zufallsexperiment die Zufallsvariable  $X$  den Wert  $x$  und *gleichzeitig* die Zufallsvariable  $Y$  den Wert  $y$  annimmt.

Bild II-117 zeigt die graphische Darstellung dieser *diskreten* Funktion in Form eines räumlichen *Stabdiagramms* (alle Stäbe haben die Länge 1/12).

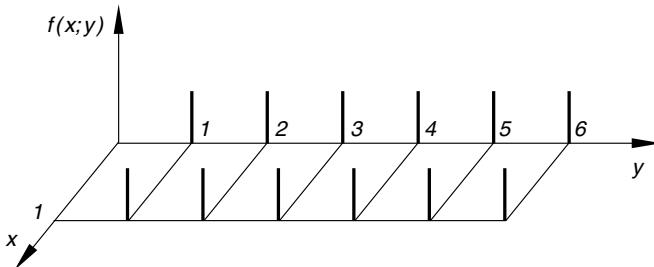


Bild II-117

Addiert man in der Verteilungstabelle die Wahrscheinlichkeitswerte *zeilenweise*, so erhält man genau die Verteilung der 1. Zufallsvariablen  $X$  (*Anzahl „Wappen“ beim Münzwurf*), beschrieben durch die *Wahrscheinlichkeitsfunktion*  $f_1(x)$  mit den folgenden Werten:

$$f_1(0) = \sum_y f(0; y) = \underbrace{\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{12}}_{6\text{-mal}} = 6 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$f_1(1) = \sum_y f(1; y) = \underbrace{\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{12}}_{6\text{-mal}} = 6 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

Summiert wird dabei über sämtliche Werte der Zufallsvariablen  $Y$  (hier also über 6 Werte).

Die *Wahrscheinlichkeitsfunktion*  $f_1(x)$  beschreibt somit die Verteilung der Zufallsvariablen  $X$  und zwar *unabhängig* davon, welchen der 6 möglichen Werte 1, 2, 3, 4, 5 und 6 die zweite Zufallsvariable  $Y$  annimmt. Mit anderen Worten:  $f_1(x)$  ist die *Wahrscheinlichkeit* für das Ereignis „ $X = x$ “, *unabhängig* von der gewürfelten Augenzahl. Die Funktionswerte von  $f_1(x)$  stehen am *rechten* Rand der nachfolgenden Verteilungstabelle und sind *grau* unterlegt:

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6	
0	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/2
1	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/2
	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	

$\overbrace{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}^{\text{Wahrscheinlichkeitsfunktion } f_2(y)}$   
der Zufallsvariablen  $Y$  (Würfel)

Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f_1(x)$  der Zufallsvariablen  $X$  (Münze)

Durch *spaltenweises* Aufaddieren erhalten wir die Verteilung der 2. Zufallsvariablen  $Y$  („Augenzahl“ des Würfels). Ihre *Wahrscheinlichkeitsfunktion*  $f_2(y)$  besitzt die folgenden Werte:

$$f_2(1) = \sum_x f(x; 1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$f_2(2) = \sum_x f(x; 2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

⋮

$$f_2(6) = \sum_x f(x; 6) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

Also:  $f_2(y) = 1/6$  für  $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Dabei wird über sämtliche Werte der Zufallsvariablen  $X$  summiert (hier also über zwei Werte). Die *Wahrscheinlichkeitsfunktion*  $f_2(y)$  beschreibt somit die Verteilung der Zufallsvariablen  $Y$  und zwar *unabhängig* davon, welchen der beiden möglichen Werte 0 und 1 die erste Zufallsvariable  $X$  annimmt. Mit anderen Worten:  $f_2(y)$  ist die *Wahrscheinlichkeit* für das Ereignis „ $Y = y$ “, *unabhängig* vom Ausgang des Münzwurfs. Die Funktionswerte von  $f_2(y)$  sind am *unteren* Rand der Verteilungstabelle ebenfalls *grau* unterlegt. Die beiden (eindimensionalen) Wahrscheinlichkeitsfunktionen  $f_1(x)$  und  $f_2(y)$  der Zufallsvariablen  $X$  bzw.  $Y$  werden in diesem Zusammenhang auch als *Randverteilungen* der *zweidimensionalen* Verteilung  $(X; Y)$  bezeichnet. Dabei gilt in diesem konkreten Beispiel:

$$f(x; y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad (\text{II-221})$$

## 7.2 Zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen

### 7.2.1 Verteilungsfunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariablen

Zufallsexperimente, in denen gleichzeitig *zwei* Merkmale (Eigenschaften) beobachtet werden, lassen sich durch *zweidimensionale* Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschreiben. Die den beiden beobachteten Größen zugeordneten Zufallsvariablen bezeichnen wir mit  $X$  und  $Y$ . Sie bilden eine *zweidimensionale* Zufallsvariable  $(X; Y)$ , deren Wahrscheinlichkeitsverteilung sich *vollständig* durch die *Verteilungsfunktion*

$$F(x; y) = P(X \leq x; Y \leq y) \quad (\text{II-222})$$

darstellen lässt. Dabei ist  $P(X \leq x; Y \leq y)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die (erste) Zufallsvariable  $X$  einen Wert kleiner *oder* gleich  $x$  und die (zweite) Zufallsvariable  $Y$  *gleichzeitig* einen Wert kleiner *oder* gleich  $y$  annimmt.

### Verteilungsfunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariablen (zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung)

Zufallsexperimente, in denen gleichzeitig *zwei* Merkmale beobachtet werden, führen zu einer *zweidimensionalen* Wahrscheinlichkeitsverteilung der beiden Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ , die wir zu einer *zweidimensionalen* Zufallsvariablen  $(X; Y)$  zusammenfassen. Die Verteilung lässt sich dann *vollständig* durch die *Verteilungsfunktion*

$$F(x; y) = P(X \leq x; Y \leq y) \quad (\text{II-223})$$

darstellen. Dabei ist  $P(X \leq x; Y \leq y)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsvariable  $X$  einen Wert kleiner *oder* gleich  $x$  und die Zufallsvariable  $Y$  *gleichzeitig* einen Wert kleiner *oder* gleich  $y$  annimmt.

Die Verteilungsfunktion besitzt folgende *Eigenschaften*:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x; y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x; y) = 0 \quad (\text{II-224})$$

$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} F(x; y) = 1 \quad (\text{II-225})$$

(3) Die Wahrscheinlichkeit  $P(a_1 < X \leq a_2; b_1 < Y \leq b_2)$  dafür, dass die Zufallsvariable  $X$  einen Wert zwischen  $a_1$  und  $a_2$  und die Zufallsvariable  $Y$  *gleichzeitig* einen Wert zwischen  $b_1$  und  $b_2$  annimmt, lässt sich mit Hilfe der Verteilungsfunktion  $F(x; y)$  wie folgt berechnen ( $a_1 < a_2, b_1 < b_2$ ):

$$\begin{aligned} P(a_1 < X \leq a_2; b_1 < Y \leq b_2) &= \\ &= F(a_1; b_1) + F(a_2; b_2) - F(a_1; b_2) - F(a_2; b_1) \end{aligned} \quad (\text{II-226})$$

#### Anmerkungen

- (1) Die *zweidimensionale* Zufallsvariable  $(X; Y)$  wird häufig auch als *zweidimensionaler Zufallsvektor* bezeichnet.  $X$  und  $Y$  sind dabei die beiden *Komponenten* dieses Vektors.
- (2) Man sagt auch,  $F(x; y)$  beschreibe die *gemeinsame* Verteilung der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ .

Bei den weiteren Überlegungen unterscheiden wir noch, ob die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  beide *diskret* oder beide *stetig* sind. Die entsprechenden zweidimensionalen Verteilungen werden dann als *diskrete* bzw. *stetige* Verteilungen bezeichnet.

### 7.2.2 Diskrete zweidimensionale Verteilung

Eine *zweidimensionale* Zufallsvariable  $(X; Y)$  heißt *diskret*, wenn *beide* Komponenten (d. h.  $X$  und  $Y$ ) *diskrete* Zufallsvariable sind. Wir wollen dabei der Einfachheit halber annehmen, dass die diskreten Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  unabhängig voneinander die *endlich* vielen Werte

$$x_1, x_2, \dots, x_m \quad \text{bzw.} \quad y_1, y_2, \dots, y_n \quad (\text{II-227})$$

durchlaufen. Mit

$$P(X = x_i; Y = y_k) = p_{ik} \quad (\text{II-228})$$

bezeichnen wir die *Wahrscheinlichkeit* für das Eintreten des Ereignisses „ $X = x_i; Y = y_k$ “ ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ ). Die *zweidimensionale Verteilungstabelle* hat dann das folgende Aussehen:

$X \backslash Y$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_n$	
$x_1$	$p_{11}$	$p_{12}$	$\dots$	$p_{1n}$	$p_1^*$
$x_2$	$p_{21}$	$p_{22}$	$\dots$	$p_{2n}$	$p_2^*$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$x_m$	$p_{m1}$	$p_{m2}$	$\dots$	$p_{mn}$	$p_m^*$
	$p_1^{**}$	$p_2^{**}$	$\dots$	$p_n^{**}$	

Randverteilung  $f_2(y)$

}

Randverteilung  $f_1(x)$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der *diskreten* zweidimensionalen Zufallsvariablen  $(X; Y)$  kann dann vollständig durch die wie folgt definierte *Wahrscheinlichkeitsfunktion*  $f(x; y)$  beschrieben werden:

$$f(x; y) = \begin{cases} p_{ik} & \text{für } x = x_i, y = y_k \\ 0 & \text{alle übrigen } (x; y) \end{cases} \quad (\text{II-229})$$

( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ ). Dabei ist stets  $f(x; y) \geq 0$  und

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_i; y_k) = 1 \quad (\text{Normierung}) \quad (\text{II-230})$$

Die zugehörige *Verteilungsfunktion* lautet damit:

$$F(x; y) = P(X \leq x; Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_k \leq y} f(x_i; y_k) \quad (\text{II-231})$$

Die sog. *Randverteilungen* der Zufallsvariablen  $X$  bzw.  $Y$  in der *zweidimensionalen* Zufallsvariablen  $(X; Y)$  erhält man, indem man in der Verteilungstabelle die Einzelwahrscheinlichkeiten  $p_{ik}$  zeilen- bzw. spaltenweise aufaddiert (*grau* unterlegte Bereiche in der Verteilungstabelle). So ist

$$f_1(x) = \begin{cases} p_i^* & \text{für } x = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ 0 & \text{alle übrigen } x \end{cases} \quad (\text{II-232})$$

die *Randverteilung* von  $X$  in der *zweidimensionalen* Zufallsvariablen  $(X; Y)$  und somit die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* der Zufallsvariablen  $X$ . Analog ist

$$f_2(y) = \begin{cases} p_k^{**} & \text{für } y = y_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \\ 0 & \text{alle übrigen } y \end{cases} \quad (\text{II-233})$$

die *Randverteilung* von  $Y$  in der *zweidimensionalen* Zufallsvariablen  $(X; Y)$ , d. h. die *Wahrscheinlichkeitsfunktion* der Zufallsvariablen  $Y$ .

Wir fassen kurz zusammen:

### **Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten zweidimensionalen Zufallsvariablen (diskrete zweidimensionale Verteilung)**

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer *diskreten* zweidimensionalen Zufallsvariablen  $(X; Y)$  lässt sich durch die normierte *Wahrscheinlichkeitsfunktion*

$$f(x; y) = \begin{cases} p_{ik} & \text{für } x = x_i, y = y_k \\ 0 & \text{alle übrigen } (x; y) \end{cases} \quad (\text{II-234})$$

oder durch die zugehörige *Verteilungsfunktion*

$$F(x; y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_k \leq y} f(x_i; y_k) \quad (\text{II-235})$$

vollständig beschreiben ( $p_{ik}$ : Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsvariable  $X$  den Wert  $x_i$  und die Zufallsvariable  $Y$  gleichzeitig den Wert  $y_k$  annimmt mit  $i = 1, 2, \dots, m$  und  $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Die *Randverteilungen* der Variablen  $X$  bzw.  $Y$  in der *zweidimensionalen* Verteilung erhält man, indem man in der zweidimensionalen Verteilungstabelle die Einzelwahrscheinlichkeiten  $p_{ik}$  zeilen- bzw. spaltenweise aufaddiert (*grau* unterlegte Bereiche in der Verteilungstabelle). Sie sind zugleich die *Wahrscheinlichkeitsfunktionen*  $f_1(x)$  und  $f_2(y)$  der diskreten *eindimensionalen* Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ .

### Anmerkung

Alle Überlegungen und Aussagen lassen sich *sinngemäß* auch auf Verteilungen von  $n$  diskreten Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , d. h. auf Verteilungen der diskreten  $n$ -dimensionalen Zufallsvariablen  $(X_1; X_2; \dots; X_n)$  (auch  *$n$ -dimensionaler Zufallsvektor* genannt) übertragen.

### ■ Beispiel

Beim *dreimaligen* Wurf einer homogenen Münze sind die folgenden acht gleichwahrscheinlichen Elementarereignisse möglich ( $Z$ : Zahl;  $W$ : Wappen):

$$ZZZ, ZZW, ZWZ, WZZ, ZWW, WZW, WWZ, WWW$$

Wir beobachten dabei die folgenden *diskreten* Zufallsvariablen:

$$X = \text{Anzahl „Zahl“ beim ersten Wurf}$$

$$Y = \text{Anzahl „Zahl“ bei drei Würfen}$$

Die Zufallsvariable  $X$  kann nur die beiden Werte 0 und 1 annehmen, je nachdem, ob beim 1. Wurf „Wappen“ oder „Zahl“ erscheint. Für die Zufallsvariable  $Y$  sind dagegen die vier Werte 0, 1, 2 und 3 möglich. Wir fassen jetzt die beiden Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  zu einer diskreten *zweidimensionalen* Zufallsvariablen  $(X; Y)$  zusammen, ordnen dann den möglichen Wertepaaren dieser zweidimensionalen Zufallsgröße die entsprechenden Elementarereignisse zu und bestimmen schließlich die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse (jedes Elementarereignis tritt mit der Wahrscheinlichkeit  $p = 1/8$  ein):

$X = 0$	(„Wappen“ beim 1. Wurf)
---------	-------------------------

$$Y = 0 \quad WWW \quad \rightarrow P(X = 0; Y = 0) = 1/8$$

$$Y = 1 \quad WWZ, WZW \rightarrow P(X = 0; Y = 1) = 2/8$$

$$Y = 2 \quad WZZ \quad \rightarrow P(X = 0; Y = 2) = 1/8$$

$$Y = 3 \quad \text{unmöglich} \quad \rightarrow P(X = 0; Y = 3) = 0$$

$X = 1$	(„Zahl“ beim 1. Wurf)
---------	-----------------------

$$Y = 0 \quad \text{unmöglich} \quad \rightarrow P(X = 1; Y = 0) = 0$$

$$Y = 1 \quad ZWW \quad \rightarrow P(X = 1; Y = 1) = 1/8$$

$$Y = 2 \quad ZZW, ZWZ \rightarrow P(X = 1; Y = 2) = 2/8$$

$$Y = 3 \quad ZZZ \quad \rightarrow P(X = 1; Y = 3) = 1/8$$

Damit erhalten wir die folgende zweidimensionale *Verteilungstabelle*:

$X \backslash Y$	0	1	2	3	
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

$f_2(y)$

Durch *zeilen-* bzw. *spaltenweise* Addition erhalten wir hieraus die Wahrscheinlichkeitsfunktionen der *Randverteilungen* von  $X$  bzw.  $Y$  in dieser zweidimensionalen Verteilung (*grau* unterlegte Bereiche). Die zugehörigen *Verteilungstabellen* lauten somit:

$x_i$	0	1		$y_k$	0	1	2	3
$f_1(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$f_2(y_k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

■

### 7.2.3 Stetige zweidimensionale Verteilung

Eine *zweidimensionale* Zufallsvariable  $(X; Y)$  heißt *stetig*, wenn *beide* Komponenten (d. h.  $X$  und  $Y$ ) *stetige* Zufallsvariable sind. In diesem Fall wird die Verteilungsfunktion wie bei der eindimensionalen Verteilung in der *Integralform*, hier also durch ein *uneigentliches Doppelintegral* definiert<sup>32)</sup>:

$$F(x; y) = \int_{u=-\infty}^x \int_{v=-\infty}^y f(u; v) dv du \quad (\text{II-236})$$

Die Integrandfunktion  $f(x; y) \geq 0$  ist dabei die normierte *Wahrscheinlichkeitsdichte* oder kurz *Dichtefunktion* der *zweidimensionalen* Wahrscheinlichkeitsverteilung. Es gilt somit:

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x; y) dy dx = 1 \quad (\text{II-237})$$

<sup>32)</sup>  $u$  und  $v$  sind Integrationsvariable.

Die Dichten der *Randverteilungen* erhalten wir durch Integration der zweidimensionalen Dichtefunktion  $f(x; y)$  bezüglich der Variablen  $x$  bzw.  $y$ . Die Randverteilung der Zufallsvariablen  $X$  in der zweidimensionalen Verteilung besitzt daher die *Dichtefunktion*

$$f_1(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x; y) dy \quad (\text{II-238})$$

Analog erhalten wir die *Dichtefunktion* der *Randverteilung* von  $Y$  in der *zweidimensionalen* Verteilung:

$$f_2(y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x; y) dx \quad (\text{II-239})$$

Wir fassen diese Ergebnisse kurz zusammen:

### **Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen zweidimensionalen Zufallsvariablen (stetige zweidimensionale Verteilung)**

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer *stetigen* zweidimensionalen Zufallsvariablen  $(X; Y)$  lässt sich durch die in der Integralform dargestellte *Verteilungsfunktion*

$$F(x; y) = \int_{u=-\infty}^{x} \int_{v=-\infty}^{y} f(u; v) dv du \quad (\text{II-240})$$

vollständig beschreiben. Dabei ist  $f(x; y) \geq 0$  die *normierte Dichtefunktion* der Verteilung. Die *Randverteilungen* der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  in der *zweidimensionalen* Verteilung besitzen dann die folgenden *Dichten*:

#### **Randverteilung von $X$ (Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von $X$ )**

$$f_1(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x; y) dy \quad (\text{II-241})$$

#### **Randverteilung von $Y$ (Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von $Y$ )**

$$f_2(y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x; y) dx \quad (\text{II-242})$$

**Anmerkung**

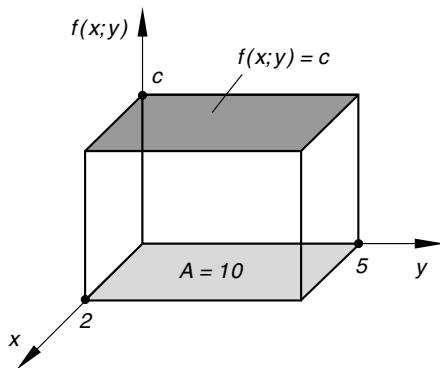
Alle Aussagen lassen sich *sinngemäß* auch auf Verteilungen einer stetigen  $n$ -dimensionalen Zufallsvariablen  $(X_1; X_2; \dots; X_n)$  übertragen.

### ■ Beispiele

- (1) Die Dichtefunktion einer zweidimensionalen *Gleichverteilung* laute wie folgt:

$$f(x; y) = \begin{cases} \text{const.} = c & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 5 \\ 0 & \text{für alle übrigen } (x; y) \end{cases}$$

(Bild II-118). Wir interessieren uns für die *Verteilungsfunktion*  $F(x; y)$  und die Wahrscheinlichkeit  $P(X \leq 1; Y \leq 3)$ .



**Bild II-118**  
Zweidimensionale Gleichverteilung

Zunächst bestimmen wir die noch unbekannte Konstante  $c$  aus der *Normierungsbedingung* (II-237):

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x; y) dy dx = \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^5 c dy dx = 1$$

Wir erhalten:

$$\int_{x=0}^2 \int_{y=0}^5 c dy dx = c \cdot \underbrace{\int_{x=0}^2 \int_{y=0}^5 1 dy dx}_{A = 10} = 10c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{10} = 0,1$$

Denn das Doppelintegral  $\int_{x=0}^2 \int_{y=0}^5 1 dy dx$  beschreibt den *Flächeninhalt A* des

rechteckigen Definitionsbereiches und besitzt daher den Wert  $A = 10$  (*hellgrau* unterlegtes Rechteck in Bild II-118). Somit ist  $c = 0,1$ .

Die *Verteilungsfunktion F(x; y)* lässt sich damit in dem rechteckigen Bereich  $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 5$  durch das *Doppelintegral*

$$\begin{aligned} F(x; y) &= \int_{u=-\infty}^x \int_{v=-\infty}^y f(u; v) dv du = \int_{u=0}^x \int_{v=0}^y 0,1 dv du = \\ &= 0,1 \cdot \int_{u=0}^x \int_{v=0}^y 1 dv du \end{aligned}$$

darstellen. Wir lösen dieses Integral schrittweise wie folgt:

*Innere Integration (nach der Variablen v):*

$$\int_{v=0}^y 1 dv = [v]_{v=0}^y = y - 0 = y$$

*Äußere Integration (nach der Variablen u):*

$$\int_{u=0}^x y du = y \cdot \int_{u=0}^x 1 du = y [u]_{u=0}^x = y(x - 0) = yx = xy$$

Die *Verteilungsfunktion* der zweidimensionalen Verteilung lautet daher im Bereich  $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 5$  wie folgt (im übrigen Bereich ist  $F(x; y) = 0$ ):

$$F(x; y) = 0,1xy$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $P(X \leq 1; Y \leq 3)$  beträgt dann:

$$P(X \leq 1; Y \leq 3) = F(1; 3) = 0,1 \cdot 1 \cdot 3 = 0,3$$

Die *Wahrscheinlichkeit* dafür, dass die Zufallsvariable  $X$  einen Wert annimmt, der *höchstens* gleich 1 ist und gleichzeitig die Zufallsvariable  $Y$  einen Wert, der *höchstens* gleich 3 ist, beträgt demnach 30 %.

(2) Die in der gesamten  $x, y$ -Ebene definierte Dichtefunktion

$$f(x; y) = \frac{1}{12\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left[ \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{2}\right)^2 \right]}$$

liefert ein Beispiel für eine *normalverteilte zweidimensionale Zufallsvariable* ( $X; Y$ ) (sog. *zweidimensionale Normalverteilung*). Wir bestimmen die *Dichtefunktionen*  $f_1(x)$  und  $f_2(y)$  der *Randverteilungen* der beiden Komponenten  $X$  und  $Y$  in dieser zweidimensionalen Verteilung. Bei der Auswertung der dabei anfallenden Integrale benutzen wir die als bekannt vorausgesetzte Beziehung<sup>33)</sup>

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2\pi}$$

**Dichtefunktion  $f_1(x)$  der Zufallsvariablen  $X$**

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x; y) dy = \frac{1}{12\pi} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left[ \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{2}\right)^2 \right]} dy = \\ &= \frac{1}{12\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{3}\right)^2} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y-2}{2}\right)^2} dy}_{I_1} = \frac{1}{12\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{3}\right)^2} \cdot I_1 \end{aligned}$$

Das Integral  $I_1$  führen wir durch die *Substitution*

$$t = \frac{y-2}{2}, \quad \frac{dt}{dy} = \frac{1}{2}, \quad dy = 2 dt$$

wie folgt auf das oben aufgeführte Integral  $I$  zurück (die Integrationsgrenzen bleiben dabei erhalten):

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y-2}{2}\right)^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot 2 dt = 2 \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt}_{I = \sqrt{2\pi}} = \\ &= 2I = 2\sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

<sup>33)</sup> Es handelt sich um die (umgeformte) *Normierungsbedingung* (II-171) für die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung.

Somit ist

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{12\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}\right)^2} \cdot I_1 = \frac{1}{12\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}\right)^2} \cdot 2\sqrt{2\pi} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{18\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{18}x^2} \end{aligned}$$

die *Dichtefunktion* der Zufallsvariablen  $X$ .

**Dichtefunktion  $f_2(y)$  der Zufallsvariablen  $Y$**

$$\begin{aligned} f_2(y) &= \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x; y) dx = \frac{1}{12\pi} \cdot \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{2}\right)^2\right]} dx = \\ &= \frac{1}{12\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-2}{2}\right)^2} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}\right)^2} dx}_{I_2} = \frac{1}{12\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-2}{2}\right)^2} \cdot I_2 \end{aligned}$$

Mit der *Substitution*

$$t = \frac{x}{3}, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{3}, \quad dx = 3 dt$$

erhalten wir dann (die Integrationsgrenzen bleiben dabei erhalten):

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}\right)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot 3 dt = 3 \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt}_{I = \sqrt{2\pi}} = \\ &= 3I = 3\sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} f_2(y) &= \frac{1}{12\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-2}{2}\right)^2} \cdot I_2 = \frac{1}{12\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-2}{2}\right)^2} \cdot 3\sqrt{2\pi} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-2}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

die *Dichtefunktion* der zweiten Komponente  $Y$ . ■

### 7.3 Stochastisch unabhängige Zufallsvariable

Häufig werden bei einem Zufallsexperiment *zwei* Größen oder Merkmale  $X$  und  $Y$  gleichzeitig beobachtet, deren einzelne Ergebnisse jedoch völlig *unabhängig voneinander* sind. Der beobachtete Wert der einen Zufallsvariablen hat also *keinerlei* Einfluss auf den beobachteten Wert der anderen Zufallsvariablen. Wir geben zunächst ein einfaches Beispiel.

#### ■ Beispiel

Beim Würfeln mit zwei *unterscheidbaren* homogenen Würfeln können die beiden Zufallsvariablen

$$X = \text{Augenzahl des 1. Würfels} \quad \text{und} \quad Y = \text{Augenzahl des 2. Würfels}$$

*unabhängig voneinander* jeden der insgesamt 6 Werte 1, 2, 3, 4, 5 und 6 annehmen. Die Augenzahl des einen Würfels ist dabei vollkommen *unabhängig* davon, welches Ergebnis der andere Würfel bringt. Es handelt sich also um *voneinander unabhängige* Ergebnisse. ■

Diese Überlegungen führen uns zu dem wie folgt definierten Begriff der *stochastischen Unabhängigkeit* von Zufallsvariablen.

**Definition:** Die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit den Verteilungsfunktionen  $F_1(x)$  und  $F_2(y)$  und der *gemeinsamen* zweidimensionalen Verteilungsfunktion  $F(x; y)$  heißen *stochastisch unabhängig*, wenn die Bedingung

$$F(x; y) = F_1(x) \cdot F_2(y) \tag{II-243}$$

für alle  $(x; y)$  erfüllt ist.

#### Anmerkungen

- (1) Ist die Bedingung (II-243) *nicht* erfüllt, so heißen die Zufallsvariablen *stochastisch abhängig*.
- (2) Sind  $X$  und  $Y$  *stochastisch unabhängige* Zufallsvariable, so gilt für die zugehörigen *Wahrscheinlichkeits-* bzw. *Dichtefunktionen* die folgende Beziehung:

$$f(x; y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \tag{II-244}$$

Sie ist eine *notwendige* und *hinreichende* Bedingung für die *stochastische Unabhängigkeit* der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ .

- (3) Der Begriff der *stochastischen Unabhängigkeit* lässt sich auch auf  $n$  Zufallsvariable ausdehnen. Die Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  mit den Verteilungsfunktionen  $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$  und der gemeinsamen  $n$ -dimensionalen Verteilungsfunktion  $F(x_1; x_2; \dots; x_n)$  heißen *stochastisch unabhängig*, wenn die Beziehung

$$F(x_1; x_2; \dots; x_n) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \cdot \dots \cdot F_n(x_n) \quad (\text{II-245})$$

für alle  $(x_1; x_2; \dots; x_n)$  erfüllt ist.

Die Bedingung

$$f(x_1; x_2; \dots; x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x_n) \quad (\text{II-246})$$

für die zugehörigen *Wahrscheinlichkeits-* bzw. *Dichtefunktionen* ist dabei *notwendig und hinreichend* für die *stochastische Unabhängigkeit* der  $n$  Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

- (4) In der Praxis ist es oft schwierig, die stochastische Unabhängigkeit zweier Zufallsvariabler anhand der Bedingung (II-243) nachzuweisen. In vielen Fällen jedoch lässt sich die Unabhängigkeit *logisch begründen*.

## ■ Beispiele

- (1) In einer Urne befinden sich drei weiße und zwei schwarze Kugeln (Bild II-119).

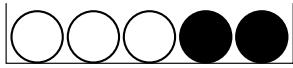


Bild II-119

Wir entnehmen ihr nacheinander zufällig zwei Kugeln und beobachten dabei die wie folgt definierten *diskreten Zufallsvariablen*:

$X = \text{Farbe der bei der 1. Ziehung erhaltenen Kugel}$

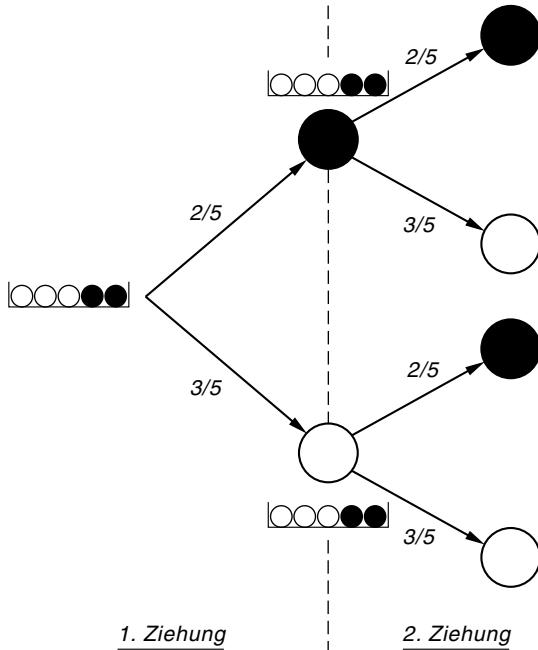
$Y = \text{Farbe der bei der 2. Ziehung erhaltenen Kugel}$

Wir vereinbaren: Wird eine *weiße* Kugel gezogen, so besitzt die entsprechende Zufallsvariable den Wert 0, bei der Ziehung einer *schwarzen* Kugel den Wert 1.

Im weiteren Verlauf müssen wir noch unterscheiden, ob die Ziehung der Kugeln *mit* oder *ohne* Zurücklegen erfolgen soll.

### 1. Fall: Ziehung mit Zurücklegen

Wir können dieses Zufallsexperiment durch den folgenden *Ereignisbaum* beschreiben (Bild II-120):



**Bild II-120** Ereignisbaum bei einer Ziehung *mit Zurücklegen*

Damit ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$p(\text{OO}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25} = 0,36 \quad p(\text{O}\bullet) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} = 0,24$$

$$p(\bullet\text{O}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25} = 0,24 \quad p(\bullet\bullet) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 0,16$$

Die *gemeinsame* Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x; y)$  besitzt damit die folgenden Werte:

$$f(0; 0) = p(\text{OO}) = 0,36 \quad f(0; 1) = p(\text{O}\bullet) = 0,24$$

$$f(1; 0) = p(\bullet\text{O}) = 0,24 \quad f(1; 1) = p(\bullet\bullet) = 0,16$$

Die *Verteilungstabelle* der zweidimensionalen  $(X; Y)$ -Verteilung besitzt daher das folgende Aussehen:

	○		●	
	$\diagdown$	Y	0	1
	$X \backslash$			
○		0,36	0,24	0,6
●		0,24	0,16	0,4
		0,6	0,4	
		$f_1(x)$ 		
		$f_2(y)$ 		

Die durch *zeilen-* bzw. *spaltenweise* Addition erhaltenen *Randverteilungen* liefern uns die Wahrscheinlichkeitsfunktionen  $f_1(x)$  und  $f_2(y)$  der beiden Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  und sind in der Verteilungstabelle jeweils *grau* unterlegt. Sie lauten also:

$x$	0	1	$y$	0	1
$f_1(x)$	0,6	0,4	$f_2(y)$	0,6	0,4

Wir vermuten dabei, dass die beiden Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  *stochastisch unabhängig* sind und begründen dies inhaltlich wie folgt: Da die bei der 1. Ziehung entnommene Kugel (ob weiß oder schwarz) *vor* der 2. Ziehung in die Urne *zurückgelegt* wird, haben wir bei *beiden* Ziehungen exakt die *gleiche* Ausgangslage. In der Urne befinden sich in beiden Fällen jeweils drei weiße und zwei schwarze Kugeln. Das Ergebnis der 2. Ziehung muss daher vom Ergebnis der 1. Ziehung *unabhängig* sein.

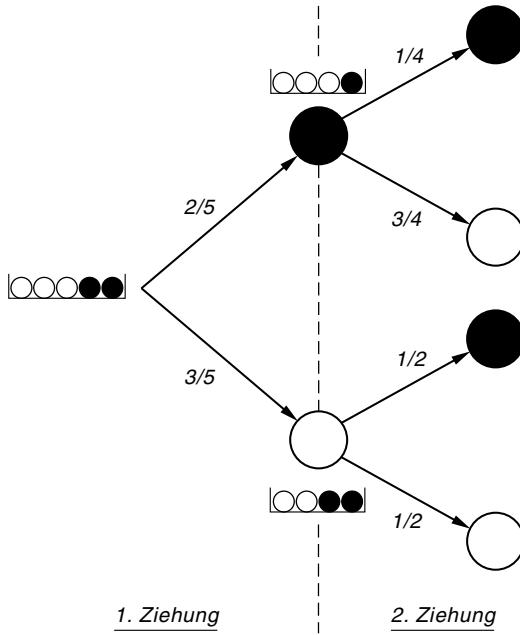
Zu dem *gleichen* Ergebnis kommen wir, in dem wir die für die stochastische Unabhängigkeit *hinreichende* Bedingung  $f(x; y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$  für *alle* Wertepaare überprüfen:

$$\begin{array}{ll}
 f(0; 0) = 0,36 & f_1(0) \cdot f_2(0) = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36 = f(0; 0) \\
 f(0; 1) = 0,24 & f_1(0) \cdot f_2(1) = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24 = f(0; 1) \\
 f(1; 0) = 0,24 & f_1(1) \cdot f_2(0) = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24 = f(1; 0) \\
 f(1; 1) = 0,16 & f_1(1) \cdot f_2(1) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16 = f(1; 1)
 \end{array}$$

Die *hinreichende* Bedingung ist somit *erfüllt*, die beiden Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sind daher *stochastisch unabhängig*.

## 2. Fall: Ziehung ohne Zurücklegen

Wir erhalten diesmal den in Bild II-121 dargestellten Ereignisbaum:



**Bild II-121** Ereignisbaum bei einer Ziehung ohne Zurücklegen

Wir erhalten folgende Wahrscheinlichkeitswerte:

$$p(\text{○○}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10} = 0,3 \quad p(\text{○●}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{20} = 0,15$$

$$p(\text{●○}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = 0,3 \quad p(\text{●●}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = 0,1$$

Dies führt zu der folgenden Verteilungstabelle:

		○	●		
		Y	X		
		0	1		
○	0	0,3	0,3	0,6	
	1	0,3	0,1	0,4	
		0,6	0,4	$f_1(x)$	
		$f_2(y)$			

Die *grau* unterlegten Randverteilungen ergeben die folgenden Wahrscheinlichkeitsfunktionen für die beiden Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ :

$x$	0	1
$f_1(x)$	0,6	0,4

$y$	0	1
$f_2(y)$	0,6	0,4

Die Zufallsvariablen sind diesmal jedoch *stochastisch abhängig*. Denn wegen

$$f(0; 0) = 0,3 \quad \text{und} \quad f_1(0) \cdot f_2(0) = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36$$

und somit

$$f(0; 0) \neq f_1(0) \cdot f_2(0)$$

ist die für die Unabhängigkeit *notwendige* (und hinreichende) Bedingung  $f(x; y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$  *nicht überall* erfüllt. Wir haben dafür die folgende *logische* Erklärung: Vor der 2. Ziehung befinden sich in der Urne *entweder* zwei weiße und zwei schwarze Kugeln *oder* drei weiße und eine schwarze Kugel, je nachdem, ob beim erstenmal eine *weiße* oder eine *schwarze* Kugel gezogen wurde. Der Ausgangszustand der Urne vor der 2. Ziehung hängt somit noch vom *Ergebnis* der 1. Ziehung ab. Die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sind daher *stochastisch abhängig*, beschreiben also *stochastisch abhängige* Ereignisse.

- (2) Ein Sportschütze versucht, das Zentrum einer Zielscheibe zu treffen. Wir nehmen nun an, dass der Einschuss an der Stelle  $P$  auf der Scheibe erfolge. Die Lage dieses Punktes fixieren wir durch die *kartesischen* Koordinaten  $X$  und  $Y$ , wobei wir das Scheibenzentrum als Koordinatenursprung gewählt haben (Bild II-122). Diese Koordinaten beschreiben dann die *Abweichungen* vom angestrebten Ziel in horizontaler bzw. vertikaler Richtung und können als zwei *normalverteilte* stetige Zufallsvariable mit den Mittelwerten  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  und den (unbekannten) Standardabweichungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  betrachtet werden. Die Lage des Einschusspunktes  $P$  wird also durch eine *zweidimensionale* Zufallsvariable  $(X; Y)$  mit normalverteilten Komponenten festgelegt.

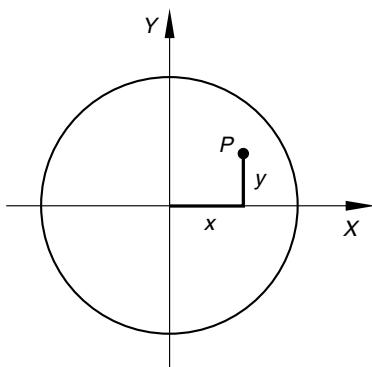


Bild II-122

Der Einschusspunkt  $P$  auf der Zielscheibe lässt sich durch die beiden Koordinaten  $X$  und  $Y$  beschreiben, die als *Zufallsvariable* aufzufassen sind

Die zugehörigen Dichtefunktionen  $f_1(x)$  und  $f_2(y)$  der *normalverteilten* Koordinaten  $X$  und  $Y$  lauten somit:

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_1} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)^2} \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)^2} \quad (-\infty < y < \infty)$$

Ferner können wir davon ausgehen, dass die Abweichungen  $X$  und  $Y$  völlig *unabhängig voneinander* sind und sich gegenseitig *nicht* beeinflussen. Mit anderen Worten: Wir dürfen die kartesischen Koordinaten  $X$  und  $Y$  als *stochastisch unabhängige* Zufallsvariable auffassen. Die *gemeinsame* Dichtefunktion  $f(x; y)$  der *zweidimensionalen* Verteilung erhalten wir daher, in dem wir die Dichten  $f_1(x)$  und  $f_2(y)$  der beiden eindimensionalen Komponenten  $X$  und  $Y$  miteinander *multiplizieren*:

$$\begin{aligned} f(x; y) &= f_1(x) \cdot f_2(y) = \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_1} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)^2} \right) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_1}\right)^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma_2}\right)^2} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)} \end{aligned}$$

■

## 7.4 Funktionen von mehreren Zufallsvariablen

Ordnet man den beiden Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  durch eine eindeutige Vorschrift, z. B. in Form einer Gleichung vom Typ  $Z = g(X; Y)$  eine neue Variable  $Z$  zu, so stellt diese von  $X$  und  $Y$  abhängige *Funktion* ebenfalls eine *Zufallsvariable* dar. Die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* dieser Zufallsvariablen  $Z$  lässt sich dabei wiederum durch eine *Wahrscheinlichkeits-* bzw. *Dichtefunktion*  $f(z)$  oder aber durch eine *Verteilungsfunktion*  $F(z)$  vollständig beschreiben. Es stellt sich dann das folgende Problem:

Wie ermittelt man in einem konkreten Fall die Funktionen  $f(z)$  und  $F(z)$  aus der als *bekannt* vorausgesetzten Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion  $f(x; y)$  der *zweidimensionalen* Zufallsvariablen  $(X; Y)$  und der *vorgegebenen* Funktionsgleichung  $Z = g(X; Y)$ ?

Wir zeigen die Vorgehensweise zunächst an einem einfachen Beispiel.

## ■ Beispiel

Beim Wurf zweier *unterscheidbarer* homogener Würfel (Standardbeispiel 2 aus Abschnitt 2.1) beobachten wir die beiden *stochastisch unabhängigen* Zufallsvariablen

$$X = \text{Augenzahl des 1. Würfels} \quad \text{und} \quad Y = \text{Augenzahl des 2. Würfels}$$

Dann ist die *Summe*

$$Z = X + Y$$

eine von  $X$  und  $Y$  abhängige *Zufallsvariable (Funktion)*, durch die die beim Wurf beobachtete *Augensumme* beschrieben wird.  $Z$  ist dabei wie  $X$  und  $Y$  eine *diskrete Zufallsvariable* und durchläuft alle ganzzahligen Werte von  $z = 2$  bis hin zu  $z = 12$ . Die insgesamt  $6^2 = 36$  möglichen Augenpaare  $(X; Y)$  (*Elementarereignisse*) treten dabei alle mit der *gleichen* Wahrscheinlichkeit von  $1/36$  auf. Die zweidimensionale Zufallsvariable  $(X; Y)$  besitzt somit die folgende *Wahrscheinlichkeitsfunktion*:

$$f(x; y) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{für } x, y = 1, 2, \dots, 6 \\ 0 & \text{alle übrigen } (x; y) \end{cases}$$

Die 36 Elementarereignisse  $(1; 1), (1; 2), (1; 3), \dots, (6; 5), (6; 6)$ , lassen sich dabei den möglichen  $z$ -Werten wie folgt zuordnen:

$z$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)	(2; 6)	(3; 6)	(4; 6)	(5; 6)	(6; 6)
		(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(3; 5)	(4; 5)	(5; 5)	(6; 5)	
			(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(4; 4)	(5; 4)	(6; 4)		
				(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(5; 3)	(6; 3)			
					(5; 1)	(5; 2)	(6; 2)				
						(6; 1)					
absolute Häufigkeit	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
$f(z)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Die in der vorletzten, *hellgrau* unterlegten Zeile festgestellte *absolute Häufigkeit* gibt dabei an, durch wie viele verschiedene Elementarereignisse (geordnete Augenpaare) sich ein vorgegebener Summenwert  $z$  zwischen  $z = 2$  und  $z = 12$  realisieren lässt. Dividiert man diese Zahlen noch durch die Anzahl der insgesamt möglichen Augenpaare, also durch 36, so erhält man die *Wahrscheinlichkeiten* für die verschiedenen möglichen Werte der abhängigen Zufallsvariablen  $Z$ . Die letzte (*dunkelgrau* unterlegte) Zeile ist somit die *tabellarische* Darstellung der gesuchten *Wahrscheinlichkeitsfunktion*  $f(z)$  (für alle übrigen  $z$  ist  $f(z) = 0$ ). ■

Analog wird durch die Funktionsgleichung

$$Z = g(X_1; X_2; \dots; X_n) \quad (\text{II-247})$$

eine neue Zufallsvariable  $Z$  definiert, die eine *Funktion* der  $n$  Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  darstellt.

## 7.5 Summen und Produkte von Zufallsvariablen

In den Anwendungen treten häufig Zufallsvariable auf, die als *Summe* oder *Produkt* von Zufallsvariablen darstellbar sind. Mit ihren Eigenschaften, insbesondere mit ihren Mittelwerten und Varianzen wollen wir uns in diesem Abschnitt näher beschäftigen.

### 7.5.1 Additionssatz für Mittelwerte

$X$  und  $Y$  seien zwei diskrete oder stetige Zufallsvariable mit den Mittelwerten  $E(X) = \mu_X$  und  $E(Y) = \mu_Y$ . Dann ist die aus ihnen gebildete *Summe*  $Z = X + Y$  ebenfalls eine *Zufallsvariable* mit dem Mittelwert

$$E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad (\text{II-248})$$

oder – in anderer Schreibweise –

$$\mu_Z = \mu_X + \mu_Y \quad (\text{II-249})$$

Dies ist der sog. *Additionssatz für Mittelwerte*. Er lautet in allgemeiner Form wie folgt:

#### Additionssatz für Mittelwerte (Mittelwert einer Summe von Zufallsvariablen)

Der *Mittelwert* einer aus  $n$  diskreten oder stetigen Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  gebildeten *Summe*

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (\text{II-250})$$

ist gleich der *Summe* der *Mittelwerte* der einzelnen Zufallsvariablen, sofern diese existieren:

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) \end{aligned} \quad (\text{II-251})$$

oder – in anderer Schreibweise –

$$\mu_Z = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \quad (\text{II-252})$$

Dabei bedeuten:

$E(X_i) = \mu_i$ : Erwartungs- oder Mittelwert der Zufallsvariablen  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

$E(Z) = \mu_z$ : Erwartungs- oder Mittelwert der Summe  $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

*Anmerkung*

Der *Additionssatz* lässt sich noch etwas allgemeiner fassen: Für eine aus  $n$  Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  gebildete *Linearkombination* vom Typ

$$Z = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n \quad (\text{II-253})$$

gilt der *Linearitätssatz*:

$$E(Z) = a_1 \cdot E(X_1) + a_2 \cdot E(X_2) + \dots + a_n \cdot E(X_n) \quad (\text{II-254})$$

( $a_i$ : reelle Koeffizienten;  $i = 1, 2, \dots, n$ ). Wir folgern daraus: Für den Mittelwert der *Differenz*  $Z = X - Y$  gilt somit:

$$E(X - Y) = E(X) - E(Y) \quad (\text{II-255})$$

## ■ Beispiele

- (1) Die Zufallsvariablen  $X_1, X_2$  und  $X_3$  besitzen der Reihe nach die *Mittel-* oder *Erwartungswerte*  $\mu_1 = 3, \mu_2 = 2$  und  $\mu_3 = -1$ . Mit Hilfe des *Additions-* und *Linearitätssatzes für Mittelwerte* berechnen wir nun die *Mittelwerte* der folgenden Zufallsvariablen:

$$Z_1 = X_1 + X_2 + X_3 \quad Z_2 = 2X_1 - 3X_2 + 5X_3$$

$$Z_3 = 5(X_1 + X_3) + X_2 \quad Z_4 = 2(X_1 - 3X_2) + 3X_3$$

Wir erhalten der Reihe nach:

$$E(Z_1) = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 3 + 2 - 1 = 4$$

$$\begin{aligned} E(Z_2) &= 2\mu_1 - 3\mu_2 + 5\mu_3 = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = \\ &= 6 - 6 - 5 = -5 \end{aligned}$$

$$E(Z_3) = 5(\mu_1 + \mu_3) + \mu_2 = 5(3 - 1) + 2 = 10 + 2 = 12$$

$$\begin{aligned} E(Z_4) &= 2(\mu_1 - 3\mu_2) + 3\mu_3 = 2(3 - 3 \cdot 2) + 3 \cdot (-1) = \\ &= 2 \cdot (-3) - 3 = -6 - 3 = -9 \end{aligned}$$

- (2) Beim Zufallsexperiment „Würfeln mit zwei unterscheidbaren homogenen Würfeln“ interessieren wir uns für die Zufallsvariable

$$Z = \text{Augensumme beider Würfel}$$

die als *Summe* der beiden Zufallsvariablen

$$X = \text{Augenzahl des 1. Würfels} \quad \text{und} \quad Y = \text{Augenzahl des 2. Würfels}$$

darstellbar ist. Die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  besitzen dabei nach Beispiel 2 aus Abschnitt 5.1.2 die *Mittelwerte*  $\mu_X = 3,5$  und  $\mu_Y = 3,5$ . Aus dem *Additionssatz* (II-252) folgt dann für den Mittelwert der *Summe*  $Z = X + Y$ :

$$\mu_Z = \mu_X + \mu_Y = 3,5 + 3,5 = 7$$

(in Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus Beispiel 1 in Abschnitt 5.3). ■

### 7.5.2 Multiplikationssatz für Mittelwerte

Wir gehen zunächst wiederum von zwei diskreten oder stetigen Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit den Mittelwerten  $E(X) = \mu_X$  und  $E(Y) = \mu_Y$  aus, interessieren uns diesmal aber für den Mittelwert des *Produktes*  $Z = X \cdot Y$ . Es lässt sich dann zeigen, dass im Allgemeinen die folgende Ungleichung gilt:

$$E(Z) = E(X \cdot Y) \neq E(X) \cdot E(Y) \quad (\text{II-256})$$

Sind die beiden Zufallsvariablen jedoch *stochastisch unabhängig*, so geht die Ungleichung in eine Gleichung über und wir erhalten den sog. *Multiplikationssatz für Mittelwerte* in der speziellen Form

$$E(Z) = E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \quad (\text{II-257})$$

oder – in anderer Schreibweise –

$$\mu_Z = \mu_X \cdot \mu_Y \quad (\text{II-258})$$

Dieser Satz lässt sich wie folgt verallgemeinern:

**Multiplikationssatz für Mittelwerte (Mittelwert eines Produktes aus stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen)**

Der *Mittelwert* eines aus  $n$  stochastisch unabhängigen (diskreten oder stetigen) Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  gebildeten *Produktes*

$$Z = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n \quad (\text{II-259})$$

ist *gleich* dem *Produkt* der *Mittelwerte* der einzelnen Zufallsvariablen, sofern diese existieren:

$$E(Z) = E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot \dots \cdot E(X_n) \quad (\text{II-260})$$

oder – in anderer Schreibweise –

$$\mu_Z = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_n \quad (\text{II-261})$$

Dabei bedeuten:

$E(X_i) = \mu_i$ : Erwartungs- oder Mittelwert der Zufallsvariablen  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

$E(Z) = \mu_Z$ : Erwartungs- oder Mittelwert des *Produktes*  $Z = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n$

*Anmerkung*

Man beachte, dass der Multiplikationssatz für Mittelwerte nur für *stochastisch unabhängige* Zufallsvariable gilt.

## ■ Beispiele

- (1) Beim „Würfeln mit zwei unterscheidbaren homogenen Würfeln“ betrachten wir wiederum die beiden *stochastisch unabhängigen* Zufallsvariablen

$$X = \text{Augenzahl des 1. Würfels} \quad \text{und} \quad Y = \text{Augenzahl des 2. Würfels}$$

Dann ist auch das *Produkt*  $Z = Y \cdot Y$  der beiden Augenzahlen eine Zufallsvariable. Unser Interesse gilt fortan dem *Mittelwert*  $\mu_Z = E(Z)$  dieses Produktes, wobei wir zwei *verschiedene* Lösungswege einschlagen werden.

**1. Lösungsweg:** Berechnung des Mittelwertes  $\mu_Z$  mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(z)$

Für die Zufallsvariable  $Z = X \cdot Y$  sind nur bestimmte ganzzahlige Werte zwischen  $z = 1$  (*kleinster Wert*) und  $z = 36$  (*größter Wert*) möglich. Die insgesamt  $6^2 = 36$  verschiedenen geordneten Augenpaare  $(X; Y)$  (*Elementarereignisse*) treten dabei mit der *gleichen* Wahrscheinlichkeit  $f(x; y) = 1/36$  auf. Wir stellen nun bei jedem der möglichen Augenpaare den jeweiligen Produktwert  $z = x \cdot y$  fest und ordnen dann die Augenpaare den möglichen  $z$ -Werten wie folgt zu:

$z_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)		(2; 4)	(3; 3)

$z_i$	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	(2; 5)		(2; 6)			(3; 5)	(4; 4)		(3; 6)

$z_i$	19	20	21	22	23	24	25	26	27
		(4; 5)				(4; 6)	(5; 5)		

$z_i$	28	29	30	31	32	33	34	35	36
			(5; 6) (6; 5)						(6; 6)

Es treten genau 18 verschiedene Produktwerte auf. Wir erhalten damit die folgende Häufigkeits- bzw. Verteilungstabelle:

$z_i$	1	2	3	4	5	6	8	9	10
absolute Häufigkeit	1	2	2	3	2	4	2	1	2
$f(z_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$
$36 z_i \cdot f(z_i)$	1	4	6	12	10	24	16	9	20

$z_i$	12	15	16	18	20	24	25	30	36
absolute Häufigkeit	4	2	1	2	2	2	1	2	1
$f(z_i)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$36 z_i \cdot f(z_i)$	48	30	16	36	40	48	25	60	36

Die hellgrau unterlegte 3. Zeile enthält die Wahrscheinlichkeitswerte für das Auftreten der verschiedenen  $z$ -Werte und ist somit die tabellarische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(z)$ . Zeile 4 (dunkelgrau unterlegt) enthält die Werte  $36 z_i \cdot f(z_i)$ , deren Summe wir für die Berechnung des Mittelwertes  $\mu_Z = E(Z)$  benötigen:

$$\begin{aligned}
 \mu_Z = E(Z) &= \sum_i z_i \cdot f(z_i) = \frac{1}{36} \cdot \sum_i 36 z_i \cdot f(z_i) = \\
 &= \frac{1}{36} (1 + 4 + 6 + 12 + 10 + 24 + 16 + 9 + 20 + 48 + \\
 &\quad + 30 + 16 + 36 + 40 + 48 + 25 + 60 + 36) = \\
 &= \frac{1}{36} \cdot 441 = 12,25
 \end{aligned}$$

**2. Lösungsweg:** Berechnung des Mittelwertes  $\mu_Z$  mit Hilfe des Multiplikationssatzes für Mittelwerte (Gleichung II-260)

Da die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  *stochastisch unabhängig* sind, können wir den *Multiplikationssatz für Mittelwerte* anwenden. Er liefert uns unter Beachtung von  $\mu_X = \mu_Y = 3,5$  das bereits vom 1. Lösungsweg her bekannte Ergebnis, allerdings auf einem wesentlich *kürzeren* Wege:

$$\mu_Z = \mu_X \cdot \mu_Y = 3,5 \cdot 3,5 = 12,25$$

Dabei haben wir uns auf das Beispiel (2) aus Abschnitt 5.1.2 gestützt, in dem die *mittlere Augenzahl* beim „Wurf mit einem homogenen Würfel“ berechnet wurde (Ergebnis:  $\mu = 3,5$ ).

- (2) Die *stochastisch unabhängigen* Zufallsvariablen  $X_1, X_2$  und  $X_3$  besitzen der Reihe nach die *Mittel- oder Erwartungswerte*  $\mu_1 = 2, \mu_2 = 4$  und  $\mu_3 = -5$ . Wir wollen mit dem *Multiplikationssatz für Mittelwerte* (und teilweise auch unter Verwendung des *Additionssatzes*) die *Mittelwerte* der folgenden Zufallsvariablen berechnen:

$$Z_1 = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$$

$$Z_2 = X_3 (X_2 - X_1)$$

$$Z_3 = (X_1 + 2X_2)(X_1 + X_3) \quad Z_4 = \frac{1}{100} \cdot X_1^3 \cdot X_2 \cdot X_3^2$$

Das Ergebnis lautet dann wie folgt:

$$E(Z_1) = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 = 2 \cdot 4 \cdot (-5) = -40$$

$$E(Z_2) = \mu_3 (\mu_2 - \mu_1) = -5(4 - 2) = -10$$

$$\begin{aligned} E(Z_3) &= (\mu_1 + 2\mu_2)(\mu_1 + \mu_3) = (2 + 2 \cdot 4)(2 - 5) = \\ &= 10 \cdot (-3) = -30 \end{aligned}$$

$$E(Z_4) = \frac{1}{100} \cdot \mu_1^3 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3^2 = \frac{1}{100} \cdot 2^3 \cdot 4 \cdot (-5)^2 =$$

$$= \frac{1}{100} \cdot 8 \cdot 4 \cdot 25 = 8$$

■

### 7.5.3 Additionssatz für Varianzen

Für die *Varianz*  $\sigma_Z^2$  einer *Summe*  $Z = X + Y$  lässt sich die allgemeingültige Beziehung

$$\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\sigma_{XY} \tag{II-262}$$

herleiten. Dabei sind  $\sigma_X^2$  und  $\sigma_Y^2$  die *Varianzen* der beiden Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  und  $\sigma_{XY}$  die als *Kovarianz* der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  bezeichnete Größe

$$\sigma_{XY} = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \tag{II-263}$$

Sind  $X$  und  $Y$  *stochastisch unabhängig*, so gilt nach dem *Multiplikationssatz für Mittelwerte*

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \quad (\text{II-264})$$

und somit  $\sigma_{XY} = 0$ . In diesem Sonderfall *stochastisch unabhängiger* Zufallsvariablen nimmt der sog. *Additionssatz für Varianzen* die spezielle Form

$$\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \quad (\text{II-265})$$

an. Er lässt sich wie folgt verallgemeinern:

**Additionssatz für Varianzen (Varianz einer Summe von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen)**

Die *Varianz* einer aus  $n$  *stochastisch unabhängigen* (diskreten oder stetigen) Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  gebildeten *Summe*

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (\text{II-266})$$

ist gleich der *Summe* der *Varianzen* der einzelnen Zufallsvariablen, sofern diese existieren:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z) &= \text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \\ &= \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n) \end{aligned} \quad (\text{II-267})$$

oder – in anderer Schreibweise –

$$\sigma_Z^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2 \quad (\text{II-268})$$

Dabei bedeuten:

$\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$ : Varianz der Zufallsvariablen  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

$\text{Var}(Z) = \sigma_Z^2$ : Varianz der *Summe*  $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

### Anmerkungen

- (1) Man beachte, dass der *Additionssatz für Varianzen* nur für *stochastisch unabhängige* Zufallsvariable gilt.
- (2) Der *Additionssatz* lässt sich noch etwas *allgemeiner* fassen: Für eine aus  $n$  *stochastisch unabhängigen* Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  gebildete *Linearkombination* vom Typ

$$Z = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n \quad (\text{II-269})$$

gilt ( $a_i$ : reelle Konstanten;  $i = 1, 2, \dots, n$ ):

$$\text{Var}(Z) = a_1^2 \cdot \text{Var}(X_1) + a_2^2 \cdot \text{Var}(X_2) + \dots + a_n^2 \cdot \text{Var}(X_n) \quad (\text{II-270})$$

Wir folgern aus diesem *Linearitätssatz*: Für die Varianz der *Differenz*  $Z = X - Y$  gilt somit unter der genannten Voraussetzung:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X - Y) &= 1^2 \cdot \text{Var}(X) + (-1)^2 \cdot \text{Var}(Y) = \\ &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)\end{aligned}\quad (\text{II-271})$$

Auch bei einer Differenz  $X - Y$  *addieren* sich somit die Varianzen.

## ■ Beispiele

- (1) Wir kommen nochmals auf das Beispiel aus dem vorangegangenen Abschnitt zurück („Wurf mit zwei unterscheidbaren homogenen Würfeln“). Die beiden *stochastisch unabhängigen* Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  („Augenzahl des 1. bzw. 2. Würfels“) besitzen dabei die *Varianzen*  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 35/12$ . Damit erhalten wir für die *Varianz* ihrer *Summe*  $Z = X + Y$  („Augensumme beider Würfel“) mit Hilfe des *Additionssatzes für Varianzen* den folgenden Wert:

$$\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{70}{12} = \frac{35}{6} = 5,833$$

(siehe hierzu auch Beispiel 1 aus Abschnitt 5.3)

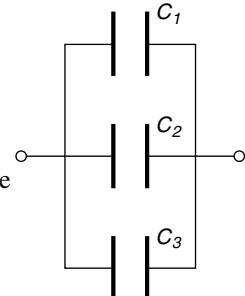
- (2) Bei der in Bild II-123 dargestellten *Parallelschaltung* dreier Kondensatoren *addieren* sich die Einzelkapazitäten  $C_1$ ,  $C_2$  und  $C_3$  zur Gesamtkapazität  $C$ . Die Kapazitäten dieser aus einer Serienproduktion stammenden Kondensatoren können dabei als voneinander *unabhängige* Größen betrachtet werden und besitzen der Reihe nach die folgenden *Mittelwerte* und *Standardabweichungen*:

$$C_1: \mu_1 = 30 \mu\text{F}, \sigma_1 = 2 \mu\text{F}$$

$$C_2: \mu_2 = 50 \mu\text{F}, \sigma_2 = 2 \mu\text{F}$$

$$C_3: \mu_3 = 20 \mu\text{F}, \sigma_3 = 1 \mu\text{F}$$

Die Gesamtkapazität  $C = C_1 + C_2 + C_3$  ist dann eine



**Bild II-123** Parallelschaltung dreier Kondensatoren

*Zufallsgröße mit dem Mittelwert*

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = (30 + 50 + 20) \mu\text{F} = 100 \mu\text{F}$$

Aus dem *Additionssatz für Varianzen* erhalten wir für die *Varianz*  $\sigma^2$  der Gesamtkapazität dann den folgenden Wert:

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = (2^2 + 2^2 + 1^2) (\mu\text{F})^2 = 9 (\mu\text{F})^2$$

Die Gesamtkapazität  $C$  besitzt somit die *Standardabweichung*  $\sigma = 3 \mu\text{F}$ .

■

### 7.5.4 Eigenschaften einer Summe von stochastisch unabhängigen und normalverteilten Zufallsvariablen

In den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen hat man es häufig mit *Summen* von Zufallsvariablen zu tun, die sämtlich *normalverteilt* und *stochastisch unabhängig* sind. Eine aus  $n$  *stochastisch unabhängigen* Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  gebildete Summe

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (\text{II-272})$$

besitzt dann nach dem *Additionssatz für Mittelwerte* den Mittelwert

$$\mu_Z = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \quad (\text{II-273})$$

und nach dem *Additionssatz für Varianzen* die Varianz

$$\sigma_Z^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2 \quad (\text{II-274})$$

Sind zusätzlich (wie hier vorausgesetzt) sämtliche Summanden *normalverteilt*, so ist auch die Summe  $Z$  eine *normalverteilte* Zufallsgröße, wie man zeigen kann.

Der großen Bedeutung wegen fassen wir die wichtigsten Eigenschaften einer solchen Summe wie folgt zusammen:

#### Eigenschaften einer Summe von stochastisch unabhängigen und normalverteilten Zufallsvariablen

Die Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  seien *stochastisch unabhängig und normalverteilt* mit den Mittelwerten  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  und den Varianzen  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ .

Dann ist die *Summe*

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (\text{II-275})$$

eine ebenfalls *normalverteilte* Zufallsvariable mit dem Mittelwert

$$\mu_Z = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \quad (\text{II-276})$$

und der Varianz

$$\sigma_Z^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2 \quad (\text{II-277})$$

Ein in den Anwendungen wichtiger *Sonderfall* liegt vor, wenn die Zufallsvariablen  $X_i$  denselben Mittelwert  $\mu_i = \mu$  und dieselbe Varianz  $\sigma_i^2 = \sigma^2$  besitzen ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Dann hat die *normalverteilte* Summe  $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  den Mittelwert  $\mu_Z = n\mu$  und die Varianz  $\sigma_Z^2 = n\sigma^2$ :

$$\mu_Z = \underbrace{\mu + \mu + \dots + \mu}_{n\text{-mal}} = n\mu \quad (\text{II-278})$$

$$\sigma_Z^2 = \underbrace{\sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2}_{n\text{-mal}} = n\sigma^2 \quad (\text{II-279})$$

## ■ Beispiele

- (1) Wir bilden aus  $n$  stochastisch unabhängigen und normalverteilten Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , die alle denselben Mittelwert  $\mu$  und dieselbe Varianz  $\sigma^2$  haben, den arithmetischen Mittelwert

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

Zwischen  $\bar{X}$  und der Summe  $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  besteht dann der lineare Zusammenhang  $\bar{X} = (1/n) \cdot Z$ . Wir können daher die Zufallsvariable  $\bar{X}$  als eine lineare Funktion der Zufallsvariablen  $Z$  auffassen. Für den Mittelwert  $\mu_{\bar{X}}$  und die Varianz  $\sigma_{\bar{X}}^2$  des arithmetischen Mittelwertes  $\bar{X}$  erhalten wir dann unter Verwendung der Ergebnisse aus Abschnitt 5.5 und der Beziehungen  $E(Z) = \mu_Z = n\mu$  und  $\text{Var}(Z) = \sigma_Z^2 = n\sigma^2$ :

$$\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \cdot Z\right) = \frac{1}{n} \cdot E(Z) = \frac{1}{n} (n\mu) = \mu$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \cdot Z\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \text{Var}(Z) = \frac{1}{n^2} (n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

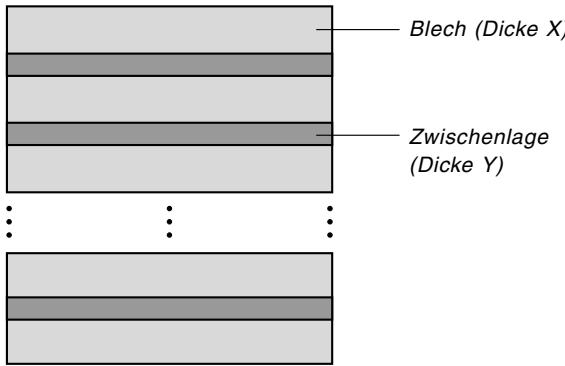
$\bar{X}$  besitzt damit denselben Mittelwert wie die Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , während die Varianz auf den  $n$ -ten Teil zurückgegangen ist. Auf dieses wichtige Ergebnis werden wir im Rahmen der Fehler- und Ausgleichsrechnung zurückgreifen (siehe Kap. IV, Abschnitt 3.1).

- (2) Der Kern eines *Transformators* wird schichtweise aus Blechen der Dicke  $X$  und Zwischenlagen der Dicke  $Y$  aufgebaut (Bild II-124).  $X$  und  $Y$  seien dabei normalverteilte Zufallsgrößen mit den folgenden Parametern (Kennwerten):

$$X: E(X) = \mu_X = 0,6 \text{ mm}, \quad \sigma_X = 0,03 \text{ mm}$$

$$Y: E(Y) = \mu_Y = 0,05 \text{ mm}, \quad \sigma_Y = 0,01 \text{ mm}$$

Der Kern bestehe aus insgesamt 100 Blechen und somit 99 Zwischenlagen. Die einzelnen Schichtdicken werden dabei als völlig unabhängig voneinander angesehen. Wir interessieren uns nun für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Dicke  $Z$  des Transformatorkerns.

**Bild II-124**

Schichtweiser Aufbau eines  
Transformatorkerns

Bei der Lösung der Aufgabe müssen wir Folgendes beachten: Wir haben 100 Bleche mit den Dicken  $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ , die alle die *gleiche* Verteilung besitzen wie die Zufallsvariable  $X$ :

$$E(X_i) = E(X) = \mu_X = 0,6 \text{ mm}$$

$$\text{Var}(X_i) = \text{Var}(X) = \sigma_X^2 = (0,03 \text{ mm})^2$$

$(i = 1, 2, \dots, 100)$ . Die Dicken der 99 Zwischenlagen beschreiben wir durch die Zufallsvariablen  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{99}$ , die alle die *gleiche* Verteilung besitzen wie die Zufallsvariable  $Y$ :

$$E(Y_k) = E(Y) = \mu_Y = 0,05 \text{ mm}$$

$$\text{Var}(Y_k) = \text{Var}(Y) = \sigma_Y^2 = (0,01 \text{ mm})^2$$

$(k = 1, 2, \dots, 99)$ . Die Dicke des Transformatorkerns ist somit eine *Summe* aus genau 199 *stochastisch unabhängigen* und *normalverteilten* Zufallsvariablen:

$$Z = \sum_{i=1}^{100} X_i + \sum_{k=1}^{99} Y_k$$

Die Zufallsvariable  $Z$  besitzt dann nach Gleichung (II-276) den folgenden *Mittelwert*:

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{i=1}^{100} E(X_i) + \sum_{k=1}^{99} E(Y_k) = 100 \cdot E(X) + 99 \cdot E(Y) = \\ &= 100 \cdot \mu_X + 99 \cdot \mu_Y = 100 \cdot 0,6 \text{ mm} + 99 \cdot 0,05 \text{ mm} = \\ &= (60 + 4,95) \text{ mm} = 64,95 \text{ mm} \end{aligned}$$

Die *Varianz* der Gesamtdicke  $Z$  beträgt nach dem *Additionssatz für Varianzen* (II-277):

$$\begin{aligned}\sigma_Z^2 &= \text{Var}(Z) = \sum_{i=1}^{100} \text{Var}(X_i) + \sum_{k=1}^{99} \text{Var}(Y_k) = \\ &= 100 \cdot \text{Var}(X) + 99 \cdot \text{Var}(Y) = 100 \cdot \sigma_X^2 + 99 \cdot \sigma_Y^2 = \\ &= 100 \cdot (0,03 \text{ mm})^2 + 99 \cdot (0,01 \text{ mm})^2 = (0,09 + 0,0099) \text{ mm}^2 = \\ &= 0,0999 \text{ mm}^2\end{aligned}$$

Die *Standardabweichung* beträgt somit  $\sigma_Z = \sqrt{0,0999 \text{ mm}^2} = 0,316 \text{ mm}$ .

Da alle 199 unabhängigen Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_{100}, Y_1, Y_2, \dots, Y_{99}$  *stochastisch unabhängig* und *normalverteilt* sind, trifft diese Eigenschaft auch auf die *Summe*  $Z$  zu. Daher gilt: Die Gesamtdicke  $Z$  des Transformatorkerns ist eine *normalverteilte* Zufallsvariable mit dem *Mittelwert*  $\mu_Z = 64,95 \text{ mm}$  und der *Standardabweichung*  $\sigma_Z = 0,316 \text{ mm}$  (Bild II-125).

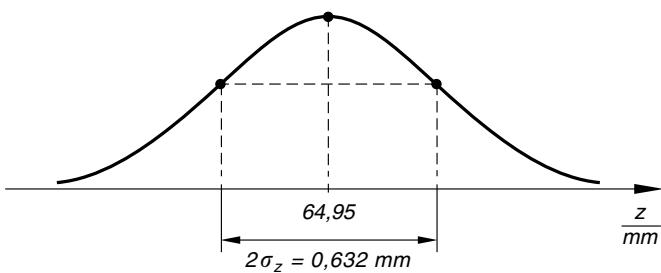


Bild II-125

## 7.6 Über die große Bedeutung der Gaußschen Normalverteilung in den Anwendungen

### 7.6.1 Zentraler Grenzwertsatz

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass die *Summe* von *normalverteilten* Zufallsvariablen ebenfalls eine *normalverteilte* Zufallsgröße darstellt. In den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen hat man es jedoch häufig mit Summen zu tun, deren Summanden *nicht alle* normalverteilt sind oder bei denen die Verteilungen der einzelnen Summanden sogar weitgehend *unbekannt* sind.

Wir geben zunächst zwei wichtige Beispiele aus der Praxis.

## ■ Beispiele

- (1) Der *Messfehler*  $X$  einer physikalisch-technischen Messgröße kann (wie wir in Kapitel IV noch ausführlich begründen werden) als eine *Zufallsgröße* aufgefasst werden, die sich *additiv* aus einer großen Anzahl voneinander unabhängiger Einzelfehler zusammensetzt. Die Einzelfehler selbst sind wiederum *Zufallsprodukte* und lassen sich somit durch *stochastisch unabhängige Zufallsvariable* beschreiben.
- (2) Bei der industriellen Fertigung von Werkstücken auf Maschinen oder Automaten werden stets Abweichungen von den (vorgegebenen) *Sollwerten* beobachtet, die als *Summe* sehr vieler kleiner zufälliger Abweichungen angesehen werden können.

Die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* einer Summe von Zufallsvariablen bleibt daher meistens *unbekannt*, kann jedoch in vielen Fällen (die beiden soeben genannten Beispiele gehören dazu) unter bestimmten Voraussetzungen als *annähernd normalverteilt* betrachtet werden. Grund dafür ist der sog. *Zentrale Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, den wir wie folgt formulieren:

### Zentraler Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, \dots$  seien *stochastisch unabhängige* Zufallsvariable, die alle der *gleichen* Verteilungsfunktion mit dem Mittelwert  $\mu$  und der Varianz  $\sigma^2$  genügen. Dann konvergiert die Verteilungsfunktion  $F_n(u)$  der standardisierten Zufallsvariablen

$$U_n = \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_n) - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \quad (\text{II-280})$$

im Grenzfall  $n \rightarrow \infty$  gegen die Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  der *Standardnormalverteilung*:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u) = \phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^u e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (\text{II-281})$$

### Anmerkung

Einen Beweis dieses wichtigen Grenzwertsatzes findet man z. B. in dem Lehrbuch „Ingenieur-Statistik“ von Heinhold/Gaede (siehe Literaturverzeichnis).

Der *zentrale Grenzwertsatz* lässt sich wie folgt interpretieren: Die Zufallsvariable

$$U_n = \frac{Z_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \quad \text{mit} \quad Z_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (\text{II-282})$$

ist für hinreichend großes  $n$  *annähernd standardnormalverteilt*. Dies aber bedeutet zu- gleich, dass die aus  $n$  Summanden mit der *gleichen* Verteilungsfunktion bestehende Summe

$$Z_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (\text{II-283})$$

für hinreichend großes  $n$  *annähernd normalverteilt* ist mit dem *Mittelwert*  $E(Z_n) = n\mu$  und der *Varianz*  $\text{Var}(Z_n) = n\sigma^2$ .

## 7.6.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe von Zufallsvariablen

Der *zentrale Grenzwertsatz* lässt sich noch etwas allgemeiner formulieren, wenn man die Voraussetzung, dass alle Summanden der *gleichen* Verteilungsfunktion genügen, *fallen* lässt. Man geht dabei von *stochastisch unabhängigen* Zufallsvariablen  $X_i$  mit den *Mittelwerten*  $E(X_i) = \mu_i$  und den *Varianzen*  $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$  aus und bildet daraus zunächst die *Summe*

$$Z_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (\text{II-284})$$

die ja bekanntlich nach dem *Additionssatz für Mittelwerte* den *Mittelwert*

$$E(Z_n) = \mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \quad (\text{II-285})$$

und nach dem *Additionssatz für Varianzen* die *Varianz*

$$\text{Var}(Z_n) = \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2 \quad (\text{II-286})$$

besitzt. Es lässt sich dann unter sehr allgemeinen Voraussetzungen<sup>34)</sup> zeigen, dass die Verteilungsfunktion  $F_n(u)$  der aus  $Z_n$  gebildeten *standardisierten* Zufallsvariablen

$$U_n = \frac{Z_n - \mu}{\sigma} \quad (\text{II-287})$$

im Grenzfall  $n \rightarrow \infty$  gegen die Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  der *Standardnormalverteilung* konvergiert. Dies aber bedeutet für *hinreichend großes*  $n$ : Die Zufallsvariable  $U_n$  ist *annähernd standardnormalverteilt* und die Summe  $Z_n$  somit *annähernd normalverteilt* mit dem Mittelwert  $\mu$  und der Varianz  $\sigma^2$ . Für die Praxis bedeutet dies, dass häufig schon Summen mit hinreichend vielen Summanden mit einer völlig ausreichenden Genauigkeit als *normalverteilt* angesehen werden können.

---

<sup>34)</sup> Im Rahmen dieser einführenden Darstellung ist es leider nicht möglich, auf diese Voraussetzungen näher einzugehen. Für die hier behandelten Verteilungen sind diese Bedingungen jedoch praktisch immer erfüllt (siehe hierzu z. B. „Ingenieur-Statistik“ von Heinhold/Gaede).

Wir fassen diese für Praxis und Anwendung so bedeutenden Aussagen wie folgt zusammen:

### Über die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Summe von Zufallsvariablen

In den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen treten häufig *Summen* von Zufallsvariablen vom allgemeinen Typ

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (\text{II-288})$$

auf, deren Summanden *beliebig verteilte* Zufallsvariable  $X_i$  mit den Mittelwerten  $E(X_i) = \mu_i$  und den Varianzen  $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$  sind ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Eine solche Summe kann dann mit einer für die Praxis völlig ausreichenden Genauigkeit als eine *annähernd normalverteilte* Zufallsvariable mit dem *Mittelwert*

$$E(Z) = \mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \quad (\text{II-289})$$

und der *Varianz*

$$\text{Var}(Z) = \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2 \quad (\text{II-290})$$

angesehen werden, sofern die folgenden *Voraussetzungen* erfüllt sind:

1. Die Summanden  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sind *stochastisch unabhängige* Zufallsvariable.
2. Die Anzahl  $n$  der Summanden ist *hinreichend groß* (**Faustregel:**  $n > 30$ ).
3. Jeder der  $n$  Summanden liefert zur Summe nur einen *geringen* Beitrag. d. h. *kein* Summand dominiert.

Die *Gaußsche Normalverteilung* spielt daher in den technischen Anwendungen eine *überragende* Rolle. Denn in zahlreichen Fällen lässt sich eine Zufallsvariable als *Summe* einer großen Anzahl von *stochastisch unabhängigen* Summanden auffassen und ist somit nach dem „zentralen Grenzwertsatz“ *annähernd normalverteilt*.

#### Anmerkung

Ob eine Summe  $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  annähernd normalverteilt ist, lässt sich in der Praxis oft anhand einer *Stichprobe* wie folgt überprüfen:

1. *Graphisch* durch Übertragung der Stichprobenwerte auf ein sog. *Wahrscheinlichkeitspapier*, wobei die Punkte im Falle einer Normalverteilung *nahezu* auf einer *Geraden* liegen.
2. Durch Anwendung eines speziellen *Prüfverfahrens*, in der Statistik als *Anpassungstest* bezeichnet (siehe hierzu den sog. *Chi-Quadrat-Test* im nächsten Kapitel).

## ■ Beispiele

- (1) Der *Messfehler*  $X$  einer physikalisch-technischen Messgröße lässt sich als *Summe* einer großen Anzahl von *unabhängigen* Einzelfehlern auffassen, die alle jedoch nur einen *geringen* Beitrag zum Gesamtfehler leisten. Daher kann  $X$  als eine (an-nähernd) *normalverteilte* Zufallsvariable angesehen werden. Wir behandeln diesen in den Anwendungen so wichtigen Fall im übernächsten Kapitel über *Fehler- und Ausgleichsrechnung* ausführlich.

- (2) Das *arithmetische Mittel*

$$\bar{X} = \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

aus den  $n$  voneinander *unabhängigen* Stichprobenwerten  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ist ebenfalls eine *annähernd normalverteilte* Zufallsvariable. Die Stichprobenwerte  $X_i$  haben dabei alle die *gleiche* Verteilungsfunktion mit dem Mittelwert  $\mu$  und der Varianz  $\sigma^2$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Dann besitzt das *arithmetische Mittel*  $\bar{X}$  den Mittelwert  $E(\bar{X}) = \mu$  und die Varianz  $\text{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$ . Diese Aussage ist in der *Fehlerrechnung* von großer Bedeutung.

- (3) Abmessungen von Werkstücken, die von Maschinen oder Automaten gefertigt werden, sind häufig einer *Vielzahl* von zufälligen und voneinander *unabhängigen* Schwankungen unterworfen. Die Abweichung von einem vorgegebenen Sollwert kann daher als *Summe* sehr vieler kleiner Zufallsabweichungen betrachtet werden, die auf verschiedene sich jeweils aber nur *schwach* auswirkende Ursachen zurückzuführen sind. Die Abmessungen und deren Abweichungen können somit als *an-nähernd normalverteilte* Größen angesehen werden.

■

### 7.6.3 Grenzwertsatz von Moivre-Laplace

In Abschnitt 6.6 haben wir uns bereits mit der *Approximation* der Binomialverteilung durch die Normalverteilung ausführlich beschäftigt und uns dabei auf den Grenzwertsatz von *Moivre-Laplace* berufen. Er lässt sich aus dem *zentralen Grenzwertsatz* als *Sonderfall* herleiten und lautet wie folgt:

#### Grenzwertsatz von Moivre-Laplace

$X$  sei eine *binomialverteilte* Zufallsvariable mit den Parametern  $n$  und  $p$ . Dann konvergiert die Verteilungsfunktion  $F_n(z)$  der standardisierten Zufallsvariablen

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad (\text{II-291})$$

für  $n \rightarrow \infty$  gegen die Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  der *Standardnormalverteilung*.

Dieser Grenzwertsatz von Moivre-Laplace ist von großer *praktischer* Bedeutung, da er eine wesentlich bequemere (näherungsweise) Berechnung einer Binomialverteilung  $B(n; p)$  durch eine *Normalverteilung*  $N(\mu; \sigma)$  mit dem Mittelwert  $\mu = np$  und der Standardabweichung  $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$  ermöglicht (nähtere Einzelheiten in Abschnitt 6.6).

## 8 Prüf- oder Testverteilungen

Unter dem Sammelbegriff „*Prüf- oder Testverteilungen*“ werden alle diejenigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen zusammengefasst, die in der Statistik im Zusammenhang mit speziellen statistischen *Prüf- oder Testverfahren* benötigt werden. Neben der alles überragenden *Gaußschen Normalverteilung*, die wir in Abschnitt 6.4 bereits ausführlich besprochen haben, spielen dabei zwei weitere *stetige* Verteilungen eine bedeutende Rolle. Es handelt sich dabei um die *Chi-Quadrat-Verteilung* und die *t-Verteilung* von „*Student*“. Auf diese Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden wir im nächsten Kapitel über Statistik bei zahlreichen *Parameter-* bzw. *Verteilungstests* des Öfteren zurückgreifen.

### 8.1 Chi-Quadrat-Verteilung

Die sog. *Chi-Quadrat-Verteilung* (Kurzschreibweise:  $\chi^2$ -Verteilung) bildet die Grundlage für ein wichtiges *Prüf- oder Testverfahren* der Statistik, den *Chi-Quadrat-Test*<sup>35)</sup>. Wir gehen dabei von den folgenden Voraussetzungen aus:

$X_1, X_2, \dots, X_n$  seien  $n$  *stochastisch unabhängige* Zufallsvariable, die alle der *Standardnormalverteilung*  $N(0; 1)$  genügen, d. h. den Mittelwert  $\mu_i = 0$  und die Varianz  $\sigma_i^2 = 1$  besitzen ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Mit diesen Zufallsvariablen bilden wir durch Quadrieren und anschließendes Aufsummieren die Größe

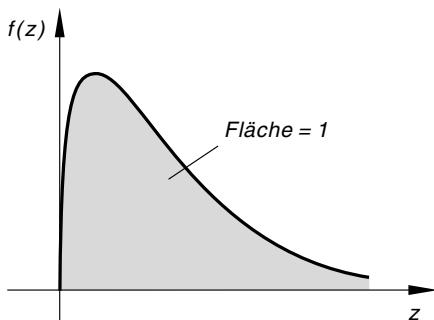
$$Z = \chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \quad (\text{II-292})$$

Aus historischen Gründen wird diese Summe durch das Symbol  $\chi^2$  gekennzeichnet. Die von  $n$  Zufallsvariablen abhängige Funktion  $Z = \chi^2$  ist dann eine *stetige* Zufallsvariable mit dem Wertebereich  $z \geq 0$ . Sie genügt dabei einer Verteilung mit der *Dichtefunktion*

$$f(z) = \begin{cases} A_n \cdot z^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{z}{2}} & \text{für } z \geq 0 \\ 0 & \text{für } z < 0 \end{cases} \quad (\text{II-293})$$

die als *Chi-Quadrat-Verteilung* bezeichnet wird. Bild II-126 zeigt den typischen Verlauf der Dichtefunktion.

<sup>35)</sup> Der *Chi-Quadrat-Test* (kurz:  $\chi^2$ -Test) wird in Kapitel III, Abschnitt 5.3 ausführlich behandelt.  $\chi$  ist dabei ein Buchstabe aus dem griechischen Alphabet.

**Bild II-126**

Typischer Verlauf der normierten Dichtefunktion  $f(z)$  einer Chi-Quadrat-Verteilung

Der *Parameter*  $n$  dieser Funktion ist eine positive ganze Zahl und bestimmt die Anzahl  $f$  der *Freiheitsgrade* der Verteilung:  $f = n$ . Die Konstante  $A_n$  in der Funktionsgleichung (II-293) hängt dabei noch vom Freiheitsgrad  $n$  ab und wird durch *Normierung* der Dichtefunktion  $f(z)$  bestimmt. Diese bildet somit mit der positiven  $z$ -Achse eine Fläche vom Flächeninhalt 1 (Bild II-126):

$$\int_0^{\infty} f(z) dz = A_n \cdot \int_0^{\infty} z^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{z}{2}} dz = 1 \quad (\text{II-294})$$

Die Berechnung dieses uneigentlichen Integrals führt zu einer *nichtelementaren* Funktion, der sog. *Gammafunktion*

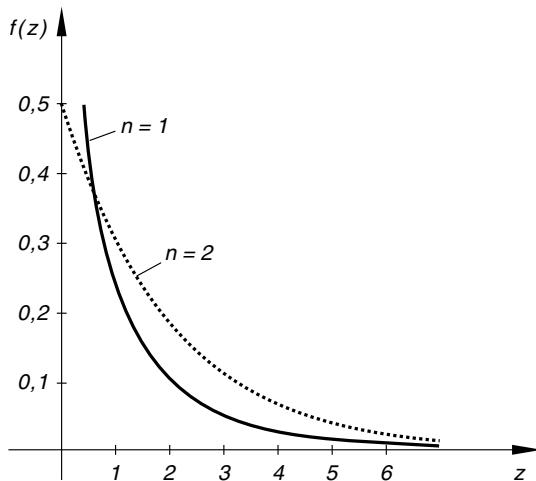
$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} \cdot e^{-t} dt \quad (a > 0) \quad (\text{II-295})$$

Die *Normierungskonstante*  $A_n$  lässt sich mit Hilfe dieser Funktion wie folgt ausdrücken:

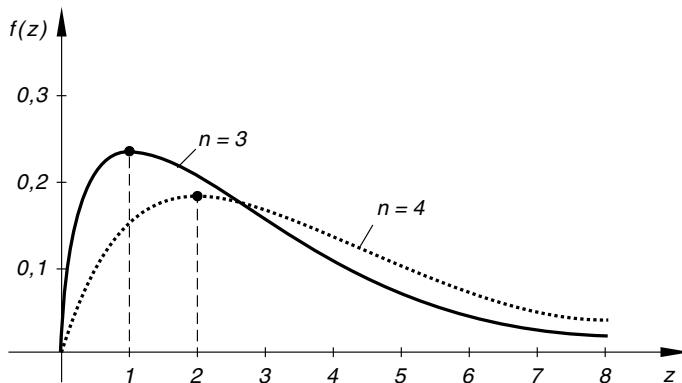
$$A_n = \frac{1}{2^{\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{II-296})$$

Die dabei benötigten Funktionswerte  $\Gamma(n/2)$  der *Gamma-Funktion* können mit Hilfe von *Rekursionsformeln*, die wir am Ende dieses Abschnitts in der Tabelle 5 zusammengefasst haben, *leicht* berechnet werden.

In Bild II-127 ist der Verlauf der Dichtefunktion  $f(z)$  für  $n = 1$  und  $n = 2$  dargestellt. Bild II-128 zeigt den typischen Kurvenverlauf für Parameterwerte  $n > 2$ .

**Bild II-127**

Verlauf der Dichtefunktion  $f(z)$  einer Chi-Quadrat-Verteilung für die Parameter  $n = 1$  und  $n = 2$

**Bild II-128** Verlauf der Dichtefunktion  $f(z)$  einer Chi-Quadrat-Verteilung für die Parameter  $n = 3$  und  $n = 4$ 

Die Verteilungsfunktion der *Chi-Quadrat-Verteilung* hat für  $z \geq 0$  die Integralform

$$F(z) = A_n \cdot \int_0^z u^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{u}{2}} du \quad (\text{II-297})$$

( $F(z) = 0$  für  $z < 0$ ). Die Chi-Quadrat-Verteilung besitzt den *Mittelwert*  $\mu = n$  und die *Varianz*  $\sigma^2 = 2n$ . Ähnlich wie bei der *Poisson-Verteilung* sind auch hier Mittelwert und Varianz durch *einen einzigen* Parameter (hier:  $n$ ) eindeutig bestimmt.

Wir fassen wie folgt zusammen:

### Chi-Quadrat-Verteilung

$X_1, X_2, \dots, X_n$  seien *stochastisch unabhängige* Zufallsvariable, die alle der *Standardnormalverteilung*  $N(0; 1)$  genügen. Die aus ihnen gebildete Quadratsumme

$$Z = \chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \quad (\text{II-298})$$

ist dann eine *stetige* Zufallsvariable mit dem Wertebereich  $z \geq 0$  und genügt einer sog. *Chi-Quadrat-Verteilung* mit der *Dichtefunktion*

$$f(z) = \begin{cases} A_n \cdot z^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{z}{2}} & \text{für } z \geq 0 \\ 0 & \text{für } z < 0 \end{cases} \quad (\text{II-299})$$

(siehe hierzu die Bilder II-127 und II-128) und der Verteilungsfunktion

$$F(z) = A_n \cdot \int_0^z u^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{u}{2}} du \quad (z \geq 0) \quad (\text{II-300})$$

(für  $z < 0$  ist  $F(z) = 0$ ). Die Verteilung ist dabei durch den *Parameter*  $n$  vollständig bestimmt ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Dabei bedeuten:

$n$ : Anzahl  $f$  der *Freiheitsgrade* der Verteilung ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

$A_n$ : Eine noch vom Freiheitsgrad  $f = n$  abhängige *Normierungskonstante*, die mit Hilfe der *Gamma-Funktion* nach Gleichung (II-296) berechnet wird

Die *Chi-Quadrat-Verteilung* besitzt die folgenden durch den Parameter (Freiheitsgrad)  $f = n$  eindeutig bestimmten *Kennwerte* oder *Maßzahlen*:

$$\text{Mittelwert: } \mu = n \quad (\text{II-301})$$

$$\text{Varianz: } \sigma^2 = 2n \quad (\text{II-302})$$

$$\text{Standardabweichung: } \sigma = \sqrt{2n} \quad (\text{II-303})$$

Im Anhang befindet sich eine ausführliche Tabelle der *Quantile* der Chi-Quadrat-Verteilung in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad  $f = n$  (Tabelle 3).

### Anmerkungen

- (1) Wichtige Eigenschaften der *Dichtefunktion*  $f(z)$  sind:
  - a)  $f(z)$  ist *unsymmetrisch*.
  - b)  $f(z)$  verläuft für  $n = 1$  und  $n = 2$  *streng monoton fallend* (Bild II-127).
  - c) Die Dichtefunktion  $f(z)$  besitzt bei *mehr* als zwei Freiheitsgraden, d. h. für  $n > 2$  ein *absolutes Maximum* an der Stelle  $z_1 = n - 2$  (Bild II-128).
- (2) Für *große* Freiheitsgrade  $n$  lässt sich die *Chi-Quadrat-Verteilung* durch eine *Normalverteilung* mit dem Mittelwert  $\mu = n$  und der Varianz  $\sigma^2 = 2n$  *annähern*. Die hier meist verwendete **Faustregel** für diese Näherung lautet:  $n > 100$ .

### ■ Beispiel

$Z$  sei eine  $\chi^2$ -verteilte Zufallsvariable mit  $f = n = 10$  Freiheitsgraden. Wie muss man die Intervallgrenze  $a$  wählen, damit 95 % aller Werte im Intervall  $Z \leq a$  liegen?

*Lösung:* Wir müssen die Intervallgrenze  $a$  so bestimmen, dass die Bedingung

$$P(Z \leq a) = F(a) = 0,95$$

erfüllt ist (*hellgrau* unterlegte Fläche in Bild II-129). Aus der Tabelle 3 im Anhang entnehmen wir für  $f = n = 10$  Freiheitsgrade den gesuchten Wert der Konstanten  $a$ :

$$F(a) = 0,95 \xrightarrow{f=10} a = z_{(0,95; 10)} = 18,31$$

Die Intervallgrenze  $a$  ist das *Quantil*  $z_{(0,95; 10)}$  der Chi-Quadrat-Verteilung. Die Zufallsvariable  $Z$  nimmt somit mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % Werte an, die *höchstens gleich* 18,31 sind.

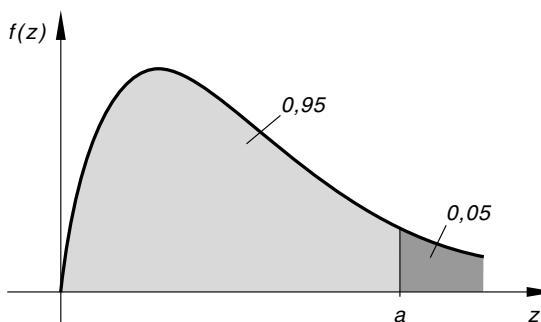


Bild II-129

### Spezielle Werte und Rekursionsformeln der Gamma-Funktion $\Gamma(\alpha)$

Die nachfolgende Tabelle 5 enthält einige Werte der *Gamma-Funktion* sowie hilfreiche *Rekursionsformeln*, durch die die Berechnung der *Normierungskonstanten*  $A_n$  in der Funktionsgleichung (II-299) ermöglicht wird (Berechnung nach Gleichung (II-296)).

**Tabelle 5:** Spezielle Werte und Rekursionsformeln der Gamma-Funktion  $\Gamma(\alpha)$

(1) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ , $\Gamma(1) = 1$
(2) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$ $(\alpha > 0)$
(3) $\Gamma(n + 1) = n!$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$
(4) $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)}{2^n} \cdot \sqrt{\pi}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$

## 8.2 t-Verteilung von Student

Eine weitere wichtige Testverteilung ist die sog. *t-Verteilung* von *Student*<sup>36)</sup>. Sie bildet die Grundlage für bestimmte *Parametertests* in der mathematischen Statistik. Wir gehen dabei von den folgenden *Voraussetzungen* aus:

$X$  und  $Y$  seien zwei *stochastisch unabhängige* Zufallsvariable, wobei  $X$  der *Standardnormalverteilung* und  $Y$  der *Chi-Quadrat-Verteilung* mit dem Freiheitsgrad  $n$  genüge. Die aus diesen Zufallsvariablen gebildete Größe

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \tag{II-304}$$

ist dann eine *stetige* Zufallsvariable, die der sog. *t-Verteilung* mit der *Dichtefunktion*

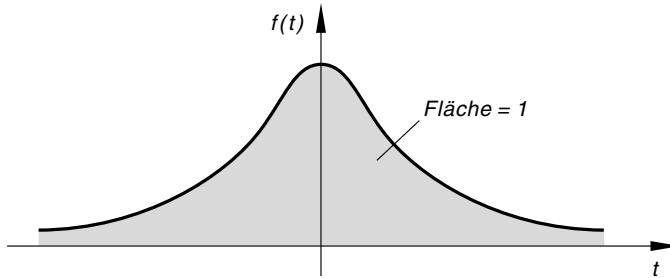
$$f(t) = A_n \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{(n+1)/2}} \quad (-\infty < t < \infty) \tag{II-305}$$

genügt (Bild II-130). Der *Parameter*  $n$  in dieser Funktion ist eine positive ganze Zahl und heißt *Freiheitsgrad*  $f$  der *t-Verteilung*. Wie bei der *Chi-Quadrat-Verteilung* bedeutet auch hier  $A_n$  eine noch vom Freiheitsgrad  $f = n$  abhängige *Normierungskonstante*.

<sup>36)</sup> Diese Verteilung stammt von dem Mathematiker *Gosset* und wurde von ihm unter dem Pseudonym „*Student*“ veröffentlicht.

Sie wird wiederum so bestimmt, dass die Fläche unter der Dichtefunktion  $f(t)$  den Wert 1 annimmt (Normierung der Dichtefunktion, siehe Bild II-130):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = A_n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{(n+1)/2}} = 1 \quad (\text{II-306})$$



**Bild II-130** Typischer Verlauf der normierten Dichtefunktion  $f(t)$  einer  $t$ -Verteilung von „Student“

Die Berechnung dieser Konstanten führt dabei wieder über die *Gamma-Funktion* und erfolgt nach der Formel

$$A_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{II-307})$$

unter Verwendung der in Tabelle 5 aus Abschnitt 8.1 angegebenen *Rekursionsformeln*. Die *Verteilungsfunktion* der  $t$ -Verteilung besitzt die Integralform

$$F(t) = A_n \cdot \int_{-\infty}^t \frac{du}{\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{(n+1)/2}} \quad (-\infty < t < \infty) \quad (\text{II-308})$$

Die  $t$ -Verteilung hat den *Mittelwert*  $\mu = 0$  für  $n \geq 2$  (für  $n = 1$  ist der Mittelwert nicht vorhanden) und die *Varianz*  $\sigma^2 = \frac{n}{n-2}$  für  $n \geq 3$  (für  $n = 1$  und  $n = 2$  ist die Varianz nicht vorhanden).

### t-Verteilung von Student

$X$  und  $Y$  seien zwei *stochastisch unabhängige* Zufallsvariable mit den folgenden Eigenschaften:

$X$ : standardnormalverteilt

$Y$ : Chi-Quadrat-verteilt mit  $n$  Freiheitsgraden

Die aus ihnen gebildete Größe

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \quad (\text{II-309})$$

ist dann eine *stetige* Zufallsvariable, die einer sog. *t-Verteilung* von *Student* mit der *Dichtefunktion*

$$f(t) = A_n \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{(n+1)/2}} \quad (-\infty < t < \infty) \quad (\text{II-310})$$

(siehe hierzu Bild II-130) und der Verteilungsfunktion

$$F(t) = A_n \cdot \int_{-\infty}^t \frac{du}{\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{(n+1)/2}} \quad (-\infty < t < \infty) \quad (\text{II-311})$$

genügt. Die Verteilung ist durch den *Parameter*  $n$  vollständig bestimmt ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Dabei bedeuten:

$n$ : Anzahl  $f$  der *Freiheitsgrade* der Verteilung ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

$A_n$ : Eine noch vom Freiheitsgrad  $f = n$  abhängige *Normierungskonstante*, die mit Hilfe der *Gamma-Funktion* nach Gleichung (II-307) berechnet wird

Die *t-Verteilung* von *Student* besitzt die folgenden durch den Parameter (Freiheitsgrad)  $n$  eindeutig bestimmten *Kennwerte* oder Maßzahlen:

$$\text{Mittelwert: } \mu = 0 \quad \text{für } n \geq 2 \quad (\text{II-312})$$

(für  $n = 1$  existiert kein Mittelwert)

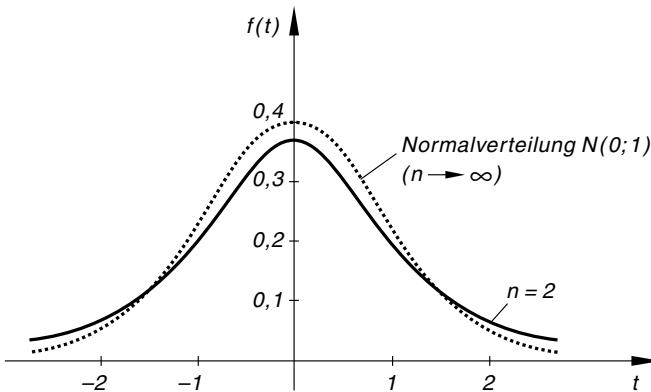
$$\text{Varianz: } \sigma^2 = \frac{2}{n-2} \quad \text{für } n \geq 3 \quad (\text{II-313})$$

(für  $n = 1$  und  $n = 2$  existiert keine Varianz)

Im Anhang befindet sich eine ausführliche Tabelle der *Quantile* der *t-Verteilung* in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad  $n$  (Tabelle 4).

### Anmerkungen

- (1) Wichtige Eigenschaften der *Dichtefunktion*  $f(t)$  sind (Bild II-130):
    - a)  $f(t)$  ist eine *gerade* Funktion (*Achsen symmetrie*).
    - b)  $f(t)$  besitzt an der Stelle  $t_1 = 0$  ein *absolutes Maximum*.
    - c)  $f(t)$  nähert sich für  $t \rightarrow \pm\infty$  asymptotisch der *t-Achse*.
  - (2) Die Dichtefunktion  $f(t)$  zeigt eine gewisse Ähnlichkeit mit der Dichtefunktion der *Standardnormalverteilung*  $N(0; 1)$ . In der Tat lässt sich zeigen, dass die *t-Verteilung* für  $n \rightarrow \infty$  gegen die *Standardnormalverteilung* konvergiert. Bild II-131 verdeutlicht diese Aussage.
- Faustregel:** Bereits für  $n > 30$  darf die *t-Verteilung* in guter Näherung durch die *Standardnormalverteilung* ersetzt werden.



**Bild II-131** Für große Werte des Parameters (Freiheitsgrades)  $n$  darf die *t-Verteilung* durch die *Standardnormalverteilung* näherungsweise ersetzt werden

### ■ Beispiel

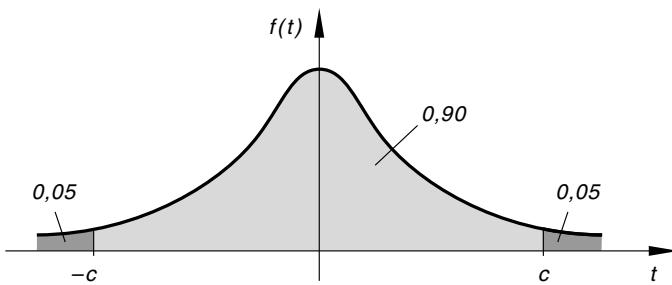
Die Zufallsvariable  $T$  genüge der *t-Verteilung* mit  $f = n = 10$  Freiheitsgraden. 90 % der Werte sollen dabei in das *symmetrische* Intervall  $-c \leq T \leq c$  fallen. Wie lauten die zugehörigen *Intervallgrenzen* (Schranken)?

*Lösung:* Wir müssen die Konstante  $c$  so bestimmen, dass die Bedingung

$$P(-c \leq T \leq c) = 0,9$$

erfüllt ist (*hellgrau* unterlegte Fläche in Bild II-132). Die beiden *dunkelgrau* unterlegten Flächen haben somit jeweils den Flächeninhalt 0,05. Somit gilt:

$$P(T \leq -c) + P(-c \leq T \leq c) = P(T \leq c) = F(c) = 0,95$$

**Bild II-132**

Den zugehörigen Wert für die obere Schranke  $c$  entnehmen wir der Tabelle 4 im Anhang für  $f = n = 10$  Freiheitsgrade (es handelt sich dabei um das *Quantil*  $t_{(0,95; 10)}$  der *t-Verteilung*):

$$P(T \leq c) = F(c) = 0,95 \xrightarrow{f=10} c = t_{(0,95; 10)} = 1,812$$

Somit liegen 90 % aller Werte der Zufallsvariablen  $T$  im symmetrischen Intervall  $-1,812 \leq T \leq 1,812$ . ■

# Übungsaufgaben

## Zu Abschnitt 1

- 1) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, 5 Personen  
a) an einen *rechteckigen* Tisch,  
b) an einen *runden* Tisch  
mit jeweils 5 Stühlen zu plazieren?
- 2) Für eine *Reihenschaltung* aus 3 Widerständen  $a$ ,  $b$  und  $c$  stehen insgesamt 6 *verschiedene* Widerstände  $R_1, R_2, \dots, R_6$  zur Verfügung (Bild II-133). Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen verschiedenen Reihenschaltungen, wenn jeder Widerstand *höchstens* einmal in der Schaltung auftreten darf (die Reihenfolge der Widerstände ist dabei aus physikalischen Gründen *ohne* Bedeutung).

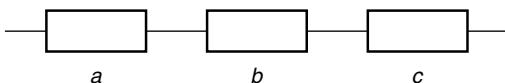


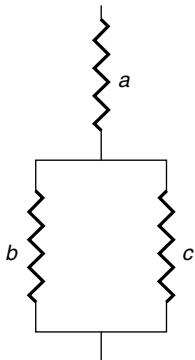
Bild II-133 Reihenschaltung aus drei ohmschen Widerständen

- 3) Wie viele 2-atomige Moleküle vom Typ  $XY$  lassen sich aus 5 *verschiedenen* atomaren Bausteinen (theoretisch) bilden, wenn jeder Baustein  
a) nur *einmal*,  
b) *mehrmales* (d. h. hier bis zu *zweimal*)  
verwendet werden darf?
- 4) Wie viele verschiedene Augenpaare  $(i; j)$  sind beim Würfeln mit zwei *gleichen* (d. h. *nicht* unterscheidbaren) homogenen Würfeln möglich?
- 5) In einer Mathematik-Klausur sind 10 Aufgaben zu lösen. Die Klausur gilt dabei als bestanden, wenn *mindestens* 7 Aufgaben, darunter die *ersten* 3 Aufgaben, richtig gelöst wurden. Auf wie viele verschiedene Arten lässt sich diese *Minimalforderung* erfüllen?
- 6) Die Lieferung von 20 Elektrogeräten eines bestimmten Typs enthält 3 *fehlerhafte* Geräte. Zu Kontrollzwecken wird eine (ungeordnete) Stichprobe vom Umfang  $n = 4$  entnommen.
  - a) Wie viele verschiedene Stichproben sind insgesamt möglich?
  - b) Wie groß ist dabei der Anteil an Stichproben mit genau *einem* fehlerhaften Gerät?

*Hinweis:* Die Stichprobe erfolgt (wie in der Praxis allgemein üblich) durch Ziehung *ohne* Zurücklegen.

- 7) Bild II-134 zeigt ein aus 3 elastischen Federn  $a$ ,  $b$  und  $c$  bestehendes System. Es stehen insgesamt 5 verschiedene Federn  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$  zur Verfügung. Wie viele verschiedene Federsysteme sind dann möglich?

*Hinweis:* Beachten Sie dabei, dass durch Vertauschen der Federn  $b$  und  $c$  kein neues System entsteht und jede Feder nur *einmal* zur Verfügung steht.



**Bild II-134**

Kombinierte Reihen-Parallel-Schaltung aus drei elastischen Federn

- 8) Wie viele verschiedene „Wörter“ mit 3 Buchstaben lassen sich aus den 6 Buchstaben a, b, c, d, e und f bilden, wenn jeder Buchstabe

- nur *einmal*,
- mehrmals (d. h. hier bis zu *dreimal*) verwendet werden darf?

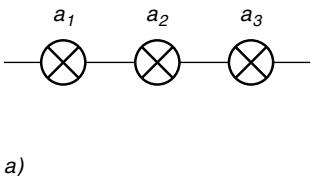
*Anmerkung:* Die gebildeten „Wörter“ müssen nicht unbedingt einen Sinn ergeben.

- 9) Eine homogene Münze wird *viermal* geworfen. Wir notieren dabei das jeweilige Ergebnis (also „Zahl“ oder „Wappen“) und zwar in der Reihenfolge des Auftretens. So bedeutet z. B. ZZZW: Zunächst dreimal hintereinander „Zahl“ und dann im 4. Wurf „Wappen“. Wie viele verschiedene Endergebnisse sind möglich?

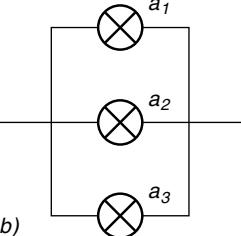
- 10) Eine Urne enthält 10 Kugeln, die durch die Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 unterschieden werden. Wie viele verschiedene *geordnete* Stichproben vom Umfang  $k = 3$  können der Urne entnommen werden, wenn die Ziehung der Kugeln
- ohne Zurücklegen*,
  - mit Zurücklegen* erfolgt?

- 11) Bei der Kennzeichnung von Kraftfahrzeugen durch 2 Buchstaben und 4 Ziffern (in dieser Reihenfolge) darf die *erste* Ziffer *keine* Null sein. Wie viele verschiedene Kennzeichen sind dann möglich, wenn sowohl jeder Buchstabe als auch jede Ziffer *mehrmals* verwendet werden darf?

## Zu Abschnitt 2

- 1) Eine homogene Münze wird *dreimal* geworfen („Zahl“: Z; „Wappen“: W).
- Bestimmen Sie die dabei möglichen *Ergebnisse* (*Elementarereignisse*) sowie die *Ergebnismenge*  $\Omega$  dieses Zufallsexperiments.
  - Durch welche *Teilmengen* von  $\Omega$  lassen sich die folgenden Ereignisse beschreiben?
    - A: Bei 3 Würfen zweimal „Zahl“
    - B: Bei 3 Würfen zweimal „Wappen“
    - C: Bei 3 Würfen einmal „Zahl“
    - D: Bei 3 Würfen dreimal „Zahl“
    - E: Bei 3 Würfen dreimal „Wappen“
  - Bilden Sie aus den unter b) genannten Ereignissen die folgenden *zusammengesetzten* Ereignisse und deuten Sie diese:
 
$$A \cup B, \quad A \cap D, \quad B \cup E, \quad D \cup E, \quad A \cap B, \quad (C \cup D) \cap B$$
  - Beschreiben und deuten Sie die Ereignisse  $\bar{A}$  und  $\bar{D}$ .
- 2) Beim Zufallsexperiment „*Wurf mit zwei nicht unterscheidbaren homogenen Würfeln*“ lassen sich die möglichen Ergebnisse (*Elementarereignisse*) durch *ungeordnete* Augenpaare  $(i; j)$  darstellen.
- Wie lauten diese *Elementarereignisse* und die zugehörige *Ergebnismenge*  $\Omega$ ?
  - Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse durch *Teilmengen* von  $\Omega$ :
    - A: Die Augensumme beträgt 4
    - B: Die Augensumme ist kleiner *oder* gleich 5
    - C: Die Augenzahlen beider Würfel sind *ungerade*
    - D: Die Augensumme ist *ungerade*
    - E: Das Produkt beider Augenzahlen ist *gerade*
- 3) Bild II-135 zeigt die *Reihen-* bzw. *Parallelschaltung* dreier Glühlampen  $a_1, a_2$  und  $a_3$ .  $A_i$  sei das Ereignis „Glühlampe  $a_i$  brennt durch“,  $B$  das Ereignis „*Unterbrechung des Stromkreises*“ ( $i = 1, 2, 3$ ).
- 

a)



b)
- Bild II-135**
- Stromkreis mit drei Glühlampen
- Reihenschaltung
  - Parallelschaltung
- Beschreiben Sie das Ereignis  $B$  mit Hilfe der Ereignisse  $A_i$  für beide Schaltungen.
  - Welche Bedeutung haben die Ereignisse  $A_1 \cup A_2$  und  $A_2 \cap A_3$  für die jeweilige Schaltung?

## Zu Abschnitt 3

- 1) Aus einem Skatspiel mit 32 Karten wird *eine* Karte zufällig entnommen. Wie groß ist die *Wahrscheinlichkeit*,  
 a) eine rote Karte,  
 b) ein Ass,  
 c) eine Dame oder einen König,  
 d) einen schwarzen Buben  
 zu ziehen?
- 2) In einer Warenlieferung von 20 Glühbirnen befinden sich 4 *defekte* Glühbirnen. Zu Kontrollzwecken werden der Lieferung 3 Glühbirnen zufällig und *ohne Zurücklegen* entnommen. Bestimmen Sie die *Wahrscheinlichkeit* dafür, dass diese Stichprobe  
 a) *keine*,  
 b) *mindestens eine*  
*defekte* Glühbirne enthält.
- 3) Ein homogener Würfel wird *zweimal* nacheinander geworfen. Berechnen Sie die *Wahrscheinlichkeit* für die folgenden Ereignisse:  
 A: Die Augensumme beträgt 4  
 B: Beide Augenzahlen sind *gleich*  
 C: Beide Augenzahlen sind durch 3 *teilbar*
- 4) Für ein Würfelexperiment mit einem auf bestimmte Weise verfälschten Würfel gilt die folgende *Wahrscheinlichkeitsverteilung*:

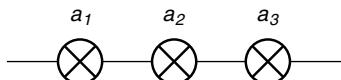
Augenzahl $i$	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit $p_i = p(i)$	$p_1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$p_4$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Bekannt ist ferner, dass eine *gerade* Zahl mit der Wahrscheinlichkeit  $p(\text{gerade}) = 1/2$  auftritt.

- a) Berechnen Sie die unbekannten Einzelwahrscheinlichkeiten  $p_1$  und  $p_4$ .
- b) Mit welchen *Wahrscheinlichkeiten* treten dabei die Ereignisse  $A = \{1, 6\}$  und  $B = \{2, 3, 4\}$  auf?
- 5) Ein Würfel wurde so manipuliert, dass die geraden Zahlen gegenüber den ungeraden Zahlen mit der *vierfachen* Wahrscheinlichkeit auftreten.  
 a) Berechnen Sie die *Wahrscheinlichkeit* für das Auftreten einer *geraden* ( $g$ ) bzw. einer *ungeraden* ( $u$ ) Augenzahl.  
 b) Welche *Wahrscheinlichkeit* besitzen die folgenden Ereignisse?

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{1, 6\}, \quad C = \{2, 4, 6\}, \quad D = \overline{C}, \\ E = B \cup C, \quad F = B \cap C$$

- 6) An einem Schwimmwettbewerb beteiligen sich 3 Schwimmer  $A$ ,  $B$  und  $C$ , deren Siegeschancen sich wie  $5:3:1$  verhalten. Wie groß ist die *Wahrscheinlichkeit*, dass
- Schwimmer  $C$ ,
  - Schwimmer  $A$  oder  $B$
- gewinnt?
- 7) Eine homogene Münze wird *dreimal* geworfen. Wie groß ist die *Wahrscheinlichkeit*, dass dabei mindestens *zweimal* „Wappen“ ( $W$ ) erscheint?
- 8) In einer Lieferung von 20 elektronischen Bauelementen eines bestimmten Typs befindet sich 10 % *Ausschuss*. Wie groß ist die *Wahrscheinlichkeit* dafür, dass man in einer entnommenen Stichprobe vom Umfang  $n = 3$  ausschließlich *einwandfreie* Bauelemente antrifft?
- 9) Einer Urne mit 8 weißen und 2 schwarzen Kugeln werden nacheinander und *ohne* Zurücklegen 2 Kugeln zufällig entnommen. Bestimmen Sie die *Wahrscheinlichkeit*, dass man bei der 2. Ziehung eine *schwarze* Kugel erhält, wenn bei der 1. Ziehung eine *weiße* Kugel gezogen wurde.
- 10) Ein homogener Würfel wird *zweimal* geworfen. Wie groß ist die *Wahrscheinlichkeit* dafür, dass die Augensumme beider Würfe *kleiner ist* als 6, wenn beim 1. Wurf die Augenzahl 2 erzielt wurde?
- 11) Zwei Sportschützen  $A$  und  $B$  treffen eine Zielscheibe mit den Wahrscheinlichkeiten  $P(A) = 1/3$  und  $P(B) = 1/2$ . Mit welcher *Wahrscheinlichkeit* wird die Scheibe getroffen, wenn beide Schützen *gleichzeitig* schießen?
- 12) Eine *Reihenschaltung* aus drei Glühlämpchen  $a_1, a_2$  und  $a_3$  wird von einem Strom durchflossen (Bild II-136).

**Bild II-136**

Reihenschaltung aus drei Glühlämpchen

Dabei treten die Ereignisse

 $A_i$ : Das  $i$ -te Glühlämpchen brennt durch

unabhängig voneinander mit den konstanten Wahrscheinlichkeiten  $p_i = 0,2$  ein ( $i = 1, 2, 3$ ). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine *Stromkreisunterbrechung* (Ereignis  $B$ )?

*Hinweis:* Bestimmen Sie zunächst die Wahrscheinlichkeit des *komplementären* Ereignisses  $\bar{B}$ .

- 13) Ein Bogenschütze trifft die Zielscheibe mit der Wahrscheinlichkeit  $p = 0,6$ . Er schießt insgesamt dreimal.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er dabei genau *zweimal* die Scheibe trifft.
  - Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Scheibe *mindestens einmal* getroffen?
- 14) Bei einem Windhundrennen mit 3 Hunden  $a$ ,  $b$  und  $c$  besteht die folgende Gewinnwahrscheinlichkeit:

Windhund	$a$	$b$	$c$
Gewinnwahrscheinlichkeit	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

Es werden zwei Rennen mit den gleichen Hunden veranstaltet. Berechnen Sie mit Hilfe des *Ereignisbaumes* die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- Windhund  $a$  das *erste* und Windhund  $b$  das *zweite* Rennen,
  - Windhund  $c$  *beide* Rennen gewinnt.
- 15) In einer Urne befinden sich 4 weiße ( $W$ ) und 6 schwarze ( $S$ ) Kugeln. Eine Kugel wird zufällig entnommen und dafür eine der *anderen* Farbe wieder hineingelegt. Dann wird der Urne eine weitere Kugel entnommen. Bestimmen Sie mit Hilfe des *Ereignisbaumes* die Wahrscheinlichkeit, dass
- die *zuletzt* gezogene Kugel *weiß* ist,
  - man bei *beiden* Ziehungen jeweils Kugeln *gleicher* Farbe erhält,
  - beide* Kugeln *weiß* sind, wenn bekannt ist, dass die gezogenen Kugeln die *gleiche* Farbe haben.
- 16) In einem Karton befinden sich 5 Glühbirnen, darunter 2 *defekte*. Es wird eine Glühbirne nach der anderen zufällig ausgewählt, bis die beiden defekten Glühbirnen gefunden sind. Mit Hilfe des *Ereignisbaumes* ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass dieser Zufallsprozess nach der *dritten* Ziehung beendet ist?
- 17) Eine Warenlieferung besteht aus 250 Kondensatoren, die auf *drei* Maschinen vom gleichen Typ hergestellt wurden. Dabei gilt:

Maschine	$A$	$B$	$C$
produzierte Stückzahl	80	50	120
davon Ausschuss	2	1	3

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- ein der Lieferung entnommener Kondensator *defekt* ist,
- ein zufällig entnommener *defekter* Kondensator auf der Maschine  $C$  hergestellt wurde?

Lösung mittels Ereignisbaum.

## Zu Abschnitt 4

- 1) Die nachfolgenden Verteilungen einer diskreten Zufallsvariablen  $X$  sind graphisch durch *Stabdiagramm* und *Verteilungskurve* darzustellen:

a)	$x_i$	-2	-1	1	2
	$f(x_i)$	1/4	1/8	3/8	1/4

b)	$x_i$	-3	1	4
	$f(x_i)$	1/4	1/2	1/4

c)	$x_i$	-2	-1	0	1	2
	$f(x_i)$	1/8	1/4	1/4	1/4	1/8

- 2) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen  $X$  ist durch die folgende *Verteilungstabelle* gegeben:

	$x_i$	-2	-1	0	1	2	3	4
	$f(x_i)$	0,05	0,20	0,25	0,20	0,15	0,10	$p(4)$

- a) Bestimmen Sie  $f(4) = p(4)$ .  
 b) Zeichnen Sie das zugehörige *Stabdiagramm* der Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$  sowie den *treppenförmigen* Verlauf der Verteilungsfunktion  $F(x)$ .
- 3) Eine homogene Münze wird *dreimal* geworfen. Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen

$$X = \text{Anzahl „Wappen“ bei drei Würfen}$$

- a) Zeichnen Sie das zugehörige *Stabdiagramm* sowie den Verlauf der *Verteilungsfunktion*  $F(x)$ .  
 b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $P(1 \leq X \leq 2)$ .
- 4) In einer Lieferung von 10 Glühbirnen vom gleichen Typ befinden sich 2 *defekte*. Zu Kontrollzwecken werden 3 Glühbirnen zufällig entnommen. Die Zufallsvariable  $X$  beschreibe die *Anzahl* der dabei erhaltenen *defekten* Glühbirnen.
- a) Bestimmen Sie die *Verteilung* der Zufallsvariablen  $X$ .  
 b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer solchen Stichprobe genau eine *defekte* Glühbirne befindet?

- 5) Ein Bogenschütze trifft die Zielscheibe mit der Wahrscheinlichkeit  $p = 0,8$ .
- Bestimmen Sie die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* der diskreten Zufallsvariablen
- X = Anzahl der abgegebenen Schüsse bis zum 1. Treffer*
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, die Scheibe bei insgesamt 3 abgegebenen Schüssen zu treffen?
- 6)  $X$  sei eine stetige Zufallsvariable mit der Dichtefunktion  $f(x)$ . Bestimmen Sie die jeweilige *Verteilungsfunktion*  $F(x)$ :

- $f(x) = \frac{1}{2}x$       ( $0 \leq x \leq 2$ )
- $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$       ( $x \geq 0; \lambda > 0$ )
- $f(x) = \frac{1}{x^2}$       ( $x \geq 1$ )

Außerhalb der angegebenen Intervalle ist  $f(x) = 0$ .

- 7) Bestimmen Sie den jeweiligen *Parameter* in der Dichtefunktion  $f(x)$  der stetigen Zufallsvariablen  $X$  durch *Normierung*:
- $f(x) = \frac{1}{16}x + b$       ( $0 \leq x \leq 4$ )
  - $f(x) = c$       ( $a \leq x \leq b$ )
  - $f(x) = a(1 + x)$       ( $-1 \leq x \leq 1$ )
- Außerhalb der angegebenen Intervalle ist  $f(x) = 0$ .

- 8) Eine stetige Zufallsvariable  $X$  besitzt die *Dichtefunktion*

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{für } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{alle übrigen } x \end{cases}$$

- Bestimmen Sie den *Parameter*  $k$ .
- Berechnen Sie anschließend die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(X \leq -2), \quad P(1 \leq X \leq 2), \quad P(X \geq 5), \quad P(3 \leq X \leq 8)$$

- 9) Die *Dichtefunktion* einer stetigen Verteilung lautet:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2(2-x) & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{alle übrigen } x \end{cases}$$

- Bestimmen Sie den *Parameter*  $a$ .
- Wie lautet die zugehörige *Verteilungsfunktion*?
- Berechnen Sie die *Wahrscheinlichkeit*, dass die Zufallsvariable  $X$  einen Wert kleiner *oder* gleich 1 annimmt.

- 10) Gegeben ist die *Verteilungsfunktion*

$$F(x) = a \cdot \arctan x + b \quad (-\infty < x < \infty)$$

einer stetigen Zufallsvariablen  $X$ .

- a) Bestimmen Sie die beiden *Parameter*  $a$  und  $b$ .
- b) Wie lautet die *Dichtefunktion*  $f(x)$  dieser Verteilung?

- 11) Die Lebensdauer  $T$  eines bestimmten elektronischen Bauelements genüge einer *Exponentialverteilung* mit der *Dichtefunktion*

$$f(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

( $\lambda > 0$ ). Wie groß ist die *Wahrscheinlichkeit* dafür, dass ein Bauelement *mindestens* bis zum Zeitpunkt  $t = 2\lambda^{-1}$  *funktionstüchtig* bleibt?

- 12) Die Lebensdauer  $T$  eines bestimmten elektronischen Bauelements sei eine stetige Zufallsvariable mit der *Verteilungsfunktion*

$$F(t) = 1 - (1 + 0,2t) \cdot e^{-0,2t} \quad (t \geq 0; \text{ sonst } F(t) = 0)$$

- a) Bestimmen Sie die zugehörige *Dichtefunktion*  $f(t)$ .
- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $P(1 \leq T \leq 5)$ .

## Zu Abschnitt 5

- 1) Welchen *Erwartungswert* besitzen die folgenden diskreten Verteilungen:

a)	$x_i$	-1	0	1	2	3
	$f(x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,15	0,05

b)	$x_i$	-2	-1	0	1	4	5	10
	$f(x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

- 2) Wie groß ist der *Erwartungswert* der stetigen Zufallsvariablen  $X$  mit der Dichtefunktion

$$f(x) = 0,5(1+x) \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

(für alle übrigen  $x$  ist  $f(x) = 0$ )?

- 3) Die *Verteilungstabelle* einer diskreten Verteilung laute:

$x_i$	-2	-1	1	2
$f(x_i)$	1/8	3/8	1/4	1/4

- a) Welchen *Erwartungswert* besitzt diese Verteilung?  
 b) Berechnen Sie den *Erwartungswert* der von  $X$  abhängigen Funktionen

$$Z_1 = g_1(X) = 5X + 2 \quad \text{und} \quad Z_2 = g_2(X) = X^2.$$

- 4) Beim gleichzeitigen Wurf dreier homogener Münzen ist die Zufallsvariable

$$X = \text{Anzahl „Wappen“}$$

wie folgt verteilt:

$x_i$	0	1	2	3
$f(x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

- a) Welchen *Gewinn* kann ein Spieler bei diesem Glücksspiel pro Spiel erwarten, wenn die folgende Gewinntabelle gilt:

$x_i$	0	1	2	3
Gewinn $z_i = g(x_i)$ (in Euro)	1	2	3	8

*Hinweis:* Die Gewinnerwartung des Spielers ist der *Erwartungswert* der Gewinnfunktion  $Z = g(X)$ .

- b) Ist dieses Glücksspiel für einen Spieler „günstig“, wenn sein Wettkauf pro Spiel 4 Euro beträgt?  
 5) Berechnen Sie den *Mittelwert*  $\mu$ , die *Varianz*  $\sigma^2$  und die *Standardabweichung*  $\sigma$  der folgenden diskreten Verteilungen:

a)	$x_i$	-2	2	4	6	8
	$f(x_i)$	1/4	1/6	1/4	1/4	1/12

b)	$x_i$	-2	1	2	3	4
	$f(x_i)$	1/8	1/4	1/2	1/16	1/16

c)	$x_i$	-2	-1	0	1	2	3	4
	$f(x_i)$	0,05	0,20	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05

- 6) Die diskrete Zufallsvariable  $X$  besitzt die folgende *Wahrscheinlichkeitsverteilung*:

$x_i$	-2	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	0,2	0,3	0,2	0,1	0,05	0,15

- a) Berechnen Sie *Mittelwert*  $\mu$ , *Varianz*  $\sigma^2$  und *Standardabweichung*  $\sigma$  dieser Verteilung.
- b) Wie lauten die *entsprechenden* Kennwerte der von  $X$  abhängigen Funktion  $Z = (X - \mu)^2$  mit  $\mu = E(X)$ ?
- 7) In einer Lieferung von 10 Glühbirnen befinden sich 2 *defekte*. Wie viele *defekte* Glühbirnen kann man *im Mittel* in einer Stichprobe vom Umfang  $n = 3$  erwarten, die der angelieferten Ware zu Kontrollzwecken entnommen wird?  
*Hinweis:* Verwenden Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 4 in Abschnitt 4 (Zufallsvariable:  $X = \text{Anzahl der in der Stichprobe enthaltenen defekten Glühbirnen}$ ).
- 8) Eine homogene Münze wird solange geworfen, bis „Zahl“ (Z) oder insgesamt dreimal „Wappen“ (W) erscheint. Die Zufallsvariable  $X$  beschreibe die *Anzahl* der ausgeführten Würfe bis zum *Eintritt* dieses Ereignisses.
- a) Bestimmen sie die *Verteilung* der Zufallsvariablen  $X$ .
- b) Wie viele Würfe sind *im Mittel* auszuführen, bis das beschriebene Ereignis eintritt?
- 9) Die stetige Zufallsvariable  $X$  besitze die jeweils angegebene *Dichtefunktion*  $f(x)$ . Berechnen Sie den *Mittel-* oder *Erwartungswert*  $\mu$ , die *Varianz*  $\sigma^2$  sowie die *Standardabweichung*  $\sigma$ .
- a)  $f(x) = \text{const.} = c \quad (a \leq x \leq b)$
- b)  $f(x) = mx \quad (0 \leq x \leq 10; m = \text{const.})$
- Außerhalb des jeweils angegebenen Intervalls gilt stets  $f(x) = 0$ .
- 10) Eine stetige Zufallsvariable  $X$  genüge einer sog. *Gamma-Verteilung* mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \lambda^2 \cdot x \cdot e^{-\lambda x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \quad (\text{mit } \lambda > 0)$$

Berechnen Sie die *Kennwerte* oder *Maßzahlen*  $\mu$ ,  $\sigma^2$  und  $\sigma$ .

- 11) Welchen *Mittelwert* und welche *Varianz* besitzt eine stetig verteilte Zufallsvariable  $X$  mit der *Dichtefunktion*

$$f(x) = ax^2(1-x) \quad (0 \leq x \leq 1; a: \text{reelle Konstante})$$

(für alle übrigen  $x$  verschwindet  $(f(x))$ ?

- 12) Die Lebensdauer eines bestimmten elektronischen Bauelements kann als eine Zufallsgröße  $T$  mit der *Verteilungsfunktion*

$$F(t) = \begin{cases} 1 - (1 + 0,2t) \cdot e^{-0,2t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

aufgefasst werden. Welche *durchschnittliche* Lebensdauer hat ein solches Bauelement?

- 13) Die stetige Zufallsvariable  $X$  genüge einer *Exponentialverteilung* mit der *Dichtefunktion*

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0; \lambda > 0)$$

(für alle übrigen  $x$  ist  $f(x) = 0$ ). Bestimmen Sie den jeweiligen *Mittelwert* der folgenden von  $X$  abhängigen Funktionen:

- a)  $Z = e^{-X}$       b)  $Z = 2X + 1$       c)  $Z = X^2$
- 14) Die Zufallsvariable  $X$  besitze den Mittelwert  $E(X) = \mu_X = 2$  und die Varianz  $\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = 0,5$ . Berechnen Sie die *entsprechenden* Kennwerte der folgenden *linearen* Funktionen von  $X$ :
- a)  $Z = 2X - 3$       b)  $Z = -0,5X + 2$       c)  $Z = 10X$       d)  $Z = -X$

## Zu Abschnitt 6

- 1)  $X$  sei eine *binomialverteilte* Zufallsvariable mit den Parametern  $n = 8$  und  $p = 0,2$ .
- Bestimmen Sie die *Verteilungstabelle* und zeichnen Sie das zugehörige *Stabdiagramm*.
  - Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:  $P(X = 0)$ ,  $P(X \geq 5)$ ,  $P(1 \leq X \leq 3)$
- 2) Eine homogene Münze wird *zehnmal* geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis „Zahl“
- keinmal*,
  - genau zweimal*,
  - mindestens viermal* auftritt?
  - Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten wir bei 10 Würfen je *fünfmal* „Zahl“ und „Wappen“?

- 3) Ein homogener Würfel wird *fünfmal* geworfen. Dabei wird das Auftreten der Augenzahl 1 oder 2 als *Erfolg*, das Auftreten der übrigen Augenzahlen als *Miss-Erfolg* gewertet. Man berechne die Wahrscheinlichkeit für einen
- zweifachen*,
  - mindestens dreifachen*
- Erfolg.
- 4) Ein homogener Würfel wird *300-mal* geworfen. Wie oft können wir dabei erwarten, dass eine durch 3 *teilbare* Augenzahl auftritt?
- 5) Aus einem Skatspiel mit 32 Karten wird *eine* Karte zufällig entnommen und nach der Ziehung wieder *zurückgelegt*. Dann werden die Karten neu gemischt. Wie oft muss man eine Karte ziehen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, *mindestens ein* „rotes Ass“ zu ziehen, größer als 0,5 ist?
- 6) Die Herstellung von Gewindeschrauben erfolge mit einem *Ausschussanteil* von 2 %. Wie viele *nicht brauchbare* Schrauben befinden sich *im Mittel* in einer Schachtel mit 250 Schrauben? Wie groß sind *Varianz*  $\sigma^2$  und *Standardabweichung*  $\sigma$  dieser Binomialverteilung?
- 7) Ein Sportschütze trifft eine Zielscheibe mit der Wahrscheinlichkeit  $p = 1/3$ . Er gibt insgesamt 5 Schüsse ab. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er die Scheibe
- keinmal*,
  - genau dreimal*,
  - mindestens dreimal*
- trifft?
- 8) Die *diskrete* Zufallsvariable  $X$  genüge einer *hypergeometrischen* Verteilung mit den Parametern  $N = 10$ ,  $M = 4$  und  $n = 3$ . Man berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
- $P(X = 0)$
  - $P(1 \leq X \leq 3)$
  - $P(X < 2)$
- 9) Unter 40 Packungen, die laut Aufschrift je 10 Ziernägel enthalten sollen, befinden sich 4 *unvollständige* Packungen (sie enthalten *weniger* Ziernägel als angegeben). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man
- beim Kauf von einer Packung eine *vollständige* Packung,
  - beim Kauf von 10 Packungen genau *zwei unvollständige* Packungen erhält?
- 10) Einer Urne mit 5 Kugeln, darunter 3 weißen und zwei schwarzen, entnehmen wir nacheinander zufällig und *ohne Zurücklegen* 2 *Kugeln*. Bestimmen Sie die *Verteilung* der Zufallsvariablen

$X = \text{Anzahl der gezogenen weißen Kugeln}$

und zeichnen Sie das zugehörige *Stabdiagramm*.

- 11)  $X$  sei eine *Poisson-verteilte* Zufallsvariable mit dem Parameter  $\mu = 3$ . Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
- $P(X = 0)$
  - $P(X \leq 3)$
  - $P(X > 3)$
  - $P(1 \leq X \leq 5)$
- 12) Bei einem Kernreaktor werden an die Brennelemente extrem hohe Qualitätsanforderungen gestellt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Brennelement diesen hohen Anforderungen *nicht* genügt, betrage  $p = 10^{-4}$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass *alle* 1500 Brennelemente eines Reaktors die vorgeschriebenen Qualitätsbedingungen erfüllen?
- 13)  $U$  sei eine *standardnormalverteilte* Zufallsvariable. Berechnen Sie mit Hilfe der Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  (Tabelle 1 im Anhang, Teil A) die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
- |                              |                                 |
|------------------------------|---------------------------------|
| a) $P(U \leq 1,52)$          | b) $P(U \leq -0,42)$            |
| c) $P(0,2 \leq U \leq 2,13)$ | d) $P(-1,01 \leq U \leq -0,25)$ |
| e) $P(-1 \leq U \leq 1)$     | f) $P( U  \leq 1,69)$           |
| g) $P(U \geq 0,95)$          | h) $P(U \geq -2,13)$            |
- 14) Bestimmen Sie anhand von Tabelle 1 im Anhang (Teil A) die jeweils unbekannte *Intervallgrenze* ( $U$ : *standardnormalverteilte* Zufallsvariable):
- |                                   |                                     |
|-----------------------------------|-------------------------------------|
| a) $P(U \leq a) = 0,5$            | b) $P(U \leq a) = 0,3210$           |
| c) $P(0,15 \leq U \leq b) = 0,35$ | d) $P(-0,22 \leq U \leq b) = 0,413$ |
| e) $P(-a \leq U \leq a) = 0,95$   | f) $P( U  \leq c) = 0,4682$         |
| g) $P(U \geq a) = 0,8002$         | h) $P(U \geq a) = 0,4010$           |
- 15)  $X$  sei eine *normalverteilte* Zufallsvariable mit dem Mittelwert  $\mu = 6$  und der Standardabweichung  $\sigma = 2$ . Die folgenden Werte von  $X$  sind in *Standardeinheiten* umzurechnen:
- 10,42
  - 0,86
  - 2,5
  - 4,68
  - $\mu \pm 3,2\sigma$
  - 18
- 16) Die Zufallsvariable  $X$  ist *normalverteilt* mit dem Mittelwert  $\mu = 2$  und der Standardabweichung  $\sigma = 0,5$ . Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten durch Umrechnung in *Standardeinheiten* und unter Verwendung der Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  der *Standardnormalverteilung* (Tabelle 1 im Anhang, Teil A):
- |                                 |                              |
|---------------------------------|------------------------------|
| a) $P(X \leq 2,52)$             | b) $P(X \leq 0,84)$          |
| c) $P(X \leq -1,68)$            | d) $P(-0,5 \leq X \leq 4,5)$ |
| e) $P(-1,86 \leq X \leq -0,24)$ | f) $P(-3 \leq X \leq 3)$     |
| g) $P( X  \leq 2,13)$           | h) $P(X \geq 0,98)$          |
- 17) Die Kapazität eines in großer Stückzahl hergestellten Kondensators kann als eine *normalverteilte* Zufallsvariable  $X$  angesehen werden.
- Mit welchem *Ausschussanteil* ist zu rechnen, wenn die Kapazität *höchstens* um 5 % vom Sollwert (Mittelwert)  $\mu = 100 \mu\text{F}$  abweichen darf und die Standardabweichung  $\sigma = 4 \mu\text{F}$  beträgt?

- b) Wie ändert sich dieser Ausschussanteil, wenn nur Kapazitätswerte zwischen  $98 \mu\text{F}$  und  $104 \mu\text{F}$  toleriert werden?
- 18) Die in einer Mathematik-Klausur erzielte Punktzahl lässt sich als eine *normalverteilte* Zufallsgröße  $X$  auffassen. In einem konkreten Fall ergab sich eine *Normalverteilung* mit dem Mittelwert  $\mu = 20$  und der Standardabweichung  $\sigma = 4$  (in Punkten). 60 % der teilgenommenen Studenten erhielten den Übungsschein. Welche *Mindestpunktzahl* war daher zu erreichen?
- 19) Von 5000 Studenten einer Fachhochschule wurde das Körpergewicht bestimmt. Die Zufallsgröße

$$X = \text{Körpergewicht eines Studenten}$$

- erwies sich dabei als eine *normalverteilte* Zufallsvariable mit dem Mittelwert  $\mu = 75 \text{ kg}$  und der Standardabweichung  $\sigma = 5 \text{ kg}$ . Wie viele der untersuchten Studenten hatten dabei
- ein Gewicht zwischen 69 kg und 80 kg,
  - ein Gewicht *über* 80 kg,
  - ein Gewicht *unter* 65 kg?
- 20) In einem Weingut wird auf einer automatischen Abfüllanlage Wein in 0,75-Liter-Flaschen gefüllt. Das Abfüllvolumen  $X$  kann dabei nach den Angaben des Herstellers als eine *normalverteilte* Zufallsvariable mit dem Mittelwert  $\mu = 0,75 \text{ l} = 750 \text{ cm}^3$  und der Standardabweichung  $\sigma = 20 \text{ cm}^3$  angenommen werden:
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine abgefüllte Weinflasche *weniger* als  $730 \text{ cm}^3$  Wein enthält?
  - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das abgefüllte Weinvolumen vom Sollwert (Mittelwert) um *maximal* 2 % (nach oben bzw. unten) abweicht.
- 21) Aus langjähriger Erfahrung weiß man, dass die Wartungsdauer  $T$  eines bestimmten Autotyps einer *Exponentialverteilung* mit einer *mittleren* Wartungsdauer von  $E(T) = \mu = 4$  Stunden genügt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
- die Wartung *höchstens* 3 Stunden dauert,
  - die Wartungszeit zwischen 3 und 5 Stunden liegt,
  - die Wartung *länger* als 4 Stunden dauert.
- 22) Die Lebensdauer einer Energiesparlampe ist in guter Näherung eine *exponentialverteilte* Zufallsvariable  $T$  mit einer *mittleren* Lebensdauer von  $\bar{T} = 10000$  Betriebsstunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit brennt die Lampe
- in den ersten 500 Betriebsstunden,
  - zwischen der 1000. und 3000. Betriebsstunde,
  - nach Ablauf von 12000 Betriebsstunden
- durch?

- 23) Die *mittlere* Dauer eines Telefongesprächs in einem Unternehmen beträgt 2 min. Die Zufallsvariable

$$T = \text{Dauer eines Telefongesprächs (in min)}$$

kann dabei als eine *exponentialverteilte* Größe angesehen werden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für

- a) ein Kurzgespräch von *maximal* 30 s,
- b) ein Gespräch von *mindestens* 5 min Dauer,
- c) ein Gespräch von *mindestens* 1 min und *höchstens* 3 min Dauer.

- 24) Ein bestimmter Massenartikel wird mit einem *Ausschussanteil* von 1 % produziert. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine der Gesamtproduktion entnommen Stichprobe vom Umfang  $n = 100$

- a) genau *zwei* Ausschussstücke,
  - b) mehr als zwei Ausschussstücke
- enthält.

*Hinweis:* Die *binomialverteilte* Zufallsvariable

$$X = \text{Anzahl der Ausschussstücke in einer Stichprobe von Umfang } n = 100$$

lässt sich hier durch die rechnerisch bequemere *Poisson-Verteilung* annähern.

- c) Wie lautet die jeweilige *exakte* Lösung?

- 25) Eine homogene Münze wird 20-mal geworfen. Die *binomialverteilte* Zufallsvariable

$$X = \text{Anzahl „Wappen“ bei 20 Würfen}$$

soll durch eine *Normalverteilung* approximiert werden. Berechnen Sie mit dieser Näherung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass *mindestens* 8 und *höchstens* 12 der insgesamt 20 Würfe zum Ergebnis „Wappen“ führen.

Welches (exakte) Ergebnis liefert die *Binomialverteilung*?

- 26) Ein homogener Würfel wird 360-mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit nimmt dabei die *binomialverteilte* Zufallsvariable

$$X = \text{Anzahl der Würfe mit der Augenzahl 1 oder 6 bei insgesamt 360 Würfen}$$

Werte zwischen 100 und 140 an, wenn man die Approximation durch eine *Normalverteilung* zugrunde legt?

- 27) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein bestimmter Gerätetyp einer Zuverlässigkeitssprüfung *nicht* standhält, betrage  $p = 0,06$ . Es werden insgesamt 200 Geräte unabhängig voneinander dieser Prüfung unterzogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen Geräten *mindestens* 10 und *höchstens* 15 diese Zuverlässigkeitssprüfung *nicht* bestehen.

*Hinweis:* Man verwende die Approximation durch eine *Normalverteilung*.

## Zu Abschnitt 7

- 1) Bestimmen Sie aus der jeweils vorgegebenen Verteilungstabelle der diskreten zweidimensionalen Zufallsvariablen ( $X; Y$ ) die *Verteilungen* der beiden Komponenten  $X$  und  $Y$  (*Randverteilungen*) sowie deren *Erwartungswerte* und *Varianzen*:

$X \backslash Y$	-2	1	4
1	1/8	1/4	1/8
3	1/8	1/8	1/4

$X \backslash Y$	-2	-1	1	2
0	0,15	0,05	0,10	0,30
1	0,10	0,10	0,05	0,15

- 2) Die diskreten Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sind *stochastisch unabhängig* und wie folgt verteilt:

$x_i$	1	2	3
$f_1(x_i)$	0,2	0,5	0,3

$y_i$	0	2	3	6
$f_2(y_i)$	0,1	0,2	0,4	0,3

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der *gemeinsamen* Verteilung von  $X$  und  $Y$ .

- 3) Gegeben ist die *unvollständige* Verteilungstabelle der diskreten zweidimensionalen Zufallsvariablen ( $X; Y$ ):

$X \backslash Y$	0	1	2	
2		0,08	0,04	0,4
4	0,14			0,2
6			0,04	
	0,7		0,1	

$f_1(x), f_2(y)$ :  
Randverteilungen  
von  $X$  bzw.  $Y$

$f_1(x)$

}

$f_2(y)$

- a) Bestimmen Sie die *fehlenden* Einzelwahrscheinlichkeiten.
- b) Wie lauten die *Wahrscheinlichkeitsfunktionen* der beiden Komponenten sowie deren *Mittelwerte* und *Varianzen*?
- c) Zeigen Sie: Die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sind *stochastisch unabhängig*.

- 4) Die *Verteilungstabelle* einer diskreten zweidimensionalen Zufallsvariablen  $(X; Y)$  lautet wie folgt:

$X \backslash Y$	0	1	2
1	1/16	1/8	1/16
2	1/8	1/4	1/8
3	1/16	1/8	1/16

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktionen der *Randverteilungen* von  $X$  und  $Y$  in dieser zweidimensionalen Verteilung.
- b) Bestimmen Sie die *Erwartungswerte*  $E(X)$  und  $E(Y)$  sowie die *Varianzen*  $\text{Var}(X)$  und  $\text{Var}(Y)$ .
- c) Handelt es sich bei den Komponenten  $X$  und  $Y$  um *stochastisch unabhängige* Zufallsvariable?
- 5) Die Verteilung einer stetigen zweidimensionalen Zufallsvariablen  $(X; Y)$  besitze die *Dichtefunktion*

$$f(x; y) = \begin{cases} k \cdot e^{-2x-y} & \text{für } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{alle übrigen } (x; y) \end{cases}$$

- a) Bestimmen Sie die Konstante  $k$  durch Normierung der Dichtefunktion.
- b) Wie lauten die *Dichten*  $f_1(x)$  und  $f_2(y)$  der *Randverteilungen*?
- c) Bestimmen Sie die *Erwartungswerte*  $E(X)$  und  $E(Y)$  sowie die *Varianzen*  $\text{Var}(X)$  und  $\text{Var}(Y)$ .
- d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $P(0 \leq X \leq 2; 0 \leq Y \leq 3)$ .
- 6) Die *stochastisch unabhängigen* stetigen Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  besitzen die folgenden *Dichtefunktionen*:

$$f_1(x) = \frac{1}{4} (x + 1), \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$f_2(y) = y + \frac{1}{2}, \quad 0 \leq y \leq 1$$

(im übrigen Bereich verschwinden beide Funktionen).

- a) Bestimmen Sie die *Dichtefunktion*  $f(x; y)$  der *gemeinsamen* Verteilung.
- b) Wie lautet die *Verteilungsfunktion*  $F(x; y)$  der *gemeinsamen* Verteilung?
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $P(0 \leq X \leq 1; 0 \leq Y \leq 1)$ .

- 7) Bestimmen Sie aus der vorgegebenen *gemeinsamen* Verteilung die *Wahrscheinlichkeitsfunktionen*  $f_1(x)$  und  $f_2(y)$  der beiden Komponenten  $X$  und  $Y$  einer diskreten Zufallsvariablen  $(X; Y)$  und überprüfen Sie die Komponenten auf *stochastische Unabhängigkeit*:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/16	1/8	1/16
1	1/16	1/4	1/16
2	1/8	1/8	1/8

$X \backslash Y$	0	1	2
1	0,40	0,24	0,16
2	0,10	0,06	0,04

- 8) Die diskreten Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit den folgenden Verteilungsfunktionen sind *stochastisch unabhängig*:

$x_i$	1	2	3
$f_1(x_i)$	0,5	0,3	0,2

$y_k$	5	10	15
$f_2(y_k)$	0,15	0,6	0,25

Bestimmen Sie die *gemeinsame* Verteilung.

- 9) Die Zufallsvariablen  $X_1, X_2, X_3$  und  $X_4$  besitzen die folgenden Mittel- oder Erwartungswerte:

$X_i$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
$\mu_i = E(X_i)$	2	5	-3	1

Bestimmen Sie den *Erwartungswert* der folgenden Zufallsvariablen:

- a)  $Z_1 = X_1 + 2X_2 - 5X_4$   
 b)  $Z_2 = X_1 + 8X_2 - 3(X_3 + X_4)$   
 c)  $Z_3 = X_1 + X_2 + 2X_3 - X_4$

- 10) Die *stochastisch unabhängigen* Zufallsvariablen  $X_i$  besitzen die Mittelwerte  $\mu_i = E(X_i) = 2i^2$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Welchen *Mittelwert* besitzen dann die folgenden Produkte?

- a)  $Z_1 = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4$       b)  $Z_2 = X_1 \cdot (X_2 + X_3)$   
 c)  $Z_3 = (X_1 - X_2) \cdot (X_1 + X_2)$       d)  $Z_4 = 3X_1 \cdot X_4^2$

- 11) Die *stochastisch unabhängigen* Zufallsvariablen  $X_1, X_2, X_3$  und  $X_4$  besitzen die folgenden Mittelwerte und Varianzen:

$X_i$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
$\mu_i = E(X_i)$	2	8	-2	3
$\sigma_i^2 = \text{Var}(X_i)$	1	2	5	3

Bestimmen Sie *Mittelwert* und *Varianz* der folgenden Linearkombinationen:

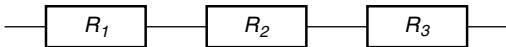
- a)  $Z_1 = X_1 - 3X_2 + X_4$       b)  $Z_2 = X_1 + 2(X_2 - X_3)$   
 c)  $Z_3 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$       d)  $Z_4 = 2(X_1 - X_2) + 3X_3$

- 12) Die *stochastisch unabhängigen* Zufallsvariablen  $X_1, X_2$  und  $X_3$  besitzen der Reihe nach die Mittelwerte  $\mu_1 = 2, \mu_2 = -4, \mu_3 = 5$  und die Standardabweichungen  $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2, \sigma_3 = 3$ . Bestimmen Sie die *Mittelwerte, Varianzen* und *Standardabweichungen* der folgenden Zufallsvariablen:

- a)  $Z = \frac{1}{2}(X_1 + X_2) - X_3$       b)  $Z = 2(X_1 + X_3) - 3X_2$   
 13)  $X$  sei eine *normalverteilte* Zufallsvariable mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$ . Was lässt sich über die Verteilung der Zufallsvariablen  $Z = aX + b$  mit  $a > 0$  aussagen?  
 14) Bild II-137 zeigt eine *Reihenschaltung* aus drei ohmschen Widerständen  $R_1, R_2$  und  $R_3$ , die wir als voneinander *unabhängige* und *normalverteilte* Zufallsgrößen mit den folgenden Mittelwerten und Standardabweichungen auffassen können:

$$R_1: \mu_1 = 200 \Omega, \sigma_1 = 2 \Omega; \quad R_2: \mu_2 = 120 \Omega, \sigma_2 = 1 \Omega;$$

$$R_3: \mu_3 = 180 \Omega, \sigma_3 = 2 \Omega$$



**Bild II-137** Reihenschaltung aus drei ohmschen Widerständen

- a) Bestimmen Sie den *Mittelwert*  $\mu$  und die *Standardabweichung*  $\sigma$  des Gesamtwiderstandes  $R = R_1 + R_2 + R_3$ .  
 b) Bestimmen Sie ein zum Mittelwert  $\mu$  *symmetrisches* Intervall, in dem der Gesamtwiderstand  $R$  mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % anzutreffen ist.  
 15) Gegeben sind zwei *stochastisch unabhängige* und *normalverteilte* Zufallsvariable  $X$  und  $Y$  mit den folgenden Parametern:

$$X: \mu_X = 10, \sigma_X = 3; \quad Y: \mu_Y = 20, \sigma_Y = 4$$

Bestimmen Sie die *Dichtefunktion* der Summe  $Z = X + Y$ .

# III Grundlagen der mathematischen Statistik

## 1 Grundbegriffe

### 1.1 Ein einführendes Beispiel

Ein wichtiges Beispiel für die Anwendung statistischer Methoden in der Praxis liefert die *Qualitätskontrolle* bei der Herstellung sog. *Massenartikel*. Nehmen wir den folgenden konkreten Fall an:

Ein Betrieb produziere als Zulieferer für einen bestimmten Elektrokonzern Kondensatoren mit einer vorgeschriebenen Kapazität von  $C_0 = 100 \mu\text{F}$  in großer Stückzahl. *Kein Produktionsablauf ist jedoch so vollkommen, dass alle hergestellten Stücke gleich ausfallen.* Gründe dafür sind u. a.:

- *Verschleiss- und Abnutzungerscheinungen* an den produzierenden Maschinen und Automaten
- *Inhomogenitäten* des verarbeiteten Materials
- Menschliche Unzulänglichkeiten

Folglich werden die Kapazitätswerte mehr oder weniger stark vom vorgegebenen Sollwert  $100 \mu\text{F}$  abweichen. Diese Fakten sind natürlich auch dem Elektrokonzern bekannt. Er akzeptiert daher auch solche Kondensatoren, deren Kapazität nur *geringfügig* vom Sollwert abweicht. Die zwischen dem Hersteller und dem Elektrokonzern getroffene Vereinbarung kann beispielsweise so aussehen, dass die Kapazität um *maximal*  $1 \mu\text{F}$  vom Sollwert  $100 \mu\text{F}$  nach oben oder unten abweichen darf. Mit anderen Worten: Es werden vom Kunden alle Kondensatoren akzeptiert, deren Kapazität zwischen  $99 \mu\text{F}$  und  $101 \mu\text{F}$  liegt. Bild III-1 verdeutlicht diesen *Toleranzbereich*:

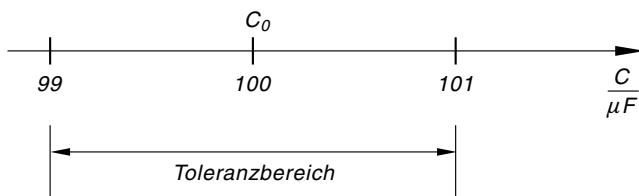


Bild III-1

Der Hersteller der Kondensatoren wird daher die Produktion *überwachen*, um sicher zu gehen, dass seine Ware auch den Anforderungen des Kunden entspricht. Andernfalls muss er das Risiko in Kauf nehmen, dass der Elektrokonzern die gelieferten Kondensatoren als *fehlerhaft* zurückweist. Die *statistische Qualitätskontrolle* des Herstellers be-

steht nun darin, dass er in *regelmäßigen* Zeitabständen (z. B. stündlich) stets eine gewisse (aber gleichbleibende) Anzahl von Kondensatoren (z. B. jeweils 10 Stück) *wahllos*, d. h. zufällig aus der laufenden Produktion herausgreift und deren Kapazität bestimmt. Es handelt sich um sog. *Zufallsstichproben* vom Umfang 10. Die einzelnen Werte einer solchen Stichprobe werden dabei einer sog. *Grundgesamtheit* entnommen. In unserem Beispiel käme als Grundgesamtheit z. B. die Tagesproduktion an Kondensatoren infrage.

Bei *jeder* Stichprobe werden aber die einzelnen Stichprobenwerte mehr oder weniger stark vom vorgegebenen Sollwert  $C_0 = 100 \mu\text{F}$  abweichen. Eine solche Stichprobe könnte beispielsweise wie folgt aussehen:

99; 101; 102; 102; 99; 98; 100; 101; 101; 102

(alle Angaben in  $\mu\text{F}$ ). Die *Auswertung* einer Stichprobe erfolgt dann durch Bildung eines *Mittelwertes* und Angabe eines geeigneten *Genauigkeitsmaßes*, das in gewisser Weise die *Streuung* der einzelnen Stichprobenwerte um den Mittelwert charakterisiert. Mit diesen *statistischen Kennwerten* oder *Maßzahlen* werden wir uns später noch ausführlich beschäftigen (Abschnitt 2).

Mit Hilfe *mathematischer Modelle* aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist der Hersteller nun in der Lage, durch einen *Vergleich* des Stichprobenmittelwertes mit dem Sollwert  $C_0 = 100 \mu\text{F}$  festzustellen, ob die produzierte Ware den Anforderungen des Kunden entspricht oder ob die festgestellten Abweichungen *außerhalb* des vereinbarten Toleranzbereiches liegen. In diesem Fall wird er die laufende Produktion *stoppen* und auf *Fehlersuche* gehen.

## 1.2 Zufallsstichproben aus einer Grundgesamtheit

Eine *grundlegende* Aufgabe der Statistik besteht darin, Kenntnisse und Informationen über die Eigenschaften oder Merkmale einer bestimmten Menge von Objekten (Elementen) zu gewinnen, ohne dass dabei *alle* Objekte in die Untersuchung miteinbezogen werden müssen. Dies ist nämlich aus den folgenden Gründen meist auch gar nicht möglich:

- Zu *hoher* Zeit- und Kostenaufwand
- Die Anzahl der Elemente, die untersucht werden müssten, ist zu *groß*
- Die Untersuchungsobjekte könnten unter Umständen *zerstört* werden (Beispiel: Um die *Lebensdauer* eines elektronischen Bauteiles oder einer Glühbirne bestimmen zu können, müssten diese bis zur vollständigen Zerstörung belastet werden)

Eine solche Menge von *gleichartigen* Objekten oder Elementen heißt *Grundgesamtheit*. Im einführenden Beispiel aus Abschnitt 1.1 besteht diese Grundgesamtheit aus *allen* an einem Tage produzierten Kondensatoren. Eine Grundgesamtheit kann dabei *endlich* oder *unendlich* sein, je nachdem ob sie endlich oder unendlich viele Elemente enthält.

Aus den bereits genannten Gründen lässt sich die Untersuchung gewisser Eigenschaften oder Merkmale einer Grundgesamtheit *nicht* als Ganzes durchführen, sondern muss vielmehr auf eine *Teilmenge* mit  $n$  Elementen beschränkt werden. Wir entnehmen daher der Grundgesamtheit eine sog. *Stichprobe* vom Umfang  $n$  und erhoffen uns daraus gewisse Aufschlüsse und Informationen über die Grundgesamtheit selbst. Die Entnahme der Elemente muss dabei *zufällig* erfolgen, d. h. die Auswahl der  $n$  Elemente muss

*wahllos* und *voneinander unabhängig* geschehen, wobei grundsätzlich *jedes* Element die *gleiche* Chance haben muss, gezogen zu werden. Man spricht daher auch von einer *Zufallsstichprobe*, von der man erwartet, dass sie in gewisser Weise die Grundgesamtheit repräsentiert.

Das bei der Stichprobenuntersuchung interessierende Merkmal kennzeichnen wir durch die *Zufallsvariable*  $X$ . Es folgt dann die Feststellung des Wertes dieser Zufallsvariablen bei einem jeden der  $n$  gezogenen Elemente<sup>1)</sup>. Das Ergebnis einer solchen Stichprobe vom Umfang  $n$  lässt sich dann (in der Reihenfolge der Ziehung) durch die  $n$  *Stichprobenwerte*

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (\text{III-1})$$

ausdrücken. Diese Werte sind sog. *Realisierungen* der Zufallsvariablen  $X$  und werden häufig auch als *Merkmalswerte* bezeichnet.

### Grundgesamtheit und Zufallsstichproben

- (1) Unter einer *Grundgesamtheit* verstehen wir die Gesamtheit *gleichartiger* Objekte oder Elemente, die hinsichtlich eines bestimmten *Merkmals* untersucht werden sollen. Das interessierende Merkmal beschreiben wir dabei durch eine *Zufallsvariable*  $X$ .
- (2) Eine aus der Grundgesamtheit nach dem Zufallsprinzip herausgegriffene *Teilmenge* mit  $n$  Elementen wird als *Zufallsstichprobe* vom Umfang  $n$  bezeichnet<sup>2)</sup>. Die Auswahl der Elemente muss also *wahllos* und *unabhängig voneinander* geschehen, d. h. alle Elemente der Grundgesamtheit müssen dabei grundsätzlich die *gleiche* Chance haben, ausgewählt (gezogen) zu werden. Die beobachteten Merkmalswerte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  der  $n$  Elemente sind *Realisierungen* der Zufallsvariablen  $X$  und heißen *Stichprobenwerte*.
- (3) Aus verschiedenen Gründen (u. a. aus *Zeit-* und *Kostengründen*) ist es in der Praxis meist *nicht* möglich, alle Elemente einer endlichen oder unendlichen Grundgesamtheit auf ein bestimmtes Merkmal  $X$  hin zu untersuchen<sup>3)</sup>. Man beschränkt sich daher auf die Untersuchung einer *Stichprobe* vom Umfang  $n$ , die man der Grundgesamtheit nach dem *Zufallsprinzip* entnommen hat.

Die *Aufgabe* der *mathematischen Statistik* besteht dann u. a. darin, aus einer solchen Zufallsstichprobe mit Hilfe der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* gewisse *Rückschlüsse* auf die Grundgesamtheit zu ermöglichen.

### Anmerkung

In den Anwendungen wird eine Grundgesamtheit als *unendlich* betrachtet, wenn die entnommene Stichprobe nicht mehr als 5 % der Elemente der Grundgesamtheit enthält.

<sup>1)</sup> In Naturwissenschaft und Technik ist das interessierende Merkmal  $X$  meist eine physikalisch-technische Größe, deren Werte aus einer Maßzahl und einer Einheit bestehen (sog. *quantitatives* Merkmal; siehe hierzu das nachfolgende Beispiel (1)). Es gibt aber auch Merkmale *qualitativer* Natur (siehe hierzu das nachfolgende Beispiel (2))).

<sup>2)</sup> Wir werden im Folgenden die meist kürzere Bezeichnung *Stichprobe vom Umfang n* verwenden.

<sup>3)</sup> Wir beschränken uns zunächst auf die Untersuchung *eines* Merkmals.

## ■ Beispiele

- (1) Die Kapazität der Kondensatoren aus einer Serienproduktion ist ein *quantitatives* Merkmal. In unserem einführenden Beispiel war für die Kapazität ein *Sollwert* von  $100 \mu\text{F}$  vorgegeben. Zu *Kontrollzwecken* wurde der Grundgesamtheit (d. h. hier der Tagesproduktion von Kondensatoren) eine *Zufallsstichprobe* vom Umfang  $n = 10$  entnommen, die dabei das folgende Aussehen zeigte:

Ifd. Nr. der Stichprobe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Kapazität (in $\mu\text{F}$ )	99	101	102	102	99	98	100	101	101	102

- (2) Bei der *Funktionsprüfung* seriengleicher Bauelemente interessiert das *qualitative* Merkmal „Das Bauelement ist funktionstüchtig“. Mögliche Ergebnisse („Werte“) einer solchen Prüfung sind dann „ja“ und „nein“. Sie lassen sich auch durch Zahlen *verschlüsseln*, z. B. in der folgenden Weise:

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow \text{ja} & \rightarrow 0 \\ \text{Funktionstüchtigkeit vorhanden} & & \searrow \text{nein} \rightarrow 1 \end{array}$$

■

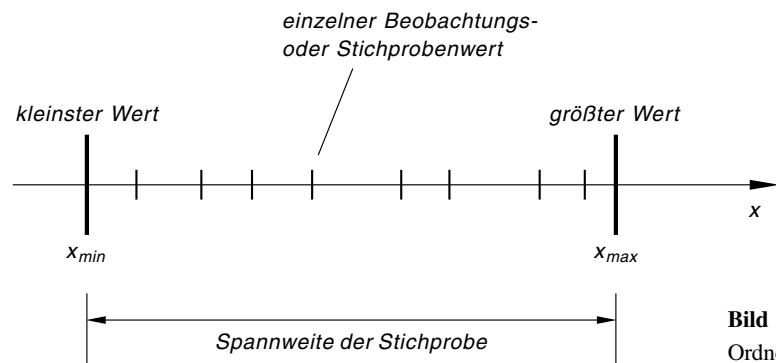
## 1.3 Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe

### 1.3.1 Häufigkeitsfunktion einer Stichprobe

Gegeben sei eine *Stichprobe* vom Umfang  $n$  aus einer (endlichen oder unendlichen) Grundgesamtheit:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (\text{III-2})$$

Die *Beobachtungs-* oder *Stichprobenwerte*  $x_i$  des interessierenden Merkmals haben wir dabei zunächst in der Reihenfolge ihres Auftretens in einer sog. *Urliste* aufgeführt. Wir ordnen nun die Stichprobenwerte nach ihrer *Größe* (Bild III-2):



**Bild III-2**  
Ordnen einer Stichprobe

Der Abstand zwischen dem *kleinsten* und dem *größten* Wert heißt *Spannweite* der Stichprobe<sup>4)</sup>. Im Allgemeinen werden dabei gewisse Stichprobenwerte *mehrmais* auftreten. Dies gilt insbesondere für *umfangreiche* Stichproben. Bei unseren weiteren Überlegungen gehen wir daher von einer Stichprobe vom Umfang  $n$  aus, in der  $k$  verschiedene Werte  $x_1, x_2, \dots, x_k$  auftreten ( $k < n$ ). Wir stellen nun fest, wie oft jeder Stichprobenwert  $x_i$  in der Stichprobe enthalten ist ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Diese positive ganze Zahl heißt *absolute Häufigkeit*  $n_i$  des Stichprobenwertes  $x_i$ . Dabei gilt

$$\sum_{i=1}^k n_i = n_1 + n_2 + \dots + n_k = n \quad (\text{III-3})$$

Die *relative Häufigkeit*  $h_i$  erhält man, indem man die absolute Häufigkeit  $n_i$  durch die Anzahl  $n$  der Stichprobenwerte dividiert:

$$h_i = \frac{n_i}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (\text{III-4})$$

Dabei gelten folgende Beziehungen:

$$0 < h_i \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^k h_i = h_1 + h_2 + \dots + h_k = 1 \quad (\text{III-5})$$

Es gehört somit zu *jedem* Stichprobenwert  $x_i$  genau *ein*  $n_i$  bzw.  $h_i$ . Die Stichprobe kann dann vollständig durch die folgende *Verteilungstabelle* beschrieben werden:

Stichprobenwert $x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\dots$	$x_k$
absolute Häufigkeit $n_i$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$\dots$	$n_k$
relative Häufigkeit $h_i$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	$\dots$	$h_k$

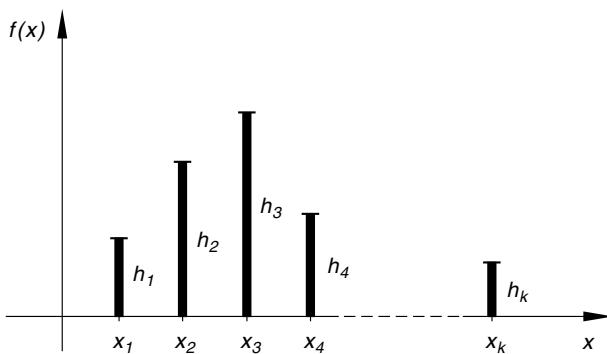
Die *Verteilung* der einzelnen Stichprobenwerte in der Stichprobe lässt sich durch die wie folgt definierte *Häufigkeitsfunktion*  $f(x)$  darstellen:

$$f(x) = \begin{cases} h_i & \text{für } x = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, k) \\ 0 & \text{für alle übrigen } x \end{cases} \quad (\text{III-6})$$

Sie ordnet jedem *Stichprobenwert*  $x_i$  als Funktionswert die *relative Häufigkeit*  $h_i$  zu und allen Werten  $x$ , die *nicht* in der Stichprobe auftreten, den Wert *null*.

Die *Häufigkeitsfunktion*  $f(x)$  lässt sich graphisch in sehr anschaulicher Weise durch ein *Stabdiagramm* darstellen, wobei die Stablänge der relativen Häufigkeit  $h_i$  des einzelnen Stichprobenwertes  $x_i$  entspricht (Bild III-3; die Stabbreite ist dabei *ohne* Bedeutung).

<sup>4)</sup> Die *Spannweite* kann als ein besonders einfaches Maß für die *Streuung* der Stichprobenwerte angesehen werden.

**Bild III-3**

Bildliche Darstellung der Häufigkeitsfunktion  $f(x)$  durch ein Stabdiagramm

Wir fassen die Ergebnisse wie folgt zusammen:

### Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe

Gegeben sei eine *Stichprobe* vom Umfang  $n$  aus einer bestimmten Grundgesamtheit. Zunächst *ordnen* wir die Stichprobenwerte ihrer *Größe* nach und stellen anschließend die *relative Häufigkeit*  $h_i$  der insgesamt  $k$  *verschiedenen* Stichprobenwerte  $x_1, x_2, \dots, x_k$  fest ( $i = 1, 2, \dots, k; k < n$ ).

Die *Häufigkeitsverteilung* dieser Stichprobe lässt sich dann durch die *Häufigkeitsfunktion*

$$f(x) = \begin{cases} h_i & \text{für } x = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, k) \\ 0 & \text{alle übrigen } x \end{cases} \quad (\text{III-7})$$

vollständig beschreiben. Die graphische Darstellung dieser Funktion erfolgt in Form eines *Stabdiagramms* nach Bild III-3.

### ■ Beispiel

Aus der laufenden Tagesproduktion von Gewindeschrauben mit einem *Solldurchmesser* von  $x_0 = 5,0$  mm wurde eine Stichprobe vom Umfang  $n = 25$  entnommen. Dabei ergab sich die folgende *Urliste* (alle Werte in mm):

4,9; 4,8; 5,0; 5,2; 5,2; 5,1; 4,7; 5,0; 5,0; 4,9; 4,8; 4,9; 5,1; 5,0; 5,0;  
5,1; 5,0; 4,9; 4,8; 4,9; 4,9; 5,0; 5,0; 5,1; 5,0

Es treten aber nur 6 *verschiedene* Werte auf. Der Größe nach geordnet lauten diese:

4,7; 4,8; 4,9; 5,0; 5,1; 5,2      (in mm)

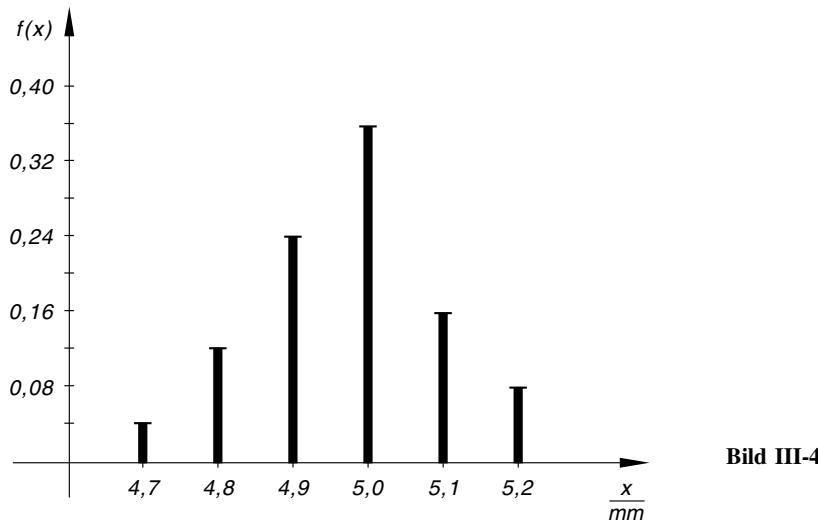
Mit Hilfe einer *Strichliste* bestimmen wir zunächst die *absolute Häufigkeit*  $n_i$  dieser Werte:

Stichprobenwert $x_i$ (in mm)	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2
$n_i$	/	///	## /	## / / /	/// /	//

Daraus erhalten wir dann die folgende *Verteilungstabelle*:

$\frac{x_i}{\text{mm}}$	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2
$n_i$	1	3	6	9	4	2
$h_i$	0,04	0,12	0,24	0,36	0,16	0,08

Bild III-4 zeigt das zugehörige *Stabdiagramm* der Häufigkeitsfunktion  $f(x)$ , deren Werte in der Verteilungstabelle grau unterlegt sind.



### 1.3.2 Verteilungsfunktion einer Stichprobe

Die Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe lässt sich eindeutig und vollständig durch die *Häufigkeitsfunktion*  $f(x)$  oder aber durch die wie folgt definierte *Summenhäufigkeits- oder Verteilungsfunktion*  $F(x)$  beschreiben:

**Definition:** Die Summe der relativen Häufigkeiten aller Stichprobenwerte, die kleiner oder gleich  $x$  sind, heißt *Summenhäufigkeits- oder Verteilungsfunktion*  $F(x)$  der Stichprobe:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \quad (\text{III-8})$$

In der graphischen Abbildung erhalten wir eine sog. *Treppenfunktion*, wie in Bild III-5 dargestellt. Diese *stückweise konstante* Funktion erfährt an der Stelle des Stichprobenwertes  $x_i$  jeweils einen *Sprung* der Höhe  $f(x_i) = h_i$ . Nach dem *letzten* Sprung, der an der Stelle  $x_k$  erfolgt, erreicht die Verteilungsfunktion  $F(x)$  dann den *Endwert* 1.

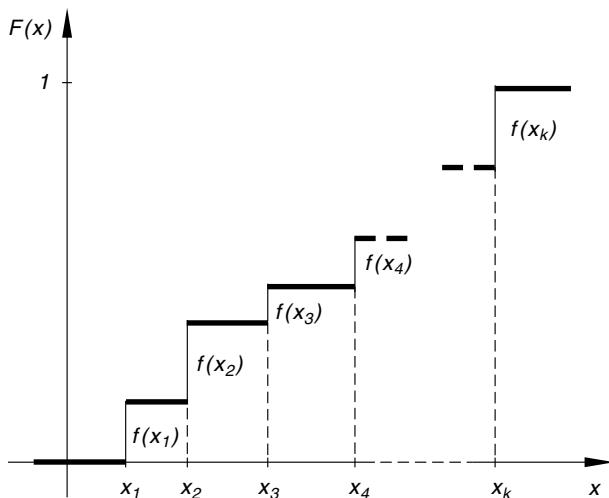


Bild III-5 Summenhäufigkeits- oder Verteilungsfunktion  $F(x)$  („Treppenfunktion“)

## ■ Beispiel

Wir kehren zu dem Beispiel aus dem vorangegangenen Abschnitt zurück. Für den Durchmesser der Gewindeschrauben ergab sich dabei die folgende *Verteilungstabelle (Häufigkeitsfunktion)*:

$\frac{x_i}{\text{mm}}$	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2
$f(x_i)$	0,04	0,12	0,24	0,36	0,16	0,08

Daraus erhalten wir durch *Summenbildung* die zugehörige *Verteilungsfunktion*  $F(x)$  in Form der folgenden Wertetabelle:

$\frac{x_i}{\text{mm}}$	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2
$F(x_i)$	0,04	0,16	0,40	0,76	0,92	1

$F(x)$  springt an den Stellen  $x_1 = 4,7, x_2 = 4,8, x_3 = 4,9, x_4 = 5,0, x_5 = 5,1$  und  $x_6 = 5,2$  der Reihe nach um die Werte 0,04, 0,12, 0,24, 0,36, 0,16 und 0,08 und erreicht dabei nach dem *letzten* Sprung den Endwert 1 (Bild III-6).

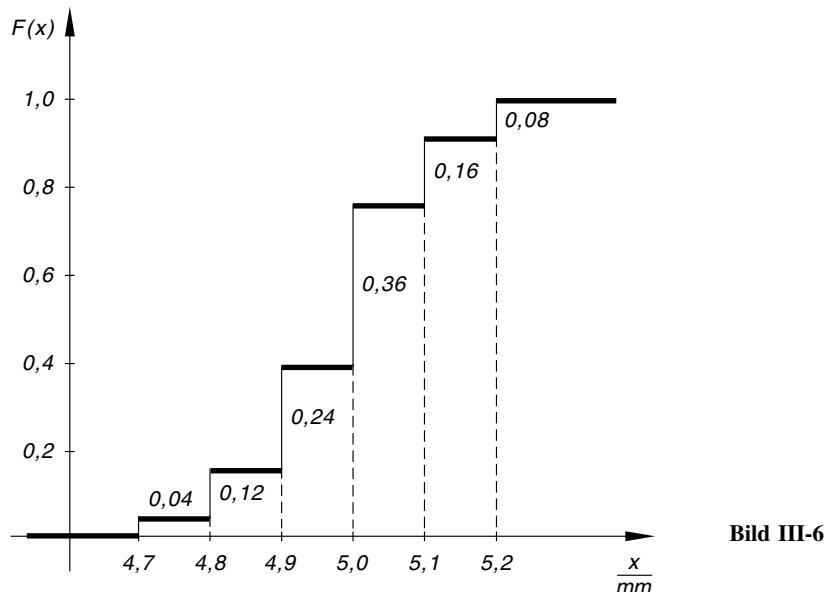
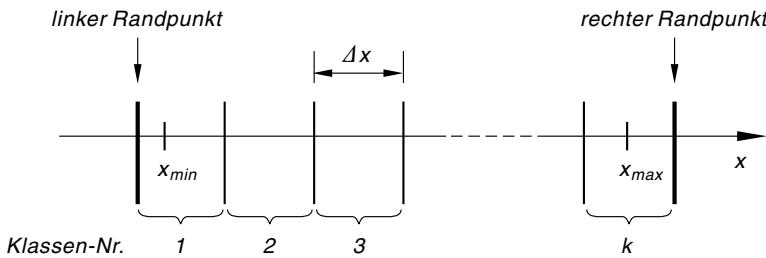


Bild III-6

### 1.3.3 Gruppierung der Stichprobenwerte bei umfangreichen Stichproben (Einteilung in Klassen)

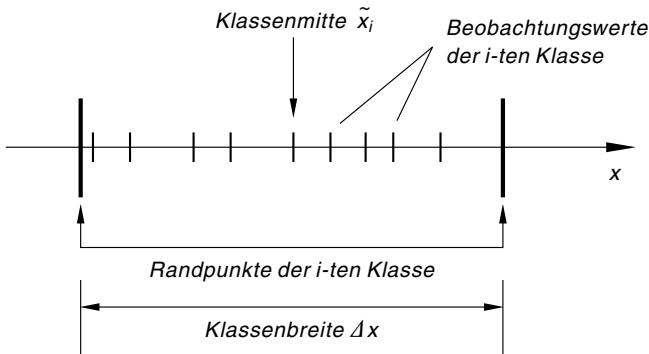
Bei *umfangreichen* Stichproben mit vielen verschiedenen Werten gruppiert man die Stichprobenwerte zweckmäßigerweise in sog. *Klassen*. Zunächst wird die Stichprobe *geordnet* und der *kleinste* und *größte* Wert bestimmt ( $x_{\min}$  bzw.  $x_{\max}$ ). Dann wird das Intervall  $I$  festgelegt, in dem *sämtliche* Stichprobenwerte liegen und dieses schließlich in  $k$  Teilintervalle  $\Delta I_i$  gleicher Breite  $\Delta x$  zerlegt (sog. *Klassen* gleicher Breite, siehe Bild III-7)<sup>5)</sup>.

<sup>5)</sup> Als *Randpunkte* des Intervalls  $I$  können z. B. die Stichprobenwerte  $x_{\min}$  und  $x_{\max}$  gewählt werden. In vielen Fällen ist es jedoch zweckmäßiger, die beiden Randpunkte weiter außen zu wählen, um eine *bessere* Klasseneinteilung zu erzielen (siehe hierzu auch das nachfolgende Beispiel).



**Bild III-7** Einteilung der Stichprobenwerte in Klassen gleicher Breite  $\Delta x$

Die Mitte eines jeden Klassenintervall  $\Delta I_i$  heißt *Klassenmitte*  $\tilde{x}_i$  (Bild III-8):



**Bild III-8**  
Zum Begriff der Klassenmitte

Bei der Klassenbildung sollten dabei die folgenden *Regeln* beachtet werden:

**Allgemeine Regeln für die Gruppierung einer umfangreichen Stichprobe  
(Einteilung der Stichprobenwerte in Klassen)**

- (1) Man wähle möglichst Klassen gleicher Breite  $\Delta x$ .
- (2) Die Klasseneinteilung sollte so gewählt werden, dass die *Klassenmitten* durch möglichst einfache Zahlen (z. B. ganze Zahlen) charakterisiert werden.
- (3) Fällt ein Stichprobenwert in einen der beiden *Randpunkte* einer Klasse, so zählt man ihn je zur *Hälfte* den beiden angrenzenden Klassen zu.
- (4) Bei der Festlegung der *Anzahl*  $k$  der Klassen bei  $n$  Stichprobenwerten verwende man die folgende **Faustregel**:

$$k \approx \sqrt{n} \quad \text{für } 50 < n < 500 \tag{III-9}$$

Bei Stichproben mit einem Umfang  $n > 500$  wähle man höchstens  $k = 30$  Klassen.

*Anmerkung*

Eine weitere häufig empfohlene **Faustregel** für die Klassenanzahl  $k$  lautet:

$$k \leq 5 \cdot \lg n \quad (\text{III-10})$$

Durch *Auszählen* stellen wir nun fest, welche Stichprobenwerte in welche Klassen fallen. Die Anzahl  $n_i$  der Stichprobenwerte, die in der  $i$ -ten Klasse liegen, heißt *absolute Klassenhäufigkeit*. Dividiert man diese durch die Anzahl  $n$  aller Stichprobenwerte, so erhält man die *relative Klassenhäufigkeit*

$$h_i = \frac{n_i}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (\text{III-11})$$

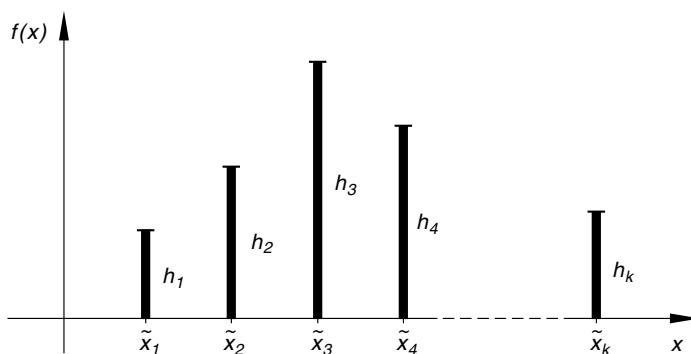
Für die Weiterverarbeitung der Stichprobenwerte wollen wir vereinbaren, dass *allen* Elementen einer Klasse genau die *Klassenmitte* als Wert zugeordnet wird. Wir erhalten damit die folgende *Verteilungstabelle*:

Klassenmitte $\tilde{x}_i$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	...	$\tilde{x}_k$
relative Klassenhäufigkeit $h_i$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	...	$h_k$

Die *Häufigkeitsfunktion*  $f(x)$  einer solchen sog. *gruppierten* Stichprobe beschreibt dann die *relative Klassenhäufigkeit*  $h_i$  in Abhängigkeit von der Klassenmitte  $\tilde{x}_i$ :

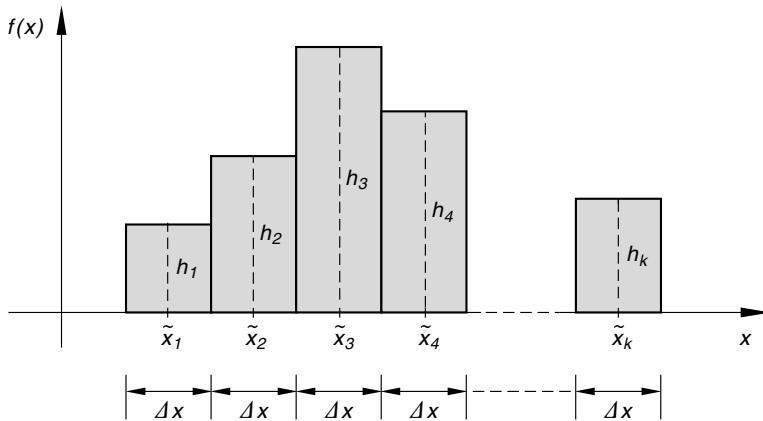
$$f(x) = \begin{cases} h_i & \text{für } x = \tilde{x}_i \quad (i = 1, 2, \dots, k) \\ 0 & \text{alle übrigen } x \end{cases} \quad (\text{III-12})$$

Der Verlauf dieser Funktion lässt sich graphisch durch ein *Stabdiagramm* oder durch ein sog. *Histogramm* verdeutlichen. Beim *Stabdiagramm* trägt man dabei über der Klassenmitte  $\tilde{x}_i$  die *relative Klassenhäufigkeit*  $h_i$  ab (d. h. einen Stab der Länge  $h_i$ ; Bild III-9).



**Bild III-9**  
Stabdiagramm  
einer gruppierten  
Stichprobe

Ein *Histogramm* oder *Staffelbild* entsteht, wenn man über den Klassen gleicher Breite  $\Delta x$  Rechtecke errichtet, deren Höhen den relativen Klassenhäufigkeiten entsprechen. Man erhält dann den in Bild III-10 skizzierten *säulenförmigen* Graph. Die *Flächeninhale* der Rechtecke sind dabei den *relativen Klassenhäufigkeiten proportional*.

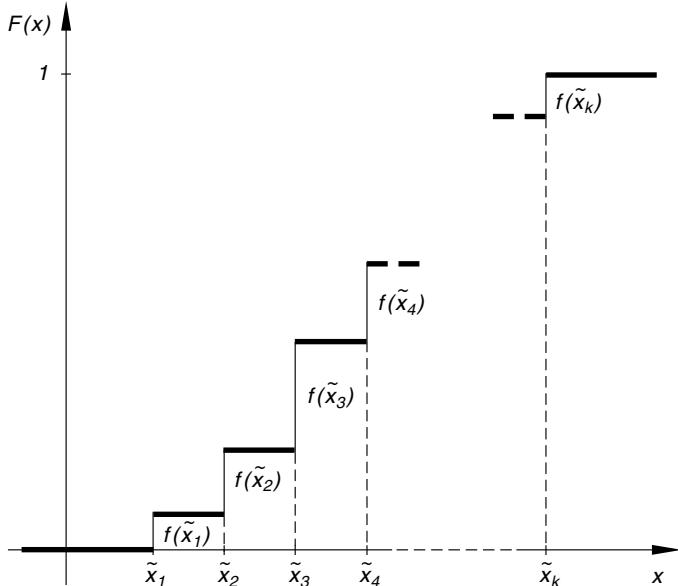


**Bild III-10** Histogramm einer gruppierten Stichprobe mit  $k$  Klassen

Die *Verteilungsfunktion*  $F(x)$  der *gruppierten* Stichprobe ist die *Summe* der relativen Klassenhäufigkeiten aller Klassen, deren Mitten  $\tilde{x}_i$  kleiner *oder gleich*  $x$  sind:

$$F(x) = \sum_{\tilde{x}_i \leq x} f(\tilde{x}_i) \quad (\text{III-13})$$

Bild III-11 zeigt den zugehörigen Funktionsgraph, eine *Treppenfunktion*, die in den Klassenmitten  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k$  der Reihe nach *Sprünge* der Größe  $f(\tilde{x}_1) = h_1, f(\tilde{x}_2) = h_2, \dots, f(\tilde{x}_k) = h_k$  macht.



**Bild III-11** Verteilungsfunktion  $F(x)$  einer gruppierten Stichprobe („Treppenfunktion“)

Wir fassen die wichtigsten Ergebnisse dieses Abschnitts wie folgt zusammen:

### Häufigkeitsverteilung einer gruppierten Stichprobe (d. h. einer in Klassen eingeteilten umfangreichen Stichprobe)

Gegeben sei eine *umfangreiche* Stichprobe aus  $n$  Beobachtungs- oder Stichprobenwerten

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (\text{III-14})$$

Die Stichprobenwerte werden zunächst ihrer Größe nach *geordnet* und dann in  $k$  Klassen möglichst gleicher Breite aufgeteilt, wobei die weiter oben genannten „Allgemeinen Regeln für die Gruppierung einer umfangreichen Stichprobe“ zu beachten sind. Dann erfolgt die Feststellung der *relativen Klassenhäufigkeit*  $h_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Bei der weiteren Verarbeitung der Daten wird jeder in die  $i$ -te Klasse fallende Stichprobenwert näherungsweise durch die *Klassenmitte*  $\tilde{x}_i$  ersetzt.

Die *Häufigkeitsverteilung* dieser sog. *gruppierten* Stichprobe lässt sich dann durch die *Häufigkeitsfunktion*

$$f(x) = \begin{cases} h_i & \text{für } x = \tilde{x}_i \quad (i = 1, 2, \dots, k) \\ 0 & \text{alle übrigen } x \end{cases} \quad (\text{III-15})$$

oder durch die *Verteilungsfunktion* (auch *Summenhäufigkeitsfunktion* oder *empirische Verteilungsfunktion* genannt)

$$F(x) = \sum_{\tilde{x}_i \leq x} f(\tilde{x}_i) \quad (\text{III-16})$$

vollständig beschreiben (summiert wird dabei über alle Klassenmitten  $\tilde{x}_i$ , die kleiner oder gleich  $x$  sind).

Die graphische Darstellung der *Häufigkeitsfunktion*  $f(x)$  erfolgt in Form eines *Stabdiagramms* (Bild III-9) oder eines *Histogramms* (Bild III-10), während der Graph der *Verteilungsfunktion*  $F(x)$  zu einer *Treppenfunktion* führt (Bild III-11).

## ■ Beispiel

Aus der laufenden Serienproduktion von Ohmschen Widerständen mit einem *Sollwert* von  $x_0 = 100 \Omega$  wurde eine Stichprobe vom Umfang  $n = 50$  entnommen. Die Widerstandswerte lagen dabei zwischen  $x_{\min} = 96,7 \Omega$  und  $x_{\max} = 104,2 \Omega$  (Bild III-12). Die *Spannweite* beträgt somit nahezu  $8 \Omega$ . Wir wählen daher zweckmäßigerverweise die *Intervallrandpunkte* bei  $96,5 \Omega$  und  $104,5 \Omega$  und unterteilen dieses Intervall der Länge  $8 \Omega$  in 8 Teilintervalle (Klassen) *gleicher Breite*  $\Delta x = 1 \Omega$ <sup>6)</sup>.

<sup>6)</sup> Die *Faustregeln* (III-9) und (III-10) liefern hier für die Klassenzahl  $k$  die folgenden Werte:

$$k \approx \sqrt{50} \approx 7 \quad \text{bzw.} \quad k \leq 5 \cdot \lg 50 \approx 8$$

Wegen einer Spannweite von nahezu  $8 \Omega$  haben wir uns hier zweckmäßigerverweise für  $k = 8$  Klassen mit einer *ganzzahligen* Klassenbreite von  $1 \Omega$  entschieden.

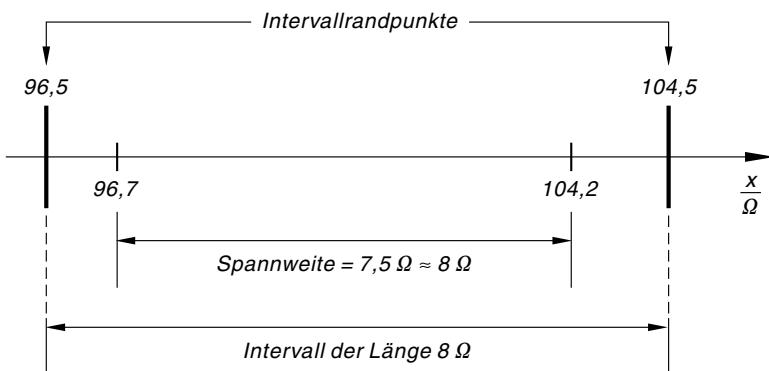


Bild III-12

Für die *Klassenmitten* erhalten wir dann die *ganzzahligen* Werte 97, 98, ..., 104 (alle Werte in  $\Omega$ ). Die hier nicht aufgeführte Urliste führte bei dieser Klasseneinteilung zu der folgenden *Häufigkeitsverteilung*:

Klassen-Nr. $i$	Klassengrenzen (in $\Omega$ )	Klassenmitte $\tilde{x}_i$ (in $\Omega$ )	absolute Klassen- häufigkeit $n_i$	relative Klassen- häufigkeit $h_i$
1	96,5 ... 97,5	97	2	0,04
2	97,5 ... 98,5	98	5	0,10
3	98,5 ... 99,5	99	10	0,20
4	99,5 ... 100,5	100	13	0,26
5	100,5 ... 101,5	101	9	0,18
6	101,5 ... 102,5	102	6	0,12
7	102,5 ... 103,5	103	4	0,08
8	103,5 ... 104,5	104	1	0,02
$\sum$			50	1

Damit erhalten wir das in Bild III-13 dargestellte *Stabdiagramm*.

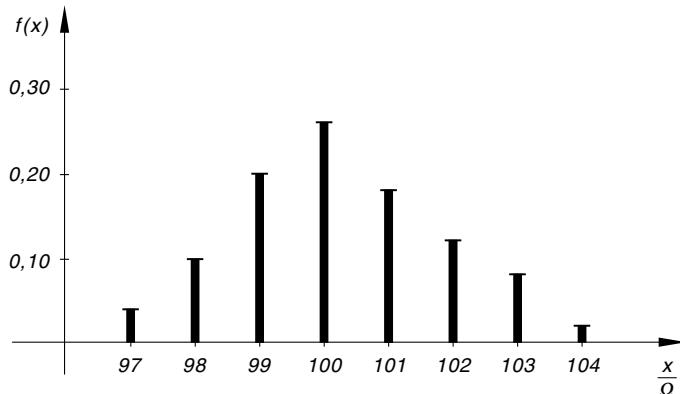


Bild III-13

Im *Histogramm* nach Bild III-14 repräsentiert der Flächeninhalt des  $i$ -ten Rechtecks die *relative Klassenhäufigkeit*  $h_i$  der  $i$ -ten Klasse ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ). So wird z. B. die relative Klassenhäufigkeit  $h_4 = 0,26$  der *vierten* Klasse mit der Klassenmitte  $\tilde{x}_4 = 100 \Omega$  durch die im Bild *dunkelgrau* unterlegte Rechtecksfläche dargestellt.

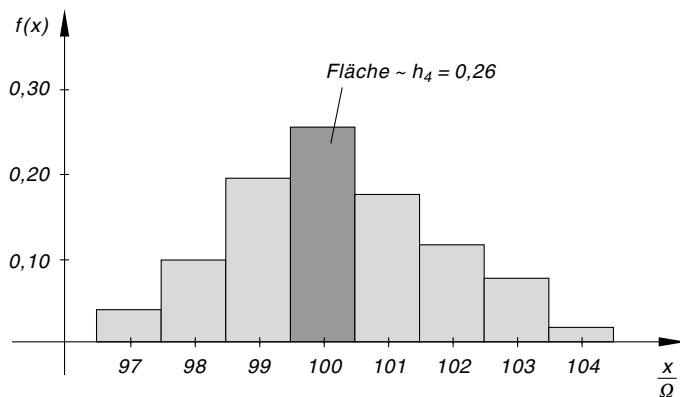


Bild III-14

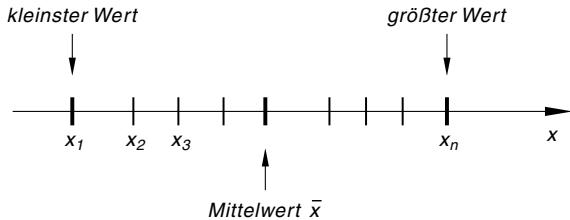
## 2 Kennwerte oder Maßzahlen einer Stichprobe

Wie wir inzwischen wissen, lässt sich eine Stichprobe durch ihre *Häufigkeitsverteilung*, d. h. entweder durch ihre *Häufigkeitsfunktion*  $f(x)$  oder aber durch ihre *Verteilungsfunktion*  $F(x)$  vollständig beschreiben. Daneben besteht die Möglichkeit, die Stichprobe durch bestimmte *statistische Kennwerte* (auch *Maßzahlen* genannt) zu charakterisieren, wenn auch in unvollständiger Weise<sup>7)</sup>. Wir beschränken uns dabei in diesem Abschnitt auf die *wichtigsten* Kennwerte, nämlich auf den *Mittelwert*  $\bar{x}$ , die *Varianz*  $s^2$  und die *Standardabweichung*  $s$ .

<sup>7)</sup> Man spricht in diesem Zusammenhang auch von *empirischen* Kennwerten (im Unterschied zu den Kennwerten einer *Wahrscheinlichkeitsverteilung*).

## 2.1 Mittelwert, Varianz und Standardabweichung einer Stichprobe

Der wohl wichtigste Kennwert einer Stichprobe vom Umfang  $n$  mit den ihrer Größe nach geordneten Stichprobenwerten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ist der *Mittelwert*  $\bar{x}$  (Bild III-15).



**Bild III-15**  
Mittelwert  $\bar{x}$  einer Stichprobe  
 $x_1, x_2, \dots, x_n$

Er kennzeichnet die *Mitte* der Stichprobe, d. h. den *durchschnittlichen* Wert aller  $n$  Stichprobenwerte und ist wie folgt definiert:

**Definition:** Der *Mittelwert*  $\bar{x}$  einer Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vom Umfang  $n$  ist das *arithmetische Mittel* der Stichprobenwerte:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{III-17})$$

### Anmerkungen

- (1) Weitere übliche Bezeichnungen für den Mittelwert  $\bar{x}$  einer Stichprobe sind *Stichprobenmittelwert* oder *empirischer Mittelwert*.
- (2) Der Stichprobenmittelwert  $\bar{x}$  ist ein sog. *Lageparameter*, der die *durchschnittliche* Lage der Stichprobenwerte auf einer Zahlengeraden festlegt. Manchmal (bei naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen jedoch relativ selten) werden auch folgende Lageparameter zur Kennzeichnung der „Stichprobenmitte“ verwendet:
  - a) *Median-* oder *Zentralwert*: Stichprobenwert, der genau in der *Mitte* einer geordneten Stichprobe steht (d. h. links *und* rechts von diesem Wert befinden sich *gleichviele* Stichprobenwerte)
  - b) *Modalwert*: Stichprobenwert, der in der Stichprobe am *häufigsten* vorkommt
- (3) *Physikalische Deutung des Mittelwertes*  $\bar{x}$ :  
Wir betrachten die  $x$ -Achse als einen masselosen Stab und  $x_1, x_2, \dots, x_n$  als Lagenkoordinaten von punktförmigen Massen mit der Einheitsmasse  $m_i = 1$  für  $i = 1, 2, \dots, n$ . Der *Massenmittelpunkt* (*Schwerpunkt*) dieses Massensystems befindet sich dann an der Stelle des Mittelwertes  $\bar{x}$  (siehe Bild III-15).

Da die einzelnen Stichprobenwerte  $x_i$  um ihren Mittelwert  $\bar{x}$  streuen (siehe Bild III-15), benötigen wir noch ein geeignetes *Streuungsmaß*, das in gewisser Weise die Größe der Abweichungen charakterisiert<sup>8)</sup>. Die Summe der Abweichungen  $v_i = x_i - \bar{x}$  der einzelnen Stichprobenwerte vom Mittelwert scheidet dabei als Streuungsmaß aus, da sie stets den Wert null ergibt und somit lediglich zu Kontrollzwecken geeignet ist:

$$\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i}_{n\bar{x}} - n\bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0 \quad (\text{III-18})$$

$n\bar{x}$  (nach Gleichung III-17)

Ein geeignetes Streuungsmaß lässt sich nach *Gauß* aus den *Abweichungsquadraten*  $v_i^2 = (x_i - \bar{x})^2$  wie folgt bilden:

**Definitionen:** (1) Die aus den Abweichungsquadraten  $v_i^2 = (x_i - \bar{x})^2$  gebildete Größe

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1} = \\ = \frac{1}{n - 1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (\text{III-19})$$

heißt *Varianz* der Stichprobe.

(2) Die Quadratwurzel aus der Varianz  $s^2$  heißt *Standardabweichung*  $s$  der Stichprobe.

### Anmerkungen

- (1) Weitere übliche Bezeichnungen für die *Varianz*  $s^2$  einer Stichprobe sind *Stichprobenvarianz* oder auch *empirische Varianz*.
- (2) Beide Kennwerte, sowohl die *Varianz*  $s^2$  als auch die *Standardabweichung*  $s$ , sind ein Maß für die *Streuung* der Stichprobenwerte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  um ihren Mittelwert  $\bar{x}$ . Die Standardabweichung  $s$  hat dabei den Vorteil, dass sie dieselbe Dimension und Einheit besitzt wie die einzelnen Stichprobenwerte und deren Mittelwert  $\bar{x}$ .
- (3) Die Varianz  $s^2$  ist eine Art *mittleres* Abweichungsquadrat. Es gilt stets  $s^2 > 0$  und somit auch  $s > 0$ , sofern nicht alle Stichprobenwerte gleich sind (in diesem Sonderfall ist  $s^2 = 0$  und somit auch  $s = 0$ ).

<sup>8)</sup> Die Angabe des Stichprobenmittelwertes  $\bar{x}$  allein reicht zur Charakterisierung der Häufigkeitsverteilung nicht aus, da empirische Verteilungen mit demselben Mittelwert völlig verschieden aussehen können.

- (4) Es überrascht zunächst, dass bei der Bildung der Varianz die Summe der Abweichungsquadrate nicht (wie eigentlich naheliegend) durch die Anzahl  $n$  der Stichprobenwerte, sondern durch die Zahl  $n - 1$  dividiert wird. Eine ausreichende Begründung ist an dieser Stelle nicht möglich, wir reichen sie aber später nach (siehe hierzu Abschnitt 3.2.4).
- (5) Für *praktische* Berechnungen der Varianz  $s^2$  ist die mit der Definition (III-19) *gleichwertige* Formel

$$s^2 = \frac{1}{n - 1} \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2 \right] \quad (\text{III-20})$$

oft besser geeignet.

## ■ Beispiel

Die Untersuchung des *Wirkungsgrades*  $X$  von 5 seriengleichen Kesseln einer Heizungsanlage eines bestimmten Fabrikats führte zu der folgenden *Urliste*:

92,4; 91,9; 92,0; 91,8; 91,9 (alle Werte in %)

Wir bestimmen *Mittelwert*  $\bar{x}$ , *Varianz*  $s^2$  und *Standardabweichung*  $s$  dieser Stichprobe unter Verwendung der folgenden Tabelle, die wir Schritt für Schritt aufbauen:

$i$	$x_i$ (in %)	$x_i - \bar{x}$ (in %)	$(x_i - \bar{x})^2$ (in % <sup>2</sup> )	$x_i^2$ (in % <sup>2</sup> )
1	92,4	0,4	0,16	8 537,76
2	91,9	- 0,1	0,01	8 445,61
3	92,0	0	0	8 464
4	91,8	- 0,2	0,04	8 427,24
5	91,9	- 0,1	0,01	8 445,61
$\sum$	460	0	0,22	42 320,22

Für den *Mittelwert*  $\bar{x}$  erhalten wir nach der Definitionsformel (III-17) unter Verwendung von Spalte 2:

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{1}{5} \cdot 460 = 92 \quad (\text{in \%})$$

Die Berechnung der *Varianz*  $s^2$  und damit der *Standardabweichung*  $s$  soll zunächst nach der Definitionsformel (III-19) erfolgen unter Verwendung von Spalte 4:

$$s^2 = \frac{1}{5-1} \cdot \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{4} \cdot 0,22 = 0,055 \approx 0,06 \quad (\text{in \%}^2)$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0,055} = 0,235 \approx 0,24 \quad (\text{in \%})$$

Die rechnerisch bequemere Formel (III-20) führt natürlich zum *gleichen* Ergebnis (unter Verwendung von Spalte 5):

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{5-1} \left[ \sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5 \cdot \bar{x}^2 \right] = \frac{1}{4} (42\,320,22 - 5 \cdot 92^2) = \\ &= \frac{1}{4} (42\,320,22 - 42\,320) = \frac{1}{4} \cdot 0,22 = 0,055 \approx 0,06 \quad (\text{in \%}^2) \end{aligned}$$

Der *mittlere* Wirkungsgrad der Heizkessel beträgt somit  $\bar{x} = 92\%$ . *Varianz*  $s^2 \approx 0,06\%^2$  und *Standardabweichung*  $s \approx 0,24\%$  kennzeichnen dabei die *Streuung* der Einzelwerte um diesen Mittelwert. ■

## 2.2 Spezielle Berechnungsformeln für die Kennwerte einer Stichprobe

### 2.2.1 Berechnung der Kennwerte unter Verwendung der Häufigkeitsfunktion

$f(x)$  sei die *Häufigkeitsfunktion* der geordneten Stichprobe vom Umfang  $n$  mit der folgenden *Verteilungstabelle*:

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_k$
$f(x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	...	$f(x_k)$

*Mittelwert*  $\bar{x}$  und *Varianz*  $s^2$  lassen sich dann wie folgt aus dieser Tabelle berechnen:

#### Berechnung des Mittelwertes $\bar{x}$ und der Varianz $s^2$ einer Stichprobe unter Verwendung der Häufigkeitsfunktion

Gegeben sei eine *geordnete* Stichprobe vom Umfang  $n$  mit  $k$  verschiedenen Stichprobenwerten  $x_1, x_2, \dots, x_k$  und der *Häufigkeitsfunktion*  $f(x)$ . *Mittelwert*  $\bar{x}$  und *Varianz*  $s^2$  dieser Stichprobe lassen sich dann wie folgt berechnen:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k x_i \cdot f(x_i) \quad (\text{III-21})$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot f(x_i) \quad (\text{III-22})$$

*Anmerkung*

Für *praktische* Berechnungen der Varianz  $s^2$  ist die *gleichwertige* Formel

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \left[ \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot f(x_i) - \bar{x}^2 \right] \quad (\text{III-23})$$

oft rechnerisch *bequemer*.

### ■ Beispiel

Aus einer Serienfabrikation von Gewindeschrauben wurden *wahllos* 100 Schrauben entnommen und der jeweilige *Durchmesser* bestimmt. Diese Stichprobe vom Umfang  $n = 100$  führte dabei zu der folgenden *Verteilungstabelle*:

$\frac{x_i}{\text{mm}}$	3,50	3,51	3,52	3,53	3,54	3,55	3,56	3,57
$f(x_i)$	0,03	0,08	0,22	0,30	0,18	0,10	0,06	0,03

Wir berechnen den *Mittelwert*  $\bar{x}$ , die *Varianz*  $s^2$  und die *Standardabweichung*  $s$  dieser Stichprobe unter Verwendung der folgenden (schrittweise aufgebauten) Tabelle:

$i$	$\frac{x_i}{\text{mm}}$	$f(x_i)$	$\frac{x_i \cdot f(x_i)}{\text{mm}}$	$\frac{x_i - \bar{x}}{\text{mm}}$	$\frac{(x_i - \bar{x})^2}{10^{-4} \text{ mm}^2}$	$\frac{(x_i - \bar{x})^2}{10^{-4} \text{ mm}^2} \cdot f(x_i)$
1	3,50	0,03	0,1050	-0,0321	10,3041	0,309 123
2	3,51	0,08	0,2808	-0,0221	4,8841	0,390 728
3	3,52	0,22	0,7744	-0,0121	1,4641	0,322 102
4	3,53	0,30	1,0590	-0,0021	0,0441	0,013 230
5	3,54	0,18	0,6372	0,0079	0,6241	0,112 338
6	3,55	0,10	0,3550	0,0179	3,2041	0,320 410
7	3,56	0,06	0,2136	0,0279	7,7841	0,467 046
8	3,57	0,03	0,1071	0,0379	14,3641	0,430 923
$\sum$		1,00	3,5321			2,3659

*Mittelwert* (unter Verwendung von Spalte 4):

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^8 x_i \cdot f(x_i) = 3,5321 \text{ mm} \approx 3,532 \text{ mm}$$

*Varianz* (unter Verwendung der letzten Spalte):

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{100}{100 - 1} \cdot \sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2 \cdot f(x_i) = \frac{100}{99} \cdot 2,3659 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^2 = \\ &= 2,3898 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^2 \approx 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^2\end{aligned}$$

*Standardabweichung*:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2,3898 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^2} = 1,5459 \cdot 10^{-2} \text{ mm} \approx 0,016 \text{ mm}$$

Die Schrauben in der entnommenen Stichprobe besitzen somit einen *mittleren Durchmesser* von  $\bar{x} = 3,532$  mm. Die *Streuung* der Einzelwerte um diesen Mittelwert wird durch die *Standardabweichung*  $s = 0,016$  mm charakterisiert. ■

## 2.2.2 Berechnung der Kennwerte einer gruppierten Stichprobe

$f(x)$  sei die *Klassenhäufigkeitsfunktion* einer in  $k$  Klassen aufgeteilten Stichprobe vom Umfang  $n$  mit der folgenden *Verteilungstabelle*:

$\tilde{x}_i$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\dots$	$\tilde{x}_k$
$f(\tilde{x}_i)$	$f(\tilde{x}_1)$	$f(\tilde{x}_2)$	$f(\tilde{x}_3)$	$\dots$	$f(\tilde{x}_k)$

$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k$  sind dabei die *Klassenmitten*. Es gelten dann die bereits aus dem vorangegangenen Abschnitt bekannten Formeln für den Mittelwert  $\bar{x}$  und die Varianz  $s^2$ , wenn man dort die verschiedenen Stichprobenwerte  $x_1, x_2, \dots, x_k$  durch die *Klassenmitten*  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k$  ersetzt.

### Berechnung des Mittelwertes $\bar{x}$ und der Varianz $s^2$ einer gruppierten Stichprobe unter Verwendung der Klassenhäufigkeitsfunktion

Gegeben sei eine in  $k$  Klassen aufgeteilte Stichprobe vom Umfang  $n$  mit den *Klassenmitten*  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k$  und der zugehörigen *Klassenhäufigkeitsfunktion*  $f(x)$ . Mittelwert  $\bar{x}$  und Varianz  $s^2$  dieser gruppierten Stichprobe lassen sich dann wie folgt berechnen:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i \cdot f(\tilde{x}_i) \tag{III-24}$$

$$s^2 = \frac{n}{n - 1} \cdot \sum_{i=1}^k (\tilde{x}_i - \bar{x})^2 \cdot f(\tilde{x}_i) \tag{III-25}$$

*Anmerkung*

In der *Praxis* verwendet man zur Berechnung der Varianz  $s^2$  meist die rechnerisch *bequemere* (und der Definitionsformel III-25 *gleichwertige*) Formel

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \left[ \sum_{i=1}^k \tilde{x}_i^2 \cdot f(\tilde{x}_i) - \bar{x}^2 \right] \quad (\text{III-26})$$

### ■ Beispiel

Wir kommen nochmals auf das Beispiel in Abschnitt 1.3.3 zurück (Entnahme einer Stichprobe vom Umfang  $n = 50$  aus einer Serienproduktion von ohmschen Widerständen mit dem *Sollwert*  $100 \Omega$ ). Die Stichprobenwerte hatten wir dabei in 8 Klassen der Breite  $\Delta x = 1 \Omega$  mit den *ganzzahligen* Klassenmitten  $97 \Omega, 98 \Omega, \dots, 104 \Omega$  aufgeteilt. Diese Klasseneinteilung führte dann zu der folgenden *Klassenhäufigkeitsfunktion*  $f(x)$  (siehe hierzu auch das in Bild III-13 dargestellte *Stabdiagramm*):

Klassen-Nr. $i$	1	2	3	4	5	6	7	8
Klassenmitte $\tilde{x}_i$ (in $\Omega$ )	97	98	99	100	101	102	103	104
$f(\tilde{x}_i)$	0,04	0,10	0,20	0,26	0,18	0,12	0,08	0,02

Wir bestimmen den Mittelwert  $\bar{x}$ , die *Varianz*  $s^2$  und die *Standardabweichung*  $s$  dieser Stichprobe unter Verwendung der nachfolgenden schrittweise aufgebauten Tabelle:

Klasse Nr. $i$	Klassenmitte $\tilde{x}_i$ (in $\Omega$ )	$f(\tilde{x}_i)$	$\tilde{x}_i \cdot f(\tilde{x}_i)$ (in $\Omega^2$ )	$\tilde{x}_i^2$ (in $\Omega^2$ )	$\tilde{x}_i^2 \cdot f(\tilde{x}_i)$ (in $\Omega^2$ )
1	97	0,04	3,88	9 409	376,36
2	98	0,10	9,80	9 604	960,40
3	99	0,20	19,80	9 801	1 960,20
4	100	0,26	26,00	10 000	2 600,00
5	101	0,18	18,18	10 201	1 836,18
6	102	0,12	12,24	10 404	1 248,48
7	103	0,08	8,24	10 609	848,72
8	104	0,02	2,08	10 816	216,32
$\sum$		1	100,22		10 046,66

*Mittelwert* (unter Verwendung von Spalte 4):

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^8 \tilde{x}_i \cdot f(\tilde{x}_i) = 100,22 \Omega$$

*Varianz* (nach der Formel (III-26) berechnet unter Verwendung der letzten Spalte):

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{50}{50 - 1} \left[ \sum_{i=1}^8 \tilde{x}_i^2 \cdot f(\tilde{x}_i) - \bar{x}^2 \right] = \frac{50}{49} (10\,046,66 \Omega^2 - (100,22 \Omega)^2) = \\ &= 2,6649 \Omega^2 \approx 2,665 \Omega^2\end{aligned}$$

*Standardabweichung*:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{2,6649 \Omega^2} = 1,6325 \Omega \approx 1,633 \Omega$$

Die entnommenen Widerstände besitzen im *Mittel* einen Wert von  $\bar{x} = 100,22 \Omega$ . Die *mittlere Abweichung* der einzelnen Widerstandswerte von diesem Mittelwert wird durch die *Standardabweichung*  $s = 1,633 \Omega$  beschrieben.

■

### 3 Statistische Schätzmethoden für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parameterschätzungen“)

#### 3.1 Aufgaben der Parameterschätzung

Eine Grundgesamtheit, deren Elemente wir hinsichtlich eines bestimmten Merkmals  $X$  betrachten, ist bekanntlich durch die *Verteilungsfunktion*  $F(x)$  der Zufallsvariablen  $X$  *vollständig* charakterisiert. Wir drücken diesen Sachverhalt kurz und knapp wie folgt aus: „Die Grundgesamtheit besitzt die Verteilungsfunktion  $F(x)$ “.

In den Anwendungen aber stellt sich dann häufig das folgende Problem:

Die Verteilungsfunktion  $F(x)$  einer Grundgesamtheit ist zwar vom Typ her bekannt, enthält jedoch noch *unbekannte* Parameter. So hat man es in vielen Fällen mit einer *Normalverteilung* zu tun, deren Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  jedoch noch *unbekannt* sind. Es ergeben sich daraus dann folgende Fragestellungen:

1. Wie erhält man auf der Basis einer konkreten Stichprobe Schätz- oder Näherungswerte für die unbekannten Parameter?
2. Wie genau und wie sicher sind solche Schätzwerte?

Mit der *ersten* Frage werden wir uns in den nachfolgenden Abschnitten 3.2 und 3.3 auseinandersetzen und dabei sehen, wie man unter Verwendung einer konkreten Stichprobe mit Hilfe sog. *Schätzfunktionen* Näherungs- oder Schätzwerte für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung erhalten kann.

Die *zweite* Frage führt uns dann zu den sog. *Konfidenz- oder Vertrauensintervallen*, die wir in Abschnitt 3.4 ausführlich behandeln werden. Dort werden wir zeigen, wie sich durch Stichprobenuntersuchungen *Intervalle* bestimmen lassen, die einen unbekannten Parameter der Verteilung mit einer *vorgegebenen* (großen) Wahrscheinlichkeit überdecken.

Man bezeichnet daher diese auf Stichprobenuntersuchungen beruhenden statistischen Schätzmethoden als *Parameterschätzungen* und unterscheidet dabei noch wie folgt zwischen einer *Punkt-* und einer *Intervallschätzung*:

### Aufgaben der Parameterschätzung

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen  $X$  sei zwar vom *Typ* her bekannt, enthalte jedoch noch *unbekannte* statistische Parameter. So hat man es in den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen häufig mit *Normalverteilungen* zu tun, deren Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  bzw.  $\sigma^2$  jedoch *unbekannt* sind. Zu den *Aufgaben* der Parameterschätzung gehören dann insbesondere:

1. Bestimmung von *Schätz- und Näherungswerten* für die *unbekannten* Parameter der Verteilung unter Verwendung einer konkreten *Stichprobe*, die der betreffenden Grundgesamtheit entnommen wird. Da der Schätzwert eines Parameters in der bildlichen Darstellung einem *Punkt* auf der Zahlengeraden entspricht, nennt man diese Art der Parameterschätzung auch *Punktschätzung*.
2. Konstruktion von sog. *Konfidenz- oder Vertrauensintervallen*, in denen die unbekannten Parameter mit einer *vorgegebenen* Wahrscheinlichkeit vermutet werden. Man spricht daher in diesem Zusammenhang auch von einer *Intervall- oder Bereichsschätzung*.

## 3.2 Schätzfunktionen und Schätzwerte für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Punktschätzungen“)

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit der *Schätzung* von *unbekannten* Mittelwerten, Varianzen, Standardabweichungen und Anteilswerten („Erfolgswahrscheinlichkeiten“ einer Binomialverteilung). Ein Verfahren zur Gewinnung von Schätzfunktionen werden wir dann im nächsten Abschnitt kennenlernen (*Maximum-Likelihood-Methode*). Beginnen wollen wir aber mit einem anschaulichen Beispiel.

### 3.2.1 Ein einführendes Beispiel

Beim *radioaktiven* Zerfall eines bestimmten chemischen Elementes zerfallen die einzelnen Atomkerne auf natürliche Art und Weise *regellos* und *unabhängig voneinander* nach den Gesetzmäßigkeiten der mathematischen Statistik. Die *diskrete* Zufallsvariable

$$X = \text{Anzahl der Atomkerne, die in einem bestimmten Zeitintervall } \Delta t \text{ zerfallen}$$

erweist sich dabei als eine geeignete Größe zur Beschreibung dieses statistischen Vorgangs. Sie genügt einer *Poisson-Verteilung* mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu} \quad (x = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{III-27})$$

Der dabei meist *unbekannte* Parameter  $\mu$  in dieser Verteilung ist der *Erwartungs-* oder *Mittelwert* der Zufallsvariablen  $X$  und gibt an, wieviele Atomkerne *im Mittel* in dem gewählten Zeitintervall  $\Delta t$  zerfallen (siehe hierzu Kap. II, Abschnitt 6.3). In der Praxis stellt sich dann die Aufgabe, diesen Parameter aus einer konkreten Stichprobe zu *schätzen*. Wir gehen dabei wie folgt vor:

In  $n$  aufeinander folgenden Zeitintervallen gleicher Länge  $\Delta t$  messen wir mit einem Zählgerät, wie viele Atomkerne in diesem Zeitraum jeweils zerfallen. Wir erhalten dabei der Reihe nach  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  Zerfälle:

Zeitintervall Nr. $i$	1	2	3	$\dots$	$n$
Anzahl $x_i$ der Atomkerne, die im $i$ -ten Zeitintervall zerfallen sind	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_n$

Es liegt dann nahe, den *arithmetischen Mittelwert*  $\bar{x}$  dieser Stichprobe als *Schätz-* oder *Näherungswert* für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  der Verteilung zu betrachten:

$$\mu \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (\text{III-28})$$

In Abschnitt 3.3.2.2 werden wir dann näher begründen, warum der Stichprobenmittelwert  $\bar{x}$  in der Tat als *Schätzwert* für den Parameter  $\mu$  *geeignet* ist. Der durch die Poisson-Verteilung (III-27) charakterisierte radioaktive Zerfall ist damit durch die Näherung  $\mu \approx \bar{x}$  vollständig und *eindeutig* beschrieben.

### 3.2.2 Schätz- und Stichprobenfunktionen

Für die *Schätzung* der unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung werden spezielle Funktionen benötigt. Sie ermöglichen die *näherungsweise* Berechnung dieser Parameter unter Verwendung einer konkreten *Stichprobe*, die man der entsprechenden Grundgesamtheit entnommen hat. Wir wollen in diesem Abschnitt zunächst am Beispiel des Mittelwertes  $\mu$  einer Verteilung die wichtigen Begriffe einer *Schätz-* und *Stichprobenfunktion* einführen, uns dann den besonderen Eigenschaften dieser Funktionen zuwenden und abschließend Kriterien für „*optimale*“ Schätzfunktionen aufstellen.

### Schätzung des Mittelwertes

Es lässt sich zeigen, dass der *Mittelwert*  $\bar{x}$  einer konkreten Zufallsstichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  als ein geeigneter *Schätz- oder Näherungswert* für den unbekannten *Mittelwert*  $\mu$  der Wahrscheinlichkeitsverteilung der zugehörigen Zufallsvariablen  $X$  betrachtet werden kann<sup>9)</sup>:

$$\mu \approx \hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (\text{III-29})$$

Diesen Schätzwert fassen wir als einen *speziellen* Wert oder eine sog. *Realisierung* der Funktion

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad (\text{III-30})$$

auf.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sind dabei *stochastisch unabhängige* Zufallsvariable, die alle die gleiche Verteilung besitzen wie die Zufallsgröße  $X$  (Mittelwert  $\mu$ , Varianz  $\sigma^2$ ) und  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die *Werte* dieser Zufallsvariablen anhand der entnommenen konkreten Stichprobe. Die von den  $n$  Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  abhängige Funktion  $\bar{X}$  ist dann ebenfalls eine *Zufallsvariable* und wird in diesem Zusammenhang als eine *Schätzfunktion* für den unbekannten *Mittelwert*  $\mu$  der Zufallsvariablen  $X$  bezeichnet.

### Stichprobenfunktionen

Die Zufallsvariable  $\bar{X}$  ist ein *erstes* Beispiel für eine sog. *Stichprobenfunktion*. Darunter versteht man in der mathematischen Statistik ganz allgemein eine *Funktion* (Zufallsvariable), die von  $n$  *unabhängigen* Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  abhängt, die alle der gleichen Verteilungsfunktion  $F(x)$  genügen. Die *unabhängigen* Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  können dabei auch als die *Komponenten* einer *n-dimensionalen* Zufallsgröße

$$(X_1; X_2; \dots; X_n) \quad (\text{III-31})$$

die häufig auch als *Zufallsvektor*  $\vec{X}$  bezeichnet wird, aufgefasst werden. Sie beschreibt (in sehr abstrakter Weise) eine sog. *mathematische Stichprobe*. Eine Stichprobenuntersuchung führt dann stets zu einer *konkreten* Stichprobe mit den Stichprobenwerten  $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ , die wir als eine *Realisierung* der *n-dimensionalen* Zufallsgröße  $(X_1; X_2; \dots; X_n)$  interpretieren:

$$\begin{array}{ll} n\text{-dimensionale Zufallsgröße &} (X_1; X_2; \dots; X_n) \\ & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \text{konkrete Stichprobe} & (x_1; x_2; \dots; x_n) \end{array}$$

In den nachfolgenden Abschnitten werden wir noch weitere Stichprobenfunktionen kennenlernen.

<sup>9)</sup> Schätzwerte kennzeichnen wir durch ein „Dach“. Beispiel:  $\hat{\mu}$  ist ein *Schätzwert* für den Parameter (Mittelwert)  $\mu$ .

### Besondere Eigenschaften der Schätzfunktion $\bar{X}$

Wir kehren nun zu der Stichprobenfunktion  $\bar{X}$ , der *Schätzfunktion* für den *Mittelwert*  $\mu$ , zurück. Für *verschiedene* Stichproben erhalten wir im Allgemeinen *verschiedene* Stichprobenmittelwerte  $\bar{x}$  und damit auch *verschiedene* Schätzwerte  $\hat{\mu}$  für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  der Grundgesamtheit<sup>10)</sup>. Unsere Schätzfunktion  $\bar{X}$  besitzt dabei drei besonders wünschenswerte Eigenschaften, die uns z. T. bereits aus Kapitel II, Abschnitt 7.5.4 (1. Beispiel) bekannt sind:

- (1) Die Schätzfunktion  $\bar{X}$  besitzt den *Erwartungswert*  $\mu$ :

$$E(\bar{X}) = \mu \quad (\text{III-32})$$

Eine Schätzfunktion mit dieser Eigenschaft heißt *erwartungstreue*.  $\bar{X}$  ist somit eine *erwartungstreue* Schätzfunktion für den unbekannten *Mittelwert*  $\mu$  der Grundgesamtheit.

- (2) Für die *Varianz*  $\text{Var}(\bar{X})$  gilt bekanntlich:

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (\text{III-33})$$

Dies aber bedeutet, dass die *Varianz* der Schätzfunktion  $\bar{X}$  mit *zunehmendem* Stichprobenumfang  $n$  *abnimmt* und für  $n \rightarrow \infty$  gegen *null* strebt. Mit anderen Worten: *Die Werte der Zufallsvariablen  $\bar{X}$  streuen mit zunehmendem  $n$  immer geringer um den (unbekannten) Mittelwert  $\mu$ .* Die Schätzfunktion  $\bar{X}$  ist – wie man sagt – *passend* oder *konsistent*. Damit bringt man ganz allgemein zum Ausdruck, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Werte einer Schätzfunktion *beliebig wenig* von dem zu schätzenden (unbekannten) Parameter der Grundgesamtheit unterscheiden, für  $n \rightarrow \infty$  gegen den Wert 1 konvergiert.

- (3) Unsere Schätzfunktion  $\bar{X}$  ist aber nur *eine* von *mehreren* möglichen *erwartungstreuen* Schätzfunktionen für den Mittelwert  $\mu$ . Es lässt sich jedoch zeigen, dass es bei *gleichem* Stichprobenumfang  $n$  *keine* andere erwartungstreue Schätzfunktion für den Parameter  $\mu$  mit einer *kleineren* Varianz gibt. Die Schätzfunktion  $\bar{X}$  heißt daher *wirksam* oder *effizient*.

### Kriterien für eine „optimale“ Schätzfunktion

Die Schätzung eines unbekannten Parameters  $\vartheta$  erfolgt also mit Hilfe einer geeigneten *Stichprobenfunktion*

$$\Theta = g(X_1; X_2; \dots; X_n) \quad (\text{III-34})$$

die in diesem Zusammenhang als *Schätzfunktion* für den Parameter  $\vartheta$  bezeichnet wird.

<sup>10)</sup> Der *Mittelwert*  $\bar{x}$  einer Stichprobe ist eine *Funktion* der  $n$  unabhängigen Stichprobenwerte  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Eine solche Schätzfunktion wird als „optimal“ betrachtet, wenn sie die folgenden Kriterien erfüllt:

### Kriterien für eine „optimale“ Schätzfunktion eines unbekannten statistischen Parameters

Schätzfunktionen für einen unbekannten statistischen Parameter  $\vartheta$  sind spezielle Stichprobenfunktionen vom Typ

$$\Theta = g(X_1; X_2; \dots; X_n) \quad (\text{III-35})$$

die für jede konkrete Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  einen Schätzwert

$$\hat{\vartheta} = g(x_1; x_2; \dots; x_n) \quad (\text{III-36})$$

für den Parameter  $\vartheta$  liefern. Dabei sind  $X_1, X_2, \dots, X_n$  unabhängige Zufallsvariable, die alle die gleiche Verteilungsfunktion  $F(x)$  besitzen.

Eine Schätzfunktion  $\Theta$  wird dann als „optimal“ angesehen, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Die Schätzfunktion  $\Theta$  ist *erwartungstreu*, d. h. ihr Erwartungswert ist gleich dem zu schätzenden Parameter  $\vartheta$ :

$$E(\Theta) = \vartheta \quad (\text{III-37})$$

2. Die Schätzfunktion  $\Theta$  ist *konsistent* oder *passend*, d. h.  $\Theta$  konvergiert mit zunehmendem Stichprobenumfang  $n$  gegen den Parameter  $\vartheta$ .
3. Die Schätzfunktion  $\Theta$  ist *effizient* oder *wirksam*, d. h. es gibt bei *gleichem* Stichprobenumfang  $n$  *keine* andere erwartungstreue Schätzfunktion mit einer *kleineren* Varianz.

#### Anmerkung

Ein Musterbeispiel für eine „optimale“ Schätzfunktion liefert die durch Gleichung (III-30) definierte Schätzfunktion  $\bar{X}$  für den *Mittelwert*  $\mu$ .

### 3.2.3 Schätzungen für den Mittelwert $\mu$

Wie wir aus dem vorherigen Abschnitt bereits wissen, liefert der *arithmetische Mittelwert*  $\bar{x}$  einer Zufallsstichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  einen geeigneten *Schätz-* oder *Näherungswert*  $\hat{\mu}$  für den unbekannten *Mittelwert*  $\mu$  der Wahrscheinlichkeitsverteilung der zugehörigen Zufallsvariablen  $X$ :

$$\mu \approx \hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (\text{III-38})$$

Die zugehörige *Schätzfunktion* ist die Stichprobenfunktion

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad (\text{III-39})$$

die zu jeder konkreten Stichprobe einen „optimalen“ Schätzwert für den Mittelwert  $\mu$  liefert. „Optimal“ bedeutet in diesem Zusammenhang, dass diese Schätzfunktion unter allen möglichen Schätzfunktionen den jeweils „besten“ Näherungswert für  $\mu$  bringt. Wir werden später diese wichtige Schätzfunktion für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  einer Verteilung mit Hilfe der *Maximum-Likelihood-Methode* herleiten (Abschnitt 3.3.2.3).

### 3.2.4 Schätzungen für die Varianz $\sigma^2$

Die Varianz  $s^2$  einer Zufallsstichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  liefert einen geeigneten *Schätz- oder Näherungswert*  $\hat{\sigma}^2$  für die unbekannte Varianz  $\sigma^2$  der Wahrscheinlichkeitsverteilung der zugehörigen Zufallsvariablen  $X$ :

$$\sigma^2 \approx \hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (\text{III-40})$$

Die zugehörige *Schätzfunktion* ist die Stichprobenfunktion

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (\text{III-41})$$

Sie ist (ebenso wie  $\bar{X}$ ) *erwartungstreu*, d. h. es gilt für den Erwartungswert:

$$E(S^2) = \sigma^2 \quad (\text{III-42})$$

Genau diese wichtige Eigenschaft der *Erwartungstreue* ist der Grund dafür, dass in der Definitionsgleichung für die *Varianz*  $s^2$  einer *Stichprobe* die Summe der Abweichungsquadrat *nicht* (wie naheliegend) durch die Anzahl  $n$  der Stichprobenwerte geteilt wird, sondern durch die Zahl  $n-1$  (siehe hierzu Abschnitt 2.1). Vereinzelt wird auch die Stichprobenfunktion

$$S^{*2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (\text{III-43})$$

als *Schätzfunktion* für die unbekannte *Varianz*  $\sigma^2$  verwendet<sup>11)</sup>. Sie hat jedoch den Nachteil, dass sie *nicht* erwartungstreu ist.

---

<sup>11)</sup> Diese Schätzfunktion erhält man, wenn man die *Maximum-Likelihood-Methode* auf eine normalverteilte Grundgesamtheit anwendet (siehe hierzu nähere Einzelheiten in Abschnitt 3.3.2.3).

Als Schätzfunktion für die *Standardabweichung*  $\sigma$  der Grundgesamtheit verwendet man die Stichprobenfunktion  $S = \sqrt{S^2}$ , d. h. die Quadratwurzel aus der Stichprobenvarianz  $S^2$ . Diese Funktion ist jedoch *nicht erwartungstreu*.

### 3.2.5 Schätzungen für einen Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomialverteilung)

Bei einem *Bernoulli-Experiment* trete das Ereignis  $A$  mit der *unbekannten* Wahrscheinlichkeit  $p$  ein, das *komplementäre* Ereignis  $\bar{A}$  somit mit der Wahrscheinlichkeit  $q = 1 - p$ . Der Parameter  $p$ , auch *Anteilswert* oder *Erfolgswahrscheinlichkeit* genannt, lässt sich dann anhand einer Stichprobe vom Umfang  $n$  wie folgt schätzen:

Das *Bernoulli-Experiment* wird insgesamt  $n$ -mal durchgeführt und dabei die Anzahl  $k$  der *Erfolge* festgestellt<sup>12)</sup>. Dann ist die *relative Häufigkeit*  $h(A) = k/n$ , mit der das Ereignis  $A$  („Erfolg“) eingetreten ist, ein *Schätz- oder Näherungswert*  $\hat{p}$  für den *unbekannten* Parameter  $p$  der *binomialverteilten* Grundgesamtheit, der diese Stichprobe entnommen wurde:

$$p \approx \hat{p} = h(A) = \frac{k}{n} \quad (\text{III-44})$$

Die zugehörige *Schätzfunktion* ist

$$\hat{P} = \frac{X}{n} \quad (\text{III-45})$$

wobei durch die Zufallsvariable  $X$  die Anzahl der „Erfolge“ bei einer  $n$ -fachen Ausführung des *Bernoulli-Experiments* beschrieben wird.

Die Zufallsvariable  $X$  genügt bekanntlich einer *Binomialverteilung* mit dem *Erwartungs- oder Mittelwert*  $E(X) = \mu = np$  und der *Varianz*  $\text{Var}(X) = \sigma^2 = np(1 - p)$  (siehe hierzu Kapitel II, Abschnitt 6.1). Die *Schätzfunktion*  $\hat{P} = X/n$  für den *Anteilswert*  $p$  ist dann ebenfalls *binomialverteilt* mit dem *Erwartungs- oder Mittelwert*  $E(\hat{P}) = p$  und der Varianz  $\text{Var}(\hat{P}) = p(1 - p)/n$ .

### 3.2.6 Tabellarische Zusammenstellung der wichtigsten Schätzfunktionen und ihrer Schätzwerte

Tabelle 1 gibt einen Überblick über die *Schätzfunktionen* und die zugehörigen, aus einer *konkreten* Zufallsstichprobe gewonnenen *Schätzwerte* für die wichtigsten statistischen Parameter und Kennwerte einer beliebigen Grundgesamtheit:

---

<sup>12)</sup> Das Eintreten des Ereignisses  $A$  werten wir als *Erfolg*, das Nichteintreten von  $A$  (und somit das Eintreten des *komplementären* Ereignisses  $\bar{A}$ ) als *Misserfolg*.

**Tabelle 1:** Schätzfunktionen und zugehörige Schätzwerte für die wichtigsten statistischen Parameter und Kennwerte einer beliebigen Grundgesamtheit

Unbekannter Parameter	Schätzfunktion für den unbekannten Parameter	Schätzwert für den unbekannten Parameter (aus einer konkreten Stichprobe ermittelt)
Erwartungs- oder Mittelwert $E(X) = \mu$	$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i$	Mittelwert der konkreten Stichprobe $x_1, x_2, \dots, x_n$ : $\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$
Varianz $\text{Var}(X) = \sigma^2$	$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$	Varianz der konkreten Stichprobe $x_1, x_2, \dots, x_n$ : $\hat{s}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
Anteilswert $p$ für das Ereignis $A$ („Erfolg“) bei einem Bernoulli-Experiment (Parameter $p$ einer Binomialverteilung)	$\hat{P} = \frac{X}{n}$  $X = \text{Anzahl der „Erfolge“ bei } n\text{-facher Ausführung des Bernoulli-Experiments}$	Relative Häufigkeit für das Ereignis $A$ („Erfolg“) bei $n$ -facher Ausführung des Bernoulli-Experiments: $\hat{p} = h(A) = \frac{k}{n}$ $k$ : Anzahl der Erfolge

#### Anmerkungen zur Tabelle 1

- (1) Die Schätzfunktionen  $\bar{X}$ ,  $S^2$  und  $\hat{P}$  sind *erwartungstreu* und *konsistent*,  $\bar{X}$  und  $\hat{P}$  auch *effizient*.
- (2) Die Zufallsvariablen  $X_i$  genügen alle der *gleichen* Verteilung (Mittelwert  $\mu$ , Varianz  $\sigma^2$ ). Sind sie außerdem noch alle *normalverteilt*, so ist auch die Schätzfunktion  $\bar{X}$  eine *normalverteilte* Zufallsgröße mit dem Erwartungs- oder Mittelwert  $E(\bar{X}) = \mu$  und der Varianz  $\text{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$ .
- (3) Bei *beliebig* verteilten Zufallsvariablen  $X_i$  mit  $E(X_i) = \mu$  und  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$  folgt aus dem *Zentralen Grenzwertsatz* der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Kap. II, Abschnitt 7.6.1), dass die Schätzfunktion  $\bar{X}$  *näherungsweise normalverteilt* ist mit dem Mittelwert  $E(\bar{X}) = \mu$  und der Varianz  $\text{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$ .
- (4) Die *binomialverteilte* Zufallsvariable  $\hat{P}$  ist bei *umfangreichen* Stichproben *näherungsweise normalverteilt* mit dem Mittelwert  $E(\hat{P}) = p$  und der Varianz  $\text{Var}(\hat{P}) = p(1-p)/n$ . Diese Aussage folgt aus dem *Grenzwertsatz von Moivre und Laplace* (Kap. II, Abschnitt 7.6.3).

- (5) Die Stichprobenfunktion  $S = \sqrt{S^2}$  ist eine *Schätzfunktion* für die *Standardabweichung*  $\sigma$  der Grundgesamtheit. Sie ist jedoch *nicht* erwartungstreu, d. h. es gilt:

$$E(S) \neq \sigma \quad (\text{III-46})$$

Tabelle 2 enthält eine Zusammenstellung der Schätzwerte für die Parameter *spezieller* Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die in den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen eine besondere Rolle spielen:

**Tabelle 2:** Schätzwerte für die Parameter spezieller Wahrscheinlichkeitsverteilungen, ermittelt aus einer konkreten Stichprobe

Verteilung <sup>13)</sup>	Schätzwert für ...	Bemerkungen
<b>Binomialverteilung</b> $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ ( $x = 0, 1, \dots, n$ )	Parameter $p$ : $\hat{p} = \frac{k}{n}$	$k$ : Anzahl der „Erfolge“ bei einer $n$ -fachen Ausführung des Bernoulli-Experiments
<b>Poisson-Verteilung</b> $f(x) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu}$ ( $x = 0, 1, 2, \dots$ )	Mittelwert $\mu$ : $\hat{\mu} = \bar{x}$	$\bar{x}$ : Mittelwert der Stichprobe
<b>Exponentialverteilung</b> $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$ ( $x \geq 0$ )	Parameter $\lambda$ : $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$	$\bar{x}$ : Mittelwert der Stichprobe
<b>Gaußsche Normalverteilung</b> $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ ( $-\infty < x < \infty$ )	a) Mittelwert $\mu$ : $\hat{\mu} = \bar{x}$ b) Varianz $\sigma^2$ : $\hat{\sigma}^2 = s^2$	$\bar{x}$ : Mittelwert der Stichprobe $s^2$ : Varianz der Stichprobe

#### Anmerkung zur Tabelle 2

Die Herleitung der angegebenen Formeln zur Berechnung der Schätzwerte erfolgt exemplarisch im nächsten Abschnitt mit Hilfe der sog. *Maximum-Likelihood-Methode*.

<sup>13)</sup> Es ist die jeweilige Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion  $f(x)$  angegeben.

## ■ Beispiele

- (1) Die *Lebensdauer*  $T$  eines bestimmten elektronischen Bauelements genüge einer *Exponentialverteilung* mit dem *unbekannten* Parameter  $\lambda$ . Wir ermitteln einen *Schätzwert*  $\hat{\lambda}$  für diesen Parameter anhand der folgenden Stichprobe (8 Elemente wurden *zufällig* entnommen und die jeweilige Lebensdauer  $t_i$  in Stunden (h) bestimmt):

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{t_i}{\text{h}}$	950	980	1150	770	1230	1210	990	1120

Die Stichprobe ergibt den *Mittelwert*

$$\begin{aligned}\bar{t} &= \frac{1}{8} \cdot \sum_{i=1}^8 t_i = \\ &= \frac{1}{8} (950 + 980 + 1150 + 770 + 1230 + 1210 + 990 + 1120) \text{ h} = \\ &= 1050 \text{ h}\end{aligned}$$

Somit ist

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{1}{1050 \text{ h}} = \frac{1}{1050} \text{ h}^{-1} \approx 0,00095 \text{ h}^{-1}$$

ein *Schätzwert* für den unbekannten Parameter  $\lambda$  der zugrunde gelegten Exponentialverteilung. Die *mittlere* Lebensdauer der elektronischen Bauelemente beträgt daher *näherungsweise*  $E(T) \approx \bar{t} = 1050$  h.

- (2) Es soll der *Ausschussanteil*  $p$  einer Serienproduktion von Glühbirnen mittels einer Stichprobenuntersuchung *geschätzt* werden. Aus diesem Grund wurde eine Stichprobe von  $n = 300$  Stück entnommen, wobei sich  $k = 6$  Glühbirnen als *defekt* erwiesen. Somit ist

$$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{6}{300} = \frac{2}{100} = 0,02 = 2\%$$

ein *Schätzwert* für den (unbekannten) Ausschussanteil  $p$  in der Gesamtproduktion.

■

## 3.3 Ein Verfahren zur Gewinnung von Schätzfunktionen

Es gibt eine Reihe von Verfahren zur Gewinnung von *Schätzfunktionen* für die *unbekannten* Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung. Das wohl bedeutendste Verfahren ist die sog. *Maximum-Likelihood-Methode*, mit der wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen werden.

### 3.3.1 Maximum-Likelihood-Methode

Wir gehen zunächst von den folgenden Überlegungen aus:

$X$  sei eine *diskrete* Zufallsvariable, deren Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$  noch einen unbekannten Parameter  $\vartheta$  enthalte, der aus einer *Zufallsstichprobe* mit  $n$  voneinander unabhängigen Stichprobenwerten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  geschätzt werden soll. Die Zufallsvariable  $X$  nimmt dabei die einzelnen Stichprobenwerte mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten an:

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$P(X = x_i) = f(x_i)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_n)$

Wegen der *Unabhängigkeit* der Stichprobenwerte ist nach dem *Multiplikationssatz* der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Kapitel II, Abschnitt 3.5 bzw. 3.6) die *Wahrscheinlichkeit* dafür, eine Stichprobe zu erhalten, die gerade die speziellen Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  enthält, durch das *Produkt*

$$L = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n) \quad (\text{III-47})$$

gegeben. Diese Funktion hängt somit von den  $n$  Variablen (Stichprobenwerten)  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ab, zusätzlich aber auch noch von dem unbekannten Parameter  $\vartheta$  der Wahrscheinlichkeitsfunktion  $f(x)$ <sup>14)</sup>. Für eine *vorgegebene* konkrete Stichprobe (d. h. für *feste* Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) kann daher  $L$  als eine nur vom Parameter  $\vartheta$  abhängige Funktion betrachtet werden. Man bezeichnet diese Funktion als *Likelihood-Funktion* und schreibt dafür symbolisch

$$L = L(\vartheta) = f(x_1; \vartheta) \cdot f(x_2; \vartheta) \cdot \dots \cdot f(x_n; \vartheta) \quad (\text{III-48})$$

Der Parameter  $\vartheta$  wird nun so bestimmt, dass diese Funktion einen *möglichst großen* Wert annimmt. Wir unterstellen somit, dass die vorgegebene Stichprobe unter allen denkbaren (möglichen) Stichproben mit der *größten* Wahrscheinlichkeit auftritt. Man erhält auf diese Weise einen *Schätzwert*  $\hat{\vartheta}$  für den unbekannten Parameter  $\vartheta$ . Er lässt sich leicht aus der für ein (relatives) Maximum *notwendigen* Bedingung

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0 \quad (\text{III-49})$$

ermitteln und ist dabei durch die  $n$  Stichprobenwerte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  eindeutig bestimmt<sup>15)</sup>.

Im Falle einer *stetigen* Zufallsvariablen  $X$  muss die *Likelihood-Funktion* (III-48) mit der entsprechenden *Dichtefunktion*  $f(x; \vartheta)$  gebildet werden, die dann ebenfalls noch von einem unbekannten Parameter  $\vartheta$  abhängt.

<sup>14)</sup> Der Wert der Wahrscheinlichkeitsfunktion hängt formal von  $x$  und  $\vartheta$  ab. Wir schreiben daher ab sofort  $f(x; \vartheta)$  anstatt von  $f(x)$ .

<sup>15)</sup> Die *Likelihood-Funktion*  $L = L(\vartheta)$  hängt (formal betrachtet) auch noch von den  $n$  Stichprobenwerten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ab, die jedoch bei der Bildung der Ableitung als *feste* Größen angesehen werden. Wir schreiben daher die Ableitung von  $L$  nach dem Parameter  $\vartheta$  als *partielle* Ableitung.

Wir fassen diese Ergebnisse wie folgt zusammen:

### Maximum-Likelihood-Methode zur Gewinnung von Schätzfunktionen für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

$X$  sei eine Zufallsvariable, deren Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion  $f(x; \vartheta)$  noch einen unbekannten Parameter  $\vartheta$  enthalte. Für diesen Parameter lässt sich dann unter Verwendung einer Stichprobe vom Umfang  $n$  mit den Stichprobenwerten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  wie folgt ein Schätz- oder Näherungswert  $\hat{\vartheta}$  bestimmen:

1. Zunächst wird die Likelihood-Funktion aufgestellt:

$$L = L(\vartheta) = f(x_1; \vartheta) \cdot f(x_2; \vartheta) \cdot \dots \cdot f(x_n; \vartheta) \quad (\text{III-50})$$

Sie ist (bei fest vorgegebenen Werten  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) eine reine Funktion des noch unbekannten Parameters  $\vartheta$ , d. h.  $L = L(\vartheta)$ .

2. Als Schätzwert  $\hat{\vartheta}$  für den Parameter  $\vartheta$  betrachten wir denjenigen Wert, für den die Likelihood-Funktion  $L(\vartheta)$  ihr Maximum annimmt. Der Schätzwert  $\hat{\vartheta}$  wird somit aus der für ein Maximum notwendigen Bedingung

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0 \quad (\text{III-51})$$

ermittelt. Er ist noch von den  $n$  Stichprobenwerten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  abhängig, d. h. eine Funktion

$$\hat{\vartheta} = g(x_1; x_2; \dots; x_n) \quad (\text{III-52})$$

Die zugehörige Schätzfunktion

$$\Theta = g(X_1; X_2; \dots; X_n) \quad (\text{III-53})$$

heißt Maximum-Likelihood-Schätzfunktion für den unbekannten Parameter  $\vartheta$

#### Anmerkungen

- (1) Wir verweisen nochmals (um Missverständnisse und Verwechslungen zu vermeiden) auf die unterschiedliche Bedeutung der folgenden Symbole:
  - $\vartheta$ : Unbekannter Parameter
  - $\hat{\vartheta}$ : Schätzwert für den unbekannten Parameter  $\vartheta$
  - $\Theta$ : Schätzfunktion (Stichprobenfunktion) für den unbekannten Parameter  $\vartheta$ , die für jede konkrete Stichprobe einen Schätzwert  $\hat{\vartheta}$  liefert
- (2) Man beachte die Bedeutung der Faktoren  $f(x_i; \vartheta)$  in der Likelihood-Funktion (III-50):
  - $f(x; \vartheta)$  ↗ Wahrscheinlichkeitsfunktion bei einer diskreten Zufallsvariablen  $X$
  - $f(x; \vartheta)$  ↘ Dichtefunktion bei einer stetigen Zufallsvariablen  $X$

- (3) Enthält die Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion *mehrere* unbekannte Parameter  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_r$ , so hängt auch die zugehörige *Likelihood-Funktion* noch von diesen Parametern ab:

$$L = L(\vartheta_1; \vartheta_2; \dots; \vartheta_r) \quad (\text{III-54})$$

Die *Schätzwerte*  $\hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2, \dots, \hat{\vartheta}_r$  für die Parameter werden dann aus den für ein Maximum *notwendigen* Bedingungen

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \vartheta_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial L}{\partial \vartheta_r} = 0 \quad (\text{III-55})$$

ermittelt. Man erhält auf diese Weise ein Gleichungssystem mit  $r$  Gleichungen und ebenso vielen Unbekannten, aus dem sich dann die *Schätzwerte* für die unbekannten Parameter in Abhängigkeit von den  $n$  Stichprobenwerten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  berechnen lassen (*Maximum-Likelihood-Schätzfunktionen* bzw. *Schätzwerte*).

- (4) Die Berechnung der Schätzwerte für die unbekannten Parameter lässt sich meist *wesentlich vereinfachen*, wenn man die für das gesuchte Maximum notwendigen Bedingungen auf die *logarithmierte* Likelihood-Funktion

$$L^* = \ln L = \ln L(\vartheta_1; \vartheta_2; \dots; \vartheta_r) \quad (\text{III-56})$$

anwendet. Dies ist erlaubt, da  $\ln L$  eine *streng monoton wachsende* Funktion von  $L$  ist und somit genau dort ein Maximum annimmt, wo  $L$  selbst *maximal* wird. Die *notwendigen* Bedingungen lauten dann wie folgt:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_1} (\ln L) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} (\ln L) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta_r} (\ln L) = 0 \quad (\text{III-57})$$

**Regel:** Die Likelihood-Funktion wird zunächst *logarithmiert* und dann der Reihe nach nach den einzelnen Parametern  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_r$  *partiell differenziert*. Diese Ableitungen werden schließlich alle gleich null gesetzt. Aus dem erhaltenen Gleichungssystem lassen sich dann die unbekannten Parameter (näherungsweise) berechnen.

### 3.3.2 Anwendungen auf spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wir zeigen in diesem Abschnitt, wie man mit Hilfe der *Maximum-Likelihood-Methode* Schätzfunktionen für die Parameter einer Binomialverteilung, einer Poisson-Verteilung und einer Gaußschen Normalverteilung erhält<sup>16)</sup>.

#### 3.3.2.1 Binomialverteilung

Bei einem *Bernoulli-Experiment* trete das Ereignis  $A$  mit der *unbekannten* Wahrscheinlichkeit  $p$  ein. Bei einer  $n$ -fachen Ausführung dieses Experiments ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei genau  $x$ -mal das Ereignis  $A$  eintritt, durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad (x = 0, 1, \dots, n) \quad (\text{III-58})$$

<sup>16)</sup> Anwendung dieser Methode auf eine *Exponentialverteilung* → siehe Übungsaufgabe 1 in Abschnitt 3.

der diskreten *Binomialverteilung* gegeben. Um den Wert des unbekannten Parameters  $p$ , häufig auch *Anteilwert* oder *Erfolgswahrscheinlichkeit* genannt<sup>17)</sup>, abzuschätzen, entnehmen wir der Grundgesamtheit wie folgt eine *Stichprobe* vom Umfang  $n$ :

Das *Bernoulli-Experiment* wird  $n$ -mal unabhängig voneinander ausgeführt, wobei genau  $k$ -mal das Ereignis  $A$  („Erfolg“) und somit  $(n - k)$ -mal das *komplementäre Ereignis*  $\bar{A}$  („Misserfolg“) eintrete. Da das Ereignis  $A$  dabei jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $p$ , das komplementäre Ereignis  $\bar{A}$  dagegen jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $q = 1 - p$  eintritt, ist die Gesamtwahrscheinlichkeit für  $k$ -mal „Erfolg“ (Ereignis  $A$ ) und  $(n - k)$ -mal „Misserfolg“ (Ereignis  $\bar{A}$ ) durch das Produkt

$$p^k q^{n-k} = p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{III-59})$$

gegeben. Dieser Ausdruck liefert zugleich die benötigte *Likelihood-Funktion*, die somit die folgende Gestalt besitzt:

$$L = L(p) = p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{III-60})$$

( $n$  und  $k$  sind dabei als *feste* Werte anzusehen). Zweckmäßigerweise gehen wir nun zur *logarithmierten Likelihood-Funktion*  $L^* = \ln L$  über:

$$L^* = \ln L = \ln [p^k (1-p)^{n-k}] \quad (\text{III-61})$$

Durch Anwendung elementarer *logarithmischer Rechenregeln* erhalten wir hieraus:

$$L^* = \ln p^k + \ln (1-p)^{n-k} = k \cdot \ln p + (n - k) \cdot \ln (1 - p) \quad (\text{III-62})$$

Wir differenzieren diese Funktion nun *partiell* nach dem Parameter  $p$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^*}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p} (k \cdot \ln p + (n - k) \cdot \ln (1 - p)) = \\ &= k \cdot \frac{1}{p} + (n - k) \cdot \frac{1}{1 - p} \cdot (-1) = \frac{k}{p} - \frac{n - k}{1 - p} \end{aligned} \quad (\text{III-63})$$

Die *notwendige* Bedingung (III-51) bzw. (III-57) für das gesuchte *Maximum* lautet daher:

$$\frac{k}{\hat{p}} - \frac{n - k}{1 - \hat{p}} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{k(1 - \hat{p}) - (n - k)\hat{p}}{\hat{p}(1 - \hat{p})} = 0 \quad (\text{III-64})$$

Durch Auflösen dieser Gleichung nach  $\hat{p}$  erhalten wir für den unbekannten Parameter  $p$  der Binomialverteilung den gesuchten *Näherungs- oder Schätzwert*:

$$\begin{aligned} k(1 - \hat{p}) - (n - k)\hat{p} &= k - k\hat{p} - n\hat{p} + k\hat{p} = k - n\hat{p} = 0 \Rightarrow \\ \hat{p} &= \frac{k}{n} \end{aligned} \quad (\text{III-65})$$

Dieser Schätzwert ist somit nichts anderes als die *empirisch* bestimmte *relative Häufigkeit*  $p(A)$  des Ereignisses  $A$  bei einer  $n$ -fachen Ausführung des *Bernoulli-Experiments*.

<sup>17)</sup> Wiederum gilt: Eintreten des Ereignisses  $A$  bedeutet *Erfolg*, Eintreten des *komplementären Ereignisses*  $\bar{A}$  daher *Misserfolg*.

Die zugehörige *Schätzfunktion* ist die bereits aus Abschnitt 3.2.5 bekannte Stichprobenfunktion

$$\hat{P} = \frac{X}{n} \quad (\text{III-66})$$

(die Zufallsvariable  $X$  beschreibt dabei die Anzahl der „Erfolge“ bei einer  $n$ -fachen Ausführung des *Bernoulli-Experiments*).

## ■ Beispiel

Um den *Ausschussanteil*  $p$  in der Tagesproduktion von Glühbirnen zu schätzen, wurde eine Stichprobe vom Umfang  $n = 120$  entnommen. Dabei erwiesen sich  $k = 6$  Glühbirnen als *nicht brauchbar*. Die *Maximum-Likelihood-Methode* liefert dann für den Ausschussanteil  $p$  den folgenden *Näherungs-* oder *Schätzwert*:

$$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20} = 0,05 = 5\%$$

Wir können somit davon ausgehen, dass *im Mittel* jede zwanzigste Glühbirne in der Tagesproduktion *unbrauchbar* ist.

■

### 3.3.2.2 Poisson-Verteilung

Die Zufallsvariable  $X$  genüge einer *Poisson-Verteilung* mit der *Wahrscheinlichkeitsfunktion*

$$f(x; \mu) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu} \quad (x = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{III-67})$$

Der *unbekannte* Parameter (Mittelwert)  $\mu$  lässt sich dann aus einer konkreten Stichprobe vom Umfang  $n$  mit den Stichprobenwerten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nach der *Maximum-Likelihood-Methode* wie folgt schätzen:

Zunächst stellen wir die *Likelihood-Funktion* auf:

$$\begin{aligned} L = L(\mu) &= f(x_1; \mu) \cdot f(x_2; \mu) \cdot \dots \cdot f(x_n; \mu) = \\ &= \left( \frac{\mu^{x_1}}{x_1!} \cdot e^{-\mu} \right) \left( \frac{\mu^{x_2}}{x_2!} \cdot e^{-\mu} \right) \dots \left( \frac{\mu^{x_n}}{x_n!} \cdot e^{-\mu} \right) = \\ &= \left( \frac{\mu^{x_1}}{x_1!} \cdot \frac{\mu^{x_2}}{x_2!} \cdot \dots \cdot \frac{\mu^{x_n}}{x_n!} \right) \cdot \underbrace{(e^{-\mu} \cdot e^{-\mu} \cdot \dots \cdot e^{-\mu})}_{n\text{-mal}} = \\ &= \frac{\mu^{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}}{x_1! x_2! \dots x_n!} \cdot e^{-n\mu} \quad (\text{III-68}) \end{aligned}$$

Durch *Logarithmieren* unter Verwendung elementarer Rechenregeln für Logarithmen wird daraus:

$$\begin{aligned}
 L^* &= L^*(\mu) = \ln L(\mu) = \ln \left[ \frac{\mu^{(x_1+x_2+\dots+x_n)}}{x_1!x_2!\dots x_n!} \cdot e^{-n\mu} \right] = \\
 &= \ln \left[ \frac{\mu^{(x_1+x_2+\dots+x_n)}}{x_1!x_2!\dots x_n!} \right] + \ln(e^{-n\mu}) = \\
 &= \ln(\mu^{(x_1+x_2+\dots+x_n)}) - \ln(x_1!x_2!\dots x_n!) - n\mu = \\
 &= (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \cdot \ln \mu - \ln(x_1!x_2!\dots x_n!) - n\mu
 \end{aligned} \tag{III-69}$$

Die benötigte *partielle* Ableitung von  $L^*$  nach dem Parameter  $\mu$  lautet damit:

$$\frac{\partial L^*}{\partial \mu} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \cdot \frac{1}{\mu} - n \tag{III-70}$$

Die für das gesuchte Maximum *notwendige* Bedingung (III-51) bzw. (III-57) führt damit auf die Gleichung

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \cdot \frac{1}{\hat{\mu}} - n = 0 \tag{III-71}$$

aus der wir dann den folgenden *Maximum-Likelihood-Schätzwert* für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  erhalten:

$$\hat{\mu} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \bar{x} \tag{III-72}$$

Der *Schätzwert*  $\hat{\mu}$  erweist sich dabei als der *Mittelwert*  $\bar{x}$  der vorgelegten Stichprobe:  $\mu \approx \hat{\mu} = \bar{x}$ .

## ■ Beispiel

Beim natürlichen *radioaktiven* Zerfall zerfallen die Atomkerne völlig *regellos* und *unabhängig voneinander* nach den Gesetzmäßigkeiten der mathematischen Statistik. Die Zufallsvariable

$X = \text{Anzahl der Atomkerne, die in einem bestimmten Zeitintervall } \Delta t \text{ zerfallen}$

genügt näherungsweise einer *Poisson-Verteilung* mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(x) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu} \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

Der noch *unbekannte* Parameter  $\mu$  beschreibt dabei die *mittlere* Anzahl der im (festen) Zeitintervall  $\Delta t$  stattgefundenen Zerfälle.

In einem Experiment wurde in  $n = 200$  aufeinander folgenden Zeitintervallen einer bestimmten (hier nicht näher interessierenden) Länge  $\Delta t$  die jeweilige Anzahl der zerfallenen Atomkerne eines speziellen radioaktiven Präparates mit einem Zählgerät gemessen. Es ergab sich dabei das folgende Messprotokoll (es wurden bis zu 10 Zerfälle pro Zeitintervall  $\Delta t$  gemessen):

Anzahl $x_i$ der Atomkerne, die in dem Zeitintervall $\Delta t$ zerfallen sind	Anzahl $n_i$ von Zeitintervallen der Länge $\Delta t$ , in denen $x_i$ Atomkerne zerfallen sind	$n_i x_i$
0	4	0
1	16	16
2	31	62
3	40	120
4	38	152
5	33	165
6	19	114
7	10	70
8	5	40
9	3	27
10	1	10
$\sum$	200	776

Der *Mittelwert* dieser Stichprobe beträgt somit

$$\bar{x} = \frac{1}{200} \cdot \sum_{i=0}^{10} n_i x_i = \frac{1}{200} \cdot 776 = \frac{776}{200} = \frac{388}{100} = 3,88$$

und ist zugleich ein *Näherungs- oder Schätzwert* für den unbekannten Parameter (Mittelwert)  $\mu$  der *Poisson-verteilten* Grundgesamtheit:

$$\mu \approx \hat{\mu} = \bar{x} = 3,88$$

Somit zerfallen im Zeitintervall  $\Delta t$  durchschnittlich 3,88 Atomkerne.

■

### 3.3.2.3 Gaußsche Normalverteilung

Die unbekannten Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  einer *normalverteilten* Grundgesamtheit mit der *Dichtefunktion*

$$f(x; \mu; \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{III-73})$$

können nach dem *Maximum-Likelihood-Prinzip* aus einer konkreten Stichprobe vom Umfang  $n$  mit den Stichprobenwerten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  wie folgt geschätzt werden:

Wir stellen zunächst die *Likelihood-Funktion*  $L = L(\mu; \sigma)$  auf:

$$\begin{aligned} L = L(\mu; \sigma) &= f(x_1; \mu; \sigma) \dots f(x_n; \mu; \sigma) = \\ &= \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x_2-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right] \dots \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right] = \\ &= \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right) \dots \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)}_{n \text{ gleiche Faktoren}} \cdot e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x_2-\mu)^2}{2\sigma^2}} \dots e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} [(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \dots + (x_n - \mu)^2]} = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2\sigma^2}} \end{aligned} \quad (\text{III-74})$$

Der besseren Übersicht wegen haben wir dabei im Exponenten die folgende (vorübergehende) Abkürzung eingeführt:

$$\alpha = (x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \dots + (x_n - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \quad (\text{III-75})$$

Durch *Logarithmierung* der Likelihood-Funktion erhalten wir dann mit Hilfe der bekannten Rechenregeln für Logarithmen:

$$\begin{aligned} L^* = L^*(\mu; \sigma) &= \ln L(\mu; \sigma) = \ln \left[ \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2\sigma^2}} \right] = \\ &= \ln \left( \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \right) + \ln \left( e^{-\frac{\alpha}{2\sigma^2}} \right) = \underbrace{\ln 1}_0 - \ln (\sqrt{2\pi}\sigma)^n - \frac{\alpha}{2\sigma^2} \cdot \underbrace{\ln e}_1 = \\ &= -n \cdot \ln (\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{\alpha}{2\sigma^2} = -n (\ln \sqrt{2\pi} + \ln \sigma) - \frac{\alpha}{2\sigma^2} = \\ &= -n \cdot \ln \sqrt{2\pi} - n \cdot \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \end{aligned} \quad (\text{III-76})$$

Die benötigten *partiellen* Ableitungen 1. Ordnung dieser Funktion lauten dann:

$$\frac{\partial L^*}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^n 2(x_i - \mu) \cdot (-1) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \quad (\text{III-77})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^*}{\partial \sigma} &= -n \cdot \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{2} (-2\sigma^{-3}) \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \\ &= -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \end{aligned} \quad (\text{III-78})$$

Die *notwendigen* Bedingungen (III-57) für das gesuchte *Maximum* der Likelihood-Funktion führen damit zu dem folgenden Gleichungssystem:

$$\frac{1}{\hat{\sigma}^2} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}) = 0 \Big| \cdot \hat{\sigma}^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}) = 0 \quad (\text{III-79})$$

$$\begin{aligned} -\frac{n}{\hat{\sigma}} + \frac{1}{\hat{\sigma}^3} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 &= 0 \Big| \cdot \hat{\sigma}^3 \Rightarrow -n\hat{\sigma}^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 = 0 \\ & \end{aligned} \quad (\text{III-80})$$

Aus Gleichung (III-79) folgt dann:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}) &= \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \hat{\mu} = \sum_{i=1}^n x_i - n\hat{\mu} = 0 \Rightarrow \\ \hat{\mu} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x} \end{aligned} \quad (\text{III-81})$$

Die *Maximum-Likelihood-Schätzung* für den *Mittelwert*  $\mu$  führt somit auf den *Mittelwert*  $\bar{x}$  der Stichprobe:  $\mu \approx \hat{\mu} = \bar{x}$ . Die zugehörige *Schätzfunktion* ist die bereits aus Abschnitt 3.2.3 bekannte Stichprobenfunktion

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i \quad (\text{III-82})$$

Einen *Schätzwert* für die Varianz  $\sigma^2$  der normalverteilten Grundgesamtheit erhalten wir aus Gleichung III-80 unter Berücksichtigung von  $\hat{\mu} = \bar{x}$ :

$$-n\hat{\sigma}^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (\text{III-83})$$

Die dieser Schätzung zugrunde liegende *Maximum-Likelihood-Schätzfunktion*

$$S^{*2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (\text{III-84})$$

ist jedoch *nicht* erwartungstreu. Sie unterscheidet sich von der in Abschnitt 3.2.4 angegebenen *erwartungstreuen* Schätzfunktion  $S^2$  um einen *konstanten* Faktor. Es gilt:

$$S^{*2} = \frac{n-1}{n} \cdot S^2 \quad (\text{III-85})$$

Für großes  $n$  jedoch ist *näherungsweise*  $S^{*2} = S^2$ .

## ■ Beispiel

$X$  sei eine *normalverteilte* Zufallsvariable mit den *unbekannten* Parametern  $\mu$  und  $\sigma$  (bzw.  $\sigma^2$ ), deren Werte aus der folgenden Stichprobe vom Umfang  $n = 10$  mit Hilfe der *Maximum-Likelihood-Schätzfunktionen* geschätzt werden sollen:

Stichprobe Nr. $i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i$	248	250	251	251	247	252	248	250	248	255

Die *Schätzwerte*  $\hat{\mu}$  und  $\hat{\sigma}^2$  lassen sich dann unter Verwendung der nachfolgenden (schrittweise aufgebauten) Tabelle leicht berechnen:

$i$	$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	248	-2	4
2	250	0	0
3	251	1	1
4	251	1	1
5	247	-3	9
6	252	2	4
7	248	-2	4
8	250	0	0
9	248	-2	4
10	255	5	25
$\sum$	2500	0	52

*Schätzwert für den Mittelwert  $\mu$  (unter Verwendung von Spalte 2):*

$$\mu \approx \hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{1}{10} \cdot 2500 = 250$$

*Schätzwert für die Varianz  $\sigma^2$  (berechnet nach Gleichung (III-83) und unter Verwendung von Spalte 4):*

$$\sigma^2 \approx \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{10} \cdot 52 = 5,2$$

Die Stichprobenwerte entstammen somit einer *normalverteilten* Grundgesamtheit mit dem *Mittelwert*  $\mu \approx 250$  und der *Varianz*  $\sigma^2 \approx 5,2$ . ■

### 3.4 Vertrauens- oder Konfidenzintervalle für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Intervallschätzungen“)

#### 3.4.1 Vertrauens- oder Konfidenzintervalle und statistische Sicherheit

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir uns ausführlich mit der *näherungsweisen* Berechnung (*Schätzung*) der unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung beschäftigt und gezeigt, wie man aus einer konkreten Stichprobe mit Hilfe geeigneter Schätzfunktionen *Näherungs-* oder *Schätzwerte* für die betreffenden Parameter erhält. Diese sog. *Punktschätzung* ermöglicht jedoch keinerlei Aussagen über die *Genauigkeit und Sicherheit der Schätzung*. Der aus einer Zufallsstichprobe gewonnene Schätzwert für einen Parameter kann nämlich noch erheblich vom *tatsächlichen* (aber unbekannten) Wert abweichen, insbesondere bei *kleinem* Stichprobenumfang.

Wir wollen uns daher im Folgenden mit diesem wichtigen Thema näher auseinander setzen. Die konkrete Fragestellung lautet dabei: *Wie genau und sicher sind die aus Stichprobenuntersuchungen mit Hilfe von Schätzfunktionen bestimmten Näherungs- oder Schätzwerte für die unbekannten Parameter?*

Es liegt daher nahe, anhand einer konkreten Stichprobe ein Intervall  $[c_u; c_o]$  zu bestimmen, das den unbekannten Parameter *mit Sicherheit* enthält (Bild III-16):

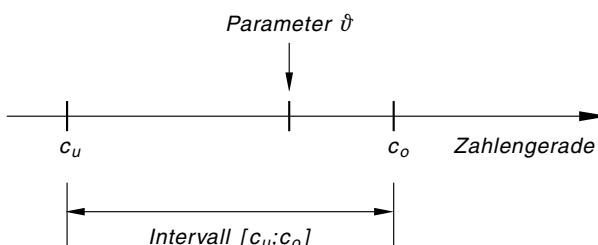


Bild III-16

Ein solches Intervall kann es jedoch *nicht* geben, da *absolut sichere* Rückschlüsse von einer Zufallsstichprobe auf die zugehörige Grundgesamtheit grundsätzlich *nicht* möglich sind<sup>18)</sup>. Auch der Versuch, ein Intervall  $[c_u; c_o]$  anzugeben, das den unbekannten Parameter  $\vartheta$  mit einer *großen* Wahrscheinlichkeit  $\gamma$  enthält, muss *scheitern* ( $0 < \gamma < 1$ ). Denn die Aussage

$$c_u \leq \vartheta \leq c_o \quad (\text{III-86})$$

(„der Parameter  $\vartheta$  liegt zwischen den *Schranken*  $c_u$  und  $c_o$ “) ist entweder *richtig*, dann aber gilt

$$P(c_u \leq \vartheta \leq c_o) = 1 \quad (\text{III-87})$$

oder sie ist *falsch*. In diesem Fall gilt

$$P(c_u \leq \vartheta \leq c_o) = 0 \quad (\text{III-88})$$

Der Fall

$$P(c_u \leq \vartheta \leq c_o) = \gamma \quad (\text{III-89})$$

mit  $0 < \gamma < 1$  ist somit *nicht* möglich!

Diese Überlegungen zwingen uns nun, wie folgt vorzugehen:

Wir bestimmen zwei *Zufallsgrößen*  $\Theta_u$  und  $\Theta_o$  so, dass sie mit einer beliebig gewählten, aber *großen* Wahrscheinlichkeit  $\gamma$  Werte annehmen, die den wahren, aber unbekannten Parameterwert  $\vartheta$  *einschließen*<sup>19)</sup>. Somit gilt

$$P(\Theta_u \leq \vartheta \leq \Theta_o) = \gamma \quad (\text{III-90})$$

Die *Werte* der beiden Zufallsvariablen  $\Theta_u$  und  $\Theta_o$ , müssen sich dabei aus den Stichprobenwerten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  einer vorgegebenen konkreten Stichprobe berechnen lassen und *variieren* daher von Stichprobe zu Stichprobe. Die Zufallsvariablen  $\Theta_u$  und  $\Theta_o$  sind demnach *Stichprobenfunktionen* der  $n$  *unabhängigen* Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , die alle die *gleiche* Verteilungsfunktion besitzen wie die Zufallsvariable  $X$ . Sie sind zugleich auch *Schätzfunktionen* des Parameters  $\vartheta$ .

Sind die beiden *Stichproben-* oder *Schätzfunktionen*

$$\Theta_u = g_u(X_1; X_2; \dots; X_n) \quad (\text{III-91})$$

und

$$\Theta_o = g_o(X_1; X_2; \dots; X_n) \quad (\text{III-92})$$

bekannt<sup>20)</sup>, so erhält man aus einer *konkreten* Stichprobe vom Umfang  $n$  durch Einsetzen der Stichprobenwerte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  in diese Funktionen zwei Werte  $c_u$  und  $c_o$ :

<sup>18)</sup> Von den *trivialen* Fällen wird abgesehen. Dazu zählen Aussagen wie:

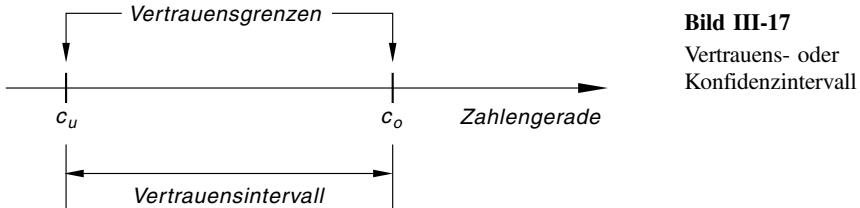
- „Der Parameterwert  $\vartheta$  liegt zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$ “
- „Die Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  bei einem Bernoulli-Experiment liegt zwischen 0 und 1“

<sup>19)</sup> Man wählt in der Praxis meist  $\gamma = 0,95$  oder  $\gamma = 0,99$ , manchmal auch  $\gamma = 0,999$ .

<sup>20)</sup>  $\Theta_u$  und  $\Theta_o$  sind die Grenzen des *Zufallsintervalls*  $[\Theta_u; \Theta_o]$ , das den Parameter  $\vartheta$  mit der Wahrscheinlichkeit  $\gamma$  überdeckt. Die Wahl der verwendeten Stichprobenfunktionen  $\Theta_u$  und  $\Theta_o$ , wird in den nächsten Abschnitten am jeweiligen konkreten Problem näher erläutert.

$$\begin{aligned} c_u &= g_u(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ c_o &= g_o(x_1; x_2; \dots; x_n) \end{aligned} \quad (\text{III-93})$$

Sie bilden die Grenzen eines Intervalls, das in der Statistik als *Vertrauens-* oder *Konfidenzintervall* für den unbekannten Parameter  $\vartheta$  bezeichnet wird. Die Intervallrandpunkte  $c_u$  und  $c_o$  heißen daher auch *Vertrauens-* oder *Konfidenzgrenzen* (Bild III-17)<sup>21)</sup>.



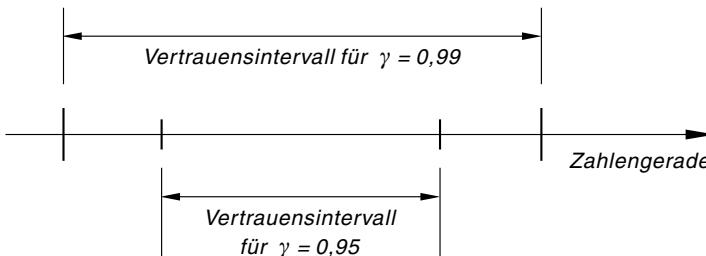
Das aus einer *konkreten* Stichprobe bestimmte *Vertrauensintervall*  $c_u \leq \vartheta \leq c_o$  ist eine *Realisierung* des Zufallsintervalls mit den Grenzen  $\Theta_u$  und  $\Theta_o$ . Die vorgegebene Wahrscheinlichkeit  $\gamma$  heißt in diesem Zusammenhang auch *statistische Sicherheit* oder *Vertrauens-* oder *Konfidenzniveau*.  $\alpha = 1 - \gamma$  ist die sog. *Irrtumswahrscheinlichkeit*.

Das *vor* der Stichprobenuntersuchung gewählte *Vertrauensniveau*  $\gamma = 1 - \alpha$  ist somit die *Wahrscheinlichkeit* dafür, aus einer konkreten Zufallsstichprobe ein Vertrauens- oder Konfidenzintervall zu erhalten, das den *wahren* (aber unbekannten) Parameterwert  $\vartheta$  *enthält*. Man wird daher für *großes*  $\gamma$  (d. h. für  $\gamma = 0,95$  oder  $\gamma = 0,99$  oder  $\gamma = 0,999$ ) meist eine *richtige* Entscheidung treffen. Die *statistische Sicherheit*  $\gamma = 1 - \alpha$  kann nämlich wie folgt sehr anschaulich gedeutet werden: Da die Intervallgrenzen (Vertrauensgrenzen)  $c_u$  und  $c_o$  noch von den Stichprobenwerten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  abhängen und sich somit von Stichprobe zu Stichprobe *verändern*, erhalten wir für *jede* Zufallsstichprobe ein etwas *anderes* Vertrauensintervall. Von 100 Vertrauensintervallen für den unbekannten Parameter  $\vartheta$ , die aus ebenso vielen Zufallsstichproben ermittelt wurden, *enthalten* dann ungefähr  $\gamma \cdot 100$  Intervalle den *wahren* Parameterwert und nur ca.  $\alpha \cdot 100$  dieser Vertrauensintervalle werden den *wahren* Parameterwert *nicht* enthalten. Mit anderen Worten: In rund  $\gamma \cdot 100$  Fällen wird eine *richtige* und in rund  $\alpha \cdot 100$  Fällen eine *falsche* Entscheidung getroffen.

Die Bestimmung eines Vertrauensintervalls für einen unbekannten Parameter  $\vartheta$  ist dabei nur möglich, wenn die *Verteilungsfunktion* der verwendeten Schätzfunktion für  $\vartheta$  *bekannt* ist. Die Vertrauensgrenzen  $c_u$  und  $c_o$  lassen sich dann für ein vorgegebenes Vertrauensniveau  $\gamma = 1 - \alpha$  aus der Bedingung (III-90) und unter Verwendung einer konkreten Stichprobe berechnen. Wie man in einem konkreten Fall ein Vertrauensintervall bestimmt, werden wir in den nächsten Abschnitten für die Parameter  $\mu$  und  $\sigma^2$  einer Normalverteilung und den Parameter  $p$  einer Binomialverteilung noch ausführlich zeigen.

<sup>21)</sup> Die Stichprobenfunktionen  $\Theta_u$  und  $\Theta_o$  sind somit *Schätzfunktionen* für die beiden Vertrauensgrenzen.

Zu beachten ist ferner, dass die Vertrauensgrenzen  $c_u$  und  $c_o$  nicht nur von den Stichprobenwerten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  abhängen, sondern auch noch von dem gewählten *Vertrauensniveau*  $\gamma = 1 - \alpha$ . Dabei gilt: Je größer  $\gamma$ , umso länger (breiter) werden die Vertrauensintervalle. Mit anderen Worten: Will man eine *große* statistische Sicherheit  $\gamma$  (und somit eine *geringe* Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$ ) erreichen, so muss man dafür ein relativ *breites* Vertrauensintervall in Kauf nehmen (Bild III-18). Die Länge  $l = c_o - c_u$  des Vertrauensintervalls ist dann ein Maß für die *Genauigkeit* der Parameterschätzung und *verringert* sich mit *zunehmendem* Stichprobenumfang  $n$ . Welches Vertrauensniveau in der Praxis gewählt wird, muss dabei einzig und alleine am *konkreten* Problem entschieden werden.



**Bild III-18** Die Vertrauensintervalle werden mit zunehmender statistischer Sicherheit  $\gamma$  breiter

Wir fassen die wichtigsten Ergebnisse wie folgt zusammen:

### Vertrauens- oder Konfidenzintervalle für den unbekannten Parameter $\vartheta$ einer vom Typ her bekannten Wahrscheinlichkeitsverteilung

$X$  sei eine Zufallsvariable, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung (Verteilungsfunktion) noch einen *unbekannten* Parameter  $\vartheta$  enthalte. Für diesen Parameter lässt sich dann unter Verwendung einer *konkreten* Zufallsstichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  wie folgt schrittweise ein sog. *Vertrauens-* oder *Konfidenzintervall* bestimmen:

1. Wir wählen zunächst ein bestimmtes *Vertrauens-* oder *Konfidenzniveau*  $\gamma = 1 - \alpha$  ( $0 < \gamma < 1$ ).  $\alpha$  ist dabei die sog. *Irrtumswahrscheinlichkeit*.
2. Dann werden für den Parameter  $\vartheta$  zwei *Stichproben-* oder *Schätzfunktionen*

$$\Theta_u = g_u(X_1; X_2; \dots; X_n) \quad (\text{III-94})$$

und

$$\Theta_o = g_o(X_1; X_2; \dots; X_n) \quad (\text{III-95})$$

bestimmt, die mit der gewählten Wahrscheinlichkeit  $\gamma = 1 - \alpha$  (auch *statistische Sicherheit* genannt) den *wahren* Wert des Parameters  $\vartheta$  einschließen:

$$P(\Theta_u \leq \vartheta \leq \Theta_o) = \gamma = 1 - \alpha \quad (\text{III-96})$$

3. Aus der vorgegebenen konkreten Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  werden die Werte der beiden Stichprobenfunktionen  $\Theta_u$  und  $\Theta_o$  berechnet:

$$\left. \begin{array}{l} c_u = g_u(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ c_o = g_o(x_1; x_2; \dots; x_n) \end{array} \right\} \quad (\text{III-97})$$

Sie liefern uns die *Grenzen* des gesuchten *Vertrauens-* oder *Konfidenzintervalls*.

4. Das *Vertrauens-* oder *Konfidenzintervall* für den unbekannten Parameter  $\vartheta$  lautet damit wie folgt:

$$c_u \leq \vartheta \leq c_o \quad (\text{III-98})$$

Der *wahre* Wert des Parameters  $\vartheta$  liegt dann mit einem *Vertrauen* von  $\gamma \cdot 100\%$  in diesem Intervall.

#### Anmerkung

Wir können somit davon ausgehen, dass die aus einer *langen* Serie von Zufallsstichproben ermittelten Vertrauensintervalle in etwa  $\gamma \cdot 100\%$  aller Fälle den unbekannten Parameter  $\vartheta$  *enthalten* und nur in etwa  $\alpha \cdot 100\%$  aller Fälle diesen Parameter *nicht enthalten*. Wir treffen daher in  $\gamma \cdot 100\%$  aller Fälle eine *richtige* Entscheidung, in  $\alpha \cdot 100\%$  aller Fälle dagegen eine *falsche* Entscheidung.

#### ■ Beispiel

Wir wählen in einem konkreten Anwendungsfall ein Vertrauensniveau von  $\gamma = 0,95 = 95\%$ . Entnimmt man der betreffenden Grundgesamtheit 100 (voneinander unabhängige) Stichproben, so können wir darauf *vertrauen*, dass in etwa 95 Fällen der unbekannte Parameter  $\vartheta$  *in* das zugehörige Vertrauensintervall fällt und nur in etwa 5 Fällen *außerhalb* des Vertrauensintervalls liegt. Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist somit  $\alpha = 1 - \gamma = 1 - 0,95 = 0,05 = 5\%$ . Wir treffen somit in etwa 95 Fällen eine *richtige* und in etwa 5 Fällen eine *falsche* Entscheidung.

### 3.4.2 Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz $\sigma^2$

Wir gehen von einer *normalverteilten* Zufallsvariablen  $X$  mit dem *unbekannten* Mittelwert  $\mu$  und der als *bekannt* vorausgesetzten Varianz  $\sigma^2$  aus. Unter Verwendung einer konkreten Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  soll dann auf dem *vorgegebenen* Vertrauensniveau  $\gamma = 1 - \alpha$  das zugehörige *Vertrauens-* oder *Konfidenzintervall* für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  bestimmt werden. Als *Schätzfunktion* für den Mittelwert  $\mu$  verwenden wir die bereits aus Abschnitt 3.2.3 bekannte *Stichprobenfunktion*

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i \quad (\text{III-99})$$

$\bar{X}$  ist dabei bekanntlich eine *normalverteilte* Zufallsvariable mit dem Mittelwert  $E(\bar{X}) = \mu$  und der Varianz  $\text{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$  (siehe hierzu Abschnitt 3.2.2). Dann ist die zugehörige *standardisierte* Zufallsvariable

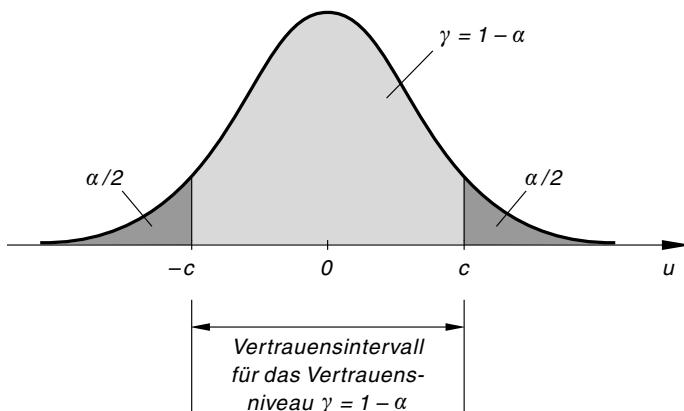
$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (\text{III-100})$$

*standardnormalverteilt* (Mittelwert  $E(U) = 0$ ; Varianz  $\text{Var}(U) = 1$ ). Für  $U$  und somit auch für  $\bar{X}$  lässt sich schrittweise wie folgt ein *Vertrauensintervall* konstruieren:

- (1) Wir wählen zunächst ein bestimmtes *Vertrauensniveau*  $\gamma = 1 - \alpha$  ( $0 < \gamma < 1$ ). In den technischen Anwendungen übliche Werte sind:  $\gamma = 0,95 = 95\%$  oder  $\gamma = 0,99 = 99\%$ .  $\alpha$  ist dabei die *Irrtumswahrscheinlichkeit*.
- (2) Die Zufallsvariable  $U$  soll dann mit der gewählten Wahrscheinlichkeit  $\gamma = 1 - \alpha$  einen Wert aus dem *symmetrischen* Intervall  $-c \leq U \leq c$  annehmen (Bild III-19). Somit gilt:

$$P(-c \leq U \leq c) = \gamma = 1 - \alpha \quad (\text{III-101})$$

Den zugehörigen Wert für die *Schranke*  $c$  entnehmen wir der Tabelle 2 im Anhang (Tabelle der *Quantile der Standardnormalverteilung*).



**Bild III-19** Zur Berechnung der Schranke  $c$  (die *hellgrau* unterlegte Fläche entspricht dem gewählten Vertrauensniveau  $\gamma = 1 - \alpha$ , die *dunkelgrau* unterlegte Fläche der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$ )

- (3) Unter Verwendung der Beziehung (III-100) können wir das Intervall  $-c \leq U \leq c$  auch in der Form

$$-c \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq c \quad (\text{III-102})$$

darstellen.

Mit Hilfe elementarer algebraischer Umformungen lässt sich hieraus schließlich eine *Ungleichung* für den unbekannten *Mittelwert*  $\mu$  wie folgt herleiten:

$$\begin{array}{l|l}
 -c \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq c & \text{mit } \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ multiplizieren} \\
 -c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{mit } -1 \text{ multiplizieren} \\
 c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \geq \mu - \bar{X} \geq -c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{Seiten vertauschen} \\
 -c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu - \bar{X} \leq c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \bar{X} \text{ addieren} \\
 \bar{X} - c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} & \text{(III-103)}
 \end{array}$$

Die Bedingung (III-101) geht damit über in

$$P\left(\underbrace{\bar{X} - c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\Theta_u} \leq \mu \leq \underbrace{\bar{X} + c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\Theta_o}\right) = \gamma = 1 - \alpha \quad (\text{III-104})$$

oder

$$P(\Theta_u \leq \mu \leq \Theta_o) = \gamma = 1 - \alpha \quad (\text{III-105})$$

Die Zufallsvariablen

$$\Theta_u = \bar{X} - c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{und} \quad \Theta_o = \bar{X} + c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{III-106})$$

sind dabei *Schätzfunktionen* für die gesuchten *Vertrauensgrenzen*  $c_u$  und  $c_o$ .

- (4) Die Berechnung dieser Vertrauensgrenzen erfolgt dann anhand einer *konkreten* Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , indem man in die Schätzfunktionen  $\Theta_u$  und  $\Theta_o$  für  $\bar{X}$  den aus dieser Stichprobe berechneten Mittelwert  $\bar{x}$  einsetzt. Das *Vertrauensintervall* für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  der *normalverteilten* Grundgesamtheit lautet damit wie folgt:

$$\bar{x} - c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{III-107})$$

Dieses Intervall mit den beiden Grenzen (Vertrauensgrenzen)

$$c_u = \bar{x} - c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{und} \quad c_o = \bar{x} + c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{III-108})$$

und der Länge  $l = 2c\sigma/\sqrt{n}$  enthält dann mit einem *Vertrauen* von  $\gamma \cdot 100\%$  den *wahren* (aber unbekannten) Wert des Mittelwertes  $\mu$  (siehe Bild III-20).

Wir fassen dieses wichtige Ergebnis wie folgt zusammen:

**Bestimmung eines Vertrauensintervalls für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  einer Normalverteilung bei bekannter Varianz  $\sigma^2$**

$X$  sei eine *normalverteilte* Zufallsvariable mit dem *unbekannten* Mittelwert  $\mu$  und der als *bekannt* vorausgesetzten Varianz  $\sigma^2$ . Für den *Mittelwert*  $\mu$  lässt sich dann unter Verwendung einer konkreten Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  schrittweise wie folgt ein *Vertrauens-* oder *Konfidenzintervall* bestimmen:

1. Wir wählen zunächst ein bestimmtes *Vertrauensniveau* (in der Praxis meist  $\gamma = 0,95 = 95\%$  oder  $\gamma = 0,99 = 99\%$ ).
2. Berechnung der Konstanten  $c$  aus der Bedingung

$$P(-c \leq U \leq c) = \gamma \quad (\text{III-109})$$

für die *standardnormalverteilte* Zufallsvariable

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (\text{III-110})$$

unter Verwendung von Tabelle 2 im Anhang (siehe hierzu die *hellgrau* unterlegte Fläche in Bild III-19).

Dabei bedeuten:

$\bar{X}$ : *Schätzfunktion* für den unbekannten *Mittelwert*  $\mu$  der normalverteilten Grundgesamtheit (siehe hierzu Abschnitt 3.2.3)

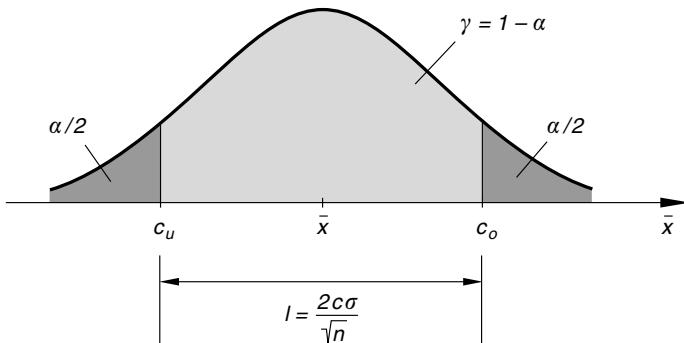
$\sigma$ : *Standardabweichung* der normalverteilten Grundgesamtheit (hier als *bekannt* vorausgesetzt)

$n$ : *Umfang* der verwendeten Stichprobe

3. Berechnung des *Mittelwertes*  $\bar{x}$  der konkreten Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .
4. Das *Vertrauensintervall* für den unbekannten *Mittelwert*  $\mu$  der normalverteilten Grundgesamtheit lautet dann wie folgt:

$$\bar{x} - c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{III-111})$$

(siehe hierzu Bild III-20). Der *wahre* Wert des Mittelwertes  $\mu$  liegt dabei mit einem *Vertrauen* von  $\gamma \cdot 100\%$  in diesem Intervall.



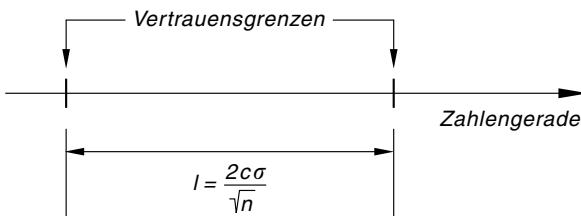
**Bild III-20** Vertrauensintervall für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  einer Normalverteilung (bei bekannter Varianz  $\sigma^2$ )

#### Anmerkungen

- (1) Bei vielen Messinstrumenten, Maschinen und Automaten wird die Varianz  $\sigma^2$  bereits vom Hersteller als eine Art *Gerätekonstante* mitangegeben.
- (2) Häufig wird anstatt von  $\gamma$  die *Irrtumswahrscheinlichkeit*  $\alpha$  vorgegeben (meist  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ). Das *Vertrauensniveau* oder die *statische Sicherheit* ist dann  $\gamma = 1 - \alpha$ .
- (3) Das Vertrauensintervall besitzt die *Länge*  $l = 2c\sigma/\sqrt{n}$  und hängt somit noch von der Standardabweichung  $\sigma$ , dem Stichprobenumfang  $n$  und dem Vertrauensniveau  $\gamma = 1 - \alpha$  ab (Bild III-21)<sup>22)</sup>. Für *feste* Werte von  $\sigma$  und  $\gamma$  gilt daher:

$$l \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (\text{III-112})$$

Dies aber bedeutet, dass eine *Verkürzung* des Vertrauensintervalls stets durch eine entsprechende *Vergrößerung* des Stichprobenumfangs  $n$  erreicht werden kann.



**Bild III-21**

<sup>22)</sup> Die aus Gleichung (III-109) berechnete Konstante  $c$  ist nämlich noch von dem gewählten Vertrauensniveau  $\gamma$  abhängig.

## ■ Beispiele

- (1) Die *Längenmessung* von 10 Schrauben, die nach dem Zufallsprinzip aus einem bestimmten Sortiment ausgewählt wurden, führte zu dem folgenden Ergebnis:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{x_i}{\text{mm}}$	10	8	9	10	11	11	9	12	8	12

Wir setzen dabei voraus, dass diese Stichprobe aus einer *normalverteilten* Grundgesamtheit mit der Varianz  $\sigma^2 = 4 \text{ mm}^2$  stammt und wollen für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  ein Vertrauensintervall zum Vertrauensniveau  $\gamma = 0,95 = 95\%$  bestimmen. Dabei gehen wir schrittweise wie folgt vor:

**1. Schritt:** Das Vertrauensniveau  $\gamma$  ist bereits vorgegeben:  $\gamma = 0,95$ .

**2. Schritt:** Die Bestimmungsgleichung für die Konstante  $c$  lautet damit (Bild III-22):

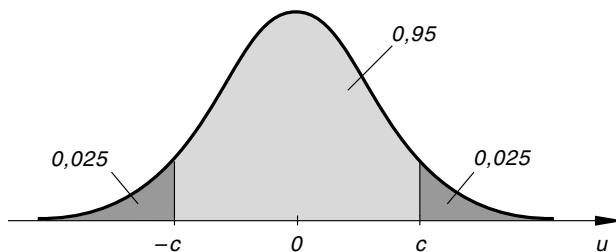


Bild III-22

$$P(-c \leq U \leq c) = 0,95$$

Daraus folgt dann weiter:

$$\begin{aligned} P(-c \leq U \leq c) &= \phi(c) - \phi(-c) = \phi(c) - [1 - \phi(c)] = \\ &= \phi(c) - 1 + \phi(c) = 2 \cdot \phi(c) - 1 = 0,95 \Rightarrow \\ 2 \cdot \phi(c) &= 1,95 \Rightarrow \phi(c) = 0,975 \end{aligned}$$

Aus Tabelle 2 im Anhang erhalten wir schließlich:

$$\phi(c) = 0,975 \rightarrow c = u_{0,975} = 1,960$$

Die gesuchte Konstante (Schranke)  $c$  ist somit das *Quantil*  $u_{0,975} = 1,960$  der Standardnormalverteilung.

**3. Schritt:** Wir berechnen den *Mittelwert*  $\bar{x}$  der Stichprobe und erhalten:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} x_i = \\ &= \frac{1}{10} (10 + 8 + 9 + 10 + 11 + 11 + 9 + 12 + 8 + 12) \text{ mm} = 10 \text{ mm} \end{aligned}$$

**4. Schritt:** Mit  $n = 10$ ,  $\bar{x} = 10 \text{ mm}$ ,  $\sigma = 2 \text{ mm}$  und  $c = 1,960$  berechnen wir zweckmäßigerweise zunächst die folgende *Hilfsgröße*:

$$k = c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,960 \cdot \frac{2 \text{ mm}}{\sqrt{10}} = 1,240 \text{ mm}$$

Das *Vertrauensintervall* für den *Mittelwert*  $\mu$  der normalverteilten Grundgesamtheit lautet damit:

$$\bar{x} - k \leq \mu \leq \bar{x} + k$$

$$(10 - 1,240) \text{ mm} \leq \mu \leq (10 + 1,240) \text{ mm}$$

$$8,760 \text{ mm} \leq \mu \leq 11,240 \text{ mm}$$

Wir können daher mit einem *Vertrauen* von 95 % davon ausgehen, dass der *wahre* Wert von  $\mu$  in diesem Intervall der Länge  $l = 2k = 2,480 \text{ mm}$  liegt (Bild III-23).

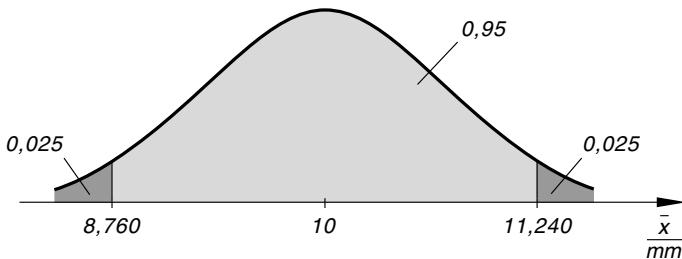


Bild III-23

- (2) Einer *normalverteilten* Grundgesamtheit mit der Varianz  $\sigma^2 = 100$  soll eine Stichprobe vom Umfang  $n$  entnommen werden. Wie groß muss man den *Stichprobenumfang* wählen, damit das Vertrauensintervall für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  bei einem Vertrauensniveau von  $\gamma = 99 \%$  die Länge  $l = 2$  besitzt?

*Lösung:* Zunächst lösen wir die Gleichung  $l = 2c\sigma/\sqrt{n}$  für die Länge des Vertrauensintervalls nach  $n$  auf und erhalten:

$$l = \frac{2c\sigma}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} = \frac{2c\sigma}{l} \quad \Rightarrow \quad n = \left( \frac{2c\sigma}{l} \right)^2$$

Die noch unbekannte Konstante  $c$  lässt sich dabei aus der Bedingung

$$P(-c \leq U \leq c) = 0,99$$

mit Hilfe der Tabelle 2 im Anhang wie folgt bestimmen (Bild III-24):

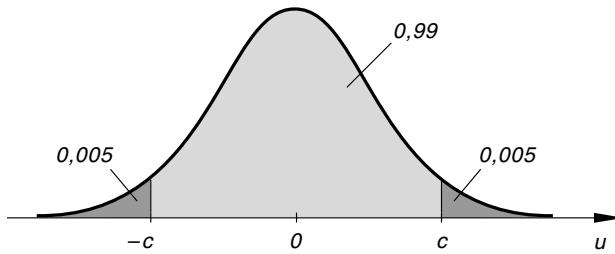


Bild III-24

$$\begin{aligned} P(-c \leq U \leq c) &= \phi(c) - \phi(-c) = \phi(c) - [1 - \phi(c)] = \\ &= \phi(c) - 1 + \phi(c) = 2 \cdot \phi(c) - 1 = 0,99 \Rightarrow \\ 2 \cdot \phi(c) &= 1,99 \Rightarrow \phi(c) = 0,995 \rightarrow c = u_{0,995} = 2,576 \end{aligned}$$

Die gesuchte Konstante  $c$  ist somit das *Quantil*  $u_{0,995} = 2,576$  der Standardnormalverteilung.

Der gesuchte *Stichprobenumfang* beträgt damit (Rundung auf die nächste ganze Zahl):

$$n = \left( \frac{2c\sigma}{l} \right)^2 = \left( \frac{2 \cdot 2,576 \cdot 10}{2} \right)^2 = 25,76^2 \approx 664$$

■

### 3.4.3 Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz $\sigma^2$

$X$  sei eine *normalverteilte* Zufallsvariable mit dem *unbekannten* Mittelwert  $\mu$  und der ebenfalls *unbekannten* Varianz  $\sigma^2$ . Anhand einer *konkreten* Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  soll für ein (beliebig vorgegebenes) Vertrauensniveau  $\gamma = 1 - \alpha$  ( $0 < \gamma < 1$ ) das zugehörige *Vertrauens-* oder *Konfidenzintervall* für den unbekannten *Mittelwert*  $\mu$  der normalverteilten Grundgesamtheit bestimmt werden. Im Gegensatz zum vorangegangenen Abschnitt ist diesmal auch die *Varianz*  $\sigma^2$  und damit auch die *Standardabweichung*  $\sigma$  *unbekannt*. Bei der Herleitung eines Vertrauensintervalls für den Mittelwert  $\mu$

muss daher die bisher verwendete *standardnormalverteilte* Zufallsvariable  $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  durch die Zufallsgröße (Zufallsvariable)

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \tag{III-113}$$

ersetzt werden.  $S$  ist dabei die aus Abschnitt 3.2.4 bekannte Schätzfunktion für die unbekannte *Standardabweichung*  $\sigma$  der Grundgesamtheit. Es lässt sich zeigen, dass die Zufallsvariable  $T$  der *t-Verteilung* von *Student* mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden genügt. Die Grenzen des gesuchten Vertrauensintervalls müssen dabei so bestimmt werden, dass die Zufallsgröße  $T$  mit der gewählten Wahrscheinlichkeit  $\gamma = 1 - \alpha$  Werte aus dem *symmetrischen* Intervall  $-c \leq T \leq c$  annimmt (Bild III-25).

Aus der Bedingung

$$P(-c \leq T \leq c) = \gamma = 1 - \alpha \quad (\text{III-114})$$

lässt sich dann die *Schranke*  $c$  mit Hilfe von Tabelle 4 im Anhang leicht berechnen (Tabelle der *Quantile der t-Verteilung*). Wir erhalten damit das folgende *Lösungsschema*:

**Bestimmung eines Vertrauensintervalls für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz  $\sigma^2$**

$X$  sei eine *normalverteilte* Zufallsvariable mit dem *unbekannten* Mittelwert  $\mu$  und der ebenfalls *unbekannten* Varianz  $\sigma^2$ . Für den *Mittelwert*  $\mu$  lässt sich dann unter Verwendung einer konkreten Zufallsstichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  schrittweise wie folgt ein *Vertrauens-* oder *Konfidenzintervall* bestimmen:

1. Wir wählen zunächst ein bestimmtes *Vertrauensniveau* (in der Praxis meist  $\gamma = 0,95 = 95\%$  oder  $\gamma = 0,99 = 99\%$ ).
2. Berechnung der Konstanten  $c$  aus der Bedingung

$$P(-c \leq T \leq c) = \gamma \quad (\text{III-115})$$

für die einer *t-Verteilung* mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden genügenden Zufallsvariable

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \quad (\text{III-116})$$

unter Verwendung von Tabelle 4 im Anhang (siehe hierzu die *hellgrau* unterlegte Fläche in Bild III-25).

Dabei bedeuten:

$\bar{X}$ : *Schätzfunktion* für den unbekannten *Mittelwert*  $\mu$  der normalverteilten Grundgesamtheit (siehe hierzu Abschnitt 3.2.3)

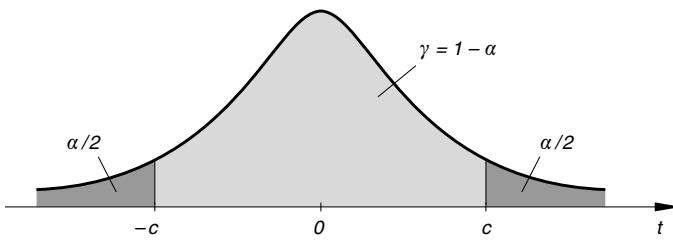
$S$ : *Schätzfunktion* für die unbekannte *Standardabweichung*  $\sigma$  der normalverteilten Grundgesamtheit (siehe hierzu Abschnitt 3.2.4)

$n$ : Umfang der verwendeten Stichprobe

3. Berechnung des *Mittelwertes*  $\bar{x}$  und der *Varianz*  $s^2$  bzw. der *Standardabweichung*  $s$  der konkreten Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .
4. Das *Vertrauensintervall* für den unbekannten *Mittelwert*  $\mu$  der normalverteilten Grundgesamtheit lautet dann wie folgt:

$$\bar{x} - c \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + c \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (\text{III-117})$$

(siehe hierzu Bild III-25). Der *wahre* Wert des Mittelwertes  $\mu$  liegt dabei mit einem *Vertrauen* von  $\gamma \cdot 100\%$  in diesem Intervall.



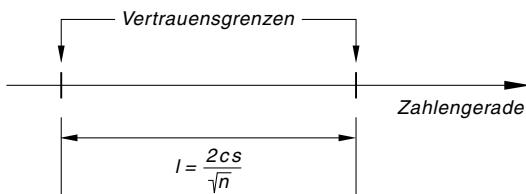
**Bild III-25** Zur Berechnung der Schranke  $c$  (die hellgraue unterlegte Fläche entspricht dem gewählten Vertrauensniveau  $\gamma = 1 - \alpha$ , die dunkelgraue unterlegte Fläche der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$ )

#### Anmerkungen

- (1) Häufig wird anstatt von  $\gamma$  die Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  vorgegeben (meist  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ). Das Vertrauensniveau oder die statistische Sicherheit ist dann  $\gamma = 1 - \alpha$ .
- (2) Das Vertrauensintervall besitzt die Länge  $l = 2cs/\sqrt{n}$  und hängt somit noch von dem gewählten Vertrauensniveau  $\gamma = 1 - \alpha$ , dem Stichprobenumfang  $n$  und der Standardabweichung  $s$  der Stichprobe ab (Bild III-26). Für feste Werte von  $\gamma$  und  $s$  gilt dann:

$$l \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (\text{III-118})$$

Eine Verkürzung des Vertrauensintervalls lässt sich daher stets durch eine entsprechende Vergrößerung des Stichprobenumfangs  $n$  erreichen.



**Bild III-26**

- (3) Bei unbekannter Varianz  $\sigma^2$  sind die Vertrauensintervalle für den Mittelwert  $\mu$  stets breiter als bei bekannter Varianz (bei gleichem Vertrauensniveau  $\gamma$  und gleichem Stichprobenumfang  $n$ ).
- (4) Bei umfangreichen Stichproben (**Faustregel**:  $n > 30$ ) kann die unbekannte Standardabweichung  $\sigma$  der Grundgesamtheit durch die Standardabweichung  $s$  der Stichprobe geschätzt werden:  $\sigma \approx s$ . In diesem Sonderfall darf man daher von einer normalverteilten Grundgesamtheit mit der bekannten Varianz  $\sigma^2 \approx s^2$  ausgehen und das bereits im vorangegangenen Abschnitt 3.4.2 besprochene Verfahren zur Bestimmung eines Vertrauens- oder Konfidenzintervalls für den Mittelwert  $\mu$  einer normalverteilten Grundgesamtheit anwenden<sup>23)</sup>.

<sup>23)</sup> Wir erinnern: Die *t*-Verteilung von Student strebt für  $n \rightarrow \infty$  gegen die *Standardnormalverteilung* (siehe hierzu Kap. II, Abschnitt 8.2).

## ■ Beispiel

Die Messung von 8 *Widerständen*, die rein zufällig einer laufenden Serienproduktion entnommen wurden, führte zu dem folgenden Messprotokoll:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{x_i}{\Omega}$	100	104	98	96	101	104	98	99

Wir setzen dabei voraus, dass diese Stichprobe aus einer *normalverteilten* Grundgesamtheit stammt, deren Mittelwert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  beide *unbekannt* sind. Es soll ein *Vertrauens- oder Konfidenzintervall* für den *Mittelwert  $\mu$*  bestimmt werden. Wir lösen die gestellte Aufgabe dann schrittweise wie folgt:

**1. Schritt:** Als Vertrauensniveau wählen wir  $y = 0,95$ .

**2. Schritt:** Die Bestimmungsgleichung für die Konstante  $c$  lautet damit (Bild III-27):

$$P(-c \leq T \leq c) = 0,95$$

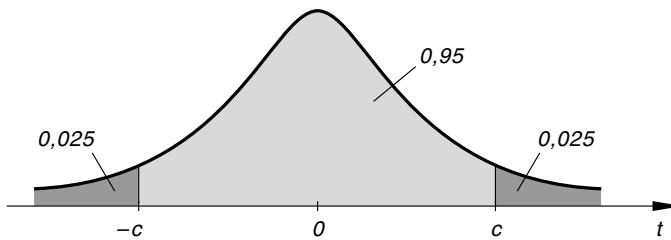


Bild III-27

Mit Hilfe von Tabelle 4 im Anhang erhalten wir hieraus für  $f = n - 1 = 8 - 1 = 7$  Freiheitsgrade den folgenden Wert für  $c$ :

$$\begin{aligned} P(-c \leq T \leq c) &= F(c) - F(-c) = F(c) - [1 - F(c)] = \\ &= F(c) - 1 + F(c) = 2 \cdot F(c) - 1 = 0,95 \Rightarrow \\ 2 \cdot F(c) &= 1,95 \Rightarrow F(c) = 0,975 \\ F(c) = 0,975 &\xrightarrow{f=7} c = t_{(0,975; 7)} = 2,365 \end{aligned}$$

Die gesuchte Konstante  $c$  ist somit das *Quantil*  $t_{(0,975; 7)} = 2,365$  der *t-Verteilung*.

**3. Schritt:** Wir berechnen nun den *Mittelwert  $\bar{x}$*  und die *Standardabweichung  $s$*  der Stichprobe mit Hilfe der folgenden (schrittweise aufgebauten) Tabelle:

$i$	$\frac{x_i}{\Omega}$	$\frac{x_i - \bar{x}}{\Omega}$	$\frac{(x_i - \bar{x})^2}{\Omega^2}$
1	100	0	0
2	104	4	16
3	98	-2	4
4	96	-4	16
5	101	1	1
6	104	4	16
7	98	-2	4
8	99	-1	1
$\sum$	800	0	58

$$\bar{x} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{i=1}^8 x_i = \frac{1}{8} \cdot 800 \Omega = 100 \Omega$$

$$s^2 = \frac{1}{8-1} \cdot \sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{7} \cdot 58 \Omega^2 = 8,286 \Omega^2$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{8,286 \Omega^2} = 2,878 \Omega$$

**4. Schritt:** Mit  $n = 8$ ,  $c = 2,365$  und  $s = 2,878 \Omega$  berechnen wir zweckmäßigerweise zunächst die folgende *Hilfsgröße*:

$$k = c \frac{s}{\sqrt{n}} = 2,365 \cdot \frac{2,878 \Omega}{\sqrt{8}} = 2,406 \Omega$$

Das *Vertrauensintervall* für den unbekannten *Mittelwert*  $\mu$  der normalverteilten Grundgesamtheit lautet damit:

$$\bar{x} - k \leq \mu \leq \bar{x} + k$$

$$(100 - 2,406) \Omega \leq \mu \leq (100 + 2,406) \Omega$$

$$97,594 \Omega \leq \mu \leq 102,406 \Omega$$

Der *wahre* Wert des Mittelwertes  $\mu$  liegt daher mit einem *Vertrauen* von 95 % in diesem Intervall der Länge  $l = 2k = 4,812 \Omega$ .

### 3.4.4 Vertrauensintervalle für die unbekannte Varianz $\sigma^2$ einer Normalverteilung

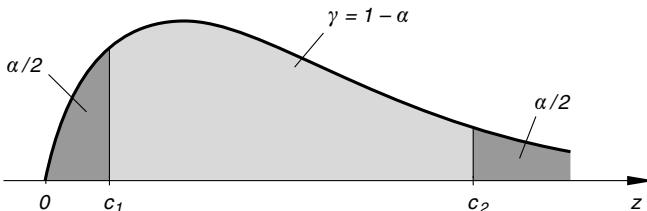
Um die *Gleichmäßigkeit* eines Massenproduktes beurteilen zu können, benötigt man neben dem Mittelwert  $\mu$  der interessierenden Zufallsgröße  $X$  noch zusätzliche Kenntnisse über deren *Varianz*  $\sigma^2$ , die ja als Streuungsmaß Aufschluss über die *Größe* der Schwankungen gibt, denen das Merkmal  $X$  unterworfen ist. Dieser Parameter ist jedoch in der Praxis oft *unbekannt* und muss daher *geschätzt* werden. Ähnlich wie für den Mittelwert  $\mu$  lässt sich auch für die *Varianz*  $\sigma^2$  einer *normalverteilten* Grundgesamtheit ein *Vertrauens-* oder *Konfidenzintervall* bestimmen. Bei unseren weiteren Überlegungen gehen wir wiederum von einer *normalverteilten* Grundgesamtheit mit dem (bekannten oder unbekannten) Mittelwert  $\mu$  und der *unbekannten* Varianz  $\sigma^2$  aus. Wir stellen uns dabei die Aufgabe, aus einer konkreten Zufallsstichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ein *Vertrauens-* oder *Konfidenzintervall* für die unbekannte *Varianz*  $\sigma^2$  zu bestimmen. Als *Schätzfunktion* für die Varianz  $\sigma^2$  verwenden wir die bereits aus Abschnitt 3.2.4 bekannte *Stichprobenfunktion*  $S^2$  und bilden mit ihr die Zufallsvariable (Stichprobenfunktion)

$$Z = (n - 1) \frac{S^2}{\sigma^2} \quad (\text{III-119})$$

die einer *Chi-Quadrat-Verteilung* mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden genügt. Nach *Vorgabe* eines bestimmten Vertrauensniveaus  $\gamma = 1 - \alpha$  lassen sich dann zwei Schranken  $c_1$  und  $c_2$  so bestimmen, dass diese Zufallsvariable mit der gewählten Wahrscheinlichkeit  $\gamma = 1 - \alpha$  Werte aus dem Intervall  $c_1 \leq Z \leq c_2$  annimmt. Die Berechnung der Intervallgrenzen erfolgt dabei aus der Bedingung

$$P(c_1 \leq Z \leq c_2) = \gamma = 1 - \alpha \quad (\text{III-120})$$

Der Flächenanteil der *Irrtumswahrscheinlichkeit*  $\alpha$  wird dabei *gleichmäßig* auf *beide* Seiten der Dichtefunktion  $f(z)$  verteilt (Bild III-28).



**Bild III-28** Zur Berechnung der Schranken  $c_1$  und  $c_2$  (die *hellgraue* Fläche entspricht dem Vertrauensniveau  $\gamma = 1 - \alpha$ , die *dunkelgraue* Fläche der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$ )

Für die Intervallgrenzen  $c_1$  und  $c_2$  ergeben sich dann aus Bild III-28 unmittelbar die folgenden *Bestimmungsgleichungen*:

$$\begin{aligned} P(Z \leq c_1) &= F(c_1) = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} (1 - \gamma) \\ P(Z \leq c_2) &= F(c_2) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{1}{2} (1 - \gamma) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \gamma = \frac{1}{2} (1 + \gamma) \end{aligned} \quad (\text{III-121})$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich  $c_1$  und  $c_2$  mit Hilfe der *tabellierten Verteilungsfunktion  $F(z)$*  der *Chi-Quadrat-Verteilung* mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden leicht berechnen (Tabelle 3 im Anhang). Aus der Ungleichung

$$c_1 \leq Z \leq c_2 \quad \text{oder} \quad c_1 \leq (n - 1) \frac{S^2}{\sigma^2} \leq c_2 \quad (\text{III-122})$$

folgt dann nach elementaren Umformungen eine entsprechende Ungleichung für die *Varianz  $\sigma^2$* :

$$(n - 1) \frac{S^2}{c_2} \leq \sigma^2 \leq (n - 1) \frac{S^2}{c_1} \quad (\text{III-123})$$

Für die *Schätzfunktion  $S^2$*  der Varianz setzen wir noch den aus der konkreten Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ermittelten *Schätzwert  $s^2$*  (d. h. die *Stichprobenvarianz*) ein und erhalten dann das gewünschte *Vertrauens- oder Konfidenzintervall* für die unbekannte *Varianz  $\sigma^2$*  in der Form

$$(n - 1) \frac{s^2}{c_2} \leq \sigma^2 \leq (n - 1) \frac{s^2}{c_1} \quad (\text{III-124})$$

Wir fassen die wichtigsten Ergebnisse zusammen:

### Bestimmung eines Vertrauensintervalls für die unbekannte Varianz $\sigma^2$ einer Normalverteilung

$X$  sei eine *normalverteilte* Zufallsvariable mit dem (bekannten oder unbekannten) Mittelwert  $\mu$  und der unbekannten Varianz  $\sigma^2$ . Für die Varianz  $\sigma^2$  lässt sich dann unter Verwendung einer konkreten Zufallsstichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  wie folgt schrittweise ein *Vertrauens- oder Konfidenzintervall* bestimmen:

1. Wir wählen zunächst ein bestimmtes *Vertrauensniveau  $\gamma$*  (in der Praxis meist  $\gamma = 0,95 = 95\%$  oder  $\gamma = 0,99 = 99\%$ ).
2. Berechnung der beiden Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  aus der Bedingung

$$P(c_1 \leq Z \leq c_2) = \gamma \quad (\text{III-125})$$

für die einer *Chi-Quadrat-Verteilung* mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden genügenden Zufallsvariablen

$$Z = (n - 1) \frac{S^2}{\sigma^2} \quad (\text{III-126})$$

oder aus den beiden *gleichwertigen* Bestimmungsgleichungen

$$F(c_1) = \frac{1}{2} (1 - \gamma) \quad \text{und} \quad F(c_2) = \frac{1}{2} (1 + \gamma) \quad (\text{III-127})$$

unter Verwendung von Tabelle 3 im Anhang (siehe hierzu die *hellgrau* unterlegte Fläche in Bild III-28).

Dabei bedeuten:

$S^2$ : Schätzfunktion für die unbekannte Varianz  $\sigma^2$  der normalverteilten Grundgesamtheit (siehe hierzu Abschnitt 3.2.4)

$n$ : Umfang der verwendeten Stichprobe

$F(z)$ : Verteilungsfunktion der Chi-Quadrat-Verteilung mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden (Tabelle 3 im Anhang)

3. Berechnung der Varianz  $s^2$  der konkreten Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .
4. Das Vertrauensintervall für die unbekannte Varianz  $\sigma^2$  der normalverteilten Grundgesamtheit lautet dann wie folgt:

$$\frac{(n-1)s^2}{c_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{c_1} \quad (\text{III-128})$$

Der wahre Wert der Varianz  $\sigma^2$  liegt dabei mit einem Vertrauen von  $\gamma \cdot 100\%$  in diesem Intervall.

### Anmerkungen

- (1) Häufig wird anstatt von  $\gamma$  die Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  vorgegeben (meist  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ). Das Vertrauensniveau oder die statistische Sicherheit ist dann  $\gamma = 1 - \alpha$ .
- (2) Das Vertrauensintervall besitzt die Länge  $l = \frac{(n-1)(c_2 - c_1)s^2}{c_1 c_2}$ .
- (3) Aus dem Vertrauensintervall (III-128) für die Varianz  $\sigma^2$  erhält man durch Wurzelziehen ein entsprechendes Vertrauensintervall für die Standardabweichung  $\sigma$ .

### ■ Beispiel

Wir kommen nochmals auf das Beispiel des vorangegangenen Abschnitts zurück (Messung von  $n = 8$  ohmschen Widerständen aus einer normalverteilten Grundgesamtheit, deren Mittelwert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  beide unbekannt sind) und bestimmen nun ein Vertrauens- oder Konfidenzintervall für die unbekannte Varianz  $\sigma^2$  bei einem vorgegebenen Vertrauensniveau von  $\gamma = 0,95 = 95\%$ .

**1. Schritt:** Das Vertrauensniveau ist bereits vorgegeben:  $\gamma = 0,95$ . Die Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt somit  $\alpha = 1 - \gamma = 1 - 0,95 = 0,05$ .

**2. Schritt:** Die Konstanten (Schranken)  $c_1$  und  $c_2$  werden aus den folgenden Bestimmungsgleichungen ermittelt (Bild III-29):

$$F(c_1) = \frac{1}{2} (1 - \gamma) = \frac{1}{2} (1 - 0,95) = 0,025$$

$$F(c_2) = \frac{1}{2} (1 + \gamma) = \frac{1}{2} (1 + 0,95) = 0,975$$

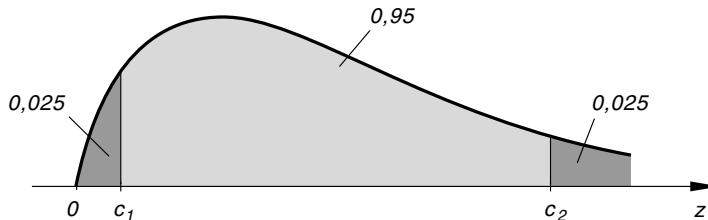


Bild III-29

Unter Verwendung von Tabelle 3 im Anhang erhalten wir für  $f = n - 1 = 8 - 1 = 7$  Freiheitsgrade die folgenden Werte:

$$F(c_1) = 0,025 \xrightarrow{f=7} c_1 = z_{(0,025;7)} = 1,69$$

$$F(c_2) = 0,975 \xrightarrow{f=7} c_2 = z_{(0,975;7)} = 16,01$$

Die gesuchten Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  entsprechen somit den beiden Quantilen  $z_{(0,025;7)} = 1,69$  und  $z_{(0,975;7)} = 16,01$  der *Chi-Quadrat-Verteilung* mit  $f = 7$  Freiheitsgraden.

**3. Schritt:** Die Varianz  $s^2$  der Stichprobe wurde bereits im Beispiel des vorangegangenen Abschnitts 3.4.3 zu  $s^2 = 8,286 \Omega^2$  ermittelt.

**4. Schritt:** Mit  $n = 8$ ,  $s^2 = 8,286 \Omega^2$ ,  $c_1 = 1,69$  und  $c_2 = 16,01$  berechnen wir zunächst die beiden *Vertrauensgrenzen*:

$$k_1 = \frac{(n - 1) s^2}{c_2} = \frac{(8 - 1) \cdot 8,286 \Omega^2}{16,01} = 3,623 \Omega^2$$

$$k_2 = \frac{(n - 1) s^2}{c_1} = \frac{(8 - 1) \cdot 8,286 \Omega^2}{1,69} = 34,321 \Omega^2$$

Das *Vertrauensintervall* für die unbekannte *Varianz*  $\sigma^2$  der normalverteilten Grundgesamtheit lautet damit:

$$k_1 \leq \sigma^2 \leq k_2$$

$$3,623 \Omega^2 \leq \sigma^2 \leq 34,321 \Omega^2$$

Der *wahre* (aber unbekannte) Wert der Varianz  $\sigma^2$  liegt dabei mit einem Vertrauen von 95 % in diesem Intervall.

Für die *Standardabweichung* erhält man damit das folgende *Vertrauensintervall* (bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von ebenfalls 5 %):

$$\sqrt{3,623 \Omega^2} \leq \sigma \leq \sqrt{34,321 \Omega^2}$$

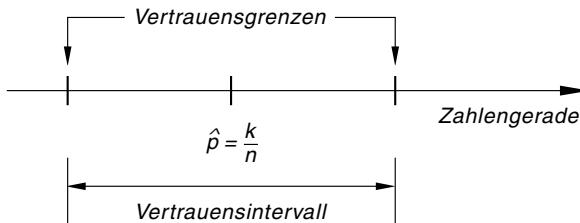
$1,903 \Omega \leq \sigma \leq 5,858 \Omega$

■

### 3.4.5 Vertrauensintervalle für einen unbekannten Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomialverteilung)

Auch für den *unbekannten* Parameter  $p$  einer *binomialverteilten* Grundgesamtheit lässt sich auf dem vorgegebenen Vertrauensniveau  $\gamma = 1 - \alpha$  aus einer konkreten Stichprobe ein *Vertrauens-* oder *Konfidenzintervall* bestimmen, das mit einem *Vertrauen* von  $\gamma \cdot 100\%$  den *wahren* Wert des Parameters  $p$  enthält. Wir gehen dabei von den folgenden Überlegungen aus:

$p$  sei die *unbekannte* Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem *Bernoulli-Experiment* das Ereignis  $A$  eintrete. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des *komplementären* Ereignisses  $\bar{A}$  ist dann  $q = 1 - p$ . In Abschnitt 3.2.5 haben wir uns bereits mit der *Schätzung* des Parameters  $p$  beschäftigt und dabei gezeigt, wie man aus einer konkreten Stichprobe einen *Schätzwert*  $\hat{p}$  erhält. Eine solche Stichprobe besteht in einer  $n$ -fachen Ausführung des *Bernoulli-Experiments*, wobei die Anzahl  $k$  der dabei erzielten „Erfolge“ festgestellt wird (das Eintreten des Ereignisses  $A$  werten wir wiederum als „Erfolg“, das Eintreten des *komplementären* Ereignisses  $\bar{A}$  als „Misserfolg“). Dann ist  $\hat{p} = k/n$  ein *Schätz-* oder *Näherungswert* für die unbekannte *Erfolgswahrscheinlichkeit* (den *Anteilswert*)  $p$ . Für diesen Parameter lässt sich nun unter gewissen Voraussetzungen auch ein *Vertrauens-* oder *Konfidenzintervall* bestimmen, dessen Grenzen symmetrisch zum Schätzwert  $\hat{p} = k/n$  angeordnet sind (Bild III-30).



**Bild III-30** Vertrauensintervall für den unbekannten Anteilswert  $p$   
(Parameter  $p$  einer Binomialverteilung)

Bei der Herleitung des Vertrauensintervalls gehen wir von der Zufallsvariablen

$X = \text{Anzahl der „Erfolge“ bei einer } n\text{-fachen Ausführung des Bernoulli-Experiments}$

aus, die nach Abschnitt 6.1 aus Kapitel II *binomialverteilt* ist mit den Parametern  $n$  und  $p$ . Setzen wir *umfangreiche* Stichproben voraus, was wir im Folgenden stets tun wollen, so folgt aus dem *Grenzwertsatz von Moivre und Laplace* unmittelbar, dass diese Zufallsvariable sogar als *nahezu normalverteilt* betrachtet werden kann mit dem Mittel- oder Erwartungswert  $E(X) = \mu = np$  und der Varianz  $\text{Var}(X) = \sigma^2 = np(1-p)$ .

Dann aber ist die zugehörige *standardisierte* Zufallsvariable

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad (\text{III-129})$$

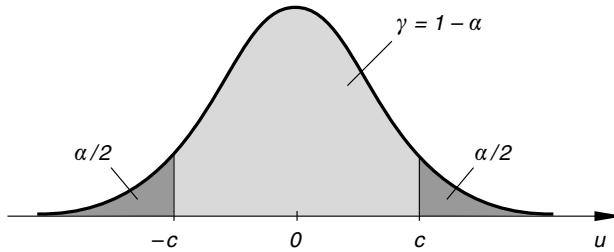
näherungsweise *standardnormalverteilt*. Als Schätzfunktion für den unbekannten Anteilswert  $p$  (Parameter  $p$  der Binomialverteilung) verwenden wir die bereits aus den Abschnitten 3.2.5 und 3.3.2.1 bekannte *Maximum-Likelihood-Schätzfunktion*

$$\hat{P} = \frac{X}{n} \quad (\text{III-130})$$

Somit ist  $X = n\hat{P}$  und die standardnormalverteilte Zufallsvariable  $U$  aus Gleichung (III-129) lässt sich auch in der Form

$$U = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{n\hat{P} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad (\text{III-131})$$

darstellen. Die *Grenzen* des gesuchten Vertrauensintervalls werden nun so bestimmt, dass die Zufallsvariable  $U$  mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit  $\gamma = 1 - \alpha$  Werte aus dem symmetrischen Intervall  $-c \leq U \leq c$  annimmt (Bild III-31).



**Bild III-31** Zur Berechnung der Schranke  $c$  (die hellgrau unterlegte Fläche entspricht dem gewählten Vertrauensniveau  $\gamma = 1 - \alpha$ , die dunkelgrau unterlegte Fläche der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$ )

Aus der Bedingung

$$P(-c \leq U \leq c) = \gamma = 1 - \alpha \quad (\text{III-132})$$

lässt sich dann die Schranke  $c$  mit Hilfe von Tabelle 2 im Anhang (Tabelle der *Quantile der Standardnormalverteilung*) leicht bestimmen. Aus der Ungleichung

$$-c \leq U \leq c \quad \text{oder} \quad -c \leq \frac{n\hat{P} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq c \quad (\text{III-133})$$

erhalten wir dann nach einigen elementaren Umformungen eine entsprechende Ungleichung für den Parameter  $p$ . Sie lautet:

$$\hat{P} - \frac{c}{n} \sqrt{np(1-p)} \leq p \leq \hat{P} + \frac{c}{n} \sqrt{np(1-p)} \quad (\text{III-134})$$

Die beiden Intervallgrenzen enthalten noch jeweils die Schätzfunktion  $\hat{P}$  sowie den unbekannten Parameter  $p$ . Wir ersetzen diese Größen durch den aus der konkreten Stichprobe ermittelten *Schätzwert*  $\hat{p}$  und erhalten auf diese Weise eine brauchbare *Näherung* für das gesuchte *Vertrauensintervall* des Parameters  $p$ :

$$\hat{p} - \frac{c}{n} \sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})} \leq p \leq \hat{p} + \frac{c}{n} \sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p})} \quad (\text{III-135})$$

Wir fassen die einzelnen Schritte wie folgt zusammen:

**Bestimmung eines Vertrauensintervalls für einen unbekannten Anteilswert  $p$  (Parameter  $p$  einer Binomialverteilung) unter Verwendung einer umfangreichen Stichprobe**

Der Parameter  $p$  einer Binomialverteilung sei *unbekannt*. Wir entnehmen daher zunächst der binomialverteilten Grundgesamtheit eine *umfangreiche* Stichprobe, indem wir das *Bernoulli-Experiment*, das dieser Verteilung zugrunde liegt,  $n$ -mal nacheinander ausführen und dabei die Anzahl  $k$  der erzielten „Erfolge“ feststellen<sup>24)</sup>. Als „Erfolg“ werten wir dabei wiederum das Eintreten des Ereignisses  $A$ , als „Misserfolg“ demnach das Eintreten des zu  $A$  *komplementären* Ereignisses  $\bar{A}$ . Die *beobachtete relative Häufigkeit* für das Ereignis  $A$  („Erfolg“) beträgt somit  $h(A) = k/n$  und ist bekanntlich ein *Schätzwert* für den unbekannten Parameter  $p$  der Binomialverteilung (Anteilswert  $p$ ).

Unter Verwendung dieser Stichprobe lässt sich dann für den unbekannten Parameter  $p$  schrittweise wie folgt ein *Vertrauens-* oder *Konfidenzintervall* konstruieren:

1. Wir wählen zunächst ein bestimmtes Vertrauensniveau  $\gamma$  (in der Praxis meist  $\gamma = 0,95 = 95\%$  oder  $\gamma = 0,99 = 99\%$ ).
2. Berechnung der Konstanten  $c$  aus der Bedingung

$$P(-c \leq U \leq c) = \gamma \quad (\text{III-136})$$

für die (näherungsweise) *standardnormalverteilte* Zufallsvariable

$$U = \frac{n\hat{P} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad (\text{III-137})$$

unter Verwendung von Tabelle 2 im Anhang (siehe hierzu die *hellgrau* unterlegte Fläche in Bild III-31).

Dabei bedeuten:

$\hat{P}$ : *Schätzfunktion* für den Parameter  $p$  einer binomialverteilten Grundgesamtheit (siehe hierzu Abschnitt 3.2.5)

$n$ : *Umfang* der verwendeten Stichprobe

<sup>24)</sup> Die Stichprobe wird als *umfangreich* angesehen, wenn der Stichprobenumfang  $n$  die Bedingung  $n\hat{p}(1-\hat{p}) > 9$  erfüllt.  $\hat{p}$  ist dabei der aus der Stichprobe erhaltene *Schätzwert* für den unbekannten Parameter  $p$ .

3. Berechnung des Schätzwertes  $\hat{p} = k/n$  für den Parameter  $p$  aus der konkreten Stichprobe („ $k$  Erfolge bei insgesamt  $n$  Ausführungen des Bernoulli-Experiments“).
4. Unter der Voraussetzung, dass die Bedingung

$$\Delta = n\hat{p}(1 - \hat{p}) > 9 \quad (\text{III-138})$$

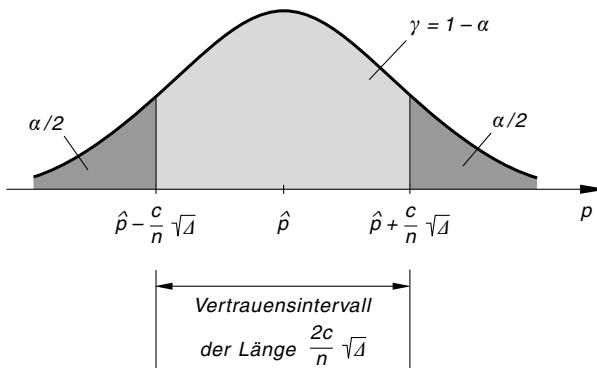
für eine *umfangreiche* Stichprobe erfüllt ist, lautet das *Vertrauensintervall* für den unbekannten Parameter  $p$  der binomialverteilten Grundgesamtheit wie folgt:

$$\hat{p} - \frac{c}{n} \sqrt{\Delta} \leq p \leq \hat{p} + \frac{c}{n} \sqrt{\Delta} \quad (\text{III-139})$$

(siehe hierzu Bild III-32). Der *wahre* Wert des Parameters  $p$  liegt dann mit einem *Vertrauen* von  $\gamma \cdot 100\%$  in diesem Intervall.

#### Anmerkungen

- (1) Häufig wird auch die *Irrtumswahrscheinlichkeit*  $\alpha$  vorgegeben (meist  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ). Das *Vertrauensniveau* oder die *statistische Sicherheit* ist dann  $\gamma = 1 - \alpha$ .
- (2) Die Länge  $l = 2(c/n) \sqrt{\Delta}$  des Vertrauensintervalls hängt noch vom Vertrauensniveau  $\gamma = 1 - \alpha$ , dem Stichprobenumfang  $n$  und dem Schätzwert  $\hat{p} = k/n$  für den Anteilswert (Parameter)  $p$  ab (siehe Bild III-32). Eine *Verkürzung* des Intervalls lässt sich dabei stets durch eine entsprechende *Vergrößerung* des Stichprobenumfangs  $n$  erreichen (die Intervalllänge ist umgekehrt proportional zur Quadratwurzel aus dem Stichprobenumfang  $n$ ).



**Bild III-32** Vertrauensintervall für den unbekannten Anteilswert  $p$   
(Parameter  $p$  einer Binomialverteilung)

## ■ Beispiel

Ein bestimmtes mechanisches Bauelement wird in großer Stückzahl hergestellt. Mit Hilfe einer *umfangreichen* Stichprobe soll der *Ausschussanteil*  $p$  in dieser Produktion geschätzt werden. Zu diesem Zweck wurde der *binomialverteilten* Grundgesamtheit eine Stichprobe vom Umfang  $n = 500$  entnommen. In ihr befanden sich  $k = 25$  *nicht funktionsfähige* (also defekte) Bauelemente. Wir bestimmen nun für den unbekannten Parameter (Ausschussanteil)  $p$  ein *Vertrauens-* oder *Konfidenzintervall* zum Vertrauensniveau  $\gamma = 0,99 = 99\%$ , wobei wir schrittweise wie folgt vorgehen:

**1. Schritt:** Das Vertrauensniveau ist bereits vorgegeben:  $\gamma = 0,99$ .

**2. Schritt:** Wir berechnen die Konstante  $c$  aus der Bedingung

$$P(-c \leq U \leq c) = \gamma = 0,99$$

(Bild III-33). Unter Verwendung von Tabelle 2 im Anhang erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} P(-c \leq U \leq c) &= \phi(c) - \phi(-c) = \phi(c) - [1 - \phi(c)] = \\ &= \phi(c) - 1 + \phi(c) = 2 \cdot \phi(c) - 1 = 0,99 \Rightarrow \\ 2 \cdot \phi(c) &= 1,99 \Rightarrow \phi(c) = 0,995 \rightarrow c = u_{0,995} = 2,576 \end{aligned}$$

Die gesuchte Konstante (Schranke) ist demnach das Quantil  $u_{0,995} = 2,576$  der Standardnormalverteilung.

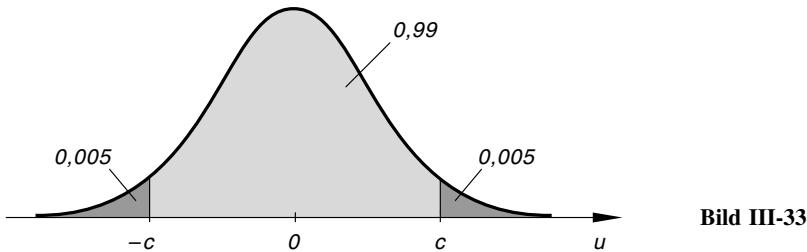


Bild III-33

**3. Schritt:** Mit  $n = 500$  und  $k = 25$  ergibt sich für den unbekannten Ausschussanteil  $p$  der folgende *Schätzwert*:

$$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{25}{500} = \frac{5}{100} = 0,05 = 5\%$$

**4. Schritt:** Die Bedingung (III-138) für eine *umfangreiche* Stichprobe ist hier erfüllt:

$$\Delta = n\hat{p}(1 - \hat{p}) = 500 \cdot 0,05(1 - 0,05) = 23,75 > 9$$

Zweckmäßigerweise berechnen wir jetzt zunächst die folgende *Hilfsgröße*:

$$k = \frac{c}{n} \sqrt{\Delta} = \frac{2,576}{500} \sqrt{23,75} = 0,0251$$

Das *Vertrauens- oder Konfidenzintervall* für den unbekannten *Ausschussanteil*  $p$  lautet somit:

$$\hat{p} - k \leq p \leq \hat{p} + k$$

$$0,05 - 0,0251 \leq p \leq 0,05 + 0,0251$$

$$0,0249 \leq p \leq 0,0751$$

Der *wahre* Wert des Parameters  $p$  liegt daher mit einem *Vertrauen* von 99 % zwischen rund 2,5 % und 7,5 %. ■

### 3.4.6 Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer beliebigen Verteilung

In den Abschnitten 3.4.2 und 3.4.3 haben wir uns ausführlich mit den Vertrauensintervallen für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  einer *normalverteilten* Zufallsvariablen  $X$  beschäftigt. In den Anwendungen hat man es jedoch auch häufig mit Zufallsvariablen zu tun, deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen *unbekannt* sind. Wir gehen daher bei unseren weiteren Überlegungen von einer *beliebig verteilten* Zufallsvariablen  $X$  aus. Für den unbekannten *Mittelwert*  $\mu$  dieser (nicht näher bekannten) Verteilung soll nun näherungsweise ein *Vertrauens- oder Konfidenzintervall* bestimmt werden. Als *Schätzfunktion* für den Mittelwert  $\mu$  verwenden wir wiederum die bereits bekannte Stichprobenfunktion

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i \quad (\text{III-140})$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$  sind dabei Zufallsvariable mit der *gleichen* Verteilung wie  $X$  (mit dem Mittelwert  $\mu$  und der Varianz  $\sigma^2$ ). Bekanntlich besitzt dann die Schätzfunktion  $\bar{X}$  den Mittelwert  $E(\bar{X}) = \mu$  und die Varianz  $\text{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$ .

Die Art der Verteilung von  $X$  und damit auch von  $\bar{X}$  ist und bleibt aber weiterhin *unbekannt*! Aus dem *Zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung* folgt jedoch, dass die Schätzfunktion  $\bar{X}$  als *annähernd normalverteilt* betrachtet werden kann mit dem Mittelwert  $\mu$  und der Varianz  $\sigma^2/n$ , wenn nur der Umfang  $n$  der verwendeten Zufallsstichprobe *hinreichend groß* ist (**Faustregel**:  $n > 30$ ). Dies aber bedeutet, dass wir die bereits in den Abschnitten 3.4.2 und 3.4.3 besprochenen Methoden zur Konstruktion von Vertrauensintervallen für den Mittelwert  $\mu$  einer *normalverteilten* Grundgesamtheit als *Näherungsverfahren* auch auf *beliebig verteilte* Zufallsvariable anwenden dürfen. Mit anderen Worten: *Die Schätzfunktion  $\bar{X}$  kann als nahezu normalverteilt angenommen werden, obwohl keine normalverteilte (sondern eine beliebig verteilte) Grundgesamtheit vorliegt, sofern der Stichprobenumfang hinreichend groß ist.*

Wir fassen diese für die Anwendungen wichtigen Aussagen wie folgt zusammen:

### Vertrauensintervalle für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer beliebig verteilten Grundgesamtheit

$X$  sei eine *beliebig verteilte* Zufallsvariable mit dem *unbekannten* Mittelwert  $\mu$  und der (bekannten oder unbekannten) Varianz  $\sigma^2$ . Für die Konstruktion von *Vertrauensintervallen* für den Mittelwert  $\mu$  gelten dann bei Verwendung *hinreichend großer* Stichproben (**Faustregel**: Stichprobenumfang  $n > 30$ ) die bereits in den Abschnitten 3.4.2 und 3.4.3 beschriebenen Methoden. Sie liefern in guter Näherung *brauchbare* Vertrauensintervalle, wobei noch *zwei* Fälle zu unterscheiden sind:

1. Ist die Varianz  $\sigma^2$  der Grundgesamtheit *bekannt*, so ist das in Abschnitt 3.4.2 beschriebene Verfahren anzuwenden (*Standardnormalverteilung*).
2. Bei *unbekannter* Varianz  $\sigma^2$  ist dagegen die in Abschnitt 3.4.3 dargestellte Methode anzuwenden (*t-Verteilung* von *Student* mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden).

Allgemein gilt dabei: Die Näherung ist umso *besser*, je *größer* der Umfang  $n$  der verwendeten Stichprobe ist. Für *großes*  $n$  besteht dann *kein wesentlicher* Unterschied mehr zwischen den beiden Vertrauensintervallen, die man durch die Fallunterscheidung erhält.

#### Anmerkung

Auch für die unbekannte *Varianz*  $\sigma^2$  einer *beliebigen* Verteilung lassen sich Näherungsverfahren zur Bestimmung von Vertrauensintervallen angeben. Wir verweisen auf die spezielle Fachliteratur (siehe Literaturverzeichnis).

## 4 Statistische Prüfverfahren für die unbekannten Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Parametertests“)

### 4.1 Ein einführendes Beispiel

Wir interessieren uns für den *mittleren* Benzinverbrauch eines bestimmten Autotyps und führen aus diesem Grund die stetige Zufallsvariable

$X = \text{Benzinverbrauch eines Autos vom ausgewählten Typ}$

ein (alle Angaben üblicherweise in „Liter pro 100 km“).

Bei unseren weiteren Überlegungen gehen wir dabei von der realistischen Annahme aus, dass der Benzinverbrauch  $X$  eine *normalverteilte* Zufallsvariable mit dem Mittelwert  $\mu$  und der Varianz  $\sigma^2$  darstellt. Von Seiten des Automobilherstellers wird ein *mittlerer* Benzinverbrauch von  $\mu = \mu_0$  angegeben. Diese Angabe soll nun durch ein geeignetes statistisches Verfahren auf der Basis einer *Stichprobenuntersuchung* überprüft werden. Dabei gehen wir schrittweise wie folgt vor:

- (1) Zunächst formulieren wir die Angabe des Herstellers über den mittleren Benzinverbrauch als sog. *Nullhypothese*:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad (\text{III-141})$$

Mit anderen Worten: Wir gehen zunächst von der *Annahme* oder *Vermutung* aus, dass die Angaben des Herstellers tatsächlich *zutreffen*. Alternativ zur Nullhypothese  $H_0$  stellen wir dann die Hypothese

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad (\text{III-142})$$

zur Diskussion. Diese sog. *Alternativhypothese* besagt, dass der mittlere Benzinverbrauch  $\mu$  von  $\mu_0$  *verschieden*, d. h. kleiner *oder* größer als  $\mu_0$  ist. Sollten wir nämlich nach Durchführung des Prüfverfahrens zu dem Schluss kommen, dass die Angaben des Herstellers (d. h. die Nullhypothese  $H_0$ ) *nicht haltbar* sind, so dürfen wir mit ruhigem Gewissen davon ausgehen, dass die *Alternativhypothese*  $H_1$  zutrifft.

- (2) Um die Nullhypothese  $H_0$  zu überprüfen, wählen wir nach dem Zufallsprinzip  $n$  Testfahrzeuge aus, ermitteln ihren jeweiligen Benzinverbrauch  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) und vergleichen dann den hieraus gebildeten *Mittelwert*  $\bar{x}$  mit der Angabe des Herstellers, d. h. mit dem Wert  $\mu = \mu_0$ . Im Sinne der Statistik haben wir der normalverteilten Grundgesamtheit<sup>25)</sup> eine *Stichprobe* vom Umfang  $n$  entnommen und daraus anschließend den *Stichprobenmittelwert*  $\bar{x}$  berechnet. Dieser spezielle Wert ist eine *Realisierung* der Zufallsvariablen  $\bar{X}$ , d. h. der bereits aus Abschnitt 3.2.2 bekannten *Schätzfunktion* für den *Mittelwert*  $\mu$  der Grundgesamtheit.  $\bar{X}$  wird in diesem Zusammenhang auch als *Testgröße* oder *Testvariable* bezeichnet.

Für *verschiedene* Stichproben werden wir dabei i. Allg. *verschiedene* Mittelwerte erhalten und diese wiederum werden vom *hypothetischen* Mittelwert  $\mu = \mu_0$  mehr oder weniger stark *abweichen*. Wir müssen nun in der Lage sein anhand eines geeigneten Maßes feststellen zu können, ob die beobachtete Abweichung des Stichprobenmittelwertes  $\bar{x}$  vom hypothetischen Mittelwert  $\mu = \mu_0$  *zufallsbedingt* oder aber *signifikant* ist, d. h. ihre Ursache in der *falschen* Nullhypothese  $H_0$  hat.

Um einen *sinnvollen Vergleich* des Stichprobenmittelwertes  $\bar{x}$  mit der Herstellerangabe (Nullhypothese)  $\mu = \mu_0$  zu ermöglichen, wählen wir nun eine (kleine) sog. *Signifikanzzahl*  $\alpha$  zwischen 0 und 1. Etwas später werden wir dann sehen, dass diese Zahl die *Wahrscheinlichkeit* für eine bestimmte *Fehlentscheidung* darstellt, die man bei *jedem* statistischen Prüfverfahren („Test“) in Kauf nehmen muss. Die Signifikanzzahl  $\alpha$  wird daher auch folgerichtig als *Irrtumswahrscheinlichkeit* bezeichnet<sup>26)</sup>.

<sup>25)</sup> Als *Grundgesamtheit* können wir beispielsweise die Menge aller in einem *Monat* produzierten Autos vom ausgewählten Typ betrachten.

<sup>26)</sup> Aus dem genannten Grund wird  $\alpha$  in der Praxis *klein* gewählt. Übliche Werte sind z. B.  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ .

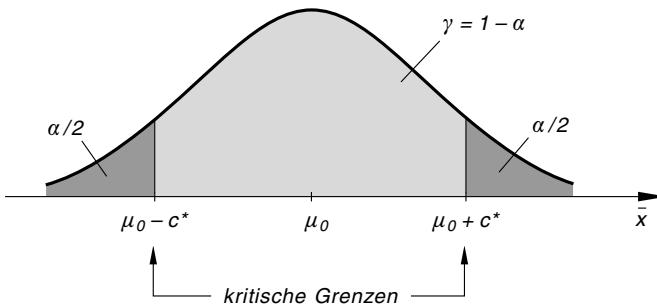
- (3) Nach der Wahl der Signifikanzzahl (Irrtumswahrscheinlichkeit)  $\alpha$  lässt sich nun eine Konstante  $c^*$ , auch *kritischer Wert* genannt, so bestimmen, dass die *Testgröße*  $\bar{X}$  bei *richtiger Nullhypothese*  $H_0$  mit der *statistischen Sicherheit*  $\gamma = 1 - \alpha$  in das symmetrische Intervall

$$\mu_0 - c^* \leq \bar{X} \leq \mu_0 + c^* \quad (\text{III-143})$$

fällt (Bild III-34). Die Intervallgrenzen  $\mu_0 - c^*$  und  $\mu_0 + c^*$  heißen *kritische Grenzen*. Der *kritische Wert*  $c^*$  wird dann aus der Bedingung

$$P(\mu_0 - c^* \leq \bar{X} \leq \mu_0 + c^*)_{H_0} = \gamma = 1 - \alpha \quad (\text{III-144})$$

ermittelt, wobei man zunächst die Testgröße  $\bar{X}$  *standardisiert* (Transformation  $\bar{X} \rightarrow U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ) und anschließend die Tabelle 2 im Anhang verwendet (Tabelle der *Quantile der Standardnormalverteilung*)<sup>27)</sup>.

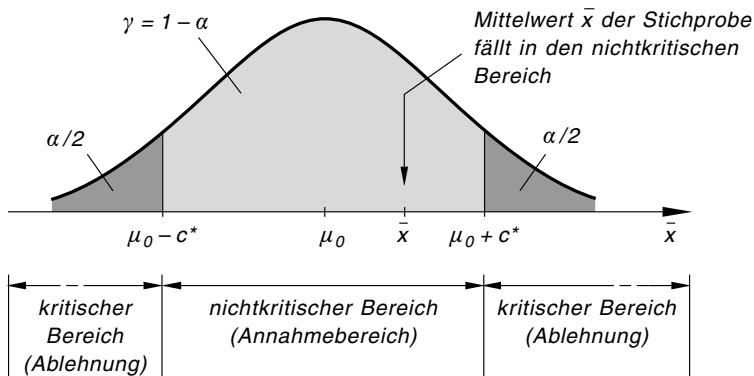


**Bild III-34** Zur Berechnung der kritischen Grenzen

- (4) Wir sind nun in der Lage, eine *Entscheidung* zu fällen, sollten dabei jedoch nie vergessen, dass diese aufgrund einer *einzigsten* Stichprobenuntersuchung zustande kommt:

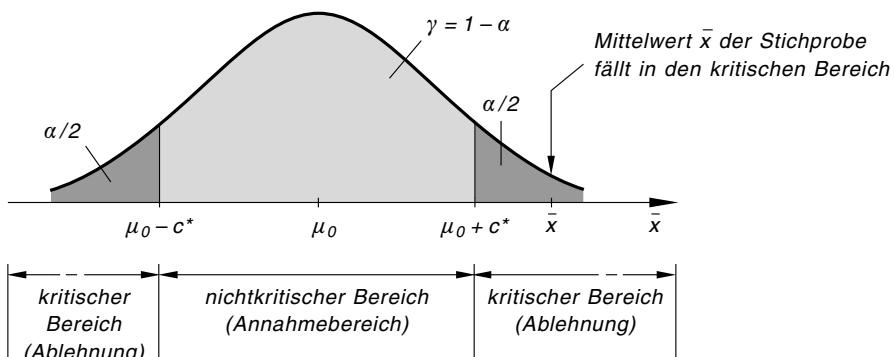
**1. Fall:** Fällt der aus einer konkreten Stichprobe ermittelte Stichprobenmittelwert  $\bar{x}$  in dieses Intervall (auch *nichtkritischer* Bereich oder *Annahmebereich* genannt), so darf die Abweichung zwischen  $\bar{x}$  und  $\mu_0$  als rein *zufallsbedingt* angesehen werden, und die Nullhypothese wird *beibehalten*, d. h. sie kann *nicht abgelehnt* oder *verworfen* werden (Bild III-35). Mit anderen Worten: Die Auswertung unserer Stichprobe liefert *keinen* Grund, an den Angaben des Automobilherstellers bezüglich des mittleren Benzinverbrauchs zu zweifeln. Wir können daher davon ausgehen, dass der mittlere Benzinverbrauch  $\mu$  tatsächlich  $\mu_0$  beträgt, ohne uns dessen jedoch *absolut* sicher zu sein. Das verwendete Stichprobenmaterial spricht zumindest *nicht* gegen die Nullhypothese. Dies aber bedeutet keineswegs, dass  $H_0$  richtig ist – die Nullhypothese kann *sowohl* richtig als auch falsch sein.

<sup>27)</sup> Die Varianz  $\sigma^2$  der normalverteilten Zufallsvariablen  $X$  wird dabei als *bekannt* vorausgesetzt. Andernfalls ist die *t-Verteilung von Student* zu verwenden (siehe hierzu auch die nachfolgenden Abschnitte 4.5.1 und 4.5.2). Die Berechnung des *kritischen* Wertes  $c^*$  erfolgt dabei immer unter der *Voraussetzung*, dass die Nullhypothese  $H_0 : \mu = \mu_0$  auch tatsächlich *zutrifft*. Der Index „ $H_0$ “ am Wahrscheinlichkeitssymbol  $P$  soll an diese Voraussetzung erinnern. Ausführliche Einzelheiten zur Berechnung des kritischen Wertes  $c^*$  erfolgen später im Zusammenhang mit den speziellen Parametertests in Abschnitt 4.5.



**Bild III-35** Der Stichprobenmittelwert  $\bar{x}$  fällt in den nichtkritischen Bereich (Annahmebereich), die Nullhypothese  $H_0 : \mu = \mu_0$  wird daher beibehalten, d. h. nicht abgelehnt

**2. Fall:** Fällt der Stichprobenmittelwert  $\bar{x}$  jedoch in den sog. *kritischen Bereich* oder *Ablehnungsbereich*, d. h. in das Intervall  $|\bar{x} - \mu_0| > c^*$ , so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Abweichung zwischen  $\bar{x}$  und  $\mu_0$  rein zufällig ist, *sehr gering*, nämlich gleich der kleinen Signifikanzzahl  $\alpha$  (also z. B. gleich  $\alpha = 5\%$  oder  $\alpha = 1\%$ ). Die Nullhypothese  $H_0$  ist daher *nicht haltbar* und muss somit zugunsten der Alternativhypothese  $H_1$  *abgelehnt* oder *verworfen* werden (Bild III-36). Mit anderen Worten: Wir können die Angaben des Automobilherstellers als *falsch* betrachten und davon ausgehen, dass der mittlere Benzinerbrauch  $\mu$  größer oder kleiner als  $\mu_0$  ist. Die Nullhypothese  $H_0 : \mu = \mu_0$  wird somit auf dem Signifikanzniveau  $\alpha$  zugunsten der Alternativhypothese  $H_1 : \mu \neq \mu_0$  *verworfen*.



**Bild III-36** Der Stichprobenmittelwert  $\bar{x}$  fällt in den kritischen Bereich, die Nullhypothese  $H_0 : \mu = \mu_0$  wird daher zugunsten der Alternativhypothese  $H_1 : \mu \neq \mu_0$  verworfen

Eines sollten wir dabei jedoch stets im Auge behalten: *Absolut sichere Rückschlüsse von einer Zufallsstichprobe auf die entsprechende Grundgesamtheit sind grundsätzlich nicht möglich.* Es besteht daher *immer* die Möglichkeit eines *Irrtums*, d. h. einer *falschen Entscheidung*. Nehmen wir einmal an, dass die Angaben unseres Automobilherstellers tatsächlich *zutreffen*, der mittlere Benzinerbrauch  $\mu$  also wie behauptet  $\mu_0$  beträgt. Dann könnten wir beim Testen auf eine Zufallsstichprobe stoßen, deren Mittelwert  $\bar{x}$  *zufälligerweise* in den *kritischen Bereich* (Ablehnungsbereich) fällt und müssten dann aufgrund unserer Kriterien die Nullhypothese  $\mu = \mu_0$  *ablehnen*, obwohl sie *richtig* ist (siehe hierzu Bild III-36). Damit aber würden wir (wenn auch *unbewusst*) eine *Fehlentscheidung* treffen. Das *Risiko* für eine solche aufgrund einer Stichprobenuntersuchung getroffene *falsche Entscheidung* ist dabei quantitativ durch die vor Testbeginn gewählte *Signifikanzzahl  $\alpha$*  gegeben. Damit ist  $\alpha$  die Wahrscheinlichkeit dafür, eine an sich *richtige Nullhypothese ablehnen* zu müssen. Die Signifikanzzahl  $\alpha$  wird somit zu Recht als *Irrtumswahrscheinlichkeit* bezeichnet.

## 4.2 Statistische Hypothesen und Parametertests

Unter einer *statistischen Hypothese* (kurz: Hypothese) versteht man irgendwelche Annahmen, Vermutungen oder Behauptungen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen oder Grundgesamtheit und deren Parameter. Ein *Parametertest* ist ein *statistisches Prüfverfahren* für einen *unbekannten Parameter* in der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen oder Grundgesamtheit, wobei die *Art* der Verteilung (d. h. der *Verteilungstyp* wie z. B. Binomialverteilung oder Gaußsche Normalverteilung) als *bekannt* vorausgesetzt wird. Ein solcher *Test* dient der *Überprüfung* einer Hypothese über einen bestimmten Parameter der Verteilung mit Hilfe einer *Stichprobenuntersuchung* der betreffenden Grundgesamtheit. Die zu überprüfende Hypothese wird meist als *Nullhypothese  $H_0$*  bezeichnet. Ihr wird oft eine *Alternativhypothese  $H_1$*  gegenübergestellt. Es ist dann das erklärte *Ziel* eines Parametertests, eine *Entscheidung* darüber zu ermöglichen, ob man die Nullhypothese  $H_0$  *beibehalten* (d. h. *nicht ablehnen*) kann, da die Auswertung des verwendeten Stichprobenmaterials in *keinem Widerspruch* zur Nullhypothese steht oder ob man sie zugunsten der Alternativhypothese  $H_1$  *ablehnen* oder *verwerfen* muss. Mit einem Parametertest kann also über Ablehnung *oder* Beibehaltung (Nichtablehnung) einer aufgestellten Hypothese („Nullhypothese“) entschieden werden. Allerdings: *Wie auch immer die Entscheidung ausfallen sollte, sie kann richtig aber auch falsch sein.*

### ■ Beispiele

- (1) Beim Zufallsexperiment „Wurf einer Münze“ tritt das Ereignis  $A$ : „Zahl“ mit der Wahrscheinlichkeit  $p = 0,5$  ein, falls die Münze *echt* (d. h. *unverfälscht*) ist. Wir prüfen die Echtheit der Münze, indem wir der *Nullhypothese*

$$H_0 : p(A) = 0,5$$

die *Alternativhypothese*

$$H_1 : p(A) \neq 0,5$$

gegenüberstellen. Es handelt sich hierbei um einen sog. *zweiseitigen Parametertest*, da die Alternativhypothese Parameterwerte nach *beiden Seiten* hin zulässt (sowohl  $p < 0,5$  als auch  $p > 0,5$  ist möglich).

- (2) Ein Großhändler bestellt direkt beim Hersteller einen größeren Posten eines bestimmten elektronischen Bauelements und vereinbart dabei, dass die Ware einen maximalen Ausschussanteil von  $p_0 = 1\%$  enthalten darf. Bei der Anlieferung der Ware wird er daher mit einem speziellen statistischen Test prüfen, ob die vereinbarte maximale Ausschussquote auch nicht überschritten wurde. Der Großhändler wird daher die Nullhypothese

$$H_0 : p \leq p_0 = 1\%$$

gegen die Alternativhypothese

$$H_1 : p > p_0 = 1\%$$

testen (sog. einseitiger Parametertest, da hier die Alternativhypothese nur Werte  $p > p_0$  zulässt). Sollte dabei die Testentscheidung zugunsten der Alternativhypothese  $H_1$  ausfallen, so darf er davon ausgehen, dass der Ausschussanteil  $p$  größer ist als vereinbart, d. h. größer als 1% ist. Er wird in diesem Fall die Annahme der gelieferten Bauelemente verweigern. Trotzdem kann die getroffene Entscheidung durchaus falsch sein! Denn alle Testentscheidungen sind grundsätzlich mit einem gewissen Risiko verbunden (nähtere Einzelheiten in Abschnitt 4.4). Die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlentscheidung ist jedoch in diesem Fall höchstens gleich der Signifikanzzahl  $\alpha$  und diese kann ja vor Testbeginn entsprechend klein gewählt werden (z. B.  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ). ■

## 4.3 Planung und Durchführung eines Parametertests

In enger Anlehnung an unser einführendes Beispiel aus Abschnitt 4.1 empfehlen wir, den Ablauf eines (zweiseitigen) Parametertests wie folgt zu planen und durchzuführen:

### Über Planung und Durchführung eines Parametertests

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen  $X$  sei zwar von der Art her bekannt, enthalte jedoch noch einen oder sogar mehrere unbekannte Parameter. So hat man es in den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen häufig mit Normalverteilungen zu tun, deren Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  bzw.  $\sigma^2$  jedoch unbekannt sind. Ein Parametertest für den unbekannten Parameter  $\vartheta$  einer Wahrscheinlichkeitsverteilung lässt sich dann schrittweise wie folgt planen und durchführen:

1. Zunächst formulieren wir Nullhypothese  $H_0$  und Alternativhypothese  $H_1$  anhand der vorgegebenen konkreten Fragestellung. Zum Beispiel testen wir die

$$\text{Nullhypothese } H_0 : \vartheta = \vartheta_0 \quad (\text{III-145})$$

(„der Parameter  $\vartheta$  besitzt den Wert  $\vartheta_0$ “) gegen die

$$\text{Alternativhypothese } H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0 \quad (\text{III-146})$$

(„der Wert des Parameters  $\vartheta$  ist von  $\vartheta_0$  verschieden“). Es handelt sich hierbei um einen zweiseitigen Parametertest, da die Alternativhypothese  $H_1$  sowohl Parameterwerte  $\vartheta < \vartheta_0$  als auch solche  $\vartheta > \vartheta_0$ , d. h. Parameterwerte nach beiden Seiten hin zulässt.

2. Wir wählen dann eine bestimmte *Signifikanzzahl*  $\alpha$ , häufig auch *Signifikanzniveau* genannt ( $0 < \alpha < 1$ ). Sie ist die *Wahrscheinlichkeit* dafür, dass die Nullhypothese  $H_0$  abgelehnt wird, obwohl sie *richtig* ist (sog. *Fehler 1. Art*; siehe hierzu Abschnitt 4.4) und heißt daher auch *Irrtumswahrscheinlichkeit*. In der Praxis wird  $\alpha$  sehr *klein* gewählt, übliche Werte sind  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ .
3. Für die Durchführung des Parametertests wird eine geeignete *Test- oder Prüfvariable*  $T$  bestimmt, die noch von den  $n$  unabhängigen Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  abhängt, die alle die *gleiche* Verteilung besitzen wie die Zufallsvariable  $X$ :

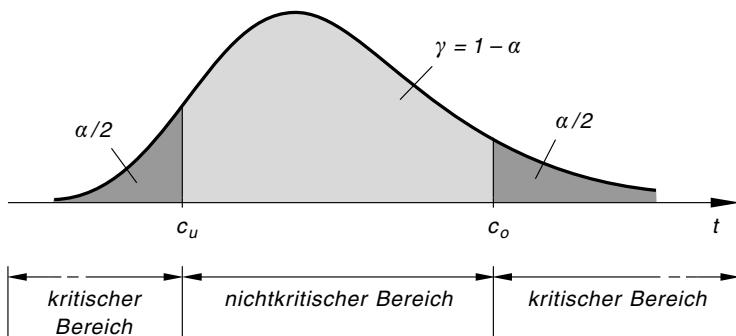
$$T = g(X_1; X_2; \dots; X_n) \quad (\text{III-147})$$

Bei dieser Testvariablen handelt es sich also um eine dem konkreten Problem angepasste *Stichprobenfunktion* (Zufallsvariable), deren Wahrscheinlichkeitsverteilung als *bekannt* vorausgesetzt werden muss<sup>28)</sup>.

4. Wir bestimmen jetzt auf der Basis der gewählten Signifikanzzahl  $\alpha$  zwei sog. *kritische Grenzen*  $c_u$  und  $c_o$  derart, dass die Testvariable  $T$  mit der Wahrscheinlichkeit  $\gamma = 1 - \alpha$  Werte aus dem Intervall

$$c_u \leq T \leq c_o \quad (\text{III-148})$$

annimmt (Bild III-37)<sup>29)</sup>. Diese Grenzen trennen dabei den *nichtkritischen* Bereich (d. h. das Intervall  $c_u \leq t \leq c_o$ ) vom *kritischen* Bereich und lassen sich aus der vorgegebenen Signifikanzzahl  $\alpha$  und der (als *bekannt* vorausgesetzten) Wahrscheinlichkeitsverteilung der Testvariablen  $T$  berechnen.



**Bild III-37** Die kritischen Grenzen  $c_u$  und  $c_o$  trennen den kritischen Bereich vom nichtkritischen Bereich

<sup>28)</sup> In *einfachen* Fällen erweist sich dabei die ausgewählte Testvariable  $T$  als eine *Schätzfunktion*  $\theta$  des unbekannten Parameters  $\vartheta$ . Im Allgemeinen jedoch gilt: Zwischen der Testvariablen  $T$  und der Schätzfunktion  $\theta$  des Parameters  $\vartheta$  besteht ein gewisser *Zusammenhang*. Im nachfolgenden Abschnitt 4.5 werden wir für spezielle Parameter zeigen, wie man mit Hilfe von bekannten Schätzfunktionen *geeignete* Testvariable erhält.

<sup>29)</sup>  $\alpha$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert der Testvariablen  $T$  *aufßerhalb* dieses Intervalls liegt.

Die Bestimmungsgleichung für die *kritischen Grenzen*  $c_u$  und  $c_o$  lautet somit:

$$P(c_u \leq T \leq c_o)_{H_0} = \gamma = 1 - \alpha \quad (\text{III-149})$$

(siehe hierzu die *hellgrau* unterlegte Fläche in Bild III-37). Die Berechnung dieser Grenzen erfolgt dabei stets unter der *Voraussetzung*, dass die Nullhypothese  $H_0$  auch tatsächlich *zutrifft*. Der Index „ $H_0$ “ am Wahrscheinlichkeitssymbol  $P$  soll daran erinnern. Aus dieser Gleichung können dann die *kritischen Grenzen* unter Verwendung der (im Anhang tabellierten) *Verteilungsfunktion* von  $T$  leicht ermittelt werden.

5. Wir berechnen jetzt den Wert der Testvariablen  $T$  aus einer vorgegebenen *konkreten* Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vom Umfang  $n$ , indem wir diese Werte der Reihe nach für die unabhängigen Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  der Testvariablen  $T = g(X_1; X_2; \dots; X_n)$  einsetzen. Der so erhaltene Funktionswert

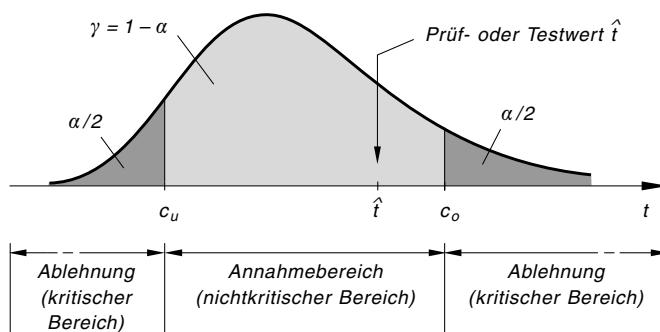
$$\hat{t} = g(x_1; x_2; \dots; x_n) \quad (\text{III-150})$$

wird als *Test- oder Prüfwert* von  $T$  bezeichnet.

**Hinweis:** Zu dem *Testwert*  $\hat{t}$  der Testvariablen  $T$  gehört stets ein entsprechender Wert  $\hat{\vartheta}$  des Parameters  $\vartheta$ , der meist als *Schätzwert* bezeichnet wird. Dieser Schätzwert  $\hat{\vartheta}$  lässt sich dabei leicht aus dem zugehörigen Testwert  $\hat{t}$  berechnen (siehe hierzu die speziellen Parametertests in Abschnitt 4.5).

6. **Testentscheidung:** Wir sind jetzt in der Lage, eine *Entscheidung* über Ablehnung (Verwerfung) *oder* Beibehaltung (Nichtablehnung) der Nullhypothese  $H_0$  zu treffen.

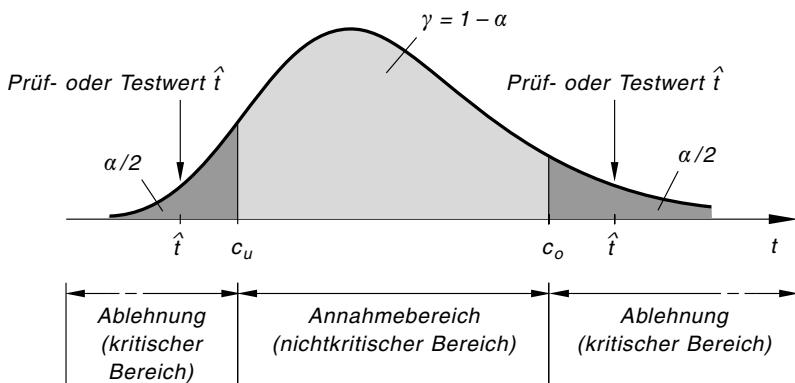
**1. Fall:** Der *Test- oder Prüfwert*  $\hat{t}$  fällt in den *nichtkritischen* Bereich der Testvariablen  $T$ , d. h. es gilt  $c_u \leq \hat{t} \leq c_o$  (Bild III-38). Die Nullhypothese  $H_0$  wird dann *beibehalten*, d. h. sie kann auf der Basis der verwendeten Zufallsstichprobe und der gewählten Signifikanzzahl  $\alpha$  *nicht abgelehnt* oder *verworfen* werden. Man bezeichnet daher diesen Bereich auch als *Annahme- oder Nichtablehnungsbereich*.



**Bild III-38** Der Prüf- oder Testwert  $\hat{t}$  fällt in den nichtkritischen Bereich (Annahmebereich), die Nullhypothese  $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$  wird daher beibehalten, d. h. nicht abgelehnt

Die Abweichung zwischen dem Schätzwert  $\hat{\vartheta}$  und dem angenommenen (vermuteten) Wert  $\vartheta_0$  des Parameters  $\vartheta$  ist somit in diesem Fall rein *zufällig*. Diese Aussage trifft dabei mit der *Wahrscheinlichkeit* oder *statistischen Sicherheit*  $\gamma = 1 - \alpha$  zu<sup>30)</sup>. Wir dürfen daher davon ausgehen, dass der Parameter  $\vartheta$  tatsächlich den Wert  $\vartheta_0$  besitzt, können uns dessen aber nicht absolut sicher sein. *Beibehalten* der Nullhypothese  $H_0$  bedeutet also keineswegs, dass  $H_0$  richtig ist, sondern lediglich, dass das verwendete Stichprobenmaterial *nicht* gegen die Nullhypothese spricht. Diese kann daher sowohl richtig als auch falsch sein (wir wissen es nicht und können aufgrund einer Stichprobe auch keine absolute Entscheidung treffen).

**2. Fall:** Der *Test- oder Prüfwert*  $\hat{t}$  fällt in den *kritischen Bereich* (Bild III-39). Die Nullhypothese  $H_0$  ist dann *nicht haltbar*, wir müssen sie zugunsten der Alternativhypothese  $H_1$  *ablehnen* oder *verwerfen*<sup>31)</sup>. Daher wird der *kritische Bereich* auch als *Ablehnungs- oder Verwerfungsbereich* bezeichnet. In diesem Fall weicht der Schätzwert  $\hat{\vartheta}$  des unbekannten Parameters  $\vartheta$  *signifikant* vom angenommenen (d. h. vermuteten) Wert  $\vartheta_0$  ab. Diese Abweichung kann *nicht* mehr durch den Zufall allein erklärt werden, sondern beruht offenbar auf einer *falschen* Nullhypothese  $H_0$ . Wir dürfen daher davon ausgehen, dass der Parameter  $\vartheta$  in Wirklichkeit einen von  $\vartheta_0$  *verschiedenen* Wert besitzt (mit absoluter Sicherheit wissen wir dies allerdings nicht).



**Bild III-39** Der Prüf- oder Testwert  $\hat{t}$  fällt in den kritischen Bereich, die Nullhypothese  $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$  wird daher zugunsten der Alternativhypothese  $H_1 : \vartheta \neq \vartheta_0$  abgelehnt

<sup>30)</sup> Die Möglichkeit eines *Irrtums*, d. h. einer *Fehlentscheidung* ist grundsätzlich *immer* gegeben. Die Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt hier  $\alpha$  (siehe hierzu auch den nachfolgenden Abschnitt 4.4).

<sup>31)</sup> Dies bedeutet, dass wir uns für die Alternativhypothese  $H_1$  entscheiden.

### Anmerkungen

- (1) Die *Test- oder Prüfvariable*  $T$  wird häufig auch als *Test- oder Prüfgröße*, manchmal auch als *Test- oder Prüffunktion* bezeichnet.
- (2) Man beachte, dass die Bestimmung der *kritischen Grenzen* nur möglich ist, wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Testgröße  $T$  bekannt ist.
- Beispiel:**  $X$  sei eine *normalverteilte* Zufallsgröße. Dann ist die Testgröße  $\bar{X}$  (d. h. die *Schätzfunktion* für den *Mittelwert*  $\mu$  der normalverteilten Grundgesamtheit) ebenfalls *normalverteilt*.
- (3) In Abschnitt 4.5 werden wir uns mit den wichtigsten Parametertests vertraut machen und dabei zeigen, wie man für *spezielle* Parameter unter Verwendung bereits bekannter Schätzfunktionen *geeignete* Testvariable mit *bekannter* Wahrscheinlichkeitsverteilung erhält.
- (4) Häufig wird auf eine Alternativhypothese *verzichtet*. Falls dann keine *signifikante* oder (wie man auch sagt) *statistisch gesicherte* Abweichung vorliegt, wird die Nullhypothese  $H_0$  *beibehalten*, d. h. *nicht abgelehnt*. Dies bedeutet aber keineswegs, dass  $H_0$  als richtig angenommen wird, sondern besagt lediglich, dass das Ergebnis der Stichprobenuntersuchung in *keinem* Widerspruch zur Nullhypothese  $H_0$  steht. Ein *Musterbeispiel* aus dem technischen Bereich liefert die Überprüfung eines bestimmten *Sollwertes* (Hypothese:  $\mu = \mu_0$ ). Es interessiert dabei häufig nur, ob der Sollwert  $\mu_0$  eingehalten wird *oder nicht*.

### Einseitige Tests

Neben dem hier ausführlich besprochenen *zweiseitigen* Parametertest gibt es auch die Möglichkeit *einseitiger* Tests.

**Beispiel:** Wir testen die *Nullhypothese*

$$H_0 : \vartheta \leq \vartheta_0 \quad (\text{III-151})$$

(„der Parameter  $\vartheta$  ist kleiner *oder* gleich  $\vartheta_0$ “) gegen die *Alternativhypothese*

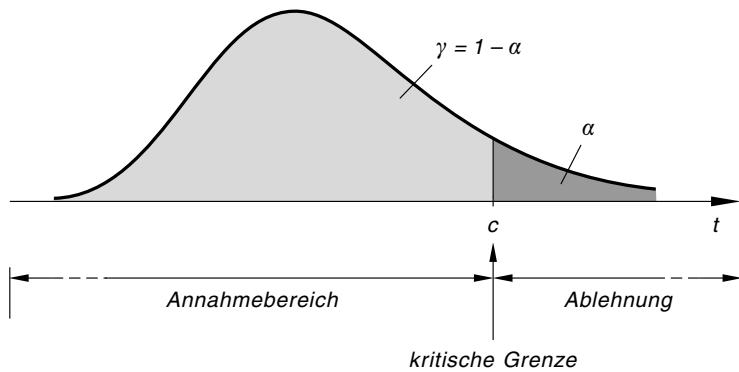
$$H_1 : \vartheta > \vartheta_0 \quad (\text{III-152})$$

(„der Parameter  $\vartheta$  ist *größer* als  $\vartheta_0$ “).

Es handelt sich hierbei um einen *einseitigen* Test, da die Alternativhypothese nur Parameterwerte *größer* als  $\vartheta_0$  zulässt (Abgrenzung nach *oben*). Es gibt jetzt auch nur *eine* kritische Grenze  $c$ . Sie lässt sich aus der Bedingung

$$P(T \leq c)_{H_0} = \gamma = 1 - \alpha \quad (\text{III-153})$$

für die verwendete *Test- oder Prüfvariable*  $T$  mit Hilfe der entsprechenden Verteilungsfunktion leicht berechnen (Bild III-40).



**Bild III-40** Annahmebereich bei einem *einseitigen* Parametertest (Abgrenzung nach *oben*)

#### 4.4 Mögliche Fehlerquellen bei einem Parametertest

Am Ende eines Parametertests ist stets eine *Entscheidung* zu fällen. Sie kann dabei zugunsten der Nullhypothese  $H_0$  oder der Alternativhypothese  $H_1$  ausfallen. In beiden Fällen werden gewisse *Rückschlüsse* von einer Zufallsstichprobe auf die entsprechende Grundgesamtheit gezogen. Wir müssen dabei jedoch bedenken, dass es *absolut sichere* Schlüsse grundsätzlich *nicht* gibt. Bei einer Testentscheidung besteht somit *immer* die Möglichkeit eines *Irrtums*, d. h. einer *Fehlentscheidung*. Mit anderen Worten: *Bei jeder Testentscheidung besteht eine bestimmte Wahrscheinlichkeit dafür, dass die getroffene Entscheidung falsch ist.* Dabei werden *zwei* Arten von Fehlern unterschieden:

- Definitionen:**
- (1) Ein *Fehler 1. Art* liegt vor, wenn eine an sich *richtige* Nullhypothese  $H_0$  *abgelehnt* wird. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art wird mit  $\alpha$  bezeichnet.
  - (2) Ein *Fehler 2. Art* wird begangen, wenn eine an sich *falsche* Nullhypothese  $H_0$  *beibehalten*, d. h. *nicht abgelehnt* wird. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art wird mit  $\beta$  bezeichnet.

In beiden Fällen wurde eine *falsche* Entscheidung gefällt! Wir erläutern nun die möglichen Fehler 1. Art und 2. Art etwas näher am Beispiel eines *einseitigen* Parametertest, bei dem die *Nullhypothese*

$$H_0 : \vartheta = \vartheta_0 \quad (\text{III-154})$$

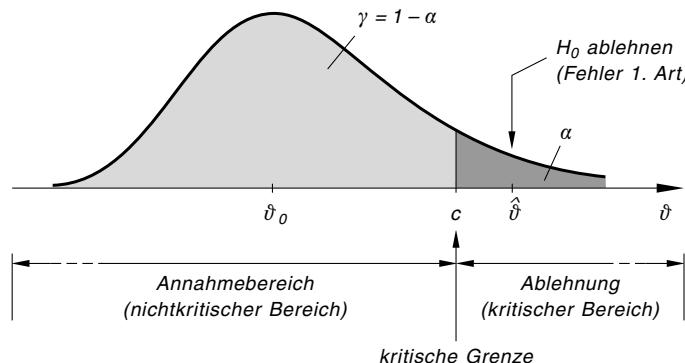
gegen die *Alternativhypothese*

$$H_1 : \vartheta > \vartheta_0 \quad (\text{III-155})$$

getestet werden soll.

### Fehler 1. Art

Die *kritische Grenze*  $c$  wird bekanntlich so bestimmt, dass die Testvariable  $T$  bei *richtiger Nullhypothese*  $H_0$  und vorgegebener Signifikanzzahl  $\alpha$  mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\alpha$  Werte annimmt, die in den *kritischen Bereich* oder *Ablehnungsbereich* fallen (*dunkelgrau* unterlegte Fläche in Bild III-41). Wir haben dabei *vorausgesetzt*, dass  $\vartheta_0$  der *wahre Wert* des Parameters  $\vartheta$  ist. Der Einfachheit halber nehmen wir desweiteren an, dass die verwendete Testvariable (Prüfgröße)  $T$  eine *Schätzfunktion* des betreffenden Parameters  $\vartheta$  ist. Der *Test- oder Prüfwert* von  $T$  ist dann identisch mit dem *Schätzwert*  $\hat{\vartheta}$  des Parameters.



**Bild III-41** Die *dunkelgrau* unterlegte Fläche  $\alpha$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, einen *Fehler 1. Art* zu begehen, d. h. eine an sich richtige Nullhypothese verwerfen zu müssen

Fällt nun der aus einer *konkreten Stichprobe* berechnete *Testwert*  $\hat{\vartheta}$  in den *Ablehnungsbereich*  $\vartheta > c$ , so müssen wir die an sich *richtige Nullhypothese*  $H_0 : \vartheta = \vartheta_0$  *irrtümlicherweise verwerfen* und begehen damit genau einen *Fehler 1. Art*. Seine Größe entspricht dabei der vorgegebenen Signifikanzzahl  $\alpha$ , die daher auch folgerichtig – wie bereits erwähnt – als *Irrtumswahrscheinlichkeit* bezeichnet und durch die in Bild III-41 *dunkelgrau* unterlegte Fläche repräsentiert wird.

### ■ Beispiel

Ein Großhändler bezieht direkt vom Hersteller einen größeren Posten eines bestimmten elektronischen Bauelements. Bei der Anlieferung der Ware wird er eine sog. *Abnahmekontrolle* durchführen, um zu *prüfen*, ob die vereinbarten Lieferbedingungen (z. B. *maximal 1 % „Ausschussware“*) auch eingehalten wurden. Aus diesem Grunde entnimmt er der Lieferung eine *Zufallsstichprobe*. Fällt dabei der aus der Stichprobe berechnete Wert der Testgröße (hier: *Anteilswert „Ausschuss“*) in den *nichtkritischen Bereich* (*Annahmebereich*), so wird der Großhändler die angelieferte Ware auch *abnehmen*. Fällt der Testwert jedoch in den *kritischen Bereich* (*Ablehnungsbereich*), so wird er die *Annahme* der Ware *verweigern*. Die zwischen Großhändler und Produzent vorher vereinbarte Signifikanzzahl  $\alpha$  ist dabei die *Wahrscheinlichkeit* dafür, eine an sich *einwandfreie Lieferung* aufgrund einer Zufallsstichprobe *zurückzuweisen*, weil der Wert der Testgröße (hier also der *Anteilswert „Ausschuss“*) *zufälligerweise* in den *kritischen Bereich* der Testgröße fällt. Einen solchen *Fehler 1. Art* bezeichnet man daher in der Praxis häufig auch als *Produzentenrisiko*.

### Fehler 2. Art

Ein *Fehler 2. Art* liegt vor, wenn eine Nullhypothese  $H_0$  beibehalten, d. h. nicht abgelehnt wird, obwohl sie falsch ist. Bild III-42 zeigt die als richtig angenommene Verteilung mit dem Parameterwert  $\vartheta_0$  und zugleich die tatsächliche Verteilung mit dem wahren Parameterwert  $\vartheta_1$ <sup>32)</sup>. In dieser Abbildung wird die Wahrscheinlichkeit  $\beta$  für einen Fehler 2. Art durch die hellgrau unterlegte Fläche dargestellt (Fläche unter der Dichtefunktion der wahren Verteilung in den Grenzen von  $-\infty$  bis zur kritischen Grenze  $c$ ). Die Größe dieser Wahrscheinlichkeit hängt dabei noch von der Lage von  $\vartheta_1$  ab. Den entsprechenden funktionalen Zusammenhang zwischen  $\beta$  und  $\vartheta_1$  bezeichnet man als *Operationscharakteristik*:  $\beta = \beta(\vartheta_1)$ .

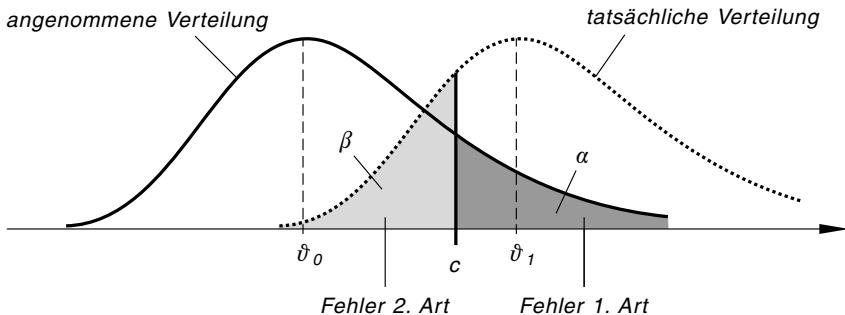


Bild III-42 Fehler 1. und 2. Art

### ■ Beispiel

Wir kommen nochmals auf das vorangegangene Beispiel zurück (*Abnahmekontrolle* bei einer Warenlieferung). In diesem Beispiel ist  $\beta$  die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Großhändler die Lieferung der elektronischen Bauelemente annimmt, obwohl sie nicht den vereinbarten Bedingungen (hier: *maximaler „Ausschussanteil“ von 1 %*) entspricht, weil die Lieferung insgesamt einen zu hohen Anteil an Ausschussware enthält (was der Großhändler aber nicht weiß). Diese *Fehlentscheidung* tritt genau dann ein, wenn der aus der entnommenen Zufallsstichprobe berechnete Wert der Testvariablen (hier also der *Anteilswert „Ausschussware“*) zufälligerweise in den *nichtkritischen* Bereich (Annahmebereich) fällt. Daher wird ein solcher Fehler 2. Art häufig auch als *Konsumentenrisiko* bezeichnet. ■

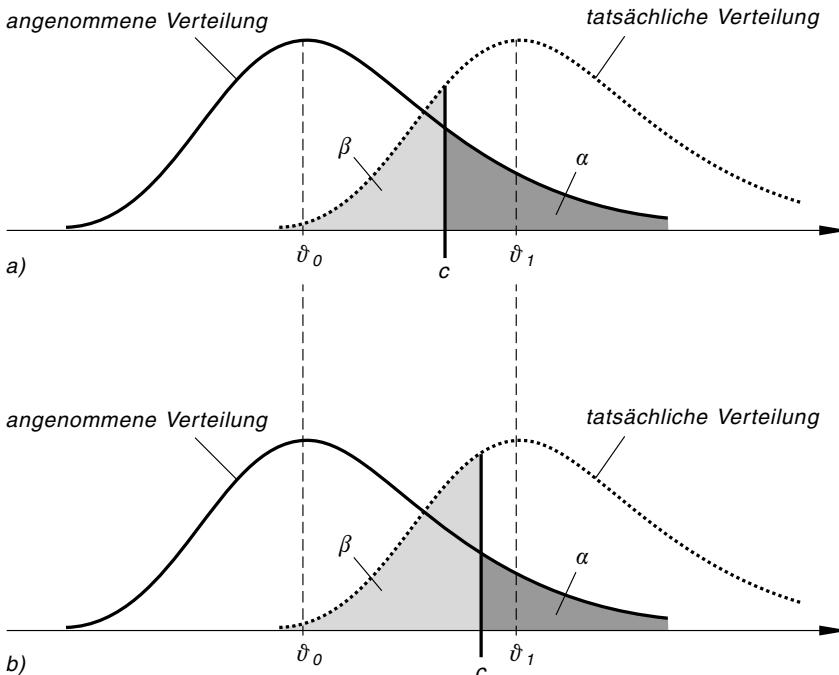
### Zusammenhang zwischen den Fehlern 1. und 2. Art

Eine in der Praxis wichtige Fragestellung lautet somit: *Wie lassen sich diese Fehler 1. und 2. Art möglichst klein halten?*

Dazu betrachten wir eingehend Bild III-43, in dem die als richtig angenommene Verteilung (Parameter  $\vartheta_0$ ) und die tatsächliche Verteilung (Parameter  $\vartheta_1$ ) sowie die Fehler 1. und 2. Art anschaulich dargestellt sind. Diesem Bild können wir unmittelbar entnehmen,

<sup>32)</sup> Dargestellt ist der Fall  $\vartheta_1 > \vartheta_0$ .

dass eine *Verkleinerung* von  $\alpha$  *automatisch* eine *Vergrößerung* von  $\beta$  nach sich zieht (Übergang von Bild a) zu Bild b)). Denn eine *Verkleinerung* von  $\alpha$  (im Bild durch die *dunkelgrau* unterlegte Fläche veranschaulicht) bedeutet eine Verschiebung der kritischen Grenze  $c$  nach *rechts*, wobei aber automatisch  $\beta$  (im Bild durch die *hellgrau* unterlegte Fläche dargestellt) *zunimmt*. Umgekehrt gilt: Wird  $\beta$  *verkleinert*, so *vergrößert* sich dabei  $\alpha$  (dies entspricht einer Verschiebung der kritischen Grenze  $c$  nach *links*).



**Bild III-43** Zum Zusammenhang zwischen einem Fehler 1. und 2. Art: Eine Verkleinerung des Fehlers 1. Art ( $\alpha$ ) bewirkt stets eine Vergrößerung des Fehlers 2. Art ( $\beta$ ) (Übergang von Bild a) zu Bild b))

Entscheidet man sich in einem *konkreten* Fall z. B. für ein *sehr kleines*  $\alpha$  und damit für ein *sehr geringes* Risiko, eine an sich *richtige* Nullhypothese  $H_0$  *ablehnen* zu müssen, so nimmt man gleichzeitig ein *deutlich erhöhtes* Risiko für einen *Fehler 2. Art* in Kauf. Man muss daher stets von Fall zu Fall sehr sorgfältig abwägen, welcher der beiden Fehler letztendlich die *größeren* Konsequenzen nach sich zieht.

In der Praxis geht man daher meist wie folgt vor: Zunächst wählt man die (kleine) *Signifikanzzahl*  $\alpha$  und damit das Risiko für einen *Fehler 1. Art*. Dann bestimmt man die *kritische Grenze*  $c$  und daraus die *Wahrscheinlichkeit*  $\beta$  für einen *Fehler 2. Art* in Abhängigkeit vom Parameterwert  $\vartheta_1$ . Der Fehler 2. Art lässt sich dabei (bei *fest* vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$ ) nur durch eine *Erhöhung* des Stichprobenumfangs  $n$  *verringern*! Man kann nämlich zeigen, dass die beiden Dichtekurven in Bild III-43 (sie

entsprechen den Parameterwerten  $\vartheta_0$  und  $\vartheta_1$ ) umso steiler verlaufen, je größer der Stichprobenumfang  $n$  ist, wobei sich gleichzeitig die hellgrau unterlegte Bildfläche, die der Wahrscheinlichkeit  $\beta$  für einen Fehler 2. Art entspricht, verkleinert. Die Überlappung der beiden Verteilungskurven nimmt somit mit zunehmendem Stichprobenumfang  $n$  ab, der Parametertest hat dabei an „Trennschärfe“ gewonnen.

Wir fassen die wichtigsten Aussagen zusammen:

### Über mögliche Fehler 1. und 2. Art beim Prüfen von Hypothesen

Beim Prüfen von statistischen Hypothesen (z. B. bei Parametertests) ist grundsätzlich immer die Möglichkeit einer Fehlentscheidung gegeben. Die möglichen Fehler 1. und 2. Art treten dabei mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten auf:

- $\alpha$ : Wahrscheinlichkeit dafür, eine an sich richtige Nullhypothese  $H_0$  abzulehnen, d. h. einen Fehler 1. Art zu begehen (auch Risiko 1. Art oder Irrtumswahrscheinlichkeit genannt)
- $\beta$ : Wahrscheinlichkeit dafür, eine an sich falsche Nullhypothese  $H_0$  beizubehalten (nicht abzulehnen), d. h. einen Fehler 2. Art zu begehen (auch Risiko 2. Art genannt)

Beim Testen sollten daher folgende Hinweise beachtet werden:

1. Zwischen den Wahrscheinlichkeiten  $\alpha$  und  $\beta$  für die Fehler 1. und 2. Art besteht ein relativ komplizierter Zusammenhang folgender Art (siehe hierzu Bild III-43):  
Soll bei gleichbleibendem Stichprobenumfang  $n$  die Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  verkleinert werden, so muss man gleichzeitig eine Vergrößerung der Wahrscheinlichkeit  $\beta$  in Kauf nehmen (und umgekehrt).
2. Sind bei einer irrtümlichen Ablehnung einer an sich richtigen Nullhypothese  $H_0$  schwerwiegende Folgen zu befürchten, so wähle man  $\alpha$  sehr klein (z. B.  $\alpha = 0,01 = 1\%$  oder  $\alpha = 0,001 = 1\%$ ). Man nimmt dabei allerdings (bewußt!) ein erhöhtes Risiko für einen Fehler 2. Art in Kauf.
3. Man sollte dagegen  $\alpha$  nicht zu klein wählen (z. B.  $\alpha = 0,1$  oder  $\alpha = 0,05$ ), wenn bei einer irrtümlichen Annahme einer an sich falschen Nullhypothese  $H_0$  mit schwerwiegenden Folgen zu rechnen ist. Dabei wird dann bewußt ein größeres Risiko für einen Fehler 1. Art in Kauf genommen.
4. Soll das Risiko für einen Fehler 2. Art, d. h.  $\beta$  verringert werden, ohne dabei gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  für einen Fehler 1. Art vergrößern zu müssen, so ist dieses Ziel nur durch eine entsprechende Erhöhung des Stichprobenumfangs  $n$  erreichbar (Verbesserung der sog. Trennschärfe des Tests).

### Anmerkungen

- (1) Grundsätzlich lassen sich die Risiken 1. und 2. Art (d. h.  $\alpha$  und  $\beta$ ) beliebig klein halten, indem man entsprechend umfangreiche Stichproben verwendet. Aus Kosten- und Zeitgründen ist dies jedoch in der Praxis nur selten möglich.
- (2) Häufig wird bei einem Parametertest nur die Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  vorgegeben und auf eine Alternativhypothese  $H_1$  verzichtet. Ein solcher Test wird als *Signifikanztest* bezeichnet.
- (3) Für nähere Einzelheiten zu diesem wichtigen aber auch sehr komplizierten Thema verweisen wir auf die spezielle Fachliteratur (siehe Literaturverzeichnis).

## 4.5 Spezielle Parametertests

In diesem Abschnitt wenden wir den in Abschnitt 4.3 beschriebenen Parametertest auf die in der Praxis besonders wichtige *Gaußsche Normalverteilung* sowie die *Binomialverteilung* an. Bei der *Formulierung* der Tests beschränken wir uns dabei auf die *zweiseitige* Fragestellung. Die Vorgehensweise ist weitgehend die gleiche wie bei der Herleitung der Vertrauens- oder Konfidenzintervalle in Abschnitt 3.4.

### 4.5.1 Test für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei bekannter Varianz $\sigma^2$

$X$  sei eine *normalverteilte* Zufallsvariable mit dem *unbekannten* Mittelwert  $\mu$  und der als *bekannt* vorausgesetzten Varianz  $\sigma^2$ . Wir *vermuten* jedoch, dass der *Mittelwert*  $\mu$  einen bestimmten Wert  $\mu_0$  besitzt und testen daher unter Verwendung einer konkreten Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die

$$\text{Nullhypothese } H_0 : \mu = \mu_0 \quad (\text{III-156})$$

gegen die

$$\text{Alternativhypothese } H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad (\text{III-157})$$

Dieser *zweiseitige* Parametertest verläuft dabei nach dem aus Abschnitt 4.3 bekannten Schema schrittweise wie folgt:

- (1) Zunächst wählen wir eine bestimmte *Signifikanzzahl* (Irrtumswahrscheinlichkeit)  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ).
- (2) Als *Schätzfunktion* für den unbekannten *Mittelwert*  $\mu$  der Normalverteilung verwenden wir die aus Abschnitt 3.2.3 bereits bekannte *Stichprobenfunktion*

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad (\text{III-158})$$

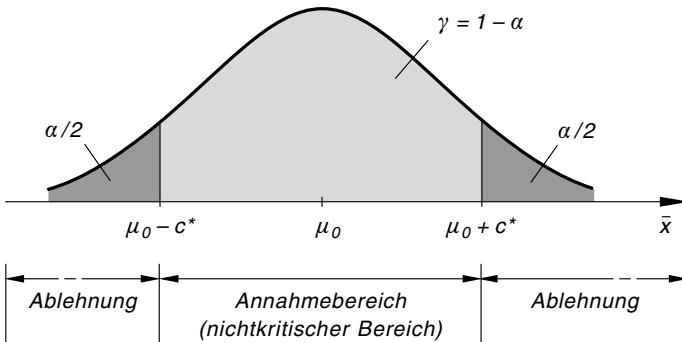
Dabei sind  $X_1, X_2, \dots, X_n$  voneinander *unabhängige* und *normalverteilte* Zufallsvariable mit der *gleichen* Verteilung wie die Zufallsvariable  $X$  (Mittelwert  $\mu_0$ , Varianz  $\sigma^2$ )<sup>33)</sup>. Dann ist bekanntlich auch die Schätzfunktion  $\bar{X}$  *normalverteilt* mit dem Mittelwert  $\mu_0$  und der Varianz  $\sigma^2/n$ .

<sup>33)</sup> Unter der *Voraussetzung*, dass die Nullhypothese  $H_0 : \mu = \mu_0$  *zutrifft*.

- (3) Die Berechnung der *kritischen Grenzen*  $\mu_0 \mp c^*$  bzw. des *kritischen Wertes*  $c^*$  für die Zufallsvariable  $\bar{X}$  erfolgt dann aus der Bedingung

$$P(\mu_0 - c^* \leq \bar{X} \leq \mu_0 + c^*)_{H_0} = 1 - \alpha \quad (\text{III-159})$$

(hellgrau unterlegte Fläche in Bild III-44)



**Bild III-44** Kritischer und nichtkritischer Bereich bei einem zweiseitigen Test für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  einer Normalverteilung (bei bekannter Varianz  $\sigma^2$ )

Zweckmäßigerweise gehen wir nun von der Zufallsvariablen  $\bar{X}$  zur zugehörigen *standardisierten Zufallsvariablen*

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (\text{III-160})$$

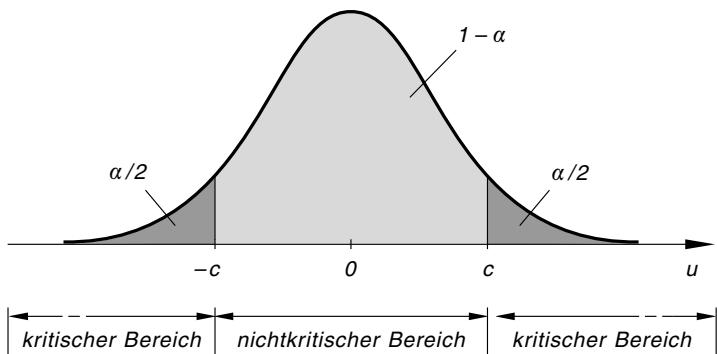
über. Diese Zufallsvariable ist *standardnormalverteilt* und eignet sich als *Testvariable (Prüfgröße)* für diesen Parametertest. Die Bedingung (III-159) geht bei der vorgenommenen *Variablentransformation (Standardisierung)*  $\bar{X} \rightarrow U$  dabei über in

$$P\left(-\frac{c^* \sqrt{n}}{\sigma} \leq U \leq \frac{c^* \sqrt{n}}{\sigma}\right)_{H_0} = 1 - \alpha \quad (\text{III-161})$$

oder – unter Verwendung der Abkürzung  $c = c^* \sqrt{n}/\sigma$  –

$$P(-c \leq U \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha \quad (\text{III-162})$$

Die Konstante  $c$  ist der *kritische Wert* für die *Testvariable*  $U$ , die *kritischen Grenzen* liegen somit an den Stellen  $c_u = -c$  und  $c_o = c$  (hellgrau unterlegte Fläche in Bild III-45). Der *kritische Bereich* wird somit durch die Ungleichung  $|U| > c$  beschrieben (dunkelgrau unterlegte Fläche in Bild III-45). Die Berechnung des *kritischen Wertes*  $c$  erfolgt dann aus der Bedingung (III-162) mit Hilfe von Tabelle 2 im Anhang (Tabelle der *Quantile der Standardnormalverteilung*).



**Bild III-45** Zur Bestimmung des kritischen Wertes  $c$  für die standardnormalverteilte Testvariable  $U$

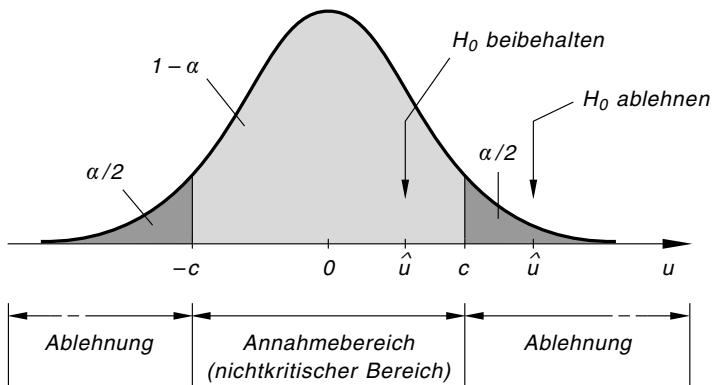
- (4) Wir berechnen nun den *Mittelwert*  $\bar{x}$  der vorgegebenen konkreten Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Die *Testvariable*  $U$  aus Gleichung (III-160) erhält damit den folgenden *Test- oder Prüfwert*:

$$\hat{u} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (\text{III-163})$$

- (5) **Testentscheidung:** Fällt der *Test- oder Prüfwert*  $\hat{u}$  in den *nichtkritischen Bereich* (*Annahmebereich*), d. h. gilt

$$-c \leq \hat{u} \leq c \quad (\text{III-164})$$

so wird die Nullhypothese  $H_0 : \mu = \mu_0$  beibehalten, andernfalls aber zugunsten der Alternativhypothese  $H_1 : \mu \neq \mu_0$  verworfen. „Beibehalten“ bedeutet dabei lediglich, dass die Nullhypothese  $H_0$  aufgrund der verwendeten Stichprobe *nicht abgelehnt* werden kann. Bild III-46 verdeutlicht diese Testentscheidung.



**Bild III-46** Testentscheidung über Beibehaltung oder Ablehnung der Nullhypothese  $H_0 : \mu = \mu_0$

Wir fassen diesen speziellen Parametertest wie folgt zusammen:

**Zweiseitiger Test für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  einer Normalverteilung bei bekannter Varianz  $\sigma^2$**

$X$  sei eine *normalverteilte* Zufallsvariable mit der *bekannten* Varianz  $\sigma^2$ . Es soll geprüft werden, ob der *unbekannte* Mittelwert  $\mu$  (wie vermutet) den speziellen Wert  $\mu_0$  besitzt ( $\mu = \mu_0$ ). Auf der Basis einer *Zufallsstichprobe*  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vom Umfang  $n$  testen wir daher die

$$\text{Nullhypothese } H_0 : \mu = \mu_0 \quad (\text{III-165})$$

gegen die

$$\text{Alternativhypothese } H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad (\text{III-166})$$

Die Durchführung dieses *zweiseitigen* Parametertests erfolgt dabei schrittweise wie folgt:

1. Wir wählen zunächst eine bestimmte *Signifikanzzahl (Irrtumswahrscheinlichkeit)*  $\alpha$  (in der Praxis meist  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ).
2. *Test- oder Prüfvariable* ist die *standardnormalverteilte* Zufallsvariable

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \quad (\text{III-167})$$

Dabei bedeuten:

$\bar{X}$ : *Schätzfunktion* für den unbekannten *Mittelwert*  $\mu$  der normalverteilten Grundgesamtheit (siehe hierzu Abschnitt 3.2.3)

$\mu_0$ : *Vermuteter* Wert des unbekannten Mittelwertes  $\mu$

$\sigma$ : *Standardabweichung* der normalverteilten Grundgesamtheit (wird hier als *bekannt* vorausgesetzt)

$n$ : *Umfang* der verwendeten Stichprobe

Die Berechnung des *kritischen* Wertes  $c$  und damit der *kritischen Grenzen*  $\mp c$  erfolgt aus der Bedingung

$$P(-c \leq U \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha \quad (\text{III-168})$$

unter Verwendung von Tabelle 2 im Anhang (siehe hierzu auch die *hellgrau* unterlegte Fläche in Bild III-45). Der *nichtkritische* Bereich (*Annahmebereich*) lautet dann:

$$-c \leq u \leq c \quad (\text{III-169})$$

3. Berechnung des *Mittelwertes*  $\bar{x}$  der konkreten Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sowie des *Test- oder Prüfwertes*

$$\hat{u} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (\text{III-170})$$

der *Testvariablen*  $U$ .

4. **Testentscheidung:** Fällt der *Test- oder Prüfwert*  $\hat{u}$  in den *nichtkritischen* Bereich (*Annahmebereich*), d. h. gilt

$$-c \leq \hat{u} \leq c \quad (\text{III-171})$$

so wird die Nullhypothese  $H_0 : \mu = \mu_0$  *beibehalten*, anderenfalls zugunsten der Alternativhypothese  $H_1 : \mu \neq \mu_0$  *verworfen* (siehe hierzu Bild III-46). „*Beibehalten*“ bedeutet dabei lediglich, dass die Nullhypothese  $H_0$  aufgrund der verwendeten Stichprobe *nicht abgelehnt* werden kann.

### Anmerkung

Bei der *Rücktransformation*  $U \rightarrow \bar{X}$  mittels der Transformationsgleichung (III-167) erhält man für die Schätzfunktion  $\bar{X}$  den *kritischen* Wert  $c^* = c\sigma/\sqrt{n}$  und damit den *nichtkritischen* Bereich (*Annahmebereich*)

$$\mu_0 - c^* \leq \bar{x} \leq \mu_0 + c^* \quad (\text{III-172})$$

(siehe hierzu auch Bild III-44). Die *Testentscheidung* lautet dann für die Zufallsvariable  $\bar{X}$  wie folgt: Fällt der aus der Stichprobe berechnete Mittelwert  $\bar{x}$  in dieses Intervall, so wird die Nullhypothese  $H_0$  beibehalten, d. h. *nicht abgelehnt*, anderenfalls muss sie zugunsten der Alternativhypothese  $H_1$  *verworfen* werden.

### Einseitige Tests

Analog verlaufen die *einseitigen* Parametertests. In diesen Fällen gibt es aber nur jeweils eine kritische Grenze  $c$ . Sie lässt sich aus den folgenden Bedingungen mit Hilfe von Tabelle 2 im Anhang leicht ermitteln:

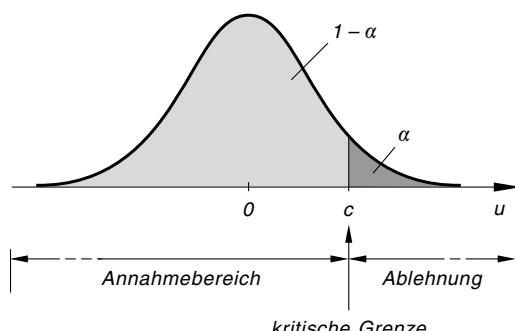
#### 1. Fall: Abgrenzung nach oben (Bild III-47)

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

$$P(U \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha$$

$$\text{Annahmebereich: } u \leq c$$



**Bild III-47**

Annahmebereich bei einem *einseitigen* Test (Abgrenzung nach *oben*)

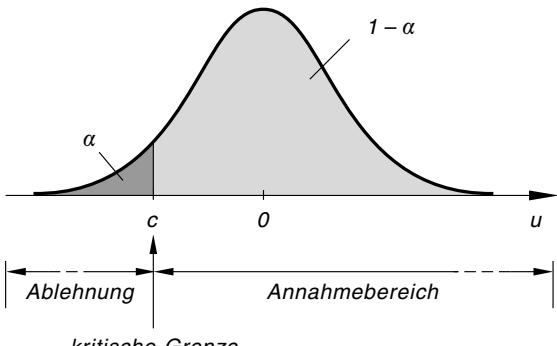
## 2. Fall: Abgrenzung nach unten (Bild III-48)

$$H_0 : \mu \geq \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

$$P(U < c)_{H_0} = \alpha$$

Annahmebereich:  $u \geq c$



**Bild III-48**

Annahmebereich bei einem *einseitigen* Test (Abgrenzung nach *unten*)

### ■ Beispiele

- (1) 10 Nägel aus einem bestimmten Sortiment haben die folgende Länge:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{x_i}{\text{mm}}$	20	22	19	22	18	21	18	19	21	20

Sie stammen aus einer *normalverteilten* Grundgesamtheit mit der *Varianz*  $\sigma^2 = 9 \text{ mm}^2$  und damit der Standardabweichung  $\sigma = 3 \text{ mm}$ . Man teste auf einem *Signifikanzniveau* von  $\alpha = 0,01 = 1\%$  die *Hypothese*, dass diese Stichprobe einer Grundgesamtheit mit dem *Mittelwert*  $\mu_0 = 22 \text{ mm}$  entnommen wurde (*zweiseitiger Parametertest*).

*Lösung:* Wir testen die *Nullhypothese*

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 22 \text{ mm}$$

gegen die *Alternativhypothese*

$$H_1 : \mu \neq 22 \text{ mm}$$

schrittweise wie folgt:

**1. Schritt:** Die *Signifikanzzahl* oder *Irrtumswahrscheinlichkeit*  $\alpha$  ist bereits vorgegeben:  $\alpha = 0,01$ .

**2. Schritt:** Testvariable ist die Zufallsvariable

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 22 \text{ mm}}{3 \text{ mm}/\sqrt{10}}$$

Die Bestimmungsgleichung für den *kritischen Wert*  $c$  dieser *normalverteilten* Testvariablen lautet:

$$P(-c \leq U \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99$$

Hieraus erhalten wir unter Verwendung von Tabelle 2 im Anhang den folgenden Wert für die unbekannte *Schranke*  $c$ :

$$\begin{aligned} P(-c \leq U \leq c)_{H_0} &= \phi(c) - \phi(-c) = \phi(c) - [1 - \phi(c)] = \\ &= \phi(c) - 1 + \phi(c) = 2 \cdot \phi(c) - 1 = 0,99 \Rightarrow \\ 2 \cdot \phi(c) &= 1,99 \Rightarrow \phi(c) = 0,995 \rightarrow c = u_{0,995} = 2,576 \end{aligned}$$

Der *nichtkritische* Bereich oder *Annahmebereich* wird somit durch das *symmetrische* Intervall

$$-2,576 \leq u \leq 2,576$$

beschrieben.

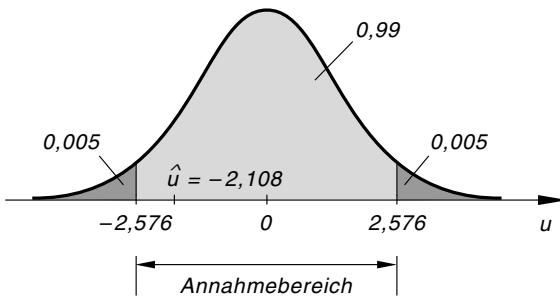
**3. Schritt:** Der *Stichprobenmittelwert*  $\bar{x}$  beträgt

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} x_i = \\ &= \frac{1}{10} (20 + 22 + 19 + 22 + 18 + 21 + 18 + 19 + 21 + 20) \text{ mm} = \\ &= \frac{1}{10} \cdot 200 \text{ mm} = 20 \text{ mm} \end{aligned}$$

Die Testvariable  $U$  besitzt demnach den folgenden *Testwert*:

$$\hat{u} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{(20 - 22) \text{ mm}}{3 \text{ mm}/\sqrt{10}} = -2,108$$

**4. Schritt (Testentscheidung):** Der *Testwert*  $\hat{u} = -2,108$  fällt in den *Annahmebereich*, d. h. es gilt  $-2,576 \leq \hat{u} \leq 2,576$  (Bild III-49). Die Nullhypothese  $H_0: \mu = \mu_0 = 22 \text{ mm}$  kann daher aufgrund der verwendeten Stichprobe *nicht abgelehnt* werden. Mit anderen Worten: Wir können davon ausgehen, dass die *normalverteilte* Grundgesamtheit, aus der wir die Stichprobe entnommen haben, den Mittelwert  $\mu_0 = 22 \text{ mm}$  besitzt.



**Bild III-49** Der Testwert  $\hat{u} = -2,108$  fällt in den Annahmebereich, die Nullhypothese  $H_0 : \mu = \mu_0 = 22$  mm wird daher beibehalten, d. h. nicht abgelehnt

*Anmerkung*

Für die Zufallsvariable  $\bar{X}$  erhalten wir den *kritischen Wert*

$$c^* = \frac{c\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2,576 \cdot 3 \text{ mm}}{\sqrt{10}} = 2,44 \text{ mm}$$

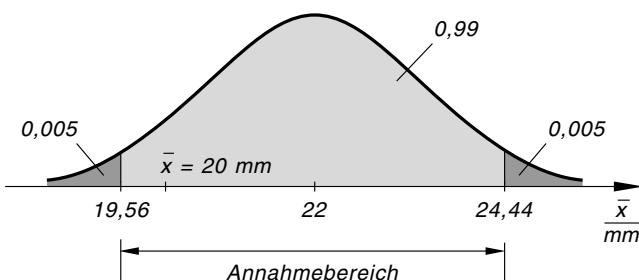
und damit nach (III-172) den *Annahmebereich*

$$\mu_0 - c^* \leq \bar{x} \leq \mu_0 + c^*$$

$$(22 - 2,44) \text{ mm} \leq \bar{x} \leq (22 + 2,44) \text{ mm}$$

$$19,56 \text{ mm} \leq \bar{x} \leq 24,44 \text{ mm}$$

Der beobachtete Stichprobenmittelwert  $\bar{x} = 20$  mm liegt in diesem Intervall (Bild III-50):



**Bild III-50** Der beobachtete Stichprobenmittelwert  $\bar{x} = 20$  mm liegt im Annahmebereich, die Nullhypothese  $H_0 : \mu = \mu_0 = 22$  mm wird daher beibehalten

- (2) Einer *normalverteilten* Grundgesamtheit mit der *Varianz*  $\sigma^2 = 4$  wurde eine Zufallsstichprobe vom Umfang  $n = 10$  entnommen. Dabei ergab sich ein *Stichprobenmittelwert* von  $\bar{x} = 12$ . Man teste die *Nullhypothese*

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 = 10$$

gegen die *Alternativhypothese*

$$H_1 : \mu > \mu_0 = 10$$

für eine vorgegebene *Irrtumswahrscheinlichkeit* oder *Signifikanzzahl* von  $\alpha = 5\%$  (*einseitiger* Parameter-test).

*Lösung:*

**1. Schritt:** Die *Signifikanzzahl* ist bereits vorgegeben:  $\alpha = 0,05$ .

**2. Schritt:** Die *kritische Grenze*  $c$  für die *standardnormalverteilte* Testvariable

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 10}{2/\sqrt{10}}$$

berechnen wir aus der Bedingung

$$P(U > c)_{H_0} = \alpha = 0,05$$

oder der *gleichwertigen* Bedingung

$$P(U \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95$$

unter Verwendung von Tabelle 2 im Anhang:

$$P(U \leq c)_{H_0} = \phi(c) = 0,95 \longrightarrow c = u_{0,95} = 1,645$$

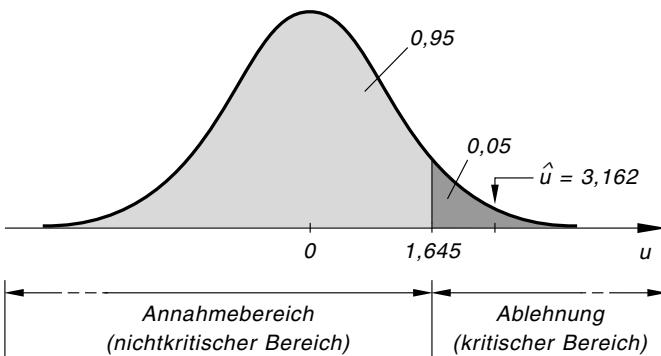
Der *nichtkritische* Bereich (*Annahmebereich*) lautet somit (siehe Bild III-51):

$$u \leq 1,645$$

**3. Schritt:** Wir berechnen jetzt den *Wert* der Testgröße  $U$ :

$$\hat{u} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{12 - 10}{2/\sqrt{10}} = 3,162$$

**4. Schritt (Testentscheidung):** Der *Testwert*  $\hat{u} = 3,162$  liegt *im* kritischen Bereich  $u > 1,645$  (Bild III-51). Die Nullhypothese  $H_0 : \mu \leq \mu_0 = 10$  muss daher auf dem Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$  zugunsten der Alternativhypothese  $H_1 : \mu > \mu_0 = 10$  *abgelehnt* werden. Wir können somit davon ausgehen, dass der unbekannte Mittelwert  $\mu$  der normalverteilten Grundgesamtheit *größer* ist als der vermutete Mindestwert  $\mu_0 = 10$ .



**Bild III-51** Der Testwert  $\hat{u} = 3,162$  fällt in den kritischen Bereich, die Nullhypothese  $H_0 : \mu \leq \mu_0 = 10$  wird daher verworfen

■

#### 4.5.2 Test für den unbekannten Mittelwert $\mu$ einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz $\sigma^2$

$X$  sei wiederum eine *normalverteilte* Zufallsvariable. Neben dem Mittelwert  $\mu$  ist diesmal aber auch die Varianz  $\sigma^2$  *unbekannt*. Wir *vermuten* jedoch, dass der *Mittelwert*  $\mu$  einen bestimmten Wert  $\mu_0$  besitzt ( $\mu = \mu_0$ ) und *testen* daher unter sonst ähnlichen Bedingungen wie im vorangegangenen Abschnitt 4.5.1 die

$$\text{Nullhypothese } H_0 : \mu = \mu_0 \quad (\text{III-173})$$

gegen die

$$\text{Alternativhypothese } H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad (\text{III-174})$$

*Testvariable* ist diesmal wegen der *unbekannten* Varianz  $\sigma^2$  die Zufallsvariable

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \quad (\text{III-175})$$

Dabei ist  $S$  die bereits aus Abschnitt 3.2.4 bekannte *Schätzfunktion* für die (ebenfalls unbekannte) *Standardabweichung*  $\sigma$  und  $n$  der *Umfang* der Zufallsstichprobe, die diesem *zweiseitigen* Parametertest zugrunde gelegt wird. Die Testvariable  $T$  genügt dann der *t-Verteilung* von *Student* mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden. Bei der Berechnung des *kritischen* Wertes  $c$  bzw. der *kritischen Grenzen*  $c_u = -c$  und  $c_o = c$  ist daher diesmal die Verteilungsfunktion  $F(t)$  der *t-Verteilung* mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden zu verwenden.

Der *zweiseitige* Parametertest für den *Mittelwert*  $\mu$  verläuft dann wie folgt:

**Zweiseitiger Test für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  einer Normalverteilung bei unbekannter Varianz  $\sigma^2$**

$X$  sei eine *normalverteilte* Zufallsvariable mit der *unbekannten* Varianz  $\sigma^2$ . Es soll geprüft werden, ob der ebenfalls unbekannte Mittelwert  $\mu$  (wie vermutet) den speziellen Wert  $\mu_0$  besitzt ( $\mu = \mu_0$ ). Auf der Basis einer *Zufallsstichprobe*  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vom Umfang  $n$  testen wir daher die

$$\text{Nullhypothese } H_0 : \mu = \mu_0 \quad (\text{III-176})$$

gegen die

$$\text{Alternativhypothese } H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad (\text{III-177})$$

Die Durchführung dieses *zweiseitigen* Parametertests erfolgt dabei schrittweise wie folgt:

1. Wir wählen zunächst eine bestimmte *Signifikanzzahl (Irrtumswahrscheinlichkeit)*  $\alpha$  (in der Praxis meist  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ).
2. *Test- oder Prüfvariable* ist die Zufallsvariable

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \quad (\text{III-178})$$

die der *t-Verteilung* von *Student* mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden genügt.

Dabei bedeuten:

$\bar{X}$ : *Schätzfunktion* für den unbekannten *Mittelwert*  $\mu$  der normalverteilten Grundgesamtheit (siehe hierzu Abschnitt 3.2.3)

$\mu_0$ : *Vermuteter* Wert des unbekannten Mittelwertes  $\mu$

$S$ : *Schätzfunktion* für die unbekannte Standardabweichung  $\sigma$  der normalverteilten Grundgesamtheit (siehe hierzu Abschnitt 3.2.4)

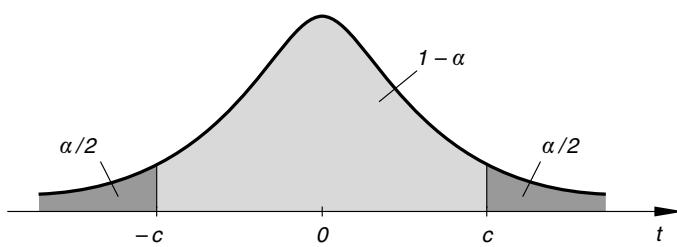
$n$ : *Umfang* der verwendeten Stichprobe

Die Berechnung des *kritischen* Wertes  $c$  und damit der *kritischen Grenzen*  $\mp c$  erfolgt aus der Bedingung

$$P(-c \leq T \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha \quad (\text{III-179})$$

unter Verwendung von Tabelle 4 im Anhang (siehe hierzu auch die *hellgrau* unterlegte Fläche in Bild III-52). Der *nichtkritische* Bereich (*Annahmehbereich*) lautet dann:

$$-c \leq t \leq c \quad (\text{III-180})$$



**Bild III-52** Zur Bestimmung des kritischen Wertes  $c$  für die einer  $t$ -Verteilung genügende Testvariable  $T$

3. Berechnung des *Mittelwertes*  $\bar{x}$  und der *Standardabweichung*  $s$  der vorgegebenen konkreten Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sowie des *Test-* oder *Prüfwertes*

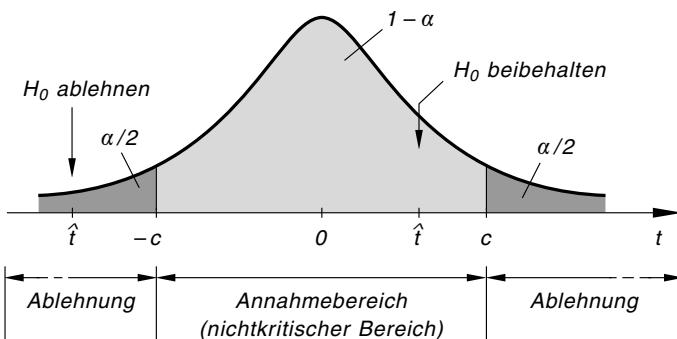
$$\hat{t} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \quad (\text{III-181})$$

der *Testvariablen*  $T$ .

4. **Testentscheidung:** Fällt der *Test-* oder *Prüfwert*  $\hat{t}$  in den *nichtkritischen* Bereich (*Annahmebereich*), d. h. gilt

$$-c \leq \hat{t} \leq c \quad (\text{III-182})$$

so wird die Nullhypothese  $H_0 : \mu = \mu_0$  *beibehalten*, anderenfalls zugunsten der Alternativhypothese  $H_1 : \mu \neq \mu_0$  verworfen (Bild III-53). „*Beibehalten*“ bedeutet dabei lediglich, dass die Nullhypothese  $H_0$  aufgrund der verwendeten Stichprobe *nicht abgelehnt* werden kann.



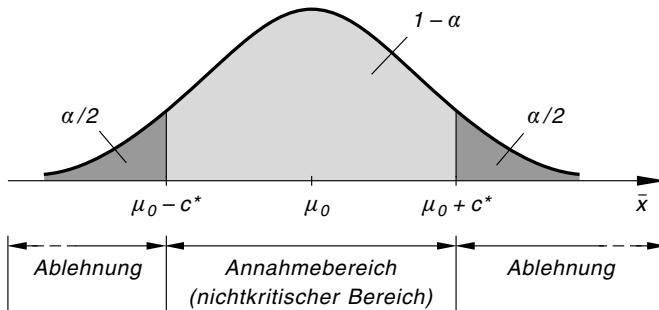
**Bild III-53** Testentscheidung über Beibehaltung oder Ablehnung der Nullhypothese  $H_0 : \mu = \mu_0$

### Anmerkungen

- (1) Bei der *Rücktransformation*  $T \rightarrow \bar{X}$  mittels der Transformationsgleichung (III-178) erhält man für die Zufallsvariable  $\bar{X}$  den *kritischen Wert*  $c^* = c s / \sqrt{n}$  und damit den *nichtkritischen Bereich* (*Annahmebereich*)

$$\mu_0 - c^* \leq \bar{x} \leq \mu_0 + c^* \quad (\text{III-183})$$

(siehe Bild III-54). Fällt der aus der *Stichprobe* berechnete Mittelwert  $\bar{x}$  in dieses Intervall, so wird die Nullhypothese  $H_0$  *beibehalten*, anderenfalls muss sie zu gunsten der Alternativhypothese  $H_1$  *verworfen* werden.



**Bild III-54** Annahmebereich bei einem zweiseitigen Test für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  einer Normalverteilung (bei unbekannter Varianz  $\sigma^2$ )

- (2) Bei *einseitigen Tests* gelten sinngemäß die in Abschnitt 4.5.1 am Abschnittsende gemachten Bemerkungen, wobei bei der Berechnung der *kritischen Grenze*  $c$  die *t-Verteilung von Student* mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden anstelle der Standardnormalverteilung zu verwenden ist.
- (3) Bei einer *umfangreichen* Stichprobe (**Faustregel:**  $n > 30$ ) ist die durch Gleichung (III-178) definierte Testvariable  $T$  *näherungsweise standardnormalverteilt* und wir dürfen daher das in Abschnitt 4.5.1 besprochene Testverfahren anwenden ( $\sigma^2 \approx s^2$ ).

### ■ Beispiel

Ein Hersteller produziert in großen Mengen Zylinderscheiben mit einem *Solldurchmesser* von 20,2 mm. Um die *Einhaltung* dieses Sollwertes zu *überprüfen*, wird aus der laufenden Produktion eine *Stichprobe* vom Umfang  $n = 16$  entnommen. Die Auswertung dieser Stichprobe ergibt dabei einen *mittleren Durchmesser* von  $\bar{x} = 20,6$  mm mit einer *empirischen Standardabweichung* von  $s = 0,5$  mm. Unter Verwendung dieser Stichprobe testen wir die *Nullhypothese*

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 20,2 \text{ mm}$$

gegen die *Alternativhypothese*

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 = 20,2 \text{ mm}$$

auf dem *Signifikanzniveau*  $\alpha = 0,05 = 5\%$ . Der Test soll dabei *zweiseitig* durchgeführt werden, wobei der Durchmesser  $X$  der Zylinderscheiben als eine *normalverteilte* Zufallsvariable angesehen werden kann.

Wir lösen diese Aufgabe schrittweise wie folgt:

**1. Schritt:** Das *Signifikanzniveau* ist bereits vorgegeben:  $\alpha = 0,05$ .

**2. Schritt:** Die *Testvariable*

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 20,2 \text{ mm}}{S/\sqrt{16}} = \frac{\bar{X} - 20,2 \text{ mm}}{S/4}$$

genügt der *t-Verteilung* mit  $f = n - 1 = 16 - 1 = 15$  Freiheitsgraden. Die Bestimmungsgleichung für den *kritischen* Wert  $c$  lautet somit (Bild III-55):

$$P(-c \leq T \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95$$

Unter Verwendung von Tabelle 4 im Anhang erhalten wir (bei  $f = 15$  Freiheitsgraden):

$$\begin{aligned} P(-c \leq T \leq c)_{H_0} &= F(c) - F(-c) = F(c) - [1 - F(c)] = \\ &= F(c) - 1 + F(c) = 2 \cdot F(c) - 1 = 0,95 \quad \Rightarrow \\ 2 \cdot F(c) &= 1,95 \quad \Rightarrow \quad F(c) = 0,975 \\ F(c) = 0,975 &\xrightarrow{f=15} c = t_{(0,975; 15)} = 2,131 \end{aligned}$$

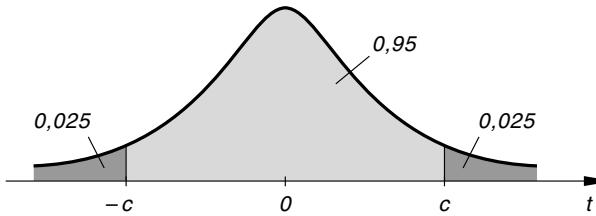


Bild III-55

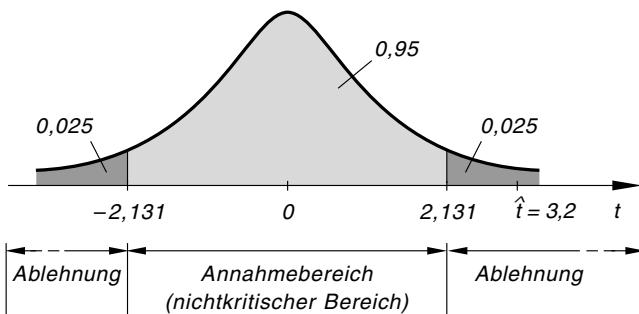
Damit ergibt sich der folgende *nichtkritische* Bereich (*Annahmebereich*; siehe hierzu auch Bild III-56):

$$-2,131 \leq t \leq 2,131$$

**3. Schritt:** Mit  $\mu_0 = 20,2 \text{ mm}$ ,  $n = 16$ ,  $\bar{x} = 20,6 \text{ mm}$  und  $s = 0,5 \text{ mm}$  erhalten wir für die Testvariable  $T$  einen *Test-* oder *Prüfwert* von

$$\hat{t} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{(20,6 - 20,2) \text{ mm}}{0,5 \text{ mm}/\sqrt{16}} = 3,2$$

**4. Schritt (Testentscheidung):** Der *Testwert*  $\hat{t} = 3,2$  fällt in den *kritischen* Bereich  $|t| > 2,131$  (Bild III-56). Die Nullhypothese  $H_0 : \mu = \mu_0 = 20,2 \text{ mm}$  ist somit *abzulehnen*.



**Bild III-56** Der Testwert  $\hat{t} = 3,2$  fällt in den kritischen Bereich, die Nullhypothese  $H_0 : \mu = \mu_0 = 20,2$  mm wird daher abgelehnt

Die Abweichung des Stichprobenmittelwertes  $\bar{x} = 20,6$  mm vom vorgeschriebenen Sollwert  $\mu_0 = 20,2$  mm ist also *signifikant* und kann nicht mehr allein aus der *Zufälligkeit* der verwendeten Stichprobe erklärt werden. Der Produktionsprozess wird daher *unterbrochen* und die Fehlersuche eingeleitet.

### 4.5.3 Tests für die Gleichheit der unbekannten Mittelwerte $\mu_1$ und $\mu_2$ zweier Normalverteilungen (Differenzentests)

#### 4.5.3.1 Abhängige und unabhängige Stichproben

In den Anwendungen stellt sich häufig das Problem festzustellen, ob die *Mittelwerte*  $\mu_1$  und  $\mu_2$  zweier *normalverteilter* Grundgesamtheiten *übereinstimmen* oder ob sie sich *signifikant* voneinander *unterscheiden*. Zu Prüfzwecken entnehmen wir daher den beiden Grundgesamtheiten, die wir durch die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  beschreiben, zunächst jeweils eine Zufallsstichprobe<sup>34)</sup>:

$$x_1, x_2, \dots, x_{n_1} \quad \text{bzw.} \quad y_1, y_2, \dots, y_{n_2} \quad (\text{III-184})$$

Unter Verwendung dieser Stichproben soll dann die

$$\text{Nullhypothese } H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad (\text{III-185})$$

gegen die

$$\text{Alternativhypothese } H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad (\text{III-186})$$

getestet werden. Der Ablauf dieses *zweiseitigen* Tests hängt dabei noch ganz wesentlich davon ab, ob die verwendeten Stichproben voneinander *abhängig* sind oder ob es sich um *unabhängige* Stichproben handelt. Definitionsgemäß gilt:

<sup>34)</sup> Die beiden Stichproben können durchaus von *unterschiedlichem* Umfang sein ( $n_1 \neq n_2$ ).

**Definition:** Zwei Stichproben heißen voneinander *abhängig*, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. Die Stichproben haben den *gleichen* Umfang.
2. Zu *jedem* Wert der einen Stichprobe gehört genau *ein* Wert der anderen Stichprobe und umgekehrt.

### Anmerkungen

- (1) Zwischen *abhängigen* Stichproben besteht somit eine *Kopplung*. Man spricht daher in diesem Zusammenhang auch von *verbundenen* oder *korrelierten* Stichproben.
- (2) Zwei Stichproben, die diese beiden Bedingungen *nicht* zugleich erfüllen, heißen dagegen voneinander *unabhängig* (*unabhängige* Stichproben). So sind beispielsweise zwei Stichproben von *unterschiedlichem* Umfang stets voneinander *unabhängig*.

Wir erläutern diese Begriffe an zwei einfachen Beispielen.

## ■ Beispiele

- (1) Der *Vergleich* zweier Messverfahren oder zweier Messgeräte führt häufig zu *abhängigen* oder *verbundenen* Stichproben, wie das folgende Beispiel zeigen soll:

Aus einer Serienproduktion von Widerständen mit einem bestimmten vorgegebenen *Sollwert* (der hier nicht näher interessiert) entnehmen wir wahllos  $n$  Widerstände, die wir der Reihe nach von 1 bis  $n$  durchnummernieren und durch die Symbole

$$R_1, R_2, \dots, R_n$$

kennzeichnen. Dann messen wir den Widerstandswert eines jeden dieser Widerstände mit zwei *verschiedenen* Messgeräten und erhalten somit für den  $i$ -ten Widerstand  $R_i$  genau *zwei* Messwerte  $x_i$  und  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Die beiden Messreihen

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad \text{und} \quad y_1, y_2, \dots, y_n$$

sind vom *gleichen* Umfang und können dabei als Stichproben aus zwei *normalverteilten* Grundgesamtheiten aufgefasst werden, die wir durch die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  beschreiben. Offensichtlich handelt es sich dabei um zwei *abhängige* oder *verbundene* Stichproben:

Messgerät A

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

Messgerät B

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

Die *umkehrbar eindeutige* Zuordnungsvorschrift lautet:

$$x_i \leftrightarrow y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Zum Widerstand  $R_i$  gehört somit das Wertpaar  $(x_i; y_i)$ .

- (2) Ein Automobilhersteller produziert ein bestimmtes Modell an zwei verschiedenen Standorten A und B. Um den *mittleren Benzinverbrauch* der Fahrzeuge in Abhängigkeit von ihrem Produktionsstandort miteinander vergleichen zu können, werden in beiden Werken *Testfahrzeuge* ausgewählt und deren *mittlerer Benzinverbrauch* ermittelt:

Standort A ( $n_1$ Testfahrzeuge)	$x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$
-----------------------------------	----------------------------

Standort B ( $n_2$ Testfahrzeuge)	$y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$
-----------------------------------	----------------------------

Dabei bedeuten:

$x_i$ : Mittlerer Benzinverbrauch des  $i$ -ten Testfahrzeugs aus Werk A  
 $(i = 1, 2, \dots, n_1)$

$y_k$ : Mittlerer Benzinverbrauch des  $k$ -ten Testfahrzeugs aus Werk B  
 $(k = 1, 2, \dots, n_2)$

Die beiden Stichproben sind offensichtlich voneinander *unabhängig*, da *keinerlei* Zusammenhang zwischen den Fahrzeugen der beiden Werke erkennbar ist. Diese Aussage gilt auch im Sonderfall  $n_1 = n_2$ , d. h. wenn aus beiden Werken *gleichviele* Testfahrzeuge ausgesucht werden.

■

#### 4.5.3.2 Differenzentests bei abhängigen Stichproben

Bei *abhängigen* oder *verbundenen* Stichproben lässt sich der *Differenzentest* auf die in den Abschnitten 4.5.1 und 4.5.2 beschriebenen Parametertests für den Mittelwert  $\mu$  einer normalverteilten Grundgesamtheit zurückführen.

Wir beschreiben den *zweiseitigen* Differenzentest wie folgt:

**Zweiseitiger Test für die Gleichheit der unbekannten Mittelwerte  $\mu_1$  und  $\mu_2$  zweier Normalverteilungen unter Verwendung abhängiger Stichproben (sog. Differenzentest für Mittelwerte bei abhängigen Stichproben)**

$X$  und  $Y$  seien zwei *normalverteilte* Zufallsvariable mit den *unbekannten* Mittelwerten  $\mu_1$  und  $\mu_2$ . Es soll geprüft werden, ob die beiden Mittelwerte (wie vermutet) übereinstimmen ( $\mu_1 = \mu_2$ ). Auf der Basis zweier *abhängiger* Stichproben

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad \text{und} \quad y_1, y_2, \dots, y_n \quad (\text{III-187})$$

vom (gleichen) Umfang  $n$  testen wir daher die

$$\text{Nullhypothese } H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad (\text{III-188})$$

gegen die

$$\text{Alternativhypothese } H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad (\text{III-189})$$

Diesen *zweiseitigen* Parametertest führen wir zweckmäßigerweise auf einen entsprechenden Test des *Hilfsparameters*

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 \quad (\text{III-190})$$

(Differenz der beiden Mittelwerte  $\mu_1$  und  $\mu_2$ ) zurück. Getestet wird dann die

$$\text{Nullhypothese } H_0 : \mu = 0 \quad (\text{III-191})$$

gegen die

$$\text{Alternativhypothese } H_1 : \mu \neq 0 \quad (\text{III-192})$$

(sog. *Differenzentest* für Mittelwerte bei abhängigen Stichproben).

Zunächst bildet man aus den beiden *abhängigen* Stichproben die entsprechenden *Differenzen*

$$z_i = x_i - y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{III-193})$$

und betrachtet diese Werte dann als Stichprobenwerte einer *neuen* Stichprobe vom Umfang  $n$ :

$$z_1, z_2, \dots, z_n \quad (\text{III-194})$$

Es lässt sich dann mit den in den Abschnitten 4.5.1 und 4.5.2 beschriebenen Verfahren prüfen, ob der *Mittelwert*  $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y}$  dieser Stichprobe in den Annahmebereich fällt *oder* nicht. Fällt der Mittelwert  $\bar{z}$  in den *Annahmebereich*, so wird die Nullhypothese  $H_0 : \mu = 0$  bzw.  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  *beibehalten*, d. h. *nicht abgelehnt* und wir können dann davon ausgehen, dass die Mittelwerte  $\mu_1$  und  $\mu_2$  der beiden normalverteilten Grundgesamtheiten übereinstimmen. Andernfalls wird die Nullhypothese  $H_0$  zugunsten der Alternativhypothese  $H_1 : \mu \neq 0$  bzw.  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$  *verworfen*. Die Mittelwerte  $\mu_1$  und  $\mu_2$  der beiden normalverteilten Grundgesamtheiten können in diesem Fall dann als *verschieden* betrachtet werden.

Es wird also getestet, ob die durch *Differenzbildung* erhaltene Stichprobe  $z_1, z_2, \dots, z_n$  einer *normalverteilten* Grundgesamtheit mit dem *Mittelwert*  $\mu = 0$  entstammt. Wir müssen dabei noch *zwei* Fälle unterscheiden, je nachdem ob die Varianz  $\sigma^2$  dieser Grundgesamtheit bekannt *oder* unbekannt ist:

**1. Fall:** Die Varianzen  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$  der beiden Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sind *bekannt*. Dann aber gilt

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n} = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n} \quad (\text{III-195})$$

und wir können das in Abschnitt 4.5.1 besprochene Prüfverfahren anwenden (die verwendete Testvariable ist in diesem Fall *standardnormalverteilt*).

Diese Aussage gilt *näherungsweise* auch bei *unbekannten* Varianzen, sofern die verwendeten abhängigen Stichproben *hinreichend umfangreich* sind (**Faustregel:**  $n > 30$ ). In diesem Fall verwendet man als *Schätzwert* für die unbekannte Varianz  $\sigma^2$  die *Stichprobenvarianz*  $s^2$  (d. h. die Varianz der Stichprobe  $z_1, z_2, \dots, z_n$ ). In der Praxis wird man daher nach Möglichkeit immer auf *umfangreiche abhängige* Stichproben zurückgreifen.

**2. Fall:** Die Varianzen  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$  der beiden Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sind *unbekannt*. Dann bleibt auch die Varianz  $\sigma^2$  *unbekannt* und wir müssen das in Abschnitt 4.5.2 dargestellte Testverfahren verwenden (die Testvariable genügt jetzt einer *t-Verteilung* mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden). Dieser Fall tritt ein bei *abhängigen* Stichproben mit einem geringen Umfang ( $n \leq 30$ ).

## ■ Beispiel

Zwei *verschiedene* Messmethoden für elektrische Widerstände sollen miteinander *verglichen* werden. Aus diesem Grund wurden an 6 Widerständen *Parallelmessungen* vorgenommen, die zu dem folgenden Messprotokoll führten ( $x_i$ : Messwerte nach der Methode A;  $y_i$ : Messwerte nach der Methode B; alle Werte in  $\Omega$ ):

$i$	1	2	3	4	5	6
$x_i$	100,5	102,0	104,3	101,5	98,4	102,9
$y_i$	98,2	99,1	102,4	101,1	96,2	101,8

Zu jedem der 6 Widerstände gehört genau ein Wertepaar  $(x_i; y_i)$ . Es handelt sich also um *abhängige* Stichproben (Messreihen). Durch *Differenzbildung*  $z_i = x_i - y_i$  erhalten wir dann die folgende Stichprobe (alle Werte in  $\Omega$ ):

$i$	1	2	3	4	5	6
$z_i$	2,3	2,9	1,9	0,4	2,2	1,1

Wir betrachten die beiden Messmethoden A und B dabei als *gleichwertig*, wenn diese Stichprobe aus einer (normalverteilten) Grundgesamtheit mit dem Mittelwert  $\mu = 0$  stammt. Daher testen wir jetzt die *Nullhypothese*

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 0$$

gegen die *Alternativhypothese*

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 = 0$$

auf dem gewählten Signifikanzniveau  $\alpha = 0,01$  wie folgt:

**1. Schritt:** Das Signifikanzniveau ist vorgegeben:  $\alpha = 0,01$ .

**2. Schritt:** Wegen der *unbekannten* Varianz  $\sigma^2$  müssen wir die *Testvariable*

$$T = \frac{\bar{Z} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{Z} - 0}{S/\sqrt{6}} = \frac{\bar{Z}}{S/\sqrt{6}}$$

verwenden, die der *t-Verteilung* mit  $f = n - 1 = 6 - 1 = 5$  Freiheitsgraden genügt. Den *kritischen* Wert  $c$  bestimmen wir dann aus der Bestimmungsgleichung

$$P(-c \leq T \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99$$

unter Verwendung von Tabelle 4 im Anhang (Bild III-57):

$$\begin{aligned} P(-c \leq T \leq c)_{H_0} &= F(c) - F(-c) = F(c) - [1 - F(c)] = \\ &= F(c) - 1 + F(c) = 2 \cdot F(c) - 1 = 0,99 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$2 \cdot F(c) = 1,99 \Rightarrow F(c) = 0,995$$

$$F(c) = 0,995 \xrightarrow{f=5} c = t_{(0,995;5)} = 4,032$$

Der *nichtkritische* Bereich (*Annahmebereich*) lautet daher:

$$-4,032 \leq t \leq 4,032$$

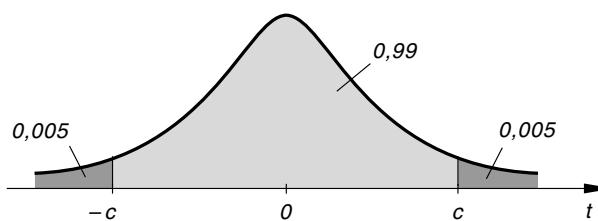


Bild III-57

**3. Schritt:** Wir berechnen nun den *Mittelwert*  $\bar{z}$  und die *Standardabweichung*  $s$  der Stichprobe unter Verwendung der folgenden (schrittweise aufgebauten) Tabelle:

$i$	$\frac{z_i}{\Omega}$	$\frac{z_i - \bar{z}}{\Omega}$	$\frac{(z_i - \bar{z})^2}{\Omega^2}$
1	2,3	0,5	0,25
2	2,9	1,1	1,21
3	1,9	0,1	0,01
4	0,4	-1,4	1,96
5	2,2	0,4	0,16
6	1,1	-0,7	0,49
$\sum$	10,8	0	4,08

$$\bar{z} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^6 z_i = \frac{1}{6} \cdot 10,8 \Omega = 1,8 \Omega$$

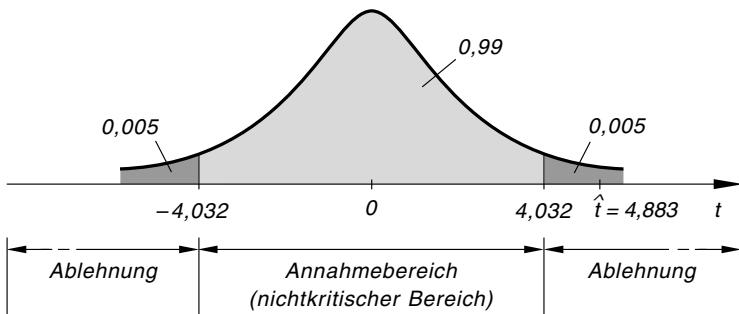
$$s^2 = \frac{1}{6-1} \cdot \sum_{i=1}^6 (z_i - \bar{z})^2 = \frac{1}{5} \cdot 4,08 \Omega^2 = 0,816 \Omega^2$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0,816 \Omega^2} = 0,903 \Omega$$

Damit erhalten wir für die Testvariable  $T$  den folgenden *Test-* oder *Prüfwert*:

$$\hat{t} = \frac{\bar{z} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{(1,8 - 0) \Omega}{0,903 \Omega / \sqrt{6}} = \frac{1,8 \cdot \sqrt{6}}{0,903} = 4,883$$

**4. Schritt (Testentscheidung):** Der *Testwert*  $\hat{t} = 4,883$  fällt in den *kritischen Bereich*  $|t| > 4,032$  (Bild III-58). Die Nullhypothese  $H_0 : \mu = \mu_0 = 0$  ist somit *abzulehnen*. Die beiden Messmethoden können daher *nicht* als gleichwertig angesehen werden.



**Bild III-58** Der Testwert  $\hat{t} = 4,883$  fällt in den kritischen Bereich, die Nullhypothese  $H_0 : \mu = \mu_0 = 0$  wird daher abgelehnt

■

#### 4.5.3.3 Differenzentests bei unabhängigen Stichproben

Wir testen jetzt die

$$\text{Nullhypothese } H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad (\text{III-196})$$

gegen die

$$\text{Alternativhypothese } H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad (\text{III-197})$$

unter Verwendung von *unabhängigen* Stichproben

$$x_1, x_2, \dots, x_{n_1} \quad \text{und} \quad y_1, y_2, \dots, y_{n_2} \quad (\text{III-198})$$

mit den Stichprobenumfängen  $n_1$  und  $n_2$ . Der *Differenzentest* hängt dabei noch ganz wesentlich davon ab, ob die Varianzen  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$  der beiden zugehörigen *normalverteilten* Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  bekannt sind *oder* nicht. Wir unterscheiden daher *zwei* Fälle:

##### 1. Fall: Differenzentest für die Mittelwerte $\mu_1$ und $\mu_2$ zweier Normalverteilungen mit bekannten Varianzen $\sigma_1^2$ und $\sigma_2^2$

Trifft die Nullhypothese  $H_0$  zu, gilt also  $\mu_1 = \mu_2$  und sind die Varianzen  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$  der beiden *normalverteilten* Grundgesamtheiten *bekannt*, so ist die Zufallsvariable  $Z = \bar{X} - \bar{Y}$  ebenfalls *normalverteilt* mit dem *Mittelwert*  $\mu = 0$  und der Varianz

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \quad (\text{III-199})$$

$\bar{X}$  und  $\bar{Y}$  sind dabei die bereits aus Abschnitt 3.2.3 bekannten *Schätzfunktionen* für die beiden unbekannten *Mittelwerte*  $\mu_1$  und  $\mu_2$ .

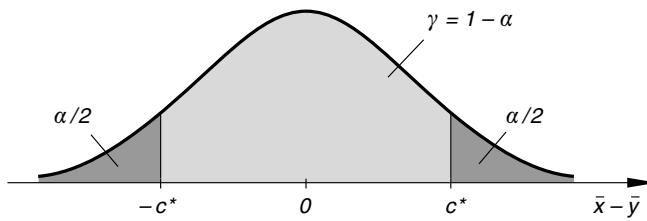
Als *Testvariable* eignet sich dann die *standardnormalverteilte* Zufallsvariable

$$U = \frac{Z}{\sigma} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma} \quad (\text{III-200})$$

Die *Nullhypothese*

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad (\text{III-201})$$

wird dabei nur dann *beibehalten* (d. h. *nicht abgelehnt*), wenn die aus den beiden Stichprobenmittelwerten  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  gebildete Differenz  $\bar{x} - \bar{y}$  *nicht signifikant* vom Wert *Null* abweicht. Die *kritischen Grenzen*  $\mp c^*$  müssen daher nach Vorgabe einer (kleinen) Signifikanzzahl (Irrtumswahrscheinlichkeit)  $\alpha$  so bestimmt werden, dass die Werte der Zufallsvariablen  $Z = \bar{X} - \bar{Y}$  mit der *statistischen Sicherheit* (Wahrscheinlichkeit)  $\gamma = 1 - \alpha$  in den *nichtkritischen* Bereich (*Annahmebereich*) fallen (*hellgrau* unterlegte Fläche in Bild III-59).



**Bild III-59** Zur Bestimmung der kritischen Grenzen  $\mp c^*$  für die Zufallsvariable  $Z = \bar{X} - \bar{Y}$

Die Bedingung für den *kritischen* Wert  $c^*$  lautet somit:

$$P(-c^* \leq \bar{X} - \bar{Y} \leq c^*)_{H_0} = \gamma = 1 - \alpha \quad (\text{III-202})$$

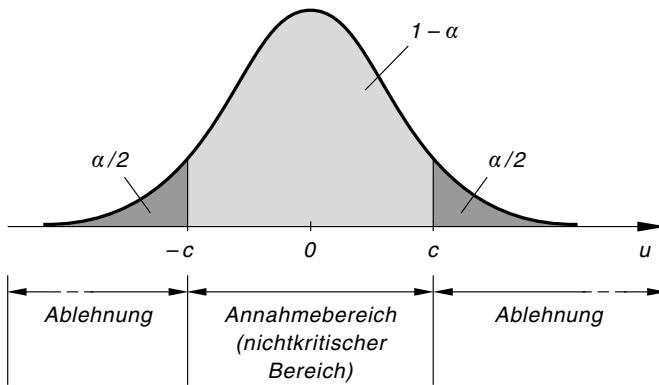
Beim Übergang von der Zufallsvariablen  $Z = \bar{X} - \bar{Y}$  zur *standardnormalverteilten* Testvariablen  $U = \frac{Z}{\sigma} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma}$  wird daraus die Bedingung

$$P\left(-\frac{c^*}{\sigma} \leq U \leq \frac{c^*}{\sigma}\right)_{H_0} = \gamma = 1 - \alpha \quad (\text{III-203})$$

die wir unter Verwendung der Abkürzung  $c = c^*/\sigma$  auch wie folgt schreiben können:

$$P(-c \leq U \leq c)_{H_0} = \gamma = 1 - \alpha \quad (\text{III-204})$$

Die Konstante  $c$ , d. h. der *kritische* Wert für die Testvariable  $U$  lässt sich mit Hilfe von Tabelle 2 im Anhang bestimmen (Tabelle der *Quantile der Standardnormalverteilung*). Der *Annahmebereich* oder *nichtkritische* Bereich liegt dann zwischen den beiden Grenzen  $c_u = -c$  und  $c_o = c$  (Bild III-60).



**Bild III-60** Zur Bestimmung des kritischen Wertes  $c$  für die standardnormalverteilte Testvariable  $U$

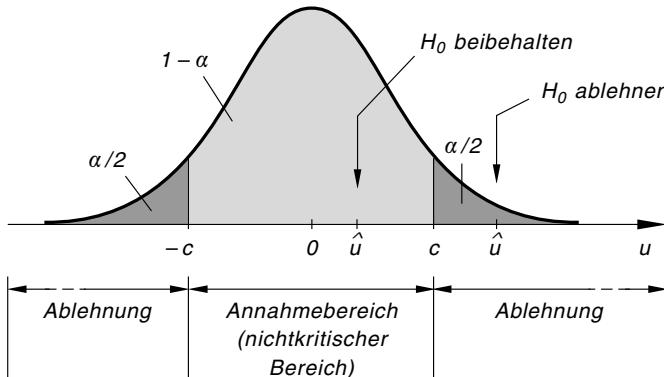
Wir berechnen nun die *Mittelwerte*  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  der beiden vorgegebenen unabhängigen Stichproben und daraus den *Wert* der Testvariablen  $U$ :

$$\hat{u} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma} \quad (\text{III-205})$$

Es folgt dann die *Testentscheidung*: Fällt der *Test- oder Prüfwert*  $\hat{u}$  in das Intervall

$$-c \leq \hat{u} \leq c \quad (\text{III-206})$$

(*Annahmebereich*), so wird die Nullhypothese  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  *beibehalten* (d. h. *nicht abgelehnt*), anderenfalls aber zugunsten der Alternativhypothese  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$  abgelehnt (Bild III-61).



**Bild III-61** Testentscheidung über Beibehaltung oder Ablehnung der Nullhypothese  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

Wir fassen diesen Parametertest wie folgt zusammen:

**Zweiseitiger Test für die Gleichheit der unbekannten Mittelwerte  $\mu_1$  und  $\mu_2$  zweier Normalverteilungen mit den bekannten Varianzen  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$  unter Verwendung unabhängiger Stichproben (Differenzentest für Mittelwerte bei bekannten Varianzen und Verwendung unabhängiger Stichproben)**

$X$  und  $Y$  seien zwei *unabhängige* und *normalverteilte* Zufallsvariable mit den unbekannten Mittelwerten  $\mu_1$  und  $\mu_2$ , aber bekannten Varianzen  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$ . Es soll geprüft werden, ob die beiden Mittelwerte (wie vermutet) übereinstimmen ( $\mu_1 = \mu_2$ ). Auf der Basis zweier *unabhängiger* Zufallsstichproben

$$x_1, x_2, \dots, x_{n_1} \quad \text{und} \quad y_1, y_2, \dots, y_{n_2} \quad (\text{III-207})$$

mit den Stichprobenumfängen  $n_1$  und  $n_2$  testen wir daher die

$$\text{Nullhypothese } H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad (\text{III-208})$$

gegen die

$$\text{Alternativhypothese } H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad (\text{III-209})$$

Die Durchführung dieses *zweiseitigen* Parametertests erfolgt dabei schrittweise wie folgt:

1. Wir wählen zunächst eine bestimmte *Signifikanzzahl (Irrtumswahrscheinlichkeit)*  $\alpha$  (in der Praxis meist  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ).
2. *Test- oder Prüfvariable* ist die *standardnormalverteilte* Zufallsvariable

$$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma} \quad \text{mit} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \quad (\text{III-210})$$

Dabei bedeuten:

$\bar{X}, \bar{Y}$ : *Schätzfunktionen* für die unbekannten *Mittelwerte*  $\mu_1$  und  $\mu_2$  der beiden normalverteilten Grundgesamtheiten (siehe hierzu Abschnitt 3.2.3)

$\sigma_1, \sigma_2$ : *Standardabweichungen* der beiden normalverteilten Grundgesamtheiten (hier als *bekannt* vorausgesetzt)

$n_1, n_2$ : *Umfänge* der verwendeten *unabhängigen* Stichproben

$\sigma$ : *Standardabweichung* der Zufallsvariablen  $\bar{X} - \bar{Y}$

Die Berechnung des *kritischen* Wertes  $c$  und damit der *kritischen Grenzen*  $\mp c$  erfolgt aus der Bedingung

$$P(-c \leq U \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha \quad (\text{III-211})$$

unter Verwendung von Tabelle 2 im Anhang (siehe hierzu die *hellgrau* unterlegte Fläche in Bild III-60). Der *nichtkritische* Bereich (*Annahmehbereich*) lautet dann:

$$-c \leq u \leq c \quad (\text{III-212})$$

3. Berechnung der *Mittelwerte*  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  der beiden vorgegebenen unabhängigen Stichproben sowie des *Test- oder Prüfwertes*

$$\hat{u} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma} \quad (\text{III-213})$$

der Testvariablen  $U$ .

4. **Testentscheidung:** Fällt der *Test- oder Prüfwert*  $\hat{u}$  in den *nichtkritischen Bereich* (*Annahmebereich*), d. h. gilt

$$-c \leq \hat{u} \leq c \quad (\text{III-214})$$

so wird die Nullhypothese  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  *beibehalten*, anderenfalls zugunsten der Alternativhypothese  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$  *verworfen* (siehe hierzu Bild III-61). „*Beibehalten*“ bedeutet dabei lediglich, dass man die Nullhypothese  $H_0$  aufgrund der verwendeten Stichprobe *nicht ablehnen* kann.

#### Anmerkungen

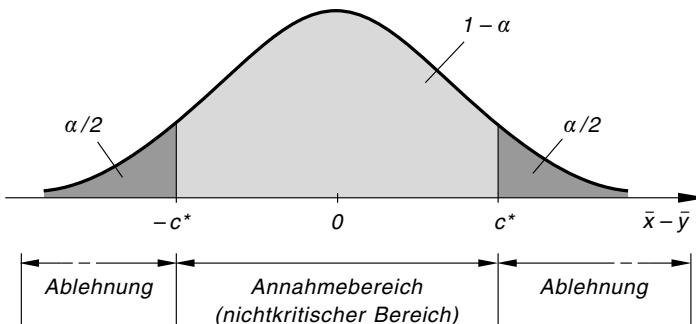
- (1) Für die Zufallsvariable  $Z = \bar{X} - \bar{Y} = \sigma U$  erhält man somit den *kritischen Wert*

$$c^* = c\sigma = c \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \quad (\text{III-215})$$

Fällt die aus den beiden Stichprobenmittelwerten  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  gebildete Differenz  $\bar{x} - \bar{y}$  in den *Annahmebereich*

$$-c^* \leq \bar{x} - \bar{y} \leq c^* \quad (\text{III-216})$$

so wird die Nullhypothese  $H_0$  *beibehalten* (d. h. *nicht abgelehnt*), anderenfalls muss sie zugunsten der Alternativhypothese  $H_1$  *verworfen* werden (Bild III-62).



**Bild III-62** Annahmebereich beim zweiseitigen Differenzentest für Mittelwerte bei bekannten Varianzen und Verwendung unabhängiger Stichproben

- (2) Dieser *Differenzentest* lässt sich auch für *einseitige* Fragestellungen durchführen. In diesem Fall gibt es nur *eine* kritische Grenze (siehe hierzu die in Abschnitt 4.5.1 am Abschnittsende gemachten Bemerkungen).
- (3) Bei *umfangreichen* Stichproben (**Faustregel:**  $n_1, n_2 > 30$ ) dürfen die Varianzen  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$  *näherungsweise* durch ihre *Schätzwerte*  $s_1^2$  und  $s_2^2$ , d. h. durch die *Stichprobenvarianzen* ersetzt werden, falls sie *unbekannt* sein sollten (siehe hierzu auch das nachfolgende Beispiel).

## ■ Beispiel

Mit dem *Differenzentest* soll geprüft werden, ob die auf zwei *verschiedenen* Maschinen A und B hergestellten Glühbirnen im Mittel – wie vermutet wird – die *gleiche* Lebensdauer besitzen. Dabei können wir davon ausgehen, dass die beiden Zufallsvariablen

$$X = \text{Lebensdauer einer auf der Maschine A produzierten Glühbirne}$$

und

$$Y = \text{Lebensdauer einer auf der Maschine B produzierten Glühbirne}$$

*normalverteilt* sind. Zu Prüfzwecken entnehmen wir daher den beiden (normalverteilten) Grundgesamtheiten jeweils eine Stichprobe, deren Auswertung zu dem folgenden Ergebnis führte (Angabe von Umfang, Mittelwert und Standardabweichung der jeweiligen Stichprobe):

Maschine A	$n_1 = 80$ ,	$\bar{x} = 520$ h,	$s_1 = 50$ h
------------	--------------	--------------------	--------------

Maschine B	$n_2 = 50$ ,	$\bar{y} = 500$ h,	$s_2 = 45$ h
------------	--------------	--------------------	--------------

Da die Stichprobenumfänge *hinreichend groß* sind ( $n_1 = 80 > 30, n_2 = 50 > 30$ ), dürfen wir die *unbekannten* Varianzen  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$  der beiden Grundgesamtheiten *näherungsweise* durch die *Stichprobenvarianzen*

$$s_1^2 = (50 \text{ h})^2 = 2500 \text{ h}^2 \quad \text{und} \quad s_2^2 = (45 \text{ h})^2 = 2025 \text{ h}^2$$

ersetzen. Wir testen jetzt die *Nullhypothese*

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

gegen die *Alternativhypothese*

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

schrittweise wie folgt:

1. **Schritt:** Wir wählen als *Signifikanzzahl* (*Irrtumswahrscheinlichkeit*)  $\alpha = 0,01$ .
2. **Schritt:** Berechnung der *Varianz*  $\sigma^2$  der Zufallsvariablen  $Z = \bar{X} - \bar{Y}$  nach Gleichung (III-199) bzw. Gleichung (III-210):

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \approx \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} = \left( \frac{2500}{80} + \frac{2025}{50} \right) h^2 = \\ &= (31,25 + 40,5) h^2 = 71,75 h^2\end{aligned}$$

Die Standardabweichung beträgt somit näherungsweise  $\sigma = \sqrt{71,75 h^2} = 8,471 h$ . Der kritische Wert  $c$  für unsere standardnormalverteilte Testvariable

$$U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{8,471 h}$$

wird aus der Bedingung

$$P(-c \leq U \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99$$

wie folgt unter Verwendung von Tabelle 2 im Anhang bestimmt (siehe Bild III-63):

$$\begin{aligned}P(-c \leq U \leq c)_{H_0} &= \phi(c) - \phi(-c) = \phi(c) - [1 - \phi(c)] = \\ &= \phi(c) - 1 + \phi(c) = 2 \cdot \phi(c) - 1 = 0,99 \quad \Rightarrow \\ 2 \cdot \phi(c) &= 1,99 \quad \Rightarrow \quad \phi(c) = 0,995 \\ \phi(c) &= 0,995 \longrightarrow c = u_{0,995} = 2,576\end{aligned}$$

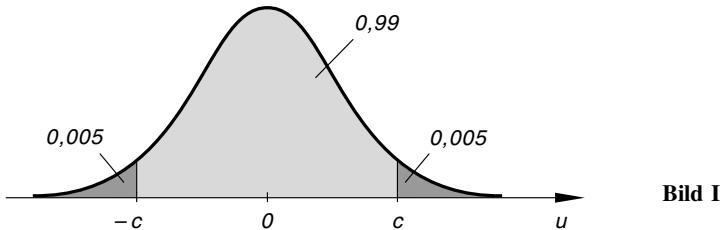


Bild III-63

Der nichtkritische Bereich (Annahmebereich) ist somit durch das symmetrische Intervall

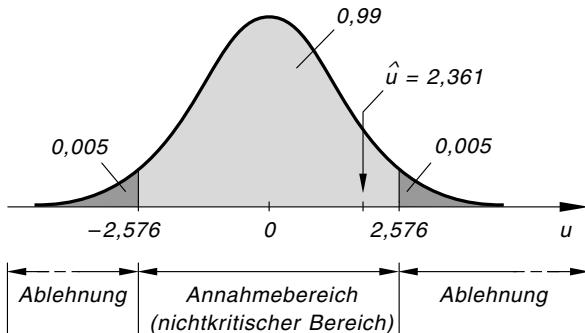
$$-2,576 \leq u \leq 2,576$$

gegeben (Bild III-64).

**3. Schritt:** Mit  $\bar{x} = 520 h$ ,  $\bar{y} = 500 h$  und  $\sigma = 8,471 h$  erhalten wir für die Testvariable  $U$  den folgenden Test- oder Prüfwert:

$$\hat{u} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma} = \frac{(520 - 500) h}{8,471 h} = 2,361$$

**4. Schritt (Testentscheidung):** Unser Testwert  $\hat{u} = 2,361$  fällt in den Annahmebereich, d. h. es gilt  $-2,576 \leq \hat{u} \leq 2,576$  (Bild III-64). Die Testentscheidung lautet daher: Aufgrund der verwendeten Stichprobe kann die Nullhypothese  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  nicht abgelehnt werden. Wir können somit davon ausgehen, dass beide Maschinen Glühbirnen von gleicher mittlerer Lebensdauer produzieren. Zumindest spricht das Stichprobenmaterial *nicht* gegen diese Annahme.



**Bild III-64** Der Testwert  $\hat{u} = 2,361$  fällt in den Annahmebereich, die Nullhypothese  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  wird daher beibehalten, d. h. nicht abgelehnt

■

## 2. Fall: Differenzentest für die Mittelwerte $\mu_1$ und $\mu_2$ zweier Normalverteilungen mit gleicher, aber unbekannter Varianz ( $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ )

Bisher sind wir von *normalverteilten* Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit *bekannten* Varianzen  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$  ausgegangen. Etwas anders liegen die Verhältnisse, wenn die Varianzen zwar als *gleich* angesehen werden können ( $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ), jedoch *unbekannt* sind. In diesem Fall verwendet man (unter sonst *gleichen* Voraussetzungen) als *Testgröße* die Zufallsvariable

$$T = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \cdot \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}} \quad (\text{III-217})$$

die der *t-Verteilung* von *Student* mit  $f = n_1 + n_2 - 2$  Freiheitsgraden genügt<sup>35)</sup>.  $n_1$  und  $n_2$  sind dabei wiederum die *Umfänge* der verwendeten *unabhängigen* Zufallsstichproben,  $S_1^2$  und  $S_2^2$  die bereits aus Abschnitt 3.2.4 bekannten *Schätzfunktionen* für die unbekannten *Varianzen*  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$ .

<sup>35)</sup> Unter der *Voraussetzung*, dass die Nullhypothese  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  zutrifft.

Der *zweiseitige* Parametertest verläuft jetzt nach dem folgenden Schema:

**Zweiseitiger Test für die Gleichheit der unbekannten Mittelwerte  $\mu_1$  und  $\mu_2$  zweier Normalverteilungen mit gleicher, aber unbekannter Varianz ( $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ) unter Verwendung unabhängiger Stichproben (Differenzentest für Mittelwerte bei gleicher, aber unbekannter Varianz und Verwendung unabhängiger Stichproben)**

$X$  und  $Y$  seien zwei *unabhängige* und *normalverteilte* Zufallsvariable mit den *unbekannten* Mittelwerten  $\mu_1$  und  $\mu_2$  und zwar *gleicher*, aber *unbekannter* Varianz ( $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ). Es soll *geprüft* werden, ob die beiden Mittelwerte (wie vermutet) *übereinstimmen* ( $\mu_1 = \mu_2$ ). Auf der Basis zweier *unabhängiger* Zufallsstichproben

$$x_1, x_2, \dots, x_{n_1} \quad \text{und} \quad y_1, y_2, \dots, y_{n_2} \quad (\text{III-218})$$

mit den Stichprobenumfängen  $n_1$  und  $n_2$  testen wir daher die

$$\text{Nullhypothese } H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad (\text{III-219})$$

gegen die

$$\text{Alternativhypothese } H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad (\text{III-220})$$

Die Durchführung dieses *zweiseitigen* Parametertests erfolgt dabei schrittweise wie folgt:

1. Wir wählen zunächst eine bestimmte *Signifikanzzahl* (*Irrtumswahrscheinlichkeit*)  $\alpha$  (in der Praxis meist  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ).
2. *Test- oder Prüfvariable* ist die Zufallsvariable

$$T = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \cdot \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}} \quad (\text{III-221})$$

die der *t-Verteilung* von *Student* mit  $f = n_1 + n_2 - 2$  Freiheitsgraden genügt.

Dabei bedeuten:

$\bar{X}, \bar{Y}$ : *Schätzfunktionen* für die unbekannten *Mittelwerte*  $\mu_1$  und  $\mu_2$  der beiden normalverteilten Grundgesamtheiten (siehe hierzu Abschnitt 3.2.3)

$S_1^2, S_2^2$ : *Schätzfunktionen* für die zwar gleichen, jedoch unbekannten *Varianzen*  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$  der beiden normalverteilten Grundgesamtheiten (siehe hierzu Abschnitt 3.2.4)

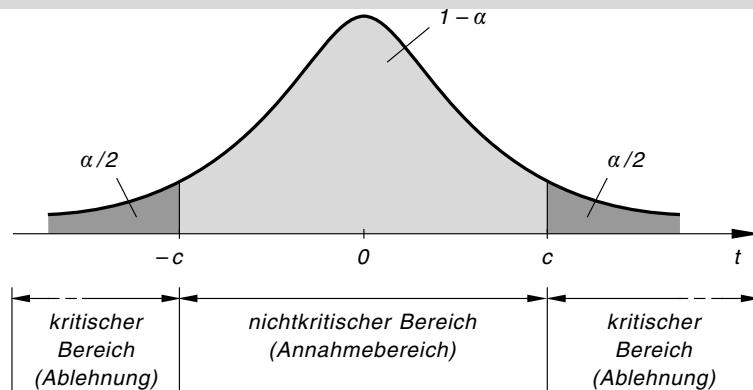
$n_1, n_2$ : *Umfänge* der verwendeten *unabhängigen* Stichproben

Die Berechnung des *kritischen* Wertes  $c$  und damit der *kritischen Grenzen*  $\mp c$  erfolgt aus der Bedingung

$$P(-c \leq T \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha \quad (\text{III-222})$$

unter Verwendung von Tabelle 4 im Anhang (siehe hierzu die hellgrau unterlegte Fläche in Bild III-65). Der *nichtkritische* Bereich (*Annahmebereich*) lautet dann:

$$-c \leq t \leq c \quad (\text{III-223})$$



**Bild III-65** Zur Bestimmung des kritischen Wertes  $c$  für die einer  $t$ -Verteilung genügende Testvariable  $T$

3. Berechnung der *Mittelwerte*  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  und der *Varianzen*  $s_1^2$  und  $s_2^2$  der beiden vorgegebenen *unabhängigen* Stichproben sowie des *Hilfsparameters*

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad (\text{III-224})$$

Daraus wird dann der *Test-* oder *Prüfwert*

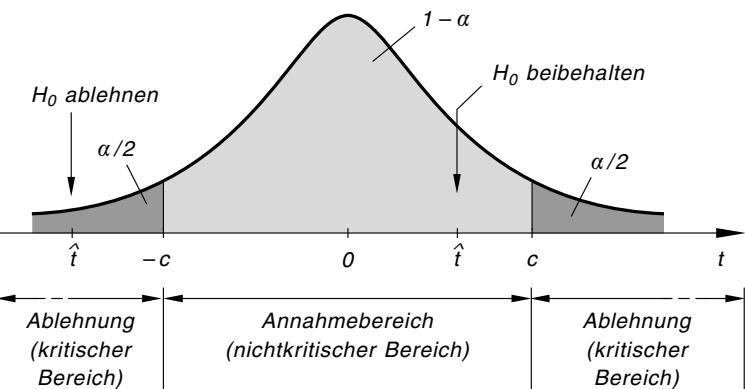
$$\hat{t} = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \cdot \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s} \quad (\text{III-225})$$

der Testvariablen  $T$  bestimmt.

4. **Testentscheidung:** Fällt der *Test-* oder *Prüfwert*  $\hat{t}$  in den *nichtkritischen* Bereich (*Annahmebereich*), d. h. gilt

$$-c \leq \hat{t} \leq c \quad (\text{III-226})$$

so wird die Nullhypothese  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  *beibehalten*, anderenfalls zugunsten der Alternativhypothese  $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$  *verworfen* (Bild III-66). „*Beibehalten*“ bedeutet in diesem Zusammenhang lediglich, dass man die Nullhypothese  $H_0$  aufgrund der verwendeten Stichprobe *nicht ablehnen* kann.



**Bild III-66** Testentscheidung über Beibehaltung oder Ablehnung der Nullhypothese  
 $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

### Anmerkungen

- (1) Bei *gleichem* Stichprobenumfang ( $n_1 = n_2 = n$ ) vereinfacht sich die Formel (III-225) zur Ermittlung des *Test- oder Prüfwertes* wie folgt:

$$\hat{t} = \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} = \sqrt{\frac{n}{s_1^2 + s_2^2}} \cdot (\bar{x} - \bar{y}) \quad (\text{III-227})$$

- (2) Dieser Differenzentest lässt sich auch für *einseitige* Fragestellungen durchführen. In diesem Fall gibt es nur *eine* kritische Grenze (siehe Anmerkung am Ende des Abschnitts 4.5.1).
- (3) Wird die Nullhypothese  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  *beibehalten* (d. h. *nicht abgelehnt*), so gelten die folgenden Beziehungen:

$$\mu_1 = \mu_2 \quad \text{und} \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad (\text{III-228})$$

Die beiden unabhängigen Stichproben stammen somit aus der *gleichen* Grundgesamtheit.

### ■ Beispiel

Durch eine *Stichprobenuntersuchung* soll die *Leistung* zweier Ölpumpen miteinander verglichen werden. Wir setzen dabei voraus, dass die beiden Zufallsvariablen

$X = \text{Gefördertes Ölvolume pro Minute der Pumpe A}$

und

$Y = \text{Gefördertes Ölvolume pro Minute der Pumpe B}$

*normalverteilt* sind und die gleiche, aber unbekannte Varianz besitzen ( $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ).

Eine *konkrete* Stichprobenuntersuchung erbrachte das folgende Ergebnis:

$$\boxed{\text{Pumpe A}} \quad n_1 = 10, \quad \bar{x} = 50 \text{ l/min}, \quad s_1 = 4,2 \text{ l/min}$$

$$\boxed{\text{Pumpe B}} \quad n_2 = 12, \quad \bar{y} = 45 \text{ l/min}, \quad s_2 = 4,8 \text{ l/min}$$

Können wir aus diesen *unabhängigen* Stichproben schließen, dass die Pumpe B *weniger* leistet als die Pumpe A?

*Lösung:* Um diese Frage beantworten zu können, führen wir einen *einseitigen* Differenzentest durch. Wir testen dabei die *Nullhypothese*

$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2$$

gegen die *Alternativhypothese*

$$H_1: \mu_1 > \mu_2$$

schrittweise wie folgt:

**1. Schritt:** Als *Signifikanzzahl* (*Irrtumswahrscheinlichkeit*) wählen wir  $\alpha = 0,05$ .

**2. Schritt:** Die *Testvariable*  $T$  aus Gleichung (III-221) nimmt dann mit der *statistischen Sicherheit*  $\gamma = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95$  Werte aus dem *einseitigen* Intervall  $T \leq c$  an (Bild III-67):

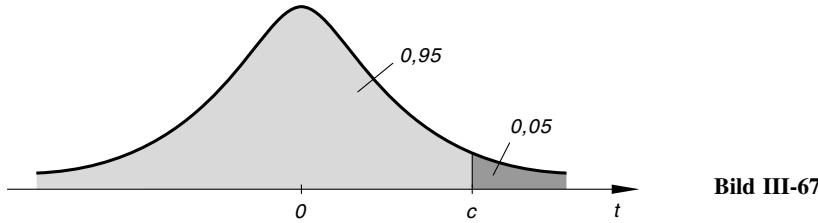


Bild III-67

Aus der Bedingung

$$P(T \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95$$

bestimmen wir mit Hilfe von Tabelle 4 im Anhang die *kritische Grenze*  $c$  (Anzahl der Freiheitsgrade:  $f = n_1 + n_2 - 2 = 10 + 12 - 2 = 20$ ):

$$P(T \leq c)_{H_0} = F(c) = 0,95 \xrightarrow{f=20} c = t_{(0,95; 20)} = 1,725$$

Der *nichtkritische* Bereich (*Annahmebereich*) lautet somit (siehe Bild III-68):

$$t \leq 1,725$$

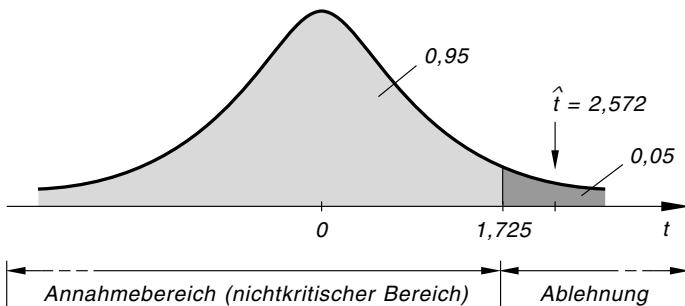
**3. Schritt:** Aus den *bekannten* Mittelwerten und Varianzen der beiden unabhängigen Stichproben berechnen wir zunächst die *Hilfsgröße*  $s^2$  nach Formel (III-224):

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(10 - 1) \cdot 4,2^2 + (12 - 1) \cdot 4,8^2}{10 + 12 - 2} \frac{1^2}{\text{min}^2} = \\ &= \frac{9 \cdot 4,2^2 + 11 \cdot 4,8^2}{20} \frac{1^2}{\text{min}^2} = 20,61 \frac{1^2}{\text{min}^2} \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir den folgenden *Test-* oder *Prüfwert* für unsere Testvariable  $T$ :

$$\begin{aligned}\hat{t} &= \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \cdot \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s} = \sqrt{\frac{10 \cdot 12}{10 + 12}} \cdot \frac{(50 - 45) \text{ l/min}}{\sqrt{20,61} \text{ l/min}} = \\ &= \sqrt{\frac{120}{22}} \cdot \frac{5}{\sqrt{20,61}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{120}{22 \cdot 20,61}} = 2,572\end{aligned}$$

**4. Schritt (Testentscheidung):** Der aus der Stichprobenuntersuchung erhaltene *Test-* oder *Prüfwert*  $\hat{t} = 2,572$  fällt in den *kritischen Bereich*  $t > 1,725$  (Bild III-68). Wir müssen daher die Nullhypothese  $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$  zugunsten der Alternativhypothese  $H_1 : \mu_1 > \mu_2$  verwerfen und können somit davon ausgehen, dass bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % die Pumpe B tatsächlich *weniger* leistet als die Pumpe A.



**Bild III-68** Der Testwert  $\hat{t} = 2,572$  fällt in den kritischen Bereich, die Nullhypothese  $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$  wird daher verworfen

#### 4.5.4 Tests für die unbekannte Varianz $\sigma^2$ einer Normalverteilung

Um beispielsweise die *Gleichmäßigkeit* eines Produktionsablaufes oder die *Genauigkeit* eines Messinstrumentes beurteilen und bewerten zu können, benötigt man Kenntnisse über die *Varianzen* der entsprechenden Zufallsgrößen. Diese aber sind in der Praxis meist *unbekannt*. Eine in den technischen Anwendungen daher häufig auftretende Aufgabe besteht darin, mit Hilfe einer *Stichprobenuntersuchung* zu prüfen, ob die *unbekannte* Varianz  $\sigma^2$  einer normalverteilten Zufallsvariablen  $X$  einen bestimmten Wert  $\sigma_0^2$  besitzt, wie man z. B. aufgrund langjähriger Erfahrungen vermutet oder infolge einer speziellen Maschinen- oder Automateneinstellung erwartet. Bei der Lösung dieser Aufgabe erweist sich die Zufallsvariable

$$Z = (n - 1) \frac{S^2}{\sigma_0^2} \quad (\text{III-229})$$

als eine geeignete *Test-* oder *Prüfvariable*, wobei  $n$  der Umfang der verwendeten Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  und  $S^2$  die bereits aus Abschnitt 3.2.4 bekannte *Schätzfunktion* für die unbekannte *Varianz*  $\sigma^2$  sind. Die Testvariable  $Z$  genügt dabei der *Chi-Quadrat-Verteilung* mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden.

Der *zweiseitige* Parametertest verläuft dann nach dem folgenden Schema:

### Zweiseitiger Test für die unbekannte Varianz $\sigma^2$ einer Normalverteilung

$X$  sei eine *normalverteilte* Zufallsvariable. Es soll *geprüft* werden, ob die unbekannte *Varianz*  $\sigma^2$  (wie vermutet) einen bestimmten Wert  $\sigma_0^2$  besitzt ( $\sigma^2 = \sigma_0^2$ ). Auf der Basis einer *Zufallsstichprobe*  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vom Umfang  $n$  testen wir daher die

$$\text{Nullhypothese } H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad (\text{III-230})$$

gegen die

$$\text{Alternativhypothese } H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad (\text{III-231})$$

Die Durchführung dieses *zweiseitigen* Parametertests erfolgt dabei schrittweise wie folgt:

1. Wir wählen zunächst eine bestimmte *Signifikanzzahl* (*Irrtumswahrscheinlichkeit*)  $\alpha$  (in der Praxis meist  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ).
2. *Test- oder Prüfvariable* ist die Zufallsvariable

$$Z = (n - 1) \frac{S^2}{\sigma_0^2} \quad (\text{III-232})$$

Dabei bedeuten:

$S^2$ : *Schätzfunktion* für die unbekannte *Varianz*  $\sigma^2$  der normalverteilten Grundgesamtheit (siehe hierzu Abschnitt 3.2.4)

$\sigma_0^2$ : *Vermuteter* Wert der unbekannten Varianz  $\sigma^2$

$n$ : *Umfang* der verwendeten Stichprobe

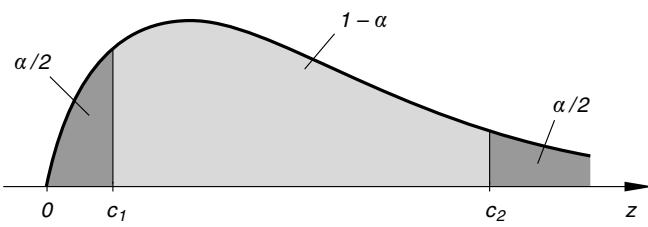
Die *Testvariable*  $Z$  genügt der *Chi-Quadrat-Verteilung* mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden. Die Berechnung der beiden *kritischen Grenzen*  $c_1$  und  $c_2$  erfolgt dabei nach Bild III-69 aus der Bedingung

$$P(c_1 \leq Z \leq c_2)_{H_0} = 1 - \alpha \quad (\text{III-233})$$

oder aus den beiden *gleichwertigen* Bestimmungsgleichungen

$$F(c_1) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad F(c_2) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad (\text{III-234})$$

mit Hilfe der tabellierten Verteilungsfunktion  $F(z)$  der *Chi-Quadrat-Verteilung* mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden (Tabelle 3 im Anhang enthält die *Quantile* dieser Verteilung in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad).



**Bild III-69** Zur Bestimmung der kritischen Grenzen  $c_1$  und  $c_2$  für die einer Chi-Quadrat-Verteilung genügende Testvariable  $Z$

Der *nichtkritische* Bereich (*Annahmebereich*) lautet dann:

$$c_1 \leq z \leq c_2 \quad (\text{III-235})$$

3. Berechnung der *Varianz*  $s^2$  der vorgegebenen konkreten Stichprobe und des *Test- oder Prüfwertes*

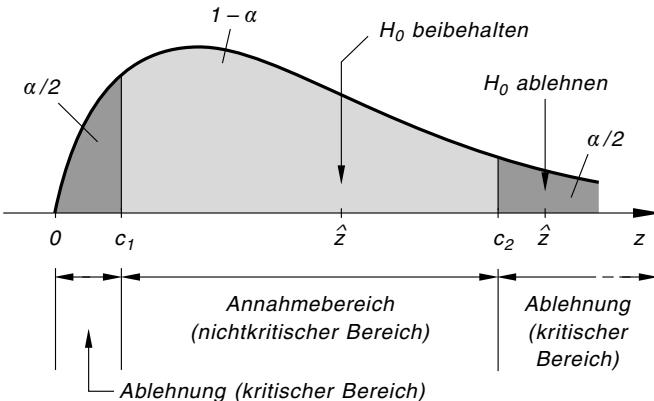
$$\hat{z} = (n - 1) \frac{s^2}{\sigma_0^2} \quad (\text{III-236})$$

der *Testvariablen*  $Z$ .

4. **Testentscheidung:** Fällt der *Prüf-* oder *Testwert*  $\hat{z}$  in den *nichtkritischen* Bereich (*Annahmebereich*), d. h. gilt

$$c_1 \leq \hat{z} \leq c_2 \quad (\text{III-237})$$

so wird die Nullhypothese  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$  *beibehalten*, anderenfalls zugunsten der Alternativhypothese  $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$  *verworfen* (Bild III-70). „*Beibehalten*“ bedeutet in diesem Zusammenhang lediglich, dass man aufgrund der verwendeten Stichprobe die Nullhypothese  $H_0$  *nicht ablehnen* kann.



**Bild III-70** Testentscheidung über Beibehaltung oder Ablehnung der Nullhypothese  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

### Anmerkung

Der beschriebene Test ist zugleich auch ein Test für die (ebenfalls unbekannte) *Standardabweichung*  $\sigma$  der normalverteilten Grundgesamtheit. Der Nullhypothese  $H_0 : \sigma = \sigma_0$  für die Standardabweichung entspricht dabei die Nullhypothese  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$  für die Varianz.

### Einseitige Tests

Analog verlaufen die *einseitigen* Parametertests, bei denen es jeweils nur *eine* kritische Grenze  $c$  gibt. Diese lässt sich aus den folgenden Bedingungen mit Hilfe von Tabelle 3 im Anhang leicht bestimmen:

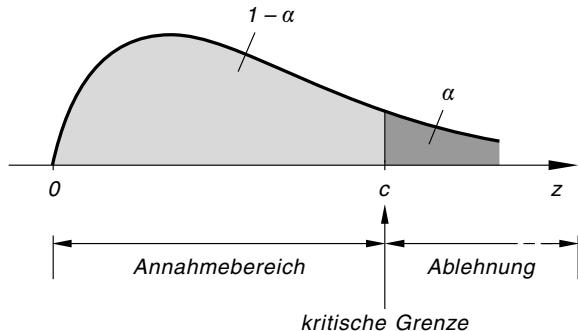
#### 1. Fall: Abgrenzung nach oben (Bild III-71)

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

$$P(Z \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha$$

$$\text{Annahmebereich: } z \leq c$$



**Bild III-71** Annahmebereich bei einem *einseitigen* Test (Abgrenzung nach *oben*)

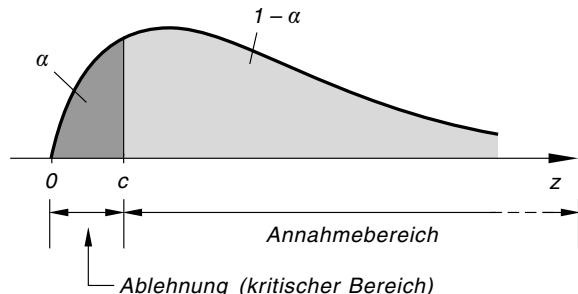
#### 2. Fall: Abgrenzung nach unten (Bild III-72)

$$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$$

$$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

$$P(Z < c)_{H_0} = \alpha$$

$$\text{Annahmebereich: } z \geq c$$



**Bild III-72** Annahmebereich bei einem *einseitigen* Test (Abgrenzung nach *unten*)

## ■ Beispiel

Bei der Serienherstellung von Schrauben mit einer bestimmten Länge kann die Zufallsvariable

$$X = \text{Länge einer Schraube}$$

als eine *normalverteilte* Größe betrachtet werden. Aufgrund langjähriger Erfahrungen weiß man, dass die *Standardabweichung* einen Wert von  $\sigma_0 = 1,2$  mm besitzt. Eine zu *Kontrollzwecken* entnommene *Zufallsstichprobe* vom Umfang  $n = 25$  ergab jedoch eine *empirische Standardabweichung* von  $s = 1,5$  mm. Kann diese Abweichung noch durch zufällige Schwankungen erklärt werden oder ist sie *signifikant*?

*Lösung:* Um eine *Entscheidung* treffen zu können, ob die beobachtete Abweichung zufallsbedingt ist *oder* nicht, führen wir hier sinnvoller Weise einen *einseitigen Parameteretest* durch und testen daher die *Nullhypothese*

$$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 = 1,44 \text{ mm}^2$$

gegen die *Alternativhypothese*

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 = 1,44 \text{ mm}^2$$

schrittweise wie folgt:

**1. Schritt:** Wir wählen das *Signifikanzniveau*  $\alpha = 0,01$ .

**2. Schritt:** Die *Testvariable*

$$Z = (n - 1) \frac{S^2}{\sigma_0^2} = (25 - 1) \frac{S^2}{1,44 \text{ mm}^2} = 24 \cdot \frac{S^2}{1,44 \text{ mm}^2}$$

genügt dann einer *Chi-Quadrat-Verteilung* mit  $f = n - 1 = 25 - 1 = 24$  Freiheitsgraden. Die Berechnung der *kritischen Grenze*  $c$  erfolgt dabei aus der Bedingung

$$P(Z \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99$$

(Bild III-73).

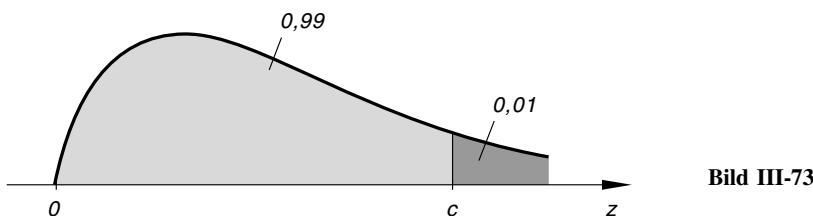


Bild III-73

Unter Verwendung von Tabelle 3 aus dem Anhang erhalten wir:

$$P(Z \leq c)_{H_0} = F(c) = 0,99 \xrightarrow{f=24} c = z_{(0,99; 24)} = 43$$

Der *nichtkritische Bereich (Annahmebereich)* lautet somit (siehe Bild III-74):

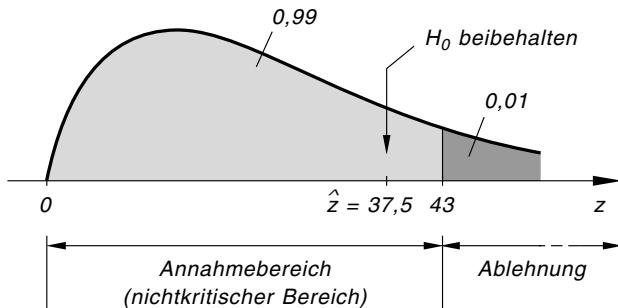
$$z \leq 43$$

**3. Schritt:** Mit  $n = 25$ ,  $s^2 = (1,5 \text{ mm})^2 = 2,25 \text{ mm}^2$  und  $\sigma_0^2 = 1,44 \text{ mm}^2$  erhalten wir den *Test- oder Prüfwert*

$$\hat{z} = (n - 1) \frac{s^2}{\sigma_0^2} = (25 - 1) \cdot \frac{2,25 \text{ mm}}{1,44 \text{ mm}} = 24 \cdot \frac{2,25}{1,44} = 37,5$$

für die *Testvariable Z*.

**4. Schritt (Testentscheidung):** Da der *Test- oder Prüfwert*  $\hat{z} = 37,5$  in den *Annahmebereich*  $z \leq 43$  fällt, kann die Nullhypothese  $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 = 1,44 \text{ mm}^2$  auf der Basis der verwendeten Stichprobe *nicht abgelehnt* werden (Bild III-74). Die Abweichung der Stichprobenvarianz  $s^2 = 2,25 \text{ mm}^2$  vom langjährigen Erfahrungswert  $\sigma_0^2 = 1,44 \text{ mm}^2$  ist daher auf dem gewählten Signifikanzniveau  $\alpha = 0,01 = 1\%$  als *zufallsbedingt* zu betrachten. Die *gleiche Aussage* gilt dann auch für die *Standardabweichung*, d. h. wir können davon ausgehen, dass die Standardabweichung den Wert  $\sigma = \sigma_0 = 1,2 \text{ mm}$  besitzt. Die vorliegende Stichprobe spricht zumindest nicht dagegen.



**Bild III-74** Der Testwert  $\hat{z} = 37,5$  fällt in den Annahmebereich, die Nullhypothese  $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 = 1,44 \text{ mm}^2$  wird daher beibehalten, d. h. nicht abgelehnt

#### 4.5.5 Tests für einen unbekannten Anteilswert $p$ (Parameter $p$ einer Binomialverteilung)

Bei einer *statistischen Qualitätskontrolle* hat man es häufig mit einer *binomialverteilten* Grundgesamtheit zu tun, deren Parameter  $p$  jedoch *unbekannt* ist. Ein Musterbeispiel dafür ist der *Ausschussanteil p* bei der Serienfabrikation von speziellen elektronischen Bauelementen, d. h. also der Anteil  $p$  an *fehlerhaften* Teilen in der Gesamtproduktion.

Wird in einem konkreten Fall *vermutet*, dass dieser Parameter einen bestimmten Wert  $p_0$  besitzt ( $p = p_0$ ), so lässt sich diese Hypothese durch einen geeigneten Parametertest *überprüfen*. Man testet dann mittels einer Stichprobenuntersuchung die *Nullhypothese*

$$H_0 : p = p_0 \quad (\text{III-238})$$

gegen die *Alternativhypothese*

$$H_1 : p \neq p_0 \quad (\text{III-239})$$

nach dem bereits bekannten Schema schrittweise wie folgt:

- (1) Wir wählen zunächst wieder eine bestimmte (kleine) *Signifikanzzahl (Irrtumswahrscheinlichkeit)*  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ).
- (2) Als *Schätzfunktion* für den unbekannten Parameter  $p$  verwenden wir die *Maximum-Likelihood-Schätzfunktion*

$$\hat{P} = \frac{X}{n} \quad (\text{III-240})$$

die uns bereits aus den Abschnitten 3.2.5 und 3.3.2.1 vertraut ist<sup>36)</sup>. Diese Zufallsvariable ist *binomialverteilt* mit dem Mittel- oder Erwartungswert  $E(\hat{P}) = p_0$  und der Varianz  $\text{Var}(\hat{P}) = p_0(1 - p_0)/n$  (immer unter der Voraussetzung, dass die Nullhypothese  $H_0 : p = p_0$  auch zutrifft). Bei Verwendung *umfangreicher* Stichproben<sup>37)</sup> folgt dann aus dem *Grenzwertsatz von Moivre und Laplace*, dass sich die *Schätzfunktion*  $\hat{P}$  *annähernd normalverteilt* verhält und zwar mit dem Mittelwert  $\mu = p_0$  und der Varianz  $\sigma^2 = p_0(1 - p_0)/n$ . Die zugehörige *standardisierte* Zufallsvariable

$$U = \frac{\hat{P} - \mu}{\sigma} = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}} = \sqrt{\frac{n}{p_0(1 - p_0)}} \cdot (\hat{P} - p_0) \quad (\text{III-241})$$

ist dann ebenfalls *näherungsweise standardnormalverteilt* und erweist sich als eine geeignete *Testvariable* für diesen Parametertest.

- (3) Der weitere Ablauf dieses *zweiseitigen* Tests verläuft dann wie bereits in Abschnitt 4.5.1 ausführlich beschrieben.

<sup>36)</sup> Die Zufallsvariable

$X = \text{Anzahl der „Erfolge“ bei einer } n\text{-fachen Ausführung des Bernoulli-Experiments}$

ist *binomialverteilt* mit dem Mittelwert  $E(X) = np_0$  und der Varianz  $\text{Var}(X) = np_0(1 - p_0)$  (siehe hierzu Kapitel II, Abschnitt 6.1). Als „Erfolg“ wird dabei das Eintreten des Ereignisses  $A$  gewertet.

<sup>37)</sup> **Faustregel:** Eine Stichprobe wird als *umfangreich* betrachtet, wenn die Bedingung  $np_0(1 - p_0) > 9$  erfüllt ist.

**Zweiseitiger Test für einen unbekannten Anteilswert  $p$  (Parameter  $p$  einer Binomialverteilung) unter Verwendung einer umfangreichen Stichprobe**

Es soll geprüft werden, ob ein *unbekannter* Anteilswert  $p$  (Parameter  $p$  einer Binomialverteilung) einen bestimmten Wert  $p_0$  besitzt ( $p = p_0$ ). Wir entnehmen zu diesem Zweck der *binomialverteilten* Grundgesamtheit eine *umfangreiche* Stichprobe, d. h. eine Stichprobe, deren Umfang  $n$  der Bedingung

$$np_0(1 - p_0) > 9 \quad (\text{III-242})$$

genügt. Die Stichprobe selbst besteht dann darin, dass wir das *Bernoulli-Experiment*  $n$ -mal nacheinander ausführen und dabei die Anzahl  $k$  der „Erfolge“ feststellen. Als „Erfolg“ werten wir wiederum das Eintreten des Ereignisses  $A$ , „Misserfolg“ bedeutet demnach, dass das *komplementäre* Ereignis  $\bar{A}$  eintritt. Die *beobachtete relative Häufigkeit* für das Ereignis  $A$  („Erfolg“) beträgt somit  $h(A) = k/n$ . Unter Verwendung dieser Stichprobe testen wir dann die

$$\text{Nullhypothese } H_0 : p = p_0 \quad (\text{III-243})$$

gegen die

$$\text{Alternativhypothese } H_1 : p \neq p_0 \quad (\text{III-244})$$

Die Durchführung dieses *zweiseitigen* Parametertests erfolgt schrittweise wie folgt:

1. Wir wählen zunächst eine bestimmte *Signifikanzzahl (Irrtumswahrscheinlichkeit)*  $\alpha$  (in der Praxis meist  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ).
2. *Test- oder Prüfvariable* ist die *näherungsweise standardnormalverteilte Zufallsvariable*

$$U = \sqrt{\frac{n}{p_0(1 - p_0)}} \cdot (\hat{P} - p_0) \quad (\text{III-245})$$

Dabei bedeuten:

$\hat{P}$ : *Schätzfunktion* für den unbekannten Parameter  $p$  der binomialverteilten Grundgesamtheit (siehe hierzu Abschnitt 3.2.5)

$p_0$ : Vermuteter Wert des unbekannten Parameters  $p$

$n$ : *Umfang* der verwendeten Stichprobe (Anzahl der Ausführungen des *Bernoulli-Experiments*)

Die Berechnung des *kritischen* Wertes  $c$  und damit der *kritischen Grenzen*  $\mp c$  erfolgt dabei aus der Bedingung

$$P(-c \leq U \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha \quad (\text{III-246})$$

unter Verwendung von Tabelle 2 im Anhang (siehe hierzu die *hellgrau* unterlegte Fläche in Bild III-75). Der *nichtkritische* Bereich (*Annahmehbereich*) lautet dann:

$$-c \leq u \leq c \quad (\text{III-247})$$

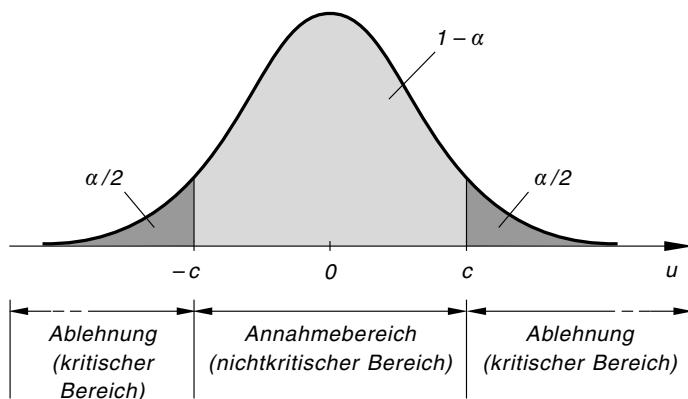


Bild III-75

3. Berechnung des *Schätzwertes*  $\hat{p} = h(A) = k/n$  für den Parameter  $p$  aus der vorgegebenen konkreten Stichprobe ( $n$ -fache Ausführung des Bernoulli-Experiments, dabei  $k$ -mal „Erfolg“) sowie des *Test-* oder *Prüfwertes*

$$\hat{u} = \sqrt{\frac{n}{p_0(1-p_0)}} \cdot (\hat{p} - p_0) \quad (\text{III-248})$$

der *Testvariablen U*.

4. **Testentscheidung:** Fällt der *Test-* oder *Prüfwert*  $\hat{u}$  in den *nichtkritischen* Bereich (*Annahmebereich*), d. h. gilt

$$-c \leq \hat{u} \leq c \quad (\text{III-249})$$

so wird die Nullhypothese  $H_0 : p = p_0$  *beibehalten*, anderenfalls zugunsten der Alternativhypothese  $H_1 : p \neq p_0$  *verworfen* (Bild III-76). „*Beibehalten*“ bedeutet in diesem Zusammenhang lediglich, dass man aufgrund der verwendeten Stichprobe die Nullhypothese  $H_0$  *nicht ablehnen* kann.

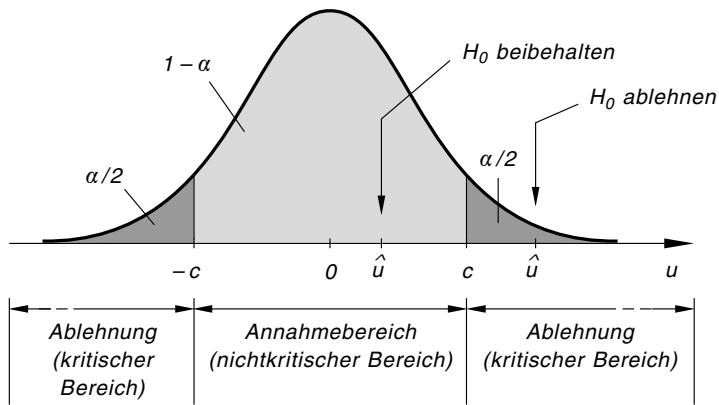


Bild III-76

### Anmerkungen

- (1) Man beachte, dass dieser Parametertest nur für *umfangreiche* Stichproben gilt, d. h. für solche, die der Bedingung  $np_0(1 - p_0) > 9$  genügen. Bei *kleinem* Stichprobenumfang ist diese Bedingung jedoch *nicht* erfüllt und das angegebene Prüfverfahren daher *nicht* anwendbar. Wir müssen in diesem Fall auf die Spezialliteratur verweisen (siehe Literaturverzeichnis).
- (2) Analog verlaufen die *einseitigen* Parametertests. In diesen Fällen gibt es jeweils nur *eine* kritische Grenze  $c$ . Die näheren Einzelheiten wurden bereits in Abschnitt 4.5.1 ausführlich beschrieben. Sie gelten *sinngemäß* auch für diesen Parametertest.

### ■ Beispiel

Der Hersteller eines bestimmten elektronischen Bauelements behauptet, dass seine Produktion *höchstens* 4 % Ausschuss enthalte. Bei der Anlieferung eines größeren Postens dieser Elemente wurde von Seiten des Abnehmers eine *Gütekontrolle* durchgeführt. Sie bestand in einer *Stichprobenuntersuchung* von  $n = 300$  Bauelementen. Unter ihnen befanden sich dabei  $k = 15$  *funktionsuntüchtige* (d. h. *defekte*) Teile. Man überprüfe die Angaben des Herstellers auf einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0,01$ .

*Lösung:* Da in diesem Fall nur die Abweichungen nach *oben* interessieren<sup>38)</sup>, wenden wir hier ein *einseitiges* Prüfverfahren an und testen die *Nullhypothese*

$$H_0 : p \leq p_0 = 0,04$$

gegen die *Alternativhypothese*

$$H_1 : p > p_0 = 0,04$$

Die Voraussetzung einer *umfangreichen* Stichprobe ist dabei gegeben, da die Bedingung (III-242) *erfüllt* ist:

$$np_0(1 - p_0) = 300 \cdot 0,04(1 - 0,04) = 300 \cdot 0,04 \cdot 0,96 = 11,52 > 9$$

**1. Schritt:** Die *Signifikanzzahl (Irrtumswahrscheinlichkeit)* ist vorgegeben:  $\alpha = 0,01$ .

**2. Schritt:** Wir berechnen die *kritische Grenze*  $c$  der *standardnormalverteilten* Testvariablen

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{\frac{n}{p_0(1 - p_0)}} \cdot (\hat{P} - p_0) = \sqrt{\frac{300}{0,04(1 - 0,04)}} \cdot (\hat{P} - 0,04) = \\ &= 88,388 (\hat{P} - 0,04) \end{aligned}$$

aus der Bedingung

$$P(U \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99$$

(siehe Bild III-77).

<sup>38)</sup> Gegen einen Ausschussanteil *unterhalb* von 4 % hat keiner etwas einzuwenden!

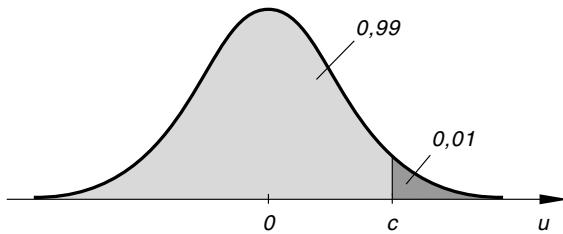


Bild III-77

Unter Verwendung von Tabelle 2 im Anhang erhalten wir dann für die unbekannte Schranke  $c$  den folgenden Wert:

$$P(U \leq c)_{H_0} = \phi(c) = 0,99 \rightarrow c = u_{0,99} = 2,326$$

Der *nichtkritische* Bereich (*Annahmebereich*) lautet damit (siehe Bild III-78):

$$u \leq 2,326$$

**3. Schritt:** Der *Schätzwert* für den unbekannten Parameter (Anteilswert)  $p$  beträgt

$$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{15}{300} = \frac{5}{100} = 0,05$$

Somit besitzt die Testvariable  $U$  den *Test-* oder *Prüfwert*

$$\hat{u} = 88,388 (\hat{p} - 0,04) = 88,388 (0,05 - 0,04) = 0,884$$

**4. Schritt (Testentscheidung):** Der *Test-* oder *Prüfwert*  $\hat{u} = 0,884$  fällt in den *Annahmebereich*  $u \leq 2,326$  (Bild III-78). Die Nullhypothese  $H_0 : p \leq p_0 = 0,04$  wird daher *beibehalten*, d. h. es gibt aufgrund der verwendeten Stichprobe *keinen* Anlass, an den Angaben des Herstellers bezüglich eines *maximalen* Ausschussanteils von 4 % zu zweifeln. Die *Abweichung* des aus der Stichprobe ermittelten Anteils  $\hat{p} = 0,05 = 5\%$  von dem vom Hersteller angegebenen Anteilswert  $p_0 = 0,04 = 4\%$  ist bei dem gewählten Signifikanzniveau von  $\alpha = 0,01 = 1\% \text{ nicht signifikant}$  und somit *zufallsbedingt*.

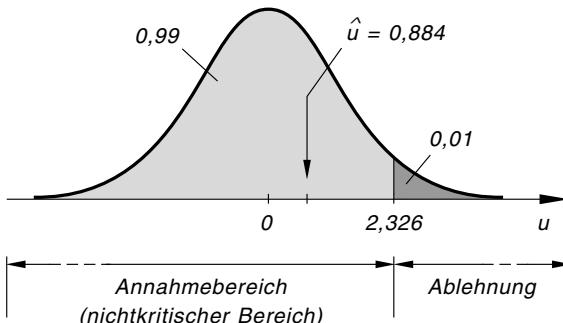


Bild III-78 Der Testwert  $\hat{u} = 0,884$  fällt in den Annahmebereich, die Nullhypothese  $H_0 : p \leq p_0 = 0,04$  wird daher beibehalten

## 4.6 Ein Anwendungsbeispiel: Statistische Qualitätskontrolle unter Verwendung von Kontrollkarten

Bei der Herstellung von *Massenprodukten* müssen für bestimmte Größen vorgegebene *Sollwerte* innerhalb gewisser Toleranzen eingehalten werden. Wir nennen zunächst einige einfache Beispiele.

### ■ Beispiele

- (1) Bei der Serienproduktion von *Kondensatoren* wird für die *Kapazität* ein bestimmter *Sollwert*  $\mu_0$  vorgeschrieben.
- (2) *Metallstäbe* aus einer bestimmten Legierung sollen eine bestimmte *Zugfestigkeit*  $\mu_0$  aufweisen, die *nicht* unterschritten werden darf.
- (3) Bei der Serienfertigung von *Wellen* wird für den *Durchmesser* die Einhaltung eines bestimmten *Sollwertes*  $\mu_0$  gefordert. ■

Die *Erfahrung* lehrt jedoch, dass auch bei *sorgfältigster* Fertigung und Verwendung *hochwertiger* Materialien stets *Abweichungen* vom vorgeschriebenen Sollwert auftreten, die im Wesentlichen durch

- *Inhomogenitäten* des verwendeten Materials,
- *Abnutzungs- und Verschleißerscheinungen* bei den produzierenden Maschinen und Automaten, und nicht zuletzt auch durch
- menschliche *Unzulänglichkeiten*

bedingt sind. Um die Qualität des erzeugten Produktes zu *sichern*, ist es daher notwendig, die Produktion zu *überwachen*, um gegebenenfalls regulierend eingreifen zu können.

Unter *statistischer Qualitätskontrolle* versteht man die permanente Überwachung eines Produktionsprozesses mit Hilfe spezieller statistischer Methoden. Die Qualitätskontrolle dient somit der *Einhaltung* bestimmter vorgegebener Sollwerte oder Normen, wobei durch einen rechtzeitigen Eingriff in den Fertigungsprozess Ausschussware weitgehend *vermieden* oder zumindest auf ein *Minimum* beschränkt werden kann.

Wir wollen uns jetzt mit einer typischen Aufgabe der statistischen Qualitätskontrolle näher auseinandersetzen: Bei der Herstellung eines Massenartikels soll für den *Mittelwert*  $\mu$  des dabei interessierenden Merkmals  $X$  ein bestimmter *Sollwert*  $\mu_0$  eingehalten werden und zwar während des gesamten Fertigungsprozesses<sup>39)</sup>. Mit Hilfe der statistischen Qualitätskontrolle sind wir dann in der Lage, diese Forderung zu erfüllen. Wir gehen dabei zunächst von der *Annahme (Nullhypothese)* aus, dass diese Forderung *erfüllt* ist, d. h. dass der Sollwert während der gesamten Produktion tatsächlich *eingehalten* wird.

---

<sup>39)</sup> Die Größe  $X$  kann beispielsweise die *Kapazität* eines in Massen produzierten Kondensators sein. Es wird dann z. B. gefordert, dass die *normalverteilte* Zufallsvariable

$X = \text{Kapazität eines Kondensators}$

während der gesamten Produktion den *konstanten* Mittelwert  $\mu = \mu_0$  besitzt.

Unsere *Nullhypothese* lautet daher:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad (\text{III-250})$$

Wir testen sie dann gegen die *Alternativhypothese*

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad (\text{III-251})$$

auf dem allgemein üblichen *Signifikanzniveau*  $\alpha = 0,01 = 1\%$  schrittweise wie folgt<sup>40)</sup>:

**(1) Stichprobenentnahme aus der laufenden Produktion in regelmäßigen Zeitabständen**

In *regelmäßigen Zeitabständen* (z. B. jede Stunde) wird der laufenden Produktion eine Zufallsstichprobe vom *gleichbleibenden* Umfang  $n$  entnommen und der jeweilige Stichprobenmittelwert  $\bar{x}$  bestimmt.

**(2) Bestimmung des Toleranzbereiches**

Um die ermittelten Stichprobenmittelwerte in sinnvoller Weise mit dem vorgegebenen Sollwert  $\mu_0$  vergleichen zu können, benötigen wir den zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0,01 = 1\%$  gehörenden *nichtkritischen* Bereich (Annahmebereich), der in diesem Zusammenhang als *Toleranzbereich* bezeichnet wird. Bei einer *normalverteilten* Zufallsvariablen  $X$  ist dieser Bereich – wie wir etwas später noch zeigen werden – durch das symmetrische Intervall

$$\mu_0 - 2,576 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu_0 + 2,576 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{III-252})$$

gegeben. Die *kritischen Grenzen*

$$c_u = \mu_0 - 2,576 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{und} \quad c_o = \mu_0 + 2,576 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{III-253})$$

heißen hier *Toleranz-* oder *Kontrollgrenzen* (siehe Bild III-79). Dabei ist  $\sigma$  die als *bekannt* vorausgesetzte *Standardabweichung* der normalverteilten Grundgesamtheit und  $n$  der *Umfang* der entnommenen Stichprobe<sup>41)</sup>.

*Zur Herleitung des Toleranzbereiches*

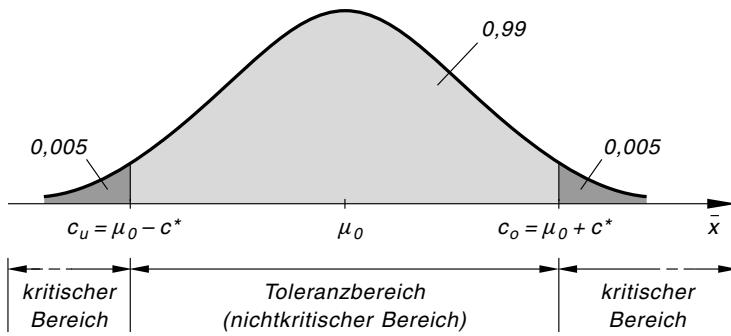
Der *Toleranzbereich* ist nichts anderes als der zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0,01$  gehörige *nichtkritische* Bereich der Zufallsgröße  $\bar{X}$ . Somit gilt (siehe hierzu Bild III-79):

$$\begin{aligned} P(c_u \leq \bar{X} \leq c_o)_{H_0} &= P(\mu_0 - c^* \leq \bar{X} \leq \mu_0 + c^*)_{H_0} = \\ &= 1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99 \end{aligned} \quad (\text{III-254})$$

( $c^*$  ist der noch unbekannte *kritische Wert*)

<sup>40)</sup> Es handelt sich hier im Wesentlichen um den in Abschnitt 4.5.1 beschriebenen *zweiseitigen Test* für den *Mittelwert*  $\mu$  einer Normalverteilung.

<sup>41)</sup> Ist  $\sigma$  jedoch *unbekannt*, so kann man mit Hilfe einer sog. *Vorlaufstichprobe* einen *Schätzwert* für  $\sigma$  ermitteln. Man ersetzt dann  $\sigma$  *näherungsweise* durch die Standardabweichung  $s$  dieser Vorlaufstichprobe:  $\sigma \approx s$ .



**Bild III-79** Toleranzbereich bei einer statistischen Qualitätskontrolle

Beim Übergang von der normalverteilten Zufallsvariablen  $\bar{X}$  zur *standardisierten* (und somit *standardnormalverteilten*) Zufallsvariablen

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \quad (\text{III-255})$$

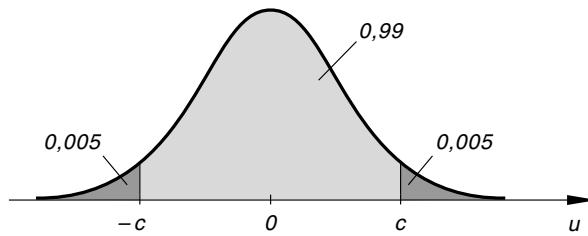
geht die Gleichung (III-254) über in

$$P(-c \leq U \leq c)_{H_0} = 0,99 \quad (\text{III-256})$$

wobei wir bereits die Abkürzung

$$c = c^* \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \quad \text{bzw.} \quad c^* = c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{III-257})$$

verwendet haben (Bild III-80).



**Bild III-80** Bestimmung des kritischen Wertes  $c$  für die standardnormalverteilte Zufallsvariable  $U$

Mit Hilfe von Tabelle 2 im Anhang erhalten wir aus dieser Beziehung schließlich den folgenden Wert für die gesuchte Konstante  $c$ :

$$\begin{aligned}
 P(-c \leq U \leq c)_{H_0} &= \phi(c) - \phi(-c) = \phi(c) - [1 - \phi(c)] = \\
 &= \phi(c) - 1 + \phi(c) = 2 \cdot \phi(c) - 1 = 0,99 \Rightarrow \\
 2 \cdot \phi(c) &= 1,99 \Rightarrow \phi(c) = 0,995 \tag{III-258}
 \end{aligned}$$

$$\phi(c) = 0,995 \rightarrow c = u_{0,995} = 2,576 \tag{III-259}$$

Ein Stichprobenmittelwert  $\bar{x}$  fällt damit in den Toleranzbereich, wenn er die Bedingung

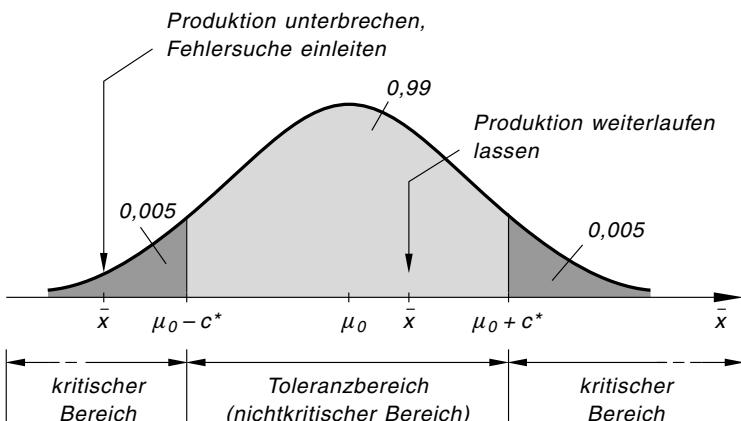
$$\mu_0 - 2,576 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu_0 + 2,576 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{III-260}$$

erfüllt.

### (3) Vergleich des Stichprobenmittelwertes $\bar{x}$ mit dem Sollwert $\mu_0$ und Entscheidungsfindung

Wir sind jetzt in der Lage, die Qualität der laufenden Produktion zu *beurteilen* und eine *Entscheidung* darüber zu fällen, ob der geforderte Sollwert  $\mu_0$  auch *eingehalten* wird oder ob *nicht tolerierbare* Abweichungen auftreten.

**1. Fall:** Fällt der Stichprobenmittelwert  $\bar{x}$  einer entnommenen Stichprobe in den *nichtkritischen* Bereich, d. h. in den *Toleranzbereich*, so wird die Abweichung vom Sollwert  $\mu_0$  als *zufallsbedingt* angesehen und *toleriert*. Es besteht daher in diesem Fall *kein* Grund, in den laufenden Fertigungsprozess einzugreifen (Bild III-81).



**Bild III-81** Fällt der Stichprobenmittelwert  $\bar{x}$  in den Toleranzbereich, so lässt man die Produktion weiterlaufen, anderenfalls wird diese unterbrochen und die Fehlersuche eingeleitet

**2. Fall:** Liegt der Mittelwert  $\bar{x}$  der Stichprobe jedoch im *kritischen Bereich* (d. h. außerhalb des Toleranzbereiches), so kann die beobachtete Abweichung zum Sollwert  $\mu_0$  nicht mehr aus der Zufälligkeit der Stichprobe erklärt werden, sondern muss als *signifikant* angesehen werden (Bild III-81). Die Produktion wird in diesem Fall *unterbrochen*, man geht auf *Fehlersuche* und behebt schließlich die gefundenen Fehler (z. B. durch Neueinstellung der Maschinen und Automaten usw.).

#### (4) Kontrollkarten

Der Verlauf eines Fertigungsprozesses lässt sich in sehr anschaulicher Weise auf einer sog. *Kontrollkarte* wie folgt darstellen (Bild III-82):

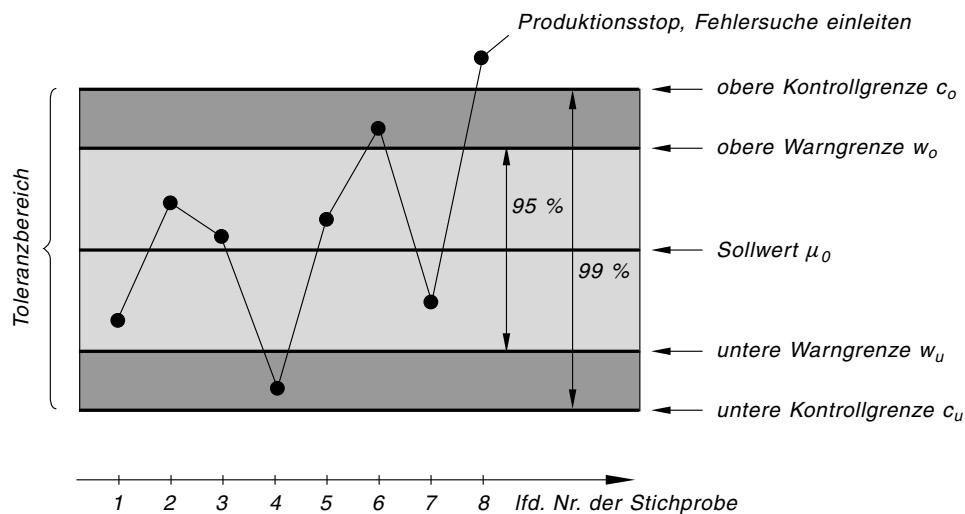


Bild III-82 Muster einer Kontrollkarte mit Kontroll- und Warngrenzen

Die in *regelmäßigen* Zeitabständen ermittelten *Stichprobenmittelwerte*  $\bar{x}$  werden dabei in der zeitlichen Reihenfolge der Stichprobenentnahme als *Punkte* in die Kontrollkarte eingetragen. Dann wird der *Istzustand* (Stichprobenmittelwert  $\bar{x}$ ) mit dem *Sollzustand* (Sollwert  $\mu_0$ ) verglichen. Liegt ein Wert *außerhalb* des Toleranzbereiches (grau unterlegte Fläche in Bild III-82), so wird die laufende Produktion zunächst *gestoppt* und die *Fehlersuche* eingeleitet. Im Bild ist dies der Fall bei der Stichprobe Nr. 8. Zur *zusätzlichen Sicherheit* werden häufig noch sog. *Warngrenzen* eingezeichnet, die einem *Signifikanzniveau* von  $\alpha = 0,05 = 5\%$  entsprechen. Sie liegen bei

$$w_u = \mu_0 - 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{und} \quad w_o = \mu_0 + 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{III-261})$$

Fällt dabei ein Stichprobenmittelwert  $\bar{x}$  in den *dunkelgrau* dargestellten Bereich zwischen Warn- und Kontrollgrenzen (im Bild gilt dies für die Stichproben Nr. 4 und Nr. 6), so wird sicherheitshalber eine *weitere* Stichprobe entnommen (Wiederholung des Tests und gegebenenfalls Abbruch der Produktion und Fehler-suche).

## 5 Statistische Prüfverfahren für die unbekannte Verteilungsfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung („Anpassungs- oder Verteilungstests“)

### 5.1 Aufgaben eines Anpassungs- oder Verteilungstests

Mit den in Abschnitt 4 behandelten *Parametertests* lassen sich Annahmen oder Hypothesen über unbekannte *Parameter* einer Grundgesamtheit überprüfen, wobei die *Art* bzw. der *Typ* der Wahrscheinlichkeitsverteilung als *bekannt* vorausgesetzt wird. So haben wir z. B. spezielle Tests für den Mittelwert  $\mu$  und die Varianz  $\sigma^2$  einer *normalverteilten* Grundgesamtheit kennengelernt.

Ein *Anpassungs- oder Verteilungstest* dagegen dient der Überprüfung einer Hypothese über die *Art* der unbekannten Wahrscheinlichkeitsverteilung. Es wird somit der Versuch unternommen, einer Grundgesamtheit mit einer *unbekannten* Verteilungsfunktion  $F(x)$  eine *bekannte* Verteilungsfunktion  $F_0(x)$  „anzupassen“. Die *Nullhypothese*  $H_0$  lautet daher wie folgt:

$$H_0 : F(x) = F_0(x) \quad (\text{III-262})$$

(„Die Zufallsvariable  $X$  genügt einer Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der *Verteilungsfunktion*  $F_0(x)$ “). Ihr stellen wir *alternativ* die Hypothese

$$H_1 : F(x) \neq F_0(x) \quad (\text{III-263})$$

gegenüber. Sie besagt, dass  $F_0(x)$  *nicht* die gesuchte Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen  $X$  ist.

Die *Überprüfung* einer solchen Hypothese über die *Art* der Verteilungsfunktion erfolgt dann mit einem speziellen *Anpassungs- oder Verteilungstest* unter Verwendung einer *Zufallsstichprobe*, die man der betreffenden Grundgesamtheit entnommen hat. Geprüft wird, ob die aus der Stichprobe gewonnenen Informationen über die unbekannte Verteilungsfunktion  $F(x)$  mit der *angenommenen*, d. h. *theoretischen* Verteilungsfunktion  $F_0(x)$  *verträglich* sind. Verglichen wird dabei die *beobachtete* Verteilung der Zufallsgröße  $X$  in der entnommenen Stichprobe mit der *theoretisch* zu erwartenden Verteilung auf-

grund der Nullhypothese  $H_0$ . Der Anpassungs- oder Verteilungstest ermöglicht dann eine *Entscheidung* darüber, ob man die Nullhypothese  $H_0 : F(x) = F_0(x)$  *beibehalten* kann oder zugunsten der Alternativhypothese  $H_1 : F(x) \neq F_0(x)$  *verwerfen* muss.

Wir fassen zusammen:

### Aufgaben eines Anpassungs- oder Verteilungstests

Einer Zufallsvariablen  $X$  mit der *unbekannten* Verteilungsfunktion  $F(x)$  soll eine *bekannte* Verteilungsfunktion  $F_0(x)$  „angepasst“ werden. Die Aufgabe eines *Anpassungs-* oder *Verteilungstest* besteht dann darin, zu prüfen, ob die aus einer *Zufallsstichprobe*  $x_1, x_2, \dots, x_n$  erhaltenen Informationen über die unbekannte Verteilungsfunktion  $F(x)$  mit der angenommenen (hypothetischen) Verteilungsfunktion  $F_0(x)$  *verträglich* sind. Es ist daher das Ziel eines solchen Tests, eine *Entscheidung* über Beibehaltung oder Ablehnung der aufgestellten Nullhypothese

$$H_0 : F(x) = F_0(x) \quad (\text{III-264})$$

zu ermöglichen.

$F_0(x)$ : Angenommene (hypothetische) Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen  $X$

## 5.2 Ein einführendes Beispiel

Beim Zufallsexperiment „Würfeln mit einem homogenen Würfel“ erwarten wir, dass *jede* der sechs möglichen Augenzahlen  $1, 2, \dots, 6$  mit der *gleichen* Wahrscheinlichkeit auftritt:

$$p_i = 1/6 \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (\text{III-265})$$

( $p_i$ : Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Wurf die Augenzahl „ $i$ “ zu erzielen). Somit lautet unsere *Erwartung* bei 120 Würfen wie folgt: *Jede der sechs Augenzahlen tritt genau 20-mal auf*. Diese absoluten Häufigkeiten

$$n_i = 20 \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (\text{III-266})$$

sind die *theoretisch* zu erwartenden Werte. Sie beruhen auf der *Annahme*, dass die Zufallsvariable

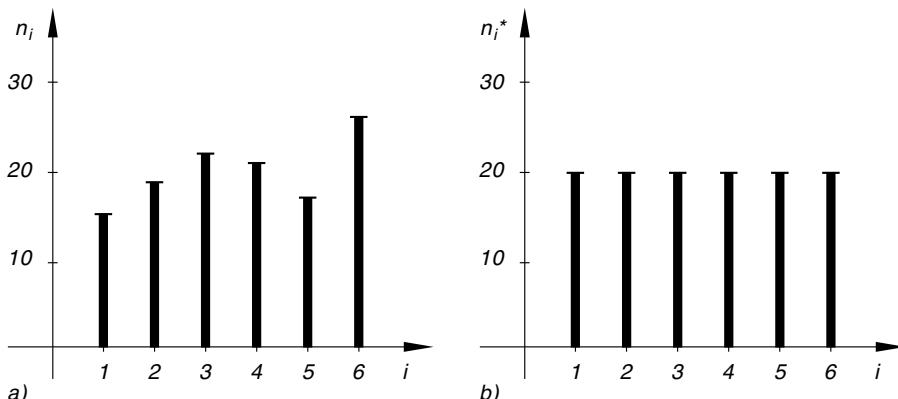
$X = \text{Erreichte Augenzahl beim Wurf mit einem homogenen Würfel}$

tatsächlich einer *Gleichverteilung* genügt, d. h. auf der Nullhypothese  $H_0$ , dass *alle* Augenzahlen mit der *gleichen* Wahrscheinlichkeit auftreten.

In einem *konkreten* Fall (einer Zufallsstichprobe) ergab sich bei insgesamt 120 ausgeführten Würfen die folgende (empirische) *Häufigkeitsverteilung* (Spalte 2):

Augenzahl $i$	Beobachtete absolute Häufigkeit $n_i$	Theoretisch erwartete absolute Häufigkeit $n_i^*$	Differenz $\Delta n_i = n_i - n_i^*$
1	15	20	-5
2	19	20	-1
3	22	20	2
4	21	20	1
5	17	20	-3
6	26	20	6
$\sum$	120	120	0

Ein Vergleich zwischen den *beobachteten* und den *theoretisch* erwarteten Häufigkeiten zeigt zum Teil erhebliche Abweichungen, die auch in den zugehörigen *Stabdiagrammen* deutlich zum Ausdruck kommen (Bild III-83):



**Bild III-83** Häufigkeitswerte für die „Augenzahl“ beim Wurf eines homogenen Würfels  
a) Beobachtete Verteilung    b) Theoretisch „erwartete“ Verteilung

Wir stehen daher vor dem folgenden Problem:

Ist die beobachtete Häufigkeitsverteilung im Widerspruch zur theoretisch erwarteten Gleichverteilung oder sind die festgestellten Abweichungen rein zufallsbedingt?

Mit anderen Worten: Ist die entnommene Stichprobe vom Umfang  $n = 120$  in *Einklang* zu bringen mit der Annahme (Nullhypothese)

$$H_0 : p_i = 1/6 \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (\text{III-267})$$

oder *widerspricht* sie dieser Annahme? Lässt sich also diese *Hypothese* über die *Gleichverteilung* der möglichen Augenzahlen *vertreten* oder müssen wir sie aufgrund der Stichprobenuntersuchung *zurückweisen*?

Wir möchten also eine spezielle *Annahme (Nullhypothese)* über die *Art* der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Grundgesamtheit überprüfen und dabei auf der Grundlage einer Zufallsstichprobe, die dieser Grundgesamtheit entnommen wurde, eine *Entscheidung* über Beibehaltung *oder* Ablehnung der Nullhypothese fällen.

Im nächsten Abschnitt behandeln wir daher zunächst das wohl *wichtigste* Prüfverfahren für die *unbekannte* Verteilungsfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, nämlich den sog. *Chi-Quadrat-Test* („ $\chi^2$ -Test“), und kommen im Anschluss daran nochmals auf dieses einführende Beispiel ausführlich zurück.

### 5.3 Chi-Quadrat-Test („ $\chi^2$ -Test“)

Wir behandeln in diesem Abschnitt den wohl bekanntesten und wichtigsten *Anpassungs- oder Verteilungstest*, den sog. *Chi-Quadrat-Test* („ $\chi^2$ -Test“). Er beruht auf einem *Vergleich* der aus einer *Zufallsstichprobe*  $x_1, x_2, \dots, x_n$  gewonnenen *empirischen Häufigkeitsverteilung* mit der *theoretisch erwarteten* Verteilung, die man aus der als *wahr angenommenen* Verteilungsfunktion  $F_0(x)$  der Grundgesamtheit, aus der die Stichprobe stammt, berechnet hat. Wir testen dabei die *Nullhypothese*

$$H_0 : F(x) = F_0(x) \quad (\text{III-268})$$

gegen die *Alternativhypothese*

$$H_1 : F(x) \neq F_0(x) \quad (\text{III-269})$$

Planung und Durchführung des *Chi-Quadrat-Tests* verlaufen dann schrittweise wie folgt:

**(1) Unterteilung der Stichprobe in Klassen, Feststellung der absoluten Klassenhäufigkeiten (Besetzungszahlen)**

Die  $n$  Stichprobenwerte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  werden in  $k$  *Klassen* (Intervalle)  $I_1, I_2, \dots, I_k$  unterteilt ( $k < n$ ). Jede Klasse sollte dabei erfahrungsgemäß *mindestens 5* Stichprobenwerte enthalten. Dann werden die *absoluten Klassenhäufigkeiten (Besetzungszahlen)*  $n_1, n_2, \dots, n_k$  festgestellt, wobei

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n \quad (\text{III-270})$$

gilt (Spalten 1 und 2 in der nachfolgenden Tabelle 3).

## (2) Berechnung der theoretisch erwarteten absoluten Klassenhäufigkeiten

Aus der als *wahr angenommenen* Verteilungsfunktion  $F_0(x)$  berechnet man zunächst für jede Klasse  $I_i$  die zugehörige *Klassenwahrscheinlichkeit*  $p_i$ <sup>42)</sup> und daraus die *hypothetische*, d. h. *theoretisch* zu erwartende Anzahl  $n_i^* = np_i$  der Stichprobenwerte in der Klasse  $I_i$  (Spalten 3 und 4 in Tabelle 3).

**Tabelle 3:** Chi-Quadrat-Test

Klasse Nr. $i$	$n_i$ (beobachtet)	$p_i$ (theoretisch)	$n_i^* = np_i$ (theoretisch)	$\Delta n_i = n_i - n_i^*$	$\frac{(\Delta n_i)^2}{n_i^*}$
1	$n_1$	$p_1$	$n_1^* = np_1$	$n_1 - n_1^*$	$\frac{(n_1 - n_1^*)^2}{n_1^*}$
2	$n_2$	$p_2$	$n_2^* = np_2$	$n_2 - n_2^*$	$\frac{(n_2 - n_2^*)^2}{n_2^*}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k$	$n_k$	$p_k$	$n_k^* = np_k$	$n_k - n_k^*$	$\frac{(n_k - n_k^*)^2}{n_k^*}$
$\sum$	$n$	1	$n$	0	$\hat{\chi}^2$

## (3) Festlegung eines geeigneten Maßes für die Abweichung zwischen der beobachteten und der theoretischen Verteilung

Ein geeignetes *Maß* für die *Abweichung* zwischen empirischer und hypothetischer Verteilung ist nach *Pearson* die *Maßzahl*

$$\hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(\Delta n_i)^2}{n_i^*} = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*} \quad (\text{III-271})$$

Sie wird gebildet, indem man zunächst *klassenweise* die *Differenz*  $\Delta n_i = n_i - n_i^*$  zwischen der beobachteten und der theoretisch erwarteten absoluten Klassenhäufigkeit feststellt (Spalte 5), diese Differenz *quadriert* und durch die hypothetische Klassenhäufigkeit  $n_i^*$  *dividiert* (Spalte 6) und dann anschließend die Beiträge aller Klassen *aufaddiert* (Summenwert der Spalte 6). Bei einer „guten“ Übereinstimmung zwischen den empirischen und den hypothetischen Werten erwarten wir *kleine* Abweichungsquadrate  $(\Delta n_i)^2$  und somit auch einen *kleinen* Wert für das *Abweichungsmaß*  $\hat{\chi}^2$ .

<sup>42)</sup>  $p_i$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Stichprobenwert in die  $i$ -te Klasse fällt (immer unter der *Voraussetzung*, dass  $F_0(x)$  die *wahre* Verteilungsfunktion ist).

Die Maßzahl  $\hat{\chi}^2$  ist dabei ein *spezieller* Wert der *Testvariablen* oder *Prüfgröße*

$$Z = \chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - n_i^*)^2}{n_i^*} = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} \quad (\text{III-272})$$

den diese Variable für die vorgegebene konkrete Stichprobe annimmt. Dabei bedeutet  $N_i$  die wie folgt definierte *Zufallsvariable*:

$N_i = \text{Beobachtete Anzahl der Stichprobenwerte in der } i\text{-ten Klasse}$   
(empirische absolute Klassenhäufigkeit)

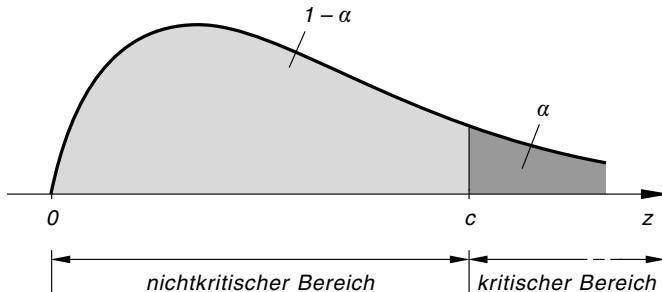
Die Testvariable  $Z = \chi^2$  genügt für großes  $n$ , d. h. bei Verwendung *umfangreicher* Stichproben (**Faustregel:**  $n > 50$ ) näherungsweise einer *Chi-Quadrat-Verteilung* mit  $f = k - 1$  Freiheitsgraden, wenn alle Parameter in der als *wahr angenommenen Verteilungsfunktionen*  $F_0(x)$  bekannt sind<sup>43)</sup>.

#### (4) Wahl einer Signifikanzzahl $\alpha$ und Berechnung der kritischen Grenze $c$

Wir wählen jetzt eine kleine *Signifikanzzahl*  $\alpha$  (in der Praxis meist  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ) und bestimmen dann eine *kritische Grenze*  $c$  so, dass die Werte der Testvariablen  $Z = \chi^2$  mit der Wahrscheinlichkeit  $\gamma = 1 - \alpha$  unterhalb dieser kritischen Grenze liegen. Somit gilt:

$$P(Z \leq c)_{H_0} = \gamma = 1 - \alpha \quad (\text{III-273})$$

(hellgrau unterlegte Fläche in Bild III-84).



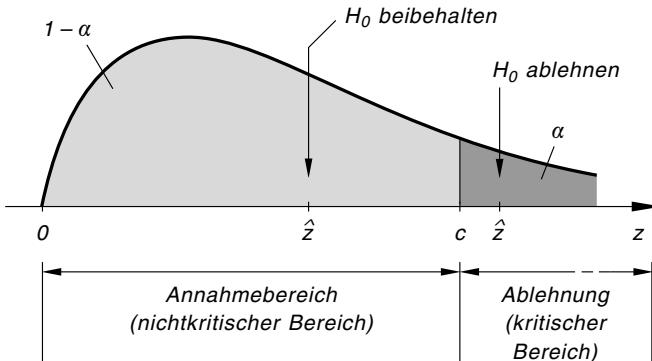
**Bild III-84** Zur Bestimmung der kritischen Grenze  $c$  für die einer Chi-Quadrat-Verteilung genügende Testvariable  $Z = \chi^2$

Die *kritische Grenze*  $c$  teilt dabei das Intervall  $z = \chi^2 \geq 0$  in einem *nichtkritischen* und einen *kritischen* Bereich und lässt sich mit Hilfe der Tabelle 3 im Anhang (Tabelle der *Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung*) leicht bestimmen.

<sup>43)</sup> Siehe hierzu Anmerkung (1) im Anschluss an die Zusammenfassung.

**(5) Berechnung des Test- oder Prüfwertes  $\hat{z} = \hat{\chi}^2$  und Testentscheidung**

Liegt der aus der Stichprobe berechnete Test- oder Prüfwert  $\hat{z} = \hat{\chi}^2$  der Testvariablen  $Z = \chi^2$  unterhalb der kritischen Grenze  $c$ , d. h. gilt  $\hat{z} = \hat{\chi}^2 \leq c$ , so wird die Nullhypothese  $H_0 : F(x) = F_0(x)$  beibehalten, anderenfalls zugunsten der Alternativhypothese  $H_1 : F(x) \neq F_0(x)$  abgelehnt (Bild III-85). Die gewählte Signifikanzzahl  $\alpha$  ist dabei die Irrtumswahrscheinlichkeit, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, eine an sich richtige Nullhypothese  $H_0$  abzulehnen (Fehler 1. Art).



**Bild III-85** Testentscheidung über Beibehaltung oder Ablehnung der Nullhypothese  $H_0 : F(x) = F_0(x)$  bei einem Chi-Quadrat-Test

Wir fassen die einzelnen Schritte dieses wichtigen *Chi-Quadrat-Tests* wie folgt zusammen:

**Chi-Quadrat-Test („ $\chi^2$ -Test“) zur Überprüfung einer Hypothese über die unbekannte Verteilungsfunktion  $F(x)$  einer Grundgesamtheit**

$X$  sei eine Zufallsvariable mit der unbekannten Verteilungsfunktion  $F(x)$ . Auf der Basis einer Zufallsstichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vom Umfang  $n$  soll geprüft werden, ob (wie vermutet)  $F_0(x)$  die Verteilungsfunktion der Grundgesamtheit ist, aus der diese Stichprobe stammt. Wir setzen dabei zunächst voraus, dass sämtliche Parameter der als wahr angenommenen Verteilungsfunktion  $F_0(x)$  bekannt sind und testen unter dieser Voraussetzung die

$$\text{Nullhypothese } H_0 : F(x) = F_0(x) \quad (\text{III-274})$$

gegen die

$$\text{Alternativhypothese } H_1 : F(x) \neq F_0(x) \quad (\text{III-275})$$

schrittweise wie folgt<sup>44)</sup>:

<sup>44)</sup> Die Nullhypothese besagt:  $F_0(x)$  ist die wahre Verteilungsfunktion der Grundgesamtheit, aus der die Zufallsstichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  entnommen wurde.

1. Unterteilung der  $n$  Stichprobenwerte in  $k$  Klassen (Intervalle)  $I_1, I_2, \dots, I_k$  und Feststellung der absoluten Klassenhäufigkeiten (Besetzungszahlen)  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , wobei

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n \quad (k < n) \quad (\text{III-276})$$

gilt. Erfahrungsgemäß sollte dabei jede Klasse *mindestens 5* Werte der vorgegebenen konkreten Stichprobe enthalten<sup>45)</sup>.

2. Für jede Klasse  $I_i$  wird unter Verwendung der als *wahr angenommenen* Verteilungsfunktion  $F_0(x)$  zunächst die Wahrscheinlichkeit  $p_i$  und daraus die Anzahl  $n_i^* = np_i$  der *theoretisch* erwarteten Stichprobenwerte in  $I_i$  berechnet (*hypothetische absolute Häufigkeit*:  $i = 1, 2, \dots, k$ ).

3. *Test- oder Prüfvariable* ist die Zufallsvariable

$$Z = \chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - n_i^*)^2}{n_i^*} = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} \quad (\text{III-277})$$

die der *Chi-Quadrat-Verteilung* mit  $f = k - 1$  Freiheitsgraden genügt.

Dabei bedeuten:

$N_i$ : Zufallsvariable, die die *empirische absolute Häufigkeit* in der  $i$ -ten Klasse beschreibt

$n_i^*$ : *Theoretisch erwartete absolute Klassenhäufigkeit*, berechnet unter Verwendung der als *wahr angenommenen* Verteilungsfunktion  $F_0(x)$  der Grundgesamtheit ( $n_i^* = np_i$ )

$p_i$ : *Hypothetische Wahrscheinlichkeit* dafür, dass die Zufallsvariable  $X$  einen Wert aus der  $i$ -ten Klasse annimmt (berechnet mit der als *wahr angenommenen* Verteilungsfunktion  $F_0(x)$ )

$n$ : *Umfang* der verwendeten Stichprobe

Wir berechnen dann anhand der vorgegebenen (und in  $k$  Klassen unterteilten) konkreten Stichprobe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  den *Test- oder Prüfwert*

$$\hat{z} = \hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*} = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \quad (\text{III-278})$$

der Testvariablen  $Z = \chi^2$ .

<sup>45)</sup> Gegebenenfalls müssen nachträglich Klassen zusammengelegt werden.

4. Jetzt wählen wir eine kleine *Signifikanzzahl* (*Irrtumswahrscheinlichkeit*)  $\alpha$  (in der Praxis meist  $\alpha = 0,05 = 5\%$  oder  $\alpha = 0,01 = 1\%$ ) und bestimmen die *kritische Grenze*  $c$  aus der Bedingung

$$P(Z \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha \quad (\text{III-279})$$

unter Verwendung von Tabelle 3 im Anhang (siehe hierzu die *hellgrau* unterlegte Fläche in Bild III-84). Der *nichtkritische* Bereich (*Annahmebereich*) lautet dann:

$$z = \chi^2 \leq c \quad (\text{III-280})$$

5. **Testentscheidung:** Fällt der *Test-* oder *Prüfwert*  $\hat{z} = \hat{\chi}^2$  in den *nichtkritischen* Bereich (*Annahmebereich*), d. h. gilt

$$\hat{z} = \hat{\chi}^2 \leq c \quad (\text{III-281})$$

so wird die Nullhypothese  $H_0 : F(x) = F_0(x)$  *beibehalten*, d. h. *nicht abgelehnt* und wir dürfen davon ausgehen, dass die untersuchte Grundgesamtheit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der Verteilungsfunktion  $F_0(x)$  genügt (die Stichprobe steht in *keinem* Widerspruch zur Nullhypothese). Andernfalls muss die Nullhypothese  $H_0$  zugunsten der Alternativhypothese  $H_1 : F(x) \neq F_0(x)$  *abgelehnt* werden (siehe hierzu Bild III-85).

### Anmerkungen

- (1) Sind ein *oder* mehrere Parameter der als wahr angenommenen Verteilungsfunktion  $F_0(x)$  *unbekannt*, so muss man zunächst für diese Parameter unter Verwendung der vorgegebenen konkreten Stichprobe *Näherungs-* oder *Schätzwerte* bestimmen (z. B. mit Hilfe der *Maximum-Likelihood-Methode*). Die Anzahl der Freiheitsgrade *vermindert* sich dabei um die Anzahl der zu *schätzenden* Parameter.

**Beispiel:** Sind bei angenommener *Normalverteilung*  $N(\mu; \sigma)$  sowohl  $\mu$  als auch  $\sigma$  *unbekannt* und daher aus der Stichprobe mit Hilfe von Schätzfunktionen zu *schätzen*, so ist die Anzahl der Freiheitsgrade gleich  $f = (k - 1) - 2 = k - 3$ .

Allgemein gilt:

$$f = (k - 1) - r \quad (\text{III-282})$$

*r*: Anzahl der *unbekannten* Parameter in der als wahr angenommenen Verteilungsfunktion  $F_0(x)$ , die noch aus der Stichprobe *geschätzt* werden müssen

- (2) Bei einer *diskreten* Zufallsvariablen  $X$  sind die Klassen die möglichen Werte selbst (siehe hierzu das nachfolgende Beispiel (1)).

## ■ Beispiele

- (1) Wir kommen auf das einführende Beispiel aus Abschnitt 5.2 zurück. Bei  $n = 120$  Würfen mit einem homogenen Würfel erhielten wir das folgende Ergebnis (*Häufigkeitsverteilung* der 6 möglichen Augenzahlen):

Augenzahl $i$	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit $n_i$	15	19	22	21	17	26

Mit Hilfe des *Chi-Quadrat-Tests* soll jetzt geprüft werden, ob die *Nullhypothese*

$$H_0: \text{Alle 6 möglichen Augenzahlen sind gleichwahrscheinlich}$$

aufrecht erhalten werden kann oder ob man diese Annahme verwerfen muss. Mit anderen Worten: Wir wollen mit dem *Chi-Quadrat-Test* prüfen, ob es sich bei unserem Würfelexperiment (wie vermutet) um ein *Laplace-Experiment* handelt oder nicht.

Wir lösen diese Aufgabe nun schrittweise wie folgt:

**1. Schritt:** Wir haben  $k = 6$  Klassen. Sie entsprechen den 6 Augenzahlen (Spalte 1 in der folgenden Tabelle). Die *beobachteten absoluten Häufigkeiten*  $n_i$  bilden die 2. Spalte. Jede Klasse enthält (wie gefordert) mindestens 5 Werte.

**2. Schritt:** Nach unserer Annahme (Nullhypothese  $H_0$ ) sind *alle* Augenzahlen *gleichwahrscheinlich*. Somit ist  $p_i = 1/6$  (mit  $i = 1, 2, \dots, 6$ ; Spalte 3). Durch Multiplikation mit  $n = 120$  erhalten wir daraus die Anzahl  $n_i^*$  der *theoretisch* erwarteten Stichprobenwerte (Spalte 4):

$$n_i^* = np_i = 120 \cdot \frac{1}{6} = 20 \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

Klasse (Augenzahl $i$ )	$n_i$	$p_i$	$n_i^* = np_i$	$\Delta n_i = n_i - n_i^*$	$\frac{(\Delta n_i)^2}{n_i^*}$
1	15	1/6	20	-5	25/20
2	19	1/6	20	-1	1/20
3	22	1/6	20	2	4/20
4	21	1/6	20	1	1/20
5	17	1/6	20	-3	9/20
6	26	1/6	20	6	36/20
$\sum$	120	1	120	0	76/20

**3. Schritt:** Wir bilden jetzt die Differenzen  $\Delta n_i = n_i - n_i^*$  (Spalte 5) und daraus die „Abweichungsmaße“  $\frac{(\Delta n_i)^2}{n_i^*}$  (Spalte 6). Durch Summation der letzten Spalte erhalten wir den gesuchten Test- oder Prüfwert unserer Testvariablen  $Z = \chi^2$ :

$$\hat{z} = \hat{\chi}^2 = \sum_{i=1}^6 \frac{(n_i - n_i^*)^2}{n_i^*} = \sum_{i=1}^6 \frac{(\Delta n_i)^2}{n_i^*} = \frac{76}{20} = 3,8$$

**4. Schritt:** Als Signifikanzzahl (Irrtumswahrscheinlichkeit) wählen wir  $\alpha = 0,05$ . Die Berechnung der kritischen Grenze  $c$  erfolgt dann aus der Bedingung

$$P(Z \leq c)_{H_0} = P(\chi^2 \leq c)_{H_0} = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95$$

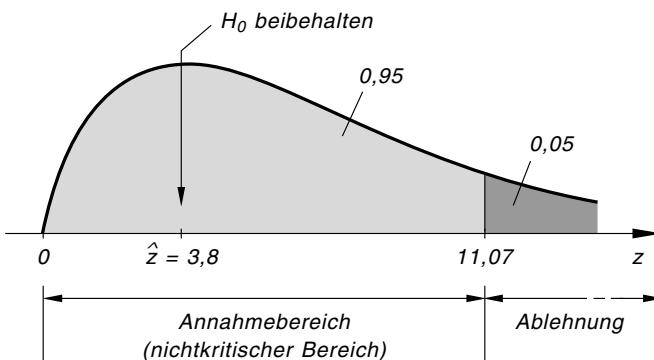
unter Verwendung der Tabelle 3 im Anhang (Anzahl der Freiheitsgrade:  $f = k - 1 = 6 - 1 = 5$ ):

$$P(Z \leq c)_{H_0} = F(c) = 0,95 \xrightarrow{f=5} c = z_{(0,95;5)} = 11,07$$

Der nichtkritische Bereich (Annahmebereich) lautet somit (siehe Bild III-86):

$$z = \chi^2 \leq 11,07$$

**5. Schritt (Testentscheidung):** Der Test- oder Prüfwert  $\hat{z} = \hat{\chi}^2 = 3,8$  fällt in den Annahmebereich, d. h. es gilt  $\hat{z} = \hat{\chi}^2 \leq 11,07$  (Bild III-86). Die Nullhypothese  $H_0$  wird somit beibehalten, d. h. wir können sie aufgrund der verwendeten Stichprobe nicht ablehnen. Es gibt somit keinen Anlass, an der Gleichverteilung der Augenzahlen zu zweifeln. Es handelt sich also bei unserem Würfelexperiment (wie vermutet) um ein Laplace-Experiment.



**Bild III-86** Der Testwert  $\hat{z} = 3,8$  fällt in den Annahmebereich, die Nullhypothese  $H_0$ : „Beim Wurf mit einem homogenen Würfel handelt es sich um ein Laplace-Experiment“ wird daher beibehalten, d. h. nicht abgelehnt

- (2) Eine Stichprobenuntersuchung von  $n = 100$  ohmschen Widerständen aus einer Serienproduktion ergab die folgende *Häufigkeitsverteilung*, wobei die Messwerte bereits in  $k = 6$  Klassen mit der Klassenbreite  $\Delta x = 1 \Omega$  und den angegebenen Klassenmittnen  $\tilde{x}_i$  eingeteilt wurden:

$\frac{\tilde{x}_i}{\Omega}$	48,5	49,5	50,5	51,5	52,5	53,5
$n_i$	5	11	35	29	13	7

Wir vermuten, dass diese Stichprobe aus einer *normalverteilten* Grundgesamtheit stammt, deren Mittelwert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  jedoch beide *unbekannt* sind. Daher testen wir diese *Nullhypothese* mit Hilfe des *Chi-Quadrat-Tests* schrittweise wie folgt:

**1. Schritt:** Die Stichprobenwerte sind bereits in  $k = 6$  Klassen aufgeteilt, die *beobachteten absoluten Häufigkeiten*  $n_i$  sind bekannt. Jede Klasse enthält dabei (wie gefordert) *mindestens 5* Werte.

**2. Schritt:** Die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  der *angenommenen* Normalverteilung mit der Verteilungsfunktion

$$F_0(x) = \phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

sind *unbekannt* und müssen daher zunächst aus der vorliegenden Stichprobe mit Hilfe der bereits aus den Abschnitten 3.2.3 und 3.2.4 bekannten Schätzfunktionen und der nachfolgenden (schrittweise aufgebauten) Tabelle *geschätzt* werden:

Klasse $i$	$\frac{\tilde{x}_i}{\Omega}$	$n_i$	$\frac{n_i \tilde{x}_i}{\Omega}$	$\frac{\tilde{x}_i - \bar{x}}{\Omega}$	$\frac{n_i (\tilde{x}_i - \bar{x})^2}{\Omega^2}$
1	48,5	5	242,5	-2,55	32,5125
2	49,5	11	544,5	-1,55	26,4275
3	50,5	35	1767,5	-0,55	10,5875
4	51,5	29	1493,5	0,45	5,8725
5	52,5	13	682,5	1,45	27,3325
6	53,5	7	374,5	2,45	42,0175
$\sum$		100	5105,0		144,7500

$$\text{Mittelwert: } \bar{x} = \frac{1}{100} \cdot \sum_{i=1}^6 n_i \tilde{x}_i = \frac{1}{100} \cdot 5105,0 = 51,05 \quad (\text{in } \Omega)$$

$$\text{Varianz: } s^2 = \frac{1}{100 - 1} \cdot \sum_{i=1}^6 n_i (\tilde{x}_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{99} \cdot 144,7500 = 1,4621 \quad (\text{in } \Omega^2)$$

$$\text{Standardabweichung: } s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1,4621} = 1,2092 \quad (\text{in } \Omega)$$

Damit ergeben sich für den Mittelwert  $\mu$  und die Standardabweichung  $\sigma$  der als *normalverteilt* angenommenen Grundgesamtheit die folgenden *Schätzwerte*:

$$\mu \approx \bar{x} = 51,05 \quad \text{und} \quad \sigma \approx s = 1,209$$

(beide Werte in  $\Omega$ ). Mit der (angenommenen) Verteilungsfunktion

$$F_0(x) = \phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{x - 51,05}{1,209}\right)$$

berechnen wir jetzt unter Verwendung von Tabelle 1 aus dem Anhang die *Wahrscheinlichkeit*  $p_i$  dafür, dass ein Wert in die  $i$ -te Klasse fällt und daraus schließlich die *Anzahl*  $n_i^* = np_i = 100p_i$  der *theoretisch* in der  $i$ -ten Klasse zu erwartenden Stichprobenwerte ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ). Weil  $X$  hier eine *stetige* Zufallsvariable ist, müssen wir bei der Berechnung von  $p_i$  die folgenden Klassengrenzen berücksichtigen (Bild III-87):

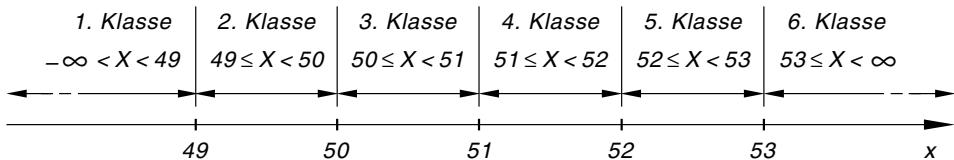


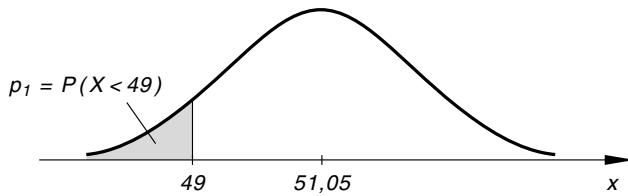
Bild III-87 Festlegung der Klassengrenzen

### Berechnung der Wahrscheinlichkeit $p_i$ ( $i = 1, 2, \dots, 6$ )

(unter Verwendung der Tabelle 1 im Anhang)

1. Klasse:  $-\infty < X < 49$  (siehe hierzu Bild III-88)

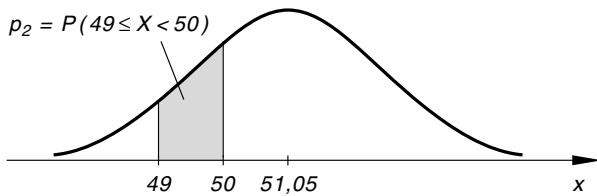
$$\begin{aligned}
 p_1 &= P(X < 49) = F_0(49) = \phi\left(\frac{49 - 51,05}{1,209}\right) = \phi(-1,696) = \\
 &= 1 - \phi(1,696) = 1 - 0,9551 = 0,0449
 \end{aligned}$$



**Bild III-88** Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $p_1 = P(X < 49)$

2. Klasse:  $49 \leq X < 50$  (siehe hierzu Bild III-89)

$$\begin{aligned}
 p_2 &= P(49 \leq X < 50) = F_0(50) - F_0(49) = \\
 &= \phi\left(\frac{50 - 51,05}{1,209}\right) - \phi\left(\frac{49 - 51,05}{1,209}\right) = \phi(-0,868) - \phi(-1,696) = \\
 &= [1 - \phi(0,868)] - [1 - \phi(1,696)] = 1 - \phi(0,868) - 1 + \phi(1,696) = \\
 &= \phi(1,696) - \phi(0,868) = 0,9551 - 0,8073 = 0,1478
 \end{aligned}$$



**Bild III-89** Berechnung der Wahrscheinlichkeit  $p_2 = P(49 \leq X < 50)$

3. Klasse:  $50 \leq X < 51$

$$\begin{aligned}
 p_3 &= P(50 \leq X < 51) = F_0(51) - F_0(50) = \\
 &= \phi\left(\frac{51 - 51,05}{1,209}\right) - \phi\left(\frac{50 - 51,05}{1,209}\right) = \phi(-0,041) - \phi(-0,868) = \\
 &= [1 - \phi(0,041)] - [1 - \phi(0,868)] = 1 - \phi(0,041) - 1 + \phi(0,868) = \\
 &= \phi(0,868) - \phi(0,041) = 0,8073 - 0,5164 = 0,2909
 \end{aligned}$$

4. Klasse:  $51 \leq X < 52$

$$\begin{aligned}
 p_4 &= P(51 \leq X < 52) = F_0(52) - F_0(51) = \\
 &= \phi\left(\frac{52 - 51,05}{1,209}\right) - \phi\left(\frac{51 - 51,05}{1,209}\right) = \\
 &= \phi(0,786) - \phi(-0,041) = \phi(0,786) - [1 - \phi(0,041)] = \\
 &= \phi(0,786) + \phi(0,041) - 1 = 0,7840 + 0,5164 - 1 = 0,3004
 \end{aligned}$$

5. Klasse:  $52 \leq X < 53$

$$\begin{aligned}
 p_5 &= P(52 \leq X < 53) = F_0(53) - F_0(52) = \\
 &= \phi\left(\frac{53 - 51,05}{1,209}\right) - \phi\left(\frac{52 - 51,05}{1,209}\right) = \\
 &= \phi(1,613) - \phi(0,786) = 0,9466 - 0,7840 = 0,1626
 \end{aligned}$$

6. Klasse:  $53 \leq X < \infty$

$$\begin{aligned}
 p_6 &= P(53 \leq X < \infty) = 1 - \sum_{i=1}^5 p_i = \\
 &= 1 - (0,0449 + 0,1478 + 0,2909 + 0,3004 + 0,1626) = \\
 &= 1 - 0,9466 = 0,0534
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die folgende Tabelle für unseren *Chi-Quadrat-Test*:

Klasse $i$	$\frac{\tilde{x}_i}{\Omega}$	$n_i$	$p_i$	$n_i^* = np_i$	$\Delta n_i = n_i - n_i^*$	$\frac{(\Delta n_i)^2}{n_i^*}$
1	48,5	5	0,0449	4,49	0,51	0,0579
2	49,5	11	0,1478	14,78	-3,78	0,9667
3	50,5	35	0,2909	29,09	5,91	1,2007
4	51,5	29	0,3004	30,04	-1,04	0,0360
5	52,5	13	0,1626	16,26	-3,26	0,6536
6	53,5	7	0,0534	5,34	1,66	0,5160
$\sum$		100	1	100	0	3,4309

Spalte 4 enthält die soeben berechneten Wahrscheinlichkeiten  $p_i$ , Spalte 5 die daraus ermittelten *hypothetischen absoluten Häufigkeiten*  $n_i^* = np_i = 100p_i$ .

**3. Schritt:** Die Tabelle enthält in der 6. Spalte die Differenzen  $\Delta n_i = n_i - n_i^*$  und in der 7. Spalte die für den Prüfwert  $\hat{z} = \hat{\chi}^2$  benötigten „Abweichungsmaße“  $\frac{(\Delta n_i)^2}{n_i^*}$ . Summiert man die Werte der letzten Spalte auf, so erhält man den gesuchten *Test- oder Prüfwert* der Testvariablen  $Z = \chi^2$ :

$$\hat{z} = \hat{\chi}^2 = 3,4309$$

**4. Schritt:** Wir wählen die *Signifikanzzahl (Irrtumswahrscheinlichkeit)*  $\alpha = 0,01$ . Die *kritische Grenze*  $c$  berechnen wir aus der Bedingung

$$P(Z \leq c)_{H_0} = F(c) = 1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99$$

mit Hilfe von Tabelle 3 im Anhang (Anzahl der unbekannten Parameter:  $r = 2$ ; Anzahl der Freiheitsgrade:  $f = (k - 1) - r = (6 - 1) - 2 = 5 - 2 = 3$ ):

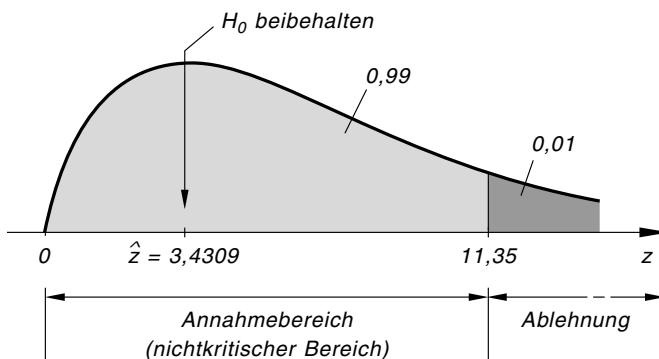
$$P(Z \leq c)_{H_0} = F(c) = 0,99 \xrightarrow{f=3} c = z_{(0,99;3)} = 11,35$$

Der *nichtkritische Bereich (Annahmebereich)* lautet somit (siehe Bild III-90):

$$z = \chi^2 \leq 11,35$$

**5. Schritt (Testentscheidung):** Der *Test- oder Prüfwert*  $\hat{z} = \hat{\chi}^2 = 3,4309$  fällt in den *Annahmebereich*, d. h. es gilt  $\hat{z} = \hat{\chi}^2 \leq 11,35$  (Bild III-90). Die Nullhypothese  $H_0$  wird somit *beibehalten*, d. h. *nicht abgelehnt*. Wir können daher davon ausgehen, dass die vorliegende Stichprobe aus einer *normalverteilten* Grundgesamtheit mit der folgenden Verteilungsfunktion stammt:

$$F(x) = F_0(x) = \phi\left(\frac{x - 51,05 \Omega}{1,209 \Omega}\right)$$



**Bild III-90** Der Testwert  $\hat{z} = 3,4309$  fällt in den Annahmebereich, die Nullhypothese  $H_0$ : „Die Stichprobe stammt aus einer *normalverteilten* Grundgesamtheit“ wird daher beibehalten, d. h. nicht abgelehnt ■

## 6 Korrelation und Regression

### 6.1 Korrelation

#### 6.1.1 Korrelationskoeffizient einer zweidimensionalen Stichprobe

Wir wollen uns in diesem Abschnitt ausschließlich mit solchen Zufallsexperimenten beschäftigen, in denen gleichzeitig *zwei* Merkmale beobachtet werden, die wir durch die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  beschreiben. Uns interessiert dabei, ob es zwischen diesen Größen irgendeine *Beziehung* oder einen *Zusammenhang* gibt, wobei wir  $X$  und  $Y$  als völlig *gleichberechtigte* Variable betrachten<sup>46)</sup>. Besteht eine solche Abhängigkeit zwischen den beiden Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ , so spricht man bei dieser Betrachtungsweise von einer *Korrelation* zwischen  $X$  und  $Y$ .

#### ■ Beispiele

- (1) Bei einer bestimmten Stahlsorte interessiert man sich z. B. dafür, ob zwischen dem Kohlenstoffgehalt  $X$  und der Zugfestigkeit  $Y$  ein Zusammenhang besteht, d. h. ob die beiden Zustandsvariablen  $X$  und  $Y$  *korreliert* sind.
- (2) Zwischen der Drehzahl  $X$  und der Leistung  $Y$  eines Motors besteht ein bestimmter Zusammenhang, d. h. die beiden Größen sind *korreliert*.
- (3) Der ohmsche Widerstand  $R$  eines elektrischen Leiters hängt noch von der Temperatur  $T$  ab. Die Größen  $R$  und  $T$  sind *korreliert*.

Um festzustellen, ob zwischen den Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  eine *Korrelation* besteht, wird der zweidimensionalen Grundgesamtheit eine *Stichprobe* vom Umfang  $n$  entnommen. Sie besteht aus den  $n$  geordneten Wertepaaren

$$(x_1; y_1), \quad (x_2; y_2), \quad \dots, \quad (x_n; y_n) \quad (\text{III-283})$$

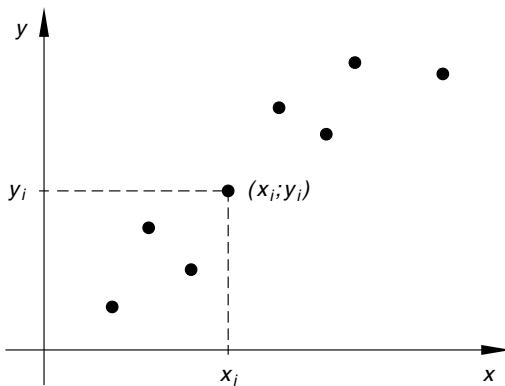
die wir in einem rechtwinkligen  $x$ ,  $y$ -Koordinatensystem als Punkte (*Stichprobenpunkte* genannt) bildlich darstellen. Sie bilden in ihrer Gesamtheit eine sog. *Punktwolke*. Man erhält auf diese Weise ein sehr anschauliches *Streuungsdiagramm*, wie in Bild III-91 dargestellt.

Uns interessieren jetzt spezielle *Kennwerte* oder *Maßzahlen*, die den *Zusammenhang* bzw. die *Wechselwirkung* zwischen den beiden Merkmalen  $X$  und  $Y$  in geeigneter Weise charakterisieren. Zunächst aber „trennen“ wir die  $x$ - und  $y$ -Komponenten der zweidimensionalen Stichprobe (III-283) voneinander und erhalten die beiden (eindimensionalen) Stichproben

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad \text{und} \quad y_1, y_2, \dots, y_n \quad (\text{III-284})$$

---

<sup>46)</sup> Wir unterscheiden hier also *nicht* zwischen unabhängiger und abhängiger Variable.

**Bild III-91**

Streuungsdiagramm („Punktwolke“)  
einer zweidimensionalen Stichprobe

mit den (arithmetischen) *Mittelwerten*

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{und} \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i \quad (\text{III-285})$$

und den *Varianzen*

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{und} \quad s_y^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (\text{III-286})$$

Wir führen jetzt zwei *Kennwerte* ein, die in gewisser Weise den *wechselseitigen Zusammenhang* zwischen den beiden Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  beschreiben:

**Definition:** Ist  $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$  eine zweidimensionale Stichprobe vom Umfang  $n$ , so heißt

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (\text{III-287})$$

*empirische Kovarianz* und

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} \quad (\text{III-288})$$

*empirischer Korrelationskoeffizient* der zweidimensionalen Stichprobe  
( $s_x, s_y$ : Standardabweichungen der  $x$ - und  $y$ -Komponenten in der Stichprobe:  $s_x \neq 0, s_y \neq 0$ ).

*Anmerkungen*

- (1) Der Korrelationskoeffizient  $r$  ist eine *dimensionslose* Größe. Man erhält ihn aus der Kovarianz  $s_{xy}$  durch *Normierung*.
- (2) In der Praxis verwendet man meist die folgenden gleichwertigen, aber rechnerisch bequemeren Formeln:

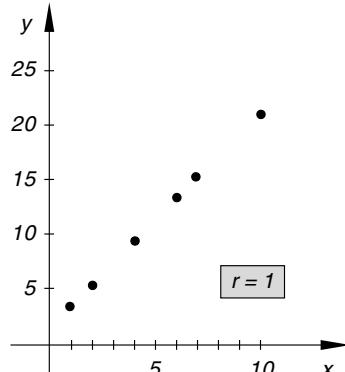
$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y} \right) \quad (\text{III-289})$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2 \right)}} \quad (\text{III-290})$$

Es lässt sich zeigen, dass der empirische Korrelationskoeffizient  $r$  nur Werte zwischen  $-1$  und  $+1$  annehmen kann:  $-1 \leq r \leq 1$ . In Bild III-92 sind die Punktwolken von acht Stichproben mit *verschiedenen* Korrelationskoeffizienten dargestellt (Stichprobenumfang jeweils  $n = 6$ ). Anhand dieser *Streuungsdiagramme* können wir erkennen, dass die Stichprobenpunkte  $(x_i; y_i)$  offensichtlich immer dann *nahezu* auf einer *Geraden* liegen, wenn sich der zugehörige Korrelationskoeffizient  $r$  nur wenig von  $+1$  oder  $-1$  unterscheidet. In den Extremfällen  $r = 1$  und  $r = -1$ , d. h. für  $|r| = 1$  liegen die Stichprobenpunkte exakt auf einer Geraden.

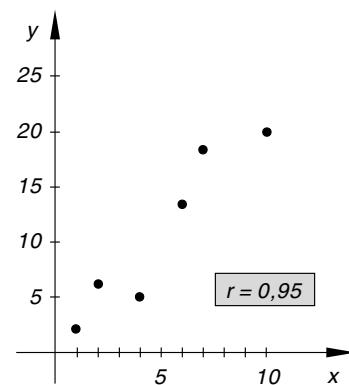
**Bild III-92**

$i$	1	2	3	4	5	6
$x_i$	1	2	4	6	7	10
$y_i$	3	5	9	13	15	21

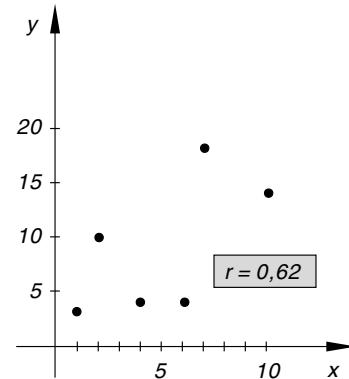


**Bild III-92** (Fortsetzung)

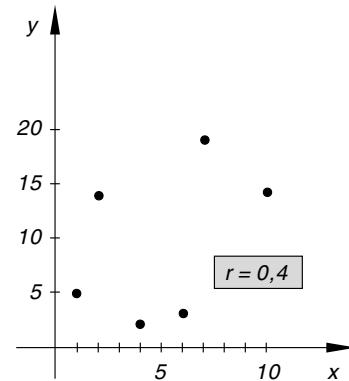
$i$	1	2	3	4	5	6
$x_i$	1	2	4	6	7	10
$y_i$	2	6	5	13	18	21



$i$	1	2	3	4	5	6
$x_i$	1	2	4	6	7	10
$y_i$	3	10	4	4	18	14

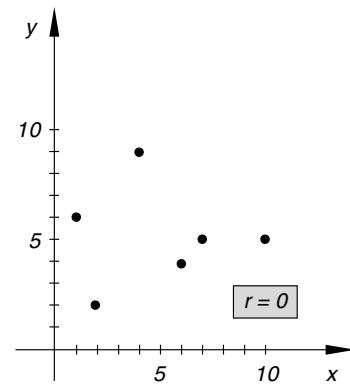


$i$	1	2	3	4	5	6
$x_i$	1	2	4	6	7	10
$y_i$	5	14	2	3	19	14

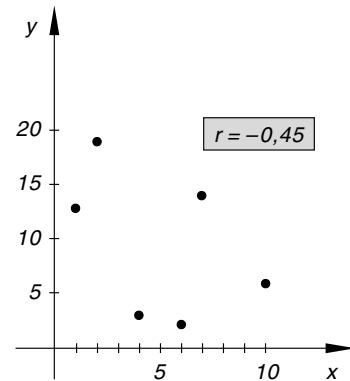


**Bild III-92** (Fortsetzung)

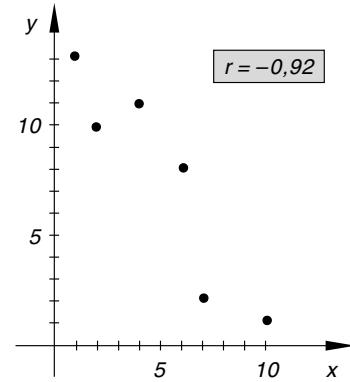
$i$	1	2	3	4	5	6
$x_i$	1	2	4	6	7	10
$y_i$	6	2	9	4	5	5



$i$	1	2	3	4	5	6
$x_i$	1	2	4	6	7	10
$y_i$	13	19	3	2	14	6

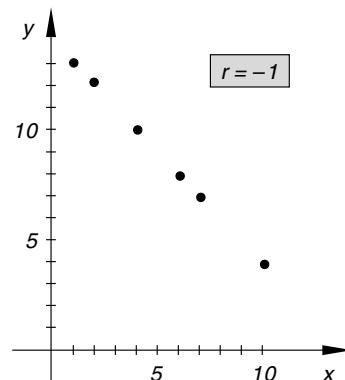


$i$	1	2	3	4	5	6
$x_i$	1	2	4	6	7	10
$y_i$	13	10	11	8	2	1



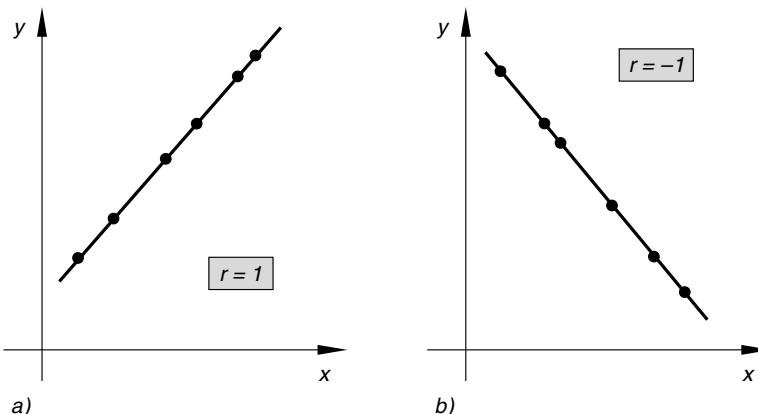
**Bild III-92** (Fortsetzung)

$i$	1	2	3	4	5	6
$x_i$	1	2	4	6	7	10
$y_i$	13	12	10	8	7	4



**Bild III-92** Über den Zusammenhang zwischen der Gestalt einer Punktfolke und dem Wert des empirischen Korrelationskoeffizienten  $r$  (eingezeichnet sind 8 Punktfolken mit Korrelationskoeffizienten zwischen  $r = +1$  und  $r = -1$ )

In dem anderen Extremfall  $r = 0$  ist *keine* Korrelation erkennbar,  $X$  und  $Y$  sind *unkorreliert*. Der *empirische Korrelationskoeffizient*  $r$  kann daher als ein geeignetes Maß für die *Stärke* oder den *Grad* der *linearen Abhängigkeit* zwischen den beiden Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  angesehen werden. Dabei gilt: Je *weniger* sich  $r$  von  $+1$  bzw.  $-1$  unterscheidet, umso „*besser*“ liegen die Stichprobenpunkte  $(x_i; y_i)$  auf einer *Geraden*. Der Wert des empirischen Korrelationskoeffizienten  $r$  misst somit in gewisser Weise, wie „*gut*“ eine *Gerade* den Zusammenhang zwischen  $X$  und  $Y$  beschreibt. Für  $|r| = 1$  besteht offensichtlich eine *exakte lineare Abhängigkeit* zwischen den beiden Zufallsvariablen (Bild III-93)



**Bild III-93** Für  $|r| = 1$  liegen sämtliche Stichprobenpunkte auf einer Geraden

- a)  $r = +1 \rightarrow$  Gerade mit *positiver Steigung*
- b)  $r = -1 \rightarrow$  Gerade mit *negativer Steigung*

Wir fassen die wichtigsten Aussagen wie folgt zusammen:

### Eigenschaften des empirischen Korrelationskoeffizienten $r$ einer zweidimensionalen Stichprobe

Der durch Gleichung (III-288) definierte *empirische Korrelationskoeffizient*  $r$  einer zweidimensionalen Stichprobe  $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$  vom Umfang  $n$  ist ein geeignetes Maß für die *Stärke* oder den *Grad* der *linearen Abhängigkeit* zwischen den beiden Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ . Er besitzt die folgenden Eigenschaften:

- (1) Der empirische Korrelationskoeffizient  $r$  kann nur Werte zwischen  $-1$  und  $+1$  annehmen:

$$-1 \leq r \leq 1 \quad (\text{III-291})$$

- (2) Die  $n$  Stichprobenpunkte  $(x_i; y_i)$  liegen *genau dann* auf einer *Geraden*  $y = ax + b$ , wenn der empirische Korrelationskoeffizient  $r$  den Betrag  $|r| = 1$  besitzt, d. h.  $r = -1$  oder  $r = +1$  ist. Die Steigung  $a$  dieser Geraden ist dabei für  $r = +1$  *positiv* und für  $r = -1$  *negativ* (siehe hierzu Bild III-93).
- (3) Je weniger sich der empirische Korrelationskoeffizient  $r$  *betragsmäßig* von  $1$  unterscheidet, um so „besser“ liegen die Stichprobenpunkte auf einer *Geraden*. Für  $r = 0$  besteht *kein* linearer Zusammenhang zwischen den beiden Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ , d. h. die beiden Variablen sind *unkorreliert*.

#### Anmerkungen

- (1) Man beachte:  $r = 0$  bedeutet lediglich, dass zwischen den Variablen  $X$  und  $Y$  *kein linearer* Zusammenhang besteht, jedoch *keinesfalls*, dass die beiden Zufallsvariablen stochastisch unabhängig sind. Der (empirische) Korrelationskoeffizient  $r$  misst nur die *Stärke* (den *Grad*) der *linearen Abhängigkeit*, nicht aber die Stärke der Abhängigkeit an sich!
- (2) Zwischen den beiden Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  muss ein sachlich begründeter innerer Zusammenhang bestehen. Ansonsten ist die Berechnung von  $r$  nicht sinnvoll und führt zu einer sog. „Scheinkorrelation“.

#### ■ Beispiele

- (1) Gegeben ist die folgende zweidimensionale Stichprobe vom Umfang  $n = 8$ :

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_i$	1	2	5	6	8	10	11	13
$y_i$	1	1	3	4	5	7	9	10

Die Berechnung der *empirischen Kovarianz*  $s_{xy}$  und des *empirischen Korrelationskoeffizienten*  $r$  soll dabei unter Verwendung der Definitionsformeln mit Hilfe der folgenden (schrittweise aufgebauten) Tabelle erfolgen:

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	1	1	-6	36	-4	16	24
2	2	1	-5	25	-4	16	20
3	5	3	-2	4	-2	4	4
4	6	4	-1	1	-1	1	1
5	8	5	1	1	0	0	0
6	10	7	3	9	2	4	6
7	11	9	4	16	4	16	16
8	13	10	6	36	5	25	30
$\sum$	56	40	0	128	0	82	101

Wir benötigen zunächst die *Mittelwerte*, *Varianzen* und *Standardabweichungen* der  $x$ - bzw.  $y$ -Komponenten:

$$\bar{x} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{i=1}^8 x_i = \frac{1}{8} \cdot 56 = 7$$

$$\bar{y} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{i=1}^8 y_i = \frac{1}{8} \cdot 40 = 5$$

$$s_x^2 = \frac{1}{8-1} \cdot \sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{7} \cdot 128 = 18,2857 \Rightarrow s_x = 4,2762$$

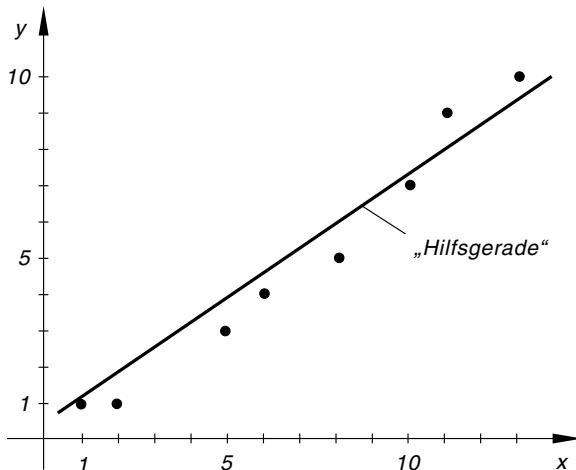
$$s_y^2 = \frac{1}{8-1} \cdot \sum_{i=1}^8 (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{7} \cdot 82 = 11,7143 \Rightarrow s_y = 3,4226$$

Damit erhalten wir für die *empirische Kovarianz*  $s_{xy}$  und den *empirischen Korrelationskoeffizienten*  $r$  die folgenden Werte:

$$s_{xy} = \frac{1}{8 - 1} \cdot \sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{7} \cdot 101 = 14,4286$$

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{14,4286}{4,2762 \cdot 3,4226} = 0,9858 \approx 0,986$$

Der Korrelationskoeffizient der Stichprobe liegt nahe am „Grenzwert“ 1, die Stichprobenpunkte daher *nahezu* auf einer *Geraden* (Bild III-94). Die im Bild eingezeichnete „Hilfsgerade“ soll diese Aussage noch verdeutlichen.



**Bild III-94** Streudiagramm („Punktwolke“) mit eingezeichneter „Hilfsgerade“

- (2) Bei einem Dieselmotor wurde die Abhängigkeit zwischen der Drehzahl  $X$  (in Umdrehungen pro Minute) und der Leistung  $Y$  (in PS) untersucht. Wir wollen den *empirischen Korrelationskoeffizienten*  $r$  der zweidimensionalen Stichprobe

$i$	1	2	3	4	5	6	7
$x_i$	500	1 000	1 500	2 000	2 500	3 000	3 500
$y_i$	5	8	12	17	24	31	36

bestimmen, wobei wir diesmal die rechnerisch bequemere Formel (III-290) verwenden.

Unter Verwendung der nachstehenden (schrittweise aufgebauten) Tabelle folgt dann:

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i^2 \cdot 10^{-4}$	$y_i^2$	$x_i y_i \cdot 10^{-2}$
1	500	5	25	25	25
2	1 000	8	100	64	80
3	1 500	12	225	144	180
4	2 000	17	400	289	340
5	2 500	24	625	576	600
6	3 000	31	900	961	930
7	3 500	36	1 225	1 296	1 260
$\sum$	14 000	133	3 500	3 355	3 415

*Mittelwerte:*

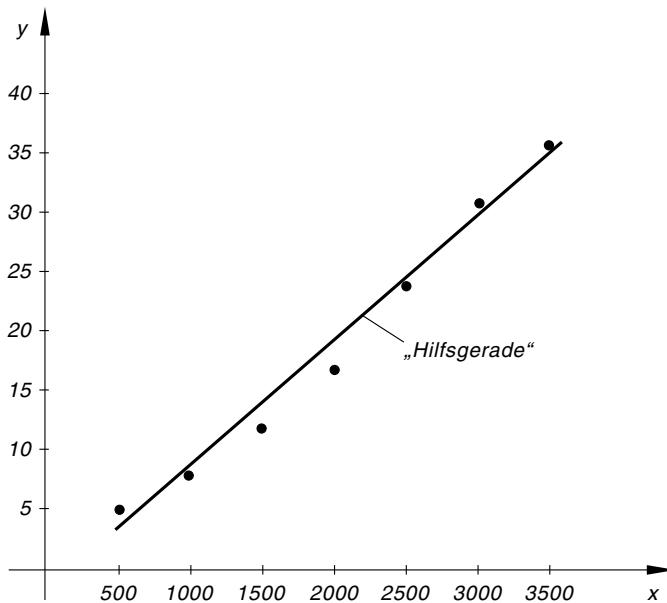
$$\bar{x} = \frac{1}{7} \cdot \sum_{i=1}^7 x_i = \frac{1}{7} \cdot 14\,000 = 2000$$

$$\bar{y} = \frac{1}{7} \cdot \sum_{i=1}^7 y_i = \frac{1}{7} \cdot 133 = 19$$

*Korrelationskoeffizient* (nach Gleichung II-290):

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{\sum_{i=1}^7 x_i y_i - 7 \cdot \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^7 x_i^2 - 7 \cdot \bar{x}^2\right) \left(\sum_{i=1}^7 y_i^2 - 7 \cdot \bar{y}^2\right)}} = \\
 &= \frac{3415 \cdot 10^2 - 7 \cdot 2000 \cdot 19}{\sqrt{(3500 \cdot 10^4 - 7 \cdot 2000^2)(3355 - 7 \cdot 19^2)}} = 0,9917
 \end{aligned}$$

Bild III-95 zeigt das zugehörige *Streuungsdiagramm*, d. h. die *Punktwolke* der zweidimensionalen Stichprobe. Auch hier liegen die Punkte *nahezu* auf einer *Geraden*, da der empirische Korrelationskoeffizient den Wert  $r = 0,9917$  besitzt und sich somit nur *geringfügig* von 1 unterscheidet. Die im Bild eingezeichnete „Hilfsgerade“ dient dabei der Verdeutlichung dieser Aussage.



**Bild III-95** Streudiagramm („Punktfolge“) mit eingezeichneter „Hilfsgerade“ ■

### 6.1.2 Korrelationskoeffizient einer zweidimensionalen Grundgesamtheit

Wir betrachten nun die zweidimensionale *Grundgesamtheit*, aus der wir die Stichprobe  $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$  entnommen haben. In Kap. II, Abschnitt 7.5.3 haben wir bereits eine Größe kennengelernt, die etwas aussagt über den *Grad* der Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ . Es handelt sich um die sog. *Kovarianz* von  $X$  und  $Y$ , definiert durch die Gleichung

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \quad (\text{III-292})$$

Dabei sind  $E(X) = \mu_X$  und  $E(Y) = \mu_Y$  die *Mittel-* oder *Erwartungswerte* von  $X$  und  $Y$ . Aus der Kovarianz  $\sigma_{XY}$  erhält man durch Normierung den *Korrelationskoeffizienten*  $\varrho$  von  $X$  und  $Y$ :

$$\varrho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \quad (\text{III-293})$$

( $\sigma_X, \sigma_Y$ : *Standardabweichungen* von  $X$  und  $Y$ ;  $\sigma_X \neq 0, \sigma_Y \neq 0$ ). Aus dieser Gleichung folgt weiter

$$\left| \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \right| = \frac{|\sigma_{XY}|}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = |\varrho| \leq 1 \Rightarrow |\sigma_{XY}| \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y \quad (\text{III-294})$$

Zwei Zufallsvariable  $X$  und  $Y$  werden dabei als *unkorreliert* bezeichnet, wenn der zugehörige Korrelationskoeffizient *verschwindet* ( $\varrho = 0$ ). Sind die beiden Zufallsvariablen *stochastisch unabhängig*, so sind sie auch *unkorreliert*.

Denn im Falle der Unabhängigkeit gilt ja

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) \quad (\text{III-295})$$

und somit

$$\begin{aligned} \sigma_{XY} &= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \\ &= E(X) \cdot E(Y) - E(X) \cdot E(Y) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-296})$$

Damit ist auch  $\rho = 0$ , d. h. *stochastisch unabhängige* Zufallsgrößen sind stets *unkorreliert*. Die Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch i. Allg. *nicht*, d. h. aus  $\rho = 0$  dürfen wir *keinesfalls* auf die stochastische Unabhängigkeit von  $X$  und  $Y$  schließen, es sei denn, es handelt sich um *normalverteilte* Zufallsvariable. Der Korrelationskoeffizient  $\rho$  zweier Zufallsvariabler  $X$  und  $Y$  besitzt dabei ganz ähnliche Eigenschaften wie der empirische Korrelationskoeffizient  $r$ , der einen *Schätz-* oder *Näherungswert* für  $\rho$  darstellt:

### Einige Eigenschaften des Korrelationskoeffizienten $\rho$ zweier Zufallsvariabler

Der durch Gleichung (III-293) definierte *Korrelationskoeffizient*  $\rho$  der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  ist ein geeignetes *Maß* für die *Stärke* oder den *Grad* der *linearen* Abhängigkeit zwischen  $X$  und  $Y$ , jedoch *kein* Maß für die Abhängigkeit dieser Größen an sich<sup>47)</sup>. Er besitzt die folgenden Eigenschaften:

- (1) Der Korrelationskoeffizient  $\rho$  kann nur Werte zwischen  $-1$  und  $+1$  annehmen:

$$-1 \leq \rho \leq +1 \quad (\text{III-297})$$

- (2) Zwischen den Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  besteht *genau dann* eine *lineare* Beziehung vom Typ  $Y = AX + B$ , wenn  $|\rho| = 1$  ist ( $A$  und  $B$  sind reelle Konstanten).

- (3) *Stochastisch unabhängige* Zufallsvariable  $X$  und  $Y$  sind stets *unkorreliert* ( $\rho = 0$ ). Die Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch nur, wenn  $X$  und  $Y$  beide *normalverteilt* sind, d. h. zwei *normalverteilte* Zufallsvariable sind genau dann *stochastisch unabhängig*, wenn sie *unkorreliert* sind. Im Allgemeinen jedoch gilt: *Verschwindet* der Korrelationskoeffizient  $\rho$  zweier Zufallsvariabler  $X$  und  $Y$ , so bedeutet dies lediglich, dass zwischen den beiden Variablen *keine lineare* Abhängigkeit besteht. Die Zufallsvariablen können aber in diesem Fall durchaus eine (nichtlineare) stochastische Bindung haben.

- (4) Entnimmt man der zweidimensionalen  $(X; Y)$ -Grundgesamtheit eine Stichprobe

$$(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n) \quad (\text{III-298})$$

vom Umfang  $n$ , so liefert der aus dieser Stichprobe berechnete *empirische* Korrelationskoeffizient  $r$  einen *Schätz-* oder *Näherungswert* für den (unbekannten) Korrelationskoeffizienten  $\rho$  der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ :

$$\rho \approx r \quad (\text{III-299})$$

<sup>47)</sup> Es gibt Fälle, in denen zwischen zwei *unkorrelierten* Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sogar ein funktionaler Zusammenhang in Form einer Gleichung  $Y = f(X)$  besteht.

*Anmerkung*

Falls die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  beide *normalverteilt* sind, lassen sich die folgenden Probleme mit Hilfe spezieller statistischer Prüfverfahren („Tests“) lösen:

- a) Sind  $X$  und  $Y$  *stochastisch unabhängig*?

Man testet dann die *Nullhypothese*  $H_0 : \rho = 0$  z. B. gegen die *Alternativhypothese*  $H_1 : \rho \neq 0$ .

- b) Besitzt der Korrelationskoeffizient  $\rho$  (wie vermutet) den Wert  $\rho_0$ ?

Es wird die *Stärke* (d. h. der *Grad*) der *linearen Abhängigkeit* geprüft. Getestet wird dann die *Nullhypothese*  $H_0 : \rho = \rho_0$  gegen die *Alternativhypothese*  $H_1 : \rho \neq \rho_0$ .

Im Rahmen dieser (einführenden) Darstellung können wir auf diese Tests nicht näher eingehen und verweisen auf die im Literaturverzeichnis angegebene weiterführende Literatur.

## ■ Beispiel

Die *diskreten* Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  besitzen die folgende *gemeinsame Verteilung* (die Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Randverteilungen sind *grau* unterlegt):

		$Y$	0	1	
		$X$			
$X$	-1	1/9	2/9	1/3	$f_1(x)$
	0	1/9	2/9	1/3	
	1	1/9	2/9	1/3	
		1/3	2/3		$f_2(y)$

Wir zeigen: Die Kovarianz  $\sigma_{XY}$  und der Korrelationskoeffizient  $\rho$  *verschwinden* beide.

Für die Berechnung dieser Kennwerte benötigen wir die Erwartungswerte der Zufallsvariablen  $X$ ,  $Y$  und  $X \cdot Y$ :

$$E(X) = -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$E(X \cdot Y) = (-1) \cdot 0 \cdot \frac{1}{9} + (-1) \cdot 1 \cdot \frac{2}{9} + 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{9} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{2}{9} +$$

$$+ 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{9} = -\frac{2}{9} + \frac{2}{9} = 0$$

Aus der Definitionsgleichung (III-292) folgt dann

$$\sigma_{XY} = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = 0 - 0 \cdot \frac{2}{3} = 0$$

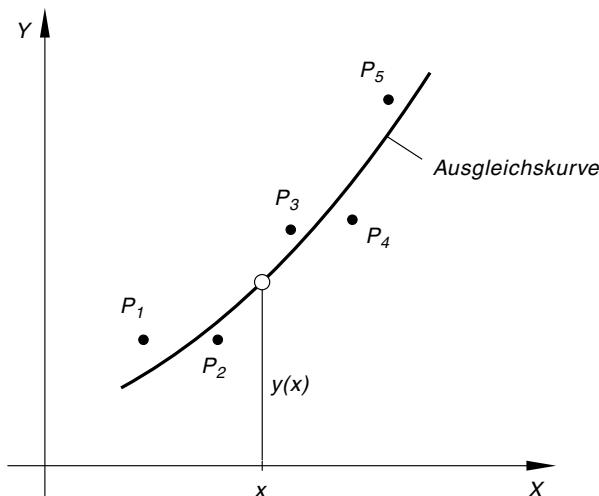
und somit nach Gleichung (III-293) auch  $\rho = 0$ . Die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sind somit *unkorreliert*. ■

## 6.2 Regression

In Naturwissenschaft und Technik stellt sich häufig das folgende Problem:

Zwischen einer (meist *gewöhnlichen*) Variablen  $X$  und einer Zufallsvariablen  $Y$  bestehe eine gewisse stochastische Bindung<sup>48)</sup>. Die sog. *Regressionsanalyse* hat dann die Aufgabe, die Art des Zusammenhangs zwischen den beiden Variablen  $X$  und  $Y$  festzustellen und zwar mit Hilfe einer *Stichprobe*  $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$  und eines geeigneten *Ansatzes* in Form einer Kurvengleichung  $Y = f(X)$ , die noch gewisse aus den Stichprobenpunkten berechenbare *Parameter* enthält. Dabei wird  $X$  als *unabhängige* und  $Y$  als eine von  $X$  *abhängige* Variable angesehen.

In der Statistik bezeichnet man eine solche „einseitige“ Abhängigkeit als *Regression* von  $Y$  bezüglich  $X$ . Hat man die Gleichung der sog. *Regressions-* oder *Ausgleichskurve* bestimmt, so lässt sich zu einem vorgegebenen Wert  $x$  der unabhängigen Variablen  $X$  der Wert der abhängigen Variablen  $Y$  *schätzen* (Bild III-96).



**Bild III-96**  
Stichprobenpunkte  
mit „Ausgleichs- oder  
Regressionskurve“

In der Technik ist die (als unabhängig betrachtete) Variable  $X$  meist eine *gewöhnliche* Variable, die bestimmte *feste* Werte annehmen kann, die auch bei einer mehrfachen Versuchswiederholung *unverändert* bleiben.

<sup>48)</sup>  $X$  kann auch eine Zufallsvariable sein,  $Y$  dagegen ist stets eine Zufallsvariable.

Allerdings wird man für jeden *fest* vorgegebenen Wert  $X = x$  stets etwas *voneinander abweichende* Werte für die abhängige Zufallsvariable  $Y(x)$  erhalten. Diese Werte werden dabei um den (unbekannten) *Mittel- oder Erwartungswert*  $E(Y(x))$  entsprechend der Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $Y$  *streuhen* (Bild III-97).

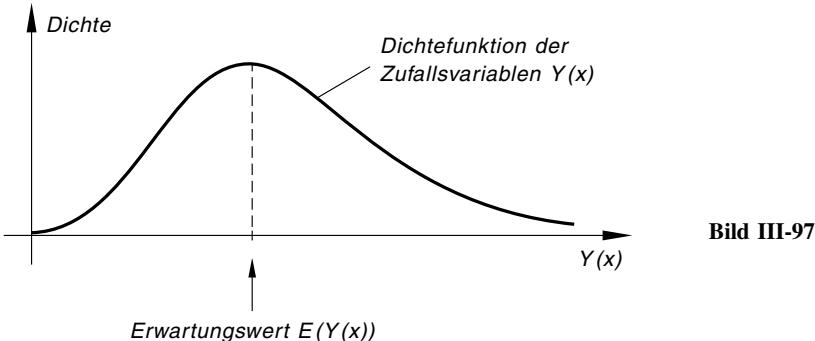


Bild III-97

Wir geben hierzu ein anschauliches Beispiel.

### ■ Beispiel

Der *Bremsweg*  $Y$  eines Autos ist – wie jeder aus eigener Erfahrung weiß – eine in hohem Maße von der *Geschwindigkeit*  $X$  abhängige Größe<sup>49)</sup>. Jedoch ist  $Y$  durch  $X$  *keineswegs eindeutig bestimmt*! Wird nämlich der Bremsvorgang (mit dem gleichen Auto auf der gleichen Fahrbahn und bei gleicher Geschwindigkeit  $X = x$ ) mehrmals wiederholt, so misst man stets etwas *voneinander abweichende Werte für den Bremsweg*  $Y(x)$ . Denn die folgenden Faktoren beeinflussen ebenfalls den Bremsweg (wenn auch vergleichsweise geringfügig):

- Zustand der Bremsen und Reifen
- Beschaffenheit der Fahrbahn (z. B. Trockenheit, Nässe)
- Umwelteinflüsse wie z. B. Windverhältnisse
- Verhalten des Fahrers beim Bremsen

Die genannten Faktoren können und werden sich nämlich in *unkontrollierbarer* und *regeloser* Weise von Bremsversuch zu Bremsversuch (geringfügig) ändern und bewirken in ihrer Gesamtheit die beobachtete *Streuung* der Bremswegwerte. Im Sinne der Statistik dürfen wir daher den Bremsweg  $Y = Y(X = x) = Y(x)$  als eine *Zufallsgröße* auffassen. Wir sind somit *nicht* in der Lage, für eine *vorgegebene* Geschwindigkeit  $X = x$  den *genauen* Wert des Bremsweges vorauszusagen (da wir die augenblicklichen äußeren „Störeinflüsse“ *nicht* kennen). Wir können über den Bremsweg lediglich *wahrscheinlichkeitstheoretische* Aussagen machen, sofern die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen  $Y$  überhaupt bekannt ist!

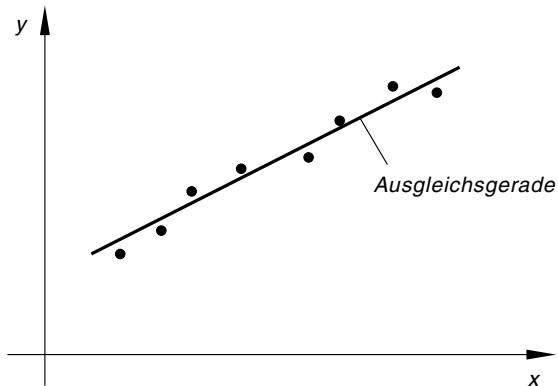
<sup>49)</sup>  $X$  ist die Geschwindigkeit des Fahrzeugs unmittelbar vor Beginn des Bremsvorgangs,  $Y$  der bis zum Stillstand zurückgelegte Weg (Bremsweg).

### Régressions- oder Ausgleichskurven

Meist lässt sich anhand der „Punktwolke“ ein geeigneter Lösungsansatz für die gesuchte Régressions- oder Ausgleichskurve ermitteln. Im einfachsten Fall liegen die Stichprobenpunkte nahezu auf einer Geraden (Bild III-98). In diesem wichtigsten und häufigsten Fall spricht man daher von einer *linearen* Regression und wählt als Lösungsansatz eine *lineare* Funktion vom allgemeinen Typ

$$y = ax + b \quad (\text{III-300})$$

die als (empirische) Régressions- oder Ausgleichsgerade bezeichnet wird (Bild III-98).



**Bild III-98**  
Ausgleichs- oder  
Régressionsgerade

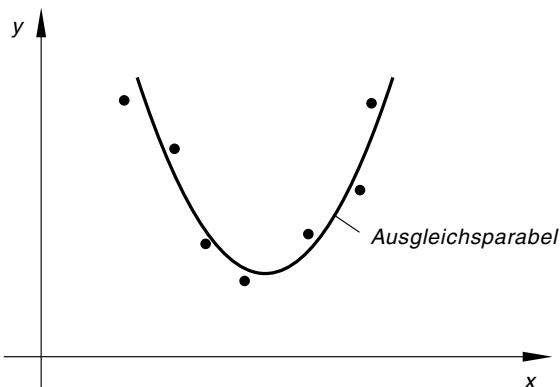
Die noch unbekannten Parameter  $a$  und  $b$  dieser Geraden (d. h. Steigung  $a$  und Achsenabschnitt  $b$ ) lassen sich aus den vorgegebenen Stichprobenpunkten durch „Ausgleichung“ nach der von Gauß stammenden „Methode der kleinsten Quadrate“ leicht bestimmen. Wir werden dieses Verfahren im nachfolgenden Kapitel über „Fehler- und Ausgleichsrechnung“ ausführlich behandeln.

In vielen Fällen jedoch muss man aufgrund des Erscheinungsbildes der „Punktwolke“ einen *nichtlinearen* Lösungsansatz wählen. Man spricht dann von *nichtlinearer* Regression. Eine „Punktwolke“ wie in Bild III-99 skizziert legt einen *parabelförmigen* Lösungsansatz vom Typ

$$y = ax^2 + bx + c \quad (\text{III-301})$$

als „Ausgleichskurve“ nahe. Die noch unbekannten Koeffizienten  $a$ ,  $b$  und  $c$  dieser Régressions- oder Ausgleichsparabel können dann wiederum nach der „Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate“ bestimmt werden. Auch diesen Fall werden wir im nächsten Kapitel ausführlich behandeln.

Als *nichtlineare* Lösungsansätze kommen z. B. Polynomfunktionen höheren Grades, Potenzfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen und manchmal auch (einfache) gebrochenrationale Funktionen infrage. Man muss sich dabei im konkreten Fall anhand des vorliegenden *Streuungsdiagramms* (d. h. der *Punktwolke* der Stichprobe) stets für einen *speziellen* Lösungsansatz entscheiden (z. B. für eine Gerade oder eine Parabel).

**Bild III-99**

Ausgleichs- oder  
Regressionsparabel

Die in dem gewählten Ansatz enthaltenen Parameter lassen sich dann unter Verwendung der vorgegebenen Stichprobe mit Hilfe der „*Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate*“ eindeutig bestimmen.

Wir fassen die wichtigsten Aussagen wie folgt zusammen:

### Regressions- oder Ausgleichskurven

Besteht zwischen einer (im naturwissenschaftlich-technischen Bereich meist *gewöhnlichen*) Variablen  $X$  und einer *Zufallsvariablen*  $Y$  eine gewisse *stochastische Bindung*, so lässt sich aus einer zweidimensionalen Stichprobe

$$(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n) \quad (\text{III-302})$$

vom Umfang  $n$  schrittweise wie folgt eine (empirische) *Regressions-* oder *Ausgleichskurve* bestimmen, durch die die Abhängigkeit der Zufallsvariablen  $Y$  von der (gewöhnlichen oder Zufalls-) Variablen  $X$  beschrieben wird:

1. Die Stichprobenpaare  $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$  werden zunächst in einem rechtwinkligen  $x$ ,  $y$ -Koordinatensystem durch Punkte („Stichprobenpunkte“) bildlich dargestellt und ergeben in ihrer Gesamtheit eine *Punktwolke* (siehe hierzu Bild III-96). Aufgrund dieses *Streuungsdiagramms* entscheidet man sich dann für einen *speziellen Lösungsansatz* (z. B. für eine Gerade, Parabel oder Exponentialfunktion). Damit ist der *Typ* der Ausgleichskurve *eindeutig festgelegt*.
2. Die im Lösungsansatz enthaltenen (noch unbekannten) Kurvenparameter werden unter Verwendung der vorgegebenen Stichprobe dann so bestimmt, dass sich die Kurve den Stichprobenpunkten „optimal“ anpasst.

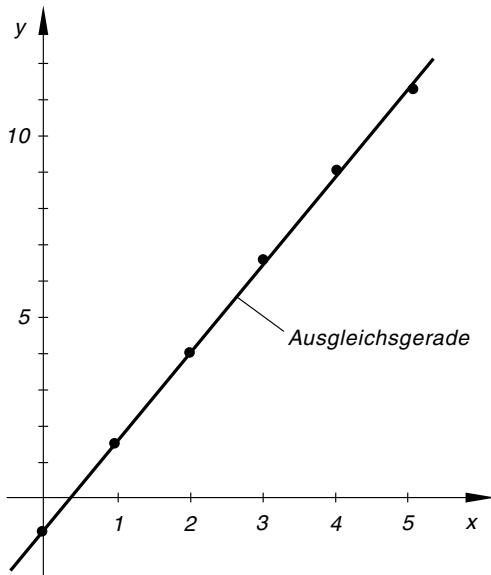
Die *Ausgleichung*, d. h. das Auffinden derjenigen Kurve vom ausgewählten Typ, die sich den Stichprobenpunkten „am besten“ anpasst, erfolgt dabei mit Hilfe der „*Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate*“, die stets eine eindeutige Lösung liefert und im nächsten Kapitel (Abschnitt 5) ausführlich behandelt wird.

## ■ Beispiele

- (1) Die zweidimensionale Stichprobe vom Umfang  $n = 6$

$i$	1	2	3	4	5	6
$x_i$	0	1	2	3	4	5
$y_i$	-0,9	1,45	4,1	6,4	9,1	11,3

ergibt das in Bild III-100 dargestellte *Streuungsdiagramm*. Aufgrund der *Punktwolke* erkennen wir ein hohes Maß an *linearer Abhängigkeit* zwischen den entsprechenden Zufallsvariablen. Es liegt daher nahe, einen *linearen Lösungsansatz* vom Typ  $y = ax + b$  für die *Regressions- oder Ausgleichskurve* zu wählen. Die Berechnung der Kurvenparameter  $a$  und  $b$  erfolgt im nächsten Kapitel (siehe hierzu Übungsaufgabe 4 aus Kap. IV, Abschnitt 5).

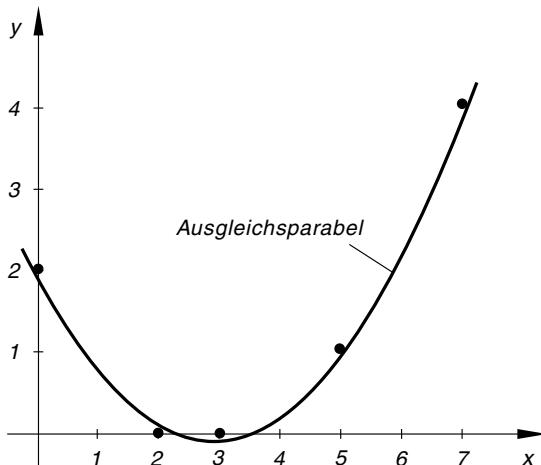


**Bild III-100** Ausgleichsgerade: Die Stichprobenpunkte liegen nahezu auf einer Geraden  
(Ansatz:  $y = ax + b$ )

## (2) Die bildliche Darstellung der fünf Stichprobenpunkte

$i$	1	2	3	4	5
$x_i$	0	2	3	5	7
$y_i$	2	0	0	1	4

führt zu der in Bild III-101 skizzierten *Punktwolke*. Aufgrund dieses *Streuungsdiagramms* entscheiden wir uns für eine *parabelförmige* Ausgleichskurve vom Typ  $y = ax^2 + bx + c$ . Die Bestimmung der drei Kurvenparameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  erfolgt im nächsten Kapitel (siehe hierzu Übungsaufgabe 6 aus Kap. IV, Abschnitt 5).



**Bild III-101** Ausgleichsparabel: Die Stichprobenpunkte liegen nahezu auf einer Parabel (Ansatz:  $y = ax^2 + bx + c$ )

# Übungsaufgaben

## Zu Abschnitt 1

- 1) Beim *10-maligen Wurf* eines Würfels ergaben sich folgende Augenzahlen:

2 1 4 6 3 6 4 4 3 5

Bestimmen Sie die *absolute* und *relative Häufigkeit* und zeichnen Sie das zugehörige *Stabdiagramm*.

- 2) Für die folgenden Stichproben bestimme man *Häufigkeitsfunktion*  $f(x)$  und *Verteilungsfunktion*  $F(x)$  und zeichne das zugehörige *Stabdiagramm* sowie die *Treppenfunktion* der Verteilung:

- a) 20 Schrauben aus einem Sortiment ( $X$ : Schraubenlänge in mm)

$\frac{x_i}{\text{mm}}$	39,7	39,8	39,9	40,0	40,1	40,2
$n_i$	1	3	4	6	4	2

- b) 25 ohmsche Widerstände aus einer Serienproduktion ( $X$ : Widerstand in  $\Omega$ )

$\frac{x_i}{\Omega}$	97	98	99	100	101	102	103
$n_i$	1	3	4	9	5	2	1

- c) Kapazitätsmessung an 50 Kondensatoren ( $X$ : Kapazität in  $\mu\text{F}$ )

$\frac{x_i}{\mu\text{F}}$	10,1	10,2	10,3	10,4	10,5
$n_i$	6	11	19	9	5

- 3) Ein Würfel wurde *500-mal* geworfen. Die möglichen Augenzahlen  $X$  waren dabei wie folgt verteilt:

Augenzahl $x_i$	1	2	3	4	5	6
$n_i$	102	88	80	65	90	75

Zeichnen Sie das *Stabdiagramm* und die *Verteilungskurve* dieser Häufigkeitsverteilung.

- 4) Beim gleichzeitigen Wurf *dreier* Münzen erhielt man für die dabei beobachtete Zufallsvariable

$$X = \text{Anzahl „Wappen“}$$

bei 200 Versuchsausführungen die folgende Häufigkeitstabelle:

$x_i$	0	1	2	3
$n_i$	20	82	73	25

- a) Bestimmen Sie die *Häufigkeitsfunktion*  $f(x)$  und die *Verteilungsfunktion*  $F(x)$ .  
 b) Stellen Sie diese Funktionen bildlich dar (*Stabdiagramm, Treppenfunktion*).  
 c) Wie viel Prozent aller Würfe brachten *mindestens einmal*, aber *höchstens zweimal* „Wappen“?  
 5) Die *Lebensdauer*  $X$  eines bestimmten elektronischen Bauelements wurde mittels einer Stichprobe vom Umfang  $n = 80$  untersucht und führte zu dem folgenden Ergebnis (Gruppierung der Daten in 7 Klassen):

Klasse $i$	Lebensdauer (in h)	Anzahl der Bauelemente
1	$400 \leq x \leq 450$	3
2	$450 < x \leq 500$	11
3	$500 < x \leq 550$	20
4	$550 < x \leq 600$	23
5	$600 < x \leq 650$	14
6	$650 < x \leq 700$	7
7	$700 < x \leq 750$	2

- a) Bestimmen Sie die *Häufigkeitsfunktion*  $f(x)$  und die *Verteilungsfunktion*  $F(x)$  in Abhängigkeit von der Klassenmitte.  
 b) Bestimmen Sie den prozentualen Anteil an Bauelementen in dieser Stichprobe mit einer Lebensdauer von *höchstens* 500 Stunden bzw. einer Lebensdauer von *mindestens* 600 Stunden.  
 c) Zeichnen Sie das *Histogramm* dieser Häufigkeitsverteilung.  
 6) Mit einer automatischen Abfüllanlage wird Wein in Literflaschen gefüllt. Eine nachträgliche Stichprobenuntersuchung an  $n = 100$  gefüllten Flaschen ergab die folgenden *Fehlmengen*, beschrieben durch die Zufallsvariable  $X$  (in  $\text{cm}^3$ ):

Klasse $i$	Fehlmenge (in $\text{cm}^3$ )	Anzahl der Flaschen
1	$0 \leq x \leq 10$	38
2	$10 < x \leq 20$	26
3	$20 < x \leq 30$	17
4	$30 < x \leq 40$	11
5	$40 < x \leq 50$	6
6	$50 < x \leq 60$	2

- a) Bestimmen Sie *Häufigkeits-* und *Verteilungsfunktion*.
- b) Zeichnen Sie das zugehörige *Histogramm*.
- c) Bestimmen Sie den *prozentualen* Anteil an Flaschen mit einer Fehlmenge  $X > 20 \text{ cm}^3$ .
- 7) An 40 Testfahrzeugen eines neuen Autotyps wurde der *Benzinverbrauch*  $X$  in Liter pro 100 km Fahrstrecke bestimmt. Die *Urliste* hatte dabei das folgende Aussehen (alle Werte in 1/100 km):

10,1	10,6	10,9	10,0	10,4	10,5	9,7	10,5
10,4	10,1	10,8	9,2	10,2	10,3	10,5	9,2
10,2	10,5	9,4	10,2	9,6	10,2	9,7	10,2
10,8	9,9	10,5	10,6	9,8	10,7	11,2	10,8
9,0	10,0	10,5	10,4	11,4	10,4	10,1	10,4

- a) Gruppieren Sie diese Daten in 5 Klassen der Breite 0,5 und ermitteln Sie die *Häufigkeitsfunktion*.
- b) Zeichnen Sie das zugehörige *Histogramm*.

## Zu Abschnitt 2

1)  $\vdots$  7) } Die Übungsaufgaben 1) bis 7) in Abschnitt 1 beschäftigen sich mit den Häufigkeitsverteilungen von Stichproben. Bestimmen Sie die jeweiligen *Mittelwerte*, *Standardabweichungen* und *Varianzen*.

- 8)  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sei eine beliebige Stichprobe. Zeigen Sie: Die Funktion

$$S(c) = \sum_{i=1}^n (x_i - c)^2$$

nimmt für  $c = \bar{x}$  ihren *kleinsten* Wert an ( $\bar{x}$  ist der *Mittelwert* der Stichprobe).

## Zu Abschnitt 3

- 1) Die *Lebensdauer*  $T$  zahlreicher elektronischer und mechanischer Bauelemente lässt sich in guter Näherung durch eine *Exponentialverteilung* mit der *normierten Dichtefunktion*

$$f(t; \lambda) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \quad \text{für } t \geq 0$$

beschreiben (für  $t < 0$  verschwindet diese Funktion). Bestimmen Sie nach der *Maximum-Likelihood-Methode* einen *Schätzwert* für den unbekannten Parameter  $\lambda > 0$  unter Verwendung einer vorgegebenen Stichprobe  $t_1, t_2, \dots, t_n$ .

- 2) Die *Lebensdauer*  $T$  von Glühlampen kann in guter Näherung als *exponentialverteilt* angesehen werden. *Schätzen* Sie anhand der folgenden konkreten Stichprobe den unbekannten Parameter  $\lambda$  der Verteilung:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$t_i/\text{h}$	250	210	400	320	190	210	240	292

- 3) Die Zufallsvariable  $X$  beschreibe die Anzahl der Gespräche, die von einer Telefonzentrale zu einer bestimmten Tageszeit pro Stunde vermittelt werden.  $X$  kann dabei als eine näherungsweise *Poisson-verteilte* Zufallsvariable betrachtet werden. Bestimmen Sie den unbekannten Parameter  $\mu$  dieser Verteilung anhand der folgenden Stichprobe:

$i$	1	2	3	4	5	6
$x_i/\text{h}$	160	145	155	136	140	152

- 4)  $X$  sei eine *normalverteilte* Zufallsvariable, deren Mittelwert  $\mu$  jedoch *unbekannt* ist. Bestimmen Sie anhand der Stichprobe

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i$	140	162	128	132	136	148	140	128	135	158

ein *Vertrauensintervall* für den Mittelwert  $\mu$

- a) bei *bekannter Varianz*  $\sigma^2 = 9$ ,  
 b) bei *unbekannter Varianz*  $\sigma^2$ .

Als *Vertrauensniveau* wähle man  $\gamma = 95\%$ .

- 5) Der Durchmesser  $X$  der auf einer bestimmten Maschine hergestellten Schrauben sei eine *normalverteilte* Zufallsvariable. Eine Stichprobe vom Umfang  $n = 100$ , entnommen aus einer Tagesproduktion, ergab dabei das folgende Ergebnis:  $\bar{x} = 0,620 \text{ cm}$ ,  $s = 0,035 \text{ cm}$ . Bestimmen Sie die *Vertrauensgrenzen* für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  bei einer *Irrtumswahrscheinlichkeit* von  $\alpha = 5\%$ .
- 6)  $X$  sei eine *normalverteilte* Zufallsgröße mit dem unbekannten Mittelwert  $\mu$  und der ebenfalls unbekannten Varianz  $\sigma^2$ . Eine Stichprobe vom Umfang  $n = 10$  ergab den arithmetischen Mittelwert  $\bar{x} = 102$  und die empirische Varianz  $s^2 = 16$ . Bestimmen Sie für  $\mu$  und  $\sigma^2$  jeweils ein *Vertrauensintervall* zum Vertrauensniveau  $\gamma = 99\%$ .
- 7) Für einen neuen Autotyp wurde ein bestimmter Motor weiterentwickelt, dessen Leistung  $X$  (in PS) als eine *normalverteilte* Zufallsvariable betrachtet werden kann. Eine Stichprobenuntersuchung an  $n = 8$  wahllos herausgegriffenen Motoren brachte das folgende Ergebnis:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_i$	100,5	96,5	99,0	97,8	100,4	103,5	100,3	98,0
PS								

Bestimmen Sie jeweils ein *Vertrauensintervall* für den unbekannten *Mittelwert*  $\mu$  und die unbekannte *Varianz*  $\sigma^2$  bei einer vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 5\%$ .

- 8) Die *Tragfähigkeit*  $X$  eines Balkens soll als eine *normalverteilte* Zufallsvariable betrachtet werden. Eine Stichprobenuntersuchung vom Umfang  $n = 16$  ergab folgende Werte:

$$\text{Mittelwert: } \bar{x} = 12,54 \text{ kN}; \quad \text{Standardabweichung: } s = 1,02 \text{ kN}$$

Bestimmen Sie auf der Basis dieser Stichprobe jeweils ein *Vertrauensintervall* für den unbekannten *Mittelwert*  $\mu$  und die unbekannte *Varianz*  $\sigma^2$ . Das Vertrauensniveau sei  $\gamma = 95\%$ .

- 9) In einer Versuchsreihe wurde die *Dichte*  $X$  einer Eisenkugel insgesamt 20-mal gemessen, wobei nur 6 verschiedene Messwerte mit der folgenden *Häufigkeitsverteilung* auftraten:

$x_i$ (in $\text{g/cm}^3$ )	7,79	7,80	7,81	7,82	7,84	7,85
absolute Häufigkeit $n_i$	3	3	5	4	3	2

Bestimmen Sie anhand dieser Stichprobe ein *Vertrauensintervall* für den unbekannten *Mittelwert*  $\mu$  der als *normalverteilt* betrachteten Messgröße  $X$  (vorgegebenes Vertrauensniveau:  $\gamma = 99\%$ ).

- 10) Bei der *Qualitätskontrolle* eines bestimmten elektronischen Bauteils befanden sich in einer Zufallsstichprobe vom Umfang  $n = 500$  genau  $k = 27$  *defekte* Teile. Bestimmen Sie einen *Schätzwert* für den unbekannten „*Ausschussanteil*“  $p$  der Gesamtproduktion und geben Sie ein *Vertrauensintervall* für diesen Parameter zum Vertrauensniveau
- a)  $\gamma = 95\%$ ,      b)  $\gamma = 99\%$   
an.
- 11) Beim Würfeln mit einem homogenen Würfel soll das Auftreten einer *geraden* Au genzahl als „Erfolg“ gewertet werden. Bei  $n = 100$  unabhängigen Würfen trat dieses Ereignis genau 55-mal ein. Schätzen Sie die unbekannte „Erfolgswahrscheinlichkeit“  $p$  und bestimmen Sie für diesen Parameter ein *Vertrauensintervall* bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 1\%$ .
- 12) Eine Urne enthält schwarze und weiße Kugeln, deren Anteile jedoch *unbekannt* sind. Um den Anteil  $p$  an *schwarzen* Kugeln zu schätzen, wurde der Urne 100-mal eine Kugel *mit Zurücklegen* entnommen. Dabei erhielt man das folgende Ergebnis:

Farbe der gezogenen Kugel	schwarz	weiß
Anzahl der gezogenen Kugeln	68	32

Ermitteln Sie auf einem Konfidenzniveau von  $\gamma = 95\%$  ein *Konfidenzintervall* für den unbekannten Parameter  $p$ .

- 13) Aus einer Sonderprägung wurden  $n = 100$  Münzen nach dem Zufallsprinzip ausgewählt und ihre *Masse*  $X$  bestimmt. Man erhielt dabei einen Stichprobenmittelwert von  $\bar{x} = 5,43 \text{ g}$  mit einer Streuung (Varianz) von  $s^2 = 0,09 \text{ g}^2$ . Der Verteilungstyp der Zufallsvariablen  $X$  ist jedoch *unbekannt*. Bestimmen Sie mit Hilfe des *Zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung* auf einem Vertrauensniveau von  $\gamma = 95\%$  die *Vertrauensintervalle* für den unbekannten *Mittelwert*  $\mu$  und die unbekannte *Standardabweichung*  $\sigma$ .

## Zu Abschnitt 4

- 1) Ein Hersteller produziert in großer Stückzahl elektrische Widerstände mit dem *Sollwert*  $\mu_0 = 100 \Omega$ . Der *ohmsche Widerstand*  $X$  kann dabei als eine *annähernd normalverteilte* Zufallsvariable angesehen werden. Nach Angaben des Herstellers wird der vorgegebene Sollwert  $\mu_0 = 100 \Omega$  auch eingehalten. Eine Stichprobe vom Umfang  $n = 10$  ergab jedoch einen *empirischen Mittelwert* von  $\bar{x} = 102 \Omega$ . Man teste mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 1\%$  die *Nullhypothese*  $H_0 : \mu = \mu_0 = 100 \Omega$  gegen die *Alternativhypothese*  $H_1 : \mu \neq \mu_0 = 100 \Omega$ . Aufgrund langjähriger Erfahrungen darf dabei von einer Standardabweichung  $\sigma = 3 \Omega$  ausgegangen werden.

- 2) In einem Werk werden Glühlampen hergestellt, deren *Lebensdauer*  $X$  als eine *normalverteilte* Zufallsvariable mit dem Mittelwert  $\mu_0 = 1500$  h und der Standardabweichung  $\sigma = 80$  h betrachtet werden kann. Durch eine *geringfügige* Materialänderung erhofft sich der Hersteller eine *Vergrößerung* der mittleren Lebensdauer. Eine Stichprobenuntersuchung an 50 Glühlampen der neuen Serie scheint dies zu bestätigen: Für die mittlere Lebensdauer erhielt man den Wert  $\bar{x} = 1580$  h. Können wir aus dieser Stichprobe den Schluss ziehen, dass sich die Lebensdauer *signifikant erhöht* hat?

Testen Sie bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 1\%$  die *Nullhypothese*  $H_0 : \mu = \mu_0 = 1500$  h gegen die *Alternativhypothese*  $H_1 : \mu > \mu_0 = 1500$  h. Bei dem Test wird vorausgesetzt, dass sich die Standardabweichung  $\sigma$  durch die Materialänderung *nicht verändert* hat.

- 3) Die *Reißlast*  $X$  eines Seiles ist laut Hersteller eine *normalverteilte* Zufallsgröße mit dem Mittelwert  $\mu_0 = 5,20$  kN. Eine Stichprobe vom Umfang  $n = 20$  führte zu den folgenden Kennwerten:  $\bar{x} = 5,02$  kN;  $s = 0,12$  kN. *Prüfen* Sie mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 5\%$ , ob die aufgrund dieser Stichprobe geäußerten *Zweifel* an der Richtigkeit der Herstellerangabe  $\mu_0 = 5,20$  kN berechtigt sind.
- 4) In einem Werk werden Schrauben produziert, deren Länge  $X$  eine *normalverteilte* Zufallsgröße mit dem Mittelwert  $\mu_0 = 21$  mm sei. Eine Zufallsstichprobe vom Umfang  $n = 25$  führte zu dem folgenden Ergebnis:

$$\text{Mittelwert: } \bar{x} = 20,5 \text{ mm}; \quad \text{Standardabweichung: } s = 1,5 \text{ mm}$$

*Prüfen* Sie mit der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 1\%$ , ob die Abweichung des beobachteten Stichprobenmittelwertes  $\bar{x} = 20,5$  mm vom Sollwert  $\mu_0 = 21$  mm *signifikant* oder *zufallsbedingt* ist.

- 5) Ein Automobilhersteller bringt ein neues PKW-Modell auf den Markt, dessen Benzinverbrauch  $X$  (in Liter pro 100 km Fahrstrecke) eine *normalverteilte* Zufallsvariable mit dem Mittelwert  $\mu_0 = 8,21/100$  km sein soll. Die Redaktion einer Fachzeitschrift überprüft diese Angabe an  $n = 36$  zufällig ausgewählten Testfahrzeugen und kommt dabei zu folgendem Ergebnis:

$$\text{Mittelwert: } \bar{x} = 9,11/100 \text{ km}; \quad \text{Standardabweichung: } s = 2,31/100 \text{ km}$$

Der Stichprobenmittelwert  $\bar{x}$  ist also deutlich *höher* als der vom Hersteller angegebene Wert  $\mu_0$ . *Testen* Sie mit der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 5\%$ , ob die Angabe des Herstellers bezüglich des Mittelwertes  $\mu$  noch länger aufrecht erhalten werden kann.

- 6) Zwei *verschiedene* Messmethoden für Widerstände sollen miteinander verglichen werden. Vergleichsmessungen an 5 Widerständen ergaben dabei das folgende Messprotokoll (alle Widerstandswerte in  $\Omega$ ):

$i$	1	2	3	4	5
1. Methode: Messwert $x_i$	100,5	102,4	104,3	101,5	98,4
2. Methode: Messwert $y_i$	98,2	99,1	102,4	101,1	96,2

Testen Sie mit der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 1\%$ , ob beide Messmethoden als *gleichwertig* angesehen werden können oder ob die beobachteten Abweichungen *signifikant* sind.

- 7) In zwei Werken A und B wird ein bestimmtes elektronisches Bauelement nach dem *gleichen* Verfahren hergestellt. Es wird jedoch *vermutet*, dass die im Werk B produzierten Teile eine *höhere* Lebensdauer besitzen. Die folgende Stichprobenuntersuchung scheint dies zu bestätigen:

Werk	Anzahl der getesteten Elemente	mittlere Lebensdauer (in h)	Standardabweichung (in h)
A	$n_1 = 100$	$\bar{x} = 1540$	$s_1 = 142$
B	$n_2 = 120$	$\bar{y} = 1600$	$s_2 = 150$

Testen Sie mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 1\%$  die Behauptung, dass die im Werk B hergestellten elektronischen Bauelemente eine *höhere* Lebensdauer besitzen.

Wir setzen dabei voraus, dass die Werte aus *normalverteilten* Grundgesamtheiten mit *gleicher* (aber unbekannter) Varianz stammen.

- 8) Die folgenden Stichproben stammen aus zwei *normalverteilten* Grundgesamtheiten mit *gleicher* (aber unbekannter) Varianz:

$i$	1	2	3	4	5
$x_i$	5,98	6,02	6,10	5,82	6,04
$y_i$	6,06	6,08	6,12	6,00	5,94

Es wird behauptet, dass auch ihre Mittelwerte *übereinstimmen*. Prüfen Sie mit der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 1\%$ , ob diese Behauptung tatsächlich zutrifft.

- 9) Eine Maschine produziert Wellen von hoher Präzision. Als *Genauigkeitsmaß* wird dabei die Standardabweichung  $\sigma_0$  des Wellendurchmessers  $X$  betrachtet. Die Maschine wurde dabei so eingestellt, dass  $\sigma_0 = 0,2$  mm beträgt. Zu Kontrollzwecken wurde eine Zufallsstichprobe vom Umfang  $n = 12$  entnommen. Ihre Auswertung ergab jedoch eine *empirische* Standardabweichung von  $s = 0,4$  mm. Muss die Maschine neu eingestellt werden?  
*Testen* Sie daher mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 5\%$  die *Nullhypothese*  $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$  gegen die *Alternativhypothese*  $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$  und treffen Sie eine *Entscheidung*. Ändert sich diese, wenn dieser Test mit der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 1\%$  durchgeführt wird?
- 10) Der Hersteller eines Massenartikels behauptet, seine Ware enthalte einen Ausschussanteil von *höchstens* 3 %. Bei einer *Qualitätskontrolle* werden in einer Stichprobe von  $n = 400$  Teilen genau 20 *unbrauchbare* Teile gefunden. Steht diese Untersuchung im Einklang mit der Behauptung des Herstellers? Treffen Sie eine *Entscheidung*, indem Sie bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 5\%$  die *Nullhypothese*  $H_0 : p \leq p_0 = 0,03$  gegen die *Alternativhypothese*  $H_1 : p > p_0 = 0,03$  testen.
- 11) Bei 200 Würfen mit einem Würfel erhielt man 88-mal eine *gerade* Augenzahl. Prüfen Sie auf dem Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$ , ob es sich dabei um einen „unverfälschten“ Würfel handeln kann.  
*Hinweis:* Bei einem „unverfälschten“ Würfel tritt eine *gerade* Augenzahl mit der Wahrscheinlichkeit  $p_0 = 0,5$  auf.

## Zu Abschnitt 5

- 1) Beim Wurf einer Münze erhielt man bei 150 Würfen 65-mal „Zahl“. *Testen* Sie mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 5\%$ , ob die aufgrund dieser Zufallsstichprobe geäußerten Zweifel an der „Echtheit“ der Münze berechtigt sind.
- 2) Ein Würfel wurde 300-mal geworfen. Dabei erhielt man die folgende *Häufigkeitsverteilung* für die 6 möglichen Augenzahlen:

Augenzahl $i$	1	2	3	4	5	6
absolute Häufigkeit $n_i$	35	39	70	62	56	38

*Testen* Sie mit Hilfe des *Chi-Quadrat-Tests* auf dem Signifikanzniveau  $\alpha = 1\%$ , ob diese Zufallsstichprobe gegen eine Gleichverteilung der Augenzahlen spricht.

- 3) Es wird *vermutet*, dass die Zufallsvariable  $X$  einer *Poisson-Verteilung* mit dem unbekannten Parameter (Mittelwert)  $\mu$  genügt. Zu welchem Ergebnis führt ein auf dem Signifikanzniveau  $\alpha = 5\%$  durchgeführter *Chi-Quadrat-Test*, dem die folgende Stichprobe vom Umfang  $n = 100$  zugrunde liegt?

$x_i$	0	1	2	3	4	5
absolute Häufigkeit $n_i$	27	31	22	12	6	2

- 4) Um den *mittleren Benzinverbrauch* eines neu entwickelten PKW's zu bestimmen, wurden 100 Testfahrzeuge ausgewählt und an ihnen der Benzinverbrauch  $X$  in Liter pro 100 km festgestellt. Die Stichprobenuntersuchung führte zu dem folgenden Ergebnis (alle Werte in 1/100 km;  $k = 5$  Klassen):

Klassenintervall	$7,5 \leq x < 8$	$8 \leq x < 8,5$	$8,5 \leq x < 9$	$9 \leq x < 9,5$	$9,5 \leq x \leq 10$
absolute Häufigkeit	8	20	36	24	12

Testen Sie auf einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 1\%$ , ob die Zufallsvariable  $X$  *normalverteilt* ist.

## Zu Abschnitt 6

- 1) Berechnen Sie die *Kovarianz*  $s_{xy}$  und den *Korrelationskoeffizienten*  $r$  der folgenden Stichproben und skizzieren Sie die jeweilige *Punktwolke*:

a)	$i$	1	2	3	4	5	6
	$x_i$	2	2	4	1	5	4
	$y_i$	3	2	4	2	4	2

b)	$i$	1	2	3	4	5
	$x_i$	2	4	6	8	10
	$y_i$	20	17	13	10	6

- 2) Bei 10 Personen wurden gleichzeitig die Merkmale

$$X = \text{Körperlänge} \text{ (in cm)} \quad \text{und} \quad Y = \text{Körpergewicht} \text{ (in kg)}$$

untersucht:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i$	165	175	167	175	180	166	169	180	176	168
$y_i$	56	70	62	71	81	58	60	79	73	61

Zeichnen Sie das *Streuungsdiagramm* und berechnen Sie den (*empirischen*) *Korrelationskoeffizienten*  $r$  dieser Stichprobe.

- 3) Die Untersuchung der *Temperaturabhängigkeit* eines ohmschen Widerstandes führte zu der folgenden Stichprobe (Messwertepaare):

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{T_i}{^{\circ}\text{C}}$	20	25	30	40	50	60	65	80
$\frac{R_i}{\Omega}$	16,30	16,44	16,61	16,81	17,10	17,37	17,39	17,86

Berechnen Sie die *empirischen Varianzen*  $s_T^2$  und  $s_R^2$  sowie die empirische *Kovarianz*  $s_{TR}$  und den *empirischen Korrelationskoeffizienten*  $r$ .

- 4) Die Untersuchung der Lösbarkeit  $L$  von  $\text{NaNO}_3$  in Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur  $T$  führte zu den folgenden Stichprobenpunkten (Messpunkten):

$i$	1	2	3	4	5	6
$T_i$	0	20	40	60	80	100
$L_i$	70,8	88,4	104,9	124,7	148,0	176,0

(Löslichkeit  $L$  in Gramm pro 100 Gramm Wasser, Temperatur  $T$  in Grad Celsius).

Berechnen Sie den *Korrelationskoeffizienten*  $r$  und zeichnen Sie die *Punktwolke* dieser Stichprobe. Wählen Sie dann aufgrund dieser bildlichen Darstellung einen geeigneten *Lösungsansatz* für die *Regressions- oder Ausgleichskurve* ( $T$  ist die unabhängige,  $L$  die abhängige Variable). Die Berechnung der Kurvenparameter kann erst im nächsten Kapitel erfolgen (Aufgabe 5 aus Kap. IV, Abschnitt 5).

- 5) Gegeben ist jeweils die *gemeinsame* Verteilung der beiden *diskreten* Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ . Berechnen Sie die *Kovarianz*  $\sigma_{XY}$  und den *Korrelationskoeffizienten*  $q$ :

a)

$X \backslash Y$	-1	1
-1	$1/4$	$1/4$
1	$1/4$	$1/4$

b)

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/3$	$4/15$
1	$4/15$	$2/15$

- 6) Zeigen Sie: Die folgenden fünf Stichprobenpunkte (Messpunkte) liegen *exakt* auf einer *Geraden* (Beweis!):

$i$	1	2	3	4	5
$x_i$	0	1,5	4	5	2,5
$y_i$	3	6	11	13	8

Bestimmen Sie auf *elementarem* Wege die Gleichung dieser Geraden!

## IV Fehler- und Ausgleichsrechnung

### 1 „Fehlerarten“

(systematische und zufällige Messabweichungen).

### Aufgaben der Fehler- und Ausgleichsrechnung

In Naturwissenschaft und Technik stellt sich häufig die Aufgabe, den Wert einer physikalisch-technischen Größe  $X$  durch *Messungen* zu ermitteln. Der Messvorgang beruht dabei auf einer bestimmten *Messmethode* und erfolgt unter Verwendung bestimmter *Messinstrumente*. Die *Erfahrung* lehrt nun, dass jede Messung – selbst bei sorgfältigster Vorbereitung und Durchführung und Verwendung hochwertiger Messgeräte – stets mit „Fehlern“ der verschiedensten Art behaftet ist, die in der modernen Fehlerrechnung als *Messabweichungen* oder kurz als *Abweichungen* bezeichnet werden<sup>1)</sup>. Bei einer wiederholten Messung der Größe  $X$  erhält man daher voneinander *abweichende* Messwerte, die wir der Reihe nach mit

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (\text{IV-1})$$

bezeichnen. Sie bilden eine *Messreihe* mit  $n$  Mess- oder Beobachtungswerten. Die Abweichung des  $i$ -ten Messwertes  $x_i$  vom „wahren“ Wert  $x_w$  der Größe  $X$  heißt „wahrer Fehler“  $\Delta x_{iw}$  und ist durch die Gleichung

$$\Delta x_{iw} = x_i - x_w \quad (\text{IV-2})$$

definiert. In der Praxis jedoch bleiben  $x_w$  und  $\Delta x_{iw}$  meist *unbekannt*.

*Worauf beruhen eigentlich Messabweichungen („Messfehler“) und wie kommen sie zu stande?*

Sicher ist, dass sie stets auf das *gleichzeitige* Einwirken einer meist sehr *großen* Anzahl verschiedenartiger äußerer Störeinflüsse auf Messinstrumente, Messverfahren und Beobachter zurückzuführen sind. Zu solchen Einflüssen zählen beispielsweise:

- *Unvollkommenheit* des verwendeten Messinstruments, der zugrunde liegenden Messmethode und des Messobjektes
- *Umwelteinflüsse* wie z. B. geringfügige Schwankungen der Temperatur, des Luftdrucks und der Luftfeuchtigkeit oder das Einwirken elektromagnetischer Felder
- Einflüsse, die mit der *Person* des Beobachters verbunden sind, wie z. B. Unaufmerksamkeit bei der Messung oder mangelnde Sehschärfe usw.

<sup>1)</sup> In der DIN-NORM 1319 (Teil 3) wird empfohlen, die Bezeichnung „Fehler“ durch „Messabweichung“ (kurz „Abweichung“ genannt) zu ersetzen (siehe hierzu auch die Anmerkungen am Ende dieses Abschnitts).

Ihrer Art nach unterscheiden wir dabei zwischen

- *groben Fehlern*,
- *systematischen Abweichungen* („*systematischen Fehlern*“) und
- *zufälligen Abweichungen* („*zufälligen*“ oder „*statistischen Fehlern*“).

### Grobe Fehler

*Grobe Fehler* sind Fehler im eigentlichen Sinne. Sie entstehen durch *fehlerhaftes Verhalten* des Beobachters, beispielsweise durch *falsches Ablesen* von Messwerten oder durch Verwendung eines *beschädigten* und daher nicht mehr funktionsfähigen Messinstruments. Grobe Fehler sind somit stets *vermeidbar*.

### Systematische Abweichungen („systematische Fehler“)<sup>2)</sup>

*Systematische* Messabweichungen beruhen auf *ungenauen* Messmethoden und *fehlerhaften* Messinstrumenten. Bei einem falsch geeichten Ampèremeter beispielsweise fallen alle Messwerte *entweder* zu groß *oder* zu klein aus. Eine weitere häufig auftretende *systematische* Messabweichung beruht auf dem sog. *Parallaxenfehler* beim Ablesen eines Messwertes auf einer Skala: Alle Werte werden unter einem bestimmten Winkel und daher *einseitig verfälscht* abgelesen. Eine *systematische* Abweichung erkennt man stets daran, dass *alle* Messwerte *einseitig*, d. h. in *gleicher Weise* verfälscht sind. Sie ist somit durch ein bestimmtes *Vorzeichen* gekennzeichnet (entweder werden alle Werte zu groß oder aber zu klein gemessen). Wird eine *systematische* Messabweichung als eine solche erkannt, so muss sie im Messergebnis durch ein *Korrekturglied* berücksichtigt werden. Man erhält dann einen *korrigierten* oder *berichtigten* Messwert. In vielen Fällen jedoch lassen sich *systematische* Abweichungen bei sorgfältiger Vorbereitung und Durchführung der Messung und Verwendung hochwertiger Messinstrumente *nahezu vermeiden* oder zumindest auf ein *vernachlässigbares* Maß reduzieren.

### Zufällige Abweichungen („zufällige“ oder „statistische Fehler“)<sup>3)</sup>

*Zufällige* Messabweichungen entstehen durch Einwirkung einer Vielzahl von *unkontrollierbaren* Störeinflüssen („*Einzelfehlern*“) und sind stets *regellos* verteilt. Sie verfälschen das Messergebnis in *unkontrollierbarer* Weise. *Zufallsabweichungen* sind beispielsweise auf gewisse Mängel an den Messinstrumenten, die auch bei sorgfältigster Fertigung auftreten, oder auf geringfügige Schwankungen der äußeren Versuchsbedingungen wie z. B. Temperatur-, Luftdruck- und Feuchtigkeitsänderungen zurückzuführen. Weitere Störeinflüsse sind mechanische Erschütterungen, elektrische und magnetische Felder usw.. Die *zufälligen* Messabweichungen unterliegen als *unkontrollierbare* und stets *regellos* auftretende Abweichungen den Gesetzmäßigkeiten der *mathematischen Statistik* und werden daher auch als *statistische* Messabweichungen bezeichnet.

<sup>2)</sup> Systematische Abweichungen wurden früher als „*systematische Fehler*“ bezeichnet.

<sup>3)</sup> Zufällige Abweichungen wurden früher als „*zufällige*“ oder „*statistische Fehler*“ bezeichnet.

Die *groben* Fehler und die *systematischen* Messabweichungen („systematischen Fehler“) schließen wir von allen weiteren Betrachtungen aus, da sie – im *Gegensatz* zu den *zufälligen* Messabweichungen („zufälligen Fehlern“) – *vermeidbar* und daher mit den Hilfsmitteln der mathematischen Statistik *nicht erfassbar* sind<sup>4)</sup>. Im Sinne der Statistik ist daher ein Messvorgang als eine *Zufallsbeobachtung*, das Auftreten eines bestimmten Messwertes bzw. einer bestimmten Messabweichung als ein *zufälliges Ereignis* und eine aus  $n$  Messwerten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bestehende Messreihe als eine *Stichprobe* aus der (als unendlich angenommenen) Grundgesamtheit aller möglichen Messwerte aufzufassen. Es gibt daher *keine* Möglichkeit, den „wahren“ Wert  $x_w$  einer Messgröße  $X$  zu bestimmen. Die Einzelwerte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  einer Messreihe sind vielmehr *Realisierungen einer Zufallsvariablen*, nämlich der Messgröße  $X$ , die einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung mit dem *Erwartungs-* oder *Mittelwert*  $E(X) = \mu$  und der *Varianz*  $\text{Var}(x) = \sigma^2$  bzw. der *Standardabweichung*  $\sigma$  genügt<sup>5)</sup>.

Die *Fehler- und Ausgleichsrechnung* beschäftigt sich mit der *Erfassung*, *Verarbeitung* und *Beurteilung* von Messwerten und ihren *zufälligen* Messabweichungen („Zufallsfehlern“) auf der Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik. Ihre wichtigsten Aufgaben sind:

1. *Auswertung* und *Beurteilung* einer Messreihe durch Bildung eines geeigneten *Mittelwertes* und Angabe eines *Genauigkeitsmaßes*.
2. Untersuchung der *Fortpflanzung* von (zufälligen) Messabweichungen (*Fehlerfortpflanzung*).
3. Bestimmung einer sog. *Ausgleichs-* oder *Regressionskurve*, die den funktionalen Zusammenhang zwischen zwei Messgrößen „optimal“ beschreibt.

Die zuerst angeschnittene Aufgabe wird mit Hilfe der Begriffe *arithmetischer Mittelwert*, *Standardabweichung* bzw. *Varianz*, *Vertrauensbereich für den Mittelwert* und *Messunsicherheit* gelöst. Die zweite Aufgabe führt uns zu dem *Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz* (auch *Varianzfortpflanzungsgesetz* genannt). In diesem Zusammenhang soll auch an die bereits in Band 2 behandelte *lineare Fehlerfortpflanzung* erinnert werden (Kap. III, Abschnitt 2.5.5). Im Rahmen der Ausgleichsrechnung beschäftigen wir uns schließlich mit dem in den technischen Anwendungen wichtigen Problem eine Kurve so zu bestimmen, dass sie sich  $n$  vorgegebenen Messpunkten  $P_i = (x_i; y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) „möglichst gut“ anpasst (Bestimmung einer *Ausgleichskurve*).

---

<sup>4)</sup> Diese Aussage trifft für die *systematischen* Abweichungen nur *bedingt* zu. Grundsätzlich lassen sich *systematische* Messabweichungen meist *nicht* vermeiden. Sie bleiben in vielen Fällen *unbekannt*. Wir gehen jedoch im Rahmen dieser einführenden Darstellung stets davon aus, dass eventuell vorhandene *systematische* Abweichungen *vernachlässigbar klein* sind.

<sup>5)</sup> Wir werden im nächsten Abschnitt zeigen, dass man eine Messgröße  $X$  als eine (in der Regel annähernd normalverteilte) *Zufallsvariable* auffassen kann. Daher verwenden wir – wie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik allgemein üblich – lateinische *Großbuchstaben* zur Kennzeichnung von Messgrößen. Der unbekannte „*wahre*“ Wert  $x_w$  einer Messgröße  $X$  entspricht dabei dem *Mittel-* oder *Erwartungswert*  $E(X) = \mu$  der unendlichen Grundgesamtheit, die aus allen möglichen Messwerten besteht.

Wir fassen die wichtigsten Aussagen zusammen:

### Aufgaben der Fehler- und Ausgleichsrechnung

Die *Fehlerrechnung* beschäftigt sich mit den Messwerten und ihren *zufälligen* Messabweichungen („zufälligen Fehlern“) auf der Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik. Zu ihren wichtigsten Aufgaben gehören u. a.:

1. *Auswertung* und *Beurteilung* einer Messreihe durch
  - Bildung eines *Mittelwertes*,
  - Angabe eines *Genauigkeitsmaßes* für die *Einzelmessungen* (Standardabweichung bzw. Varianz der Einzelmessung) und
  - Angabe eines *Genauigkeitsmaßes* für den *Mittelwert* (Standardabweichung des Mittelwertes, Vertrauensbereich für den Mittelwert, Messunsicherheit des Mittelwertes).
2. Untersuchung der *Fortpflanzung* von *zufälligen* Messabweichungen bei einer „indirekten Messgröße“, die von mehreren *direkt* gemessenen Größen abhängt (*Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz*, auch *Varianzfortpflanzungsgesetz* genannt).
3. Bestimmung einer *Ausgleichskurve*, die sich vorgegebenen Messpunkten in „optimaler“ Weise anpasst.

### Anmerkungen

- (1) Die in der technischen Literatur und in der Praxis noch häufig verwendeten Bezeichnungen *zufälliger* bzw. *systematischer Fehler* wurden in der DIN-NORM 1319 (Teil 3) durch die Bezeichnungen *zufällige* bzw. *systematische Messabweichung* (auch kurz „*Abweichung*“ genannt) ersetzt:

*zufälliger Fehler* → *zufällige Abweichung*

*systematischer Fehler* → *systematische Abweichung*

Die neuen Bezeichnungen scheinen sich jedoch nur langsam durchzusetzen. Um Missverständnisse zu vermeiden, werden wir hier der besseren „Überbrückung“ wegen meist *beide* Bezeichnungen verwenden, wobei wir im Regelfall die *alte* Bezeichnung in Klammern setzen. Z. B.:

*zufällige Abweichung (zufälliger Fehler)*

- (2) Es wird grundsätzlich vorausgesetzt, dass *keine* groben Fehler vorliegen (denn diese sind *vermeidbar*) und eventuell vorhandene *systematische* Messabweichungen („*systematische Fehler*“) *vernachlässigbar* sind. Unter den *Messabweichungen* oder kurz *Abweichungen* verstehen wir daher im Folgenden *stets* die „*zufälligen*“ *Abweichungen*.

## 2 Statistische Verteilung der Messwerte und Messabweichungen („Messfehler“)

### 2.1 Häufigkeitsverteilungen

Eine physikalisch-technische Größe  $X$  wird unter den folgenden Bedingungen  $n$ -mal gemessen („Messungen gleicher Genauigkeit“):

1. Die Messwerte unterliegen dem *gleichen* Genauigkeitsmaß (*gleiches* Messobjekt, *gleiche* Messmethode, *gleiches* Messinstrument, alle Messungen werden von *ein* und *derselben* Person in *kurzen* Zeitabständen am *gleichen* Ort durchgeführt)<sup>6)</sup>.
2. Die Messwerte sind *voneinander unabhängig*, d. h. keine Messung beeinflusst in irgendeiner Weise eine nachfolgende Messung.
3. Die auftretenden Messabweichungen sind ausschließlich *zufälliger Art*.

Die Messreihe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  kann dann nach den Ausführungen des letzten Abschnitts als eine *Stichprobe* aus der (unendlichen) Grundgesamtheit aller möglichen Messwerte verstanden werden. Wir wollen uns nun mit der *Häufigkeitsverteilung* einer solchen Messreihe näher befassen. Dazu werden die Messdaten (Messwerte)  $x_i$  zunächst der Größe nach *geordnet* und dann in der aus Kap. III, Abschnitt 1.3.3 bekannten Art und Weise in  $k$  *Klassen* gleicher Länge (Breite)  $\Delta x$  aufgeteilt<sup>7)</sup>. Die *absolute Klassenhäufigkeit*  $n_i$  gibt dann die Anzahl der Messwerte in der  $i$ -ten Klasse an, wobei stets

$$\sum_{i=1}^k n_i = n \quad (\text{mit } k < n) \quad (\text{IV-3})$$

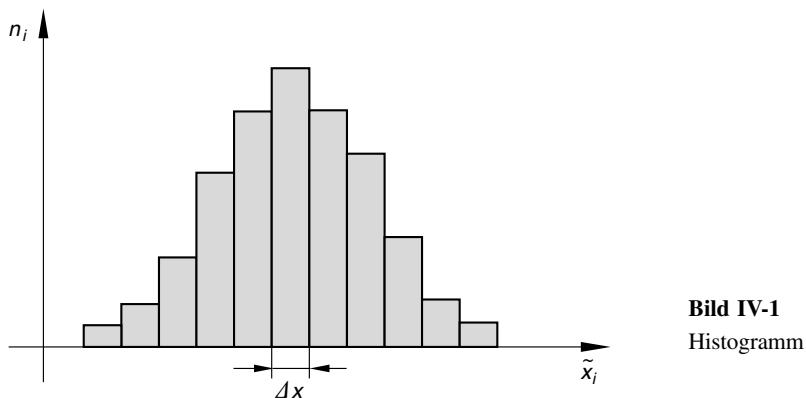
gilt. Geht man zu den *relativen Klassenhäufigkeiten*  $h_i = n_i/n$  über, so ist

$$0 \leq h_i \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^k h_i = 1 \quad (\text{IV-4})$$

Die *Häufigkeitsverteilung* einer Messreihe lässt sich dann sehr anschaulich in einem *Histogramm* darstellen. In Bild IV-1 haben wir die *absolute Klassenhäufigkeit*  $n_i$  über der *Klassenmitte*  $\tilde{x}_i$  aufgetragen ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Statt der *absoluten Klassenhäufigkeit*  $n_i$  kann man auch die *relative Klassenhäufigkeit*  $h_i$  gegen die Klassenmitte  $\tilde{x}_i$  auftragen.

<sup>6)</sup> Man spricht in diesem Zusammenhang auch von *Wiederholungsbedingungen*.

<sup>7)</sup> Eine Einteilung in Klassen ist nur bei *umfangreichen* Messreihen sinnvoll (siehe hierzu Kap. III. Abschnitt 1.3.3).



### ■ Beispiel

In einem Versuch wurde der *ohmsche Widerstand*  $R$  einer Spule insgesamt 80-mal gemessen, wobei sich Werte zwischen  $200,6 \Omega$  und  $210,3 \Omega$  ergaben. Eine Unterteilung in 10 Klassen der Breite  $\Delta R = 1 \Omega$  führte zu der folgenden *Häufigkeitsverteilung*:

Klassen-Nr. $i$	Klassengrenzen (in $\Omega$ )	Klassenmitte (in $\Omega$ )	Absolute Klassenhäufigkeit $n_i$
1	200,5 ... 201,5	201	1
2	201,5 ... 202,5	202	3
3	202,5 ... 203,5	203	10
4	203,5 ... 204,5	204	14
5	204,5 ... 205,5	205	19
6	205,5 ... 206,5	206	15
7	206,5 ... 207,5	207	9
8	207,5 ... 208,5	208	6
9	208,5 ... 209,5	209	2
10	209,5 ... 210,5	210	1
			$\sum = 80$

Das zugehörige *Histogramm* ist in Bild IV-2 dargestellt (aufgetragen wurde die *absolute Klassenhäufigkeit*  $n_i$  gegen die Klassenmitte).

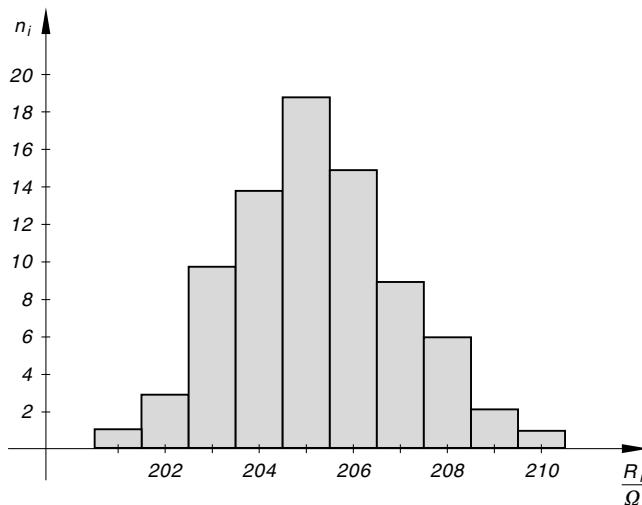


Bild IV-2

## 2.2 Normalverteilte Messgrößen

Die *diskrete* Häufigkeitsverteilung aus Bild IV-1 geht in eine *kontinuierliche (stetige)* Verteilung über, wenn die Anzahl  $n$  der Messungen beliebig erhöht ( $n \rightarrow \infty$ ) und gleichzeitig die Klassenbreite  $\Delta x$  beliebig verkleinert wird ( $\Delta x \rightarrow 0$ ). Die Verteilung der Messdaten wird dann durch eine *Verteilungsdichtefunktion*  $f(x)$  beschrieben, von der wir aufgrund der *Erfahrungen* die folgenden Eigenschaften erwarten:

1. Die Messwerte sind *symmetrisch* um ein Maximum verteilt, d. h. *betragsmäßig* gleich große positive und negative Abweichungen treten mit *gleicher* Häufigkeit (Wahrscheinlichkeit) auf.
2. Je *größer* die Abweichung eines Messwertes vom Maximum ist, umso *geringer* ist seine Häufigkeit (Wahrscheinlichkeit).  $f(x)$  ist somit eine vom Maximum nach beiden Seiten hin *monoton abfallende* Funktion.

Wir „erwarten“ daher für die Dichtefunktion  $f(x)$  der Grundgesamtheit, die als eine *hypothetische* Messreihe mit *unendlich* vielen Messwerten aufgefasst werden kann, einen Kurvenverlauf wie in Bild IV-3 dargestellt.

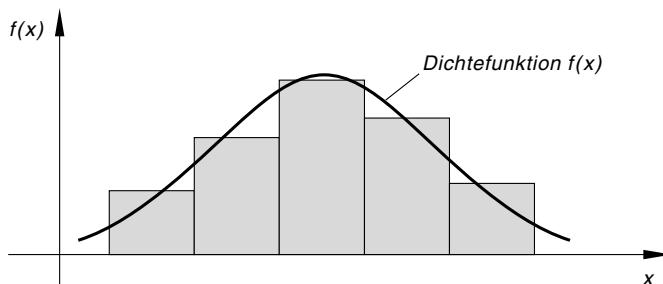


Bild IV-3 Übergang von einer *diskreten* Verteilung (Histogramm, grau unterlegt) zur *stetigen* Verteilung (Dichtefunktion  $f(x)$ )

Die „erwartete“ Verteilung erinnert dabei stark an die Dichtefunktion der *Gaußschen Normalverteilung*, die wir bereits ausführlich in Kap. II, Abschnitt 6.4 behandelt haben. In der Tat lehrt die *Erfahrung*, dass die Messwerte einer physikalisch-technischen Messgröße  $X$  in den *meisten* Fällen *annähernd normalverteilt* sind. Diese außerordentlich bedeutsame Feststellung lässt sich auch wie folgt erklären und begründen:

Jeder Messvorgang unterliegt bekanntlich einer *großen* Anzahl völlig *regelloser* und *unkontrollierbarer* kleinerer Einflüsse (z. B. Temperatur-, Luftdruck- und Luftfeuchtigkeitschwankungen, Störeinflüsse durch mechanische Erschütterungen und elektro-magnetische Felder usw.). Die beobachtete *zufällige* Messabweichung (d. h. der „zufällige Fehler“)  $Z$  setzt sich somit *additiv* aus einer großen Anzahl von „*Einzelfehlern*“ zusammen, die wir als *unabhängig* voneinander betrachten dürfen und von denen *keiner* in irgendeiner Weise dominiert. Diese „*Einzelfehler*“ können dann durch unabhängige *Zufallsvariable*  $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$  beschrieben werden. Der „*Gesamtfehler*“, d. h. die beobachtete zufällige Messabweichung lässt sich dann durch die *Summe*

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_m \quad (\text{IV-5})$$

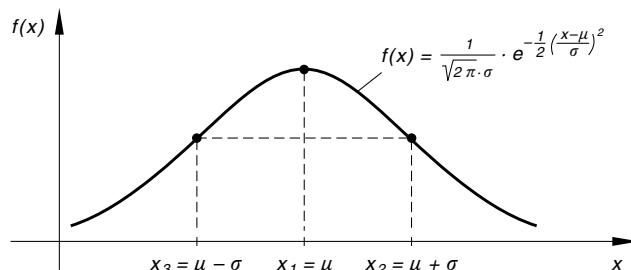
darstellen, die nach dem *Zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung* als eine *annähernd normalverteilte* Zufallsvariable (Zufallsgröße) betrachtet werden darf und zwar unabhängig von den (meist unbekannten) Verteilungen der einzelnen Summanden  $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ . Die Messgröße  $X$  kann daher im *Regelfall* als eine (annähernd) *normalverteilte* Zufallsgröße aufgefasst werden.

### Dichtefunktion $f(x)$ einer normalverteilten Messgröße

Bei allen weiteren Überlegungen gehen wir daher von einer *normalverteilten* Messgröße  $X$  mit der *normierten* Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (\text{IV-6})$$

aus. Sie besitzt den in Bild IV-4 dargestellten typischen Verlauf einer *Glockenkurve*.



**Bild IV-4** Dichtefunktion  $f(x)$  der Gaußschen Normalverteilung („Gaußsche Glockenkurve“)

Die in der Dichtefunktion der Gaußschen Normalverteilung (IV-6) enthaltenen *Kennwerte (Parameter)*  $\mu$  und  $\sigma > 0$  haben dabei die folgende Bedeutung:

- $\mu$ : Mittel- oder *Erwartungswert* der Grundgesamtheit (häufig auch „wahrer“ Wert  $x_w$  der Messgröße  $X$  genannt:  $E(X) = \mu = x_w$ )
- $\sigma$ : Standardabweichung der Grundgesamtheit ( $\sigma^2$  ist die *Varianz* der Grundgesamtheit)

Wir gehen jetzt noch etwas näher auf die beiden Verteilungsparameter  $\mu$  und  $\sigma$  ein:

### Mittel- oder Erwartungswert $E(X) = \mu$

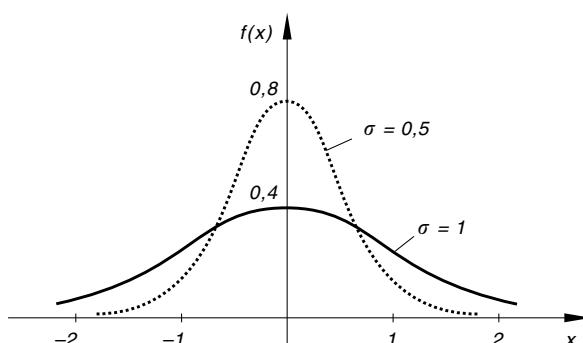
Angenommen, wir wären in der Lage, unsere Messung *beliebig oft* zu wiederholen. Dann würde in der aus *unendlich* vielen Messwerten bestehenden (hypothetischen) Messreihe

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad (\text{IV-7})$$

der spezielle Messwert  $\mu$  mit der *größten* Häufigkeit (Wahrscheinlichkeit) auftreten. Die Dichtefunktion  $f(x)$  besitzt somit an der Stelle  $x_1 = \mu$  ihr *absolutes Maximum* (Bild IV-4). Der *Mittel-* oder *Erwartungswert*  $\mu$  ist somit der „wahrscheinlichste“ Wert der Zufallsgröße (Messgröße)  $X$  und wird daher zu Recht als eine Art *Mittelwert der unendlichen Messreihe* (Grundgesamtheit) angesehen.

### Standardabweichung $\sigma$

Die Verteilungsfunktion  $f(x)$  der Normalverteilung besitzt an der Stelle  $x_1 = \mu$  ihr *absolutes Maximum* und *symmetrisch* dazu *Wendepunkte* an den Stellen  $x_{2/3} = \mu \pm \sigma$  (Bild IV-4). Um die Bedeutung der Standardabweichung  $\sigma$  besser erkennen zu können, betrachten wir den Verlauf dieser Funktion für den speziellen Mittelwert  $\mu = 0$  und verschiedene Werte des Parameters  $\sigma$ . Bild IV-5 verdeutlicht, dass die Standardabweichung  $\sigma$  im Wesentlichen „Höhe“ und „Breite“ der Dichtefunktion  $f(x)$  bestimmt.



**Bild IV-5** Die Standardabweichung  $\sigma$  bestimmt „Höhe“ (Maximum) und „Breite“ der Normalverteilungsdichtefunktion  $f(x)$

Je kleiner  $\sigma$  ist, um so stärker ist das Maximum ausgeprägt und um so steiler fällt die Gaußsche Glockenkurve nach beiden Seiten hin ab. Die Standardabweichung  $\sigma$  kann somit als ein geeignetes Maß für die Streuung der Messwerte  $x_i$  um den „wahren“ (aber unbekannten) Wert  $x_w = \mu$  angesehen werden. Die Präzision einer Messung wird somit ganz wesentlich durch den „Breiteparameter“  $\sigma$  bestimmt. Offensichtlich gilt die folgende Regel:

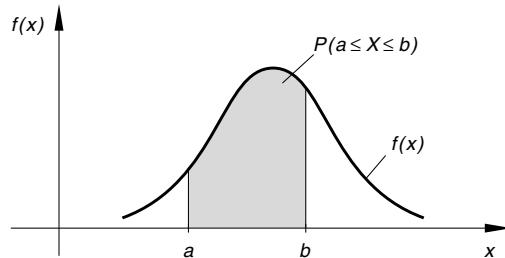
kleines  $\sigma \rightarrow$  schmale Kurve  $\rightarrow$  hohe Genauigkeit

großes  $\sigma \rightarrow$  breite Kurve  $\rightarrow$  geringe Genauigkeit

Die Wahrscheinlichkeit  $P(a \leq X \leq b)$  dafür, dass der Messwert in das Intervall  $[a; b]$  fällt, ist bekanntlich durch das Integral

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad (\text{IV-8})$$

gegeben (grau unterlegte Fläche in Bild IV-6).



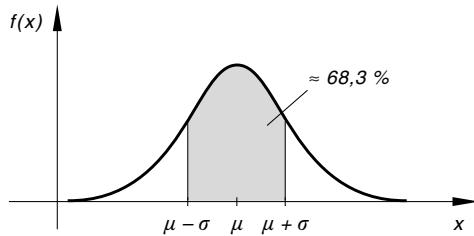
**Bild IV-6** Die grau unterlegte Fläche ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung einen im Intervall  $[a; b]$  gelegenen Messwert zu erhalten

Die Bedeutung der Standardabweichung  $\sigma$  als Genauigkeitsmaß für unsere Messungen wird auch deutlich, wenn wir die um den Mittelwert  $\mu$  symmetrisch angeordneten Intervalle

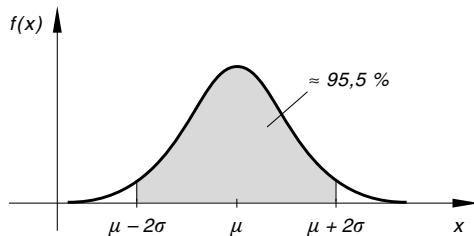
$$[\mu - \sigma; \mu + \sigma], \quad [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma] \quad \text{und} \quad [\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$$

näher betrachten (Bild IV-7).

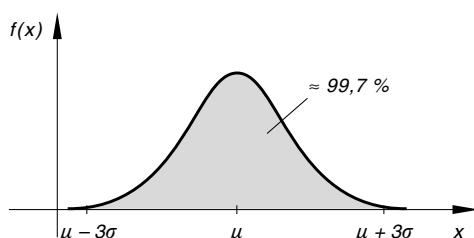
In Kap. II, Abschnitt 6.4.4 haben wir bereits gezeigt, dass sich in diesen Intervallen der Reihe nach 68,3 %, 95,5 % und 99,7 % aller Messwerte befinden. Wir erwarten daher bei 100 Einzelmessungen, dass *rund* 68 Messwerte um *höchstens eine* Standardabweichung vom Mittelwert  $\mu$  abweichen. Bei *kleinem*  $\sigma$  liegen also *rund* 68 % der Messwerte in der *unmittelbaren* Nähe des Mittelwertes  $\mu$  (Bild IV-7, a)).



a)  $\sigma$ -Bereich um den Mittelwert  $\mu$



b)  $2\sigma$ -Bereich um den Mittelwert  $\mu$



c)  $3\sigma$ -Bereich um den Mittelwert  $\mu$

**Bild IV-7** Zur Deutung der Standardabweichung  $\sigma$  als ein geeignetes Maß für die *Streuung* der einzelnen Messwerte  $x_i$  um den Mittelwert  $\mu$

Wir fassen die wichtigsten Aussagen wie folgt zusammen:

### Über die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer physikalisch-technischen Messgröße

Jeder Messvorgang unterliegt – selbst bei größter Sorgfalt und Verwendung hochwertiger Messinstrumente – stets einer *großen Anzahl* völlig *regelloser* und *unkontrollierbarer* kleinerer Störeinflüsse. Die bei Messungen beobachteten *zufälligen* Abweichungen („zufälligen Fehler“) setzen sich somit *additiv* aus zahlreichen von einander *unabhängigen* „Einzelfehlern“ zusammen, von denen jedoch *keiner* dominant ist. Aus dem *Zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung* können wir daher folgern, dass eine Messgröße  $X$  im *Regelfall* als eine (annähernd) *normalverteilte* Zufallsvariable aufgefasst werden kann, deren Verteilung sich somit durch die *normierte* Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (\text{IV-9})$$

beschreiben lässt. Bild IV-4 zeigt den typischen Verlauf dieser *Gaußschen Glockenkurve*, deren Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  die folgende Bedeutung besitzen:

- $\mu$ : *Mittel-* oder *Erwartungswert* der Grundgesamtheit (häufig auch „*wahrer*“ Wert der Messgröße  $X$  genannt)<sup>8)</sup>
- $\sigma$ : *Standardabweichung* der Grundgesamtheit
- $\sigma^2$ : *Varianz* der Grundgesamtheit

Das *absolute Maximum* der Dichtefunktion  $f(x)$  liegt bei  $x_1 = \mu$ , die „Breite“ der Kurve wird im Wesentlichen durch den Parameter  $\sigma$  bestimmt (*Wendepunkte* an den Stellen  $x_{2/3} = \mu \pm \sigma$ ; siehe hierzu Bild IV-4).

Die *Wahrscheinlichkeit* dafür, dass ein Messwert in das Intervall  $[a, b]$  fällt ist dabei durch das Integral

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad (\text{IV-10})$$

gegeben (grau unterlegte Fläche in Bild IV-6). Insbesondere gilt (siehe hierzu Bild IV-7):

- 68,3 % aller Messwerte liegen im Intervall  $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$
- 95,5 % aller Messwerte liegen im Intervall  $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$
- 99,7 %, d. h. *fast alle* Messwerte liegen im Intervall  $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$

<sup>8)</sup> Die *unendliche* Grundgesamtheit besteht aus *allen möglichen* Messwerten der Größe  $X$ .

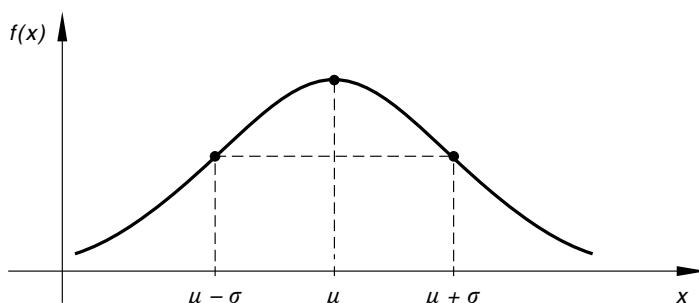
### Anmerkungen

- (1) Wir weisen nochmals darauf hin, dass diese Aussagen nur für *zufällige* Messabweichungen („zufällige Fehler“) gelten. Eventuell auftretende *systematische* Abweichungen („systematische Fehler“) werden daher stets als *vernachlässigbar* betrachtet.
- (2) Im *Normalfall* (d. h. in der *Regel*) genügen die Messwerte und Messabweichungen („Messfehler“) *näherungsweise* einer *Gaußschen Normalverteilung*. Man sagt dann: Messwerte und Messabweichungen („Messfehler“) sind nach Gauß *normalverteilt*. Wir wollen aber nicht verschweigen, dass es sich hierbei streng genommen nur um eine *Modellverteilung* handelt, die jedoch der Wirklichkeit oft sehr nahe kommt.
- (3) Es gibt auch Messreihen, die *keiner* Normalverteilung folgen. Im konkreten Fall lässt sich z. B. mit Hilfe des *Wahrscheinlichkeitspapiers* oder mit dem *Chi-Quadrat-Test* prüfen, ob eine Normalverteilung vorliegt oder nicht.

## 3 Auswertung einer Messreihe

### 3.1 Mittelwert und Standardabweichung

Gegeben sei eine aus  $n$  Messwerten bestehende Messreihe  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , von der wir voraussetzen, dass sie die in Abschnitt 2 dargelegten Eigenschaften besitzt (Messungen *gleicher* Genauigkeit, *unabhängige* Beobachtung der Messwerte, *normalverteilt* nach Gauß). Die Messgröße  $X$  genügt dabei einer *Normalverteilung* mit dem *Mittelwert*  $\mu$  und der *Standardabweichung*  $\sigma$  (Bild IV-8). Beide Parameter sind jedoch *unbekannt*. Die Aufgabe der Fehlerrechnung besteht nun darin, aus den vorgelegten Messwerten  $x_1, x_2, \dots, x_n$  „möglichst gute“ *Schätzwerte* für diese Parameter zu bestimmen.



**Bild IV-8** Dichtefunktion der Gaußschen Normalverteilung mit dem Mittelwert  $\mu$  und der Standardabweichung  $\sigma$

### Mittelwert $\bar{x}$ einer Messreihe

Da die vorliegende Messreihe im Sinne der Statistik eine *Stichprobe* darstellt, ist bekanntlich der *arithmetische Mittelwert*

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{IV-11})$$

der „beste“ *Schätzwert* für den unbekannten „wahren“ Wert (Mittelwert)  $\mu$  der Messgröße  $X$  (siehe hierzu Kap. III, Abschnitt 3.2.3). Zu diesem Ergebnis gelangt man auch durch *Ausgleichung* der streuenden Messwerte nach der von Gauß stammenden „*Methode der kleinsten Quadrate*“<sup>9)</sup>. Wir führen zu diesem Zweck zunächst die Abweichungen  $v_i$  der Messwerte  $x_i$  vom (noch zu bestimmenden) Mittelwert  $\bar{x}$  ein:

$$v_i = x_i - \bar{x} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{IV-12})$$

Diese auch als „scheinbare Fehler“ bezeichneten Größen werden nun *quadriert* und anschließend *aufaddiert*. Wir erhalten dann die noch vom (unbekannten) Mittelwert  $\bar{x}$  abhängige *Summe aller Abweichungsquadrate*:

$$S(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (\text{IV-13})$$

Der nach Gauß *günstigste* Wert für  $\bar{x}$  ist dabei derjenige, für den diese Summe ein *Minimum* annimmt:

$$S(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \rightarrow \text{Minimum} \quad (\text{IV-14})$$

Wir bestimmen  $\bar{x}$  nun so, dass die Funktion  $S(\bar{x})$  die für ein Minimum *hinreichenden* Bedingungen  $S'(\bar{x}) = 0$  und  $S''(\bar{x}) > 0$  erfüllt. Die dabei benötigten Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned} S'(\bar{x}) &= \frac{d}{d\bar{x}} \left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{d\bar{x}} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n 2(x_i - \bar{x}) \cdot (-1) = \\ &= -2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = -2 [(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x})] = \\ &= -2 [(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - n\bar{x}] = -2 \left( \sum_{i=1}^n x_i - n\bar{x} \right) \quad (\text{IV-15}) \end{aligned}$$

$$S''(\bar{x}) = \frac{d}{d\bar{x}} \left[ -2 \left( \sum_{i=1}^n x_i - n\bar{x} \right) \right] = -2(0 - n) = 2n > 0 \quad (\text{IV-16})$$

<sup>9)</sup> Diese Bezeichnung ist unglücklich gewählt. Es müsste besser heißen: „*Methode der kleinsten Quadratsumme*“. Dieses für die Fehler- und Ausgleichsrechnung *typische* Verfahren lässt sich mit Hilfe der *Maximum-Likelihood-Methode* leicht herleiten (siehe hierzu Kap. III, Abschnitt 3.3).

Aus der *notwendigen* Bedingung  $S'(\bar{x}) = 0$  folgt zunächst

$$\sum_{i=1}^n x_i - n\bar{x} = 0 \quad (\text{IV-17})$$

und damit

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad (\text{IV-18})$$

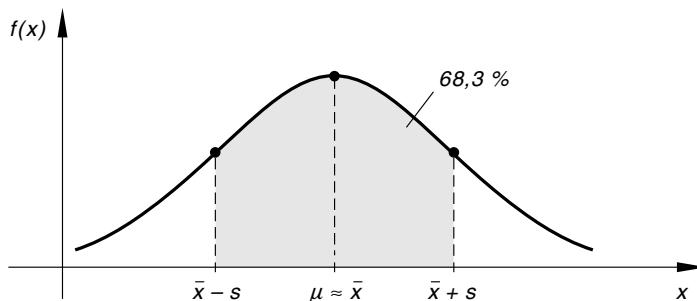
Wegen  $S''(\bar{x}) = 2n > 0$  handelt es sich dabei um das gesuchte *Minimum*. Das *arithmetische Mittel* ist demnach der „beste“ *Schätzwert* für den meist unbekannt bleibenden „wahren“ Wert der Messgröße  $X$ , d. h.  $\bar{x}$  ist der „beste“ *Schätzwert* für den Mittelwert  $\mu$  der (normalverteilten) Grundgesamtheit, die aus allen möglichen Messwerten besteht.

### Standardabweichung $s$ einer Messreihe

Die *Streuung* der einzelnen Messwerte  $x_i$  um den arithmetischen Mittelwert  $\bar{x}$  lässt sich durch die *Standardabweichung*

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n v_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (\text{IV-19})$$

charakterisieren (siehe hierzu auch Kap. III, Abschnitt 2.1). Sie ist ein Maß für die *Zuverlässigkeit* und *Genauigkeit* der *Einzelmessung*<sup>10)</sup>. Zugleich ist die Standardabweichung  $s$  der „beste“ *Schätzwert* für die unbekannte Standardabweichung  $\sigma$  der normalverteilten Grundgesamtheit. Wir können somit erwarten, dass z. B. von 100 weiteren Einzelmessungen *rund* 68 Messwerte in das Intervall mit den Grenzen  $\bar{x} - s$  und  $\bar{x} + s$  fallen (Bild IV-9).



**Bild IV-9** Rund 68,3 % aller Messwerte unterscheiden sich vom Mittelwert  $\mu \approx \bar{x}$  um höchstens eine Standardabweichung  $\sigma \approx s$

<sup>10)</sup> Die *Standardabweichung*  $s$  wurde früher auch als *mittlerer Fehler der Einzelmessung* bezeichnet.

### Standardabweichung $s_{\bar{x}}$ des Mittelwertes $\bar{x}$

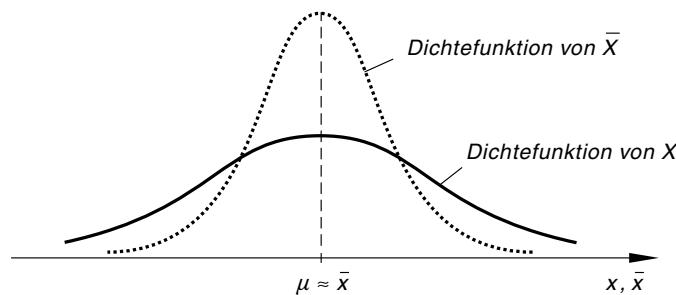
Bei der Berechnung des arithmetischen Mittelwertes  $\bar{x}$  nach Formel (IV-18) werden *alle*  $n$  Einzelmessungen in *gleicher* Weise berücksichtigt. Wir dürfen daher zu Recht erwarten, dass das arithmetische Mittel  $\bar{x}$  einen *zuverlässigeren* Schätzwert für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  liefert als *jeder* einzelne Messwert  $x_i$  für sich alleine genommen. Der arithmetische Mittelwert  $\bar{x}$  lässt sich nämlich als eine *Realisierung der normalverteilten Zufallsgröße*

$$\bar{X} = \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i \quad (\text{IV-20})$$

auffassen, die wir bereits in Kap. III (Abschnitt 3.2.3) als *Schätzfunktion* für den Mittelwert  $\mu$  kennengelernt haben<sup>11)</sup>. Wenn wir die aus *verschiedenen* Messreihen vom *gleichen* Umfang (jeweils  $n$  Einzelmessungen!) mittels der Schätzfunktion  $\bar{X}$  berechneten Mittelwerte  $\bar{x}$  miteinander vergleichen, werden wir feststellen, dass diese ebenso wie die einzelnen Messwerte um den „wahren“ Wert (Mittelwert)  $\mu$  streuen. Wir werden später zeigen, dass diese Streuung mit der *Standardabweichung*

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (\text{IV-21})$$

erfolgt, die daher als *Standardabweichung des Mittelwertes  $\bar{x}$*  bezeichnet wird. Sie liefert einen *Schätzwert* für die unbekannte Standardabweichung  $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$  der Schätzfunktion  $\bar{X}$ . Die Standardabweichung  $s_{\bar{x}}$  des Mittelwertes  $\bar{x}$  kennzeichnet die *Genauigkeit* des Mittelwertes  $\bar{x}$  und ist *kleiner* als die Standardabweichung  $s$  der Einzelmessungen (Bild IV-10). Dies bestätigt unsere Vermutung, dass der *arithmetische Mittelwert  $\bar{x}$*  sicher ein *zuverlässigeren* Schätzwert für den „wahren“ Wert  $\mu$  darstellt als ein einzelner Messwert.



**Bild IV-10** Die Standardabweichung des Mittelwertes  $\bar{x}$  ist *kleiner* als die Standardabweichung der Einzelmessung

<sup>11)</sup> Wir erinnern: Die *normalverteilten* Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  genügen alle der *gleichen* Verteilung wie die Messgröße  $X$ . Sie besitzen daher jeweils den Mittelwert  $\mu$  und die Standardabweichung  $\sigma$ . Die Zufallsvariable  $\bar{X}$  ist dann *normalverteilt* mit dem Mittelwert  $\mu_{\bar{X}} = \mu$  und der Standardabweichung  $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$ .

Wir fassen diese Ergebnisse wie folgt zusammen:

### Mittelwert und Standardabweichung einer normalverteilten Messreihe

Als „Wert“ (Messwert) einer *normalverteilten* physikalisch-technischen Größe  $X$  wird der aus  $n$  unabhängigen Einzelmessungen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  gebildete *arithmetische Mittelwert*

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{IV-22})$$

betrachtet. Er ist der „beste“ *Schätzwert* für den (unbekannten) „wahren“ Wert (Mittelwert)  $\mu$  der Messgröße  $X$ .

Ein geeignetes Maß für die *Streuung* der Einzelmessungen  $x_i$  ist die *Standardabweichung*

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (\text{IV-23})$$

(auch *Standardabweichung der Messreihe* genannt).

Die *Standardabweichung*  $s_{\bar{x}}$  des Mittelwertes  $\bar{x}$  beträgt

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (\text{IV-24})$$

und beschreibt die *Streuung* der aus verschiedenen Messreihen erhaltenen Mittelwerte  $\bar{x}$  um den „wahren“ Wert (Mittelwert)  $\mu$ .

#### Anmerkungen

- (1) Eine *Kontrolle* der Mittelwertbildung nach Gleichung (IV-22) ermöglicht die Summe der Abweichungen, die stets *verschwindet*:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n v_i &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i - \underbrace{\sum_{i=1}^n \bar{x}}_{n\bar{x}} = \sum_{i=1}^n x_i - n\bar{x} = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i - n \left( \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \quad (\text{IV-25}) \end{aligned}$$

- (2) Man beachte, dass die Standardabweichung  $s$  mit der *Summe der Abweichungsquadrate* gebildet wird. Diese besitzt für den arithmetischen Mittelwert  $\bar{x}$  ihren *kleinsten* Wert („*Methode der kleinsten Quadrate*“).
- (3) Die Standardabweichung  $s$  einer Messreihe wird sich nur *geringfügig* ändern, wenn man die Anzahl  $n$  der Einzelmessungen *vergrößert*. Daher gilt für die Standardabweichung  $s_{\bar{x}}$  des Mittelwertes  $\bar{x}$  *näherungsweise*:

$$s_{\bar{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (\text{IV-26})$$

Die *Genauigkeit* des Messergebnisses lässt sich daher prinzipiell durch eine *Erhöhung* der Anzahl  $n$  der Einzelmessungen verbessern. Aus *Zeit-* und *Kostengründen* ist dies jedoch in der Praxis meist *nicht* möglich.

- (4) Bei unseren Überlegungen sind wir von einer *Normalverteilung* der Messwerte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (\text{IV-27})$$

ausgegangen. Der Mittelwert  $\bar{x}$  ist dann als *Schätz- oder Näherungswert* des Mittel- oder Erwartungswertes  $\mu$  der Grundgesamtheit aller möglichen Messwerte aufzufassen. Die Standardabweichung  $s$  der Einzelmessung liefert einen *Schätz- oder Näherungswert* für die Standardabweichung  $\sigma$  der Normalverteilung, ebenso ist  $s^2$  ein *Schätzwert* für die Varianz  $\sigma^2$ . Es gilt somit:

$$\mu \approx \bar{x}, \quad \sigma \approx s, \quad \sigma^2 \approx s^2 \quad (\text{IV-28})$$

- (5) Die Standardabweichung  $s$  der *Einzelmessung* wurde früher auch als „mittlerer Fehler der Einzelmessung“, die Standardabweichung  $s_{\bar{x}}$  des *Mittelwertes* auch als „mittlerer Fehler des Mittelwertes“ bezeichnet.

## ■ Beispiele

- (1) Wir bestimmen anhand des folgenden Messprotokolls einer Widerstandsmessung den *arithmetischen Mittelwert*  $\bar{R}$  sowie die *Standardabweichungen*  $s_R$  und  $s_{\bar{R}}$  der *Einzelmessung* bzw. des *Mittelwertes*:

$i$	$R_i$ $\Omega$	$\frac{R_i - \bar{R}}{\Omega}$	$\frac{(R_i - \bar{R})^2}{\Omega^2}$
1	151,5	1,2	1,44
2	149,7	-0,6	0,36
3	149,1	-1,2	1,44
4	150,3	0	0
5	151,3	1,0	1,00
6	150,9	0,6	0,36
7	150,6	0,3	0,09
8	149,8	-0,5	0,25
9	149,4	-0,9	0,81
10	150,4	0,1	0,01
$\sum$	1503,0	0	5,76

*Arithmetischer Mittelwert:*

$$\bar{R} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} R_i = \frac{1}{10} \cdot 1503,0 \Omega = 150,3 \Omega$$

*Standardabweichung der Einzelmessung:*

$$s_R = \sqrt{\frac{1}{10-1} \cdot \sum_{i=1}^{10} (R_i - \bar{R})^2} = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot 5,76 \Omega^2} = 0,8 \Omega$$

*Standardabweichung des Mittelwertes:*

$$s_{\bar{R}} = \frac{s_R}{\sqrt{n}} = \frac{0,8 \Omega}{\sqrt{10}} = 0,25 \Omega \approx 0,3 \Omega$$

- (2) In einem Versuch wurde der *Durchmesser*  $d$  einer zylindrischen Scheibe insgesamt 6-mal mit gleicher Genauigkeit gemessen. Es ergaben sich dabei die folgenden Werte:

$$5,61 \text{ cm}, \quad 5,59 \text{ cm}, \quad 5,50 \text{ cm}, \quad 5,68 \text{ cm}, \quad 5,65 \text{ cm}, \quad 5,52 \text{ cm}$$

Man berechne den *Mittelwert* des Durchmessers sowie die *Standardabweichung* der *Einzelmessung* und des *Mittelwertes*.

*Lösung:* Aus den Messdaten bilden wir schrittweise die folgende Tabelle:

$i$	$\frac{d_i}{\text{cm}}$	$\frac{d_i - \bar{d}}{\text{cm}}$	$\frac{(d_i - \bar{d})^2 \cdot 10^4}{\text{cm}^2}$
1	5,61	0,018	3,24
2	5,59	-0,002	0,04
3	5,50	-0,092	84,64
4	5,68	0,088	77,44
5	5,65	0,058	33,64
6	5,52	-0,072	51,84
$\sum$	33,55	-0,002	250,84

$$\overbrace{\phantom{000000}}^{\approx 0}$$

*Mittelwert des Durchmessers:*

$$\bar{d} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^6 d_i = \frac{1}{6} \cdot 33,55 \text{ cm} = 5,592 \text{ cm} \approx 5,59 \text{ cm}$$

*Standardabweichung der Einzelmessung:*

$$s_d = \sqrt{\frac{1}{6-1} \cdot \sum_{i=1}^6 (d_i - \bar{d})^2} = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot 250,84 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2} = 0,07 \text{ cm}$$

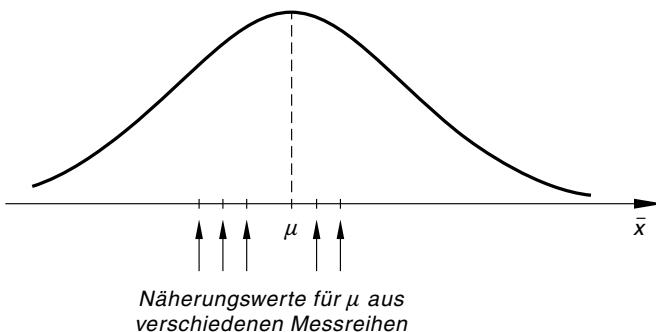
*Standardabweichung des Mittelwertes:*

$$s_{\bar{d}} = \frac{s_d}{\sqrt{n}} = \frac{0,07 \text{ cm}}{\sqrt{6}} = 0,03 \text{ cm}$$

■

### 3.2 Vertrauensbereich für den Mittelwert $\mu$ , Messunsicherheit, Messergebnis

Der aus einer Messreihe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ermittelte arithmetische Mittelwert  $\bar{x}$  ist – wie wir inzwischen wissen – der „beste“ Schätz- oder Näherungswert für den (unbekannten) „wahren“ Wert (Mittelwert)  $\mu$  der normalverteilten Messgröße  $X$ . Wir können daher nicht erwarten, dass  $\bar{x}$  und  $\mu$  übereinstimmen, da der arithmetische Mittelwert  $\bar{x}$  immer das Ergebnis einer Zufallsstichprobe ist und sich somit von Messreihe zu Messreihe (wenn auch i. Allg. nur geringfügig) verändern wird. Die aus verschiedenen Messreihen vom gleichen Umfang  $n$  bestimmten Mittelwerte  $\bar{x}$  streuen also um den Mittelwert  $\mu$ , wie in Bild IV-11 verdeutlicht.



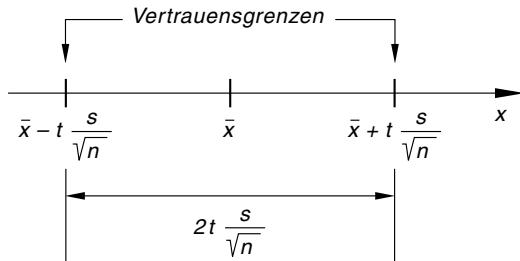
**Bild IV-11** Die aus verschiedenen Messreihen ermittelten Mittelwerte  $\bar{x}$  streuen um den (unbekannten) Mittelwert  $\mu$  der normalverteilten Messgröße

#### Vertrauensbereich für den Mittelwert $\mu$

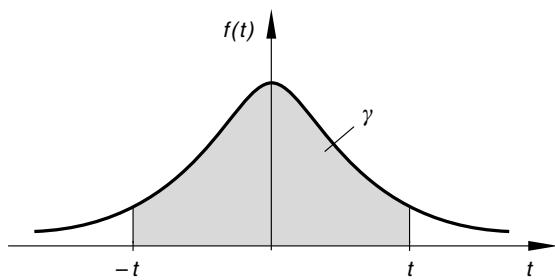
Wir sind jedoch in der Lage, ein um den arithmetischen Mittelwert  $\bar{x}$  symmetrisches Intervall anzugeben, das den unbekannten Mittelwert  $\mu$  mit einer vorgegebenen (großen) Wahrscheinlichkeit  $P = \gamma$  überdeckt. Genau dieses Problem aber haben wir bereits in Kap. III, Abschnitt 3.4.2 und 3.4.3 ausführlich erörtert. Es handelt sich nämlich um die Konstruktion eines Vertrauensintervales, in dem der unbekannte Mittelwert  $\mu$  mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit  $\gamma$  vermutet wird<sup>12)</sup>. Bei unbekannter Standardabweichung  $\sigma$  der normalverteilten Grundgesamtheit (dies ist der Normalfall) ergaben sich dabei die folgenden Vertrauengrenzen (Bild IV-12):

$$\begin{aligned} \text{Untere Vertrauengrenze: } & \bar{x} - t \frac{s}{\sqrt{n}} \\ \text{Obere Vertrauengrenze: } & \bar{x} + t \frac{s}{\sqrt{n}} \end{aligned} \tag{IV-29}$$

<sup>12)</sup> Die vorgegebene Wahrscheinlichkeit wird in diesem Zusammenhang auch als *Vertrauensniveau* oder als *statistische Sicherheit* bezeichnet.

**Bild IV-12**Vertrauensbereich für den Mittelwert  $\mu$ 

$s$  ist dabei die *Standardabweichung* der Messreihe,  $n$  die *Anzahl* der Einzelmessungen und  $t$  ein *Zahlfaktor (Parameter)*, der noch von dem gewählten Vertrauensniveau (hier auch statistische Sicherheit genannt)  $P = \gamma$  und der Anzahl  $n$  der Einzelmessungen abhängt. Der Parameter  $t$  genügt der Bedingung  $P(-t \leq T \leq t) = \gamma$  (grau unterlegte Fläche in Bild IV-13). Dabei ist  $T$  eine Zufallsvariable, die der *t-Verteilung von Student* mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden folgt (siehe hierzu Kap. II, Abschnitt 8.2).

**Bild IV-13**Dichtefunktion der *t*-Verteilung

Die nachfolgende Tabelle 1 enthält die benötigten Werte für den Parameter  $t$  in Abhängigkeit von der Anzahl  $n$  der Einzelmessungen für die statistischen Sicherheiten

$$\gamma = 68,3\%, \quad \gamma = 90\%, \quad \gamma = 95\% \quad \text{und} \quad \gamma = 99\%.$$

Der *Vertrauensbereich* für den unbekannten Mittelwert  $\mu$  lautet damit:

$$\bar{x} - t \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (\text{IV-30})$$

Mit einem *Vertrauen* von  $\gamma$  erwarten wir daher, dass der (unbekannte) „wahre“ Wert  $\mu$  der Messgröße  $X$  in diesem Intervall liegt.

### Messunsicherheit und Messergebnis

In der Fehlerrechnung ist es üblich, diesen *Vertrauensbereich* wie folgt anzugeben:

$$\text{Messwert von } X = \bar{x} \pm t \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (\text{IV-31})$$

Verkürzt schreiben wir dann für das *Messergebnis*:

$$x = \bar{x} \pm t \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (\text{IV-32})$$

**Tabelle 1:** Werte für den Zahlenfaktor (Parameter)  $t$  in Abhängigkeit von der Anzahl  $n$  der Messwerte und dem gewählten Vertrauensniveau  $\gamma$

Anzahl $n$ der Messwerte	Vertrauensniveau (statistische Sicherheit)			
	$\gamma = 68,3\%$	$\gamma = 90\%$	$\gamma = 95\%$	$\gamma = 99\%$
2	1,84	6,31	12,71	63,66
3	1,32	2,92	4,30	9,93
4	1,20	2,35	3,18	5,84
5	1,15	2,13	2,78	4,60
6	1,11	2,02	2,57	4,03
7	1,09	1,94	2,45	3,71
8	1,08	1,90	2,37	3,50
9	1,07	1,86	2,31	3,36
10	1,06	1,83	2,26	3,25
15	1,04	1,77	2,14	2,98
20	1,03	1,73	2,09	2,86
30	1,02	1,70	2,05	2,76
50	1,01	1,68	2,01	2,68
100	1,00	1,66	1,98	2,63
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\infty$	1,00	1,65	1,96	2,58

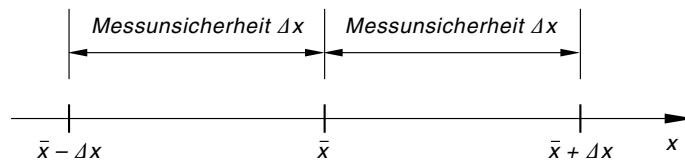
Die *halbe* Breite des Vertrauensbereiches, d. h. der *Abstand* zwischen der unteren bzw. oberen Vertrauengrenze und dem arithmetischen Mittelwert  $\bar{x}$  wird als *Messunsicherheit* bezeichnet und durch das Symbol  $\Delta x$  gekennzeichnet (Bild IV-14)<sup>13)</sup>. Somit ist

$$\Delta x = t \frac{s}{\sqrt{n}} \quad \text{oder auch} \quad \Delta x = t s_{\bar{x}} \quad (\text{IV-33})$$

(mit  $s_{\bar{x}} = s/\sqrt{n}$ ) und das *Messergebnis* lässt sich daher auch in der Form

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \quad (\text{IV-34})$$

angeben.



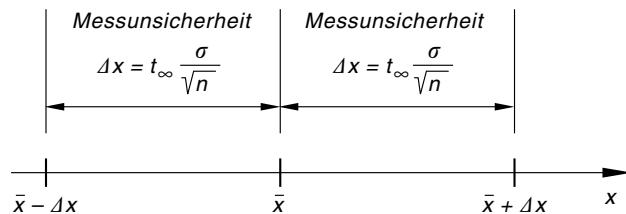
**Bild IV-14**  
Zum Begriff  
der Messunsicherheit

Ist die Standardabweichung  $\sigma$  der normalverteilten Grundgesamtheit jedoch *bekannt* (z. B. aufgrund der *Erfahrungen* aus früheren Messungen), so ist bei der Berechnung der Vertrauengrenzen des Mittelwertes  $\mu$  statt der *t*-Verteilung von „Student“ die *Standardnormalverteilung* zu nehmen. Der Faktor  $t$  in den Gleichungen (IV-32) und (IV-33) ist dann nur noch von dem gewählten *Vertrauensniveau*  $P = \gamma$  abhängig und entspricht daher dem „*Grenzwertt\_{\infty} (d. h. dem *t*-Wert für  $n \rightarrow \infty$ ) in der *letzten* (grau unterlegten) Zeile der Tabelle 1. Das *Messergebnis* lautet daher in diesem *Sonderfall* wie folgt (Bild IV-15):*

$$x = \bar{x} \pm \Delta x = \bar{x} \pm t_{\infty} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{IV-35})$$

Die *Messunsicherheit* beträgt somit

$$\Delta x = t_{\infty} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{IV-36})$$



**Bild IV-15** Zur Angabe eines Messergebnisses bei bekannter Standardabweichung  $\sigma$

<sup>13)</sup> Die *Messunsicherheit* wird häufig auch durch das Symbol  $u$  gekennzeichnet.

Die wichtigsten Ergebnisse fassen wir jetzt wie folgt zusammen:

### Auswertung einer Messreihe

Das *Messergebnis* einer aus  $n$  unabhängigen Messwerten *gleicher* Genauigkeit bestehenden *normalverteilten* Messreihe  $x_1, x_2, \dots, x_n$  wird in der Form

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \quad (\text{IV-37})$$

angegeben (Bild IV-14). Dabei ist  $\bar{x}$  der *arithmetische Mittelwert*

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad (\text{IV-38})$$

und  $\Delta x$  die *Messunsicherheit*

$$\Delta x = t \frac{s}{\sqrt{n}} = t s_{\bar{x}} \quad (\text{IV-39})$$

Ferner bedeuten:

$s$ : *Standardabweichung der Messreihe*

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (\text{IV-40})$$

$s_{\bar{x}}$ : *Standardabweichung des Mittelwertes  $\bar{x}$*

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (\text{IV-41})$$

$n$ : *Anzahl* der Messwerte

$t$ : *Zahlenfaktor*, der noch vom gewählten *Vertrauensniveau*  $\gamma$  und der *Anzahl*  $n$  der Messwerte abhängt und aus der Tabelle 1 entnommen wird (*t-Verteilung* mit  $f = n - 1$  Freiheitsgraden für  $\gamma = 68,3\%$ ,  $\gamma = 90\%$ ,  $\gamma = 95\%$  und  $\gamma = 99\%$ )

Die *Standardabweichung*  $s$  der Messreihe ist dabei ein Maß für die *Streuung* der Einzelwerte  $x_i$  um den arithmetischen Mittelwert  $\bar{x}$ . Durch die *Messunsicherheit*  $\Delta x$  werden die Grenzen eines *Vertrauensbereiches* festgelegt, in dem der unbekannte Erwartungswert  $\mu$  (d. h. der „wahre“ Wert der Messgröße  $X$ ) mit der gewählten Wahrscheinlichkeit  $P = \gamma$  vermutet wird (siehe hierzu die Bilder IV-12 und IV-14).

### Anmerkungen

- (1)  $\gamma$  ist die *Wahrscheinlichkeit* dafür, dass der unbekannte Mittelwert  $\mu$  innerhalb der angegebenen Vertrauengrenzen  $\bar{x} \pm \Delta x$  liegt. In Naturwissenschaft und Technik verwendet man meist  $\gamma = 95\%$  oder  $\gamma = 99\%$ . Häufig setzt man auch  $\gamma = 1 - \alpha$ , wobei  $\alpha$  die sog. *Irrtumswahrscheinlichkeit* bedeutet. Diese muss dabei in Kauf genommen werden, um überhaupt ein Vertrauensintervall angeben zu können! Dabei gilt: Je kleiner die Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  ist, um so breiter wird das Vertrauensintervall.
- (2) Ist die Standardabweichung  $\sigma$  der Grundgesamtheit *bekannt* (z. B. aus früheren Messungen), so ist der Zahlenfaktor  $t$  in Gleichung (IV-39) durch den „Grenzwert“  $t_\infty$  zu ersetzen (*grau* unterlegte letzte Zeile in der Tabelle 1).
- (3) Die Angabe des *Messergebnisses* in der Form

$$x = \bar{x} \pm \Delta x = \bar{x} \pm t \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (\text{IV-42})$$

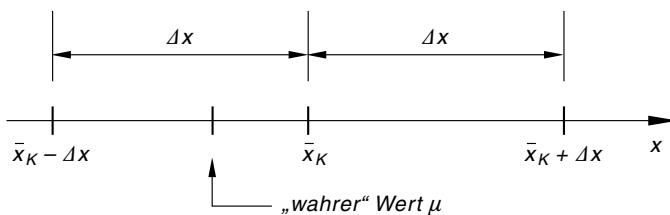
beruht auf der Voraussetzung, dass weder *grobe* Fehler noch *systematische* Abweichungen auftreten. In der Praxis jedoch lassen sich *systematische* Messabweichungen nie ganz ausschließen. Werden diese aber als solche erkannt, so muss der arithmetische Mittelwert  $\bar{x}$  durch ein *Korrekturglied*  $K$  berichtet werden. Der sog. *korrigierte* oder *berichtigte* Mittelwert  $\bar{x}_K$  lautet damit:

$$\bar{x}_K = \bar{x} + K \quad (\text{IV-43})$$

Das *endgültige* Messergebnis wird dann in der Form

$$x = \bar{x}_K \pm \Delta x = (\bar{x} + K) \pm \Delta x \quad (\text{IV-44})$$

angegeben, wobei  $\Delta x$  die *Messunsicherheit* bedeutet, die sich aus einer *Zufallskomponente*  $(\Delta x)_z = t \frac{s}{\sqrt{n}}$  und einer *systematischen* Komponente  $(\Delta x)_s$  zusammensetzt. Der „wahre“ Wert  $\mu$  der Messgröße  $X$  wird dann mit der gewählten Wahrscheinlichkeit  $P = \gamma$  in dem Vertrauensbereich mit den Grenzen  $\bar{x}_K - \Delta x$  und  $\bar{x}_K + \Delta x$  vermutet (Bild IV-16).



**Bild IV-16** Korrigiertes Messergebnis

Der an näheren Einzelheiten interessierte Leser wird auf die DIN-NORM 1319 (Teil 3) verwiesen.

- (4) Ist die Verteilung einer Messgröße jedoch *unbekannt*, so ist es *nicht* möglich, für den Erwartungswert  $\mu$  einen Vertrauensbereich (verbunden mit einer Wahrscheinlichkeitsaussage) anzugeben. Man setzt dann meist für die *Messunsicherheit*

$$\Delta x = (\Delta x)_z = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (\text{IV-45})$$

und gibt das *Messergebnis* in der Form

$$x = \bar{x} \pm \Delta x = \bar{x} \pm (\Delta x)_z = \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (\text{IV-46})$$

an.

- (5) In der Fehlerrechnung wird noch zwischen *absoluten*, *relativen* und *prozentualen* „Fehlern“ (Messabweichungen, Messunsicherheiten) unterschieden. *Absolute* „Fehler“ stimmen mit der Messgröße  $X$  in *Dimension* und *Einheit* überein. *Relative* und *prozentuale* „Fehler“ sind dagegen *dimensionslose* Größen. Sie werden wie folgt berechnet:

$$\text{relativer „Fehler“} = \left| \frac{\text{absoluter „Fehler“}}{\text{Mittelwert } \bar{x}} \right|$$

$$\text{prozentualer „Fehler“} = (\text{relativer „Fehler“}) \cdot 100 \%$$

## ■ Beispiele

- (1) Für die *Schwingungsdauer*  $T$  eines Fadenpendels ergaben sich folgende Messwerte gleicher Genauigkeit:

$$1,254 \text{ s}, \quad 1,260 \text{ s}, \quad 1,250 \text{ s}, \quad 1,251 \text{ s}, \quad 1,245 \text{ s}, \quad 1,258 \text{ s}$$

Wir berechnen zunächst den *Mittelwert* und die *Standardabweichung* dieser aus 6 Einzelmessungen bestehenden Messreihe:

$i$	$\frac{T_i}{\text{s}}$	$\frac{T_i - \bar{T}}{\text{s}}$	$\frac{(T_i - \bar{T})^2 \cdot 10^6}{\text{s}^2}$
1	1,254	0,001	1
2	1,260	0,007	49
3	1,250	-0,003	9
4	1,251	-0,002	4
5	1,245	-0,008	64
6	1,258	0,005	25
$\sum$	7,518	0	152

*Arithmetischer Mittelwert:*

$$\bar{T} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^6 T_i = \frac{1}{6} \cdot 7,518 \text{ s} = 1,253 \text{ s}$$

*Standardabweichung der Einzelmessung:*

$$s = \sqrt{\frac{1}{6-1} \cdot \sum_{i=1}^6 (T_i - \bar{T})^2} = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot 152 \cdot 10^{-6} \text{ s}^2} = \\ = 5,51 \cdot 10^{-3} \text{ s} \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 0,006 \text{ s}$$

Wir bestimmen jetzt ein *Vertrauensintervall* für den (unbekannten) „wahren“ Wert der Messgröße  $T$  auf dem *Vertrauensniveau*  $\gamma = 95\%$ . Für die *Messunsicherheit*  $\Delta T$  erhalten wir nach Formel (IV-39) mit  $s = 0,006 \text{ s}$ ,  $n = 6$  und dem aus der Tabelle 1 entnommenen Parameterwert  $t = 2,57$ :

$$\Delta T = t \frac{s}{\sqrt{n}} = 2,57 \cdot \frac{0,006 \text{ s}}{\sqrt{6}} = 0,006 \text{ s}$$

Die *Vertrauengrenzen* liegen daher bei:

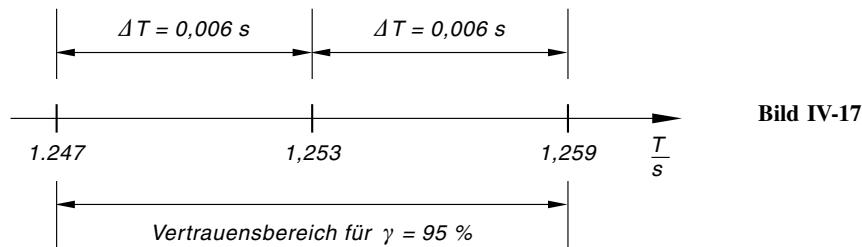
$$\text{Untere Vertrauengrenze: } \bar{T} - \Delta T = (1,253 - 0,006) \text{ s} = 1,247 \text{ s}$$

$$\text{Obere Vertrauengrenze: } \bar{T} + \Delta T = (1,253 + 0,006) \text{ s} = 1,259 \text{ s}$$

Das *Messergebnis* lautet damit wie folgt:

$$T = (1,253 \pm 0,006) \text{ s}$$

Der „wahre“ Wert von  $T$  liegt daher mit einem *Vertrauen* von 95 % zwischen 1,247 s und 1,259 s (Bild IV-17).



- (2) Die *Kapazität* eines Kondensators wurde 20-mal gemessen. Die Auswertung der Messreihe ergab dabei eine *mittlere Kapazität* von  $\bar{C} = 56,8 \mu\text{F}$  und eine *Standardabweichung* von  $s = 1,9 \mu\text{F}$ .

- Wie lauten die *Vertrauengrenzen* für den „wahren“ Wert (Mittelwert) bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha_1 = 1\%$ ?
- Wie ändern sich diese Grenzen, wenn man die *größere* Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha_2 = 5\%$  in Kauf nehmen will?

*Lösung:*

- Wir berechnen zunächst die *Messunsicherheit* nach Formel (IV-39). Mit  $n = 20$ ,  $s = 1,9 \mu F$  und dem Parameterwert  $t_1 = 2,86$  (aus der Tabelle 1 entnommen für  $\gamma_1 = (100 - \alpha_1)\% = (100 - 1)\% = 99\%$  und  $n = 20$ ) erhalten wir:

$$\Delta C = t_1 \frac{s}{\sqrt{n}} = 2,86 \cdot \frac{1,9 \mu F}{\sqrt{20}} = 1,2 \mu F$$

Die *Vertrauengrenzen* liegen damit für das gewählte Vertrauensniveau von 99 % bei:

$$\text{Untere Vertrauengrenze: } \bar{C} - \Delta C = (56,8 - 1,2) \mu F = 55,6 \mu F$$

$$\text{Obere Vertrauengrenze: } \bar{C} + \Delta C = (56,8 + 1,2) \mu F = 58,0 \mu F$$

Das *Messergebnis* lautet daher wie folgt (Bild IV-18):

$$C = (56,8 \pm 1,2) \mu F$$

- Bei der *größeren* Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha_2 = 5\%$  liegen die *Vertrauengrenzen näher zusammen*. Jetzt ist  $t_2 = 2,09$  (aus der Tabelle 1 entnommen für  $\gamma_2 = (100 - \alpha_2)\% = (100 - 5)\% = 95\%$  und  $n = 20$ ). Wir erhalten diesmal eine *Messunsicherheit* von

$$\Delta C = t_2 \frac{s}{\sqrt{n}} = 2,09 \cdot \frac{1,9 \mu F}{\sqrt{20}} = 0,9 \mu F$$

und damit das folgende *Messergebnis*:

$$C = (56,8 \pm 0,9) \mu F$$

Die *Vertrauengrenzen* liegen jetzt bei  $55,9 \mu F$  und  $57,7 \mu F$  (Bild IV-18).

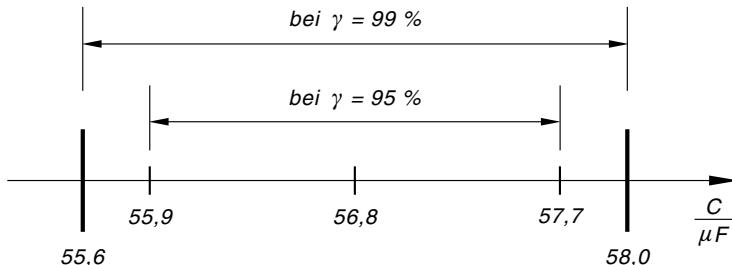


Bild IV-18

## 4 „Fehlerfortpflanzung“ nach Gauß

### 4.1 Ein einführendes Beispiel

Die Schwingungsdauer  $T$  eines reibungsfrei schwingenden Federpendels (Feder-Masse-Schwingers) hängt bekanntlich wie folgt von der Federkonstanten  $c$  und der Schwingungsmasse  $m$  ab (Bild IV-19):

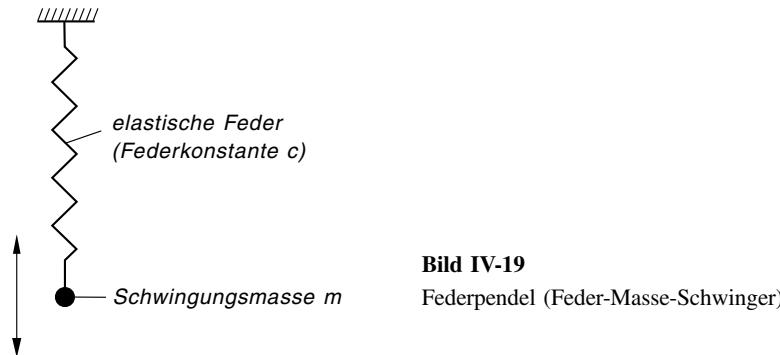
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \quad (\text{IV-47})$$

Durch Auflösen nach  $c$  erhalten wir hieraus die Funktion

$$c = f(m; T) = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{T^2} \quad (\text{IV-48})$$

aus der sich die Federkonstante berechnen lässt, wenn die Werte für Masse und Schwingungsdauer bekannt sind. Wir stellen uns daher die folgende Aufgabe:

Die *unbekannte* Federkonstante  $c$  des Federpendels soll aus Messungen der Schwingungsmasse  $m$  und der Schwingungsdauer  $T$  bestimmt werden. Die Federkonstante  $c$  wird also *nicht direkt* gemessen, sondern auf *indirektem* Wege aus den Messwerten von  $m$  und  $T$  *berechnet*. Man spricht daher in diesem Zusammenhang auch von *indirekter* oder *vermittelnder Beobachtung*.



Im Sinne der Statistik können wir die Messgrößen  $m$  und  $T$  als voneinander *unabhängige* und *normalverteilte Zufallsgrößen* auffassen. Masse  $m$  und Schwingungsdauer  $T$  werden nun *unabhängig* voneinander mehrmals gemessen.

Die Auswertung der dabei erhaltenen Messreihen liefert uns die folgenden Kennwerte:

$\bar{m}, \bar{T}$ : Mittelwerte der Messgrößen  $m$  und  $T$

$s_m, s_T$ : Standardabweichungen der Einzelmessungen beider Messgrößen

$s_{\bar{m}}, s_{\bar{T}}$ : Standardabweichungen der beiden Mittelwerte  $\bar{m}$  und  $\bar{T}$

Unser Interesse gilt dann den folgenden Fragestellungen:

- (1) Wie berechnet man den *Mittelwert*  $\bar{c}$  der unbekannten Federkonstanten  $c$ , d. h. den *Mittelwert*  $\bar{c}$  der von den beiden Messgrößen  $m$  und  $T$  abhängigen Zufallsgröße  $c = f(m; T)$ ?
- (2) Wie lässt sich die *Standardabweichung*  $s_c$  der abhängigen Größe  $c$  aus den Standardabweichungen  $s_m$  und  $s_T$  der beiden unabhängigen Messgrößen  $m$  und  $T$  bestimmen?
- (3) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den entsprechenden *Standardabweichungen* der *Mittelwerte*?
- (4) Wie lässt sich die *Unsicherheit* des indirekt bestimmten Mittelwertes  $\bar{c}$  aus den Unsicherheiten der Messungen von  $m$  und  $T$  ermitteln?

Mit den soeben an einem konkreten Beispiel angeschnittenen Fragestellungen werden wir uns in den nächsten beiden Abschnitten ausführlich auseinandersetzen.

## 4.2 Mittelwert einer „indirekten“ Messgröße

In den Anwendungen stellt sich häufig das Problem, den *Wert* einer Größe  $Z$  zu bestimmen, die noch von zwei weiteren voneinander *unabhängigen* und *normalverteilten* Größen  $X$  und  $Y$  abhängig ist. Der funktionale Zusammenhang zwischen den drei Zufallsvariablen  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  sei *bekannt* und in Form einer expliziten Funktionsgleichung

$$Z = f(X; Y) \quad (\text{IV-49})$$

gegeben. Die dann ebenfalls normalverteilte *abhängige* Größe  $Z$  soll jedoch nicht direkt gemessen werden, sondern auf *indirektem* Wege aus den Messwerten der beiden unabhängigen Größen  $X$  und  $Y$  unter Verwendung der Funktionsgleichung  $Z = f(X; Y)$  *berechnet* werden. In vielen Fällen sind nämlich die Größen  $X$  und  $Y$  der Messung *besser zugänglich* als die von ihnen abhängige Größe  $Z = f(X; Y)$ . Man spricht daher in diesem Zusammenhang auch von einer *indirekten* oder *vermittelnden* Beobachtung. Dabei sind  $X$  und  $Y$  die sog. *Eingangsgrößen* und  $Z = f(X; Y)$  die *Ausgangs-* oder *Ergebnisgröße*.

### ■ Beispiel

Die Oberfläche  $A$  eines (geschlossenen) Zylinders lässt sich durch Messung von Zylinderradius  $r$  und Zylinderhöhe  $h$  anhand der Formel

$$A = f(r; h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

leicht bestimmen. Diese „indirekte“ Messmethode ist dabei wesentlich *bequemer* als eine *direkte* Messung der Zylinderoberfläche  $A$ , da die beiden Eingangsgrößen  $r$  und  $h$  der Messung besser zugänglich sind als die von ihnen abhängige Ausgangsgröße  $A$ .

Wir wollen jetzt zeigen, wie sich der gesuchte Mittelwert  $\bar{z}$  der Ausgangsgröße  $Z$  aus den Mittelwerten  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  der beiden Eingangsgrößen  $X$  und  $Y$  bestimmen lässt. Dabei gehen wir von den Messreihen

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad \text{und} \quad y_1, y_2, \dots, y_n \quad (\text{IV-50})$$

aus, die den *gleichen* Umfang  $n$  besitzen<sup>14)</sup>. Ihre Mittelwerte  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  sind dann durch die Gleichungen

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{und} \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i \quad (\text{IV-51})$$

definiert. Die einzelnen Messwerte besitzen vom jeweils zugehörigen Mittelwert die folgenden *Abweichungen* (auch „*scheinbare*“ Fehler oder „*Verbesserungen*“ genannt):

$$u_i = x_i - \bar{x} \quad \text{und} \quad v_i = y_i - \bar{y} \quad (\text{IV-52})$$

Diese Beziehungen lösen wir nach  $x_i$  bzw.  $y_i$  auf:

$$x_i = \bar{x} + u_i \quad \text{und} \quad y_i = \bar{y} + v_i \quad (\text{IV-53})$$

Durch Einsetzen der Messwerte  $x_i, y_i$  in die Funktionsgleichung  $z = f(x; y)$  erhalten wir für die abhängige Größe  $Z$  insgesamt  $n$  „*indirekte*“ *Messwerte*

$$z_i = f(x_i; y_i) = f(\bar{x} + u_i; \bar{y} + v_i) \quad (\text{IV-54})$$

Ihre Differenzen  $w_i$  zum Wert  $f(\bar{x}; \bar{y})$  betragen dann

$$\begin{aligned} w_i &= z_i - f(\bar{x}; \bar{y}) = f(x_i; y_i) - f(\bar{x}; \bar{y}) = \\ &= f(\bar{x} + u_i; \bar{y} + v_i) - f(\bar{x}; \bar{y}) \end{aligned} \quad (\text{IV-55})$$

und dürfen für *kleine* Abweichungen („*Fehler*“)  $u_i$  und  $v_i$  in guter Näherung durch die *totalen Differentiale*

$$dz_i = f_x(\bar{x}; \bar{y}) u_i + f_y(\bar{x}; \bar{y}) v_i \quad (\text{IV-56})$$

ersetzt werden, wobei  $f_x(\bar{x}; \bar{y})$  und  $f_y(\bar{x}; \bar{y})$  die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion  $z = f(x; y)$  an der Stelle  $x = \bar{x}$ ,  $y = \bar{y}$  bedeuten. Somit gilt also *näherungsweise*  $w_i = dz_i$ , d. h.

$$z_i - f(\bar{x}; \bar{y}) = f(x_i; y_i) - f(\bar{x}; \bar{y}) = f_x(\bar{x}; \bar{y}) u_i + f_y(\bar{x}; \bar{y}) v_i \quad (\text{IV-57})$$

und damit weiter

$$z_i = f(x_i; y_i) = f(\bar{x}; \bar{y}) + f_x(\bar{x}; \bar{y}) u_i + f_y(\bar{x}; \bar{y}) v_i \quad (\text{IV-58})$$

Wir bilden nun aus diesen  $n$  „*indirekten*“ *Messwerten* nach der Definitionsvorschrift

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n z_i \quad (\text{IV-59})$$

den *Mittelwert*  $\bar{z}$  der *abhängigen* Größe  $Z$  und erhalten unter Berücksichtigung von Gleichung (IV-58):

<sup>14)</sup> Die hergeleiteten Formeln bleiben auch dann gültig, wenn die beiden Messreihen von *unterschiedlichem* Umfang sind.

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n z_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n [f(\bar{x}; \bar{y}) + f_x(\bar{x}; \bar{y}) u_i + f_y(\bar{x}; \bar{y}) v_i] = \\
&= \frac{1}{n} \left( \underbrace{\sum_{i=1}^n f(\bar{x}; \bar{y})}_{n \cdot f(\bar{x}; \bar{y})} + f_x(\bar{x}; \bar{y}) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n u_i}_0 + f_y(\bar{x}; \bar{y}) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n v_i}_0 \right) = \\
&= \frac{1}{n} \cdot n \cdot f(\bar{x}; \bar{y}) = f(\bar{x}; \bar{y})
\end{aligned} \tag{IV-60}$$

Denn die Summe der Abweichungen („scheinbaren Fehler“) *verschwindet* jeweils. Somit gilt zusammenfassend:

### Mittelwert einer „indirekten“ Messgröße

Der *Mittelwert*  $\bar{z}$  der „indirekten“ *Messgröße*  $Z = f(X; Y)$  lässt sich aus den Mittelwerten  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  der beiden voneinander unabhängigen *Messgrößen*  $X$  und  $Y$  wie folgt berechnen:

$$\bar{z} = f(\bar{x}; \bar{y}) \tag{IV-61}$$

#### Anmerkung

Für eine von  $n$  unabhängigen *direkt* gemessenen Größen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  abhängige Größe (Funktion)  $Y = f(X_1; X_2; \dots; X_n)$  gilt analog:

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \dots; \bar{x}_n) \tag{IV-62}$$

**Regel:** Für die unabhängigen *Messgrößen* werden deren *Mittelwerte* eingesetzt.

### ■ Beispiel

Die Oberfläche  $A$  eines Zylinders lässt sich aus dem Radius  $r$  und der Höhe  $h$  nach der Formel

$$A = f(r; h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h)$$

berechnen (Zylinder mit Boden und Deckel; Bild IV-20). Für einen speziellen Zylinder ergaben sich dabei aus voneinander unabhängigen *Messreihen* folgende *Mittelwerte*:

$$\bar{r} = 10,5 \text{ cm}, \quad \bar{h} = 15,0 \text{ cm}$$

Für den *Mittelwert der Zylinderoberfläche* erhalten wir damit den Wert

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= f(\bar{r}; \bar{h}) = 2\pi \bar{r}(\bar{r} + \bar{h}) = 2\pi(10,5 \text{ cm})(10,5 \text{ cm} + 15,0 \text{ cm}) = \\
&= \pi \cdot 21 \cdot 25,5 \text{ cm}^2 = 1682,32 \text{ cm}^2 \approx 1682 \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

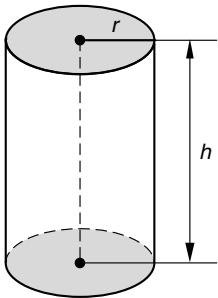


Bild IV-20

■

### 4.3 Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz (Varianzfortpflanzungsgesetz)

Wir wenden uns jetzt dem wichtigen Problem der sog. *Fehlerfortpflanzung* bei einer „indirekten“ Messgröße  $Z = f(X; Y)$  zu. Die Standardabweichungen  $s_x$  und  $s_y$  der beiden voneinander unabhängigen Messgrößen  $X$  und  $Y$  charakterisieren bekanntlich die *Streuung* der einzelnen Messwerte um ihre Mittelwerte und bewirken damit, dass auch die „indirekten“ Messwerte  $z_i = f(x_i; y_i)$  der Ausgangsgröße  $Z = f(X; Y)$  um ihren Mittelwert  $\bar{z} = f(\bar{x}; \bar{y})$  streuen. Die Standardabweichung  $s_z$  der „indirekten“ Messgröße  $Z$  wird daher in einer bestimmten Weise von den Standardabweichungen  $s_x$  und  $s_y$  abhängen, wobei auch noch der funktionale Zusammenhang zwischen den drei Größen  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  eine gewisse Rolle spielen wird. Unsere konkrete Fragestellung lautet deshalb zunächst:

*Wie wirken sich die Standardabweichungen  $s_x$  und  $s_y$  der beiden voneinander unabhängigen Messgrößen  $X$  und  $Y$  auf die Standardabweichung  $s_z$  der abhängigen „indirekten“ Messgröße  $Z = f(X; Y)$  aus?*

Eine Antwort auf diese Frage erhalten wir wiederum mit Hilfe des *totalen Differentials*. Zunächst aber bilden wir die Abweichungen der „indirekten“ Messwerte  $z_i = f(x_i; y_i)$  vom Mittelwert  $\bar{z} = f(\bar{x}; \bar{y})$ , wobei wir Gleichung (IV-55) verwenden:

$$w_i = z_i - \bar{z} = f(x_i; y_i) - f(\bar{x}; \bar{y}) = f(\bar{x} + u_i; \bar{y} + v_i) - f(\bar{x}; \bar{y}) \quad (\text{IV-63})$$

Da die Größen  $u_i$  und  $v_i$  sehr klein sind, dürfen wir die Abweichung  $w_i$  näherungsweise durch das *totale Differential*

$$dz_i = f_x(\bar{x}; \bar{y}) u_i + f_y(\bar{x}; \bar{y}) v_i \quad (\text{IV-64})$$

ersetzen ( $w_i = dz_i$ ):

$$w_i = z_i - \bar{z} = f_x(\bar{x}; \bar{y}) u_i + f_y(\bar{x}; \bar{y}) v_i \quad (\text{IV-65})$$

$f_x(\bar{x}; \bar{y})$  und  $f_y(\bar{x}; \bar{y})$  sind dabei die partiellen Ableitungen 1. Ordnung von  $z = f(x; y)$  an der Stelle  $x = \bar{x}$ ,  $y = \bar{y}$ .

Mit den (vorübergehenden) Abkürzungen  $a = f_x(\bar{x}; \bar{y})$  und  $b = f_y(\bar{x}; \bar{y})$  wird daraus:

$$w_i = z_i - \bar{z} = a u_i + b v_i \quad (\text{IV-66})$$

Die Summe der Abweichungsquadrate beträgt dann (summiert wird stets von  $i = 1$  bis  $i = n$ ):

$$\begin{aligned} \sum_i w_i^2 &= \sum_i (z_i - \bar{z})^2 = \sum_i (a u_i + b v_i)^2 = \\ &= \sum_i (a^2 u_i^2 + 2 a b u_i v_i + b^2 v_i^2) = \\ &= a^2 \cdot \sum_i u_i^2 + 2 a b \cdot \sum_i u_i v_i + b^2 \cdot \sum_i v_i^2 \end{aligned} \quad (\text{IV-67})$$

Bei *umfangreichen* Messreihen fallen dabei die sehr kleinen Abweichungen („scheinbaren Fehler“)  $u_i$  und  $v_i$  gleich oft positiv und negativ aus, sodass die mittlere Summe in der letzten Zeile der Gleichung (IV-67) als *vernachlässigbar klein* angesehen werden kann:

$$\sum_i u_i v_i \approx 0 \quad (\text{IV-68})$$

Für die Summe der Abweichungsquadrate gilt dann *näherungsweise*:

$$\sum_i w_i^2 = \sum_i (z_i - \bar{z})^2 = a^2 \cdot \sum_i u_i^2 + b^2 \cdot \sum_i v_i^2 \quad (\text{IV-69})$$

Für die *Varianz*  $s_z^2$  der „*Einzelmessungen*“  $z_i$  erhalten wir damit definitionsgemäß den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} s_z^2 &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_i w_i^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_i (z_i - \bar{z})^2 = \\ &= \frac{1}{n-1} \left( a^2 \cdot \sum_i u_i^2 + b^2 \cdot \sum_i v_i^2 \right) = \\ &= a^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_i u_i^2}_{s_x^2} + b^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_i v_i^2}_{s_y^2} = a^2 \cdot s_x^2 + b^2 \cdot s_y^2 = \\ &= (a \cdot s_x)^2 + (b \cdot s_y)^2 = (f_x(\bar{x}; \bar{y}) \cdot s_x)^2 + (f_y(\bar{x}; \bar{y}) \cdot s_y)^2 \end{aligned} \quad (\text{IV-70})$$

(mit  $u_i = x_i - \bar{x}$  und  $v_i = y_i - \bar{y}$ ).

Dies ist das sog. *Gaußsche Varianzfortpflanzungsgesetz* für die Varianz der *Einzelmessung*. Durch Wurzelziehen erhalten wir hieraus das *Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz* für die Standardabweichung der *Einzelmessung*:

$$s_z = \sqrt{(f_x(\bar{x}; \bar{y}) \cdot s_x)^2 + (f_y(\bar{x}; \bar{y}) \cdot s_y)^2} \quad (\text{IV-71})$$

Bei der Herleitung eines entsprechenden *Fehlerfortpflanzungsgesetzes* (*Varianzfortpflanzungsgesetzes*) für die Standardabweichung des *Mittelwertes* berücksichtigen wir, dass zwischen den Standardabweichungen  $s_x, s_y$  und  $s_z$  der *Einzelmessungen* und den Standardabweichungen  $s_{\bar{x}}, s_{\bar{y}}$  und  $s_{\bar{z}}$  der *Mittelwerte* die folgenden Beziehungen bestehen:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}, \quad s_{\bar{y}} = \frac{s_y}{\sqrt{n}}, \quad s_{\bar{z}} = \frac{s_z}{\sqrt{n}} \quad (\text{IV-72})$$

Aus Gleichung (IV-71) folgt dann, wobei wir vorübergehend wieder die Abkürzungen  $a = f_x(\bar{x}; \bar{y})$  und  $b = f_y(\bar{x}; \bar{y})$  verwenden:

$$\begin{aligned} s_{\bar{z}} &= \frac{s_z}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{(a \cdot s_x)^2 + (b \cdot s_y)^2}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot s_x^2 + b^2 \cdot s_y^2}{n}} = \\ &= \sqrt{a^2 \left(\frac{s_x}{\sqrt{n}}\right)^2 + b^2 \left(\frac{s_y}{\sqrt{n}}\right)^2} = \sqrt{a^2 \cdot s_{\bar{x}}^2 + b^2 \cdot s_{\bar{y}}^2} = \\ &= \sqrt{(a \cdot s_{\bar{x}})^2 + (b \cdot s_{\bar{y}})^2} = \sqrt{(f_x(\bar{x}; \bar{y}) \cdot s_{\bar{x}})^2 + (f_y(\bar{x}; \bar{y}) \cdot s_{\bar{y}})^2} \quad (\text{IV-73}) \end{aligned}$$

Dies ist das *Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz* für die Standardabweichung des *Mittelwertes*. Durch Quadrieren erhält man hieraus eine entsprechende Beziehung zwischen den *Varianzen*, nämlich das sog. *Varianzfortpflanzungsgesetz* für die Varianz des *Mittelwertes* bei voneinander *unabhängigen* Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ :

$$s_{\bar{z}}^2 = (f_x(\bar{x}; \bar{y}) \cdot s_{\bar{x}})^2 + (f_y(\bar{x}; \bar{y}) \cdot s_{\bar{y}})^2 \quad (\text{IV-74})$$

Wir fassen die wichtigsten Ergebnisse wie folgt zusammen:

### Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz für Standardabweichungen (Varianzfortpflanzungsgesetz)

Die *Standardabweichung* der „indirekten“ Messgröße  $Z = f(X; Y)$  lässt sich aus den Standardabweichungen der beiden voneinander *unabhängigen* und *normalverteilten* Messgrößen  $X$  und  $Y$  wie folgt berechnen:

$$s_z = \sqrt{(f_x(\bar{x}; \bar{y}) \cdot s_x)^2 + (f_y(\bar{x}; \bar{y}) \cdot s_y)^2} \quad (\text{IV-75})$$

(*Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz für die Standardabweichung der Einzelmessung*, in der „quadrierten“ Form auch als *Varianzfortpflanzungsgesetz* bezeichnet).

Dabei bedeuten:

$s_x, s_y$ : Standardabweichungen der *Einzelmessungen* der beiden *direkt* gemessenen Größen  $X$  und  $Y$

$s_z$ : Standardabweichung der *Einzelmessungen* der „*indirekten*“ Messgröße  $Z = f(X; Y)$

$f_x(\bar{x}; \bar{y})$ ;  $f_y(\bar{x}; \bar{y})$ : Partielle Ableitungen 1. Ordnung der Funktion  $z = f(x; y)$  an der Stelle  $x = \bar{x}$ ,  $y = \bar{y}$

Ersetzt man die Standardabweichungen der Einzelmessungen durch die entsprechenden *Standardabweichungen der Mittelwerte*, so erhält man das *Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz für die Standardabweichung des Mittelwertes* (in der „quadruierten“ Form auch als *Varianzfortpflanzungsgesetz* bezeichnet):

$$s_{\bar{z}} = \sqrt{(f_x(\bar{x}; \bar{y}) \cdot s_{\bar{x}})^2 + (f_y(\bar{x}; \bar{y}) \cdot s_{\bar{y}})^2} \quad (\text{IV-76})$$

Dabei bedeuten:

$s_{\bar{x}}, s_{\bar{y}}$ : Standardabweichungen der *Mittelwerte* der beiden *direkt* gemessenen Größen  $X$  und  $Y$

$s_{\bar{z}}$ : Standardabweichung des *Mittelwertes* der „*indirekten*“ Messgröße  $Z = f(X; Y)$

### Anmerkung

Das *Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz* (*Varianzfortpflanzungsgesetz*) lässt sich ohne Schwierigkeiten auch auf Funktionen von *mehr als zwei* Variablen ausdehnen. Sind  $X_1, X_2, \dots, X_n$  voneinander *unabhängige* und *normalverteilte* Messgrößen mit den Mittelwerten  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$  und den Standardabweichungen  $s_{x_1}, s_{x_2}, \dots, s_{x_n}$ , so gilt für die *Standardabweichung* der „*indirekten*“ Messgröße  $Y = f(X_1; X_2; \dots; X_n)$  das folgende Gesetz:

$$s_y = \sqrt{(f_{x_1} \cdot s_{x_1})^2 + (f_{x_2} \cdot s_{x_2})^2 + \dots + (f_{x_n} \cdot s_{x_n})^2} \quad (\text{IV-77})$$

In die partiellen Ableitungen  $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$  sind dabei die *Mittelwerte* der direkt gemessenen Eingangsgrößen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  einzusetzen. Ersetzt man in Gleichung (IV-77) die Standardabweichungen der Einzelmessungen durch die entsprechenden *Standardabweichungen der Mittelwerte*, so erhält man das *Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz* (*Varianzfortpflanzungsgesetz*) für die *Standardabweichung des Mittelwertes* bei  $n$  voneinander unabhängigen Variablen.

## ■ Beispiel

Wir kehren zu dem Beispiel des vorherigen Abschnitts zurück (*Oberfläche eines Zylinders*, siehe Bild IV-20). Für Radius  $r$  und Höhe  $h$  des Zylinders liegen folgende Messergebnisse vor:

$$\text{Radius } r: \bar{r} = 10,5 \text{ cm}, \quad s_{\bar{r}} = 0,2 \text{ cm}$$

$$\text{Höhe } h: \bar{h} = 15,0 \text{ cm}, \quad s_{\bar{h}} = 0,3 \text{ cm}$$

Für den *Mittelwert* der Zylinderoberfläche  $A$  erhielten wir bereits aus der Formel

$$A = f(r; h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

den Wert  $\bar{A} = 1682 \text{ cm}^2$ . Wir interessieren uns jetzt für die *Standardabweichung*  $s_{\bar{A}}$  dieses Mittelwertes. Sie lässt sich aus dem *Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz* (IV-76) berechnen. Die dabei benötigten partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion  $A = f(r, h)$  lauten:

$$\frac{\partial A}{\partial r} = 4\pi r + 2\pi h = 2\pi(2r + h), \quad \frac{\partial A}{\partial h} = 2\pi r$$

Für  $r$  und  $h$  setzen wir noch die *Mittelwerte*  $\bar{r} = 10,5 \text{ cm}$  und  $\bar{h} = 15,0 \text{ cm}$  ein:

$$\frac{\partial A}{\partial r}(\bar{r}; \bar{h}) = 2\pi(2\bar{r} + \bar{h}) = 2\pi(2 \cdot 10,5 + 15) \text{ cm} = 72\pi \text{ cm} = 226,19 \text{ cm}$$

$$\frac{\partial A}{\partial h}(\bar{r}; \bar{h}) = 2\pi\bar{r} = 2\pi(10,5 \text{ cm}) = 21\pi \text{ cm} = 65,97 \text{ cm}$$

Aus dem *Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz* (IV-76) folgt dann für die *Standardabweichung des Mittelwertes*  $\bar{A} = 1682 \text{ cm}^2$  der folgende Wert:

$$\begin{aligned} s_{\bar{A}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial r}(\bar{r}; \bar{h}) \cdot s_{\bar{r}}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial h}(\bar{r}; \bar{h}) \cdot s_{\bar{h}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{(226,19 \text{ cm} \cdot 0,2 \text{ cm})^2 + (65,97 \text{ cm} \cdot 0,3 \text{ cm})^2} = \\ &= 49,38 \text{ cm}^2 \approx 49 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

## 4.4 Messergebnis für eine „indirekte“ Messgröße

Das *Messergebnis* für eine „indirekte“ Messgröße  $Z = f(X; Y)$  besteht dann aus der Angabe des *Mittelwertes*  $\bar{z} = f(\bar{x}; \bar{y})$  und der aus dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz (Varianzfortpflanzungsgesetz) berechneten *Standardabweichung*  $s_{\bar{z}}$  dieses Mittelwertes, die im Rahmen der „Fehlerrechnung“ als ein geeignetes *Genauigkeitsmaß* für den *Mittelwert* und somit auch als *Maß* für die *Unsicherheit*  $\Delta z$  des „Messergebnisses“  $\bar{z} = f(\bar{x}; \bar{y})$  betrachtet wird.

Daher gilt:

**Messergebnis für eine „indirekte“ Messgröße  $Z = f(X; Y)$**

Das *Messergebnis* zweier *direkt* gemessener Größen  $X$  und  $Y$  liege in der Form

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \quad \text{und} \quad y = \bar{y} \pm \Delta y \quad (\text{IV-78})$$

vor. Dabei sind  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  die *Mittelwerte* und  $\Delta x$  und  $\Delta y$  die *Messunsicherheiten* der beiden Größen, für die man in diesem Zusammenhang üblicherweise die *Standardabweichungen*  $s_{\bar{x}}$  und  $s_{\bar{y}}$  der beiden *Mittelwerte* heranzieht:

$$\Delta x = s_{\bar{x}} \quad \text{und} \quad \Delta y = s_{\bar{y}} \quad (\text{IV-79})$$

Die von den direkten Messgrößen  $X$  und  $Y$  abhängige „indirekte“ Messgröße  $Z = f(X; Y)$  besitzt dann den *Mittelwert*

$$\bar{z} = f(\bar{x}; \bar{y}) \quad (\text{IV-80})$$

Als *Genauigkeitsmaß* für diesen Wert dient die *Standardabweichung*  $s_{\bar{z}}$  des *Mittelwertes*, die aus dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz (Varianzfortpflanzungsgesetz) (IV-76) berechnet wird. Sie ist zugleich ein *Maß* für die *Unsicherheit*  $\Delta z$  des Mittelwertes  $\bar{z} = f(\bar{x}; \bar{y})$ . Somit gilt:

$$\Delta z = s_{\bar{z}} = \sqrt{(f_x(\bar{x}; \bar{y}) \cdot \Delta x)^2 + (f_y(\bar{x}; \bar{y}) \cdot \Delta y)^2} \quad (\text{IV-81})$$

Das „*Messergebnis*“ für die „indirekte“ Messgröße  $Z = f(X; Y)$  wird dann in der Form

$$z = \bar{z} \pm \Delta z \quad (\text{IV-82})$$

angegeben.

### Anmerkungen

- (1) Für eine von  $n$  unabhängigen Größen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  abhängige „indirekte“ Messgröße  $Y = f(X_1; X_2; \dots; X_n)$  lautet das *Messergebnis* entsprechend:

$$y = \bar{y} \pm \Delta y \quad (\text{IV-83})$$

Dabei ist

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \dots; \bar{x}_n) \quad (\text{IV-84})$$

der *Mittelwert* und

$$\Delta y = s_{\bar{y}} = \sqrt{(f_{x_1} \cdot \Delta x_1)^2 + (f_{x_2} \cdot \Delta x_2)^2 + \dots + (f_{x_n} \cdot \Delta x_n)^2} \quad (\text{IV-85})$$

die *Standardabweichung* und damit die *Messunsicherheit* dieses Mittelwertes. Die *Messergebnisse* für die unabhängigen Messgrößen sind dabei in der üblichen Form

$$x_i = \bar{x}_i \pm \Delta x_i \quad (\text{IV-86})$$

vorgegeben ( $\bar{x}_i$  ist der *Mittelwert*,  $\Delta x_i$  die *Standardabweichung* des Mittelwertes und damit die *Messunsicherheit* für die direkt gemessene Größe  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ). Die partiellen Ableitungen  $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$  sind dabei stets für die *Mittelwerte* zu bilden.

- (2) Unter sehr speziellen Voraussetzungen lässt sich auch ein *Vertrauensintervall* für den unbekannten „wahren“ Wert (Mittelwert)  $\mu_z$  der „indirekten“ Messgröße  $Z = f(X; Y)$  angeben. Im Rahmen dieser einführenden Darstellung können wir auf dieses Problem nicht näher eingehen (siehe hierzu auch DIN-NORM 1319, Teil 4).

Für einige in den Anwendungen besonders häufig auftretende Funktionen lassen sich fertige Formeln für die Messunsicherheit (Standardabweichung) des Mittelwertes herleiten. Wir haben sie in der nachfolgenden Tabelle 2 zusammengestellt.

**Tabelle 2:** Messunsicherheit (Standardabweichung) des Mittelwertes für einige häufig auftretende Funktionen ( $k \in \mathbb{R}$ )

Funktion	Messunsicherheit des Mittelwertes
$Z = X + Y$	$\Delta z = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$
$Z = X - Y$	
$Z = kXY$	$\left  \frac{\Delta z}{z} \right  = \sqrt{\left  \frac{\Delta x}{x} \right ^2 + \left  \frac{\Delta y}{y} \right ^2}$
$Z = k \frac{X}{Y}$	
$Z = kX^\alpha Y^\beta$	$\left  \frac{\Delta z}{z} \right  = \sqrt{\left  \alpha \frac{\Delta x}{x} \right ^2 + \left  \beta \frac{\Delta y}{y} \right ^2}$

#### Anmerkungen zur Tabelle 2

- (1) Die angegebenen Formeln erhält man unmittelbar aus dem *Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz* (IV-76).
- (2) Man beachte: Die Größen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , und  $\Delta z$  sind *absolute* Messunsicherheiten (absolute „Fehler“), die Größen  $\left| \frac{\Delta x}{x} \right|$ ,  $\left| \frac{\Delta y}{y} \right|$  und  $\left| \frac{\Delta z}{z} \right|$  dagegen *relative* oder *prozentuale* Messunsicherheiten (relative oder prozentuale „Fehler“).
- (3) Analoge Formeln lassen sich herleiten für Summen, Differenzen und Potenzprodukte mit *mehr als zwei* Summanden bzw. Faktoren.

## ■ Beispiele

### (1) Bestimmung einer Federkonstanten (Federpendel oder Feder-Masse-Schwinger)

Die *Federkonstante*  $c$  der elastischen Feder eines Federpendels lässt sich nach der Formel

$$c = f(m; T) = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{T^2} = 4\pi^2 \cdot m \cdot T^{-2}$$

aus der Schwingungsmasse  $m$  und der Schwingungsdauer  $T$  berechnen (siehe hierzu Bild IV-19). In unabhängigen Versuchen wurden  $m$  und  $T$  zehnmal wie folgt gemessen:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{m}{g}$	198	199	203	200	202	198	201	197	203	199
$\frac{T}{s}$	2,01	2,04	1,96	1,98	2,00	2,05	1,97	1,98	2,04	1,97

Anhand der folgenden (schrittweise aufgebauten) Tabelle berechnen wir zunächst die benötigten *Mittelwerte*  $\bar{m}$  und  $\bar{T}$  und deren *Standardabweichungen* (Unsicherheiten)  $s_{\bar{m}}$  und  $s_{\bar{T}}$ :

$i$	$\frac{m_i}{g}$	$\frac{m_i - \bar{m}}{g}$	$\frac{(m_i - \bar{m})^2}{g^2}$	$\frac{T_i}{s}$	$\frac{T_i - \bar{T}}{s}$	$\frac{(T_i - \bar{T})^2 \cdot 10^4}{s^2}$
1	198	-2	4	2,01	0,01	1
2	199	-1	1	2,04	0,04	16
3	203	3	9	1,96	-0,04	16
4	200	0	0	1,98	-0,02	4
5	202	2	4	2,00	0	0
6	198	-2	4	2,05	0,05	25
7	201	1	1	1,97	-0,03	9
8	197	-3	9	1,98	-0,02	4
9	203	3	9	2,04	0,04	16
10	199	-1	1	1,97	-0,03	9
$\sum$	2000	0	42	20,00	0	100

$$\bar{m} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} m_i = \frac{1}{10} \cdot 2000 \text{ g} = 200 \text{ g}$$

$$s_{\bar{m}} = \sqrt{\frac{1}{10 \cdot (10 - 1)} \cdot \sum_{i=1}^{10} (m_i - \bar{m})^2} = \sqrt{\frac{1}{90} \cdot 42 \text{ g}^2} = 0,68 \text{ g} \approx 0,7 \text{ g}$$

$$\bar{T} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} T_i = \frac{1}{10} \cdot 20,00 \text{ s} = 2,00 \text{ s}$$

$$s_{\bar{T}} = \sqrt{\frac{1}{10 \cdot (10 - 1)} \cdot \sum_{i=1}^{10} (T_i - \bar{T})^2} = \sqrt{\frac{1}{90} \cdot 100 \cdot 10^{-4} \text{ s}^2} = \\ = 0,0105 \text{ s} \approx 0,01 \text{ s}$$

Das Messergebnis für die beiden Messgrößen  $m$  und  $T$  lautet damit (in der üblichen Schreibweise):

$$m = \bar{m} \pm \Delta m = \bar{m} \pm s_{\bar{m}} = (200 \pm 0,7) \text{ g}$$

$$T = \bar{T} \pm \Delta T = \bar{T} \pm s_{\bar{T}} = (2,00 \pm 0,01) \text{ s}$$

Für die Federkonstante  $c$  erhalten wir damit den folgenden *Mittelwert*:

$$\bar{c} = f(\bar{m}; \bar{T}) = 4\pi^2 \cdot \frac{\bar{m}}{\bar{T}^2} = 4\pi^2 \cdot \frac{200 \text{ g}}{(2,00 \text{ s})^2} = 1973,9 \text{ g/s}^2 \approx \\ \approx 1,974 \text{ kg/s}^2 = 1,974 \text{ N/m}$$

Die für die Fehlerfortpflanzung benötigten partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion  $c = f(m; T)$  lauten:

$$\frac{\partial c}{\partial m} = 4\pi^2 \cdot \frac{1}{T^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}, \quad \frac{\partial c}{\partial T} = 4\pi^2 \cdot m (-2T^{-3}) = -8\pi^2 \cdot \frac{m}{T^3}$$

$$\frac{\partial c}{\partial m} (\bar{m}; \bar{T}) = \frac{4\pi^2}{\bar{T}^2} = \frac{4\pi^2}{(2,00 \text{ s})^2} = 9,8696 \text{ s}^{-2}$$

$$\frac{\partial c}{\partial T} (\bar{m}; \bar{T}) = -8\pi^2 \cdot \frac{\bar{m}}{\bar{T}^3} = -8\pi^2 \cdot \frac{200 \text{ g}}{(2,00 \text{ s})^3} = -1973,9 \text{ g/s}^3$$

Damit erhalten wir aus dem *Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz* (IV-76) die folgende *Messunsicherheit* (Standardabweichung) für den Mittelwert  $\bar{c}$ :

$$\begin{aligned}\Delta c = s_{\bar{c}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial c}{\partial m} \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial T} \Delta T\right)^2} = \\ &= \sqrt{(9,8696 \text{ s}^{-2} \cdot 0,68 \text{ g})^2 + (-1973,9 \text{ g} \cdot \text{s}^{-3} \cdot 0,0105 \text{ s})^2} = \\ &= 21,79 \text{ g/s}^2 = 0,0218 \text{ kg/s}^2 \approx 0,022 \text{ N/m}\end{aligned}$$

Das *Messergebnis* für die „indirekte“ Messgröße  $c$  lautet somit

$$\bar{c} = 1,974 \text{ N/m}, \quad s_{\bar{c}} = 0,022 \text{ N/m}$$

oder (in der im technischen Bereich üblichen Schreibweise)

$$c = \bar{c} \pm \Delta c = \bar{c} \pm s_{\bar{c}} = (1,974 \pm 0,022) \text{ N/m}$$

Die *prozentuale* Messunsicherheit der abhängigen Größe  $c$  beträgt

$$\left| \frac{\Delta c}{\bar{c}} \right| = \frac{0,022 \text{ N/m}}{1,974 \text{ N/m}} \cdot 100 \% = 1,1 \%$$

### Anmerkung

Da  $c = 4\pi^2 \cdot m \cdot T^{-2}$  ein *Potenzprodukt* der Messgrößen  $m$  und  $T$  ist, können wir für die Berechnung der Messunsicherheit der abhängigen Größe  $c$  auch die in der Tabelle 2 angegebene fertige Formel verwenden (mit  $k = 4\pi^2$ ,  $X = m$ ,  $Y = T$ ,  $\alpha = 1$  und  $\beta = -2$ ). Wir erhalten natürlich das bereits bekannte Ergebnis:

$$\begin{aligned}\left| \frac{\Delta c}{\bar{c}} \right| &= \sqrt{\left| \alpha \cdot \frac{\Delta m}{m} \right|^2 + \left| \beta \cdot \frac{\Delta T}{T} \right|^2} = \sqrt{\left| 1 \cdot \frac{0,68 \text{ g}}{200 \text{ g}} \right|^2 + \left| -2 \cdot \frac{0,0105 \text{ s}}{2,00 \text{ s}} \right|^2} = \\ &= 0,0110 = 0,0110 \cdot 100 \% = 1,1 \%\end{aligned}$$

## (2) Dichte einer Eisenkugel

Masse  $m$  und Durchmesser  $d$  einer Eisenkugel wurden aus unabhängigen Messreihen wie folgt bestimmt:

$$\text{Masse: } \bar{m} = 560,7 \text{ g}, \quad \Delta m = s_{\bar{m}} = 0,5 \text{ g}$$

$$\text{Durchmesser: } \bar{d} = 5,11 \text{ cm}, \quad \Delta d = s_{\bar{d}} = 0,02 \text{ cm}$$

Die *Dichte*  $\varrho$  lässt sich dann wie folgt aus den beiden Messgrößen  $m$  und  $d$  berechnen:

$$\varrho = f(m; d) = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{\pi}{6} d^3} = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{m}{d^3} = \frac{6}{\pi} \cdot m \cdot d^{-3}$$

$$\left( V = \frac{\pi}{6} d^3 \text{ ist das Volumen der Kugel} \right)$$

Somit erhalten wir für die Dichte den folgenden *Mittelwert*:

$$\bar{\varrho} = f(\bar{m}; \bar{d}) = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{\bar{m}}{\bar{d}^3} = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{560,7 \text{ g}}{(5,11 \text{ cm})^3} = 8,025 \text{ g/cm}^3$$

Für die Berechnung der *Messunsicherheit* (d. h. der Standardabweichung des Mittelwertes  $\bar{\varrho}$ ) benötigen wir noch die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion  $\varrho = f(m; d)$ . Sie lauten:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial m} = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{1}{d^3}, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial d} = \frac{6}{\pi} \cdot m \cdot (-3d^{-4}) = -\frac{18}{\pi} \cdot \frac{m}{d^4}$$

Wir setzen die Mittelwerte  $\bar{m}$  und  $\bar{d}$  ein und erhalten:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial m} (\bar{m}; \bar{d}) = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{1}{\bar{d}^3} = \frac{6}{\pi} \cdot \frac{1}{(5,11 \text{ cm})^3} = 0,0143 \text{ cm}^{-3}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial d} (\bar{m}; \bar{d}) = -\frac{18}{\pi} \cdot \frac{\bar{m}}{\bar{d}^4} = -\frac{18}{\pi} \cdot \frac{560,7 \text{ g}}{(5,11 \text{ cm})^4} = -4,7116 \text{ g/cm}^4$$

Das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz (Varianzfortpflanzungsgesetz) (IV-76) liefert uns dann den folgenden Wert für die *Messunsicherheit* von  $\varrho$ :

$$\begin{aligned} \Delta \varrho = s_{\bar{\varrho}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \varrho}{\partial m} \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial d} \Delta d\right)^2} = \\ &= \sqrt{(0,0143 \text{ cm}^{-3} \cdot 0,5 \text{ g})^2 + (-4,7116 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-4} \cdot 0,02 \text{ cm})^2} = \\ &= 0,095 \text{ g/cm}^3 \end{aligned}$$

Das *Messergebnis* für die Dichte der Eisenkugel lautet damit

$$\bar{\varrho} = 8,025 \text{ g/cm}^3, \quad s_{\bar{\varrho}} = 0,095 \text{ g/cm}^3$$

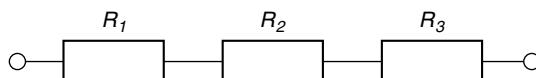
oder

$$\varrho = \bar{\varrho} \pm \Delta \varrho = \bar{\varrho} \pm s_{\bar{\varrho}} = (8,025 \pm 0,095) \text{ g/cm}^3$$

### (3) Reihenschaltung von ohmschen Widerständen

Bild IV-21 zeigt eine *Reihenschaltung* aus drei ohmschen Widerständen, die wie folgt gemessen wurden:

$$R_1 = (100 \pm 2) \Omega, \quad R_2 = (150 \pm 2) \Omega, \quad R_3 = (50 \pm 1) \Omega$$



**Bild IV-21** Reihenschaltung aus drei ohmschen Widerständen

Den *Gesamtwiderstand*  $R$  dieser Schaltung erhält man nach den *Kirchhoffsschen Regeln* als *Summe* der Einzelwiderstände:

$$R = f(R_1; R_2; R_3) = R_1 + R_2 + R_3$$

Der *Mittelwert* der „indirekten“ Messgröße  $R$  beträgt somit:

$$\bar{R} = f(\bar{R}_1; \bar{R}_2; \bar{R}_3) = \bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_3 = (100 + 150 + 50) \Omega = 300 \Omega$$

Wir berechnen nun die *Standardabweichung* dieses *Mittelwertes*, d. h. die *Messunsicherheit*  $\Delta R$  des Gesamtwiderstandes unter Verwendung von Tabelle 2 (Verallgemeinerung der Funktion  $Z = f(X; Y) = X + Y$  für *drei* Summanden). So mit gilt:

$$\begin{aligned}\Delta R &= \sqrt{(\Delta R_1)^2 + (\Delta R_2)^2 + (\Delta R_3)^2} = \sqrt{(2 \Omega)^2 + (2 \Omega)^2 + (1 \Omega)^2} = \\ &= \sqrt{4 + 4 + 1} \Omega = \sqrt{9} \Omega = 3 \Omega\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für den Gesamtwiderstand  $R$  das folgende *Messergebnis*:

$$R = \bar{R} \pm \Delta R = (300 \pm 3) \Omega$$

Die *prozentuale* Messunsicherheit beträgt

$$\left| \frac{\Delta R}{\bar{R}} \right| = \frac{3 \Omega}{300 \Omega} \cdot 100 \% = 1 \% \quad \blacksquare$$

## 5 Ausgleichs- oder Regressionskurven

In den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen stellt sich häufig das Problem festzustellen, ob zwischen zwei Variablen (Zufallsvariablen)  $X$  und  $Y$  eine gewisse *Beziehung* oder *Abhängigkeit* besteht und welcher *Art* diese gegebenenfalls ist. In Kap. III, Abschnitt 6 haben wir dieses Problem bereits angeschnitten und dort die Begriffe *Korrelation* und *Regression* kennengelernt. In diesem Abschnitt werden wir nun zeigen, wie man in der Praxis aus einer aus  $n$  Messpunkten bestehenden Stichprobe eine *Regressions- oder Ausgleichskurve* ermitteln kann, die den Zusammenhang zwischen den beiden Variablen in „optimaler“ Weise beschreibt.

### 5.1 Ein einführendes Beispiel

Zwischen zwei physikalisch-technischen Größen  $X$  und  $Y$  soll auf experimentellem Wege ein *funktionaler* Zusammenhang hergestellt werden. Die aufgrund verschiedener Messungen erhaltenen  $n$  Wertepaare  $(x_i; y_i)$  können dann als Punkte  $P_i = (x_i; y_i)$  in einer  $x$ ,  $y$ -Ebene bildlich dargestellt werden ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Die Aufgabe der Ausgleichsrechnung besteht nun darin, eine Kurve  $y = f(x)$  zu bestimmen, die sich diesen Messpunkten „möglichst gut“ anpasst. Aus dieser *Regressions- oder Ausgleichskurve* lässt sich dann zu einem vorgegebenen Wert  $x$  der unabhängigen Größe  $X$  der zugehörige Wert  $y$  der von  $X$  abhängigen Größe  $Y$  schätzen.

Wir wollen dieses Problem zunächst an einem einfachen Beispiel näher erläutern. In einem Experiment soll die *Temperaturabhängigkeit* eines ohmschen Widerstandes  $R$  in einem bestimmten Temperaturintervall untersucht werden. Dazu wurde der Widerstand bei acht verschiedenen Temperaturen jeweils genau einmal gemessen. Das Messprotokoll hatte dabei das folgende Aussehen ( $T$ : Temperatur):

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$T_i$ °C	20	25	30	40	50	60	65	80
$\frac{R_i}{\Omega}$	16,30	16,44	16,61	16,81	17,10	17,37	17,38	17,86

Die acht Wertepaare  $(T_i; R_i)$  führen dann zu acht Messpunkten  $P_i = (T_i; R_i)$ , die nach Bild IV-22 *nahezu* auf einer *Geraden* liegen ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ).

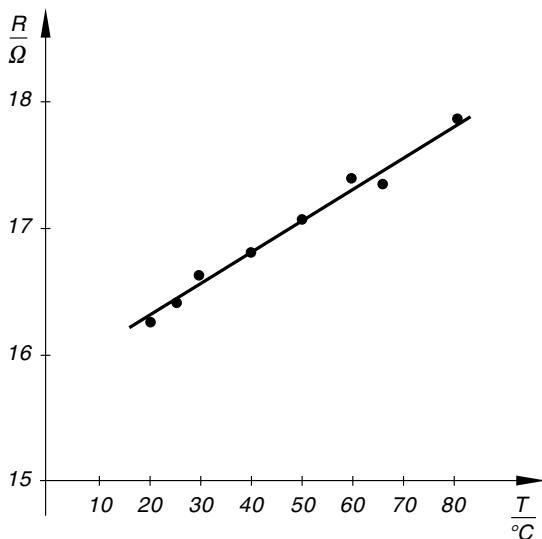


Bild IV-22

Zur Temperaturabhängigkeit eines ohmschen Widerstandes: Die acht Messpunkte liegen nahezu auf einer Geraden

Es gelingt nun ohne große Schwierigkeiten, „frei nach Augenmaß“ eine *Gerade* einzuziehen, die sich diesen Messpunkten „besonders gut“ anpasst (Bild IV-22). Die *Streuung* der Messpunkte um den geradlinigen Verlauf führen wir dabei auf die *unvermeidlichen „Zufallsfehler“* (zufälligen Messabweichungen) zurück. Aus dem Messprotokoll entnehmen wir z. B., dass bei einer Temperatur von 50 °C ein Widerstandswert von 17,10 Ω gemessen wurde. Würden wir jedoch bei dieser Temperatur die Widerstandsmessung mehrmals *wiederholen*, so erhielten wir infolge der *unvermeidlichen zufälligen* Messabweichungen stets *etwas voneinander abweichende* Widerstandswerte.

Streng genommen sind auch die Temperaturangaben „fehlerhaft“. Wir unterstellen aber, dass die Messungenauigkeiten der Temperaturwerte im Vergleich zu den entsprechenden Messungenauigkeiten der Widerstandswerte *vernachlässigbar klein* sind. Die unabhängige Messgröße  $T$  wird somit wie eine *gewöhnliche* Variable behandelt, deren Werte in *kontrollierbarer* Weise „exakt“ eingestellt werden können. Dagegen wird die von  $T$  abhängige Messgröße  $R$  als eine *Zufallsvariable* betrachtet. Wir können nämlich aufgrund der unvermeidlichen zufälligen Messabweichungen *nicht exakt* vorhersagen, *welchen* Wert der Widerstand  $R$  bei *fest* vorgegebener Temperatur  $T$  tatsächlich besitzt. Die Gerade in Bild IV-22 wurde dabei so gelegt, dass sie die *Streuung* der Messpunkte nach beiden Seiten hin „möglichst gut ausgleicht“. Allerdings ist die Auswahl einer solchen Ausgleichs- oder Regressionsgeraden *subjektiv* bedingt. *Verschiedene* Personen werden nämlich i. Allg. zu einem *unterschiedlichen* Urteil kommen und daher *verschiedene* Geraden als „besonders gut angepasst“ ansehen.

An dieser Stelle setzt nun die *Ausgleichsrechnung* ein. Sie liefert uns mit der von *Gauß* stammenden „*Methode der kleinsten Quadrate*“ ein *objektives* Hilfsmittel zur Lösung der gestellten Aufgabe. Wir erhalten nach dieser Methode eine *eindeutig bestimmte* Gerade, wie in Abschnitt 5.3 noch ausführlich dargelegt wird.

## 5.2 Ausgleichung nach der „Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate“

Wir formulieren die Aufgabe wie folgt:

*Mit den Methoden der Ausgleichsrechnung soll aus  $n$  gemessenen Wertepaaren (Messpunkten)  $(x_i; y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ein möglichst einfacher funktionaler Zusammenhang zwischen den Messgrößen  $X$  und  $Y$  hergeleitet werden.*

Als Ergebnis erwarten wir dabei eine Funktion  $y = f(x)$ , die sich den Messpunkten „möglichst gut“ anpasst und daher in diesem Zusammenhang als *Ausgleichs-* oder auch *Regressionskurve* bezeichnet wird. Im Bereich der Technik wird dabei meist unterstellt, dass die als unabhängige Variable betrachtete Messgröße  $X$  „fehlerfrei“ gemessen wird, d. h. die unvermeidlichen zufälligen Messabweichungen der  $x$ -Werte werden im Vergleich zu denen der  $y$ -Werte als *vernachlässigbar klein* angesehen. Dies aber bedeutet, dass wir die unabhängige Messgröße  $X$  als eine *gewöhnliche* Variable auffassen dürfen, deren *feste* Werte auch bei Versuchswiederholungen *unverändert* bleiben. Die von der (gewöhnlichen) Variablen  $X$  abhängige Messgröße  $Y$  ist dagegen eine *Zufallsvariable*, da die bei *festem*  $X = x$  in Versuchswiederholungen erhaltenen Werte dieser Variablen *infolge der unvermeidlichen zufälligen* Messabweichungen („Zufallsfehler“) um einen Mittelwert *streuen*.

Als *Maß* für die (zufallsbedingte) Abweichung zwischen Messpunkt und Ausgleichskurve führen wir den *vertikalen* Abstand, d. h. die *Ordinatendifferenz* ein (Bild IV-23). Der Abstand des Messpunktes  $P_i = (x_i; y_i)$  von der gesuchten (aber noch unbekannten) Ausgleichskurve  $y = f(x)$  beträgt damit<sup>15)</sup>

$$v_i = y_i - f(x_i) \quad (\text{IV-87})$$

<sup>15)</sup> Liegt der Messpunkt  $P_i$  oberhalb (unterhalb) der Ausgleichskurve, so ist  $v_i > 0$  ( $v_i < 0$ ).

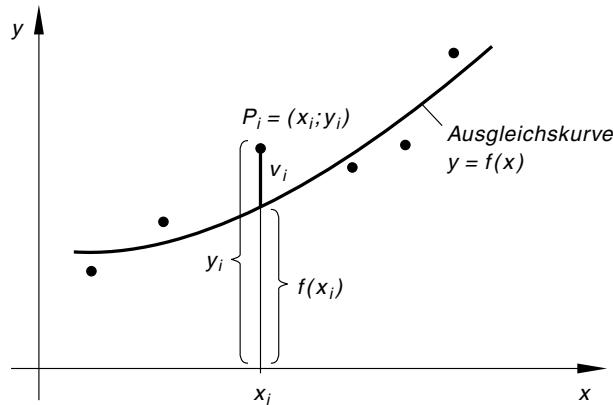


Bild IV-23

Messpunkte  $P_i = (x_i; y_i)$   
mit „Ausgleichskurve“

Eine *objektive* Methode zur Bestimmung der „günstigsten“ Kurve, eben der *Ausgleichskurve*, liefert die *Gaußsche Methode der kleinsten Quadrate*. Danach passt sich diejenige Kurve den vorgegebenen Messpunkten „am besten“ an, für die die Summe der Abstandsquadrate aller  $n$  Messpunkte ein *Minimum* annimmt:

$$S = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \rightarrow \text{Minimum} \quad (\text{IV-88})$$

Wie man dieses Minimum mit den Hilfsmitteln der Differentialrechnung bestimmt, zeigen wir etwas später.

Von großer Bedeutung für die Lösung der gestellten Aufgabe ist dabei die Wahl eines *geeigneten Funktionstyps*, der der Ausgleichsrechnung zugrunde gelegt werden soll. Der Lösungsansatz für eine Ausgleichskurve ist naturgemäß von Fall zu Fall verschieden. Eine Entscheidung für einen bestimmten Funktionstyp lässt sich daher stets nur am *konkreten Einzelfall* treffen, z. B. aufgrund *theoretischer* Überlegungen oder aber anhand der *Punktwolke*, die die  $n$  Messpunkte im Streudiagramm bilden. Liegen die Messpunkte beispielsweise *nahezu* in einer *Linie*, so wird man einen Lösungsansatz in Form einer *linearen* Funktion vom Typ

$$y = ax + b \quad (\text{IV-89})$$

wählen (*Ausgleichsgerade*; Bild IV-24). Für eine Punktwolke wie in Bild IV-25 ist eine solche *lineare* Ausgleichung dagegen *wenig sinnvoll*. Hier wird man sich zu Recht für einen *quadratischen* Lösungsansatz in Form einer *Ausgleichs- oder Regressionsparabel* vom Typ

$$y = ax^2 + bx + c \quad (\text{IV-90})$$

entscheiden. In beiden Fällen lassen sich dann die *Kurvenparameter* ( $a$  und  $b$  bzw.  $a, b$  und  $c$ ) so aus der vorgegebenen Stichprobe  $(x_i; y_i)$  bestimmen, dass die jeweils ausgewählte Kurve sich den Messpunkten „optimal“ anpasst.

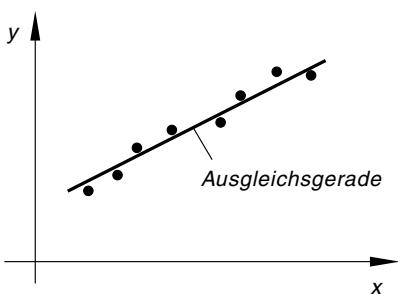


Bild IV-24 Ausgleichsgerade

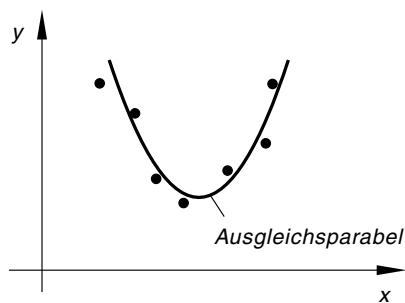


Bild IV-25 Ausgleichsparabel

*Lineare* Funktionen treten dabei in den technischen Anwendungen besonders häufig auf. Man spricht daher in diesem Zusammenhang auch von *linearer Ausgleichung* oder *linearer Regression*. Aber auch *Parabeln*, *Polynomfunktionen höherer Ordnung*, *Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen* sowie *einfache gebrochenrationale* Funktionen spielen eine große Rolle bei der Festlegung des Funktionstyps einer Ausgleichskurve. Die in diesen Funktionen enthaltenen *Parameter* sind dann jeweils so zu bestimmen, dass das *Gaußsche Minimierungsprinzip* (IV-88) erfüllt wird. In Tabelle 3 haben wir einige besonders einfache, aber häufig auftretende Lösungsansätze für Ausgleichskurven zusammengestellt. Die jeweiligen Kurvenparameter sind ebenfalls angegeben.

Im konkreten Fall geht man nun folgendermaßen vor:

Zunächst muss man sich aufgrund der genannten Überlegungen für einen *bestimmten Lösungsansatz*  $y = f(x)$  für die gesuchte Ausgleichs- oder Regressionskurve entscheiden, wobei das *Streuungsdiagramm*, d. h. die bildliche Darstellung der  $n$  Messpunkte  $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$  als *Punktfolge*, eine wesentliche *Entscheidungshilfe* liefert. Dann werden die im Lösungsansatz enthaltenen *Funktionsparameter*  $a, b, \dots$  so bestimmt, dass die von diesen Parametern abhängige *Summe der Abstandsquadrate*

$$S(a; b; \dots) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \quad (\text{IV-91})$$

ein *Minimum* annimmt. Nach den Regeln der Differentialrechnung ist dies der Fall, wenn die partiellen Ableitungen 1. Ordnung von  $S(a; b; \dots)$  verschwinden<sup>16)</sup>:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \dots \quad (\text{IV-92})$$

Aus diesem Gleichungssystem lassen sich dann die Parameter  $a, b, \dots$  und damit die Ausgleichskurve eindeutig bestimmen.

<sup>16)</sup> Die Gleichungen (IV-92) sind *notwendig*, jedoch *keinesfalls hinreichend* für die Existenz eines Minimums. Man muss dann von Fall zu Fall entscheiden, ob tatsächlich ein Minimum vorliegt.

Die Gleichungen (IV-92) heißen *Normalgleichungen*. Sie sind i. Allg. *nichtlinear* und daher meist nur *numerisch* unter erheblichem Rechenaufwand zu lösen. Nur in *einfachen* Fällen erhält man ein (quadratisches) *lineares* Gleichungssystem, dass mit Hilfe des *Gaußschen Algorithmus* gelöst werden kann.

**Tabelle 3:** Einfache Lösungsansätze für Ausgleichs- oder Regressionskurven

Lösungsansatz	Ausgleichskurve $y = f(x)$	Parameter
Lineare Funktion (Gerade)	$y = ax + b$	$a, b$
Quadratische Funktion (Parabel)	$y = ax^2 + bx + c$	$a, b, c$
Polynomfunktion $n$ -ten Grades	$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$	$a_0, a_1, \dots, a_n$
Potenzfunktion	$y = a \cdot x^b$	$a, b$
Exponentialfunktion	$y = a \cdot e^{bx}$	$a, b$
Logarithmusfunktion	$y = a \cdot \ln(bx)$	$a, b$
Gebrochenrationale Funktionen	$y = \frac{ax + b}{x} = a + \frac{b}{x}$	$a, b$
	$y = \frac{a}{x + b}$	$a, b$
	$y = \frac{ax}{x + b}$	$a, b$

Wir fassen die wesentlichen Ergebnisse wie folgt zusammen:

**Bestimmung einer Ausgleichs- oder Regressionskurve nach der „Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate“**

Zu  $n$  vorgegebenen Wertepaaren (Messpunkten)  $(x_i; y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) lässt sich wie folgt eine *Ausgleichs-* oder *Regressionskurve* bestimmen, die sich diesen Messpunkten in „optimaler“ Weise anpasst:

1. Zunächst ist eine Entscheidung darüber zu treffen, welcher *Funktionstyp* der Ausgleichsrechnung zugrunde gelegt werden soll (Gerade, Parabel, Potenz- oder Exponentialfunktion usw.). Eine wesentliche *Entscheidungshilfe* liefert dabei das *Streuungsdiagramm*, in dem die  $n$  Messpunkte  $(x_i; y_i)$  in ihrer Gesamtheit durch eine *Punktwolke* bildlich dargestellt werden (siehe hierzu Bild IV-23). Der *Lösungsansatz*  $y = f(x)$  für die Ausgleichskurve enthält dann noch gewisse unbekannte *Parameter*  $a, b, \dots$ .
2. Mit dem ausgewählten Funktionstyp  $y = f(x)$  wird die *Summe der Abstandsquadrate*

$$S(a; b; \dots) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \quad (\text{IV-93})$$

gebildet, die ebenfalls noch von den Kurvenparametern  $a, b, \dots$  abhängt, d. h. als eine *Funktion* dieser Parameter anzusehen ist.

3. Die Bestimmung der Parameter erfolgt dann aus den *Normalgleichungen*

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \dots \quad (\text{IV-94})$$

#### Anmerkungen

- (1) Die Messwertepaare  $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$  repräsentieren eine *zweidimensionale Stichprobe*, die man der  $(X; Y)$ -Grundgesamtheit entnommen hat. Die als *unabhängig* angesehene Variable  $X$  ist dabei in den technischen Anwendungen meist eine *gewöhnliche* Variable, während die *abhängige* Messgröße eine *Zufallsvariable* darstellt ( $X$  ist eine „fehlerfreie“,  $Y$  dagegen eine mit *zufälligen Messabweichungen* versehene Messgröße).
- (2) Eine Ausgleichung ist nur möglich, wenn die Anzahl  $n$  der Messpunkte *größer* ist als die Anzahl der Kurvenparameter. Die Anzahl der Normalgleichungen, aus denen die Parameter berechnet werden, entspricht dabei stets der Anzahl der Parameter.

Konkrete Beispiele für Ausgleichsprobleme folgen in den nächsten Abschnitten.

### 5.3 Ausgleichs- oder Regressionsgerade

Wir behandeln in diesem Abschnitt den in den Anwendungen besonders häufig auftretenden und zugleich einfachsten Fall einer *linearen* Ausgleichskurve  $y = ax + b$ , die als *Ausgleichs-* oder *Regressionsgerade* bezeichnet wird.

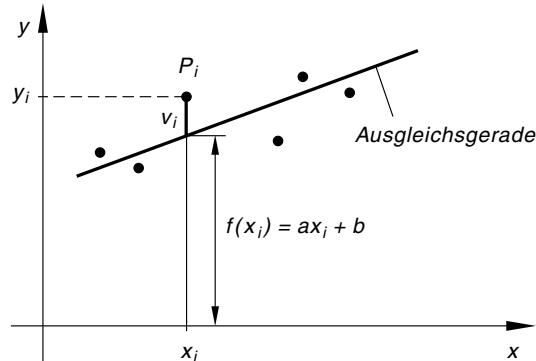
#### 5.3.1 Bestimmung der Parameter einer Ausgleichsgeraden

Für den *vertikalen* Abstand  $v_i$  zwischen dem  $i$ -ten Messpunkt  $P_i = (x_i; y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) und der *Ausgleichsgeraden*

$$y = f(x) = ax + b \quad (\text{IV-95})$$

gilt dann nach Bild IV-26:

$$v_i = y_i - f(x_i) = y_i - (ax_i + b) = y_i - ax_i - b \quad (\text{IV-96})$$



**Bild IV-26**

Zur Bestimmung der Ausgleichs- oder Regressionsgeraden

Die Parameter  $a$  und  $b$  werden dabei nach der *Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate* so bestimmt, dass die Summe der Abstandsquadrate

$$S(a; b) = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \quad (\text{IV-97})$$

ihren *kleinsten* Wert annimmt. Dies ist nach (VI-94) der Fall, wenn die partiellen Ableitungen 1. Ordnung

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b) \cdot (-x_i) = 2 \cdot \sum_{i=1}^n (-x_i y_i + ax_i^2 + bx_i) \quad (\text{IV-98})$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b) \cdot (-1) = 2 \cdot \sum_{i=1}^n (-y_i + ax_i + b) \quad (\text{IV-99})$$

verschwinden.

Wir erhalten daraus die (bereits geordneten) *Normalgleichungen*

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot a + \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot b &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot a + n \cdot b &= \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned} \quad (\text{IV-100})$$

die ein *lineares Gleichungssystem* mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten repräsentieren. Das System besitzt *genau eine* Lösung, da die Koeffizientendeterminante *nicht verschwindet* (wir lassen im Folgenden die Summationsgrenzen 1 und  $n$  weg):

$$D = \begin{vmatrix} \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & n \end{vmatrix} = n \cdot \sum_i x_i^2 - \left( \sum_i x_i \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_i \sum_j (x_i - x_j)^2 > 0 \quad (\text{IV-101})$$

Mit den beiden *Hilfsdeterminanten*

$$D_1 = \begin{vmatrix} \sum_i x_i y_i & \sum_i x_i \\ \sum_i y_i & n \end{vmatrix} = n \cdot \sum_i x_i y_i - \left( \sum_i x_i \right) \left( \sum_i y_i \right) \quad (\text{IV-102})$$

und

$$D_2 = \begin{vmatrix} \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i y_i \\ \sum_i x_i & \sum_i y_i \end{vmatrix} = \left( \sum_i x_i^2 \right) \left( \sum_i y_i \right) - \left( \sum_i x_i \right) \left( \sum_i x_i y_i \right) \quad (\text{IV-103})$$

erhalten wir nach der *Cramerschen Regel* die folgende Lösung:

$$a = \frac{D_1}{D} = \frac{n \cdot \sum_i x_i y_i - \left( \sum_i x_i \right) \left( \sum_i y_i \right)}{n \cdot \sum_i x_i^2 - \left( \sum_i x_i \right)^2} \quad (\text{IV-104})$$

$$b = \frac{D_2}{D} = \frac{\left(\sum_i x_i^2\right) \left(\sum_i y_i\right) - \left(\sum_i x_i\right) \left(\sum_i x_i y_i\right)}{n \cdot \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2} \quad (\text{IV-105})$$

Auch das für ein Minimum *hinreichende* Kriterium (siehe Gleichung (III-63) aus Band 2) ist erfüllt. Mit den partiellen Ableitungen 2. Ordnung

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2 \cdot \sum_i x_i^2, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 2 \cdot \sum_i x_i \quad (\text{IV-106})$$

folgt nämlich unter Berücksichtigung von Gleichung (IV-101):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a^2}\right) \left(\frac{\partial^2 S}{\partial b^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b}\right)^2 &= \left(2 \cdot \sum_i x_i^2\right) 2n - 4 \left(\sum_i x_i\right)^2 = \\ &= 4 \underbrace{\left[n \cdot \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2\right]}_D = 4D > 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-107})$$

Die Ausgleichsgerade  $y = ax + b$  ist damit *eindeutig* bestimmt.

Unter Verwendung der aus den  $x$ - bzw.  $y$ -Komponenten der Messpunkte gebildeten *Mittelwerte*

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_i x_i \quad \text{und} \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_i y_i \quad (\text{IV-108})$$

lassen sich die soeben hergeleiteten Berechnungsformeln für die Steigung  $a$ , auch *empirischer Regressionskoeffizient* genannt, und den Achsenabschnitt  $b$  der Ausgleichsgeraden  $y = ax + b$  auch wie folgt umformen:

*Steigung (Regressionskoeffizient) a:*

$$\begin{aligned} a &= \frac{n \cdot \sum_i x_i y_i - \left(\sum_i x_i\right) \left(\sum_i y_i\right)}{n \cdot \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2} = \frac{n \cdot \sum_i x_i y_i - (n \bar{x})(n \bar{y})}{n \cdot \sum_i x_i^2 - (n \bar{x})^2} = \\ &= \frac{\sum_i x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_i x_i^2 - n \bar{x}^2} \end{aligned} \quad (\text{IV-109})$$

Achsenabschnitt  $b$ :

$$\begin{aligned} b &= \frac{\left(\sum_i x_i^2\right) \left(\sum_i y_i\right) - \left(\sum_i x_i\right) \left(\sum_i x_i y_i\right)}{n \cdot \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2} = \\ &= \frac{\left(\sum_i x_i^2\right) (n \bar{y}) - (n \bar{x}) \left(\sum_i x_i y_i\right)}{n \cdot \sum_i x_i^2 - (n \bar{x})^2} = \frac{\left(\sum_i x_i^2\right) \bar{y} - \bar{x} \left(\sum_i x_i y_i\right)}{\sum_i x_i^2 - n \bar{x}^2} = \end{aligned}$$

(Im Zähler wird jetzt der Term  $n \bar{x}^2 \bar{y}$  addiert und gleichzeitig wieder *subtrahiert*)

$$\begin{aligned} &= \frac{\left(\sum_i x_i^2\right) \bar{y} - \bar{x} \left(\sum_i x_i y_i\right) + n \bar{x}^2 \bar{y} - n \bar{x}^2 \bar{y}}{\sum_i x_i^2 - n \bar{x}^2} = \\ &= \frac{\left(\sum_i x_i^2 - n \bar{x}^2\right) \bar{y} - \left(\sum_i x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}\right) \bar{x}}{\sum_i x_i^2 - n \bar{x}^2} = \\ &= \frac{\left(\sum_i x_i^2 - n \bar{x}^2\right) \bar{y}}{\sum_i x_i^2 - n \bar{x}^2} - \left( \frac{\sum_i x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_i x_i^2 - n \bar{x}^2} \right) \bar{x} = \\ &= \bar{y} - \underbrace{\left( \frac{\sum_i x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_i x_i^2 - n \bar{x}^2} \right)}_a \bar{x} = \bar{y} - a \bar{x} \quad (\text{IV-110}) \end{aligned}$$

Der in der letzten Klammer stehende Ausdruck ist genau der *Regressionskoeffizient a* (siehe Gleichung IV-109). Der Parameter  $b$  lässt sich daher auch aus dem *Regressionskoeffizienten a* und den Mittelwerten  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  nach der Formel

$$b = \bar{y} - a \bar{x} \quad (\text{IV-111})$$

berechnen. Mit Hilfe dieser Beziehung lässt sich die *Ausgleichs-* oder *Regressionsgerade* dann auf die folgende *symmetrische* Form bringen:

$$y - \bar{y} = a(x - \bar{x}) \quad (\text{IV-112})$$

Denn aus  $y = ax + b$  folgt unter Verwendung der Formel (IV-111) unmittelbar:

$$\begin{aligned} y &= ax + b = ax + \bar{y} - a\bar{x} = a(x - \bar{x}) + \bar{y} \Rightarrow \\ y - \bar{y} &= a(x - \bar{x}) \end{aligned} \quad (\text{IV-113})$$

Die *Ausgleichsgerade* verläuft somit durch den „Schwerpunkt“  $S = (\bar{x}; \bar{y})$  der Punktewolke  $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$  (Bild IV-27).

Wir fassen die bisherigen Ergebnisse wie folgt zusammen:

### Bestimmung der Ausgleichs- oder Regressionsgeraden

Gegeben sind  $n$  Wertepaare (Messpunkte)  $(x_i; y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), die in einem Streudiagramm *nahezu* auf einer *Geraden* liegen (Bild IV-26). Steigung oder Regressionskoeffizient  $a$  und Achsenabschnitt  $b$  der zugehörigen *Ausgleichs-* oder *Regressionsgeraden*  $y = ax + b$  lassen sich dann nach den folgenden Formeln berechnen:

$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} \quad (\text{IV-114})$$

$$b = \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \bar{y} - a \bar{x} \quad (\text{IV-115})$$

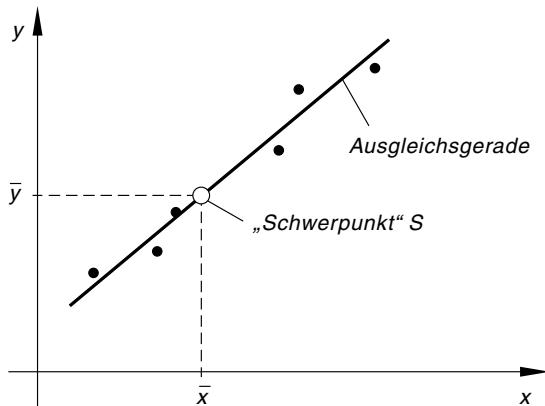
Die Ausgleichsgerade kann aber auch in der speziellen *symmetrischen* Form

$$y - \bar{y} = a(x - \bar{x}) \quad (\text{IV-116})$$

dargestellt werden. Sie verläuft durch den sog. *Schwerpunkt*  $S = (\bar{x}; \bar{y})$  der aus den Messpunkten gebildeten *Punktewolke* (siehe hierzu Bild IV-27).

Dabei bedeuten:

$\bar{x}, \bar{y}$ : Mittelwerte der  $x$ - bzw.  $y$ -Komponenten der  $n$  Messpunkte ( $n \geq 3$ )

**Bild IV-27**

Die Ausgleichsgerade verläuft durch den „Schwerpunkt“  
 $S = (\bar{x}, \bar{y})$

### Anmerkung

Die vorgegebenen  $n$  Messpunkte sind im Sinne der Statistik als eine *zweidimensionale Stichprobe*  $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$  aufzufassen, die einer zweidimensionalen Grundgesamtheit  $(X; Y)$  entnommen wurde. Zwischen den Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  besteht dann die *lineare Beziehung*

$$Y - \mu_Y = a^*(X - \mu_X) \quad (\text{IV-117})$$

Sie wird als *Regressionsgerade der Grundgesamtheit* bezeichnet, wobei  $X$  als *unabhängige* und  $Y$  als von  $X$  *abhängige* Variable angesehen wird.  $\mu_X$  und  $\mu_Y$  sind die *Erwartungs-* oder *Mittelwerte* der beiden Variablen:  $E(X) = \mu_X$  und  $E(Y) = \mu_Y$ . Die Steigung  $a^*$  ist der zugehörige *Regressionskoeffizient*. Der *empirische Regressionskoeffizient*  $a$  ist dabei ein *Schätz-* oder *Näherungswert* für den *theoretischen Regressionskoeffizienten*  $a^*$ , d. h. es gilt  $a^* \approx a$ .

### ■ Beispiel

Wir kommen auf das zu Beginn behandelte einführende Beispiel zurück (Bestimmung der *Temperaturabhängigkeit* eines ohmschen Widerstandes). Dort hatten wir bereits erkannt, dass die acht Messpunkte *nahezu* auf einer *Geraden* liegen (siehe Bild IV-22). Der *lineare Ansatz*

$$R = R(T) = aT + b$$

ist daher gerechtfertigt.

Die Berechnung der noch unbekannten Koeffizienten (Parameter)  $a$  und  $b$  erfolgt dabei zweckmäßigerweise mit Hilfe der folgenden Tabelle:

$i$	$T_i$ °C	$R_i$ Ω	$\frac{T_i^2}{(\text{°C})^2}$	$\frac{T_i R_i}{\text{°C } \Omega}$
1	20	16,30	400	326
2	25	16,44	625	411
3	30	16,61	900	498,3
4	40	16,81	1 600	672,4
5	50	17,10	2 500	855
6	60	17,37	3 600	1 042,2
7	65	17,38	4 225	1 129,7
8	80	17,86	6 400	1 428,8
$\sum$	370	135,87	20 250	6 363,4

Mittelwerte  $\bar{T}$  und  $\bar{R}$ :

$$\bar{T} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{i=1}^8 T_i = \frac{1}{8} \cdot 370 \text{ °C} = 46,25 \text{ °C}$$

$$\bar{R} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{i=1}^8 R_i = \frac{1}{8} \cdot 135,87 \Omega = 16,98375 \Omega$$

Regressionskoeffizient  $a$ :

$$a = \frac{\sum_{i=1}^8 T_i R_i - n \bar{T} \bar{R}}{\sum_{i=1}^8 T_i^2 - n \bar{T}^2} = \frac{6 363,4 \text{ °C } \Omega - 8 (46,25 \text{ °C}) (16,98375 \Omega)}{20 250 (\text{°C})^2 - 8 (46,25 \text{ °C})^2} = 0,025 311 \frac{\Omega}{\text{°C}}$$

Die *Ausgleichsgerade* lautet somit in der speziellen *symmetrischen Form* (IV-116) wie folgt:

$$R - \bar{R} = a(T - \bar{T}) \Rightarrow R - 16,983\,75 \Omega = 0,025\,311 \frac{\Omega}{\text{°C}} (T - 46,25 \text{ °C})$$

In der *Hauptform* erhalten wir (gerundet):

$$R = \left( 0,0253 \frac{\Omega}{\text{°C}} \right) \cdot T + 15,8131 \Omega$$

Die Kurvenparameter  $a$  und  $b$  besitzen somit die Werte

$$a = 0,0253 \frac{\Omega}{\text{°C}} \quad \text{und} \quad b = 15,8131 \Omega$$

Bild IV-28 zeigt den Verlauf der Ausgleichsgeraden.

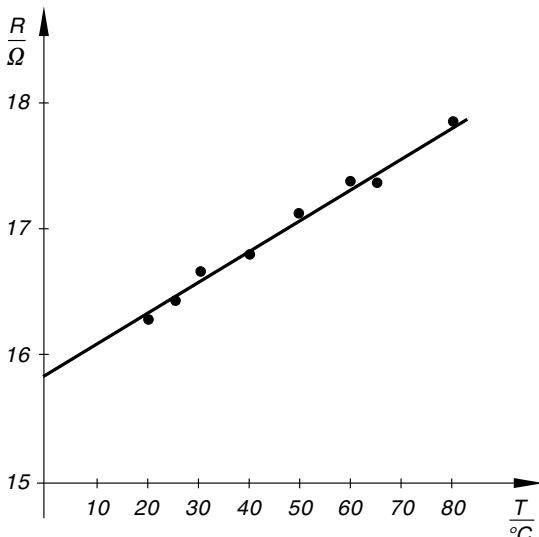


Bild IV-28

Mit Hilfe der *Ausgleichs-* oder *Regressionsgeraden* können wir jetzt im Temperaturbereich zwischen  $20 \text{ °C}$  und  $80 \text{ °C}$  vernünftige *Schätzwerte* für den ohmschen Widerstand erhalten. Z. B. erwarten wir bei einer Temperatur von  $T = 45 \text{ °C}$  einen Widerstandswert von

$$R(T = 45 \text{ °C}) = \left( 0,0253 \frac{\Omega}{\text{°C}} \right) \cdot 45 \text{ °C} + 15,8131 \Omega = 16,9516 \Omega \approx 16,95 \Omega$$

■

### 5.3.2 Streuungsmaße und Unsicherheiten bei der Parameterbestimmung

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit der *Streuung* der Messpunkte  $(x_i; y_i)$  um die Ausgleichsgerade  $y = ax + b$  und den *Unsicherheiten* (Standardabweichungen bzw. Varianzen) der berechneten Parameter  $a$  und  $b$ .

#### Zusammenhang zwischen Regressionskoeffizient $a$ und Korrelationskoeffizient $r$

Der *Regressionskoeffizient*  $a$  der Ausgleichsgeraden

$$y = ax + b \quad \text{oder} \quad y - \bar{y} = a(x - \bar{x}) \quad (\text{IV-118})$$

lässt sich auch durch den *empirischen Korrelationskoeffizienten*  $r$  und die *Standardabweichungen*  $s_x$  und  $s_y$  der  $x$ - bzw.  $y$ -Komponenten der Messpunkte ausdrücken. Aus den Definitionsformeln<sup>17)</sup>

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n-1} \left[ \sum_i x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} \right] \quad (\text{IV-119})$$

und

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left[ \sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2 \right] \quad (\text{IV-120})$$

folgen zunächst die Beziehungen

$$\sum_i x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = (n-1)s_{xy} \quad (\text{IV-121})$$

und

$$\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2 = (n-1)s_x^2 \quad (\text{IV-122})$$

die wir dann in die Formel (IV-114) für den Regressionskoeffizienten  $a$  einsetzen:

$$a = \frac{\sum_i x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{(n-1)s_{xy}}{(n-1)s_x^2} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \quad (\text{IV-123})$$

---

<sup>17)</sup> Es handelt sich um die Gleichungen (III-287) und (III-289) für die empirische Kovarianz bzw. (III-19) und (III-20) für die Varianz. Die Summationsgrenzen 1 und  $n$  lassen wir bei den Zwischenrechnungen weg.

Durch Erweiterung mit  $s_y$  und unter Berücksichtigung der Definitionsformel  $r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$  für den *empirischen Korrelationskoeffizienten* erhalten wir schließlich den gesuchten Zusammenhang:

$$a = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{s_{xy} \cdot s_y}{s_x^2 \cdot s_y} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} \cdot \frac{s_y}{s_x} = r \cdot \frac{s_y}{s_x} = \frac{s_y}{s_x} \cdot r \quad (\text{IV-124})$$

Regressionskoeffizient  $a$  und Korrelationskoeffizient  $r$  sind somit zueinander *proportionale* Größen.

### Empirische Restvarianz

Die Parameter  $a$  und  $b$  im Lösungsansatz  $y = ax + b$  für eine Ausgleichsgerade haben wir gerade so bestimmt, dass die Summe der (vertikalen) Abstandsquadrate ihren *kleinsten* Wert annimmt. Diesen *Minimalwert* wollen wir jetzt berechnen. Unter Berücksichtigung von  $b = \bar{y} - a\bar{x}$  erhalten wir zunächst aus Gleichung (IV-97):

$$\begin{aligned} S(a; b)_{\min} &= \sum_i (y_i - ax_i - b)^2 = \sum_i (y_i - ax_i - \bar{y} + a\bar{x})^2 = \\ &= \sum_i [(y_i - \bar{y}) - a(x_i - \bar{x})]^2 = \\ &= \sum_i [(y_i - \bar{y})^2 - 2a(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + a^2(x_i - \bar{x})^2] = \\ &= \sum_i (y_i - \bar{y})^2 - 2a \cdot \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + a^2 \cdot \sum_i (x_i - \bar{x})^2 \end{aligned} \quad (\text{IV-125})$$

Die in dieser Gleichung auftretenden Summen lassen sich mit Hilfe der Definitionsformeln für  $s_x^2$ ,  $s_y^2$  und  $s_{xy}$  noch wie folgt umschreiben:

$$\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = (n - 1) s_x^2 \quad (\text{IV-126})$$

$$\sum_i (y_i - \bar{y})^2 = (n - 1) s_y^2 \quad (\text{IV-127})$$

$$\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (n - 1) s_{xy} \quad (\text{IV-128})$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} S(a; b)_{\min} &= \sum_i (y_i - \bar{y})^2 - 2a \cdot \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + a^2 \cdot \sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \\ &= (n - 1) s_y^2 - 2a(n - 1) s_{xy} + a^2 \cdot (n - 1) s_x^2 = \\ &= (n - 1)(s_y^2 - 2a \cdot s_{xy} + a^2 \cdot s_x^2) \end{aligned} \quad (\text{IV-129})$$

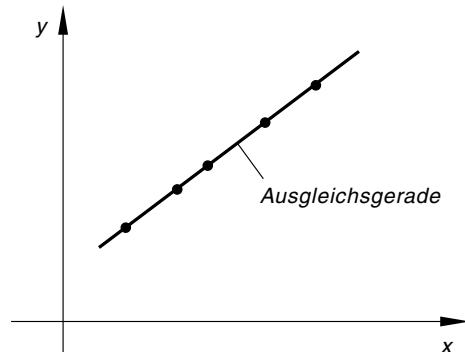
Setzen wir in diese Gleichung noch die aus der Gleichung (IV-123) gewonnene Beziehung  $s_{xy} = a \cdot s_x^2$  ein, so folgt weiter:

$$\begin{aligned} S(a; b)_{\min} &= (n - 1) [s_y^2 - 2a(a \cdot s_x^2) + a^2 \cdot s_x^2] = \\ &= (n - 1) (s_y^2 - a^2 \cdot s_x^2) \end{aligned} \quad (\text{IV-130})$$

Jetzt drücken wir noch den Regressionskoeffizienten  $a$  durch den Korrelationskoeffizienten  $r$  mit Hilfe der Beziehung (IV-124) aus und erhalten so schließlich:

$$\begin{aligned} S(a; b)_{\min} &= (n - 1) (s_y^2 - a^2 \cdot s_x^2) = (n - 1) \left( s_y^2 - \frac{s_y^2}{s_x^2} \cdot r^2 \cdot s_x^2 \right) = \\ &= (n - 1) (s_y^2 - s_y^2 \cdot r^2) = (n - 1) (1 - r^2) s_y^2 \end{aligned} \quad (\text{IV-131})$$

Diese Summe der (vertikalen) Abweichungsquadrate *verschwindet* genau dann, wenn der empirische Korrelationskoeffizient den Wert  $r = -1$  oder  $r = +1$  annimmt. Alle  $n$  Messpunkte  $(x_i; y_i)$  liegen dann auf einer *Geraden*, nämlich der Ausgleichsgeraden (Bild IV-29). Dieses Ergebnis aber ist uns bereits aus Kap. III, Abschnitt 6.1.1 bekannt.



**Bild IV-29**

Sonderfall: Sämtliche Messpunkte liegen auf der Ausgleichsgeraden

### Varianz und Standardabweichung der berechneten Parameter

Im Allgemeinen jedoch werden die Messpunkte – wie in den Bildern IV-26 und IV-27 dargestellt – um die Ausgleichsgerade *streuhen*. Die durch die Gleichung

$$s_{\text{Rest}}^2 = \frac{S(a; b)_{\min}}{n - 2} = \frac{(n - 1)(1 - r^2)s_y^2}{n - 2} \quad (n \geq 3) \quad (\text{IV-132})$$

definierte *empirische Restvarianz* stellt dann ein geeignetes *Maß* für die *Streuung* der Messpunkte um die Ausgleichsgerade dar. Die durch Wurzelziehen erhaltene Größe  $s_{\text{Rest}}$  charakterisiert somit die *Unsicherheit* der Messwerte  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Die Restvarianz *verschwindet* dabei genau dann, wenn *sämtliche* Messpunkte auf einer *Geraden* liegen und dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn der empirische Korrelationskoeffizient den Wert  $r = -1$  oder  $r = +1$  annimmt.

Während sich die Ordinatenwerte  $y_1, y_2, \dots, y_n$  der  $n$  Messpunkte  $(x_i; y_i)$  von Stichprobe zu Stichprobe infolge der Zufallsstreuung verändern, bleiben die Abszissenwerte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  unverändert. Denn  $X$  ist eine gewöhnliche Variable,  $Y$  dagegen eine Zufallsvariable! Daher verändern sich auch die Parameter  $a$  und  $b$  der Ausgleichsgeraden  $y = ax + b$  mit der Stichprobe. Regressionskoeffizient  $a$  und Achsenabschnitt  $b$  sind somit Funktionen der (streuenden) Ordinatenmesswerte  $y_1, y_2, \dots, y_n$  und folglich ebenfalls mit gewissen Unsicherheiten behaftet<sup>18)</sup>. Die Unsicherheiten bei der Bestimmung der Parameter  $a$  und  $b$  werden dabei durch die folgenden Varianzen bzw. deren Quadratwurzeln beschrieben<sup>19)</sup>:

$$s_a^2 = \frac{n \cdot s_{\text{Rest}}^2}{n \cdot \sum_i x_i^2 - \left( \sum_i x_i \right)^2} = \frac{(1 - r^2) s_y^2}{(n - 2) s_x^2} \quad (\text{IV-133})$$

$$s_b^2 = \frac{\left( \sum_i x_i^2 \right) \cdot s_{\text{Rest}}^2}{n \cdot \sum_i x_i^2 - \left( \sum_i x_i \right)^2} = \frac{(n - 1) s_x^2 + n \bar{x}^2}{n} \cdot s_a^2 \quad (\text{IV-134})$$

Wir fassen diese wichtigen Aussagen wie folgt zusammen:

### Eigenschaften einer Ausgleichs- oder Regressionsgeraden

Eine aus  $n$  Wertepaaren (Messpunkten)  $(x_i; y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $n \geq 3$ ) bestimmte Ausgleichs- oder Regressionsgerade

$$y = ax + b \quad \text{oder} \quad y - \bar{y} = a(x - \bar{x}) \quad (\text{IV-135})$$

besitzt die folgenden Eigenschaften:

- (1) Zwischen der meist als Regressionskoeffizient bezeichneten Steigung  $a$  der Ausgleichsgeraden und dem empirischen Korrelationskoeffizienten  $r$  der Messpunkte besteht der folgende Zusammenhang:

$$a = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{s_y}{s_x} \cdot r \quad (\text{IV-136})$$

d. h.  $a$  und  $r$  sind zueinander proportional.

<sup>18)</sup> Diese Unsicherheiten sind eine direkte Folge der Unsicherheit der  $y$ -Messwerte. Es handelt sich hier also um eine Fortpflanzung von „Fehlern“ bzw. Varianzen.

<sup>19)</sup>  $s_a$  und  $s_b$  sind die Standardabweichungen der beiden Parameter  $a$  und  $b$ .

(2) Die *empirische Restvarianz*

$$s_{\text{Rest}}^2 = \frac{(n - 1)(1 - r^2)s_y^2}{n - 2} \quad (n \geq 3) \quad (\text{IV-137})$$

ist ein Maß für die *Streuung* der Messpunkte um die Ausgleichsgerade. Die zugehörige *Standardabweichung*  $s_{\text{Rest}}$  (d. h. die Quadratwurzel aus der Restvarianz) charakterisiert somit die *Unsicherheit* der y-Messwerte.

Die empirische Restvarianz *verschwindet* dabei genau dann, wenn *sämtliche* Messpunkte auf der *Ausgleichsgeraden* liegen. Dies wiederum ist der Fall, wenn der empirische Korrelationskoeffizient den Wert  $r = -1$  oder  $r = +1$  besitzt, d. h.  $r^2 = 1$  ist (siehe hierzu Bild IV-29).

- (3) Infolge der *zufallsbedingten* Streuung der Messpunkte um die Ausgleichsgerade  $y = ax + b$  sind auch deren Parameter  $a$  und  $b$  mit *Unsicherheiten* behaftet. Die Parameterwerte besitzen dabei die folgenden *Varianzen*:

*Varianz des Regressionskoeffizienten a (Steigung der Ausgleichsgeraden):*

$$s_a^2 = \frac{n \cdot s_{\text{Rest}}^2}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{(1 - r^2)s_y^2}{(n - 2)s_x^2} \quad (\text{IV-138})$$

*Varianz des Parameters b (Achsenabschnitt der Ausgleichsgeraden):*

$$s_b^2 = \frac{\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot s_{\text{Rest}}^2}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{(n - 1)s_x^2 + n\bar{x}^2}{n} \cdot s_a^2 \quad (\text{IV-139})$$

Die zugehörigen *Standardabweichungen*  $s_a$  und  $s_b$  (d. h. die Quadratwurzeln aus den Varianzen) liefern dann ein geeignetes Maß für die *Unsicherheiten* der Parameter  $a$  und  $b$ .

In den angegebenen Formeln bedeuten dabei:

$\bar{x}, \bar{y}$ : *Mittelwerte* der  $x$ - bzw.  $y$ -Komponenten der  $n$  Messpunkte

$s_x, s_y$ : *Standardabweichungen* der  $x$ - bzw.  $y$ -Komponenten der  $n$  Messpunkte

$s_{xy}$ : *Empirische Kovarianz* der  $n$  Messpunkte (Kovarianz der Stichprobe  $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$ )

$r$ : *Empirischer Korrelationskoeffizient* (Korrelationskoeffizient der Stichprobe  $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$ )

*Anmerkung*

Die *empirische Restvarianz* nach Gleichung (IV-137) erhält man, indem man die *minimierte* Summe der Abstandsquadrate, also  $S(a; b)_{\min}$ , durch die Anzahl  $f$  der sog. *Freiheitsgrade* dividiert. Dabei gilt allgemein:

$$f = n - k \quad (\text{IV-140})$$

wobei  $n$  die Anzahl der *Messpunkte* und  $k$  die Anzahl der zu bestimmenden *Kurvenparameter* im Lösungsansatz bedeuten. Bei der Ausgleichsgeraden sind  $k = 2$  Parameter (nämlich  $a$  und  $b$ ) zu bestimmen und somit gibt es in diesem Fall  $f = n - 2$  Freiheitsgrade.

## ■ Beispiel

Im Beispiel des letzten Abschnitts hatten wir die *Temperaturabhängigkeit* eines ohmschen Widerstandes aus acht Messpunkten mit Hilfe einer *Ausgleichsgeraden* ermittelt. Wir erhielten dabei den folgenden Zusammenhang zwischen dem Widerstand  $R$  (in  $\Omega$ ) und der Temperatur  $T$  (in  $^{\circ}\text{C}$ ):

$$R = \left( 0,0253 \frac{\Omega}{^{\circ}\text{C}} \right) \cdot T + 15,8131 \Omega$$

(siehe hierzu auch Bild IV-28). Wir führen dieses Beispiel nun zu Ende und wollen uns noch mit der *Streuung* der Messpunkte um die ermittelte Ausgleichsgerade und den *Unsicherheiten* der Parameter  $a$  und  $b$  beschäftigen. Die dabei benötigten Werte für den *empirischen Korrelationskoeffizienten*  $r$  und die *Varianzen*  $s_T^2$  und  $s_R^2$  der Messgrößen  $T$  und  $R$  sind aus Kap. III., Abschnitt 6 (Übungsaufgabe 3) bereits bekannt:

$$r = 0,9974, \quad s_T^2 = 448,2149 (^{\circ}\text{C})^2, \quad s_R^2 = 0,2887 \Omega^2$$

Damit erhalten wir nach Formel (IV-137) eine *empirische Restvarianz* von

$$s_{\text{Rest}}^2 = \frac{(n - 1)(1 - r^2)s_R^2}{n - 2} = \frac{(8 - 1)(1 - 0,9974^2) \cdot 0,2887 \Omega^2}{8 - 2} = 0,0017 \Omega^2$$

Der *kleine* Wert bestätigt dabei nochmals, dass die Messpunkte in sehr guter Näherung auf einer *Geraden* liegen.

Für die *Varianzen* der Parameter  $a$  und  $b$  folgt unter Verwendung der Formeln (IV-138) und (IV-139) und unter Berücksichtigung des Mittelwertes  $\bar{T} = 46,25 ^{\circ}\text{C}$ :

$$\begin{aligned} s_a^2 &= \frac{(1 - r^2)s_R^2}{(n - 2)s_T^2} = \frac{(1 - 0,9974^2) \cdot 0,2887 \Omega^2}{(8 - 2) \cdot 448,2149 (^{\circ}\text{C})^2} = 55,7 \cdot 10^{-8} \frac{\Omega^2}{(^{\circ}\text{C})^2} \\ s_b^2 &= \frac{(n - 1)s_T^2 + n\bar{T}^2}{n} \cdot s_a^2 = \\ &= \frac{(8 - 1) \cdot 448,2149 (^{\circ}\text{C})^2 + 8 \cdot (46,25 ^{\circ}\text{C})^2}{8} \cdot 55,7 \cdot 10^{-8} \frac{\Omega^2}{(^{\circ}\text{C})^2} = \\ &= 14,1 \cdot 10^{-4} \Omega^2 \end{aligned}$$

Damit ergeben sich folgende *Unsicherheiten* für *Regressionskoeffizient*  $a$  und *Achsenabschnitt*  $b$ :

$$s_a = 0,0007 \Omega/\text{ }^{\circ}\text{C}, \quad s_b = 0,0375 \Omega$$

■

## 5.4 Ausgleichs- oder Regressionsparabel

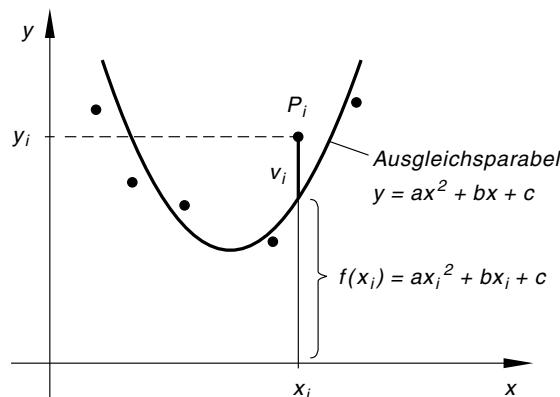
Liegen die in das Streudiagramm eingetragenen  $n$  Messpunkte  $P_i = (x_i; y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) nahezu auf einer *Parabel*, so wählt man zweckmäßigerweise einen *quadratischen* Lösungsansatz in Form einer sog. *Ausgleichs- oder Regressionsparabel*

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \quad (\text{IV-141})$$

(Bild IV-30). Der *vertikale Abstand* des  $i$ -ten Messpunktes von dieser Parabel beträgt dann

$$v_i = y_i - f(x_i) = y_i - (ax_i^2 + bx_i + c) = y_i - ax_i^2 - bx_i - c \quad (\text{IV-142})$$

(liegt  $P_i$  oberhalb der Parabel wie in Bild IV-30, so ist  $v_i > 0$ , ansonsten gilt  $v_i \leq 0$ ).



**Bild IV-30**

Zur Bestimmung  
der Ausgleichsparabel

Die zunächst unbekannten Kurvenparameter (Koeffizienten)  $a$ ,  $b$  und  $c$  werden dabei nach der *Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate* wiederum so bestimmt, dass die Summe der vertikalen Abstandsquadrate aller Messpunkte ihren *kleinsten* Wert annimmt:

$$S(a; b; c) = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2 \rightarrow \text{Minimum} \quad (\text{IV-143})$$

Dazu müssen die drei partiellen Ableitungen 1. Ordnung von  $S(a; b; c)$  notwendigerweise verschwinden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot (-x_i^2) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot (-x_i) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial c} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) \cdot (-1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV-144})$$

Wir erhalten damit drei *lineare* Gleichungen mit den drei Unbekannten  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Dieses *quadratische lineare Gleichungssystem* lässt sich dann mit Hilfe der *Cramerschen Regel* oder durch Anwendung des *Gaußschen Algorithmus* lösen.

### Bestimmung der Ausgleichs- oder Regressionsparabel

Gegeben sind  $n$  Wertepaare (Messpunkte)  $(x_i; y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), die in einem Streudiagramm *nahezu* auf einer *Parabel* liegen (Bild IV-30). Die Parameter (Koeffizienten)  $a$ ,  $b$  und  $c$  der zugehörigen *Ausgleichs-* oder *Regressionsparabel*

$$y = ax^2 + bx + c \quad (\text{IV-145})$$

lassen sich dann z. B. mit Hilfe der *Cramerschen Regel* oder des *Gaußschen Algorithmus* aus den folgenden *Normalgleichungen* eindeutig bestimmen:

$$\left. \begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n x_i^4 \right) \cdot a + \left( \sum_{i=1}^n x_i^3 \right) \cdot b + \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot c &= \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ \left( \sum_{i=1}^n x_i^3 \right) \cdot a + \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot b + \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot c &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot a + \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot b + n \cdot c &= \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV-146})$$

### Anmerkungen

- (1) Eine Ausgleichskurve in Form einer *Parabel* ist nur möglich, wenn *mindestens vier* Messpunkte vorliegen ( $n \geq 4$ ).
- (2) Die drei Normalgleichungen (IV-146) erhält man aus dem Gleichungssystem (IV-144) durch Auflösen der Summen und anschließendem Ordnen der Glieder.

## ■ Beispiel

Bei einem bestimmten Autotyp soll der Zusammenhang zwischen dem *Bremsweg*  $s$  (in m) und der *Geschwindigkeit*  $v$  (in km/h) näher untersucht werden. Dazu wurde der Bremsweg bei fünf verschiedenen Geschwindigkeiten gemessen. Man erhielt dabei die folgenden Messwertepaare :

$i$	1	2	3	4	5
$v_i$	40	70	100	130	150
$s_i$	14	39	78	120	153

Als Ausgleichskurve wählen wir aufgrund des *Streuungsdiagramms* nach Bild IV-31 eine *Parabel* vom Typ

$$s = a v^2 + b v + c$$

Die Kurvenparameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  dieser *Ausgleichsparabel* bestimmen wir zweckmäßigerweise anhand der folgenden Tabelle (die Einheiten haben wir der besseren Übersicht wegen weggelassen):

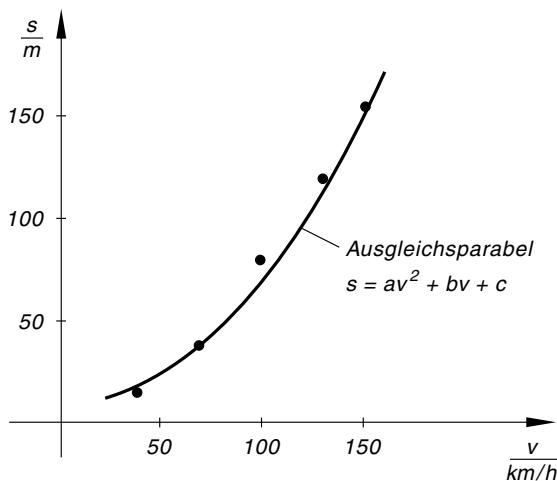
$i$	$v_i$	$s_i$	$v_i^2$	$v_i^3$	$v_i^4$	$v_i^2 s_i$	$v_i s_i$
1	40	14	1 600	64 000	2 560 000	22 400	560
2	70	39	4 900	343 000	24 010 000	191 100	2 730
3	100	78	10 000	1 000 000	100 000 000	780 000	7 800
4	130	120	16 900	2 197 000	285 610 000	2 028 000	15 600
5	150	153	22 500	3 375 000	506 250 000	3 442 500	22 950
$\sum$	490	404	55 900	6 979 000	918 430 000	6 464 000	49 640

Die *Normalgleichungen* (IV-146) haben damit das folgende Aussehen:

$$(I) \quad 918\,430\,000 \cdot a + 6\,979\,000 \cdot b + 55\,900 \cdot c = 6\,464\,000$$

$$(II) \quad 6\,979\,000 \cdot a + 55\,900 \cdot b + 490 \cdot c = 49\,640$$

$$(III) \quad 55\,900 \cdot a + 490 \cdot b + 5 \cdot c = 404$$



**Bild IV-31** Der Bremsweg  $s$  ist nahezu eine quadratische Funktion der Geschwindigkeit  $v$  („Ausgleichsparabel“)

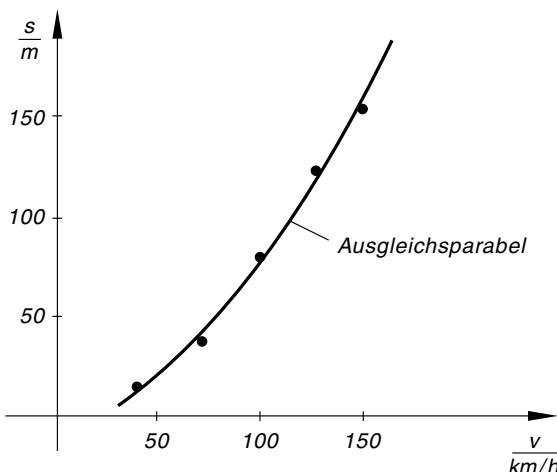
Wir lösen dieses *quadratische lineare Gleichungssystem* z. B. mit Hilfe des *Gaußschen Algorithmus* und erhalten die Parameterwerte

$$a = 0,004\,399, \quad b = 0,437\,217, \quad c = -11,23$$

Die gesuchte *Ausgleichsparabel* lautet somit ( $v$  in km/h,  $s$  in m):

$$s = 0,004\,399 \cdot v^2 + 0,437\,217 \cdot v - 11,23$$

Ihr Verlauf ist in Bild IV-32 dargestellt.



**Bild IV-32**

Mit Hilfe der *Ausgleichsparabel* können wir jetzt im Geschwindigkeitsbereich von 40 km/h bis hin zu 150 km/h den Bremsweg für eine vorgegebene Geschwindigkeit *abschätzen*. So erwarten wir beispielsweise bei einer Geschwindigkeit von 90 km/h einen Bremsweg von

$$s(v = 90) = 0,004\,399 \cdot 90^2 + 0,437\,217 \cdot 90 - 11,23 = 63,75 \quad (\text{in m})$$

Der Bremsweg beträgt daher bei der Geschwindigkeit  $v = 90$  km/h *rund* 64 m. ■

## 5.5 Nichtlineare Ausgleichsprobleme, die auf lineare Regression zurückführbar sind

Viele *nichtlineare* Lösungsansätze für Ausgleichskurven lassen sich durch eine geeignete *Transformation* auf den rechnerisch erheblich einfacheren *linearen* Ansatz zurückführen. Wir zeigen dies am Beispiel der *Exponential-* und *Potenzfunktionen*, die sich im *halb- bzw. doppellogarithmischen* Funktionspapier durch *lineare* Funktionen, d. h. durch *Geraden* darstellen lassen.

**Exponentialfunktion  $y = a \cdot e^{bx}$  (mit  $a > 0$ )**

Durch *Logarithmieren* unter Verwendung der bekannten Rechenregeln folgt zunächst:

$$\ln y = \ln(a \cdot e^{bx}) = \ln a + \ln(e^{bx}) = \ln a + bx = bx + \ln a \quad (\text{IV-147})$$

Wir führen jetzt die formale *Transformation*

$$u = x, \quad v = \ln y \quad (\text{IV-148})$$

durch, setzen dabei noch  $c = b$  und  $d = \ln a$  und erhalten dann die *Gerade*

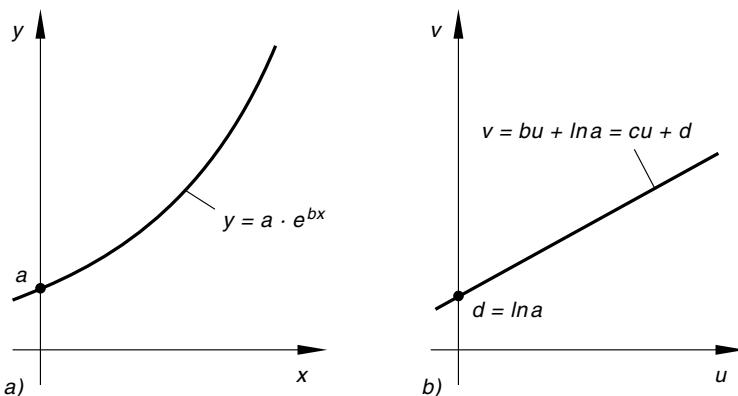
$$v = cu + d \quad (\text{IV-149})$$

Durch diese Transformation wird also eine *Exponentialfunktion* in eine *lineare* Funktion übergeführt:

$$y = a \cdot e^{bx} \xrightarrow[v=\ln y]{u=x} v = cu + d \quad (\text{IV-150})$$

( $c = b$ ,  $d = \ln a$ ). Bildlich bedeutet dies: Wenn wir auf der *vertikalen* Koordinatenachse  $\ln y$  und auf der *horizontalen* Achse (wie bisher)  $x$  abtragen, erhalten wir eine *Gerade* (Bild IV-33). Die *vertikale* Achse wird also *logarithmisch* geteilt, während die *horizontale* wie bisher *linear* geteilt bleibt. Ein entsprechendes Funktionspapier ist im Handel erhältlich und heißt *halblogarithmisches* Koordinatenpapier. Bei dieser Transformation gehen die Wertepaare  $(x_i; y_i)$  in die *neuen* Wertepaare  $(u_i; v_i) = (x_i; \ln y_i)$  über, mit denen wir dann eine *lineare* Regression durchführen. Sie liefert uns die Werte der beiden „Hilfsparameter“  $c$  und  $d$ , aus denen wir dann durch *Rücktransformation* die gesuchten Kurvenparameter  $a$  und  $b$  des Exponentialansatzes erhalten:

$$\ln a = d \Rightarrow a = e^d \quad \text{und} \quad b = c \quad (\text{IV-151})$$



**Bild IV-33** Eine Exponentialfunktion (Bild a)) lässt sich auf *halblogarithmischem* Papier durch eine Gerade darstellen (Bild b); gezeichnet für  $a > 1$ )

**Potenzfunktion**  $y = a \cdot x^b$  (**mit**  $a > 0$  **und**  $x > 0$ )

Durch *Logarithmieren* folgt zunächst:

$$\ln y = \ln(a \cdot x^b) = \ln a + \ln(x^b) = \ln a + b \cdot \ln x = b \cdot \ln x + \ln a \quad (\text{IV-152})$$

Mit Hilfe der *Transformation*

$$u = \ln x, \quad v = \ln y \quad (\text{IV-153})$$

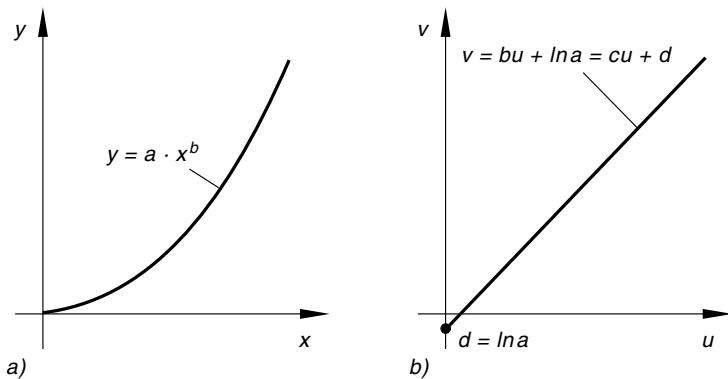
erhalten wir hieraus die *Gerade*

$$v = c u + d \quad (\text{IV-154})$$

wobei wir noch  $c = b$  und  $d = \ln a$  gesetzt haben. Mit anderen Worten: Wenn wir also auf *beiden* Koordinatenachsen die (natürlichen) *Logarithmen* der Koordinaten  $x$  und  $y$  auftragen, erhalten wir eine *Gerade* (Bild IV-34). Beide Achsen werden also *logarithmisch* geteilt, ein entsprechendes im Handel erhältliches Funktionspapier heißt daher *doppellogarithmisch*.

Die beiden „Hilfsparameter“  $c$  und  $d$  erhalten wir wiederum durch *lineare Ausgleichung*, die mit den *transformierten* Messwertpaaren  $(u_i; v_i) = (\ln x_i; \ln y_i)$  durchgeführt wird. Durch *Rücktransformation* gewinnt man dann daraus die gesuchten Kurvenparameter  $a$  und  $b$  des *Potenzansatzes*:

$$\ln a = d \Rightarrow a = e^d \quad \text{und} \quad b = c \quad (\text{IV-155})$$



**Bild IV-34** Eine Potenzfunktion (Bild a)) lässt sich auf *doppellogarithmischem* Papier durch eine Gerade darstellen (Bild b); gezeichnet für  $0 < a < 1$ )

### Nichtlineare Ausgleichsprobleme, die sich linearisieren lassen

Zahlreiche *nichtlineare* Lösungsansätze lassen sich mit Hilfe geeigneter *Transformationen* auf ein *lineares Ausgleichsproblem* vom Typ  $v = cu + d$  zurückführen. Tabelle 4 gibt einen Überblick über die in den Anwendungen besonders häufig auftretenden Fälle. Man beachte jedoch den Hinweis zu dieser Tabelle!

**Tabelle 4:** Transformationen, die einen nichtlinearen Ansatz für eine Ausgleichskurve auf ein lineares Ausgleichsproblem zurückführen

Ansatz	Transformation $u =$	Transformation $v =$	transformierter linearer Ansatz	Rücktransformation
$y = a \cdot x^b$	$\ln x$	$\ln y$	$v = cu + d$	$a = e^d$ , $b = c$
$y = a \cdot e^{bx}$	$x$	$\ln y$	$v = cu + d$	$a = e^d$ , $b = c$
$y = \frac{a}{x} + b$	$\frac{1}{x}$	$y$	$v = cu + d$	$a = c$ , $b = d$
$y = \frac{a}{b+x}$	$x$	$\frac{1}{y}$	$v = cu + d$	$a = \frac{1}{c}$ , $b = \frac{d}{c}$
$y = \frac{ax}{b+x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$	$v = cu + d$	$a = \frac{1}{d}$ , $b = \frac{c}{d}$

### Hinweis zur Tabelle 4

Man beachte, dass *nach* der Linearisierung des vorgegebenen Ausgleichsproblems stets eine *lineare* Regression mit den *transformierten* Messwertpaaren  $(u_i; v_i)$  durchgeführt wird. Diese Vorgehensweise ist zwar rechentechnisch gesehen *elementar* durchführbar und daher in der Praxis sehr beliebt, führt jedoch *nicht* zu den tatsächlichen Werten der Kurvenparameter  $a, b \dots$ , sondern nur zu (meist jedoch völlig ausreichenden) *Näherungswerten!* Die *exakte* Bestimmung der Parameter kann nur über die *Minimierung* der eigentlichen *Zielfunktion*

$$S(a; b; \dots) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \quad (\text{IV-156})$$

(Summe der vertikalen Abstandsquadrate) erfolgen, die mit dem gewählten *nichtlinearen* Lösungsansatz  $y = f(x)$  und den vorgegebenen Messwertpaaren  $(x_i; y_i)$  gebildet wird. Die *exakten* Parameterwerte sind dann allerdings nur mit erheblichem numerischen Rechenaufwand zu erhalten, so dass man in der Praxis meist den beschriebenen *bequemeren* Weg vorzieht.

### ■ Beispiele

- (1) Die *Entladung* eines Kondensators mit der Kapazität  $C$  über einen ohmschen Widerstand  $R$  erfolgt nach einem *Exponentialgesetz*. Für den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung gilt:

$$u(t) = u_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0)$$

( $u_0$ : Anfangsspannung zur Zeit  $t = 0$ ). In einem Experiment wurden dabei folgende Werte gemessen ( $t_i$  in s,  $u_i$  in V):

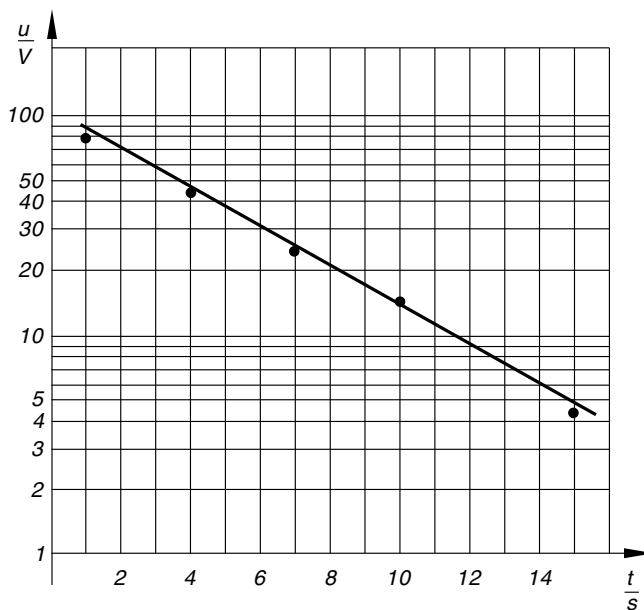
$i$	1	2	3	4	5
$t_i$	1,0	4,0	7,0	10,0	15,0
$u_i$	80,2	45,5	24,5	13,9	4,7

Wir berechnen aus diesen Daten die *Anfangsspannung*  $u_0$  und die *Zeitkonstante*  $RC$ . Das Exponentialgesetz führt in der *halblogarithmischen* Darstellung zu der Geraden

$$\ln u = \ln u_0 - \frac{t}{RC} \quad \text{oder} \quad y = at + b$$

mit  $y = \ln u$ ,  $a = -\frac{1}{RC}$  und  $b = \ln u_0$ . Die Messpunkte  $(t_i; y_i) = (t_i; \ln u_i)$

liegen daher in dieser Darstellung *nahezu* auf einer *Geraden* (Bild IV-35).



**Bild IV-35** Bei halblogarithmischer Darstellung liegen die Messpunkte nahezu auf einer Geraden

Wir bestimmen jetzt *Steigung* und *Achsenabschnitt* der *Ausgleichsgeraden*  $y = at + b$  oder  $y - \bar{y} = a(t - \bar{t})$  unter Verwendung der folgenden Tabelle:

$i$	$t_i$	$u_i$	$y_i = \ln u_i$	$t_i^2$	$t_i y_i$
1	1	80,2	4,384 524	1	4,384 524
2	4	45,5	3,817 712	16	15,270 848
3	7	24,5	3,198 673	49	22,390 711
4	10	13,9	2,631 889	100	26,318 890
5	15	47	1,547 563	225	23,213 445
$\sum$	37		15,580 361	391	91,578 418

$$\bar{t} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{i=1}^5 t_i = \frac{1}{5} \cdot 37 = 7,4$$

$$\bar{y} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{i=1}^5 y_i = \frac{1}{5} \cdot 15,580 361 = 3,116 072$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^5 t_i y_i - n \bar{t} \bar{y}}{\sum_{i=1}^5 t_i^2 - n \bar{t}^2} = \frac{91,578\,411 - 5 \cdot 7,4 \cdot 3,116\,072}{391 - 5 \cdot 7,4^2} = -0,202\,357$$

Die *Ausgleichsgerade* lautet damit in der speziellen *symmetrischen Form*

$$y - 3,116\,072 = -0,202\,357 (t - 7,4)$$

bzw. in der *Hauptform*

$$y = -0,202\,357 \cdot t + 4,613\,514$$

Die *Parameter a* und *b* haben somit die folgenden Werte:

$$a = -0,202\,357, \quad b = 4,613\,514$$

Für  $u_0$  und  $RC$  erhalten wir hieraus durch *Rücktransformation*:

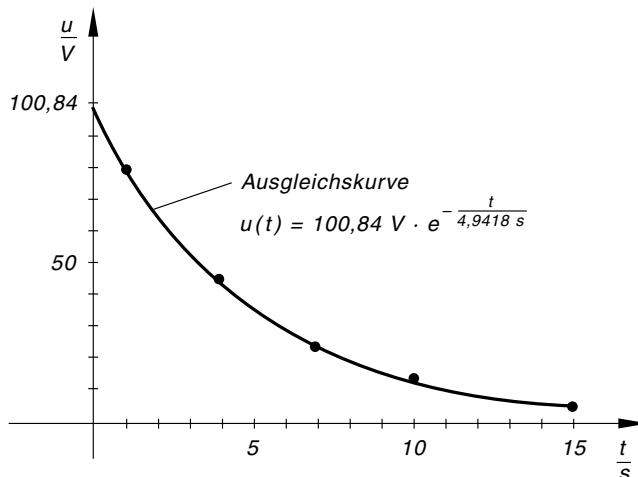
$$\ln u_0 = b \Rightarrow u_0 = e^b = e^{4,613\,514} = 100,84 \quad (\text{in V})$$

$$a = -\frac{1}{RC} \Rightarrow RC = -\frac{1}{a} = -\frac{1}{-0,202\,357} = 4,9418 \quad (\text{in s})$$

Die Kondensatorspannung  $u(t)$  genügt somit dem *exponentiellen Zeitgesetz*

$$u(t) = 100,84 \text{ V} \cdot e^{-\frac{t}{4,9418 \text{ s}}} \quad (t \geq 0)$$

dessen Verlauf in Bild IV-36 dargestellt ist.

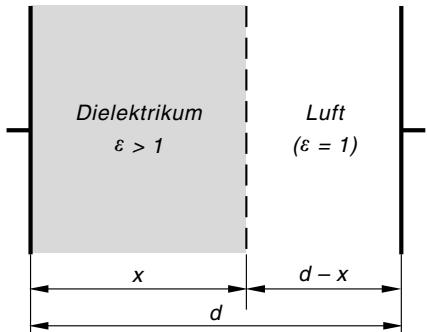


**Bild IV-36** Exponentielle Ausgleichskurve für die Entladung eines Kondensators

- (2) Bild IV-37 zeigt einen Plattenkondensator mit einem *geschichteten* Dielektrikum. Aus physikalischen Überlegungen weiß man, dass die Kapazität  $C$  des Kondensators mit der Schichtdicke  $x$  des Dielektrikums *zunimmt*. Der Zusammenhang der beiden Größen ist dabei durch eine einfache *echt gebrochenrationale* Funktion vom Typ

$$C = C(x) = \frac{1}{ax + b} \quad (0 \leq x \leq d)$$

gegeben ( $d$ : Plattenabstand).



**Bild IV-37**  
Plattenkondensator  
mit geschichtetem Dielektrikum

Auf experimentellem Wege wurden die folgenden fünf Messwertpaare ermittelt ( $x$  in cm,  $C$  in  $\mu\text{F}$ ; Plattenabstand:  $d = 4 \text{ cm}$ ):

$i$	1	2	3	4	5
$x_i$	0	1,0	1,5	2,5	4,0
$C_i$	55	71	84	124	555

Wir setzen  $y = \frac{1}{C}$  und erhalten anstelle der gebrochenrationalen Funktion die *lineare* Funktion (Gerade)

$$y = \frac{1}{C} = ax + b$$

Die Kurvenparameter  $a$  und  $b$  bestimmen wir durch *lineare Regression* unter Verwendung der folgenden Tabelle:

$i$	$x_i$	$C_i$	$y_i = \frac{1}{C_i}$	$x_i^2$	$x_i y_i$
1	0	55	0,018 182	0	0
2	1,0	71	0,014 085	1	0,014 085
3	1,5	84	0,011 905	2,25	0,017 858
4	2,5	124	0,008 065	6,25	0,020 163
5	4,0	555	0,001 802	16	0,007 208
$\sum$	9,0		0,054 039	25,50	0,059 314

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{1}{5} \cdot 9 = 1,8$$

$$\bar{y} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{i=1}^5 y_i = \frac{1}{5} \cdot 0,054 039 = 0,010 808$$

Regressionskoeffizient  $a$ :

$$a = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{0,059 310 - 5 \cdot 1,8 \cdot 0,010 808}{25,50 - 5 \cdot 1,8^2} = -0,004 082$$

Achsenabschnitt  $b$ :

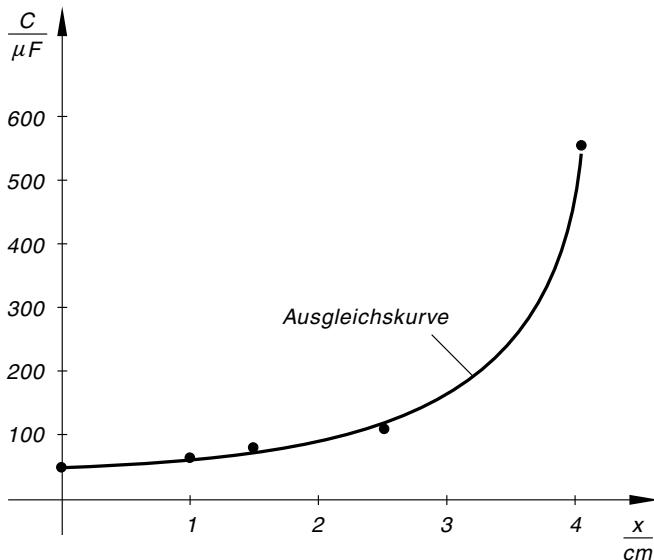
$$b = \bar{y} - a \bar{x} = 0,010 808 - (-0,004 082) \cdot 1,8 = 0,018 156$$

Die gesuchte gebrochenrationale Ausgleichskurve lautet somit im Intervall  $0 \leq x \leq 4$ :

$$C = C(x) = \frac{1}{-0,004 082 \cdot x + 0,018 156} \quad (x \text{ in cm; } C \text{ in } \mu\text{F})$$

Bild IV-38 zeigt den Verlauf dieser Funktion. Bei einer Schichtdicke von 3,3 cm erwarten wir somit eine Kondensatorkapazität von

$$C(x = 3,3) = \frac{1}{-0,004\,082 \cdot 3,3 + 0,018\,156} = 213,4 \text{ (in } \mu\text{F})$$



**Bild IV-38** Die Ausgleichskurve beschreibt die Abhängigkeit der Kapazität von der Schichtdicke des Dielektrikums

- (3) Ein *Thermistor* oder *Heißleiter* ist ein Halbleiter, dessen elektrischer Widerstand  $R$  mit zunehmender absoluter Temperatur  $T$  nach der Gleichung

$$R = R(T) = A \cdot e^{\frac{B}{T}}$$

stark abnimmt (gute Leitfähigkeit im „heißen“ Zustand, schlechte Leitfähigkeit im „kalten“ Zustand). Mit den Methoden der *linearen Regression* sollen die Kurvenparameter  $A$  und  $B$  aus der folgenden Messreihe ermittelt werden ( $\vartheta$ : Temperatur des Heißleiters in °C):

$\frac{\vartheta}{\text{°C}}$	20	40	60	80	100
$\frac{R}{\Omega}$	510	290	178	120	80

Dabei ist noch zu beachten, dass die Temperaturwerte aus der Einheit °C in die Einheit Kelvin (K) der absoluten Temperatur umgerechnet werden müssen.

Die Umrechnungsformel lautet:

$$T = \vartheta \frac{K}{^{\circ}C} + 273,15 K$$

Wir linearisieren die Gleichung, indem wir zunächst beidseitig *logarithmieren* und anschließend geeignete Hilfsvariable einführen:

$$\ln R = \ln \left( A \cdot e^{\frac{B}{T}} \right) = \ln A + \ln e^{\frac{B}{T}} = \ln A + \frac{B}{T} = B \cdot \frac{1}{T} + \ln A$$

Mit  $y = \ln R$ ,  $x = \frac{1}{T}$ ,  $a = B$  und  $b = \ln A$  erhalten wir die *Ausgleichsgerade*

$$y = ax + b$$

deren Koeffizienten  $a$  und  $b$  aus den Gleichungen (IV-114) und (IV-115) mit Hilfe des folgenden Rechenschemas berechnet werden (die Einheiten bleiben bei den Zwischenrechnungen unberücksichtigt;  $x_i = 1/T_i$ ;  $y_i = \ln R_i$ ):

$i$	$T_i$	$\frac{x_i}{10^{-3}}$	$y_i$	$\frac{x_i^2}{10^{-6}}$	$\frac{x_i y_i}{10^{-3}}$
1	293,15	3,4112	6,2344	11,6363	21,2668
2	313,15	3,1934	5,6699	10,1978	18,1063
3	333,15	3,0017	5,1818	9,0102	15,5542
4	353,15	2,8317	4,7875	8,0185	13,5568
5	373,15	2,6799	4,3820	7,1819	11,7433
$\sum$		15,1179	26,2556	46,0447	80,2274

$$\begin{aligned} \Delta &= n \cdot \sum_{i=1}^5 x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^5 x_i \right)^2 = \\ &= 5 \cdot 46,0447 \cdot 10^{-6} - (15,1179 \cdot 10^{-3})^2 = 1,6726 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

( $\Delta$  ist der gemeinsame Nenner in den Formeln (IV-114) und (IV-115))

$$\begin{aligned} a &= \frac{n \cdot \sum_{i=1}^5 x_i y_i - \left( \sum_{i=1}^5 x_i \right) \left( \sum_{i=1}^5 y_i \right)}{\Delta} = \\ &= \frac{5 \cdot 80,2274 \cdot 10^{-3} - 15,1179 \cdot 10^{-3} \cdot 26,2556}{1,6726 \cdot 10^{-6}} = 2515,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{\left(\sum_{i=1}^5 x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^5 y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^5 x_i\right) \left(\sum_{i=1}^5 x_i y_i\right)}{\Delta} = \\
 &= \frac{46,0447 \cdot 10^{-6} \cdot 26,2556 - 15,1179 \cdot 10^{-3} \cdot 80,2274 \cdot 10^{-3}}{1,6726 \cdot 10^{-6}} = \\
 &= -2,3548
 \end{aligned}$$

Für die Parameter  $A$  und  $B$  ergeben sich somit folgende Werte:

$$\ln A = b \Rightarrow A = e^b = e^{-2,3548} = 0,0949 \quad (\text{in } \Omega)$$

$$B = a = 2515,5 \quad (\text{in K})$$

Die *Widerstandskennlinie* des Heißleiters wird damit durch die Gleichung

$$R(T) = 0,0949 \Omega \cdot e^{\frac{2515,5 \text{ K}}{T}}$$

oder

$$R(\vartheta) = 0,0949 \Omega \cdot e^{\left(\frac{2515,5 \text{ } ^\circ\text{C}}{\vartheta + 273,15 \text{ } ^\circ\text{C}}\right)}$$

beschrieben. Bild IV-39 zeigt den Verlauf dieser Kennlinie im Temperaturbereich  $10 \text{ } ^\circ\text{C} \leq \vartheta \leq 110 \text{ } ^\circ\text{C}$ . Die Messwerte sind dabei als Punkte eingezeichnet.

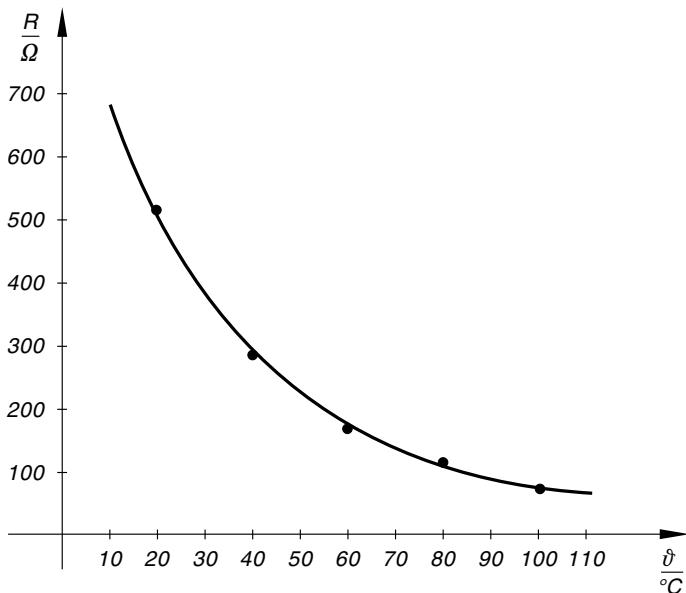


Bild IV-39

## Übungsaufgaben

### Zu Abschnitt 3

- 1) Die an einem Widerstand abfallende *Spannung*  $U$  wurde sechsmal mit gleicher Genauigkeit gemessen:

$i$	1	2	3	4	5	6
$\frac{U_i}{V}$	80,5	81,2	80,6	80,9	80,8	81,4

Wie groß ist der Mittelwert  $\bar{U}$  der Spannung?

Bestimmen Sie die *Standardabweichung* der *Einzelmessung* und des *Mittelwertes*.

- 2) Werten Sie die folgenden Messreihen in der üblichen Weise aus (Angabe des *Mittelwertes*, der *Standardabweichung* der *Einzelmessung* und des *Mittelwertes*). Wie lauten die *Vertrauensintervalle* für den *Mittelwert* bei einem Vertrauensniveau von  $\gamma_1 = 95\%$  bzw.  $\gamma_2 = 99\%$ ?

a) *Widerstandsmessung*:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{R_i}{\Omega}$	115	118	111	112	116	111	114	115

b) Messung des *Luftdrucks* in Meereshöhe:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{p_i}{\text{bar}}$	1,008	1,015	1,012	1,011	1,010	1,015	1,013	1,015

- 3) Die *Erdbeschleunigung*  $g$  wurde achtmal gemessen:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{g_i}{\text{m/s}^2}$	9,82	9,79	9,79	9,80	9,85	9,81	9,82	9,80

Man berechne den *Mittelwert* sowie die *Standardabweichung* der *Einzelmessung* und des *Mittelwertes*.

Bestimmen Sie ferner die *Vertrauensgrenzen* für den *Mittelwert* bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha_1 = 5\%$  bzw.  $\alpha_2 = 1\%$ . Wie groß sind die entsprechenden *Messunsicherheiten*? Geben Sie schließlich die *Messergebnisse* in der allgemein üblichen Form an (*Mittelwert  $\pm$  Messunsicherheit*).

- 4) Die Messung eines *elektrischen Widerstandes*  $R$  erfolge mit einer Standardabweichung von  $s_R = 1,4 \Omega$ . Wie viele Messungen sind *mindestens* notwendig, damit die Standardabweichung des Mittelwertes *höchstens*  $s_{\bar{R}} = 0,2 \Omega$  beträgt?
- 5) Die Auswertung einer *umfangreichen* Messreihe, bestehend aus  $n = 100$  Einzelmessungen, ergab für die *Masse*  $m$  eines Körpers die folgenden Werte:

$$\text{Mittelwert: } \bar{m} = 105 \text{ g}$$

$$\text{Standardabweichung der Einzelmessung: } s_m = 3 \text{ g}$$

- a) Wie viele der insgesamt 100 Messwerte dürfen wir *zwischen* 103 g und 108 g erwarten?
- b) Wie viele Messwerte liegen *oberhalb* von 110 g?

*Hinweis:* Wir setzen voraus, dass die Messwerte *normalverteilt* sind.

- 6) In einem Experiment wurde die *Fallzeit*  $T$  eines Steins beim freien Fall in einen Brunnen untersucht. Es ergaben sich die folgenden zwanzig Messwerte:

$$4,1 \quad 4,2 \quad 4,0 \quad 4,1 \quad 3,9 \quad 4,0 \quad 4,2 \quad 3,8 \quad 3,9 \quad 3,8$$

$$4,0 \quad 4,2 \quad 4,0 \quad 4,0 \quad 3,9 \quad 4,1 \quad 4,1 \quad 4,0 \quad 4,2 \quad 3,8$$

(alle Angaben in Sekunden).

Geben Sie das *Messergebnis* für eine Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 5\%$  an.

- 7) Die Auswertung einer aus neun Einzelmessungen bestehenden Messreihe ergab einen Mittelwert von  $\bar{x} = 10,0$  und eine Standardabweichung von  $s = 1,3$  für die Einzelmessungen. Bestimmen Sie die *Vertrauensgrenzen* für den *Mittelwert* auf dem Vertrauensniveau  $\gamma = 95\%$ .
- 8) Eine normalverteilte Größe  $X$  wurde zehnmal wie folgt gemessen:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i$	21	22	21	20	21	23	21	21	20	20

Aufgrund der Erfahrungen aus früheren Messungen kann die Standardabweichung  $\sigma$  der *normalverteilten* Grundgesamtheit dabei als *bekannt* vorausgesetzt werden. Sie beträgt  $\sigma = 1,2$ . Wie groß ist die *Messunsicherheit* der Messgröße  $X$  bei einem Vertrauensniveau von  $\gamma = 95\%$ ? Wie lautet das *Messergebnis*?

## Zu Abschnitt 4

**Hinweis:** Wir verwenden hier die nach DIN 1319 empfohlenen Bezeichnungen. Die Messergebnisse der *direkt* gemessenen Größen werden stets in der Form

$$(\text{Messergebnis}) = (\text{Mittelwert}) \pm (\text{Messunsicherheit})$$

vorgegeben, wobei als Maß für die Messunsicherheit (kurz: Unsicherheit) die *Standardabweichung des Mittelwertes* verwendet wird. Das „*Messergebnis*“ für die „*indirekte* Messgröße“ (abhängige Größe) wird dann in der gleichen Form dargestellt.

- 1) Bei einem *Federpendel* besteht zwischen der Schwingungsdauer  $T$ , der Federkonstanten  $c$  und der Pendelmasse  $m$  die folgende Beziehung:

$$T = 2\pi \sqrt{m/c}$$

Wie groß ist die *prozentuale Messunsicherheit* der *Schwingungsdauer*, wenn die Größen  $m$  und  $c$  mit einer prozentualen Unsicherheit von jeweils 1% gemessen werden?

- 2) Um die *Masse*  $m$  eines homogenen Zylinders zu bestimmen, wurden folgende Messungen vorgenommen (jeweils von gleicher Genauigkeit):

Zylinderhöhe:  $h = 24,0 \text{ cm} \pm 3 \%$

Radius:  $r = 17,5 \text{ cm} \pm 3 \%$

Dichte:  $\varrho = 2,50 \text{ g/cm}^3 \pm 2 \%$

Welchen *mittleren* Wert erhält man für die *Zylindermasse*  $m$ ?

Wie groß ist die *absolute* bzw. *relative Messunsicherheit* von  $m$ ?

- 3) Bestimmen Sie die *Höhe*  $h$  eines Turms, dessen Spitze aus der Entfernung  $e$  unter dem Erhebungswinkel  $\alpha$  erscheint (Bild IV-40).

Wie groß ist die *absolute* bzw. die *prozentuale Messunsicherheit* von  $h$ , wenn  $e$  und  $\alpha$  wie folgt gemessen wurden?

$$e = (75,2 \pm 2,5) \text{ m}; \quad \alpha = (30 \pm 1)^\circ$$

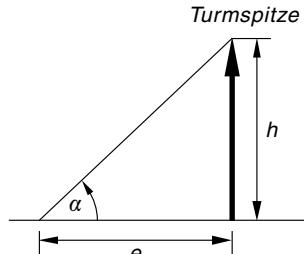


Bild IV-40

- 4) Kapazität  $C$  und Induktivität  $L$  eines ungedämpften *elektromagnetischen Schwingkreises* wurden wie folgt gemessen:

$$C = (5,0 \pm 0,2) \mu\text{F}; \quad L = (0,20 \pm 0,01) \text{ H} \quad (1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F})$$

Bestimmen Sie die *Schwingungsdauer*  $T$  nach der Formel  $T = 2\pi \sqrt{LC}$  sowie die *absolute* und die *prozentuale Messunsicherheit* von  $T$ .

- 5) Die Kantenlängen  $a, b$  und  $c$  eines Quaders werden mit einer Genauigkeit von jeweils 3 % gemessen (prozentuale Messunsicherheiten). Berechnen Sie die prozentuale Messunsicherheit des Quadervolumens  $V$ .
- 6) Der ohmsche Widerstand  $R$  einer Spule lässt sich aus dem Spannungsabfall  $U$  und der Stromstärke  $I$  aus dem *ohmschen Gesetz*  $R = \frac{U}{I}$  berechnen. In einem Experiment wurden die folgenden Werte gemessen:
- $$U = (120,10 \pm 1,43) \text{ V}; \quad I = (3,45 \pm 0,15) \text{ A}$$
- Wie lautet das *Messergebnis* für die *abhängige* Größe  $R$ ?
  - Wie groß ist die *prozentuale Messunsicherheit* des Widerstandes  $R$ ?
- 7) Das *Widerstandsmoment*  $W$  eines Balkens mit rechteckigem Querschnitt wird nach der Formel

$$W = W(b; h) = \frac{1}{6} b h^2$$

berechnet ( $b$ : Breite des Balkens;  $h$ : Höhe (Dicke) des Balkens). In einem Experiment wurden dabei die folgenden Messwerte ermittelt:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{b_i}{\text{cm}}$	18,0	17,6	17,9	18,2	18,2	18,1	18,3	17,7	18,4	18,6
$\frac{h_i}{\text{cm}}$	10,3	10,1	10,1	10,0	10,2	10,3	9,8	9,8	10,1	10,3

Bestimmen Sie die *Mittelwerte* sowie die *absoluten Messunsicherheiten* der drei Größen  $b, h$  und  $W(b; h)$ .

- 8) Der in Bild IV-41 skizzierte *elektromagnetische Schwingkreis* enthält die beiden Kapazitäten  $C_1 = (10 \pm 0,5) \text{ nF}$  und  $C_2 = (50 \pm 2,0) \text{ nF}$  sowie die Induktivität  $L = (5 \pm 0,2) \text{ mH}$  in Parallelschaltung. Berechnen Sie den *Mittelwert* und die *Messunsicherheit* der *Schwingungsdauer*

$$T = 2\pi \sqrt{L(C_1 + C_2)}$$

( $1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$ ;  $1 \text{ mH} = 10^{-3} \text{ H}$ ).

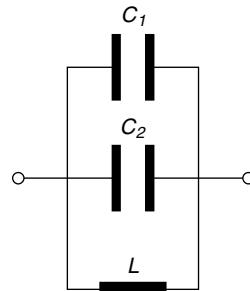


Bild IV-41

- 9) Das *Massenträgheitsmoment*  $J$  einer Kugel bezüglich eines Durchmessers wird aus dem Kugelradius  $R$  und der Masse  $m$  wie folgt ermittelt:

$$J = \frac{2}{5} m R^2$$

Mit welcher *Genauigkeit* lässt sich das Massenträgheitsmoment bestimmen, wenn  $m$  mit 3 % und  $R$  mit 2 % ungenau gemessen werden (Angabe der *prozentualen Messunsicherheit*)?

- 10) Das *Volumen* eines Würfels soll eine Genauigkeit von mindestens 3 % aufweisen. Wie groß darf die *prozentuale Messunsicherheit* der Kantenlänge  $a$  höchstens sein?
- 11) Bestimmen Sie aus den Messwerten  $x = 50 \pm 0,2$  und  $y = 40 \pm 0,2$  den *Mittelwert* und die *Messunsicherheit* der Differenz  $z = x - y$ . Was fällt bei einem Vergleich der *relativen (prozentualen)* Messunsicherheiten der Größen  $x$ ,  $y$  und  $z$  auf?
- 12) Mit einer *Brückenschaltung* wurden die Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  jeweils sechsmal mit gleicher Genauigkeit gemessen:

$\frac{R_1}{\Omega}$	96,5	97,2	98,6	95,9	97,1	96,7
$\frac{R_2}{\Omega}$	40,1	42,3	41,5	40,7	41,9	42,5

- a) Wie lauten die *Messergebnisse* für  $R_1$  und  $R_2$ ?
- b) Der *Gesamtwiderstand*  $R$  der Parallelschaltung aus  $R_1$  und  $R_2$  wird nach der Formel

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{oder} \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

berechnet. Wie wirken sich die Messunsicherheiten  $\Delta R_1$  und  $\Delta R_2$  auf die Messunsicherheit  $\Delta R$  des *Gesamtwiderstandes* aus? Geben Sie das *Messergebnis* für den Gesamtwiderstand  $R$  in der Form  $R = \bar{R} \pm \Delta R$  an.

## Zu Abschnitt 5

- 1) Bestimmen und zeichnen Sie die jeweilige *Ausgleichsgerade*  $y = ax + b$ :

a)	$i$	1	2	3	4	5
	$x_i$	0	1	2	3	4
	$y_i$	2,10	0,85	-0,64	-2,20	-3,60

b)	$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
	$x_i$	1,5	1,7	2,5	3,1	3,5	4,0	4,6	5,9
	$y_i$	1,9	2,2	2,7	3,4	4,1	4,2	5,3	6,1

Mit welchen *Unsicherheiten* werden die Kurvenparameter bestimmt? Wie groß ist die jeweilige *Restvarianz* bzw. die *Unsicherheit* der  $y$ -Messwerte?

- 2) Gegeben sind fünf Messpunkte  $P_i = (x_i; y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ):

$i$	1	2	3	4	5
$x_i$	-2	0	2	4	6
$y_i$	5,8	2,6	-0,8	-3,9	-7,5

- a) Wie lautet die Gleichung derjenigen *Geraden*, die sich diesen Punkten im Sinne der Ausgleichsrechnung „am Besten“ anpasst?  
 b) Bestimmen Sie die *Restvarianz* und daraus die *Unsicherheit* der  $y$ -Messwerte.  
 c) Welchen  $y$ -Wert dürfen wir für  $x = -1$  und  $x = 4,5$  „erwarten“?  
 3) Bei einem Dieselmotor wurde die Abhängigkeit zwischen der *Drehzahl*  $X$  (in Umdrehungen pro Minute) und der *Leistung*  $Y$  (in PS) untersucht. Man erhielt das folgende Messprotokoll:

$i$	1	2	3	4	5	6	7
$x_i$	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500
$y_i$	5	8	12	17	24	31	36

- a) Bestimmen Sie die zugehörige *Ausgleichsgerade*.  
 b) Welche Motorleistung ist bei einer Drehzahl von 2150 Umdrehungen pro Minute zu „erwarten“?  
 4) Gegeben ist die zweidimensionale Stichprobe

$i$	1	2	3	4	5	6
$x_i$	0	1	2	3	4	5
$y_i$	-0,9	1,45	4,1	6,4	9,15	11,3

Wählen Sie einen *geeigneten Lösungsansatz* für eine Ausgleichskurve und bestimmen Sie die zugehörigen Kurvenparameter (Lösungsansatz begründen!).

- 5) Die Untersuchung der *Lösbarkeit*  $L$  von  $\text{NaNO}_3$  in Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur  $T$  führte zu den folgenden Messwertpaaren:

$i$	1	2	3	4	5	6
$T_i$	0	20	40	60	80	100
$L_i$	70,7	88,3	104,9	124,7	148,0	176,2

( $L$  in Gramm pro 100 Gramm Wasser,  $T$  in Grad Celsius).

- a) Begründen Sie, warum hier eine *lineare* Regression angebracht ist und bestimmen Sie die *Ausgleichsgerade*  $L = aT + b$ .
  - b) Welche Löslichkeiten sind aufgrund der Ausgleichsgeraden für die Temperaturen  $30^\circ\text{C}$  und  $95^\circ\text{C}$  zu „erwarten“?
- 6) Zeigen Sie anhand der Punktwolke, dass für die fünf Messpunkte

$i$	1	2	3	4	5
$x_i$	0	2	3	5	7
$y_i$	2	0	0	1	4

eine *parabelförmige* Ausgleichskurve sinnvoll ist. Bestimmen Sie die *Parameter* und die Gleichung dieser Ausgleichsparabel.

- 7) Auf einer *Teststrecke* wurde der Bremsweg  $s$  eines Autos bei fünf verschiedenen Geschwindigkeiten  $v$  gemessen:

$i$	1	2	3	4	5
$\frac{v_i}{\text{km/h}}$	32	50	80	100	125
$\frac{s_i}{\text{m}}$	16,2	31,0	63,5	95,0	146,5

Bestimmen Sie die Koeffizienten  $a$ ,  $b$  und  $c$  der *Ausgleichsparabel* mit der Gleichung  $s = a v^2 + b v + c$ . Welchen *Schätzwert* für den Bremsweg erhält man hieraus für eine Geschwindigkeit von  $v = 90 \text{ km/h}$ ?

- 8) Bestimmen Sie nach der „*Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate*“ diejenige *Exponentialfunktion* vom Typ  $y = a \cdot e^{bx}$ , die sich den vier Messpunkten

$i$	1	2	3	4
$x_i$	0	1	2	3
$y_i$	5,1	1,75	1,08	0,71

in „optimaler“ Weise anpasst ( $a > 0$ ).

*Anleitung:* Die Exponentialfunktion wird in der *halblogarithmischen* Darstellung durch die *Gerade*  $v = cu + d$  dargestellt ( $u = x$ ,  $v = \ln y$ ,  $c = b$  und  $d = \ln a$ ). Dabei geht der Punkt  $P_i = (x_i; y_i)$  in den Punkt  $Q_i = (u_i; v_i)$  über. Man bestimme daher zunächst die zu den Punkten  $Q_i$  gehörende *Ausgleichsgerade* und daraus dann die Parameter  $a$  und  $b$  der Exponentialfunktion.

- 9) Wie lautet die Gleichung der *Potenzfunktion*  $y = a \cdot x^b$ , die sich den Messpunkten

$i$	1	2	3	4	5
$x_i$	1	2	3	4	5
$y_i$	1	3,1	5,6	9,1	12,9

„optimal“ anpasst?

*Anleitung:* In der *doppellogarithmischen* Darstellung erhält man für die Potenzfunktion das Bild einer *Geraden*  $v = cu + d$  mit  $u = \ln x$ ,  $v = \ln y$ ,  $c = b$  und  $d = \ln a$ . Dabei geht der Punkt  $P_i = (x_i; y_i)$  in den Punkt  $Q_i = (u_i; v_i)$  über. Man bestimme daher zunächst die zu den Punkten  $Q_i$  gehörende *Ausgleichsgerade* und daraus dann die Parameter  $a$  und  $b$  der Potenzfunktion.

- 10) Zwischen zwei Messgrößen erwartet man aufgrund bestimmter Überlegungen einen funktionalen Zusammenhang vom gebrochenrationalen Typ  $y = (a + bx)/x$ .

- a) Man bestimme die Koeffizienten  $a$  und  $b$  nach der „*Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate*“ unter Verwendung folgender Messpunkte:

$i$	1	2	3	4	5
$x_i$	-2	-1	1	2	4
$y_i$	1	-0,5	5,6	3,8	3,3

- b) Welchen Ordinatenwert (Schätzwert) „erwartet“ man für  $x = 3$ ?

- c) Zeichnen Sie die Ausgleichskurve mitsamt den vorgegebenen Messpunkten.

*Hinweis:* Man führe dieses *nichtlineare* Ausgleichsproblem durch eine geeignete Variablentransformation auf ein *lineares* Problem zurück.

# Anhang

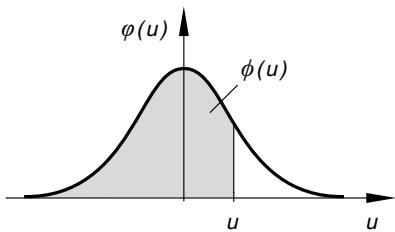
## Teil A: Tabellen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

<b>Tabelle 1:</b> Verteilungsfunktion $\phi(u)$ der Standardnormalverteilung .....	740
<b>Tabelle 2:</b> Quantile der Standardnormalverteilung .....	742
<b>Tabelle 3:</b> Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung .....	744
<b>Tabelle 4:</b> Quantile der $t$ -Verteilung von „Student“ .....	746

## Teil B: Lösungen der Übungsaufgaben

<b>I Vektoranalysis</b> .....	750
<b>II Wahrscheinlichkeitsrechnung</b> .....	796
<b>III Grundlagen der mathematischen Statistik</b> .....	819
<b>IV Fehler- und Ausgleichsrechnung</b> .....	843

**Tabelle 1:** Verteilungsfunktion  $\phi(u)$  der Standardnormalverteilung



Schrittweite:  $\Delta u = 0,01$

Für *negative* Argumente verwende man die Formel

$$\phi(-u) = 1 - \phi(u) \quad (u > 0)$$

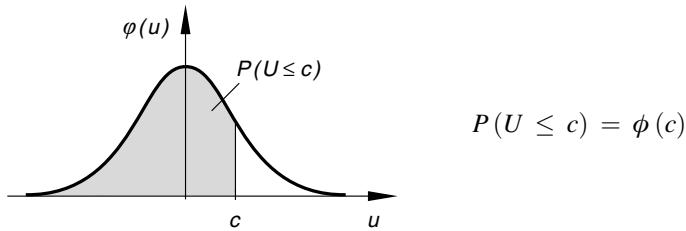
Für  $u \geq 4$  ist  $\phi(u) \approx 1$ .

**Zahlenbeispiele**

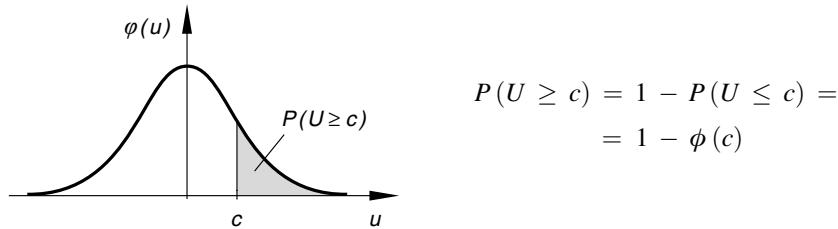
- (1)  $\phi(1,32) = 0,9066$
- (2)  $\phi(1,855) = 0,9682$  (durch lineare Interpolation)
- (3)  $\phi(-2,36) = 1 - \phi(2,36) = 1 - 0,9909 = 0,0091$

**Formeln zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten**

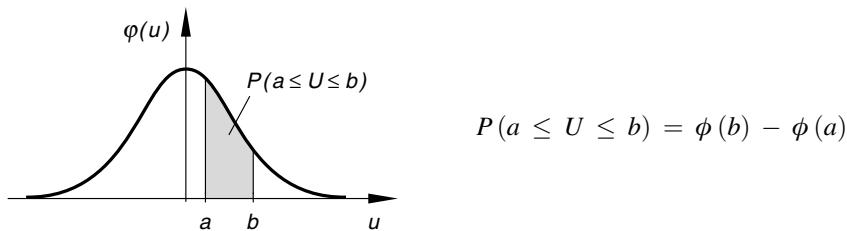
- (1) Einseitige Abgrenzung nach oben ( $c > 0$ )



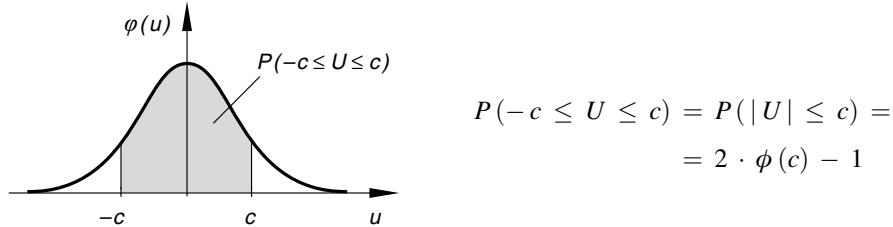
- (2) Einseitige Abgrenzung nach unten ( $c > 0$ )

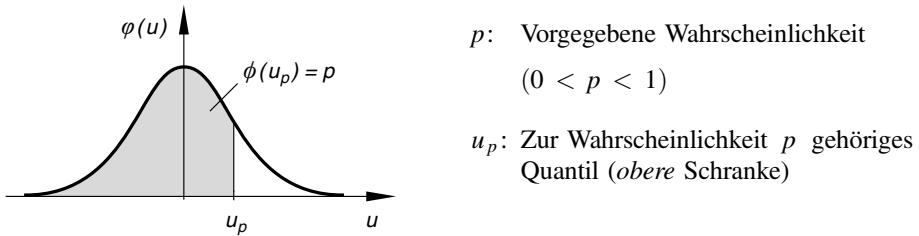


- (3) Zweiseitige (unsymmetrische) Abgrenzung ( $a < b$ )



- (4) Zweiseitige (symmetrische) Abgrenzung ( $c > 0$ )



**Tabelle 2:** Quantile der Standardnormalverteilung

Die Tabelle enthält für spezielle Werte von  $p$  das jeweils zugehörige Quantil  $u_p$  (*einseitige Abgrenzung nach oben*).

$p$	$u_p$	$p$	$u_p$
0,90	1,282	0,1	-1,282
0,95	1,645	0,05	-1,645
0,975	1,960	0,025	-1,960
0,99	2,326	0,01	-2,326
0,995	2,576	0,005	-2,576
0,999	3,090	0,001	-3,090

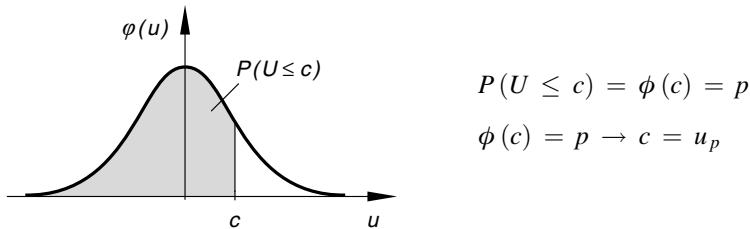
*Formeln:*

$$u_{1-p} = -u_p$$

$$u_p = -u_{1-p}$$

### Formeln zur Berechnung von Quantilen der Standardnormalverteilung

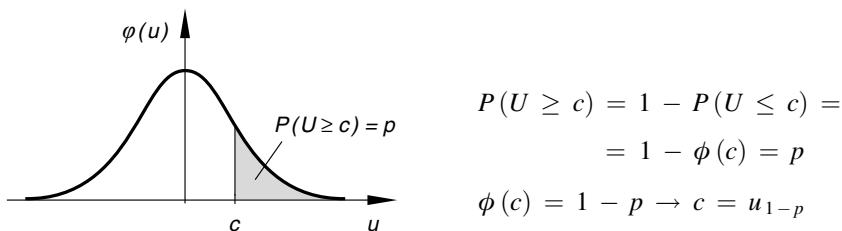
(1) Einseitige Abgrenzung nach oben



Zahlenbeispiel:

$$P(U \leq c) = \phi(c) = 0,90 \rightarrow c = u_{0,90} = 1,282$$

(2) Einseitige Abgrenzung nach unten

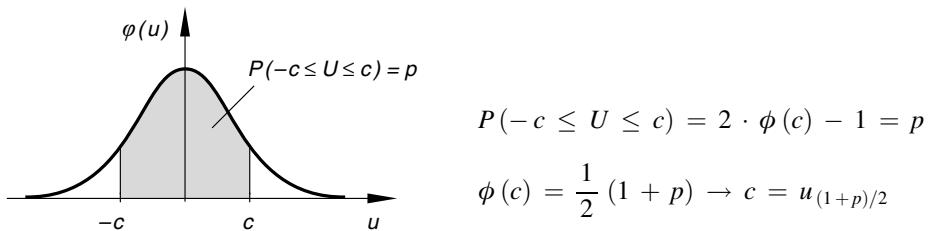


Zahlenbeispiel:

$$P(U \geq c) = 1 - P(U \leq c) = 1 - \phi(c) = 0,90$$

$$\phi(c) = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow c = u_{0,10} = -1,282$$

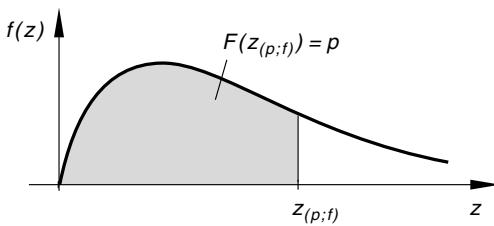
(3) Zweiseitige (symmetrische) Abgrenzung



Zahlenbeispiel:

$$P(-c \leq U \leq c) = 2 \cdot \phi(c) - 1 = 0,90$$

$$\phi(c) = \frac{1}{2} (1 + 0,90) = 0,95 \rightarrow c = u_{0,95} = 1,645$$

**Tabelle 3:** Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung

$p$ : Vorgegebene Wahrscheinlichkeit  
( $0 < p < 1$ )

$f$ : Anzahl der Freiheitsgrade

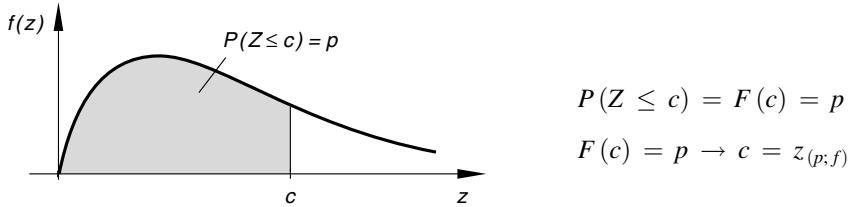
$z_{(p;f)}$ : Zur Wahrscheinlichkeit  $p$  gehöriges Quantil bei  $f$  Freiheitsgraden (*obere Schranke*)

Die Tabelle enthält für spezielle Werte von  $p$  das jeweils zugehörige Quantil  $z_{(p;f)}$  in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad  $f$  (*einseitige Abgrenzung nach oben*).

$f$	$p$									
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	0,000	0,000	0,001	0,004	0,016	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,01	0,020	0,051	0,103	0,211	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,35	12,84
4	0,21	0,297	0,484	0,711	1,064	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,554	0,831	1,15	1,16	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	0,872	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,06	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,67	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
22	8,6	9,5	11,0	12,3	14,0	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
24	9,9	10,9	12,4	13,8	15,7	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	20,7	22,2	24,4	26,5	29,1	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	28,0	29,7	32,4	34,8	37,7	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	35,5	37,5	40,5	43,2	46,5	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	43,3	45,4	48,8	51,7	55,3	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	51,2	53,5	57,2	60,4	64,3	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90	59,2	61,8	65,6	69,1	73,3	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	67,3	70,1	74,2	77,9	82,4	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

### Formeln zur Berechnung von Quantilen der Chi-Quadrat-Verteilung

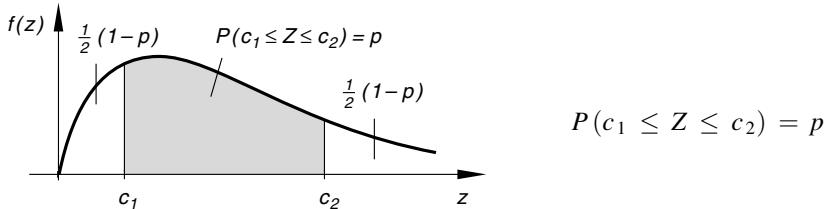
- (1) Einseitige Abgrenzung nach oben ( $c > 0$ )



Zahlenbeispiel (bei  $f = 10$  Freiheitsgraden):

$$P(Z \leq c) = F(c) = 0,90 \xrightarrow{f=10} c = z_{(0,90; 10)} = 15,99$$

- (2) Zweiseitige (symmetrische) Abgrenzung ( $c_1 < c_2$ )



Bestimmung der Schranken (Grenzen)  $c_1$  und  $c_2$ :

$$P(Z \leq c_1) = F(c_1) = \frac{1}{2} (1 - p)$$

$$F(c_1) = \frac{1}{2} (1 - p) \rightarrow c_1 = z_{((1-p)/2; f)}$$

$$P(Z \geq c_2) = 1 - P(Z \leq c_2) = 1 - F(c_2) = \frac{1}{2} (1 - p)$$

$$F(c_2) = \frac{1}{2} (1 + p) \rightarrow c_2 = z_{((1+p)/2; f)}$$

Zahlenbeispiel (bei  $f = 10$  Freiheitsgraden):

$$P(c_1 \leq Z \leq c_2) = 0,90$$

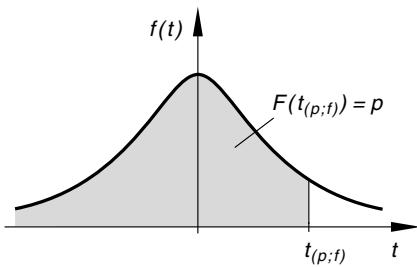
$$P(Z \leq c_1) = F(c_1) = \frac{1}{2} (1 - 0,90) = 0,05$$

$$F(c_1) = 0,05 \xrightarrow{f=10} c_1 = z_{(0,05; 10)} = 3,94$$

$$P(Z \geq c_2) = 1 - P(Z \leq c_2) = 1 - F(c_2) = \frac{1}{2} (1 - 0,90) = 0,05$$

$$F(c_2) = \frac{1}{2} (1 + 0,90) = 0,95 \xrightarrow{f=10} c_2 = z_{(0,95; 10)} = 18,31$$

Somit gilt:  $c_1 = 3,94$  und  $c_2 = 18,31$

**Tabelle 4:** Quantile der  $t$ -Verteilung von „Student“

$p$ : Vorgegebene Wahrscheinlichkeit  
( $0 < p < 1$ )

$f$ : Anzahl der Freiheitsgrade

$t_{(p;f)}$ : Zur Wahrscheinlichkeit  $p$  gehöriges Quantil bei  $f$  Freiheitsgraden (*obere Schranke*)

Die Tabelle enthält für spezielle Werte von  $p$  das jeweils zugehörige Quantil  $t_{(p;f)}$  in Abhängigkeit vom Freiheitsgrad  $f$  (*einseitige Abgrenzung nach oben*).

$f$	$p$				
	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	3,078	6,314	12,707	31,820	63,654
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626
200	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601
500	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\infty$	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

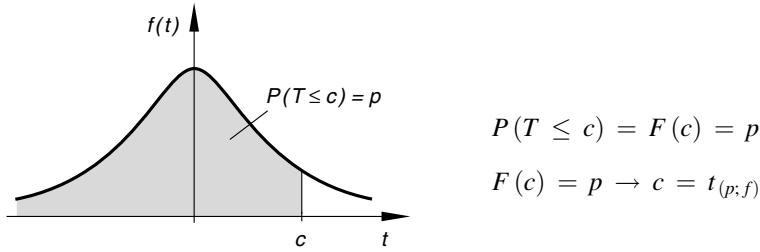
Formeln:

$$t_{(1-p;f)} = -t_{(p;f)}$$

$$t_{(p;f)} = -t_{(1-p;f)}$$

### Formeln zur Berechnung von Quantilen der $t$ -Verteilung von „Student“

#### (1) Einseitige Abgrenzung nach oben



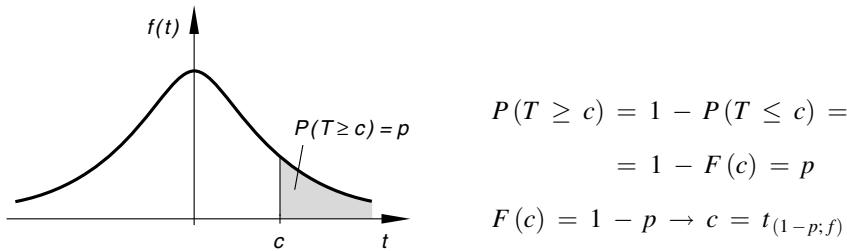
$$P(T \leq c) = F(c) = p$$

$$F(c) = p \rightarrow c = t_{(p;f)}$$

Zahlenbeispiel (bei  $f = 10$  Freiheitsgraden):

$$P(T \leq c) = F(c) = 0,90 \xrightarrow{f=10} c = t_{(0,90; 10)} = 1,372$$

#### (2) Einseitige Abgrenzung nach unten



$$P(T \geq c) = 1 - P(T \leq c) =$$

$$= 1 - F(c) = p$$

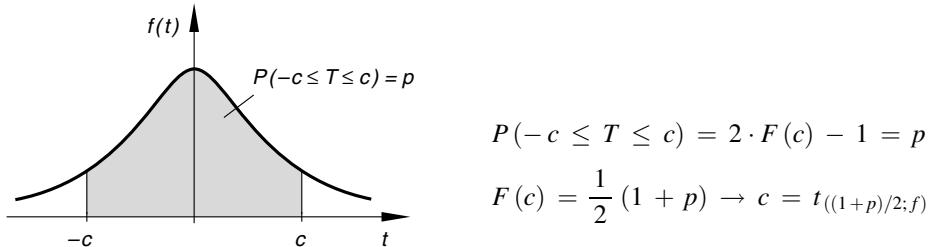
$$F(c) = 1 - p \rightarrow c = t_{(1-p;f)}$$

Zahlenbeispiel (bei  $f = 10$  Freiheitsgraden):

$$P(T \geq c) = 1 - P(T \leq c) = 1 - F(c) = 0,90$$

$$F(c) = 1 - 0,90 = 0,10 \xrightarrow{f=10} c = t_{(0,10; 10)} = -t_{(0,90; 10)} = -1,372$$

#### (3) Zweiseitige (symmetrische) Abgrenzung



$$P(-c \leq T \leq c) = 2 \cdot F(c) - 1 = p$$

$$F(c) = \frac{1}{2} (1 + p) \rightarrow c = t_{((1+p)/2;f)}$$

Zahlenbeispiel (bei  $f = 10$  Freiheitsgraden):

$$P(-c \leq T \leq c) = 2 \cdot F(c) - 1 = 0,90$$

$$F(c) = \frac{1}{2} (1 + 0,90) = 0,95 \xrightarrow{f=10} c = t_{(0,95; 10)} = 1,812$$

# Anhang

## Teil B: Lösungen der Übungsaufgaben

<b>I Vektoranalysis</b> .....	750
Abschnitt 1 .....	750
Abschnitt 2 .....	753
Abschnitt 3 .....	757
Abschnitt 4 .....	760
Abschnitt 5 .....	763
Abschnitt 6 .....	769
Abschnitt 7 .....	777
Abschnitt 8 .....	783
Abschnitt 9 .....	790
<b>II Wahrscheinlichkeitsrechnung</b> .....	796
Abschnitt 1 .....	796
Abschnitt 2 .....	797
Abschnitt 3 .....	798
Abschnitt 4 .....	801
Abschnitt 5 .....	804
Abschnitt 6 .....	808
Abschnitt 7 .....	814
<b>III Grundlagen der mathematischen Statistik</b> .....	819
Abschnitt 1 .....	819
Abschnitt 2 .....	824
Abschnitt 3 .....	826
Abschnitt 4 .....	829
Abschnitt 5 .....	836
Abschnitt 6 .....	840
<b>IV Fehler- und Ausgleichsrechnung</b> .....	844
Abschnitt 3 .....	844
Abschnitt 4 .....	847
Abschnitt 5 .....	851

## I Vektoranalysis

### Abschnitt 1

1)  $x = v_0 t, \quad y = \frac{1}{2} g t^2$  (Fallgesetz)  $\Rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 t \\ \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix} \quad (t \geq 0)$

2) a)  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 4t^2 \end{pmatrix}; \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 8t \end{pmatrix} \quad (t \geq 0)$

b)  $\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}; \quad \dot{\vec{r}}(t) = R \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad (0 \leq t < 2\pi)$

c)  $x = t, \quad y = 2x = 2t \Rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}; \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (-\infty < t < \infty)$

- 3) a) Die Bahnkurve ist eine *Ellipse* mit den Halbachsen  $a$  und  $b$  und dem „Startpunkt“  $A = (a; 0)$  zur Zeit  $t = 0$  (siehe Bild A-1).  $\omega$  ist die *Winkelgeschwindigkeit*.

b)  $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -a\omega \cdot \sin(\omega t) \\ b\omega \cdot \cos(\omega t) \end{pmatrix}$

$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -a\omega^2 \cdot \cos(\omega t) \\ -b\omega^2 \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix}$

c)  $\vec{a}(t) = -\omega^2 \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\omega t) \\ b \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r}(t)$

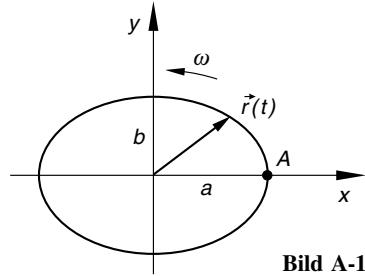


Bild A-1

Minuszeichen bedeutet:  $\vec{a}(t)$  ist dem Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  stets entgegen gerichtet.

4) a)  $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\omega R \cdot \sin(\omega t) \\ \omega R \cdot \cos(\omega t) \end{pmatrix}; \quad \vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} -\omega^2 R \cdot \cos(\omega t) \\ -\omega^2 R \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix}$

b)  $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} R(1 - \cos t) \\ R \cdot \sin t \end{pmatrix}; \quad \vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \sin t \\ R \cdot \cos t \end{pmatrix}$

5) a)  $\dot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(2t) \\ e^t \\ -2 \cdot \sin(2t) \end{pmatrix}; \quad \ddot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -4 \cdot \sin(2t) \\ e^t \\ -4 \cdot \cos(2t) \end{pmatrix}$

b)  $\dot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} \cdot \cos t - \sin t \cdot e^{-t} \\ -e^{-t} \cdot \sin t + \cos t \cdot e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\sin t + \cos t) \cdot e^{-t} \\ -(\sin t - \cos t) \cdot e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\ddot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -(\cos t - \sin t) \cdot e^{-t} + e^{-t}(\sin t + \cos t) \\ -(\cos t + \sin t) \cdot e^{-t} + e^{-t}(\sin t - \cos t) \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

(Ableitungen jeweils mit Hilfe der *Produkt-* und *Kettenregel*)

$$6) \quad \text{a)} \quad \frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \dot{\vec{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos t \\ 2 \cdot \sin t \\ t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot \sin t \\ 2 \cdot \cos t \\ 2t \end{pmatrix} = \\ = 2 \cdot \cos t + 4t \cdot \sin t + 3t^4 - 2t \cdot \sin t + 2t^2 \cdot \cos t + 2t^4 = \\ = 5t^4 + 2t \cdot \sin t + 2(1+t^2) \cdot \cos t$$

$$\text{b)} \quad \frac{d}{dt} (\vec{b} \cdot \vec{c}) = \dot{\vec{b}} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \dot{\vec{c}} = 3t^2 - 4 \cdot e^{-t} \cdot \sin t$$

$$\text{c)} \quad \frac{d}{dt} (\vec{a} \times \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dot{\vec{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos t \\ 2 \cdot \sin t \\ t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \cdot \sin t \\ 2 \cdot \cos t \\ 2t \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 2t^3 - 6t^2 \cdot \sin t \\ 6t^2 \cdot \cos t - t^2 \\ 2 \cdot \sin t - 4t \cdot \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t^3 - 2t^3 \cdot \cos t \\ -2t^3 \cdot \sin t - 2t^2 \\ 2t \cdot \cos t + 2t^2 \cdot \sin t \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 4t^3 - 6t^2 \cdot \sin t - 2t^3 \cdot \cos t \\ -3t^2 - 2t^3 \cdot \sin t + 6t^2 \cdot \cos t \\ 2(1+t^2) \cdot \sin t - 2t \cdot \cos t \end{pmatrix}$$

$$\text{d)} \quad \frac{d}{dt} (\vec{a} \times \vec{c}) = \dot{\vec{a}} \times \vec{c} + \vec{a} \times \dot{\vec{c}} = \begin{pmatrix} 3t^2 + (t^3 - 3t^2) \cdot e^{-t} \\ -2t - (t^3 - 3t^2) \cdot e^{-t} \\ (1 - 3t + t^2) \cdot e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$7) \quad \dot{\vec{r}}(t) = 10(-\sin(5t)\vec{e}_x + \cos(5t)\vec{e}_y + \vec{e}_z); \quad |\dot{\vec{r}}(t)| = 10\sqrt{2}$$

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2}[-\sin(5t)\vec{e}_x + \cos(5t)\vec{e}_y + \vec{e}_z]; \quad \vec{T}(t = \pi/4) = \frac{1}{2}(\vec{e}_x - \vec{e}_y + \sqrt{2}\vec{e}_z)$$

$$\dot{\vec{T}}(t) = -\frac{5}{2}\sqrt{2}(\cos(5t)\vec{e}_x + \sin(5t)\vec{e}_y); \quad |\dot{\vec{T}}| = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

$$\vec{N}(t) = -\cos(5t)\vec{e}_x - \sin(5t)\vec{e}_y; \quad \vec{N}(t = \pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = 10 \cdot 50 \begin{pmatrix} -\sin(5t) \\ \cos(5t) \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos(5t) \\ -\sin(5t) \\ 0 \end{pmatrix} = 500 \begin{pmatrix} \sin(5t) \\ -\cos(5t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\dot{\vec{r}}| \times |\ddot{\vec{r}}| = 500\sqrt{2}; \quad \kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} = \frac{500\sqrt{2}}{(10\sqrt{2})^3} = 1/4; \quad \kappa(t = \pi/4) = 1/4$$

$$8) \quad \text{a)} \quad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}; \quad |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{8t^2 + 1} = \sqrt{8\left(t^2 + \frac{1}{8}\right)} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{8} + t^2}$$

$$s = 2\sqrt{2} \cdot \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{8} + t^2} dt = \sqrt{2} \left[ t \sqrt{\frac{1}{8} + t^2} + \frac{1}{8} \cdot \ln \left( t + \sqrt{\frac{1}{8} + t^2} \right) \right]_0^1 =$$

$$= 1,8116 \quad (\text{Integral 116 mit } a^2 = 1/8)$$

$$\text{b)} \quad \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad |\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| = 2\sqrt{2}$$

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} = \frac{2\sqrt{2}}{(8t^2 + 1)^{3/2}}; \quad \kappa(t=1) = \frac{2}{27}\sqrt{2}; \quad \varrho(t=1) = \frac{27}{4}\sqrt{2}$$

$$9) \quad \text{a)} \quad x = t, \quad y = t^2 \Rightarrow \text{Normalparabel } y = x^2$$

$$\text{b)} \quad \dot{\vec{r}} = 1\vec{e}_x + 2t\vec{e}_y; \quad |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{1+4t^2} = 2\sqrt{\frac{1}{4}+t^2}$$

$$s = 2 \cdot \underbrace{\int_0^2 \sqrt{\frac{1}{4}+t^2} dt}_{\text{Integral 116 mit } a^2=1/4} = \left[ t\sqrt{\frac{1}{4}+t^2} + \frac{1}{4} \cdot \ln \left( t + \sqrt{\frac{1}{4}+t^2} \right) \right]_0^2 = 4,6468$$

$$\text{c)} \quad \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad |\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| = 2$$

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}; \quad \kappa(t=1) = 0,1789$$

$$\text{d)} \quad \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \vec{e}_x + 2t\vec{e}_y; \quad \vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = 2\vec{e}_y$$

$$\text{e)} \quad v_T = v = |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{1+4t^2}; \quad v_N = 0$$

$$a_T = \dot{v} = \frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}; \quad a_N = \kappa v^2 = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}} \cdot (1+4t^2) = \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$$

10) Ableitungen jeweils mit Hilfe der *Produkt-* und *Kettenregel*:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (-e^{-t} \cdot \cos t - \sin t \cdot e^{-t})\vec{e}_x + (-e^{-t} \cdot \sin t + \cos t \cdot e^{-t})\vec{e}_y =$$

$$= -(\cos t + \sin t) \cdot e^{-t}\vec{e}_x + (\cos t - \sin t) \cdot e^{-t}\vec{e}_y = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y$$

$$\ddot{\vec{r}} = (e^{-t} \cdot \cos t + \sin t \cdot e^{-t} - \cos t \cdot e^{-t} + e^{-t} \cdot \sin t)\vec{e}_x +$$

$$+ (e^{-t} \cdot \sin t - \cos t \cdot e^{-t} - \sin t \cdot e^{-t} - e^{-t} \cdot \cos t)\vec{e}_y =$$

$$= 2 \cdot e^{-t} \cdot \sin t \vec{e}_x - 2 \cdot e^{-t} \cdot \cos t \vec{e}_y = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y$$

$$v_T = v = |\dot{\vec{r}}| = e^{-t} \cdot \sqrt{(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2} =$$

$$= e^{-t} \cdot \sqrt{\cos^2 t + 2 \cdot \cos t \cdot \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t - 2 \cdot \cos t \cdot \sin t + \sin^2 t} =$$

$$= e^{-t} \cdot \sqrt{2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{2} \cdot e^{-t}; \quad v_N = 0$$

Krümmung (wird für die Berechnung von  $a_N = \kappa v^2$  benötigt):

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{|\dot{\vec{r}}|^3} = \frac{-(\cos t + \sin t) \cdot e^{-t} (-2 \cdot e^{-t} \cdot \cos t) - 2 \cdot e^{-t} \cdot \sin t (\cos t - \sin t) \cdot e^{-t}}{(\sqrt{2} \cdot e^{-t})^3} = \\ &= \frac{2 \cdot e^{-2t} (\cos^2 t \sin t \cdot \cos t - \sin t \cdot \cos t + \sin^2 t)}{2 \sqrt{2} \cdot e^{-3t}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^t \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot e^t \\ a_N &= \kappa v^2 = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot e^t \cdot (\sqrt{2} \cdot e^{-t})^2 = \sqrt{2} \cdot e^{-t}; \quad a_T = \dot{v} = -\sqrt{2} \cdot e^{-t}\end{aligned}$$

$$11) \quad x = x, \quad \dot{x} = 1, \quad \ddot{x} = 0, \quad \dot{y} = y', \quad \ddot{y} = y''; \quad \kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

## Abschnitt 2

$$\begin{aligned}1) \quad \text{a)} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} &= 4 \begin{pmatrix} -\sin(2u) \\ \cos(2u) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2v \end{pmatrix} \quad \text{b)} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{c)} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \lambda} &= \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \mu} = \begin{pmatrix} -\mu \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d)} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} v \\ -v \cdot \sin(uv) \\ -v \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} u \\ -u \cdot \sin(uv) \\ -u \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2) Flächenparameter: Winkel  $\varphi$ , Höhenkoordinate  $z$  (Bild A-2)

$$x = 2 \cdot \cos \varphi; \quad y = 2 \cdot \sin \varphi; \quad z = z$$

$$\text{Mantelfläche: } \vec{r}(\varphi; z) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos \varphi \\ 2 \cdot \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$(0 \leq \varphi < 2\pi; 0 \leq z \leq 5)$$

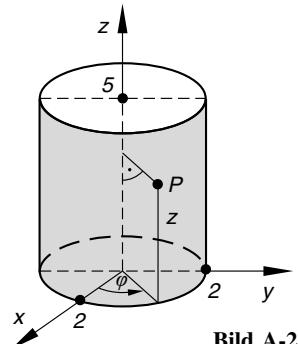


Bild A-2

3) Nach Bild A-3 ( $u, v$ : reelle Parameter):

$$\begin{aligned}\vec{r}(P) &= \vec{r}(u; v) = \vec{r}_1 + u \vec{a} + v \vec{b} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 + u + 2v \\ 1 - u + 2v \\ 1 + u + 2v \end{pmatrix} \\ (u, v &\in \mathbb{R})\end{aligned}$$

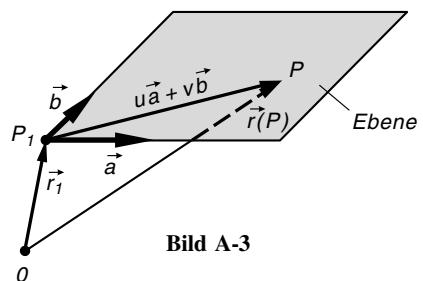


Bild A-3

- 4) a) Mit  $x = \cos u \cdot \sin v$ ,  $y = \sin u \cdot \sin v$  und  $z = \cos v$  folgt:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \cos^2 u \cdot \sin^2 v + \sin^2 u \cdot \sin^2 v + \cos^2 v = \\ &= \sin^2 v \cdot \underbrace{(\cos^2 u + \sin^2 u)}_1 + \cos^2 v = \underbrace{\sin^2 v + \cos^2 v}_1 = 1 \end{aligned}$$

Diese Gleichung beschreibt die Oberfläche einer *Kugel* um den Nullpunkt mit dem Radius  $r = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \vec{t}_u \cdot \vec{t}_v &= \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right) \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) = \begin{pmatrix} -\sin u \cdot \sin v \\ \cos u \cdot \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos u \cdot \cos v \\ \sin u \cdot \cos v \\ -\sin v \end{pmatrix} = \\ &= -\sin u \cdot \cos u \cdot \sin v \cdot \cos v + \sin u \cdot \cos u \cdot \sin v \cdot \cos v + 0 = 0 \end{aligned}$$

Die Vektoren  $\vec{t}_u$  und  $\vec{t}_v$  sind *orthogonal* (stehen senkrecht aufeinander), da ihr Skalarprodukt verschwindet.

$$5) \quad \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vartheta} \vec{t}_\vartheta + \dot{\varphi} \vec{t}_\varphi; \quad \vec{t}_\vartheta = 2 \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cdot \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}; \quad \vec{t}_\varphi = 2 \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cdot \sin \vartheta \\ \cos \varphi \cdot \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{a)} \quad \vartheta = \vartheta_0; \quad \varphi = t; \quad \dot{\vartheta} = 0; \quad \dot{\varphi} = 1; \quad \vec{v}(t) = 0 \vec{t}_\vartheta + 1 \vec{t}_\varphi = 2 \begin{pmatrix} -\sin t \cdot \sin \vartheta_0 \\ \cos t \cdot \sin \vartheta_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(t) = 2 \sqrt{\underbrace{\sin^2 \vartheta_0 (\sin^2 t + \cos^2 t)}_1 + 0} = 2 \cdot \sin \vartheta_0; \quad v(t = \pi) = 2 \cdot \sin \vartheta_0$$

$$\text{b)} \quad \vartheta = t; \quad \varphi = \varphi_0; \quad \dot{\vartheta} = 1; \quad \dot{\varphi} = 0$$

$$\vec{v}(t) = 1 \vec{t}_\vartheta + 0 \vec{t}_\varphi = 2 \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 \cdot \cos t \\ \sin \varphi_0 \cdot \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

$$v(t) = 2 \sqrt{\underbrace{\cos^2 t (\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0)}_1 + \sin^2 t} = 2 \sqrt{\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_1} = 2$$

$$v(t = \pi) = 2$$

$$\text{c)} \quad \vartheta = t; \quad \varphi = t^2; \quad \dot{\vartheta} = 1; \quad \dot{\varphi} = 2t$$

$$\vec{v}(t) = 1 \vec{t}_\vartheta + 2t \vec{t}_\varphi = 2 \begin{pmatrix} \cos(t^2) \cdot \cos t - 2t \cdot \sin(t^2) \cdot \sin t \\ \sin(t^2) \cdot \cos t + 2t \cdot \cos(t^2) \cdot \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
v^2(t) &= 4 \{ [\cos(t^2) \cdot \cos t - 2t \cdot \sin(t^2) \cdot \sin t]^2 + \\
&\quad + [\sin(t^2) \cdot \cos t + 2t \cdot \cos(t^2) \cdot \sin t]^2 + \sin^2 t \} = \\
&= 4 [\cos^2(t^2) \cdot \cos^2 t - 4t \cdot \cos(t^2) \cdot \sin(t^2) \cdot \cos t \cdot \sin t + \\
&\quad + 4t^2 \cdot \sin^2(t^2) \cdot \sin^2 t + \sin^2(t^2) \cdot \cos^2 t + \\
&\quad + 4t \cdot \sin(t^2) \cdot \cos(t^2) \cdot \cos t \cdot \sin t + 4t^2 \cdot \cos^2(t^2) \cdot \sin^2 t + \sin^2 t] = \\
&= 4 [\underbrace{(\cos^2(t^2) + \sin^2(t^2)) \cdot \cos^2 t}_1 + 4t^2 \underbrace{(\sin^2(t^2) + \cos^2(t^2)) \cdot \sin^2 t}_1 + \sin^2 t] = \\
&= 4 [\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_1 + 4t^2 \cdot \sin^2 t] = 4[1 + 4t^2 \cdot \sin^2 t] \\
v(t) &= 2 \sqrt{1 + 4t^2 \cdot \sin^2 t}; \quad v(t = \pi) = 2
\end{aligned}$$

6) a)  $\vec{t}_u = R \begin{pmatrix} \cos u \cdot \cos v \\ \cos u \cdot \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix}; \quad \vec{t}_v = R \begin{pmatrix} -\sin u \cdot \sin v \\ \sin u \cdot \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{t}_u \times \vec{t}_v = R^2 \begin{pmatrix} 0 + \sin^2 u \cdot \cos v \\ \sin^2 u \cdot \sin v \\ \underbrace{\sin u \cdot \cos u (\cos^2 v + \sin^2 v)}_1 \end{pmatrix} = R^2 \cdot \sin u \begin{pmatrix} \sin u \cdot \cos v \\ \sin u \cdot \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
|\vec{t}_u \times \vec{t}_v| &= R^2 \cdot \sin u \cdot \sqrt{\underbrace{\sin^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v)}_1 + \cos^2 u} = \\
&= R^2 \cdot \sin u \cdot \sqrt{\underbrace{\sin^2 u + \cos^2 u}_1} = R^2 \cdot \sin u
\end{aligned}$$

$$\vec{N} = \frac{\vec{t}_u \times \vec{t}_v}{|\vec{t}_u \times \vec{t}_v|} = \begin{pmatrix} \sin u \cdot \cos v \\ \sin u \cdot \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}$$

An der Stelle  $u = v = \pi/2$  gilt:  $\vec{t}_u = R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{t}_v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b)  $dA = |\vec{t}_u \times \vec{t}_v| du dv = R^2 \cdot \sin u du dv$

c)  $R = 1; \quad u = v = \frac{\pi}{4} \Rightarrow P = \left( \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \sqrt{2} \right)$

$$\text{Flächennormale in } P: \vec{N}_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Tangentialebene in  $P$ :

$$\begin{aligned} \vec{N}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1/2 \\ y - 1/2 \\ z - 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{2} + y - \frac{1}{2} + \sqrt{2}z - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{2} (x + y + \sqrt{2}z - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{2} \sqrt{2} (-x - y + 2) \end{aligned}$$

7) Ortsvektor der Rotationsfläche:  $\vec{r}(u; v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{u^2 + v^2 + 4} \end{pmatrix}$

a) Tangentenvektoren:  $\vec{t}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u/\sqrt{u^2 + v^2 + 4} \end{pmatrix}; \quad \vec{t}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ v/\sqrt{u^2 + v^2 + 4} \end{pmatrix}$

Tangentenvektoren in  $P = (1; 2; 3)$ :  $\vec{t}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}; \quad \vec{t}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

b) Flächennormale in  $P = (1; 2; 3)$ :

$$(\vec{t}_u \times \vec{t}_v)_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |(\vec{t}_u \times \vec{t}_v)_0| = \frac{1}{3} \sqrt{14}$$

$$\vec{N}_0 = \frac{(\vec{t}_u \times \vec{t}_v)_0}{|(\vec{t}_u \times \vec{t}_v)_0|} = \frac{3}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c) Tangentialebene in  $P = (1; 2; 3)$ :

$$\begin{aligned} \vec{N}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) &= \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \\ z - 3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}} [-1(x - 1) - 2(y - 2) + 3(z - 3)] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}} (-x - 2y + 3z - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{3} (x + 2y + 4) \end{aligned}$$

8) Ortsvektor der Fläche:  $\vec{r}(x; y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$

$$\vec{t}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix}; \quad \vec{t}_x \times \vec{t}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tangentialebene in  $P = (2; 1; 3)$ :

$$(\vec{t}_x \times \vec{t}_y)_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-3 \end{pmatrix} = -4(x-2) + 2(y-1) + 1(z-3) =$$

$$= -4x + 2y + z + 3 = 0 \Rightarrow z = 4x - 2y - 3$$

9) Lösungsweg wie in Aufgabe 8.

Ortsvektor der Fläche:  $\vec{r}(x; y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ xy \end{pmatrix}; \quad$  Tangentialebene in  $P: z = 5x + 2y - 10$

### Abschnitt 3

- 1) a)  $x^2 + y^2 = \text{const.} = c > 0$ : Konzentrische Kreise (Radius:  $r = \sqrt{c}$ ); (siehe Bild A-4)
- b)  $x^2 - y = \text{const.} = c$  oder  $y = x^2 - c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ): Parabelschar (Normalparabeln, der jeweilige Scheitelpunkt liegt auf der  $y$ -Achse bei  $y = -c$ ; siehe Bild A-5)

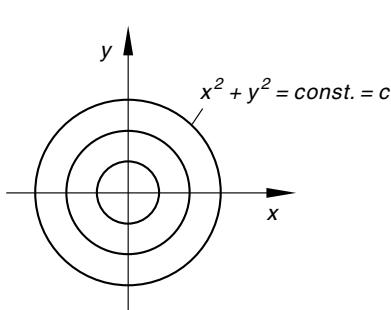


Bild A-4

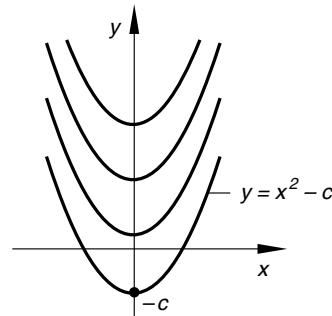


Bild A-5

- 2) a)  $z - x^2 - y^2 = \text{const.} = c$  oder  $z = x^2 + y^2 + c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ):  
Schar von Rotationsparaboloiden, durch Drehung der Parabel  $z = x^2 + c$  um die  $z$ -Achse entstanden (der jeweilige Tiefpunkt liegt auf der  $z$ -Achse bei  $z = c$ ; siehe Bild A-6)
- b)  $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.} = c$  (mit  $c > 0$ ):  
Konzentrische Kugelschalen (Mittelpunkt = Nullpunkt; Radius:  $r = \sqrt{c}$ )

- 3)  $2x^2 + 2y^2 = \text{const.} = c$  oder  $x^2 + y^2 = c^*$  ( $c^* = c/2 > 0$ ;  $z$ : beliebig):  
*Koaxiale Zylindermäntel* (Zylinderachse =  $z$ -Achse; Zylinderradius:  $\sqrt{c^*}$ ; siehe Bild A-7)

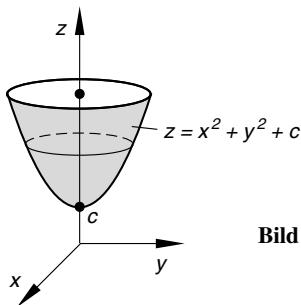


Bild A-6

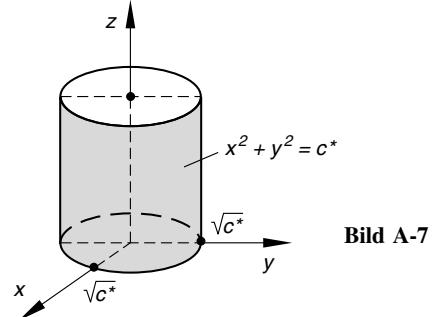


Bild A-7

- 4) Aus  $U = \text{const.}$  folgt  $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.} = c$  mit  $c \geq R$ . Die Äquipotentialflächen sind daher *konzentrische Kugelschalen* (Radius:  $r = \sqrt{c}$ ; Kugelmittelpunkt = Nullpunkt; siehe Bild A-8).
- 5) Aus  $U = \text{const.}$  folgt  $x = \text{const.} = c$  ( $0 \leq c \leq d$ ). Die Äquipotentialflächen sind daher *Ebenen* parallel zu den Plattenflächen (siehe Bild A-9).

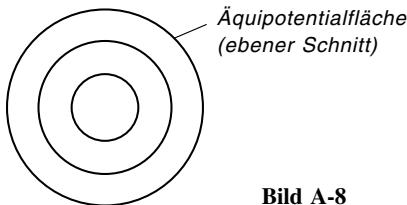


Bild A-8

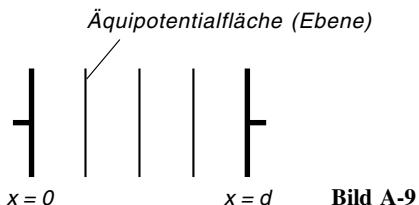


Bild A-9

- 6) Das Geschwindigkeitsfeld wächst *linear* mit der  $x$ -Koordinate:  $v = |\vec{v}| = x$  (mit  $x \geq 0$ ). Längs einer Parallelen zur  $y$ -Achse bleibt  $v$  konstant (siehe Bild A-10).

7)  $\vec{F}(x; y) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \vec{r} = \vec{e}_r$

$\vec{r}$ : Ortsvektor des Punktes  $P = (x; y)$  mit  $|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\vec{e}_r$ : Radialer Einheitsvektor

Das Feld ist *radial nach außen gerichtet*, der Feldvektor besitzt überall den Betrag 1:

$|\vec{F}(x; y)| = |\vec{e}_r| = 1$  (siehe Bild A-11)

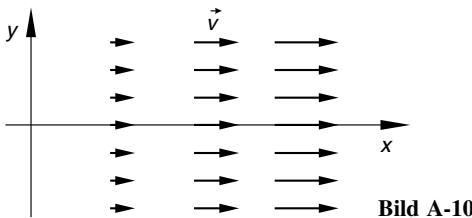


Bild A-10

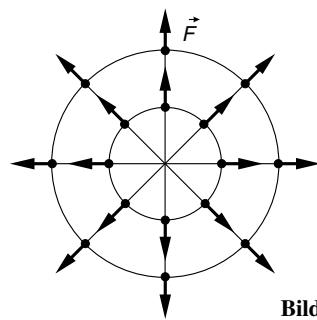


Bild A-11

- 8)  $\vec{F}(x; y) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$  steht *senkrecht* auf dem Ortsvektor  $\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  des Punktes  $P = (x, y)$ , da das Skalarprodukt dieser Vektoren verschwindet (siehe Bild A-12):

$$\vec{F} \cdot \vec{r} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{r} (-xy + xy) = 0$$

Die Feldlinien sind *konzentrische Kreise* um den Nullpunkt und werden vom Feldvektor in der aus Bild A-13 ersichtlichen Weise tangiert. Der Feldvektor hat ferner die *konstante Länge*  $|\vec{F}(x; y)| = 1$ .

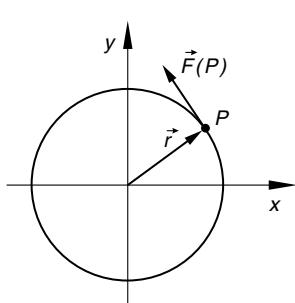


Bild A-12

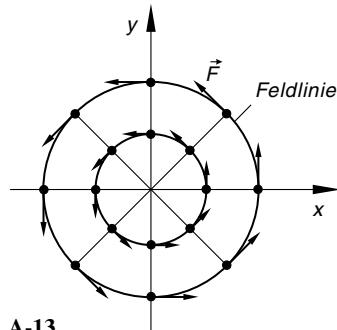


Bild A-13

- 9) Die Feldlinien genügen der Gleichung  $\vec{v} \times d\vec{r} = \vec{0}$ :

$$\vec{v} \times d\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dy - y dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow dy - y dx = 0$$

Daraus erhält man die Differentialgleichung  $dy = y dx$  oder  $y' = y$ , die sich durch „Trennung der Variablen“ lösen lässt. Man erhält so Feldlinien vom Exponentialtyp  $y = C \cdot e^x$  (mit  $C \in \mathbb{R}$ ). Unser Teilchen „startet“ aus der Anfangslage  $P = (0; 2)$  und bewegt sich dann auf der Bahnkurve  $y = 2 \cdot e^x$ .

- 10) a) Es ist  $|\vec{E}| \sim \frac{1}{r^2}$ . Daher nimmt der Betrag der elektrischen Feldstärke auf einer *Kugelschale*  $r = \text{const.}$  jeweils einen *festen* Wert an. Die gesuchten Flächen sind somit die Oberflächen *konzentrischer Kugeln* (siehe Bild A-14).
- b) Wegen  $|\vec{H}| \sim \frac{1}{\varrho}$  nimmt der Betrag der magnetischen Feldstärke auf jedem *Zylindermantel* mit der Leiterachse ( $z$ -Achse) als Symmetrieachse einen *festen* Wert an. Die gesuchten Flächen sind somit die Mantelflächen *koaxialer Zylinder* (Zylinderachse = Leiterachse =  $z$ -Achse;  $\varrho > 0$ ; siehe Bild A-15)

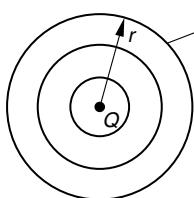


Bild A-14

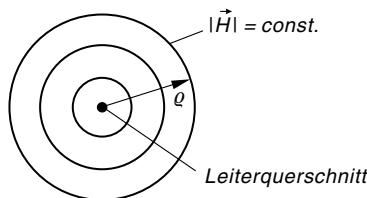


Bild A-15

## Abschnitt 4

- 1) a) Niveaulinien:  $y = \text{const.} = c$  (Parallelen zur  $x$ -Achse,  $c \in \mathbb{R}$ ; siehe Bild A-16)

$$\operatorname{grad} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y = 0 \vec{e}_x + 1 \vec{e}_y = \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- b) Niveaulinien:  $x^2 + y^2 = \text{const.} = c$  (konzentrische Kreise um den Nullpunkt mit den Radien  $r = \sqrt{c}, c > 0$ ; siehe Bild A-17)

$$\operatorname{grad} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y = 2x \vec{e}_x + 2y \vec{e}_y = 2(\underbrace{x \vec{e}_x + y \vec{e}_y}_{\text{Ortsvektor } \vec{r}}) = 2\vec{r} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

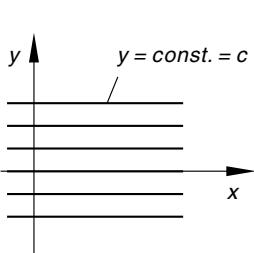


Bild A-16

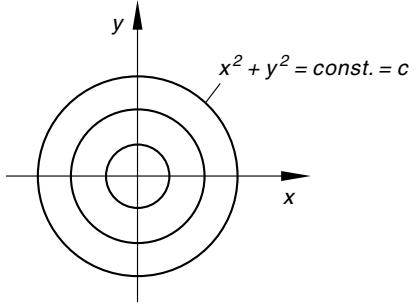


Bild A-17

$$2) \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = y; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = x \quad \Rightarrow \quad \phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \int y dx = xy + K(y)$$

Die Integrationskonstante  $K$  kann noch von  $y$  abhängen:  $K = K(y)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (xy + K(y)) = x + K'(y) = x \quad \Rightarrow \quad K'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad K(y) = \text{const.} = C$$

Lösung:  $\phi = \phi(x; y) = xy + C$  (mit  $C \in \mathbb{R}$ )

$$3) \quad \text{a)} \quad \operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} 20xy^3 - 5yz^2 \\ 30x^2y^2 - 5xz^2 \\ -10xyz \end{pmatrix}; \quad (\operatorname{grad} \phi)_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}; \quad |(\operatorname{grad} \phi)_P| = 10\sqrt{5}$$

$$\text{b)} \quad \operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} 2x \cdot e^{yz} \\ x^2z \cdot e^{yz} + z^3 \\ x^2y \cdot e^{yz} + 3yz^2 \end{pmatrix}; \quad (\operatorname{grad} \phi)_P = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |(\operatorname{grad} \phi)_P| = \sqrt{41}$$

(Ableitungen mit Hilfe der Kettenregel)

$$\text{c)} \quad \operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}; \quad (\operatorname{grad} \phi)_P = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad |(\operatorname{grad} \phi)_P| = 6$$

$$4) \quad \phi = \ln r = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \ln (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \ln (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\text{Kettenregel: } \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{r^2}; \quad \text{Analog: } \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{y}{r^2}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{z}{r^2}$$

$$\operatorname{grad} \phi = \frac{x}{r^2} \vec{e}_x + \frac{y}{r^2} \vec{e}_y + \frac{z}{r^2} \vec{e}_z = \frac{1}{r^2} \underbrace{(x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z)}_{\text{Ortsvektor } \vec{r}} = \frac{1}{r^2} \vec{r}$$

$$5) \quad \mathbf{1. L\"osungsweg: } U = \phi \cdot \psi = x^2 y^2 z \cdot e^x + x y \cdot e^{x+y}$$

$$\operatorname{grad} U = \operatorname{grad} (\phi \cdot \psi) = \begin{pmatrix} x y^2 z (x+2) \cdot e^x + (x+1) y \cdot e^{x+y} \\ 2 x^2 y z \cdot e^x + x (y+1) \cdot e^{x+y} \\ x^2 y^2 \cdot e^x \end{pmatrix}$$

(Ableitungen mit Hilfe der *Produkt- und Kettenregel*)

**2. Lösungsweg** (nach Rechenregel (5) für Gradienten, Produktregel Gleichung I-122):

$$\operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} 2 x y z + e^y \\ x^2 z + x \cdot e^y \\ x^2 y \end{pmatrix}; \quad \operatorname{grad} \psi = \begin{pmatrix} y \cdot e^x \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} U = \operatorname{grad} (\phi \cdot \psi) = \phi (\operatorname{grad} \psi) + \psi (\operatorname{grad} \phi) =$$

$$= \begin{pmatrix} x y^2 z (x+2) \cdot e^x + (x+1) y \cdot e^{x+y} \\ 2 x^2 y z \cdot e^x + x (y+1) \cdot e^{x+y} \\ x^2 y^2 \cdot e^x \end{pmatrix}$$

$$6) \quad \operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} y z + 3 z^3 \\ x z \\ x y + 9 x z^2 \end{pmatrix}; \quad (\operatorname{grad} \phi)_P = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_a = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial \vec{a}} \right)_P = (\operatorname{grad} \phi)_P \cdot \vec{e}_a = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} (5 - 2 + 22) = \frac{25}{3}$$

$$7) \quad \text{a) Richtungsvektor (Ortsvektor von } P): \vec{r} = \vec{r}(P) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad |\vec{r}| = 5; \quad \vec{e}_r = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} 2 x \\ -2 y \end{pmatrix}; \quad (\operatorname{grad} \phi)_P = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial \vec{r}} \right)_P = (\operatorname{grad} \phi)_P \cdot \vec{e}_r = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} (18 - 32) = -\frac{14}{5}$$

$$\text{b) Richtungsvektor (Ortsvektor von } P): \vec{r} = \vec{r}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_r; \quad \operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} 8 x \\ 18 y \end{pmatrix};$$

$$(\operatorname{grad} \phi)_P = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \left( \frac{\partial \phi}{\partial \vec{r}} \right)_P = (\operatorname{grad} \phi)_P \cdot \vec{e}_r = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 8$$

8) Fläche:  $F(x; y; z) = x^2 + (y - 1)^2 - z^2 - 10 = 0$ ;  $\text{grad } F = \begin{pmatrix} 2x \\ 2(y - 1) \\ -2z \end{pmatrix}$

Normalenvektor in  $P$ :  $(\text{grad } F)_P = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ ;  $|(\text{grad } F)_P| = 6\sqrt{3}$

Flächennormale in  $P$ :  $\vec{N} = \frac{1}{|(\text{grad } F)_P|} (\text{grad } F)_P = \frac{\sqrt{3}}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

9) a)  $F(x; y; z) = x^2 + y^2 - 5 = 0$ ;  $\text{grad } F = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  $(\text{grad } F)_P = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Tangentialebene:  $(\text{grad } F)_P \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 1 \\ z - 5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$4(x - 2) + 2(y - 1) + 0(z - 5) = 0 \Rightarrow 2x + y - 5 = 0$$

b)  $F(x; y; z) = xy^2z + 6x^2z^2 - 22 = 0$

$$\text{grad } F = \begin{pmatrix} y^2z + 12xz^2 \\ 2xyz \\ xy^2 + 12x^2z \end{pmatrix}; \quad (\text{grad } F)_P = \begin{pmatrix} 23 \\ -4 \\ -46 \end{pmatrix}$$

Tangentialebene:  $(\text{grad } F)_P \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} 23 \\ -4 \\ -46 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 1 \\ z + 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$23(x - 2) - 4(y - 1) - 46(z + 1) = 0 \Rightarrow 23x - 4y - 46z = 88$$

- 10) Die *größte* Zunahme des Potentials erfolgt in Richtung des *Gradienten*, d. h. hier also wegen der Kugelsymmetrie des Feldes in *radialer* Richtung nach *außen*.

$$U = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} x \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{r^3} \quad (\text{mit der Kettenregel})$$

Analog:  $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{y}{r^3}$ ;  $\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{z}{r^3}$

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \underbrace{(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)}_{\text{Ortsvektor } \vec{r}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \vec{r}$$

Maximalwert:  $|\text{grad } U| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \cdot r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

**Abschnitt 5**

1) a)  $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} (-y) + \frac{\partial}{\partial y} (x) = 0 + 0 = 0$

b)  $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} (x^3 + 1) + \frac{\partial}{\partial y} (xy^2) = 3x^2 + 2xy$

c)  $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} (x \cdot e^{-y}) + \frac{\partial}{\partial y} (y \cdot e^{-x}) = e^{-y} + e^{-x}$

d)  $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2 + x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \quad (\text{Quotientenregel})$

2)  $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} (xy^2) + \frac{\partial}{\partial y} (x^2y - 4y) = y^2 + x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

Die Divergenz des Vektorfeldes *verschwindet*  
somit längs des Mittelpunktkreises mit dem Radius  
 $R = 2$  (siehe Bild A-18).

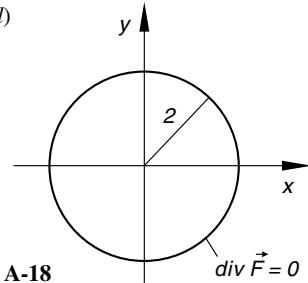


Bild A-18

3) a)  $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} (2x^3 z^2) + \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - z^2) + \frac{\partial}{\partial z} (xyz) = 6x^2 z^2 + 0 + xy = 6x^2 z^2 + xy$

b)  $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} (xy - x^2 z) + \frac{\partial}{\partial y} (2yz^2) + \frac{\partial}{\partial z} (x^2 y + yz) = y - 2xz + 2z^2 + y = 2y - 2xz + 2z^2$

4)  $\operatorname{div} \vec{F} = y^2 + 2z^3 + xy; \quad (\operatorname{div} \vec{F})_{P_1} = 2; \quad (\operatorname{div} \vec{F})_{P_2} = 4; \quad (\operatorname{div} \vec{F})_{P_3} = 64$

5)  $\operatorname{grad} \phi = 2 \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 5 \\ z \end{pmatrix}; \quad \operatorname{div} (\operatorname{grad} \phi) = 2(1 + 1 + 1) = 6$

6) 1. Lösungsweg:  $\vec{A} = \phi \vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 y \cdot e^{yz} \\ -x^3 \cdot e^{yz} \\ x^2 z \cdot e^{yz} \end{pmatrix}$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div} (\phi \vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 y \cdot e^{yz}) + \frac{\partial}{\partial y} (-x^3 \cdot e^{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (x^2 z \cdot e^{yz}) = (2xy - x^3 z + x^2 + x^2 yz) \cdot e^{yz} \quad (\text{Produkt- und Kettenregel})$$

2. Lösungsweg (nach Rechenregel (5) für Divergenzen, Produktregel Gleichung I-160):

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x \cdot e^{yz}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 z \cdot e^{yz}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = x^2 y \cdot e^{yz} \Rightarrow \operatorname{grad} \phi = e^{yz} \begin{pmatrix} 2x \\ x^2 z \\ x^2 y \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} (y) + \frac{\partial}{\partial y} (-x) + \frac{\partial}{\partial z} (z) = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div} (\phi \vec{F}) = (\operatorname{grad} \phi) \cdot \vec{F} + \phi (\operatorname{div} \vec{F}) =$$

$$= e^{yz} \begin{pmatrix} 2x \\ x^2 z \\ x^2 y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix} + x^2 \cdot e^{yz} \cdot 1 = (2xy - x^3 z + x^2 yz + x^2) \cdot e^{yz}$$

- 7) Die Divergenz des Zentraffeldes  $\vec{F} = f(r) \vec{r} = f(r) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(r) \cdot x \\ f(r) \cdot y \\ f(r) \cdot z \end{pmatrix}$  muss bei einem quellenfreien Feld verschwinden:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} [f(r) \cdot x] + \frac{\partial}{\partial y} [f(r) \cdot y] + \frac{\partial}{\partial z} [f(r) \cdot z] = 0$$

Unter Beachtung von  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  folgt mit Hilfe der *Produkt- und Kettenregel*:

$$\frac{\partial}{\partial x} [f(r) \cdot x] = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x + 1 \cdot f(r) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x + f(r); \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{x}{r}$$

$$\text{Somit: } \frac{\partial}{\partial x} [f(r) \cdot x] = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x + f(r) = f'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot x + f(r) = \\ = f'(r) \cdot \frac{x}{r} \cdot x + f(r) = f'(r) \cdot \frac{x^2}{r} + f(r)$$

Analoge Ausdrücke erhält man für die beiden übrigen partiellen Ableitungen (statt  $x^2$  erscheint  $y^2$  bzw.  $z^2$ ). Daher folgt:

$$\operatorname{div} \vec{F} = f'(r) \cdot \frac{x^2}{r} + f(r) + f'(r) \cdot \frac{y^2}{r} + f(r) + f'(r) \cdot \frac{z^2}{r} + f(r) = \\ = f'(r) \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} + 3 \cdot f(r) = f'(r) \cdot \frac{r^2}{r} + 3 \cdot f(r) = f'(r) \cdot r + 3 \cdot f(r) = 0$$

Diese Differentialgleichung 1. Ordnung löst man durch „Trennung der Variablen“ wie folgt:

$$\text{Substitution: } u = f(r), \quad \frac{du}{dr} = f'(r) \quad (\text{in die Dgl einsetzen})$$

$$\frac{du}{dr} \cdot r + 3u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = -3 \cdot \frac{dr}{r} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u} = -3 \cdot \int \frac{dr}{r} \quad \Rightarrow$$

$$\ln u = -3 \cdot \ln r + \ln C = \ln r^{-3} + \ln C = \ln C \cdot r^{-3} \quad \Rightarrow \quad u = C \cdot r^{-3}$$

$$\text{Lösung: } f(r) = \frac{\text{const.}}{r^3} = \frac{C}{r^3} \quad (C \in \mathbb{R}; r > 0)$$

$$8) \quad \phi = a + \frac{b}{r} = a + b(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \quad (\text{mit } r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -bx(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = -\frac{bx}{r^3}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{by}{r^3}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{bz}{r^3} \quad (\text{Kettenregel})$$

$$\operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} -bx/r^3 \\ -by/r^3 \\ -bz/r^3 \end{pmatrix} = -\frac{b}{r^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{b}{r^3} \vec{r} \quad (\vec{r}: \text{Ortsvektor})$$

Das Gradientenfeld ist somit ein *Zentraffeld* vom Typ  $F(r) = f(r)\vec{r}$  mit  $f(r) = \frac{\text{const.}}{r^3} = -\frac{b}{r^3}$  und daher nach Aufgabe 7 *quellenfrei*, d. h.  $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi) = 0$ .

- 9) Die  $x$ - und  $y$ -Komponenten der Rotation *verschwinden* automatisch!

a)  $F_x = y(x^2 + y^2)^{-1/2}; \quad F_y = -x(x^2 + y^2)^{-1/2}$

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot}\vec{F})_z &= \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}[-x(x^2 + y^2)^{-1/2}] - \frac{\partial}{\partial y}[y(x^2 + y^2)^{-1/2}] = \\ &= -(x^2 + y^2)^{-1/2} + x^2(x^2 + y^2)^{-3/2} - (x^2 + y^2)^{-1/2} + y^2(x^2 + y^2)^{-3/2} = \\ &= -2(x^2 + y^2)^{-1/2} + (x^2 + y^2)(x^2 + y^2)^{-3/2} = \\ &= -2(x^2 + y^2)^{-1/2} + (x^2 + y^2)^{-1/2} = -(x^2 + y^2)^{-1/2} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

(unter Verwendung der *Produkt- und Kettenregel*)

Somit:  $\operatorname{rot}\vec{F} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{e}_z = -\frac{1}{r}\vec{e}_z \quad (\text{mit } r = \sqrt{x^2 + y^2})$

b)  $F_x = (x - y + 2)(x^2 + y^2)^{-1/2}; \quad F_y = (x + y - 1)(x^2 + y^2)^{-1/2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_y}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x + y - 1)(x^2 + y^2)^{-1/2} = \\ &= 1(x^2 + y^2)^{-1/2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-3/2} \cdot 2x(x + y - 1) = \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - \frac{x^2 + xy - x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{x^2 + y^2 - (x^2 + xy - x)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{y^2 - xy + x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

(*Produkt- und Kettenregel*; grau unterlegter Bruch mit  $(x^2 + y^2)^1$  erweitert)

Analog:  $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x - y + 2)(x^2 + y^2)^{-1/2} = -\frac{x^2 + xy + 2y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

$$(\operatorname{rot}\vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{y^2 - xy + x + x^2 + xy + 2y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{x^2 + y^2 + x + 2y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

c)  $F_x = x^2y^3 - x; \quad F_y = xy^2 + e^y; \quad (\operatorname{rot}\vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = y^2 - 3x^2y^2$

10)  $v_x = -x(x^2 + y^2)^{-1/2}; \quad v_y = -y(x^2 + y^2)^{-1/2}$

$$(\operatorname{rot}\vec{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = xy(x^2 + y^2)^{-3/2} - xy(x^2 + y^2)^{-3/2} = 0 \quad (\text{Kettenregel})$$

Somit gilt (die  $x$ - und  $y$ -Komponenten *verschwinden* automatisch):  $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}$  ist *wirbelfrei*.

$$11) \quad a) \quad F_x = xy - z^2; \quad F_y = 2xyz; \quad F_z = x^2z - y^2z$$

$$\left. \begin{aligned} (\text{rot } \vec{F})_x &= \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = -2yz - 2xy \\ (\text{rot } \vec{F})_y &= \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = -2z - 2xz \\ (\text{rot } \vec{F})_z &= \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 2yz - x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} -2y(x+z) \\ -2z(x+1) \\ 2yz - x \end{pmatrix}$$

$$b) \quad F_x = x(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}; \quad F_y = y(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}; \quad F_z = z(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{F})_x &= \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} (z(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}) - \frac{\partial}{\partial z} (y(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}) = \\ &= z \left( -\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2y - y \left( -\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2z = \\ &= -yz(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + yz(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = 0 \end{aligned}$$

Analog:  $(\text{rot } \vec{F})_y = (\text{rot } \vec{F})_z = 0$  (alle Ableitungen mit der Kettenregel)

Somit:  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}$  ist *wirbelfrei*.

$$12) \quad F_x = 2xz^2 + y^3z; \quad F_y = axy^2z; \quad F_z = 2x^2z + bxy^3$$

$$(\text{rot } \vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 3bx^2y^2 - axy^2 = (3b - a)xy^2$$

$$(\text{rot } \vec{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 4xz + y^3 - (4xz + by^3) = (1 - b)y^3$$

$$(\text{rot } \vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = ay^2z - 3y^2z = (a - 3)y^2z$$

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} (3b - a)xy^2 \\ (1 - b)y^3 \\ (a - 3)y^2z \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 3b - a = 0 \\ 1 - b = 0 \\ a - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3, \quad b = 1$$

$$13) \quad F_x = xy^3; \quad F_y = 2xy^2z; \quad F_z = x^2y - z^2$$

$$(\text{rot } \vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = x^2 - 2xy^2; \quad (\text{rot } \vec{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = -2xy;$$

$$(\text{rot } \vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 2y^2z - 3xy^2$$

$$\text{Somit: } \text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 - 2xy^2 \\ -2xy \\ 2y^2z - 3xy^2 \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{rot } \vec{F})_P = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

14) Komponenten von  $\vec{F}$ :  $F_x = f(r) \cdot x$ ;  $F_y = f(r) \cdot y$ ;  $F_z = f(r) \cdot z$

(mit  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ )

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{F})_x &= \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} [f(r) \cdot z] - \frac{\partial}{\partial z} [f(r) \cdot y] = z \cdot \frac{\partial}{\partial y} [f(r)] - y \cdot \frac{\partial}{\partial z} [f(r)] \\ \frac{\partial}{\partial y} [f(r)] &= \frac{df(r)}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = f'(r) \cdot \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \\ &= f'(r) \cdot \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}}_{1/r} \cdot y = f'(r) \cdot \frac{y}{r} \quad (\text{Kettenregel}) \end{aligned}$$

$$\text{Analog: } \frac{\partial}{\partial z} [f(r)] = f'(r) \cdot \frac{z}{r}$$

Damit erhalten wir für die  $x$ -Koordinate der Rotation:

$$(\text{rot } \vec{F})_x = z \cdot \frac{\partial}{\partial y} [f(r)] - y \cdot \frac{\partial}{\partial z} [f(r)] = z \cdot f'(r) \cdot \frac{y}{r} - y \cdot f'(r) \cdot \frac{z}{r} = 0$$

$$\text{Analog: } (\text{rot } \vec{F})_y = (\text{rot } \vec{F})_z = 0$$

Somit:  $\text{rot } \vec{F} = \text{rot} [f(r) \vec{r}] = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}$  ist *wirbelfrei*.

$$\begin{aligned} 15) \quad \text{1. Lösungsweg: } \vec{A} = \phi \vec{F} &= \begin{pmatrix} x^3 y^2 z^2 \\ x^2 y^2 z^2 \\ x^2 y z^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \\ \left. \begin{array}{l} (\text{rot } \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = x^2 z^4 - 2x^2 y^2 z \\ (\text{rot } \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 2x^3 y^2 z - 2xyz^4 \\ (\text{rot } \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 2xy^2 z^2 - 2x^3 yz^2 \end{array} \right\} &\Rightarrow \text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} x^2 z^4 - 2x^2 y^2 z \\ 2x^3 y^2 z - 2xyz^4 \\ 2xy^2 z^2 - 2x^3 yz^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**2. Lösungsweg** (nach Regel (5) für Rotationen, Produktregel Gleichung I-176):

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xyz^2; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 z^2; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 2x^2 yz \quad \Rightarrow \quad \text{grad } \phi = \begin{pmatrix} 2xyz^2 \\ x^2 z^2 \\ 2x^2 yz \end{pmatrix}$$

$$F_x = xy; \quad F_y = y; \quad F_z = z^2$$

$$\left. \begin{array}{l} (\text{rot } \vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 - 0 = 0 \\ (\text{rot } \vec{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0 - 0 = 0 \\ (\text{rot } \vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 - x = -x \end{array} \right\} \Rightarrow \text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{A} &= (\operatorname{grad} \phi) \times \vec{F} + \phi (\operatorname{rot} \vec{F}) = \begin{pmatrix} 2xyz^2 \\ x^2z^2 \\ 2x^2yz \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} xy \\ y \\ z^2 \end{pmatrix} + x^2yz^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x^2z^4 - 2x^2y^2z \\ 2x^3y^2z - 2xyz^4 \\ 2xy^2z^2 - x^3yz^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -x^3yz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2z^4 - 2x^2y^2z \\ 2x^3y^2z - 2xyz^4 \\ 2xy^2z^2 - 2x^3yz^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

16)  $F_x = 2xz + y^2; \quad F_y = 2xy; \quad F_z = x^2$

$$\left. \begin{aligned} (\operatorname{rot} \vec{F})_x &= \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 - 0 = 0 \\ (\operatorname{rot} \vec{F})_y &= \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 2x - 2x = 0 \\ (\operatorname{rot} \vec{F})_z &= \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 2y - 2y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$\vec{F}$  ist somit *wirbelfrei*. Die Vektorkomponenten von  $\vec{F}$  sind demnach die partiellen Ableitungen 1. Ordnung eines (noch unbekannten) Skalarfeldes  $\phi = \phi(x; y; z)$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_x = 2xz + y^2; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = F_y = 2xy; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = F_z = x^2$$

$$\phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \int (2xz + y^2) dx = x^2z + xy^2 + K(y; z)$$

Die Integrationskonstante  $K$  kann noch von  $y$  und  $z$  abhängen:  $K = K(y; z)$ . Sie wird aus den bekannten partiellen Ableitungen von  $\phi$  nach  $y$  bzw.  $z$  wie folgt bestimmt:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2z + xy^2 + K(y; z)) = 2xy + \frac{\partial K}{\partial y} = 2xy \Rightarrow \frac{\partial K}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$K$  ist *unabhängig* von  $y$ , kann aber noch von  $z$  abhängen:  $K = K_1(z)$

Zwischenergebnis:  $\phi = x^2z + xy^2 + K_1(z)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (x^2z + xy^2 + K_1(z)) = x^2 + K'_1(z) = x^2 \Rightarrow K'_1(z) = 0 \Rightarrow$$

$K_1(z) = \text{const.} = C$

Lösung:  $\phi = \phi(x; y; z) = x^2z + xy^2 + C$  (mit  $C \in \mathbb{R}$ )

17) Im dreidimensionalen Raum:  $\phi = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2x = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \quad (\text{Kettenregel})$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -1 \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}}_{r^2} + 3x^2 \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}}_{r^2} = -r^{-3} + 3x^2 \cdot r^{-5}$$

(unter Verwendung der *Produkt-* und *Kettenregel*)

$$\text{Analog: } \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -r^{-3} + 3y^2 \cdot r^{-5}; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -r^{-3} + 3z^2 \cdot r^{-5}$$

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = (-r^{-3} + 3x^2 \cdot r^{-5}) + (-r^{-3} + 3y^2 \cdot r^{-5}) + \\ &\quad + (-r^{-3} + 3z^2 \cdot r^{-5}) = -3r^{-3} + 3r^{-5} \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{r^2} = -3r^{-3} + 3r^{-3} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{In der Ebene: } \phi = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = (x^2 + y^2)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-3/2} \cdot 2x = -x(x^2 + y^2)^{-3/2} \quad (\text{Kettenregel})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= -1 \underbrace{(x^2 + y^2)^{-3/2}}_{r^2} - \frac{3}{2} \underbrace{(x^2 + y^2)^{-5/2}}_{r^2} \cdot 2x(-x) = -(r^2)^{-3/2} + 3x^2(r^2)^{-5/2} = \\ &= -r^{-3} + 3x^2 \cdot r^{-5} \quad (\text{Produkt- und Kettenregel}) \end{aligned}$$

$$\text{Analog: } \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -r^{-3} + 3y^2 \cdot r^{-5}$$

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -r^{-3} + 3x^2 \cdot r^{-5} + -r^{-3} + 3y^2 \cdot r^{-5} = \\ &= -2r^{-3} + 3r^{-5} \underbrace{(x^2 + y^2)}_{r^2} = -2r^{-3} + 3r^{-3} = r^{-3} \neq 0 \end{aligned}$$

$$18) \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2 + z^2); \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 4(3x^2 + y^2 + z^2) \quad (\text{Produkt- und Kettenregel})$$

$$\text{Analog: } \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 4(x^2 + 3y^2 + z^2); \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 4(x^2 + y^2 + 3z^2)$$

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 4(3x^2 + y^2 + z^2) + 4(x^2 + 3y^2 + z^2) + 4(x^2 + y^2 + 3z^2) = \\ &= 4(5x^2 + 5y^2 + 5z^2) = 20 \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{r^2} = 20r^2 \end{aligned}$$

## Abschnitt 6

$$1) \quad \text{a) } F_x = \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{r \cdot \sin \varphi}{r^2} = \frac{\sin \varphi}{r}; \quad F_y = -\frac{x}{x^2 + y^2} = -\frac{r \cdot \cos \varphi}{r^2} = -\frac{\cos \varphi}{r}$$

$$F_r = F_x \cdot \cos \varphi + F_y \cdot \sin \varphi = \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{r} - \frac{\cos \varphi \cdot \sin \varphi}{r} = 0$$

$$F_\varphi = -F_x \cdot \sin \varphi + F_y \cdot \cos \varphi = -\frac{\sin^2 \varphi}{r} - \frac{\cos^2 \varphi}{r} = -\frac{(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}{r} = -\frac{1}{r}$$

$$\vec{F}(r; \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi = 0 \vec{e}_r - \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi = -\frac{1}{r} \vec{e}_\varphi$$

b)  $F_x = xy = r^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi; \quad F_y = y^2 = r^2 \cdot \sin^2 \varphi$

$$\begin{aligned} F_r &= F_x \cdot \cos \varphi + F_y \cdot \sin \varphi = r^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi + r^2 \cdot \sin^3 \varphi = \\ &= r^2 \cdot \sin \varphi (\underbrace{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}_1) = r^2 \cdot \sin \varphi \\ F_\varphi &= -F_x \cdot \sin \varphi + F_y \cdot \cos \varphi = -r^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi + r^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi = 0 \\ \vec{F}(r; \varphi) &= F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi = (r^2 \cdot \sin \varphi) \vec{e}_r + 0 \vec{e}_\varphi = (r^2 \cdot \sin \varphi) \vec{e}_r \end{aligned}$$

2)  $H_x = \frac{I}{2\pi r^2} (-y) = -\frac{I}{2\pi r} \cdot \sin \varphi; \quad H_y = \frac{I}{2\pi r^2} x = \frac{I}{2\pi r} \cdot \cos \varphi$

$$H_r = H_x \cdot \cos \varphi + H_y \cdot \sin \varphi = \frac{I}{2\pi r} (-\sin \varphi \cdot \cos \varphi + \cos \varphi \cdot \sin \varphi) = 0$$

$$H_\varphi = -H_x \cdot \sin \varphi + H_y \cdot \cos \varphi = \frac{I}{2\pi r} (\underbrace{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}_1) = \frac{I}{2\pi r}$$

$$\vec{H}(r; \varphi) = H_r \vec{e}_r + H_\varphi \vec{e}_\varphi = 0 \vec{e}_r + \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$

3) Die  $x$ - und  $y$ -Komponenten der Rotation verschwinden automatisch.

a)  $F_r = 1; \quad F_\varphi = 0; \quad \operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (0) = \frac{1}{r} \cdot 1 + 0 = \frac{1}{r}$

$$(\operatorname{rot} \vec{F})_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (0) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (1) = \frac{1}{r} (0 - 0) = 0 \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$$

b)  $F_r = r^2; \quad F_\varphi = 0; \quad \operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^3) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (0) = \frac{1}{r} \cdot 3r^2 + 0 = 3r$

$$(\operatorname{rot} \vec{F})_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (0) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (r^2) = \frac{1}{r} (0 - 0) = 0 \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$$

4)  $F_r = e^{r+\varphi}; \quad F_\varphi = \frac{1}{r} \cdot e^{r+\varphi}; \quad (\operatorname{rot} \vec{F})_x = (\operatorname{rot} \vec{F})_y = 0 \quad (\text{ebener Vektor})$

$$(\operatorname{rot} \vec{F})_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (e^{r+\varphi}) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (e^{r+\varphi}) = \frac{1}{r} (e^{r+\varphi} - e^{r+\varphi}) = \frac{1}{r} \cdot 0 = 0$$

Somit:  $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}$  ist *wirbelfrei* und als *Gradient* einer Potentialfunktion  $\phi$  darstellbar:

$$\vec{F} = \operatorname{grad} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi = e^{r+\varphi} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot e^{r+\varphi} \vec{e}_\varphi$$

Dann aber gilt:  $\frac{\partial \phi}{\partial r} = e^{r+\varphi}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = e^{r+\varphi}; \quad \text{Integration der 1. Gleichung} \Rightarrow$

$$\phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial r} dr = \int e^{r+\varphi} dr = e^{r+\varphi} + K(\varphi)$$

Die Integrationskonstante  $K$  kann noch von  $\varphi$  abhängen:  $K = K(\varphi)$ . Sie lässt sich wie folgt aus der bekannten partiellen Ableitung von  $\phi$  nach  $\varphi$  bestimmen:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (\mathrm{e}^{r+\varphi} + K(\varphi)) = \mathrm{e}^{r+\varphi} + K'(\varphi) = \mathrm{e}^{r+\varphi} \Rightarrow K'(\varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$K(\varphi) = \text{const.} = C$$

$$\text{Lösung: } \phi = \phi(r; \varphi) = \mathrm{e}^{r+\varphi} + C \quad (\text{mit } C \in \mathbb{R})$$

- 5) Darstellung in Polarkoordinaten:  $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi$

Zwischen den Geschwindigkeitskomponenten  $v_r, v_\varphi$  und den kartesischen Geschwindigkeitskomponenten  $\dot{x}, \dot{y}$  besteht der folgende Zusammenhang (Gleichung I-238):

$$v_r = \dot{x} \cdot \cos \varphi + \dot{y} \cdot \sin \varphi \quad \text{und} \quad v_\varphi = -\dot{x} \cdot \sin \varphi + \dot{y} \cdot \cos \varphi$$

Aus den Transformationsgleichungen  $x = r \cdot \cos \varphi$  und  $y = r \cdot \sin \varphi$  erhält man mit Hilfe der *Produkt- und Kettenregel* die benötigten Ableitungen  $\dot{x}$  und  $\dot{y}$  (sowohl  $r$  als auch  $\varphi$  sind dabei *zeitabhängige* Funktionen):

$$\dot{x} = \dot{r} \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \quad \text{und} \quad \dot{y} = \dot{r} \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$\begin{aligned} v_r &= (\dot{r} \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}) \cos \varphi + (\dot{r} \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}) \sin \varphi = \\ &= \dot{r} \cdot \cos^2 \varphi - r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} + \dot{r} \cdot \sin^2 \varphi + r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} = \\ &= \dot{r} \cdot \cos^2 \varphi + \dot{r} \cdot \sin^2 \varphi = \dot{r} \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_1 = \dot{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_\varphi &= -(\dot{r} \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}) \sin \varphi + (\dot{r} \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}) \cos \varphi = \\ &= -\dot{r} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + r \cdot \sin^2 \varphi \cdot \dot{\varphi} + \dot{r} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + r \cdot \cos^2 \varphi \cdot \dot{\varphi} = \\ &= r \cdot \sin^2 \varphi \cdot \dot{\varphi} + r \cdot \cos^2 \varphi \cdot \dot{\varphi} = r \underbrace{(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}_1 \dot{\varphi} = r \dot{\varphi} \end{aligned}$$

$$\text{Lösung: } \vec{v} = \vec{v}(r; \varphi) = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi = \dot{r} \vec{e}_r + (r \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi$$

- 6) Die Laplace-Gleichung mit dem Operator (I-245) reduziert sich auf  $\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0$  und somit auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} = \phi''(\varphi) = 0$$

Lösung durch *zweimalige* Integration:  $\phi = \phi(\varphi) = C_1 \varphi + C_2$  ( $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ )

- 7) a)  $F_x = x = \varrho \cdot \cos \varphi; \quad F_y = y = \varrho \cdot \sin \varphi; \quad F_z = z$

$$F_\varrho = F_x \cdot \cos \varphi + F_y \cdot \sin \varphi = \varrho \cdot \cos^2 \varphi + \varrho \cdot \sin^2 \varphi = \varrho \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_1 = \varrho$$

$$F_\varphi = -F_x \cdot \sin \varphi + F_y \cdot \cos \varphi = -\varrho \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \varrho \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = 0$$

$$F_z = z; \quad \vec{F}(\varrho; \varphi; z) = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z = \varrho \vec{e}_\varrho + 0 \vec{e}_\varphi + z \vec{e}_z = \varrho \vec{e}_\varrho + z \vec{e}_z$$

- b)  $F_x = y = \varrho \cdot \sin \varphi; \quad F_y = -2; \quad F_z = x = \varrho \cdot \cos \varphi$

$$F_\varrho = F_x \cdot \cos \varphi + F_y \cdot \sin \varphi = \varrho \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - 2 \cdot \sin \varphi = \sin \varphi (\varrho \cdot \cos \varphi - 2)$$

$$F_\varphi = -F_x \cdot \sin \varphi + F_y \cdot \cos \varphi = -\varrho \cdot \sin^2 \varphi - 2 \cdot \cos \varphi; \quad F_z = \varrho \cdot \cos \varphi$$

$$\vec{F}(\varrho; \varphi; z) = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z =$$

$$= \sin \varphi (\varrho \cdot \cos \varphi - 2) \vec{e}_\varrho - (\varrho \cdot \sin^2 \varphi + 2 \cdot \cos \varphi) \vec{e}_\varphi + (\varrho \cdot \cos \varphi) \vec{e}_z$$

8)  $v_x = v_y = 0 \Rightarrow v_\varrho = v_\varphi = 0; \quad v_z = \frac{(1+z)^2 - x^2 - y^2}{(1+z)^4} = \frac{(1+z)^2 - \varrho^2}{(1+z)^4}$

$$\vec{v} = v_\varrho \vec{e}_\varrho + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z = 0 \vec{e}_\varrho + 0 \vec{e}_\varphi + \frac{(1+z)^2 - \varrho^2}{(1+z)^4} \vec{e}_z = \frac{(1+z)^2 - \varrho^2}{(1+z)^4} \vec{e}_z$$

- 9) Geschwindigkeitsvektor in Zylinderkoordinaten (Gleichung I-296):  $\vec{v} = \dot{\varrho} \vec{e}_\varrho + (\varrho \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z$   
Die (ebenfalls zeitabhängigen) Zylinderkoordinaten lauten:

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} = e^{-t} \cdot \underbrace{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}}_1 = e^{-t}$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} = \frac{e^{-t} \cdot \sin t}{e^{-t} \cdot \cos t} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t \Rightarrow \varphi = t; \quad z = 2t$$

Somit gilt:  $\dot{\varrho} = -e^{-t}; \quad \dot{\varphi} = 1; \quad \dot{z} = 2$

Der Geschwindigkeitsvektor in Zylinderkoordinaten lautet damit:

$$\vec{v} = \dot{\varrho} \vec{e}_\varrho + (\varrho \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z = -e^{-t} \vec{e}_\varrho + e^{-t} \vec{e}_\varphi + 2 \vec{e}_z$$

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{(-e^{-t})^2 + (e^{-t})^2 + 2^2} = \sqrt{2 \cdot e^{-2t} + 4}; \quad \vec{v}(t=1) = 2,0666$$

10) a)  $\frac{\partial \phi}{\partial \varrho} = e^\varphi; \quad \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = \varrho \cdot e^\varphi; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 1 \Rightarrow \text{grad } \phi = e^\varphi \vec{e}_\varrho + e^\varphi \vec{e}_\varphi + \vec{e}_z$

b)  $\frac{\partial \phi}{\partial \varrho} = -\frac{1}{\varrho^2}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = e^{\varphi+z}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = e^{\varphi+z} \Rightarrow$   
 $\text{grad } \phi = -\frac{1}{\varrho^2} \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} e^{\varphi+z} \vec{e}_\varphi + e^{\varphi+z} \vec{e}_z$

11) a)  $F_\varrho = \frac{1}{\varrho^2}; \quad F_\varphi = F_z = 0; \quad F_\varrho \text{ hängt nur von } \varrho, \text{ nicht aber von } \varphi \text{ und } z \text{ ab.}$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \frac{1}{\varrho} \right) + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (0) + \frac{\partial}{\partial z} (0) = \frac{1}{\varrho} \left( -\frac{1}{\varrho^2} \right) + \frac{1}{\varrho} \cdot 0 + 0 = -\frac{1}{\varrho^3}$$

$\text{rot } \vec{F} = \vec{0} \quad (\text{alle partiellen Ableitungen in Formel (I-277) verschwinden})$

b)  $F_\varrho = \frac{1}{\varrho}; \quad F_\varphi = z; \quad F_z = 1$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} (1) + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (z) + \frac{\partial}{\partial z} (1) = \frac{1}{\varrho} \cdot 0 + \frac{1}{\varrho} \cdot 0 + 0 = 0$$

$$(\text{rot } \vec{F})_\varrho = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (1) - \frac{\partial}{\partial z} (z) = \frac{1}{\varrho} \cdot 0 - 1 = -1$$

$$(\text{rot } \vec{F})_\varphi = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\varrho} \right) - \frac{\partial}{\partial \varrho} (1) = 0 - 0 = 0$$

$$(\operatorname{rot} \vec{F})_z = \frac{1}{\varrho} \left( \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho z) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\varrho} \right) \right) = \frac{1}{\varrho} (z - 0) = \frac{z}{\varrho}$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = -1 \vec{e}_\varrho + 0 \vec{e}_\varphi + \frac{z}{\varrho} \vec{e}_z = -\vec{e}_\varrho + \frac{z}{\varrho} \vec{e}_z$$

- 12) Der Laplace-Operator (Gleichung I-278) reduziert sich jeweils auf *einen* Summand, da  $\phi$  nur von *einer* Variablen abhängt.

a)  $\Delta \phi(\varrho) = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \underbrace{\left( \varrho \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varrho} \right)}_{\text{const.}} = 0 \Rightarrow \varrho \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varrho} = \varrho \cdot \phi'(\varrho) = \text{const.} = C_1 \Rightarrow$

$$\phi'(\varrho) = \frac{C_1}{\varrho} \Rightarrow \phi(\varrho) = C_1 \cdot \int \frac{1}{\varrho} d\varrho = C_1 \cdot \ln \varrho + C_2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

b)  $\Delta \phi(\varphi) = \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = \phi''(\varphi) = 0$

Nach *zweimaliger* unbestimmter Integration:  $\phi(\varphi) = C_1 \varphi + C_2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

c)  $\Delta \phi(z) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \phi''(z) = 0$

Nach *zweimaliger* unbestimmter Integration:  $\phi(z) = C_1 z + C_2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

- 13)  $F_r = F_x \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi + F_y \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + F_z \cdot \cos \vartheta;$

$$F_\vartheta = F_x \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi + F_y \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi - F_z \cdot \sin \vartheta; \quad F_\varphi = -F_x \cdot \sin \varphi + F_y \cdot \cos \varphi$$

a)  $F_x = x = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi; \quad F_y = -z = -r \cdot \cos \vartheta; \quad F_z = y = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi$

$$F_r = r \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \varphi - r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi + r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi = \\ = r \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \varphi$$

$$F_\vartheta = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \cos^2 \varphi - r \cdot \cos^2 \vartheta \cdot \sin \varphi - r \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \sin \varphi = \\ = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \cos^2 \varphi - r \cdot \sin \varphi \underbrace{(\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)}_1 = \\ = r (\sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \cos^2 \varphi - \sin \varphi)$$

$$F_\varphi = -r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi - r \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi = -r \cdot \cos \varphi (\sin \vartheta \cdot \sin \varphi + \cos \vartheta)$$

$$\vec{F}(r; \vartheta; \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi = (r \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \varphi) \vec{e}_r +$$

$$+ r (\sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \cos^2 \varphi - \sin \varphi) \vec{e}_\vartheta - r \cdot \cos \varphi (\sin \vartheta \cdot \sin \varphi + \cos \vartheta) \vec{e}_\varphi$$

b)  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2; \quad F_x = \frac{\sin \vartheta \cdot \cos \varphi}{r}; \quad F_y = \frac{\sin \vartheta \cdot \sin \varphi}{r}; \quad F_z = \frac{\cos \vartheta}{r}$

$$F_r = \frac{\sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \varphi}{r} + \frac{\sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi}{r} + \frac{\cos^2 \vartheta}{r} =$$

$$= \frac{1}{r} [ \sin^2 \vartheta (\underbrace{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}_1) + \cos^2 \vartheta ] = \frac{1}{r} (\underbrace{\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta}_1) = \frac{1}{r}$$

$$\begin{aligned}
F_\vartheta &= \frac{\sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \cos^2 \varphi}{r} + \frac{\sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \sin^2 \varphi}{r} - \frac{\sin \vartheta \cdot \cos \vartheta}{r} = \\
&= \frac{1}{r} [\sin \vartheta \cdot \cos \vartheta (\underbrace{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}_1) - \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta] = \\
&= \frac{1}{r} (\sin \vartheta \cdot \cos \vartheta - \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta) = \frac{1}{r} \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

$$F_\varphi = -\frac{\sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi}{r} + \frac{\sin \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \vartheta}{r} = 0$$

$$\vec{F}(r; \vartheta; \varphi) = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi = \frac{1}{r} \vec{e}_r + 0 \vec{e}_\vartheta + 0 \vec{e}_\varphi = \frac{1}{r} \vec{e}_r$$

$$\begin{aligned}
14) \quad x^2 + y^2 &= r^2 \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \varphi + r^2 \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi = r^2 \cdot \sin^2 \vartheta (\underbrace{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}_1) = \\
&= r^2 \cdot \sin^2 \vartheta
\end{aligned}$$

$$v_x = \frac{-yz}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -r \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi; \quad v_y = \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}} = r \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi; \quad v_z = 0$$

$$\begin{aligned}
v_r &= v_x \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi + v_y \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + v_z \cdot \cos \vartheta = \\
&= -r \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi + r \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + 0 \cdot \cos \vartheta = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_\vartheta &= v_x \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi + v_y \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi - v_z \cdot \sin \vartheta = \\
&= -r \cdot \cos^2 \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + r \cdot \cos^2 \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - 0 \cdot \sin \vartheta = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_\varphi &= -v_x \cdot \sin \varphi + v_y \cdot \cos \varphi = r \cdot \cos \vartheta \cdot \sin^2 \varphi + r \cdot \cos \vartheta \cdot \cos^2 \varphi = \\
&= r \cdot \cos \vartheta (\underbrace{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}_1) = r \cdot \cos \vartheta
\end{aligned}$$

$$\vec{v}(r; \vartheta; \varphi) = v_r \vec{e}_r + v_\vartheta \vec{e}_\vartheta + v_\varphi \vec{e}_\varphi = 0 \vec{e}_r + 0 \vec{e}_\vartheta + (r \cdot \cos \vartheta) \vec{e}_\varphi = (r \cdot \cos \vartheta) \vec{e}_\varphi$$

$$15) \quad \text{Gesuchte Darstellungsform: } \vec{v}(r; \vartheta; \varphi) = v_r \vec{e}_r + v_\vartheta \vec{e}_\vartheta + v_\varphi \vec{e}_\varphi$$

Aus den Transformationsgleichungen (I-320) folgt mit  $v_x = \dot{x}$ ,  $v_y = \dot{y}$  und  $v_z = \dot{z}$ :

$$v_r = \dot{x} \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi + \dot{y} \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + \dot{z} \cdot \cos \vartheta$$

$$v_\vartheta = \dot{x} \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi + \dot{y} \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi - \dot{z} \cdot \sin \vartheta$$

$$v_\varphi = -\dot{x} \cdot \sin \varphi + \dot{y} \cdot \cos \varphi$$

Zwischen den kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  und den Kugelkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  bestehen die Beziehungen  $x = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi$ ,  $y = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi$ ,  $z = r \cdot \cos \vartheta$ . Dabei sind  $r, \vartheta$  und  $\varphi$  Funktionen der Zeit  $t$ . Dann gilt für die zeitlichen Ableitungen der kartesischen Koordinaten (Produkt- und Kettenregel verwenden):

$$\dot{x} = \dot{r} \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi + r \cdot \cos \vartheta \cdot \dot{\vartheta} \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$\dot{y} = \dot{r} \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \vartheta \cdot \dot{\vartheta} \cdot \sin \varphi + r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$\dot{z} = \dot{r} \cdot \cos \vartheta - r \cdot \sin \vartheta \cdot \dot{\vartheta}$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die obigen Transformationsgleichungen erhält man:

$$\begin{aligned}
 v_r &= \dot{x} \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi + \dot{y} \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + \dot{z} \cdot \cos \vartheta = \\
 &= (\dot{r} \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi + r \cdot \cos \vartheta \cdot \dot{\vartheta} \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}) \sin \vartheta \cdot \cos \varphi + \\
 &\quad + (\dot{r} \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \vartheta \cdot \dot{\vartheta} \cdot \sin \varphi + r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}) \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + \\
 &\quad + (r \cdot \cos \vartheta - r \cdot \sin \vartheta \cdot \dot{\vartheta}) \cos \vartheta = \\
 &= \dot{r} \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \varphi + r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \cos^2 \varphi \cdot \dot{\vartheta} - r \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} + \\
 &\quad + \dot{r} \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi + r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \sin^2 \varphi \cdot \dot{\vartheta} + r \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} + \\
 &\quad + \dot{r} \cdot \cos^2 \vartheta - r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \dot{\vartheta} = \\
 &= \dot{r} \cdot \underbrace{\sin^2 \vartheta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_1 + r \cdot \underbrace{\sin \vartheta \cdot \cos \vartheta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_1 \dot{\vartheta} + \\
 &\quad + \dot{r} \cdot \cos^2 \vartheta - r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \dot{\vartheta} = \\
 &= \dot{r} \cdot \sin^2 \vartheta + \dot{r} \cdot \cos^2 \vartheta = \dot{r} \underbrace{(\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta)}_1 = \dot{r}
 \end{aligned}$$

Analog:  $v_\vartheta = r \dot{\vartheta}$ ;  $v_\varphi = r \cdot \sin \vartheta \cdot \dot{\varphi}$

Der *Geschwindigkeitsvektor* lautet somit in Kugelkoordinaten:

$$\vec{v}(r; \vartheta; \varphi) = v_r \vec{e}_r + v_\vartheta \vec{e}_\vartheta + v_\varphi \vec{e}_\varphi = \dot{r} \vec{e}_r + (r \dot{\vartheta}) \vec{e}_\vartheta + (r \cdot \sin \vartheta \cdot \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi$$

- 16) Aus  $r = \text{const.} = R$  und  $\vartheta = \text{const.} = \vartheta_0$  folgt  $dr = 0$  und  $d\vartheta = 0$  und somit nach Gleichung (I-308) für das Linienelement  $ds = R \cdot \sin \vartheta_0 d\varphi$ .

$$\begin{aligned}
 17) \quad F_r &= F_\vartheta = e^{\vartheta+\varphi}; \quad F_\varphi = \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot e^{\vartheta+\varphi} \\
 (\text{rot } \vec{F})_r &= \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (e^{\vartheta+\varphi}) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (e^{\vartheta+\varphi}) \right] = \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} [e^{\vartheta+\varphi} - e^{\vartheta+\varphi}] = \\
 &= \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot 0 = 0 \\
 (\text{rot } \vec{F})_\vartheta &= \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (e^{\vartheta+\varphi}) - \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot e^{\vartheta+\varphi} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot e^{\vartheta+\varphi} - \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot e^{\vartheta+\varphi} \right) = \frac{1}{r} \cdot 0 = 0 \\
 (\text{rot } \vec{F})_\varphi &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot e^{\vartheta+\varphi}) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} (e^{\vartheta+\varphi}) \right] = \frac{1}{r} [e^{\vartheta+\varphi} - e^{\vartheta+\varphi}] = \frac{1}{r} \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

Somit ist  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ . Das Vektorfeld  $\vec{F}$  ist daher *wirbelfrei* und als *Gradient* einer Potentialfunktion  $\phi$  darstellbar:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \operatorname{grad} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_{\vartheta} + \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_{\varphi} = \\ &= e^{\vartheta+\varphi} \vec{e}_r + e^{\vartheta+\varphi} \vec{e}_{\vartheta} + \frac{e^{\vartheta+\varphi}}{\sin \vartheta} \vec{e}_{\varphi}\end{aligned}$$

Dann aber gilt:  $\frac{\partial \phi}{\partial r} = e^{\vartheta+\varphi}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} = r \cdot e^{\vartheta+\varphi}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = r \cdot e^{\vartheta+\varphi}$

Integration der 1. Gleichung:

$$\phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial r} dr = \int e^{\vartheta+\varphi} dr = e^{\vartheta+\varphi} \cdot \int 1 dr = r \cdot e^{\vartheta+\varphi} + K(\vartheta; \varphi)$$

Die Integrationskonstante  $K$  kann noch von  $\vartheta$  und  $\varphi$  abhängen:  $K = K(\vartheta; \varphi)$ . Sie lässt sich wie folgt aus den bereits bekannten partiellen Ableitungen von  $\phi$  nach  $\vartheta$  bzw.  $\varphi$  bestimmen:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \cdot e^{\vartheta+\varphi} + K) = r \cdot e^{\vartheta+\varphi} + \frac{\partial K}{\partial \vartheta} = r \cdot e^{\vartheta+\varphi} \Rightarrow \frac{\partial K}{\partial \vartheta} = 0 \Rightarrow$$

$K$  ist unabhängig von  $\vartheta$ , kann aber noch von  $\varphi$  abhängen:  $K = K_1(\varphi)$

Zwischenergebnis:  $\phi = r \cdot e^{\vartheta+\varphi} + K_1(\varphi)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \cdot e^{\vartheta+\varphi} + K_1(\varphi)) = r \cdot e^{\vartheta+\varphi} + K'_1(\varphi) = r \cdot e^{\vartheta+\varphi} \Rightarrow K'_1(\varphi) = 0 \Rightarrow$$

$K_1(\varphi) = \text{const.} = C$

Lösung:  $\phi = \phi(r; \vartheta; \varphi) = r \cdot e^{\vartheta+\varphi} + C$  (mit  $C \in \mathbb{R}$ )

- 18)  $F_r = r^n; \quad F_{\vartheta} = F_{\varphi} = 0; \quad$  Man beachte:  $F_r$  ist unabhängig von  $\vartheta$  und  $\varphi$ .

a) Formel I-325 für die Divergenz reduziert sich auf den 1. Summand:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot r^n) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^{n+2}) = \frac{1}{r^2} \cdot (n+2) r^{n+1} = (n+2) r^{n-1}$$

Für ein quellenfreies Feld gilt:  $\operatorname{div} \vec{F} = 0 \Rightarrow \underbrace{(n+2)}_0 r^{n-1} = 0 \Rightarrow n = -2$

- b)  $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$  (alle partiellen Ableitungen in der Formel I-326 verschwinden und zwar unabhängig vom Exponenten  $n$ )

Folgerung: Jedes Vektorfeld vom Typ  $\vec{F} = r^n \vec{e}_r$  ist wirbelfrei und damit ein Zentraffeld.

- c)  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$  und  $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow n = -2$  (siehe Lösung a)). Nur das spezielle Feld

$$\vec{F} = r^{-2} \vec{e}_r = \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \text{ ist daher quellen- und wirbelfrei.}$$

- 19) Der Laplace-Operator (Formel I-327) reduziert auch jeweils auf einen Summand, da  $\phi$  stets nur von einer Variablen abhängt.

$$\text{a) } \Delta \phi(r) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial r}}_{\text{const.} = C_1} \right) = 0 \Rightarrow r^2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} = r^2 \cdot \phi'(r) = C_1 \Rightarrow$$

$$\phi'(r) = \frac{C_1}{r^2} \Rightarrow \phi(r) = C_1 \cdot \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{C_1}{r} + C_2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

$$\text{b)} \quad \Delta \phi(\vartheta) = \frac{1}{r^2 \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \underbrace{\sin \vartheta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}}_{\text{const.} = C_1} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \vartheta \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} = \sin \vartheta \cdot \phi'(\vartheta) = C_1$$

$$\phi'(\vartheta) = \frac{C_1}{\sin \vartheta} \quad \Rightarrow \quad \phi(\vartheta) = C_1 \cdot \int \frac{1}{\sin \vartheta} d\vartheta = C_1 \cdot \ln(\tan(\vartheta/2)) + C_2$$

(Integral 214 mit  $a = 1; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ )

$$\text{c)} \quad \Delta \phi(\varphi) = \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = \phi''(\varphi) = 0$$

Nach zweimaliger elementarer Integration folgt:  $\phi(\varphi) = C_1 \varphi + C_2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$

## Abschnitt 7

$$1) \quad C_1: \quad y = 2x, \quad dy = 2dx, \quad 0 \leq x \leq 2; \quad C_2: \quad y = x^2, \quad dy = 2xdx, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$\int_{C_1} [y dx + (x^2 + xy) dy] = \int_0^2 (2x + 6x^2) dx = \left[ x^2 + 2x^3 \right]_0^2 = 20$$

$$\int_{C_2} [y dx + (x^2 + xy) dy] = \int_0^2 (x^2 + 2x^3 + 2x^4) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{5}x^5 \right]_0^2 = \frac{352}{15}$$

$$2) \quad \text{a)} \quad \frac{\partial}{\partial y} (2xy + 4x) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 1) = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy + 4x; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 - 1$$

$$\phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \int (2xy + 4x) dx = x^2 y + 2x^2 + K(y)$$

Die Integrationskonstante  $K$  kann noch von  $y$  abhängen ( $K = K(y)$ ) und lässt sich aus der bekannten partiellen Ableitung von  $\phi$  nach  $y$  wie folgt bestimmen:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y + 2x^2 + K(y)) = x^2 + K'(y) = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad K'(y) = -1 \quad \Rightarrow$$

$$K(y) = \int (-1) dy = -y + C$$

*Lösung:*  $\phi = \phi(x; y) = x^2 y + 2x^2 - y + C \quad (\text{mit } C \in \mathbb{R})$

$$\text{b)} \quad \frac{\partial}{\partial y} (e^y) = \frac{\partial}{\partial x} (x \cdot e^y) = e^y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = e^y; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = x \cdot e^y$$

$$\phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \int e^y dx = e^y \cdot \int 1 dx = x \cdot e^y + K(y)$$

Die Integrationskonstante  $K$  kann noch von  $y$  abhängen:  $K = K(y)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x \cdot e^y + K(y)) = x \cdot e^y + K'(y) = x \cdot e^y \quad \Rightarrow \quad K'(y) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$K(y) = \text{const.} = C$$

*Lösung:*  $\phi = \phi(x; y) = x \cdot e^y + C \quad (\text{mit } C \in \mathbb{R})$

c)  $\frac{\partial}{\partial y} (3x^2y + y^3) = \frac{\partial}{\partial x} (x^3 + 3xy^2) = 3x^2 + 3y^2 \Rightarrow$   
 $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 3x^2y + y^3; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^3 + 3xy^2; \quad 1. \text{ Gleichung integrieren} \Rightarrow$   
 $\phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \int (3x^2y + y^3) dx = x^3y + xy^3 + K(y) \quad (K \text{ kann von } y \text{ abhängen})$   
 $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^3y + xy^3 + K(y)) = x^3 + 3xy^2 + K'(y) = x^3 + 3xy^2 \Rightarrow$   
 $K'(y) = 0 \Rightarrow K(y) = \text{const.} = C$

Lösung:  $\phi = \phi(x; y) = x^3y + xy^3 + C \quad (\text{mit } C \in \mathbb{R})$

- 3) a)  $\frac{\partial}{\partial y} (x) = \frac{\partial}{\partial x} (y) = 0 \Rightarrow \text{konservatives Kraftfeld} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = x; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = y$   
b)  $\phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + K(y) \quad (K \text{ kann von } y \text{ abhängen})$   
 $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2}x^2 + K(y) \right) = K'(y) = y \Rightarrow K(y) = \int y dy = \frac{1}{2}y^2 + C$   
Lösung:  $\phi = \phi(x; y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C \quad (\text{mit } C \in \mathbb{R})$

- c) Das Arbeitsintegral ist *wegunabhängig*, hängt also nur vom Anfangs- und Endpunkt ab:  

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \underbrace{(x dx + y dy)}_{d\phi} = \int_{P_1}^{P_2} d\phi = \left[ \phi(x; y) \right]_{P_1}^{P_2} = \left[ \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right]_{(1; 0)}^{(3; 5)} = 16,5$$

- 4) Die Integrabilitätsbedingung (I-373) ist *nicht* erfüllt (Ableitungen mit der Quotientenregel):

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{1+x^2+y^2} \right) = \frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2} \neq \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-x}{1+x^2+y^2} \right) = \frac{-1+x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

Das Kraftfeld  $\vec{F}$  ist somit *nichtkonservativ*, das Arbeitsintegral  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  hängt daher noch vom Verbindungsweg  $C$  der Punkte A und B ab:

Parameterdarstellung der beiden Halbkreise (Radius = 1):

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad dx = -\sin t dt, \quad dy = \cos t dt$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{1+x^2+y^2} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \frac{y dx - x dy}{1+x^2+y^2} = \underbrace{\frac{-(\sin^2 t + \cos^2 t) dt}{1+\cos^2 t + \sin^2 t}}_1 = -\frac{1}{2} dt$$

Oberer Halbkreis  $C_1$  ( $0 \leq t \leq \pi$ ):

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^\pi 1 dt = -\frac{1}{2} \left[ t \right]_0^\pi = -\frac{\pi}{2}$$

Unterer Halbkreis  $C_2$  ( $t$  durchläuft alle Werte von 0 bis  $-\pi$ ):

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^{-\pi} 1 dt = -\frac{1}{2} \left[ t \right]_0^{-\pi} = \frac{\pi}{2}$$

- 5) Weg  $C$  (Einheitskreis):  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ;  $dx = -\sin t dt$ ,  $dy = \cos t dt$ ;  $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C [(x + 2y) dx + 0 dy] = \int_C (x + 2y) dx = - \int_0^{2\pi} (\sin t \cdot \cos t + 2 \cdot \sin^2 t) dt = \\ &= - \left[ \frac{1}{2} \cdot \sin^2 t + 2 \left( \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \right) \right]_0^{2\pi} = -2\pi \end{aligned}$$

(Integrale: 254 und 205, jeweils mit  $a = 1$ )

- 6) Die Integrabilitätsbedingung (Gleichung I-373) ist erfüllt:

$$\frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{C_V}{T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{R}{V} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{C_V}{T} \quad \text{und} \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{R}{V}$$

Durch unbestimmte Integration folgt:

$$S(T; V) = C_V \cdot \ln T + R \cdot \ln V + K \quad (K \in \mathbb{R})$$

- 7) Integrationsweg  $C$ :  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$ ;  $dx = dt$ ,  $dy = 2t dt$ ,  $dz = 3t^2 dt$ ;

$$1 \leq t \leq 2$$

$$\begin{aligned} \int_C (xy^2 dx - x^2 yz dy + xz^2 dz) &= \int_1^2 (t \cdot t^4 - t^2 \cdot t^2 \cdot t^3 \cdot 2t + t \cdot t^6 \cdot 3t^2) dt = \\ &= \int_1^2 (t^5 - 2t^8 + 3t^9) dt = \left[ \frac{1}{6}t^6 - \frac{2}{9}t^9 + \frac{3}{10}t^{10} \right]_1^2 = 203,8444 \end{aligned}$$

- 8) Integrationsweg  $C$ :  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = t$ ;  $dx = -\sin t dt$ ,  $dy = \cos t dt$ ,  $dz = dt$ ;  
 $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \begin{pmatrix} xy \\ 1 \\ yz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = xy dx + dy + yz dz = (-\sin^2 t \cdot \cos t + \cos t + t \cdot \sin t) dt \\ \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t \cdot \cos t + \cos t + t \cdot \sin t) dt = \\ &= \left[ -\frac{1}{3} \cdot \sin^3 t + 2 \cdot \sin t - t \cdot \cos t \right]_0^{2\pi} = -2\pi \end{aligned}$$

(Integrale: 255 mit  $n = 2$ ,  $a = 1$  und 208 mit  $a = 1$ )

- 9)  $F_x = x$ ;  $F_y = y$ ;  $F_z = z$ ;  $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0$

Die Integrabilitätsbedingungen (I-374) bzw. (I-375) sind somit erfüllt. Daher gilt  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = x$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial y} = y$  und  $\frac{\partial \phi}{\partial z} = z$  und damit (nach unbestimmter Integration):

$$\phi(x; y; z) = \int_C (x dx + y dy + z dz) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) + C \quad (\text{mit } C \in \mathbb{R})$$

$$10) \quad \vec{F} = r^2 \vec{r} = (x^2 + y^2 + z^2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 + xy^2 + xz^2 \\ x^2y + y^3 + yz^2 \\ x^2z + y^2z + z^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (x^3 + xy^2 + xz^2) = 2xy \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2y + y^3 + yz^2) = 2xy \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 2xy$$

Ebenso zeigt man, dass die beiden restlichen Integrabilitätsbedingungen (I-374) erfüllt sind:

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = 2xz; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 2yz \Rightarrow \text{rot } \vec{F} = \vec{0}$$

Somit gilt für die noch unbekannte Potentialfunktion  $\phi = \phi(x, y, z)$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = x^3 + xy^2 + xz^2; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2y + y^3 + yz^2; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = x^2z + y^2z + z^3$$

Unbestimmte Integration der 1. Gleichung:

$$\phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \int (x^3 + xy^2 + xz^2) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2z^2 + K(y; z)$$

Die Integrationskonstante  $K$  kann noch von  $y$  und  $z$  abhängen ( $K = K(y; z)$ ) und lässt sich aus den bereits bekannten partiellen Ableitungen von  $\phi$  nach  $y$  bzw.  $z$  wie folgt bestimmen:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2z^2 + K(y; z) \right) = x^2y + \frac{\partial K}{\partial y} = x^2y + y^3 + yz^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial K}{\partial y} = y^3 + yz^2 \Rightarrow K = \int (y^3 + yz^2) dy = \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2z^2 + K_1(z)$$

Die Integrationskonstante  $K_1$  kann noch von  $z$  abhängen:  $K_1 = K_1(z)$

$$\text{Zwischenergebnis: } \phi = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2z^2 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2z^2 + K_1(z)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2z^2 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2z^2 + K_1(z) \right) = \\ &= x^2z + y^2z + K'_1(z) = x^2z + y^2z + z^3 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$K'_1(z) = z^3 \Rightarrow K_1(z) = \int z^3 dz = \frac{1}{4}z^4 + C$$

Die Potentialfunktion lautet somit wie folgt:

$$\begin{aligned} \phi = \phi(x; y; z) &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2z^2 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2z^2 + \frac{1}{4}z^4 + C = \\ &= \frac{1}{4}(x^4 + y^4 + z^4) + \frac{1}{2}(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) + C = \\ &= \frac{1}{4} \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)^2}_{r^2} + C = \frac{1}{4}r^4 + C \quad (\text{mit } C \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

- 11) Die Integrabilitätsbedingung (I-373) bzw. (I-376) ist in der gesamten  $x, y$ -Ebene erfüllt:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2x + y^2) = \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (2xy + y^2) = 2y$$

Somit verschwindet das Linienintegral des Vektorfeldes  $\vec{F}$  längs einer *jeden* geschlossenen Kurve (also auch längs des Einheitskreises):

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint [(2x + y^2) dx + (2xy + y^2) dy] = 0$$

12) a)  $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2x + y) = 1; \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (xy + y^2) = y \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x}$

Die Integrabilitätsbedingung (I-373) ist *nicht* erfüllt, das Vektorfeld daher *nichtkonservativ*.

b)  $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (y^2 \cdot \sin x - 2x) = \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (-2y \cdot \cos x + 4y) = 2y \cdot \sin x$

Das ebene Vektorfeld ist somit *konservativ* und für das noch unbekannte Potential  $\phi$  gilt:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_x = y^2 \cdot \sin x - 2x; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = F_y = -2y \cdot \cos x + 4y$$

$$\phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \int (y^2 \cdot \sin x - 2x) dx = -y^2 \cdot \cos x - x^2 + K(y)$$

Bestimmung der Integrationskonstanten  $K = K(y)$ , die noch von  $y$  abhängen kann, aus der bereits bekannten partiellen Ableitung von  $\phi$  nach  $y$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (-y^2 \cdot \cos x - x^2 + K(y)) = -2y \cdot \cos x + K'(y) = -2y \cdot \cos x + 4y \Rightarrow$$

$$K'(y) = 4y \Rightarrow K(y) = \int 4y dy = 2y^2 + C$$

$$\text{Lösung: } \phi = \phi(x; y) = -y^2 \cdot \cos x - x^2 + 2y^2 + C \quad (\text{mit } C \in \mathbb{R})$$

- c) Bereits die erste der drei Integrabilitätsbedingungen (I-374) ist *nicht* erfüllt:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2xy - z^3) = 2x, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (2xy) = 2y \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

Das Vektorfeld ist daher *nichtkonservativ*.

- d) Auch hier ist bereits die erste der drei Integrabilitätsbedingungen (I-374) *nicht* erfüllt:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 \cdot e^y) = x^2 \cdot e^y, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x - z) = 1 \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

Das Vektorfeld ist daher *nichtkonservativ*.

$$\begin{aligned}
 13) \quad \text{a)} \quad \vec{F} &= \begin{pmatrix} x + yz \\ xz \\ y + yz \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} \cos t + 2 \cdot \sin t \\ 2 \cdot \cos t \\ 3 \cdot \sin t \end{pmatrix}; \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos t \\ 5 \cdot \sin t \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \dot{\vec{r}} = 5 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} &= 25 \begin{pmatrix} \cos t + 2 \cdot \sin t \\ 2 \cdot \cos t \\ 3 \cdot \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \\
 &= 25 (-\sin t \cdot \cos t - 2 \cdot \sin^2 t + 2 \cdot \underbrace{\cos^2 t}_{1 - \sin^2 t}) = \\
 &= 25 (-\sin t \cdot \cos t - 4 \cdot \sin^2 t + 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W &= \oint_C (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) dt = 25 \cdot \int_0^{2\pi} (-\sin t \cdot \cos t - 4 \cdot \sin^2 t + 2) dt = \\
 &= 25 \left[ -\frac{1}{2} \cdot \sin^2 t - 4 \left( \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \right) + 2t \right]_0^{2\pi} = \\
 &= 25 \left[ -\frac{1}{2} \cdot \sin^2 t + \sin(2t) \right]_0^{2\pi} = 25 \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

(Integrale: 254 und 205, jeweils mit  $a = 1$ )

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad \text{rot } \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + yz & xz & y + yz \end{vmatrix} = \left[ \frac{\partial}{\partial y} (y + yz) - \frac{\partial}{\partial z} (xz) \right] \vec{e}_x + \\
 &\quad + \left[ \frac{\partial}{\partial z} (x + yz) - \frac{\partial}{\partial x} (y + yz) \right] \vec{e}_y + \left[ \frac{\partial}{\partial x} (xz) - \frac{\partial}{\partial y} (x + yz) \right] \vec{e}_z = \\
 &= (1 + z - x) \vec{e}_x - (0 - y) \vec{e}_y + (z - z) \vec{e}_z = \\
 &= (1 - x + z) \vec{e}_x + y \vec{e}_y + 0 \vec{e}_z \neq \vec{0}
 \end{aligned}$$

c) Die Integrabilitätsbedingung (I-375)  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$  ist *nicht* erfüllt, das Vektorfeld somit *nichtkonservativ*.

$$14) \quad \text{a)} \quad F_x = \sin y; \quad F_y = x \cdot \cos y + \sin z; \quad F_z = y \cdot \cos z$$

Die Integrabilitätsbedingungen (I-374) sind *erfüllt*:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = \cos y; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = \cos z; \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0$$

Das Feld ist daher *konservativ*.

$$\text{b)} \quad \text{Somit: } \frac{\partial \phi}{\partial x} = F_x = \sin y; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = F_y = x \cdot \cos y + \sin z; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = F_z = y \cdot \cos z$$

$$\text{Integration der 1. Gleichung: } \phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = \int \sin y dx = x \cdot \sin y + K(y; z)$$

Die Integrationskonstante  $K$  kann noch von  $y$  und  $z$  abhängen ( $K = K(y; z)$ ) und lässt sich aus den bereits bekannten partiellen Ableitungen von  $\phi$  nach  $y$  bzw.  $z$  bestimmen:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x \cdot \sin y + K(y; z)) = x \cdot \cos y + \frac{\partial K}{\partial y} = x \cdot \cos y + \sin z \Rightarrow$$

$$\frac{\partial K}{\partial y} = \sin z \Rightarrow K = \int \sin z \, dy = y \cdot \sin z + K_1(z)$$

Zwischenergebnis:  $\phi = x \cdot \sin y + y \cdot \sin z + K_1(z)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (x \cdot \sin y + y \cdot \sin z + K_1(z)) = y \cdot \cos z + K'_1(z) = y \cdot \cos z \Rightarrow$$

$$K'_1(z) = 0 \Rightarrow K_1(z) = \text{const.} = C$$

Lösung:  $\phi = \phi(x; y; z) = x \cdot \sin y + y \cdot \sin z + C$  (mit  $C \in \mathbb{R}$ )

- c) Da das Vektorfeld *konservativ* ist, gilt für jeden Verbindungsweg  $C$  der beiden Punkte:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{P_1}^{P_2} d\phi = [\phi(x; y; z)]_{(x_1; y_1; z_1)}^{(x_2; y_2; z_2)} = [x \cdot \sin y + y \cdot \sin z]_{(0; 0; 0)}^{(5; \pi; 3\pi)} = \\ &= (\underbrace{5 \cdot \sin \pi}_{0} + \pi \cdot \underbrace{\sin(3\pi)}_{0}) - (0 \cdot \underbrace{\sin 0}_{0} + 0 \cdot \underbrace{\sin 0}_{0}) = 0 \end{aligned}$$

## Abschnitt 8

- 1) Gleichung der Ebene:  $\phi(x; y; z) = x + y + z - 1 = 0$  oder  $z = 1 - x - y$

$$\text{grad } \phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |\text{grad } \phi| = \sqrt{3} \Rightarrow \vec{N} = \frac{1}{|\text{grad } \phi|} \text{grad } \phi = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 4y \\ x^2 \\ xz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} (4y + x^2 + xz) \stackrel{z = 1 - x - y}{=} \frac{1}{\sqrt{3}} (x - xy + 4y)$$

$$(\underbrace{\vec{N} \cdot \vec{e}_z}_{N_z}) dA = \frac{1}{\sqrt{3}} dA = dy dx \Rightarrow dA = \sqrt{3} dy dx$$

Integrationsbereich  $A^*$  (in Bild A-19 grau unterlegt):

$y$ -Integration: von  $y = 0$  bis  $y = -x + 1$

$x$ -Integration: von  $x = 0$  bis  $x = 1$

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \int_{x=0}^1 \underbrace{\int_{y=0}^{-x+1} (x - xy + 4y) dy dx}_{I(x)}$$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{y=0}^{-x+1} (x - xy + 4y) dy = \left[ xy - \frac{1}{2} xy^2 + 2y^2 \right]_{y=0}^{-x+1} = \\ &= x(-x + 1) - \frac{1}{2} x(-x + 1)^2 + 2(-x + 1)^2 = -\frac{1}{2} x^3 + 2x^2 - \frac{7}{2} x + 2 \end{aligned}$$

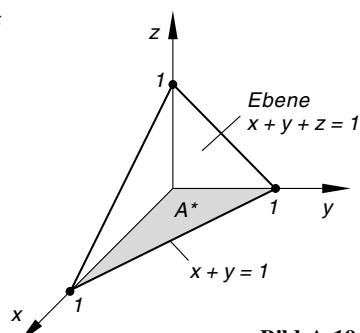


Bild A-19

$$\begin{aligned} \iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA &= \int_{x=0}^1 I(x) dx = \int_0^1 \left( -\frac{1}{2} x^3 + 2x^2 - \frac{7}{2} x + 2 \right) dx = \\ &= \left[ -\frac{1}{8} x^4 + \frac{2}{3} x^3 - \frac{7}{4} x^2 + 2x \right]_0^1 = \frac{19}{24} \end{aligned}$$

2)  $\vec{v} \cdot \vec{N} = \vec{v} \cdot \vec{e}_z = v_z = z^2 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{N} = 2^2 = 4$  auf der Ebene  $z = 2$

Flächenelement:  $dA = dy dx$

$$\begin{aligned} \iint_{(A)} (\vec{v} \cdot \vec{N}) dA &= \int_{x=0}^{10} \int_{y=0}^{10} 4 dy dx = 4 \cdot \underbrace{\int_{x=0}^{10} \int_{y=0}^{10} dy dx}_{A = 100} = 4 \cdot 100 = 400 \end{aligned}$$

- 3) Wir betrachten zunächst den Fluss in **z-Richtung** durch die beiden Würfelflächen  $A_u$  und  $A_0$  (in Bild A-20 grau unterlegt).

Fluss durch  $A_u$  (Teil der  $x, y$ -Ebene  $z = 0$ ):

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \vec{F} \cdot (-\vec{e}_z) = -\underbrace{\vec{F} \cdot \vec{e}_z}_{z\text{-Komponente von } \vec{F}} = F_z = -xyz = -xy \cdot 0 = 0$$

$$\iint_{(A_u)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(A_u)} 0 dA = 0$$

Fluss durch  $A_0$  (Teil der Ebene  $z = 1$ ):

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{e}_z}_{z\text{-Komponente von } \vec{F}} = F_z = xyz = xy \cdot 1 = xy$$

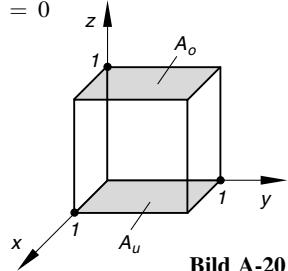


Bild A-20

$$\iint_{(A_0)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 xy dy dx = \int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 y dy = \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \cdot \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Gesamtfluss in z-Richtung: } \iint_{(A_u + A_0)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

**Fluss in x-Richtung (siehe Bild A-20)**

Fluss durch die *hintere* Würfelfläche  $A_h$  (Teil der  $y, z$ -Ebene  $x = 0$ ):

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \vec{F} \cdot (-\vec{e}_x) = -\underbrace{\vec{F} \cdot \vec{e}_x}_{x\text{-Komponente von } \vec{F}} = -F_x = -x = 0$$

$$\iint_{(A_h)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(A_h)} 0 dA = 0$$

Fluss durch die *vordere* Würfelfläche  $A_v$  (Teil der Ebene  $x = 1$ ):

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{e}_x}_{x\text{-Komponente von } \vec{F}} = F_x = x = 1$$

$$\iint_{(A_v)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(A_v)} 1 dA = A_v = 1 \quad (A_v: \text{Quadrat mit der Seitenlänge } 1)$$

$$\text{Gesamtfluss in } x\text{-Richtung: } \iint_{(A_h + A_v)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = 0 + 1 = 1$$

### Fluss in $y$ -Richtung (siehe Bild A-20)

Gleches Ergebnis wie in  $y$ -Richtung.

$$\text{Gesamtfluss durch die Würfeloberfläche } A: \iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = 1 + 1 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

- 4) Gleichung der Mantelfläche  $A$ :  $\phi(x; y; z) = x^2 + y^2 - 16 = 0$  (mit  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  und  $0 \leq z \leq 5$ )

$$\text{grad } \phi = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |\text{grad } \phi| = 2 \sqrt{x^2 + y^2} = 8 \Rightarrow \vec{N} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zylinderkoordinaten:  $\varrho = 4$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ,  $0 \leq z \leq 5$

Transformationsgleichungen:  $x = 4 \cdot \cos \varphi$ ,  $y = 4 \cdot \sin \varphi$ ,  $z = z$ ;  $dA = 4 dz d\varphi$

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} y \\ x \\ xz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} (xy + xy + 0) = \frac{1}{2} xy =$$

$$= 8 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi = 4 \cdot \sin(2\varphi) \quad (\text{mit } 2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi = \sin(2\varphi))$$

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = 16 \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{z=0}^5 \sin(2\varphi) dz d\varphi = 16 \cdot \underbrace{\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin(2\varphi) d\varphi}_{\text{Integral 204 mit } a=2} \cdot \int_{z=0}^5 1 dz =$$

$$= 16 \left[ -\frac{1}{2} \cdot \cos(2\varphi) \right]_0^{\pi/2} \cdot [z]_0^5 = 16 \cdot 1 \cdot 5 = 80$$

- 5) **Vektorfluss durch den Zylindermantel  $M$  (in Zylinderkoordinaten):**

Gleichung des Zylindermantels  $M$ :  $\phi(x; y; z) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ ;  $0 \leq z \leq 5$

$$\text{grad } \phi = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |\text{grad } \phi| = 2 \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \Rightarrow \vec{N} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zylinderkoordinaten:  $\varrho = 2$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq 5$

Transformationsgleichungen:  $x = 2 \cdot \cos \varphi$ ,  $y = 2 \cdot \sin \varphi$ ,  $z = z$ ;  $dA = 2 dz d\varphi$

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x^3 \\ -y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (x^4 - y^2 + 0) = 2(4 \cdot \cos^4 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

$$\begin{aligned}
\iint_{(M)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA &= 4 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^5 (4 \cdot \cos^4 \varphi - \sin^2 \varphi) dz d\varphi = \\
&= 4 \cdot \underbrace{\int_{z=0}^5 1 dz}_{5} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} (4 \cdot \cos^4 \varphi - \sin^2 \varphi) d\varphi = 20 \cdot \int_0^{2\pi} (4 \cdot \cos^4 \varphi - \sin^2 \varphi) d\varphi = \\
&= 80 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi d\varphi}_{I_1} - 20 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi}_{I_2} = 80 I_1 - 20 I_2
\end{aligned}$$

Auswertung der Teilintegrale  $I_1$  und  $I_2$  (mit der Integraltafel):

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi d\varphi = \left[ \frac{\cos^3 \varphi \cdot \sin \varphi}{4} \right]_0^{2\pi} + \frac{3}{4} \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \\
&= \left[ \frac{\cos^3 \varphi \cdot \sin \varphi}{4} + \frac{3}{4} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right) \right]_0^{2\pi} = \frac{3}{4} \pi
\end{aligned}$$

(Integrale: 231 mit  $n = 4$ ,  $a = 1$  und 229 mit  $a = 1$ )

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \left[ \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi \quad (\text{Integral 205 mit } a = 1)$$

$$\text{Somit: } \iint_{(M)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = 80 I_1 - 20 I_2 = 80 \cdot \frac{3}{4} \pi - 20 \pi = 40 \pi$$

**Fluss in  $z$ -Richtung durch den „Boden“  $A_u$**  (Teil der  $x, y$ -Ebene  $z = 0$ ):

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \vec{F} \cdot (-\vec{e}_z) = -(\underbrace{\vec{F} \cdot \vec{e}_z}_{z\text{-Komponente von } \vec{F}}) = -F_z = -z = 0$$

$$\iint_{(A_u)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(A_u)} 0 dA = 0 \quad (\text{kein Beitrag})$$

**Fluss in  $z$ -Richtung durch den „Deckel“  $A_0$**  (Teil der Ebene  $z = 5$ ):

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{e}_z}_{z\text{-Komponente von } \vec{F}} = F_z = z = 5$$

$$\iint_{(A_0)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(A_0)} 5 dA = 5 \cdot \iint_{(A_0)} 1 dA = 5 A_0 = 5(\pi \cdot 2^2) = 20\pi$$

**Gesamtfluss durch die geschlossene Zylinderoberfläche  $A = M + A_u + A_0$ :**

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(M+A_u+A_0)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = 40\pi + 0 + 20\pi = 60\pi$$

- 6)  $A_1$ : Mantelfläche der Halbkugel (Oberfläche *ohne* Boden);  $A_2$ : Bodenfläche;  
 Oberfläche der Halbkugel:  $A = A_1 + A_2$

**Fluss durch  $A_1$  (in Kugelkoordinaten):**

Gleichung der Halbkugel:  $\phi(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$  (mit  $z \geq 0$ )

$$\text{grad } \phi = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad |\text{grad } \phi| = 2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2 \Rightarrow \vec{N} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Kugelkoordinaten:  $r = 1, 0 \leq \vartheta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Transformationsgleichungen:  $x = \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, y = \sin \vartheta \cdot \sin \varphi, z = \cos \vartheta;$   
 $dA = \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{N} &= \begin{pmatrix} xy \\ z \\ -y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 y + yz - yz = x^2 y = \sin^3 \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi \\ \int \int_{(A_1)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) \, dA &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \sin^4 \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi \, d\vartheta \, d\varphi = \\ &= \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi \, d\varphi}_{I_1} \cdot \underbrace{\int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \sin^4 \vartheta \, d\vartheta}_{I_2} = I_1 \cdot I_2 \end{aligned}$$

Auswertung der Teilintegrale  $I_1$  und  $I_2$  (mit der Integraltafel):

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi \, d\varphi = \left[ -\frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_0^{2\pi} = 0 \quad (\text{Integral 256 mit } n = 2, a = 1)$$

Die Berechnung des Teilintegrals  $I_2$  erübrigts sich, da mit  $I_1 = 0$  auch das Produkt  $I_1 \cdot I_2$  verschwindet (unabhängig vom Wert des Integrals  $I_2$ , der im Übrigen  $3\pi/16$  beträgt).

$$\text{Somit gilt: } \int \int_{(A_1)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) \, dA = I_1 \cdot I_2 = 0 \cdot I_2 = 0 \quad (\text{kein Beitrag})$$

**Fluss durch  $A_2$  (in Polarkoordinaten):**

Polarkoordinaten:  $x = r \cdot \cos \varphi, y = r \cdot \sin \varphi, dA = r \, dr \, d\varphi, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \vec{F} \cdot (-\vec{e}_z) = -(\underbrace{\vec{F} \cdot \vec{e}_z}_{z\text{-Koordinate von } \vec{F}}) = -F_z = y = r \cdot \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} \int \int_{(A_2)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) \, dA &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 r^2 \cdot \sin \varphi \, dr \, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi \cdot \int_{r=0}^1 r^2 \, dr = \\ &= \left[ -\cos \varphi \right]_0^{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{3} r^3 \right]_0^1 = 0 \cdot \frac{1}{3} = 0 \quad (\text{kein Beitrag}) \end{aligned}$$

**Gesamtfluss durch die geschlossene Oberfläche  $A = A_1 + A_2$  der Halbkugel:**

$$\oint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = \iint_{(A_1)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA + \iint_{(A_2)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = 0 + 0 = 0$$

7) Ortsvektor der Rotationsfläche:  $\vec{r}(x; y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$

$$\vec{t}_x \times \vec{t}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |\vec{t}_x \times \vec{t}_y| = \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}$$

Mantelfläche:  $M = \iint_{(A)} |\vec{t}_x \times \vec{t}_y| dy dx = \iint_{(A)} \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1} dy dx$

Integrationsbereich  $A$  ist die Kreisfläche  $x^2 + y^2 \leq 2$ . Übergang zu Polarkoordinaten:

$$0 \leq r \leq \sqrt{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad dy dx = r dr d\varphi$$

$$M = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{2}} \sqrt{4r^2 + 1} \cdot r dr d\varphi = \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 d\varphi}_{2\pi} \cdot \underbrace{\int_{r=0}^{\sqrt{2}} r \sqrt{4r^2 + 1} dr}_{I} = 2\pi \cdot I$$

Auswertung des Integrals  $I$  (Integral 117 mit  $a^2 = 1/4$ ):

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} r \sqrt{4r^2 + 1} dr = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{2}} r \sqrt{\frac{1}{4} + r^2} dr = \frac{2}{3} \left[ \sqrt{\left(\frac{1}{4} + r^2\right)^3} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{6}$$

Somit gilt:  $M = 2\pi \cdot I = 2\pi \cdot \frac{13}{6} = \frac{13}{3}\pi$

8) Gleichung der Kugeloberfläche:  $\phi(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$

$$\text{grad } \phi = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad |\text{grad } \phi| = 2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 10 \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Kugelkoordinaten:  $r = 5, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Transformationsgleichungen  $x = 5 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \quad y = 5 \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi, \quad z = 5 \cdot \cos \vartheta; \quad dA = 25 \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2x \\ -x \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5} (2x^2 - xy + z^2) =$$

$$= 5 [2 \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \varphi - \sin^2 \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \cos^2 \vartheta] =$$

$$\begin{aligned}
&= 5 \left[ \underbrace{(2 \cdot \cos^2 \varphi)}_{1 + \cos(2\varphi)} - \underbrace{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}_{\frac{1}{2} \cdot \sin(2\varphi)} \right] \cdot \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = \\
&= 5 \left[ \left[ 1 + \cos(2\varphi) - \frac{1}{2} \cdot \sin(2\varphi) \right] \cdot \sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta \right] = \\
&= 5 \left[ \underbrace{(\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta)}_1 + \left( \cos(2\varphi) - \frac{1}{2} \cdot \sin(2\varphi) \right) \cdot \sin^2 \vartheta \right] = \\
&= 5 \left[ 1 + \left( \cos(2\varphi) - \frac{1}{2} \cdot \sin(2\varphi) \right) \cdot \sin^2 \vartheta \right] \\
\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA &= 125 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \left[ \sin \vartheta + \left( \cos(2\varphi) - \frac{1}{2} \cdot \sin(2\varphi) \right) \cdot \sin^3 \vartheta \right] d\vartheta d\varphi = \\
&= 125 \left\{ \underbrace{\int_0^{2\pi} 1 d\varphi}_{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta + \underbrace{\int_0^{2\pi} \left( \cos(2\varphi) - \frac{1}{2} \cdot \sin(2\varphi) \right) d\varphi}_{I_1} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta}_{I_2} \right\} = \\
&= 125 \left\{ 2\pi \cdot \left[ -\cos \vartheta \right]_0^\pi + I_1 \cdot I_2 \right\} = 125 (2\pi \cdot 2 + I_1 \cdot I_2)
\end{aligned}$$

Auswertung der Integrale  $I_1$  und  $I_2$  mit der Integraltafel:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \left( \cos(2\varphi) - \frac{1}{2} \cdot \sin(2\varphi) \right) d\varphi = \left[ \frac{1}{2} \cdot \sin(2\varphi) + \frac{1}{4} \cdot \cos(2\varphi) \right]_0^{2\pi} = 0$$

(Integrale: 228 und 204, jeweils mit  $a = 2$ )

Die Berechnung von  $I_2$  erübrigts sich, da mit  $I_1 = 0$  auch das Produkt  $I_1 \cdot I_2$  verschwindet (unabhängig vom Wert des Integrals  $I_2$ , der im Übrigen  $4/3$  beträgt).

$$\text{Somit: } \iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = 125 \left( 2\pi \cdot 2 + 0 \cdot \frac{4}{3} \right) = 125 (4\pi + 0) = 500\pi$$

- 9) Das Vektorfeld besitzt *Zylindersymmetrie*. Daher folgt nach Formel (I-439) mit  $f(\varrho) = \frac{a}{\varrho}$ :

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = f(R) \cdot 2\pi RH = \frac{a}{R} \cdot 2\pi RH = 2\pi aH$$

- 10) Wegen der *Kugelsymmetrie* des Vektorfeldes können wir Formel (I-445) verwenden. Mit  $f(r) = r^n$  folgt dann für den Vektorfluss durch die Kugelschale:

$$\iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = f(R) \cdot 4\pi R^2 = R^n \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^{n+2}$$

## Abschnitt 9

1)  $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = y + 2y + x = x + 3y$

$$\begin{aligned} \iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA &= \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{F} dV = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 (x + 3y) dz dy dx = \\ &= \underbrace{\int_{z=0}^1 1 dz}_{1} \cdot \underbrace{\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 (x + 3y) dy dx}_{I = 2} = 1 \cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

Schrittweise Berechnung des *Doppelintegrals I*:

$$\int_{y=0}^1 (x + 3y) dy = \left[ xy + \frac{3}{2} y^2 \right]_{y=0}^1 = x + \frac{3}{2}$$

$$I = \int_{x=0}^1 \left( x + \frac{3}{2} \right) dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} x \right]_0^1 = 2$$

- 2) Verwendung von *Zylinderkoordinaten*:  $0 \leq \varrho \leq 3$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq 2$

Transformationsgleichungen:  $x = \varrho \cdot \cos \varphi$ ,  $y = \varrho \cdot \sin \varphi$ ,  $z = z$ ;  $dV = \varrho d\varrho dz d\varphi$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-x) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 2x + 0 + 2z = 2(x + z) = 2(\varrho \cdot \cos \varphi + z)$$

$$\begin{aligned} \iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA &= \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{F} dV = 2 \cdot \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^2 \int_{\varrho=0}^3 (\varrho^2 \cdot \cos \varphi + \varrho z) d\varrho dz d\varphi}_{I = 18\pi} = 36\pi \end{aligned}$$

Schrittweise Berechnung des *Dreifachintegrals I*:

$$\int_{\varrho=0}^3 (\varrho^2 \cdot \cos \varphi + \varrho \cdot z) d\varrho = \left[ \frac{1}{3} \varrho^3 \cdot \cos \varphi + \frac{1}{2} \varrho^2 z \right]_{\varrho=0}^3 = 9 \cdot \cos \varphi + \frac{9}{2} z$$

$$\int_{z=0}^2 \left( 9 \cdot \cos \varphi + \frac{9}{2} z \right) dz = \left[ 9 \cdot \cos \varphi \cdot z + \frac{9}{4} z^2 \right]_{z=0}^2 = 18 \cdot \cos \varphi + 9$$

$$I = \int_{\varphi=0}^{2\pi} (18 \cdot \cos \varphi + 9) d\varphi = \left[ 18 \cdot \sin \varphi + 9\varphi \right]_0^{2\pi} = 18\pi$$

- 3) *Berechnung des Volumenintegrals* (in *Kugelkoordinaten*):

Kugelkoordinaten:  $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ;

$$x = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi, \quad z = r \cdot \cos \vartheta; \quad dV = r^2 \cdot \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3 \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{r^2} = 3r^2 \\ \iint_V \operatorname{div} \vec{F} dV &= 3 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R r^4 \cdot \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \\ &= 3 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 d\varphi \cdot \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \cdot \int_{r=0}^R r^4 dr = \\ &= 3 \left[ \varphi \right]_0^{2\pi} \cdot \left[ -\cos \vartheta \right]_0^{\pi} \cdot \left[ \frac{1}{5} r^5 \right]_0^R = 3 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} R^5 = \frac{12}{5} \pi R^5 \end{aligned}$$

Berechnung des Oberflächenintegrals (in Kugelkoordinaten mit  $r = \text{const.} = R$ ):

Gleichung der Kugeloberfläche:  $\phi(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \phi &= 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad |\operatorname{grad} \phi| = 2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2R \Rightarrow \vec{N} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \vec{F} \cdot \vec{N} &= \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{R} (x^4 + y^4 + z^4) = R^3 [\sin^4 \vartheta (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) + \cos^4 \vartheta] \end{aligned}$$

Flächenelement auf der Kugeloberfläche ( $r = R$ ):  $dA = R^2 \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$

$$\iint_A (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA = R^5 \cdot \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} [\sin^5 \vartheta (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) + \sin \vartheta \cdot \cos^4 \vartheta] d\vartheta d\varphi}_{I = 12\pi/5} = \frac{12}{5} \pi R^5$$

Schrittweise Berechnung des Doppelintegrals  $I$ :

$$\begin{aligned} I &= \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) d\varphi}_{I_1 + I_2} \cdot \underbrace{\int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^5 \vartheta d\vartheta}_{I_3} + \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 d\varphi}_{2\pi} \cdot \underbrace{\int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin \vartheta \cos^4 \vartheta d\vartheta}_{I_4} = \\ &= (I_1 + I_2) I_3 + 2\pi \cdot I_4 \end{aligned}$$

Auswertung der Teilintegrale  $I_1$  bis  $I_4$  (mit der Integraltafel):

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi d\varphi = \left[ \frac{\cos^3 \varphi \cdot \sin \varphi}{4} + \frac{3}{4} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right) \right]_0^{2\pi} = \frac{3}{4} \pi$$

(Integrale: 231 mit  $n = 4$ ,  $a = 1$  und 229 mit  $a = 1$ )

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \sin^4 \varphi d\varphi = \left[ -\frac{\sin^3 \varphi \cdot \cos \varphi}{4} + \frac{3}{4} \left( \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right) \right]_0^{2\pi} = \frac{3}{4} \pi$$

(Integrale: 207 mit  $n = 4$ ,  $a = 1$  und 205 mit  $a = 1$ )

$$I_3 = \int_0^\pi \sin^5 \vartheta \, d\vartheta = \left[ -\frac{\sin^4 \vartheta \cdot \cos \vartheta}{5} + \frac{4}{5} \left( -\cos \vartheta + \frac{\cos^3 \vartheta}{3} \right) \right]_0^\pi = \frac{16}{15}$$

(Integrale: 207 mit  $n = 5$ ,  $a = 1$  und 206 mit  $a = 1$ )

$$I_4 = \int_0^\pi \sin \vartheta \cdot \cos^4 \vartheta \, d\vartheta = \left[ -\frac{\cos^5 \vartheta}{5} \right]_0^\pi = \frac{2}{5} \quad (\text{Integral 256 mit } n = 4, a = 1)$$

$$\text{Somit: } I = (I_1 + I_2) I_3 + 2\pi \cdot I_4 = \left( \frac{3}{4} \pi + \frac{3}{4} \pi \right) \cdot \frac{16}{15} + 2\pi \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{5} \pi$$

$$\text{Somit gilt: } \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iint_A (\vec{F} \cdot \vec{N}) \, dA = \frac{12}{5} \pi R^5$$

- 4) Der *Gaußsche Integralsatz* liefert für  $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{E}$  unter Berücksichtigung von  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{E}) = 0$  (siehe Gleichung I-191):

$$\iint_A (\vec{F} \cdot \vec{N}) \, dA = \iint_A [(\operatorname{rot} \vec{E}) \cdot \vec{N}] \, dA = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iiint_V \underbrace{\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{E})}_{0} \, dV = 0$$

- 5) Berechnung des Flächenintegrals (in Polarkoordinaten):  $0 \leq r \leq 2$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Transformationsgleichungen:  $x = r \cdot \cos \varphi$ ,  $y = r \cdot \sin \varphi$ ;  $dA = r \, dr \, d\varphi$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2) + \frac{\partial}{\partial y} (xy) = 2x + x = 3x = 3r \cdot \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} \iint_A \operatorname{div} \vec{F} \, dA &= 3 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^2 r^2 \cdot \cos \varphi \, dr \, d\varphi = 3 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi \cdot \int_{r=0}^2 r^2 \, dr = \\ &= 3 \left[ \sin \varphi \right]_0^{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{3} r^3 \right]_0^2 = 3 \cdot 0 \cdot \frac{8}{3} = 0 \end{aligned}$$

Berechnung des Kurvenintegrals (in Polarkoordinaten mit  $r = 2$ ,  $x = 2 \cdot \cos \varphi$ ,  $y = 2 \cdot \sin \varphi$ ):

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2; \quad \vec{N} = \vec{e}_r = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} x \underbrace{(x^2 + y^2)}_4 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos \varphi \cdot 4 = 4 \cdot \cos \varphi$$

Linienelement (auf dem Kreisbogen):  $ds = 2 \, d\varphi$

$$\oint_C (\vec{F} \cdot \vec{N}) \, ds = 8 \cdot \int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi = 8 \left[ \sin \varphi \right]_0^{2\pi} = 8 \cdot 0 = 0$$

$$\text{Somit gilt: } \iint_A \operatorname{div} \vec{F} \, dA = \oint_C (\vec{F} \cdot \vec{N}) \, ds = 0$$

6) **1. Lösungsweg** (direkte Berechnung über ein *Oberflächenintegral* in *Kugelkoordinaten*):

Gleichung der Mantelfläche  $A$ :  $\phi(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$  (mit  $z \geq 0$ )

$$\text{grad } \phi = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad |\text{grad } \phi| = 2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 4 \Rightarrow \vec{N} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} (\text{rot } \vec{F})_x &= \frac{\partial}{\partial y} (y^2 z) - \frac{\partial}{\partial z} (y z^2) = 2yz - 2yz = 0 \\ (\text{rot } \vec{F})_y &= \frac{\partial}{\partial z} (-y^3) - \frac{\partial}{\partial x} (y^2 z) = 0 - 0 = 0 \\ (\text{rot } \vec{F})_z &= \frac{\partial}{\partial x} (yz^2) - \frac{\partial}{\partial y} (-y^3) = 0 + 3y^2 = 3y^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3y^2 \end{pmatrix}$$

Kugelkoordinaten:  $r = 2$ ,  $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Transformationsgleichungen:  $x = 2 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi$ ,  $y = 2 \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi$ ,  $z = 2 \cdot \cos \vartheta$

Flächenelement:  $dA = 4 \cdot \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{N} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{3}{2} y^2 z = 12 \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \sin^2 \varphi \\ \int_{(A)} [(\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{N}] \, dA &= 48 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \sin^3 \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \sin^2 \varphi \, d\vartheta \, d\varphi = \\ &= 48 \cdot \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi}_{\text{Integral 205}} \cdot \underbrace{\int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \sin^3 \vartheta \cdot \cos \vartheta \, d\vartheta}_{\text{Integral 255}} = 48 \left[ \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right]_0^{2\pi} \cdot \left[ \frac{\sin^4 \vartheta}{4} \right]_0^{\pi/2} = \\ &= 48 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} = 12\pi \end{aligned}$$

## 2. Lösungsweg (Berechnung über ein Linienintegral, Integralsatz von Stokes):

$$\int_{(A)} [(\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{N}] \, dA = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C (-y^3 \, dx + yz^2 \, dy + y^2 z \, dz)$$

*Randkurve C* (Kreis um den Nullpunkt der  $x, y$ -Ebene mit dem Radius  $r = 2$ ):

$x = 2 \cdot \cos t$ ,  $y = 2 \cdot \sin t$ ,  $z = 0$ ;  $dx = -2 \cdot \sin t \, dt$ ,  $dy = 2 \cdot \cos t \, dt$ ,  $dz = 0$

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \oint_C (-y^3 \, dx + \underbrace{yz^2 \, dy}_0 + \underbrace{y^2 z \, dz}_0) = \oint_C (-y^3) \, dx = 16 \cdot \int_0^{2\pi} \sin^4 t \, dt = \\ &= 16 \left[ -\frac{\sin^3 t \cdot \cos t}{4} + \frac{3}{4} \left( \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \right) \right]_0^{2\pi} = 16 \cdot \frac{3}{4} \pi = 12\pi \end{aligned}$$

(Integrale: 207 mit  $n = 4$ ,  $a = 1$  und 205 mit  $a = 1$ )

$$7) \quad \left. \begin{aligned} (\operatorname{rot} \vec{F})_x &= \frac{\partial}{\partial y} (y) - \frac{\partial}{\partial z} (xz) = 1 - x \\ (\operatorname{rot} \vec{F})_y &= \frac{\partial}{\partial z} (x) - \frac{\partial}{\partial x} (y) = 0 - 0 = 0 \\ (\operatorname{rot} \vec{F})_z &= \frac{\partial}{\partial x} (xz) - \frac{\partial}{\partial y} (x) = z - 0 = z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} 1 - x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

Gleichung der Fläche  $A$ :  $\phi(x; y; z) = x + y + z - 2 = 0$  oder  $z = 2 - x - y$

$$\operatorname{grad} \phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad |\operatorname{grad} \phi| = \sqrt{3} \Rightarrow \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 - x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 - x + z) = \frac{1}{\sqrt{3}} (-2x - y + 3)$$

$\uparrow z = 2 - x - y$

$$\underbrace{(\vec{N} \cdot \vec{e}_z) dA}_{\substack{\text{z-Komponente} \\ \text{von } \vec{N}}} = N_z dA = \frac{1}{\sqrt{3}} dA = dy dx \Rightarrow dA = \sqrt{3} dy dx$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{(A)} [(\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{N}] dA = \underbrace{\int_{x=0}^2 \int_{y=0}^{-x+2} (-2x - y + 3) dy dx}_{I=2} = 2$$

Schrittweise Berechnung des *Doppelintegrals I*:

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{-x+2} (-2x - y + 3) dy &= \left[ -2xy - \frac{1}{2} y^2 + 3y \right]_{y=0}^{-x+2} = \\ &= -2x(-x+2) - \frac{1}{2}(-x+2)^2 + 3(-x+2) = \frac{3}{2}x^2 - 5x + 4 \end{aligned}$$

$$I = \int_{x=0}^2 \left( \frac{3}{2}x^2 - 5x + 4 \right) dx = \left[ \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x \right]_0^2 = 2$$

- 8) a) Das Vektorfeld besitzt *keine* Radialkomponente. Daher ist der Vektorfluss durch die Kugeloberfläche gleich *null*.

- b) Zum gleichen Ergebnis führt der Integralsatz von *Gauß* (in Kugelkoordinaten):

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad dV = r^2 \cdot \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

Vektorkomponenten:  $F_r = 0, \quad F_\vartheta = r^2 \cdot \cos \varphi, \quad F_\varphi = 0$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot r^2 \cdot \cos \varphi) = \frac{r \cdot \cos \varphi \cdot \cos \vartheta}{\sin \vartheta}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA &= \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{F} dV = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{r=0}^R r^3 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \\
 &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \cdot \int_{\vartheta=0}^{\pi} \cos \vartheta d\vartheta \cdot \int_{r=0}^R r^3 dr = [\sin \varphi]_0^{2\pi} \cdot [\sin \vartheta]_0^\pi \cdot \left[ \frac{1}{4} r^4 \right]_0^R = \\
 &= 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{4} R^4 = 0
 \end{aligned}$$

$$9) \quad \text{a)} \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ 2x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(z) - \frac{\partial}{\partial z}(2x) \\ \frac{\partial}{\partial z}(-y) - \frac{\partial}{\partial x}(z) \\ \frac{\partial}{\partial x}(2x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Gleichung der Halbkugel:  $\phi(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$  (mit  $z \geq 0$ )

$$\operatorname{grad} \phi = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad |\operatorname{grad} \phi| = 2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 6 \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Kugelkoordinaten:  $r = 3$  (auf der Halbkugeloberfläche),  $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ ,

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Transformationsgleichungen:  $x = 3 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi$ ,  $y = 3 \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi$ ,

$z = 3 \cdot \cos \vartheta$ ; Flächenelement:  $dA = 9 \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{N} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z = 3 \cdot \cos \vartheta$$

$$\begin{aligned}
 \iint_{(A)} [(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{N}] dA &= 27 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \\
 &= 27 \cdot \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 d\varphi}_{2\pi} \cdot \underbrace{\int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta d\vartheta}_{\text{Integral 254 mit } a=1} = 54\pi \left[ \frac{1}{2} \cdot \sin^2 \vartheta \right]_0^{\pi/2} = 54\pi \cdot \frac{1}{2} = 27\pi
 \end{aligned}$$

b) Randkurve  $C$  (Kreis um den Nullpunkt der  $x, y$ -Ebene mit dem Radius  $r = 3$ ):

$$x = 3 \cdot \cos t, \quad y = 3 \cdot \sin t, \quad z = 0; \quad dx = -3 \cdot \sin t dt, \quad dy = 3 \cdot \cos t dt, \quad dz = 0$$

Aus dem *Stokesschen Integralsatz* folgt dann:

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot d\vec{r} &= \begin{pmatrix} -y \\ 2x \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = -y \, dx + 2x \, dy + \underbrace{z \, dz}_0 = 9 \cdot \sin^2 t \, dt + 18 \cdot \cos^2 t \, dt = \\ &= 9 \left( \underbrace{\sin^2 t}_{1 - \cos^2 t} + 2 \cdot \cos^2 t \right) \, dt = 9(1 + \cos^2 t) \, dt \\ \iint_{(A)} [(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{N}] \, dA &= \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 9 \cdot \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 t) \, dt = \\ &= 9 \left[ t + \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{2\pi} = 9 \cdot 3\pi = 27\pi \quad (\text{Integral 229 mit } a = 1)\end{aligned}$$

## II Wahrscheinlichkeitsrechnung

### Abschnitt 1

- 1) a)  $P(5) = 5! = 120$
- b) Eine Person nimmt einen beliebigen, dann aber festen Platz ein. Für die übrigen vier Personen gibt es dann  $P(4) = 4! = 24$  verschiedene Anordnungsmöglichkeiten. Somit sind 24 verschiedene Plazierungen möglich.
- 2)  $C(6; 3) = \binom{6}{3} = 20$
- 3) a)  $C(5; 2) = \binom{5}{2} = 10$       b)  $C_w(5; 2) = \binom{6}{2} = 15$
- 4)  $C_w(6; 2) = \binom{7}{2} = 21$
- 5) Aus den restlichen 7 Aufgaben (Aufgabe 4 bis 10) müssen 4 richtig gelöst werden (die Reihenfolge, in der die Aufgaben gelöst werden, spielt dabei *keine* Rolle → *Kombinationen* 4. Ordnung *ohne* Wiederholung). Es gibt  $C(7; 4) = \binom{7}{4} = 35$  verschiedene Möglichkeiten.
- 6) a) Mögliche Stichprobenanzahl:  $C(20; 4) = \binom{20}{4} = 4845$
- b) Die Stichprobe enthält 1 fehlerhaftes und 3 einwandfreie Geräte. Daher gibt es  $C(3; 1) \cdot C(17; 3) = 3 \cdot 680 = 2040$  verschiedene Stichproben mit genau *einem* fehlerhaften Gerät.  
Anteil an Stichproben mit *einem* fehlerhaften Gerät:  $\frac{2040}{4845} \approx 0,421 = 42,1\%$
- 7) Für Position  $a$  gibt es 5 Möglichkeiten, denn *jede* der 5 Federn  $F_1, F_2, \dots, F_5$  kann diesen Platz einnehmen. Ist Position  $a$  belegt, so stehen für die Positionen  $b$  und  $c$  noch 4 verschiedene Federn zur Verfügung. Somit gibt es  $C(4; 2) = \binom{4}{2} = 6$  verschiedene Bele-

gungsmöglichkeiten für die Plätze  $b$  und  $c$  (die Reihenfolge der Belegung spielt *keine* Rolle → *Kombinationen* 2. Ordnung *ohne* Wiederholung). Insgesamt gibt es also  $5 \cdot 6 = 30$  verschiedene Federsysteme.

- 8) Die Reihenfolge der Buchstaben ist von Bedeutung → *Variationen* 3. Ordnung (ohne bzw. mit Wiederholung).

$$\text{a)} \quad V(6; 3) = \frac{6!}{(6-3)!} = 120 \quad \text{b)} \quad V_w(6; 3) = 6^3 = 216$$

- 9) 4 Plätze können jeweils mit „Zahl“ oder „Wappen“ belegt werden → *Variationen* 4. Ordnung mit Wiederholung:  $V_w(2; 4) = 2^4 = 16$

- 10) Es handelt sich um *Variationen* 3. Ordnung ohne bzw. mit Wiederholung ( $n = 10$  verschiedenen Kugeln).

$$\text{a)} \quad V(10; 3) = \frac{10!}{(10-3)!} = 720 \quad \text{b)} \quad V_w(10; 3) = 10^3 = 1000$$

- 11) 2 Buchstaben aus 26 (Reihenfolge ist von Bedeutung → *Variationen* 2. Ordnung mit Wiederholung) ⇒  $V_w(26; 2) = 26^2 = 676$  Möglichkeiten

1. Ziffer: 9 Möglichkeiten (Ziffern 1 bis 9; Ziffer 0 ist nicht erlaubt)

2. bis 4. Ziffer: 3 Ziffern aus 10 ⇒  $V_w(10; 3) = 10^3 = 1000$  Möglichkeiten

Somit gibt es  $676 \cdot 9 \cdot 1000 = 6084\,000$  verschiedene Kennzeichen.

## Abschnitt 2

- 1) a)  $\Omega = \{\text{ZZZ}, \text{ZZW}, \text{ZWZ}, \text{WZZ}, \text{WWZ}, \text{WZW}, \text{ZWW}, \text{WWW}\}$  (8 Elementarereignisse)
- b)  $A = \{\text{ZZW}, \text{ZWZ}, \text{WZZ}\}; \quad B = \{\text{WWZ}, \text{WZW}, \text{ZWW}\}; \quad C = \{\text{ZWW}, \text{WZW}, \text{WWZ}\};$   
 $D = \{\text{ZZZ}\}; \quad E = \{\text{WWW}\}$

$B = C$ : Die Teilmengen  $B$  und  $C$  unterscheiden sich nur in der Anordnung ihrer Elemente, sind daher *gleich* (je 2-mal „Wappen“, 1-mal „Zahl“).

- c)  $A \cup B = \{\text{ZZW}, \text{ZWZ}, \text{WZZ}, \text{WWZ}, \text{WZW}, \text{ZWW}\}$

→ mindestens einmal „Zahl“ und „Wappen“

$A \cap D = \{\}$  → unmögliches Ereignis

$B \cup E = \{\text{WWZ}, \text{WZW}, \text{ZWW}, \text{WWW}\}$  → mindestens zweimal „Wappen“

$D \cup E = \{\text{ZZZ}, \text{WWW}\}$  → dreimal „Zahl“ oder dreimal „Wappen“

$A \cap B = \{\}$  → *unmögliches* Ereignis

$$(C \cup D) \cap B = \{\text{ZWW}, \text{WZW}, \text{WWZ}, \text{ZZZ}\} \cap \{\text{WWZ}, \text{WZW}, \text{ZWW}\} =$$

$$= \underbrace{\{\text{ZWW}, \text{WZW}, \text{WWZ}\}}_{B = C} = B = C \rightarrow \text{zweimal „Wappen“ bzw. einmal „Zahl“}$$

- d)  $\bar{A} = \{\text{ZZZ}, \text{WWZ}, \text{WZW}, \text{ZWW}, \text{WWW}\}$

→ alle Elementarereignisse mit Ausnahme derjenigen, bei denen einmal „Wappen“ eintritt

$$\bar{D} = \{\text{ZZW}, \text{ZWZ}, \text{WZZ}, \text{WWZ}, \text{WZW}, \text{ZWW}, \text{WWW}\}$$

→ mindestens einmal „Wappen“

- 2) a)  $\Omega = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6), (3; 3), (3; 4), (3; 5), (3; 6), (4; 4), (4; 5), (4; 6), (5; 5), (5; 6), (6; 6)\}$
- b)  $A = \{(1; 3), (2; 2)\}$   
 $B = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 2), (2; 3)\}$   
 $C = \{(1; 1), (1; 3), (1; 5), (3; 3), (3; 5), (5; 5)\}$   
 $D = \{(1; 2), (1; 4), (1; 6), (2; 3), (2; 5), (3; 4), (3; 6), (4; 5), (5; 6)\}$   
 $E = \{(1; 2), (1; 4), (1; 6), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6), (3; 4), (3; 6), (4; 4), (4; 5), (4; 6), (5; 6), (6; 6)\}$
- 3) a) *Reihenschaltung:*  $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$  (mindestens eine Glühlampe brennt durch)  
*Parallelschaltung:*  $B = A_1 \cap A_2 \cap A_3$  (alle drei Glühlampen brennen gleichzeitig durch)
- b)  $A_1 \cup A_2$ :  $a_1$  oder  $a_2$  oder beide brennen durch → Unterbrechung bei Reihenschaltung  
 $A_2 \cap A_3$ :  $a_2$  und  $a_3$  brennen gleichzeitig durch → Unterbrechung bei Reihenschaltung  
Bei Parallelschaltung wird der Stromkreis in beiden Fällen nicht unterbrochen.

### Abschnitt 3

- 1) a) 16 rote Karten  $\Rightarrow P = 16/32 = 1/2$       b) 4 Asse  $\Rightarrow P = 4/32 = 1/8$
- c) Je 4 Damen und Könige  $\Rightarrow P = 8/32 = 1/4$
- d) 2 schwarze Buben  $\Rightarrow P = 2/32 = 1/16$
- 2) Ziehungen → *Kombinationen* 3. Ordnung ohne Wiederholung. Es gibt  $C(20; 3) = \binom{20}{3} = 1140$  Möglichkeiten, aus 20 Glühbirnen 3 auszuwählen.
- a) Es gibt  $C(16; 3) = \binom{16}{3} = 560$  Möglichkeiten, aus 16 einwandfreien Glühbirnen 3 auszuwählen.  
Somit:  $P_0 = \frac{560}{1140} = 0,4912$  (Stichprobenanteil ohne defekte Glühbirne)
- b)  $P_1 = 1 - P_0 = 1 - 0,4912 = 0,5088$  (mindestens 1 defekte Glühbirne)
- 3) Es gibt 36 verschiedene gleichwahrscheinliche Augenpaare  $(i; j)$  mit  $i, j = 1, 2, 3, \dots, 6$ .
- $A = \{(1; 3), (2; 2), (3; 1)\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
- $B = \{(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5), (6; 6)\} \Rightarrow P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
- $C = \{(3; 3), (3; 6), (6; 3), (6; 6)\} \Rightarrow P(C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

- 4) a)  $p(\text{gerade}) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{1}{8} + p_4 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow p_4 = \frac{1}{8}$   
 $p(\text{ungerade}) = p_1 + p_3 + p_5 = p_1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow p_1 = \frac{1}{4}$
- b)  $P(A) = p_1 + p_6 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}; P(B) = p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
- 5) a)  $p(g) + p(u) = 4p(u) + p(u) = 5p(u) = 1 \Rightarrow p(u) = 1/5; p(g) = 4/5$   
 $p(2) = p(4) = p(6) = 4/15; p(1) = p(3) = p(5) = 1/15$
- b)  $P(A) = 6/15 = 2/5; P(B) = 5/15 = 1/3; P(C) = 12/15 = 4/5;$   
 $P(D) = 3/15 = 1/5; P(E) = P(\{1, 2, 4, 6\}) = 13/15; P(F) = P(\{6\}) = 4/15$
- 6)  $P(A) = 5P(C); P(B) = 3P(C); P(A) + P(B) + P(C) = 1$   
a)  $5P(C) + 3P(C) + P(C) = 9P(C) = 1 \Rightarrow P(C) = 1/9;$   
 $P(A) = 5/9; P(B) = 3/9$   
b)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9}$
- 7) Von 8 möglichen gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen sind 4 „günstig“, nämlich ( $Z = \text{Zahl}; W = \text{Wappen}\right)$
- $$\text{WWZ, WZW, ZWW, WWW} \Rightarrow P = 4/8 = 1/2$$
- 8) Ereignis  $A_i$ : Das bei der  $i$ -ten Ziehung erhaltene Bauelement ist *einwandfrei* ( $i = 1, 2, 3$ )  
1. Ziehung (20 Elemente, davon 18 einwandfreie):  $P(A_1) = 18/20$   
2. Ziehung (19 Elemente, davon 17 einwandfreie):  $P(A_2 | A_1) = 17/19$   
3. Ziehung (18 Elemente, davon 16 einwandfreie):  $P(A_3 | A_1 \cap A_2) = 16/18$   
Der Multiplikationssatz (II-59) liefert:  

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{18}{20} \cdot \frac{17}{19} \cdot \frac{16}{18} = \frac{68}{95} \approx 0,72$$
- 9) A: Die bei der 1. Ziehung erhaltene Kugel ist weiß  $\Rightarrow P(A) = 8/10$   
B: Die bei der 2. Ziehung erhaltene Kugel ist schwarz  $\Rightarrow P(B | A) = 2/9$   
Multiplikationssatz:  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{8}{45} \approx 0,1778$
- 10) Es gibt 6 gleichwahrscheinliche Elementarereignisse mit einer „2“ beim ersten Wurf, darunter 3 „günstige“ (Augensumme  $< 6$ ), nämlich:  
 $(2; 1), (2; 2), (2; 3) \Rightarrow P = 3/6 = 1/2$
- 11)  $A \cap B$ : A und B treffen gleichzeitig  $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$   
 $A \cup B$ : Schütze A oder Schütze B trifft oder beide Schützen treffen  
Additionssatz (II-55):  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$
- 12)  $\bar{B} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$ : Keines der drei Glühlämpchen brennt durch (komplementäres Ereignis).  
 $P(\bar{B}) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = (1-p)(1-p)(1-p) = (1-p)^3 = (1-0,2)^3 = 0,8^3$   
(mit  $p = p_1 = p_2 = p_3 = 0,2$ )

Der Stromkreis wird *unterbrochen*, wenn auch nur *eines* der drei Glühlämpchen durchbrennt:

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0,8^3 = 0,488$$

- 13) T: Treffer;  $\bar{T}$ : Fehlschuss (kein Treffer);  $p(T) = p = 0,6$ ;  $p(\bar{T}) = 0,4$
- Ereignis A: genau *zwei* Treffer bei 3 Schüssen  $\Rightarrow A = \{T\bar{T}\bar{T}, \bar{T}T\bar{T}, \bar{T}\bar{T}T\} \Rightarrow P(A) = 3 \cdot (0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4) = 0,432$
  - Ereignis B: *kein* Treffer bei 3 Schüssen  $\Rightarrow B = \{\bar{T}\bar{T}\bar{T}\} \Rightarrow P(B) = 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,064$   
Ereignis  $\bar{B}$ : *mindestens ein* Treffer  $\Rightarrow P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,064 = 0,936$

- 14) Aus dem *unvollständigen* Ereignisbaum in Bild A-21 folgt:

$$\text{a)} \quad P(ab) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{25} = 0,08$$

$$\text{b)} \quad P(cc) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 0,16$$

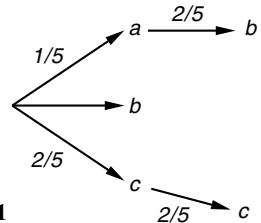


Bild A-21

- 15) Die Urne enthält *stets* 10 Kugeln, nach der 1. Ziehung somit *entweder* 3 weiße und 7 schwarze Kugeln (wenn zunächst eine *weiße* Kugel gezogen wurde) *oder* je 5 weiße und schwarze Kugeln (wenn zunächst eine *schwarze* Kugel gezogen wurde).

Aus dem Ereignisbaum in Bild A-22 folgt:

$$\text{a)} \quad P(W) = P(WW) + P(SW) = \\ = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{42}{100} = 0,42$$

$$\text{b)} \quad P(WW \cup SS) = P(WW) + P(SS) = \\ = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{42}{100} = 0,42$$

$$\text{c)} \quad P(WW) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100} \\ P = \frac{P(WW)}{P(WW \cup SS)} = \frac{12/100}{42/100} = \frac{2}{7}$$

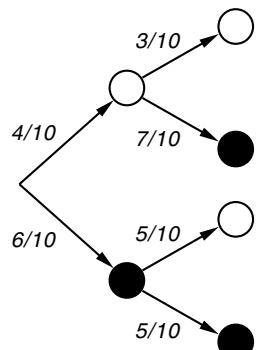


Bild A-22

- 16) Der Karton enthält nach der 1. Ziehung 4 Glühbirnen, nach der 2. Ziehung nur noch 3 Glühbirnen. Aus dem Ereignisbaum in Bild A-23 folgt dann (*d*: defekt;  $\bar{d}$ : einwandfrei):

$$\begin{aligned} P &= P(d\bar{d}d) + P(\bar{d}dd) = \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

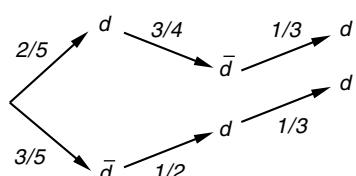


Bild A-23

- 17) Anteile der 3 Maschinen  $A$ ,  $B$  und  $C$  an der Gesamtproduktion (250 Kondensatoren):

$$A: 80 \text{ von } 250 \Rightarrow P(A) = 80/250 = 0,32$$

$$B: 50 \text{ von } 250 \Rightarrow P(B) = 50/250 = 0,2$$

$$C: 120 \text{ von } 250 \Rightarrow P(C) = 120/250 = 0,48$$

Wahrscheinlichkeiten für die Produktion eines *defekten* Kondensators ( $d$ ) auf den Maschinen:

$$P_A(d) = 2/80 = 0,025; \quad P_B(d) = 1/50 = 0,02; \quad P_C(d) = 3/120 = 0,025$$

Aus dem *unvollständigen* Ereignisbaum in Bild A-24 folgt:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad P &= 0,32 \cdot 0,025 + 0,2 \cdot 0,02 + 0,48 \cdot 0,025 = \\ &= 0,024 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad P = \frac{0,48 \cdot 0,025}{0,024} = 0,5$$

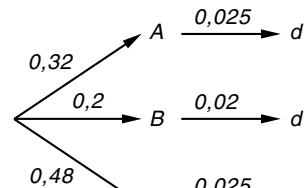


Bild A-24

## Abschnitt 4

- 1) a) Stabdiagramm und Verteilungskurve: Bild A-25

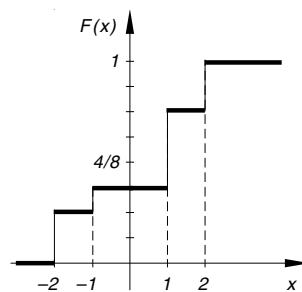
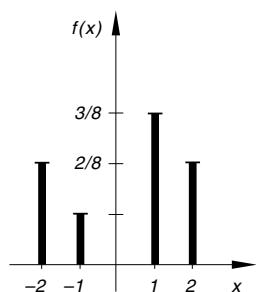


Bild A-25

- b) Stabdiagramm und Verteilungskurve: Bild A-26

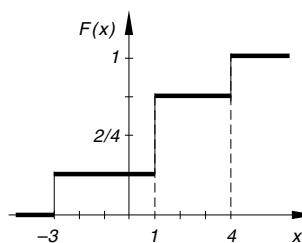
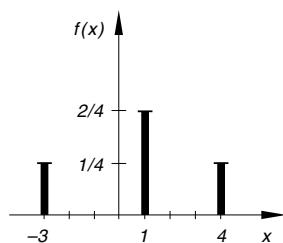


Bild A-26

- c) Stabdiagramm und Verteilungskurve: Bild A-27

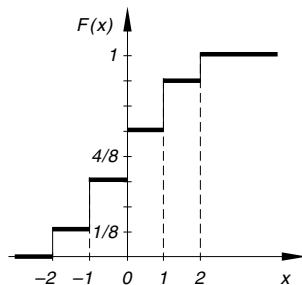
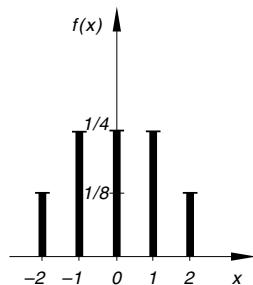


Bild A-27

2) a)  $\sum f(x_i) = 0,95 + p(4) = 1 \Rightarrow p(4) = 0,05$

b) Stabdiagramm und Verteilungskurve: Bild A-28

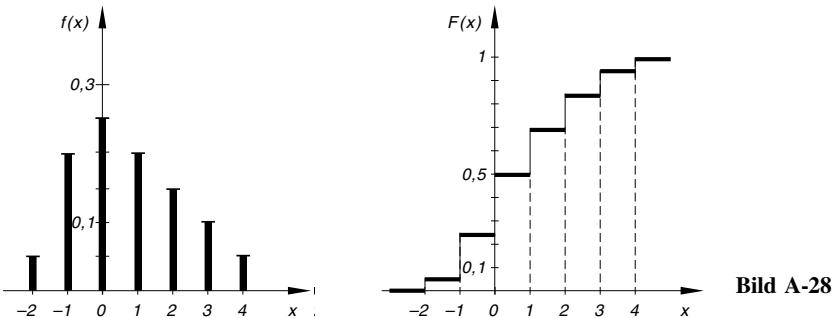


Bild A-28

- 3) Es gibt 8 gleichwahrscheinliche Elementarereignisse (Laplace-Experiment mit  $p = 1/8$ ; Z: Zahl; W: Wappen): ZZZ, WZZ, ZWZ, ZZW, WWZ, WZW, ZWW, WWW

$x_i$	0	1	2	3
$f(x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

a) Stabdiagramm und Verteilungsfunktion: Bild A-29

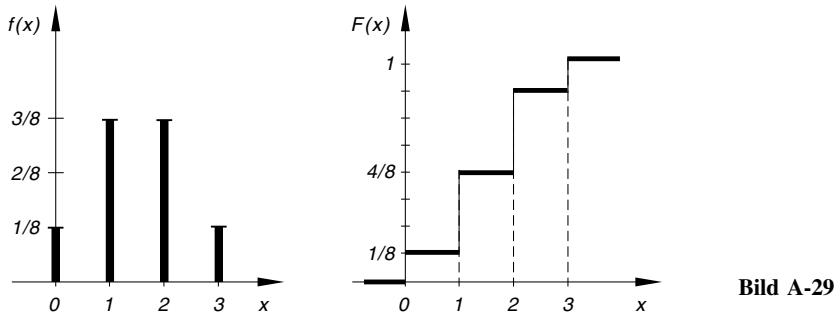


Bild A-29

b)  $P(1 \leq X \leq 2) = f(1) + f(2) = 3/8 + 3/8 = 3/4$

- 4) a) Anzahl der möglichen Stichproben (Kombinationen 3. Ordnung ohne Wiederholung):

$$C(10; 3) = \binom{10}{3} = 120$$

$X = 0$  Nur einwandfreie Glühbirnen (3 aus 8):  $C(8; 3) = \binom{8}{3} = 56$

Somit:  $P(X = 0) = f(0) = 56/120 = 7/15$

$X = 1$  1 defekte (aus 2) und 2 einwandfreie Glühbirnen (aus 8):

$$C(2; 1) \cdot C(8; 2) = \binom{2}{1} \cdot \binom{8}{2} = 2 \cdot 28 = 56$$

Somit:  $P(X = 1) = f(1) = 56/120 = 7/15$

$X = 2$  | 2 defekte (aus 2) und 1 einwandfreie Glühbirne (aus 8):

$$C(2; 2) \cdot C(8; 1) = \binom{2}{2} \cdot \binom{8}{1} = 1 \cdot 8 = 8$$

Somit:  $P(X = 2) = f(2) = 8/120 = 1/15$

Verteilungstabelle:	$x_i$	0	1	2
	$f(x_i)$	7/15	7/15	1/15

b)  $P(X = 1) = f(1) = 7/15$

- 5) a) Der Schütze trifft *erstmals* beim  $x$ -ten Schuss (vorher  $x - 1$  Fehlschüsse, jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - p = 0,2$ ). Der *Multiplikationssatz* liefert dann:

$$p(x) = f(x) = (\underbrace{0,2 \cdot 0,2 \cdot \dots \cdot 0,2}_{(x-1)\text{-mal}}) \cdot 0,8 = 0,8 \cdot 0,2^{x-1} \quad (x = 1, 2, 3, \dots)$$

- b) Der Schütze trifft *spätestens* beim 3. Schuss:

$$P = f(1) + f(2) + f(3) = 0,8(1 + 0,2 + 0,2^2) = 0,992$$

- 6) Außerhalb der angegebenen Intervalle *verschwindet* die Verteilungsfunktion ( $F(x) = 0$ ).

a)  $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^x u \, du = \frac{1}{4} \left[ u^2 \right]_0^x = \frac{1}{4} x^2 \quad (0 \leq x \leq 2)$

b)  $F(x) = \lambda \cdot \underbrace{\int_0^x e^{-\lambda u} \, du}_{\text{Integral 312 mit } a = -\lambda} = \lambda \left[ \frac{e^{-\lambda u}}{-\lambda} \right]_0^x = \left[ -e^{-\lambda u} \right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$

c)  $F(x) = \int_1^x \frac{1}{u^2} \, du = \left[ -\frac{1}{u} \right]_1^x = 1 - \frac{1}{x} \quad (x \geq 1)$

7) a)  $\int_0^4 \left( \frac{1}{16} x + b \right) dx = \left[ \frac{1}{32} x^2 + bx \right]_0^4 = \frac{1}{2} + 4b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{8}$

b)  $c \cdot \int_a^b 1 \, dx = c \left[ x \right]_a^b = c(b - a) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{b - a}$

c)  $a \cdot \int_{-1}^1 (1 + x) \, dx = a \left[ x + \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^1 = 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

8) a)  $\int_0^{10} kx \, dx = \left[ \frac{1}{2} kx^2 \right]_0^{10} = 50k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{50}$

b) *Verteilungsfunktion:*  $F(x) = \frac{1}{50} \cdot \int_0^x u \, du = \frac{1}{100} \left[ u^2 \right]_0^x = \frac{1}{100} x^2 = 0,01x^2$   
 $(0 \leq x \leq 10)$

$$P(X \leq -2) = 0; \quad P(1 \leq X \leq 2) = F(2) - F(1) = 0,04 - 0,01 = 0,03$$

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F(5) = 1 - 0,25 = 0,75$$

$$P(3 \leq X \leq 8) = F(8) - F(3) = 0,64 - 0,09 = 0,55$$

9) a) Normierung:  $a \cdot \int_0^2 (2x^2 - x^3) dx = a \left[ \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 = \frac{4}{3}a = 1 \Rightarrow a = 3/4$

b)  $F(x) = \frac{3}{4} \cdot \int_0^x (2u^2 - u^3) du = \frac{3}{4} \left[ \frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 \right]_0^x = \frac{1}{16}(8x^3 - 3x^4)$   
 $(0 \leq x \leq 2)$

c)  $P(X \leq 1) = F(1) = 5/16$

10) a) Aus den Grenzwerten  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$  lassen sich die unbekannten Parameter  $a$  und  $b$  wie folgt bestimmen:

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (a \cdot \arctan x + b) &= a \left( -\frac{\pi}{2} \right) + b = 0 \\ \text{(II)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (a \cdot \arctan x + b) &= a \left( \frac{\pi}{2} \right) + b = 1 \end{aligned} \right\} + \Rightarrow$$

$$2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}; \quad \text{(II)} \Rightarrow a \left( \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\pi}$$

b)  $F(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \arctan x + \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$

11)  $P(0 \leq T \leq 2\lambda^{-1}) = \lambda \cdot \underbrace{\int_0^{2\lambda^{-1}} e^{-\lambda t} dt}_{\text{Integral 312 mit } a = -\lambda} = \left[ -e^{-\lambda t} \right]_0^{2\lambda^{-1}} = 1 - e^{-2} = 0,8647$

12) a)  $f(t) = F'(t) = -[0,2 \cdot e^{-0,2t} + e^{-0,2t} \cdot (-0,2)(1+0,2t)] = 0,04t \cdot e^{-0,2t}$

b)  $P(1 \leq T \leq 5) = F(5) - F(1) = 0,2642 - 0,0175 = 0,2467$

## Abschnitt 5

1) a)  $E(X) = -0,1 + 0 + 0,4 + 0,3 + 0,15 = 0,75$

b)  $E(X) = -\frac{2}{12} - \frac{2}{12} + 0 + \frac{3}{12} + \frac{8}{12} + \frac{5}{12} + \frac{10}{12} = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}$

2)  $E(X) = 0,5 \cdot \int_{-1}^1 x(1+x) dx = 0,5 \cdot \int_{-1}^1 (x + x^2) dx = 0,5 \left[ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3}$

3) a)  $E(X) = -\frac{2}{8} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{8}$

b) Linearitätssatz:  $E(Z_1) = E(5X + 2) = 5 \cdot E(X) + 2 = 5 \cdot \frac{1}{8} + 2 = \frac{21}{8}$

$$E(Z_2) = E(X^2) = \sum x_i^2 \cdot f(x_i) = \frac{4}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{4}{4} = \frac{17}{8}$$

4) a) Gewinnerwartung („mittlerer“ Gewinn):  $E(Z) = \frac{1}{8} + \frac{6}{8} + \frac{9}{8} + \frac{8}{8} = 3 \Rightarrow 3 \text{ Euro}$

b) Nein, denn der Einsatz (4 Euro) ist größer als die Gewinnerwartung (3 Euro).

5) a)  $\mu = E(X) = -\frac{2}{4} + \frac{2}{6} + \frac{4}{4} + \frac{6}{4} + \frac{8}{12} = 3$

$$E(X^2) = \frac{4}{4} + \frac{4}{6} + \frac{16}{4} + \frac{36}{4} + \frac{64}{12} = 20$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = 20 - 3^2 = 11; \quad \sigma = \sqrt{11} = 3,3166$$

b)  $\mu = \frac{23}{16} = 1,4375; \quad \sigma^2 = \frac{575}{256} = 2,2461; \quad \sigma = 1,4987$

c)  $\mu = 0,7; \quad \sigma^2 = 2,41; \quad \sigma = 1,5524$

6) a)  $\mu = E(X) = -0,4 - 0,3 + 0 + 0,1 + 0,1 + 0,45 = -0,05$

$$E(X^2) = 0,8 + 0,3 + 0 + 0,1 + 0,2 + 1,35 = 2,75$$

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2 = 2,75 - (-0,05)^2 = 2,7475; \quad \sigma = 1,6576$$

b)  $\mu_Z = E(Z) = \underbrace{E[(X - \mu)^2]}_{\sigma^2} = E[(X + 0,05)^2] = \sigma^2 = 2,7475$

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= E[(X - \mu)^4] = E[(X + 0,05)^4] = \sum_i (x_i + 0,05)^4 \cdot f(x_i) = \\ &= (-2 + 0,05)^4 \cdot 0,2 + (-1 + 0,05)^4 \cdot 0,3 + (0 + 0,05)^4 \cdot 0,2 + \\ &\quad + (1 + 0,05)^4 \cdot 0,1 + (2 + 0,05)^4 \cdot 0,05 + (3 + 0,05)^4 \cdot 0,15 = 17,1212 \end{aligned}$$

$$\sigma_Z^2 = E(Z^2) - \mu_Z^2 = 17,1212 - 2,7475^2 = 9,5724; \quad \sigma_Z = 3,0939$$

$x_i$	0	1	2
$f(x_i)$	7/15	7/15	1/15

$$E(X) = 0 + \frac{7}{15} + \frac{2}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

8) a) Aus dem unvollständigen Ereignisbaum in Bild A-30 folgt:

$$f(1) = P(OZ) = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = P(OWZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$f(3) = P(OWWZ) + P(OWWW) =$$

$$= 2 \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

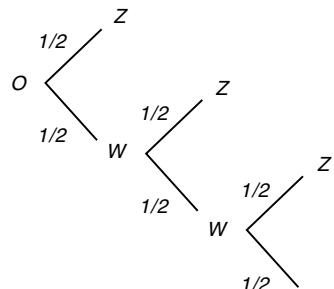


Bild A-30

Verteilungstabelle:	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>x_i</math></td><td style="padding: 5px; width: 25px;">1</td><td style="padding: 5px; width: 25px;">2</td><td style="padding: 5px; width: 25px;">3</td></tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f(x_i)</math></td><td style="padding: 5px; width: 25px;">1/2</td><td style="padding: 5px; width: 25px;">1/4</td><td style="padding: 5px; width: 25px;">1/4</td></tr> </table>	$x_i$	1	2	3	$f(x_i)$	1/2	1/4	1/4
$x_i$	1	2	3						
$f(x_i)$	1/2	1/4	1/4						

b)  $E(X) = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

9) a) Normierung:  $\int_a^b c dx = c \left[ x \right]_a^b = c(b - a) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{b - a}$

$$\mu = \frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b x dx = \frac{1}{2(b - a)} \left[ x^2 \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b - a)} = \frac{(b + a)(b - a)}{2(b - a)} = \frac{1}{2}(a + b)$$

$$E(X^2) = \frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3(b - a)} \left[ x^3 \right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b - a)} =$$

$$= \frac{(b - a)(a^2 + ab + b^2)}{3(b - a)} = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

NR:  $(b^3 - a^3) : (b - a) = a^2 + ab + b^2$  (Polynomdivision)

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2) - \frac{1}{4}(a + b)^2 =$$

$$= \frac{4(a^2 + ab + b^2) - 3(a^2 + 2ab + b^2)}{12} =$$

$$= \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{1}{12}(a - b)^2$$

$\sigma = 0,2887(b - a)$

b) Normierung:  $\int_0^{10} mx dx = \left[ \frac{1}{2} mx^2 \right]_0^{10} = 50m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{50}$

$$\mu = \int_0^{10} x \cdot \frac{1}{50} x dx = \frac{1}{50} \cdot \int_0^{10} x^2 dx = \frac{1}{150} \left[ x^3 \right]_0^{10} = \frac{20}{3}$$

$$E(X^2) = \int_0^{10} x^2 \cdot \frac{1}{50} x dx = \frac{1}{50} \cdot \int_0^{10} x^3 dx = \frac{1}{200} \left[ x^4 \right]_0^{10} = 50$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = 50 - \frac{400}{9} = \frac{50}{9} = 5,5556; \quad \sigma = 2,3570$$

10)  $\mu = \lambda^2 \cdot \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-\lambda x} dx = \lambda^2 \left[ \frac{\lambda^2 x^2 + 2\lambda x + 2}{-\lambda^3} \cdot e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = \lambda^2 \left( 0 + \frac{2}{\lambda^3} \right) = \frac{2}{\lambda}$

(Integral 314 mit  $a = -\lambda$ )

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \lambda^2 \cdot \underbrace{\int_0^\infty x^3 \cdot e^{-\lambda x} dx}_{\text{Integral 315 mit } n = 3, a = -\lambda} = \lambda^2 \left[ \frac{x^3 \cdot e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^\infty + \lambda^2 \cdot \underbrace{\frac{3}{\lambda} \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-\lambda x} dx}_{\text{Integral 314 mit } a = -\lambda} = \\
 &= \lambda^2 (0 + 0) + 3\lambda \left[ \frac{\lambda^2 x^2 + 2\lambda x + 2}{-\lambda^3} \cdot e^{-\lambda x} \right]_0^\infty = 3\lambda \left( 0 + \frac{2}{\lambda^3} \right) = \frac{6}{\lambda^2} \\
 \sigma^2 &= E(X^2) - \mu^2 = \frac{6}{\lambda^2} - \frac{4}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}; \quad \sigma = \frac{\sqrt{2}}{\lambda}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11) \quad \text{Normierung: } a \cdot \int_0^1 (x^2 - x^3) dx &= a \left[ \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{12} a = 1 \Rightarrow a = 12 \\
 \mu &= 12 \cdot \int_0^1 x(x^2 - x^3) dx = 12 \cdot \int_0^1 (x^3 - x^4) dx = 12 \left[ \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = 12 \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{5} \\
 E(X^2) &= 12 \cdot \int_0^1 x^2(x^2 - x^3) dx = 12 \cdot \int_0^1 (x^4 - x^5) dx = 12 \left[ \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{6} x^6 \right]_0^1 = \\
 &= 12 \cdot \frac{1}{30} = \frac{2}{5}; \quad \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{2}{5} - \frac{9}{25} = \frac{1}{25}; \quad \sigma = \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

$$12) \quad \text{Dichtefunktion: } f(t) = F'(t) = -0,2 \cdot e^{-0,2t} + 0,2 \cdot e^{-0,2t}(1 + 0,2t) = 0,04t \cdot e^{-0,2t} \quad (\text{Produkt- und Kettenregel})$$

$$\begin{aligned}
 E(T) &= \int_0^\infty t \cdot f(t) dt = 0,04 \cdot \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-0,2t} dt = 0,04 \left[ \frac{0,04t^2 + 0,4t + 2}{-0,008} \cdot e^{-0,2t} \right]_0^\infty = \\
 &= 0,04 \left( 0 + \frac{2}{0,008} \right) = 10 \quad (\text{Integral 314 mit } a = -0,2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13) \quad \text{a)} \quad \mu_Z &= \int_0^\infty z \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \int_0^\infty e^{-(1+\lambda)x} dx = \lambda \left[ \frac{e^{-(1+\lambda)x}}{-(1+\lambda)} \right]_0^\infty = \lambda \left( 0 + \frac{1}{1+\lambda} \right) = \\
 &= \frac{\lambda}{1+\lambda} \quad (\text{Integral 312 mit } a = -(1+\lambda))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad \mu_Z &= \int_0^\infty z \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \int_0^\infty (2x+1) \cdot e^{-\lambda x} dx = \lambda \cdot \int_0^\infty (2x \cdot e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x}) dx = \\
 &= \lambda \left[ 2 \cdot \frac{-\lambda x - 1}{\lambda^2} \cdot e^{-\lambda x} + \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^\infty = \lambda \left( 0 + 0 + \frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{2+\lambda}{\lambda}
 \end{aligned}$$

(Integrale: 313 und 312, jeweils mit  $a = -\lambda$ )

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad \mu_Z &= \int_0^\infty z \cdot f(x) dx = \lambda \cdot \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[ \frac{\lambda^2 x^2 + 2\lambda x + 2}{-\lambda^3} \cdot e^{-\lambda x} \right]_0^\infty = \\
 &= \lambda \left( 0 + \frac{2}{\lambda^3} \right) = \frac{2}{\lambda^2} \quad (\text{Integral 314 mit } a = -\lambda)
 \end{aligned}$$

14)  $E(Z = aX + b) = a \cdot E(X) + b = a \cdot \mu_X + b$

$$\text{Var}(Z = aX + b) = a^2 \cdot \text{Var}(X) = a^2 \cdot \sigma_X^2$$

a)  $E(Z) = 1; \quad \text{Var}(Z) = 2 \quad \quad \quad$  b)  $E(Z) = 1; \quad \text{Var}(Z) = 0,125$

c)  $E(Z) = 20; \quad \text{Var}(Z) = 50 \quad \quad \quad$  d)  $E(Z) = -2; \quad \text{Var}(Z) = 0,5$

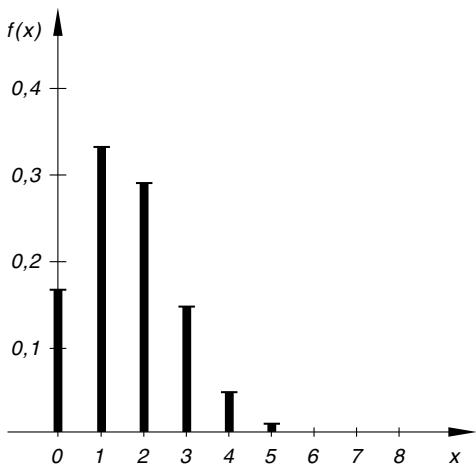
## Abschnitt 6

1) a)  $f(x) = \binom{8}{x} 0,2^x \cdot 0,8^{8-x} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, 8)$

Stabdiagramm: Bild A-31

$x$	$f(x)$
0	0,1678
1	0,3355
2	0,2936
3	0,1468
4	0,0459
5	0,0092
6	0,0011
7	0,0001
8	0

Bild A-31



b)  $P(X = 0) = f(0) = 0,1678$

$$P(X \geq 5) = f(5) + f(6) + f(7) + f(8) = 0,0104$$

$$P(1 \leq X \leq 3) = f(1) + f(2) + f(3) = 0,7759$$

- 2) Die Zufallsvariable  $X$  (= Anzahl „Zahl“ bei 10 Würfen) ist binomialverteilt mit den Parametern  $n = 10$ ,  $p = 0,5$  und  $q = 0,5$ :

$$P(X = x) = f(x) = \binom{10}{x} 0,5^{10} = \frac{1}{1024} \binom{10}{x} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, 10)$$

a)  $P(X = 0) = 0,0010$

b)  $P(X = 2) = 0,0439$

c)  $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 0,8281$

d)  $P(X = 5) = 0,2461$

- 3) Die Zufallsvariable  $X$  (= Anzahl der „Erfolge“ bei 5 Würfen) ist binomialverteilt mit den Parametern  $n = 5$ ,  $p = 1/3$  und  $q = 2/3$ :

$$P(X = x) = f(x) = \binom{5}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{5-x} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, 5)$$

a)  $P(X = 2) = 0,3292$

b)  $P(X \geq 3) = 0,2099$

- 4) Binomialverteilung mit  $n = 300$  und  $p = 1/3$  (nur 3 und 6 sind durch 3 teilbar, somit 2 „günstige“ Fälle). Mittelwert:  $\mu = np = 100$

- 5) Ein „rotes Ass“ (d. h. Herz- oder Karo-Ass) wird im Einzelversuch mit der Wahrscheinlichkeit  $p = 1/16$  gezogen. Die Zufallsvariable  $X$  (= Anzahl der gezogenen „roten Asse“ bei  $n$  Ziehungen) ist daher binomialverteilt mit den Parametern  $n$  (noch unbekannt),  $p = 1/16$  und  $q = 15/16$ :

$$P(X = x) = f(x) = \binom{n}{x} \left(\frac{1}{16}\right)^x \left(\frac{15}{16}\right)^{n-x} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, n)$$

Ereignis  $X = 0$  (kein „rotes Ass“):  $P(X = 0) = f(0) < 0,5 \Rightarrow \left(\frac{15}{16}\right)^n < 0,5 \Rightarrow$

Logarithmieren:  $n \cdot \ln\left(\frac{15}{16}\right) < \ln 0,5 \Rightarrow n > 10,74$

Lösung:  $n \geq 11$  ( $n$  muss ganzzahlig sein)

- 6) Binomialverteilung mit den Parametern  $n = 250$ ,  $p = 0,02$  und  $q = 1 - p = 0,98$ :

$$\mu = np = 250 \cdot 0,02 = 5; \quad \sigma^2 = npq = np(1-p) = 250 \cdot 0,02 \cdot 0,98 = 4,9; \\ \sigma = 2,2136$$

- 7) Die Zufallsvariable  $X$  (= Anzahl Treffer bei 5 Schüssen) ist binomialverteilt mit den Parametern  $n = 5$ ,  $p = 1/3$  und  $q = 1 - p = 2/3$ :

$$P(X = x) = f(x) = \binom{5}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{5-x} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, 5)$$

a)  $P(X = 0) = f(0) = 0,1317$     b)  $P(X = 3) = f(3) = 0,1646$

c)  $P(X \geq 3) = f(3) + f(4) + f(5) = 0,2099$

- 8)  $P(X = x) = f(x) = \frac{\binom{4}{x} \binom{6}{3-x}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{120} \binom{4}{x} \binom{6}{3-x} \quad (x = 0, 1, 2, 3)$

a)  $P(X = 0) = f(0) = 1/6$     b)  $P(1 \leq X \leq 3) = 1 - f(0) = 5/6$

c)  $P(X < 2) = f(0) + f(1) = 2/3$

- 9) Die Zufallsvariable  $X$  (= Anzahl der unvollständigen Packungen unter  $n$  gekauften Packungen) ist hypergeometrisch verteilt ( $N = 40$ ;  $M =$ Anzahl der unvollständigen Packungen = 4):

a)  $N = 40$ ,  $M = 4$ ,  $n = 1$ ;  $P(X = x) = f(x) = \frac{\binom{4}{x} \binom{36}{1-x}}{\binom{40}{1}}$

$X = 0$  (nur vollständige Packungen):  $P(X = 0) = f(0) = 0,9$

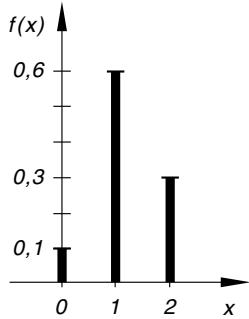
b)  $N = 40$ ,  $M = 4$ ,  $n = 10$ ;  $P(X = x) = f(x) = \frac{\binom{4}{x} \binom{36}{10-x}}{\binom{40}{10}}$   
 $P(X = 2) = f(2) = 0,2142$

- 10) Hypergeometrische Verteilung mit den Parametern  $N = 5$ ,  $M = 3$  (Anzahl der weißen Kugeln) und  $n = 2$ :

$$\begin{aligned} P(X = x) = f(x) &= \frac{\binom{3}{x} \binom{2}{2-x}}{\binom{5}{2}} = \\ &= \frac{1}{10} \binom{3}{x} \binom{2}{2-x} \quad (x = 0, 1, 2) \end{aligned}$$

$x$	0	1	2
$f(x)$	0,1	0,6	0,3

Bild A-32



Stabdiagramm: Bild A-32

11)  $P(X = x) = f(x) = \frac{3^x}{x!} \cdot e^{-3} \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$

- a)  $P(X = 0) = f(0) = 0,0498$
- b)  $P(X \leq 3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 0,6472$
- c)  $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0,6472 = 0,3528$
- d)  $P(1 \leq X \leq 5) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 0,8663$
- 12) Die Zufallsvariable  $X$  (= Anzahl der Brennelemente, die den Anforderungen *nicht* genügen) ist binomialverteilt mit den Parametern  $n = 1500$  und  $p = 10^{-4}$ . Sie darf jedoch durch eine (rechnerisch bequemere) Poisson-Verteilung mit dem Parameter (Mittelwert)  $\mu = np = 0,15$  ersetzt werden:

$$P(X = x) = f(x) = \frac{0,15^x}{x!} \cdot e^{-0,15} \Rightarrow P(X = 0) = f(0) = 0,8607$$

Exakte Verteilung (Binomialverteilung mit  $n = 1500$ ,  $p = 0,0001$  und  $q = 1 - p = 0,9999$ ):

$$P(X = x) = f(x) = \binom{1500}{x} \cdot 0,0001^x \cdot 0,9999^{1500-x} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, 1500)$$

$P(X = 0) = f(0) = 0,8607$  (in Übereinstimmung mit der Näherung)

- 13) a)  $P(U \leq 1,52) = \phi(1,52) = 0,9357$
- b)  $P(U \leq -0,42) = \phi(-0,42) = 1 - \phi(0,42) = 1 - 0,6628 = 0,3372$
- c)  $P(0,2 \leq U \leq 2,13) = \phi(2,13) - \phi(0,2) = 0,9834 - 0,5793 = 0,4041$
- d)  $P(-1,01 \leq U \leq -0,25) = \phi(-0,25) - \phi(-1,01) =$   
 $= 1 - \phi(0,25) - 1 + \phi(1,01) = \phi(1,01) - \phi(0,25) = 0,8438 - 0,5987 = 0,2451$
- e)  $P(-1 \leq U \leq 1) = P(|U| \leq 1) = 2 \cdot \phi(1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826$
- f)  $P(|U| \leq 1,69) = 2 \cdot \phi(1,69) - 1 = 2 \cdot 0,9545 - 1 = 0,9090$
- g)  $P(U \geq 0,95) = 1 - P(U \leq 0,95) = 1 - \phi(0,95) = 1 - 0,8289 = 0,1711$
- h)  $P(U \geq -2,13) = 1 - P(U \leq -2,13) = 1 - \phi(-2,13) =$   
 $= 1 - 1 + \phi(2,13) = \phi(2,13) = 0,9834$

- 14) a)  $\phi(a) = 0,5 \Rightarrow a = 0$
- b)  $\phi(a) = 0,3210 < 0,5 \Rightarrow a < 0$  (Wir setzen  $a = -k$  mit  $k > 0$ )  $\Rightarrow$   
 $\phi(a) = \phi(-k) = 1 - \phi(k) = 0,3210 \Rightarrow \phi(k) = 0,6790 \Rightarrow$   
 $k = 0,465 \Rightarrow a = -k = -0,465$
- c)  $\phi(b) - \phi(0,15) = 0,35 \Rightarrow$   
 $\phi(b) = 0,35 + \phi(0,15) = 0,35 + 0,5596 = 0,9096 \Rightarrow b = 1,338$
- d)  $\phi(b) - \phi(-0,22) = \phi(b) - 1 + \phi(0,22) = \phi(b) - 1 + 0,5871 =$   
 $= \phi(b) - 0,4129 = 0,413 \Rightarrow \phi(b) = 0,8259 \Rightarrow b = 0,938$
- e)  $2 \cdot \phi(a) - 1 = 0,95 \Rightarrow \phi(a) = 0,975 \Rightarrow a = 1,96$
- f)  $2 \cdot \phi(c) - 1 = 0,4682 \Rightarrow \phi(c) = 0,7341 \Rightarrow c = 0,625$
- g)  $P(U \geq a) = 1 - P(U \leq a) = 1 - \phi(a) = 0,8002 \Rightarrow$   
 $\phi(a) = 0,1998 < 0,5 \Rightarrow a < 0$  (Wir setzen  $a = -k$  mit  $k > 0$ )  $\Rightarrow$   
 $\phi(a) = \phi(-k) = 1 - \phi(k) = 0,1998 \Rightarrow \phi(k) = 0,8002 \Rightarrow$   
 $k = 0,842 \Rightarrow a = -k = -0,842$
- h)  $P(U \geq a) = 1 - P(U \leq a) = 1 - \phi(a) = 0,4010 \Rightarrow \phi(a) = 0,5990 \Rightarrow$   
 $a = 0,251$
- 15)  $U = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 6}{2}$ ; a)  $U = 2,21$       b)  $U = -2,57$       c)  $U = -1,75$   
d)  $U = -5,34$       e)  $U = \pm 3,2$       f)  $U = 6$
- 16)  $U = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 2}{0,5}$
- a)  $P(X \leq 2,52) = P(U \leq 1,04) = \phi(1,04) = 0,8508$
- b)  $P(X \leq 0,84) = P(U \leq -2,32) = \phi(-2,32) = 1 - \phi(2,32) =$   
 $= 1 - 0,9898 = 0,0102$
- c)  $P(X \leq -1,68) = P(U \leq -7,36) = \phi(-7,36) = 1 - \phi(7,36) = 1 - 1 = 0$
- d)  $P(-0,5 \leq X \leq 4,5) = P(-5 \leq U \leq 5) = 2 \cdot \phi(5) - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$
- e)  $P(-1,86 \leq X \leq -0,24) = P(-7,72 \leq U \leq -4,48) = \phi(-4,48) - \phi(-7,72) =$   
 $= 1 - \phi(4,48) - 1 + \phi(7,72) = \phi(7,72) - \phi(4,48) = 1 - 1 = 0$
- f)  $P(-3 \leq X \leq 3) = P(-10 \leq U \leq 2) = \phi(2) - \phi(-10) =$   
 $= \phi(2) - 1 + \phi(10) = 0,9772 - 1 + 1 = 0,9772$
- g)  $P(|X| \leq 2,13) = P(-2,13 \leq X \leq 2,13) = P(-8,26 \leq U \leq 0,26) =$   
 $= \phi(0,26) - \phi(-8,26) = \phi(0,26) - 1 + \phi(8,26) = 0,6026 - 1 + 1 = 0,6026$
- h)  $P(X \geq 0,98) = P(U \geq -2,04) = 1 - P(U \leq -2,04) = 1 - \phi(-2,04) =$   
 $= 1 - 1 + \phi(2,04) = \phi(2,04) = 0,9793$

$$17) \quad U = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 100}{4}$$

a) Abweichung vom Sollwert:  $\pm 5 \mu\text{F}$

$$\begin{aligned} P(95 \leq X \leq 105) &= P(-1,25 \leq U \leq 1,25) = P(|U| \leq 1,25) = \\ &= 2 \cdot \phi(1,25) - 1 = 2 \cdot 0,8944 - 1 = 0,7888 \end{aligned}$$

Ausschussanteil:  $P = 1 - P(95 \leq X \leq 105) = 1 - 0,7888 = 0,2112 \approx 21,1\%$

$$\begin{aligned} b) \quad P(98 \leq X \leq 104) &= P(-0,5 \leq U \leq 1) = \phi(1) - \phi(-0,5) = \\ &= \phi(1) - 1 + \phi(0,5) = 0,8413 - 1 + 0,6915 = 0,5328 \end{aligned}$$

Ausschussanteil:  $P = 1 - P(98 \leq X \leq 104) = 1 - 0,5328 = 0,4672 \approx 46,7\%$

$$18) \quad \text{Mindestpunktzahl: } a \Rightarrow P(X \geq a) = 0,6; \quad U = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 20}{4}$$

$$P(X \geq a) = P\left(U \geq \frac{a - 20}{4}\right) = P(U \geq c) = 0,6 \quad \left(\text{mit } c = \frac{a - 20}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} P(U \geq c) &= 1 - P(U \leq c) = 1 - \phi(c) = 0,6 \Rightarrow \phi(c) = 0,4 < 0,5 \Rightarrow \\ c < 0 \quad (\text{Wir setzen } c = -k \text{ mit } k > 0) &\Rightarrow \phi(c) = \phi(-k) = 1 - \phi(k) = 0,4 \Rightarrow \\ \phi(k) = 0,6 &\Rightarrow k = 0,253 \Rightarrow c = -k = -0,253 \Rightarrow c = \frac{a - 20}{4} = -0,253 \Rightarrow \\ a = 4c + 20 &= -1,012 + 20 = 18,988 \approx 19 \end{aligned}$$

Daher: Die geforderte Mindestpunktzahl betrug 19 Punkte.

$$19) \quad U = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 75}{5}$$

$$\begin{aligned} a) \quad P(69 \leq X \leq 80) &= P(-1,2 \leq U \leq 1) = \phi(1) - \phi(-1,2) = \\ &= \phi(1) - 1 + \phi(1,2) = 0,8413 - 1 + 0,8849 = 0,7262 \end{aligned}$$

Anzahl der Studenten:  $5000 \cdot 0,7262 = 3631$

$$\begin{aligned} b) \quad P(X > 80) &= 1 - P(X \leq 80) = 1 - P(U \leq 1) = 1 - \phi(1) = \\ &= 1 - 0,8413 = 0,1587 \end{aligned}$$

Anzahl der Studenten:  $5000 \cdot 0,1587 = 794$

$$c) \quad P(X < 65) = P(U \leq -2) = \phi(-2) = 1 - \phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

Anzahl der Studenten:  $5000 \cdot 0,0228 = 114$

$$20) \quad U = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 750}{20}$$

$$a) \quad P(X < 730) = P(U < -1) = \phi(-1) = 1 - \phi(1) = 1 - 0,8413 = 0,1587 \approx 15,9\%$$

b) Abweichung: 2 % von  $750 \text{ cm}^3 = 15 \text{ cm}^3 \Rightarrow 735 \leq X \leq 765$

$$\begin{aligned} P(735 \leq X \leq 765) &= P(-0,75 \leq U \leq 0,75) = 2 \cdot \phi(0,75) - 1 = \\ &= 2 \cdot 0,7734 - 1 = 0,5468 \approx 54,7\% \end{aligned}$$

21)  $\mu = 4 \text{ h}; \quad \lambda = 1/\mu = 0,25 \text{ h}^{-1}$

Verteilungsfunktion:  $F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-0,25t} \quad (t \text{ in h}; t \geq 0)$

a)  $P(T \leq 3) = F(3) = 0,5276 \approx 52,8\%$

b)  $P(3 \leq T \leq 5) = F(5) - F(3) = 0,7135 - 0,5276 = 0,1859 \approx 18,6\%$

c)  $P(T > 4) = 1 - P(T \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - 0,6321 = 0,3679 \approx 36,8\%$

22)  $\mu = \bar{T} = 10000 \text{ h}; \quad \lambda = 1/\mu = 0,0001 \text{ h}^{-1}$

Verteilungsfunktion:  $F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-0,0001t} \quad (t \text{ in h}; t \geq 0)$

a)  $P(T \leq 500) = F(500) = 0,0488 = 4,9\%$

b)  $P(1000 \leq T \leq 3000) = F(3000) - F(1000) = 0,2592 - 0,0952 = 0,1640 \approx 16,4\%$

c)  $P(T > 12000) = 1 - P(T \leq 12000) = 1 - F(12000) = 1 - 0,6988 = 0,3012 \approx 30,1\%$

23)  $\mu = \bar{T} = 2 \text{ min}; \quad \lambda = 1/\mu = 0,5 \text{ min}^{-1}$

Verteilungsfunktion:  $F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-0,5t} \quad (t \text{ in min}; t \geq 0)$

a)  $30 \text{ s} = 0,5 \text{ min}; \quad P(T \leq 0,5) = F(0,5) = 0,2212 \approx 22,1\%$

b)  $P(T \geq 5) = 1 - P(T \leq 5) = 1 - F(5) = 1 - 0,9179 = 0,0821 \approx 8,2\%$

c)  $P(1 \leq T \leq 3) = F(3) - F(1) = 0,7769 - 0,3935 = 0,3834 \approx 38,3\%$

- 24) Die binomialverteilte Zufallsvariable  $X$  (= Anzahl an Ausschussstücken in einer Stichprobe vom Umfang  $n = 100$ ) kann näherungsweise durch eine Poisson-Verteilung mit dem Parameter (Mittelwert)  $\mu = np = 100 \cdot 0,01 = 1$  ersetzt werden (die Faustregel für diese Näherung ist erfüllt:  $np = 100 \cdot 0,01 = 1 < 10$  und  $n = 100 > 1500p = 1500 \cdot 0,01 = 15$ ):

$$P(X = x) = f(x) = \frac{e^{-1}}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, 100)$$

a)  $P(X = 2) = f(2) = 0,1839 \approx 18,4\%$

b)  $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - f(0) - f(1) - f(2) = 0,0803 \approx 8,0\%$

c) **Exakte Lösung** (Binomialverteilung mit  $n = 100$ ,  $p = 0,01$  und  $q = 1 - p = 0,99$ ):

$$f(x) = P(X = x) = \binom{100}{x} \cdot 0,01^x \cdot 0,99^{100-x} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, 100)$$

$P(X = 2) = f(2) = 0,1849 \approx 18,5\%$

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - f(0) - f(1) - f(2) = 0,0794 \approx 7,9\%$

25)  $n = 20, \quad p = 1/2, \quad q = 1 - p = 1/2 \Rightarrow \mu = np = 10; \quad \sigma^2 = npq = 5;$

$$\sigma = \sqrt{5}; \quad U = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 10}{\sqrt{5}}; \quad P^*(8 \leq X \leq 12)$$

**Stetigkeitskorrektur:** (Intervallgrenzen um 0,5 nach außen verschieben):

$$P^*(8 \leq X \leq 12) \approx P(7,5 \leq X \leq 12,5) = P(-1,118 \leq U \leq 1,118) =$$

$$= P(|U| \leq 1,118) = 2 \cdot \phi(1,118) - 1 = 2 \cdot 0,8682 - 1 = 0,7364$$

**Exakte Lösung (Binomialverteilung mit  $n = 20$  und  $p = q = 1/2$ ):**

$$f(x) = P(X = x) = \binom{20}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{20-x} = \frac{1}{2^{20}} \binom{20}{x} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, 20)$$

$$\begin{aligned} P(8 \leq X \leq 12) &= f(8) + f(9) + f(10) + f(11) + f(12) = \\ &= \frac{1}{2^{20}} \left( \binom{20}{8} + \binom{20}{9} + \binom{20}{10} + \binom{20}{11} + \binom{20}{12} \right) = \\ &= \frac{1}{2^{20}} \left( \frac{20!}{8! 12!} + \frac{20!}{9! 11!} + \frac{20!}{10! 10!} + \frac{20!}{11! 9!} + \frac{20!}{12! 8!} \right) = \\ &= \frac{20!}{2^{20} \cdot 8! 10!} \left( \frac{2}{11 \cdot 12} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \frac{1}{9 \cdot 10} \right) = 0,7368 \end{aligned}$$

26)  $n = 360, p = 1/3, q = 1 - p = 2/3; \mu = np = 120; \sigma^2 = npq = 80;$

$$\sigma = \sqrt{80}; \quad U = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 120}{\sqrt{80}}; \quad P^*(100 \leq X \leq 140)$$

*Stetigkeitskorrektur* (Intervallgrenzen um 0,5 nach außen verschieben):

$$\begin{aligned} P^*(100 \leq X \leq 140) &\approx P(99,5 \leq X \leq 140,5) = P(-2,292 \leq U \leq 2,292) = \\ &= P(|U| \leq 2,292) = 2 \cdot \phi(2,292) - 1 = 2 \cdot 0,9891 - 1 = 0,9782 \end{aligned}$$

- 27) Die Zufallsvariable  $X$  (= Anzahl derjenigen Geräte in der Stichprobe vom Umfang  $n = 200$ , die einer Zuverlässigkeitstest nicht standhalten) ist *binomialverteilt* mit den Parametern  $n = 200, p = 0,06$  und  $q = 1 - p = 0,94$ , kann jedoch durch eine *Normalverteilung* mit den folgenden Parametern ersetzt werden:

$$\mu = np = 200 \cdot 0,06 = 12; \quad \sigma^2 = npq = 200 \cdot 0,06 \cdot 0,94 = 11,28; \quad \sigma = \sqrt{11,28}$$

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 12}{\sqrt{11,28}}; \quad P^*(10 \leq X \leq 15)$$

*Stetigkeitskorrektur* (Intervallgrenzen um 0,5 nach außen verschieben):

$$\begin{aligned} P^*(10 \leq X \leq 15) &\approx P(9,5 \leq X \leq 15,5) = P(-0,744 \leq U \leq 1,042) = \\ &= \phi(1,042) - \phi(-0,744) = \phi(1,042) - 1 + \phi(0,744) = \\ &= 0,8513 - 1 + 0,7716 = 0,6229 \end{aligned}$$

## Abschnitt 7

- 1) *Verteilungen* der Komponenten (*Randverteilungen*):

a)	$x_i$      1         3	$y_i$      -2         1         4
	$f_1(x_i)$      1/2         1/2	$f_2(y_i)$      1/4         3/8         3/8

$$\mu_X = 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 2; \quad \sigma_X^2 = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\mu_Y = -2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} = \frac{11}{8}$$

$$\sigma_Y^2 = \left(-\frac{27}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{8}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} + \left(\frac{21}{8}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{351}{64}$$

b)	$x_i$	0	1	$y_i$	-2	-1	1	2
	$f_1(x_i)$	0,6	0,4	$f_2(y_i)$	0,25	0,15	0,15	0,45

$$\mu_X = 0 + 0,4 = 0,4; \quad \sigma_X^2 = (-0,4)^2 \cdot 0,6 + 0,6^2 \cdot 0,4 = 0,24$$

$$\mu_Y = -0,5 - 0,15 + 0,15 + 0,9 = 0,4$$

$$\sigma_Y^2 = (-2,4)^2 \cdot 0,25 + (-1,4)^2 \cdot 0,15 + 0,6^2 \cdot 0,15 + 1,6^2 \cdot 0,45 = 2,94$$

2) Wahrscheinlichkeitsfunktion:  $f(x; y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$

$X \backslash Y$	0	2	3	6	$\sum$
1	0,02	0,04	0,08	0,06	0,20
2	0,05	0,10	0,20	0,15	0,50
3	0,03	0,06	0,12	0,09	0,30
$\sum$	0,10	0,20	0,40	0,30	

$\underbrace{\hspace{10em}}_{f_2(y)}$

3) a)  $f_1(6) = 1 - 0,4 - 0,2 = 0,4; \quad f_2(1) = 1 - 0,7 - 0,1 = 0,2$

$$f(2; 0) = 0,4 - 0,08 - 0,04 = 0,28; \quad f(6; 0) = 0,7 - \underbrace{f(2; 0)}_{0,28} - 0,14 = 0,28$$

$$f(6; 1) = \underbrace{f_1(6)}_{0,4} - \underbrace{f_2(1)}_{0,28} - 0,04 = 0,08; \quad f(4; 1) = \underbrace{f_2(1)}_{0,2} - 0,08 - \underbrace{f(6; 1)}_{0,08} = 0,04$$

$$f(4; 2) = 0,1 - 0,04 - 0,04 = 0,02$$

$X \backslash Y$	0	1	2	$\sum$
2	0,28	0,08	0,04	0,40
4	0,14	0,04	0,02	0,20
6	0,28	0,08	0,04	0,40
$\sum$	0,70	0,20	0,10	

$\underbrace{\hspace{10em}}_{f_2(y)}$

b)	$x_i$	2	4	6	$y_i$	0	1	2
	$f_1(x_i)$	0,4	0,2	0,4	$f_2(y_i)$	0,7	0,2	0,1

$$\mu_X = 0,8 + 0,8 + 2,4 = 4; \quad \sigma_X^2 = (-2)^2 \cdot 0,4 + 0^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,4 = 3,2$$

$$\mu_Y = 0 + 0,2 + 0,2 = 0,4; \quad \sigma_Y^2 = (-0,4)^2 \cdot 0,7 + 0,6^2 \cdot 0,2 + 1,6^2 \cdot 0,1 = 0,44$$

c)  $f_1(2) \cdot f_2(0) = 0,4 \cdot 0,7 = 0,28 = f(2; 0)$

$f_1(2) \cdot f_2(1) = 0,4 \cdot 0,2 = 0,08 = f(2; 1)$

$f_1(2) \cdot f_2(2) = 0,4 \cdot 0,1 = 0,04 = f(2; 2)$  usw.

Es gilt:  $f(x; y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$  (für  $x = 2, 4, 6$  und  $y = 0, 1, 2$ )  $\Rightarrow$

$X$  und  $Y$  sind stochastisch unabhängige Zufallsvariable.

4) a) 

$x_i$	1	2	3
$f_1(x_i)$	1/4	1/2	1/4

$y_i$	0	1	2
$f_2(y_i)$	1/4	1/2	1/4

b)  $E(X) = \frac{1}{4} + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} = 2$ ;  $\text{Var}(X) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$E(Y) = 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1$ ;  $\text{Var}(Y) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

c) Lösungsweg wie in Aufgabe 3 c).

Es gilt:  $f(x; y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$  für  $x = 1, 2, 3$  und  $y = 0, 1, 2$ . Die Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sind somit stochastisch unabhängig.

5) a) 
$$\int_{x=0}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} k \cdot e^{-2x-y} dy dx = k \cdot \int_0^{\infty} e^{-2x} dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y} dy =$$

$$= k \left[ -\frac{1}{2} \cdot e^{-x} \right]_0^{\infty} \cdot \left[ -e^{-y} \right]_0^{\infty} = k \left( 0 + \frac{1}{2} \right) (0 + 1) = \frac{1}{2} k = 1 \Rightarrow k = 2$$

(Integrale: 312 mit  $a = -2$  bzw.  $a = -1$ )

b)  $f_1(x) = 2 \cdot \int_{y=0}^{\infty} e^{-2x-y} dy = 2 \cdot e^{-2x} \cdot \int_0^{\infty} e^{-y} dy = 2 \cdot e^{-2x} \left[ -e^{-y} \right]_0^{\infty} =$ 
 $= 2 \cdot e^{-2x} (0 + 1) = 2 \cdot e^{-2x} \quad (\text{Integral 312 mit } a = -1)$

$$f_2(y) = 2 \cdot \int_{x=0}^{\infty} e^{-2x-y} dx = 2 \cdot e^{-y} \cdot \int_0^{\infty} e^{-2x} dx = 2 \cdot e^{-y} \left[ -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \right]_0^{\infty} =$$
 $= 2 \cdot e^{-y} \left( 0 + \frac{1}{2} \right) = e^{-y} \quad (\text{Integral 312 mit } a = -2)$

c)  $E(X) = 2 \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} x \cdot e^{-2x} dx}_{\text{Integral 313 mit } a = -2} = 2 \left[ \frac{-2x-1}{4} \cdot e^{-2x} \right]_0^{\infty} = 2 \left( 0 + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}$ 
 $E(X^2) = 2 \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-2x} dx}_{\text{Integral 314 mit } a = -2} = 2 \left[ \frac{4x^2+4x+2}{-8} \cdot e^{-2x} \right]_0^{\infty} = 2 \left( 0 + \frac{2}{8} \right) = \frac{1}{2}$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$E(Y) = \underbrace{\int_0^{\infty} y \cdot e^{-y} dy}_{\text{Integral 313 mit } a = -1} = \left[ (-y - 1) \cdot e^{-y} \right]_0^{\infty} = 0 + 1 = 1$$

$$E(Y^2) = \underbrace{\int_0^{\infty} y^2 \cdot e^{-y} dy}_{\text{Integral 314 mit } a = -1} = \left[ \frac{y^2 + 2y + 2}{-1} \cdot e^{-y} \right]_0^{\infty} = 0 + 2 = 2$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 2 - 1^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad P(0 \leq X \leq 2; 0 \leq Y \leq 3) &= 2 \cdot \int_{x=0}^2 \int_{y=0}^3 e^{-2x-y} dy dx = \\ &= 2 \cdot \int_0^2 e^{-2x} dx \cdot \int_0^3 e^{-y} dy = 2 \left[ -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \right]_0^2 \cdot \left[ -e^{-y} \right]_0^3 = \\ &= \left[ e^{-2x} \right]_0^2 \cdot \left[ e^{-y} \right]_0^3 = (e^{-4} - 1)(e^{-3} - 1) = 0,9328 \end{aligned}$$

$$6) \quad \text{a)} \quad f(x; y) = f_1(x) \cdot f_2(y) = \frac{1}{4} (x+1) \left( y + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8} (x+1)(2y+1)$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad F(x; y) &= \int_{u=0}^x \int_{v=0}^y f(u; v) dv du = \frac{1}{8} \cdot \int_{u=0}^x \int_{v=0}^y (u+1)(2v+1) dv du = \\ &= \frac{1}{8} \cdot \int_0^x (u+1) du \cdot \int_0^y (2v+1) dv = \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{2} u^2 + u \right]_0^x \cdot \left[ v^2 + v \right]_0^y = \\ &= \frac{1}{8} \left( \frac{1}{2} x^2 + x \right) (y^2 + y) = \frac{1}{16} (x^2 + 2x)(y^2 + y) \end{aligned}$$

$$\text{c)} \quad P(0 \leq X \leq 1; 0 \leq Y \leq 1) = F(1; 1) = \frac{1}{16} \cdot 3 \cdot 2 = \frac{3}{8}$$

7) a)	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>x_i</math></td><td style="padding: 5px; border-right: 1px solid black;">0</td><td style="padding: 5px; border-right: 1px solid black;">1</td><td style="padding: 5px; border-right: 1px solid black;">2</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f_1(x_i)</math></td><td style="padding: 5px; border-right: 1px solid black;">1/4</td><td style="padding: 5px; border-right: 1px solid black;">3/8</td><td style="padding: 5px; border-right: 1px solid black;">3/8</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> </table>	$x_i$	0	1	2		$f_1(x_i)$	1/4	3/8	3/8		<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>y_i</math></td><td style="padding: 5px; border-right: 1px solid black;">0</td><td style="padding: 5px; border-right: 1px solid black;">1</td><td style="padding: 5px; border-right: 1px solid black;">2</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f_2(y_i)</math></td><td style="padding: 5px; border-right: 1px solid black;">1/4</td><td style="padding: 5px; border-right: 1px solid black;">1/2</td><td style="padding: 5px; border-right: 1px solid black;">1/4</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> </table>	$y_i$	0	1	2		$f_2(y_i)$	1/4	1/2	1/4	
$x_i$	0	1	2																			
$f_1(x_i)$	1/4	3/8	3/8																			
$y_i$	0	1	2																			
$f_2(y_i)$	1/4	1/2	1/4																			

$X$  und  $Y$  sind *stochastisch abhängig*, da z.B.  $f_1(1) \cdot f_2(0) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$ , aber  $f(1; 0) = \frac{1}{16}$  und somit  $f_1(1) \cdot f_2(0) \neq f(1; 0)$  gilt.

b)	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>x_i</math></td><td style="padding: 5px; border-right: 1px solid black;">1</td><td style="padding: 5px; border-right: 1px solid black;">2</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f_1(x_i)</math></td><td style="padding: 5px; border-right: 1px solid black;">0,8</td><td style="padding: 5px; border-right: 1px solid black;">0,2</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> </table>	$x_i$	1	2		$f_1(x_i)$	0,8	0,2		<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>y_i</math></td><td style="padding: 5px; border-right: 1px solid black;">0</td><td style="padding: 5px; border-right: 1px solid black;">1</td><td style="padding: 5px; border-right: 1px solid black;">2</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f_2(y_i)</math></td><td style="padding: 5px; border-right: 1px solid black;">0,5</td><td style="padding: 5px; border-right: 1px solid black;">0,3</td><td style="padding: 5px; border-right: 1px solid black;">0,2</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> </table>	$y_i$	0	1	2		$f_2(y_i)$	0,5	0,3	0,2	
$x_i$	1	2																		
$f_1(x_i)$	0,8	0,2																		
$y_i$	0	1	2																	
$f_2(y_i)$	0,5	0,3	0,2																	

$X$  und  $Y$  sind *stochastisch unabhängig*, da  $f_1(x_i) \cdot f_2(y_k) = f(x_i; y_k)$  für alle  $i, k$  gilt:

$$f_1(1) \cdot f_2(0) = f(1; 0) = 0,4; \quad f_1(1) \cdot f_2(1) = f(1; 1) = 0,24$$

$$f_1(1) \cdot f_2(2) = f(1; 2) = 0,16; \quad f_1(2) \cdot f_2(0) = f(2; 0) = 0,1$$

$$f_1(2) \cdot f_2(1) = f(2; 1) = 0,06; \quad f_1(2) \cdot f_2(2) = f(2; 2) = 0,04$$

8)

$X \backslash Y$	5	10	15	$\sum$
1	0,075	0,300	0,125	0,500
2	0,045	0,180	0,075	0,300
3	0,030	0,120	0,050	0,200
$\sum$	0,150	0,600	0,250	

$f_2(y)$

$f_1(x)$

9) Additions- bzw. Linearitätssatz für Mittelwerte verwenden:

- a)  $E(Z_1) = \mu_1 + 2\mu_2 - 5\mu_4 = 2 + 2 \cdot 5 - 5 \cdot 1 = 7$
- b)  $E(Z_2) = \mu_1 + 8\mu_2 - 3(\mu_3 + \mu_4) = 2 + 8 \cdot 5 - 3(-3 + 1) = 48$
- c)  $E(Z_3) = \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3 - \mu_4 = 2 + 5 + 2(-3) - 1 = 0$

10)

$X_i$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
$\mu_i$	2	8	18	32

Multiplikations- und Additionssatz für Mittelwerte verwenden:

- a)  $E(Z_1) = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \mu_4 = 2 \cdot 8 \cdot 18 \cdot 32 = 9216$
- b)  $E(Z_2) = \mu_1(\mu_2 + \mu_3) = 2(8 + 18) = 52$
- c)  $E(Z_3) = (\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 + \mu_2) = \mu_1^2 - \mu_2^2 = 2^2 - 8^2 = -60$
- d)  $E(Z_4) = 3\mu_1 \cdot \mu_4^2 = 3 \cdot 2 \cdot 32^2 = 6144$

11) Additions- bzw. Linearitätssätze für Mittelwerte bzw. Varianzen verwenden:

- a)  $E(Z_1) = \mu_1 - 3\mu_2 + \mu_4 = 2 - 3 \cdot 8 + 3 = -19$   
 $\text{Var}(Z_1) = \sigma_1^2 + (-3)^2 \cdot \sigma_2^2 + \sigma_4^2 = 1 + 9 \cdot 2 + 3 = 22$
- b)  $E(Z_2) = \mu_1 + 2(\mu_2 - \mu_3) = 2 + 2(8 + 2) = 22$   
 $\text{Var}(Z_2) = \sigma_1^2 + 2^2 \cdot \sigma_2^2 + (-2)^2 \cdot \sigma_3^2 = 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 29$
- c)  $E(Z_3) = 11; \quad \text{Var}(Z_3) = 11 \quad \text{d)} \quad E(Z_4) = -18; \quad \text{Var}(Z_4) = 57$

12) Additions- bzw. Linearitätssätze für Mittelwerte bzw. Varianzen verwenden:

- a)  $\mu_Z = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) - \mu_3 = \frac{1}{2}(2 - 4) - 5 = -6$   
 $\sigma_Z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + (-1)^2 \cdot \sigma_3^2 = \frac{1}{4}(1 + 4) + 9 = 10,25; \quad \sigma_Z = 3,2016$
- b)  $\mu_Z = 2(\mu_1 + \mu_3) - 3\mu_2 = 2(2 + 5) - 3(-4) = 26$   
 $\sigma_Z^2 = 2^2(\sigma_1^2 + \sigma_3^2) + (-3)^2 \cdot \sigma_2^2 = 4(1 + 9) + 9 \cdot 4 = 76; \quad \sigma_Z = 8,7178$

- 13)  $Z = aX + b$  ist normalverteilt mit dem Mittelwert  $\mu_Z = a\mu + b$  und der Varianz  $\sigma_Z^2 = a^2 \cdot \sigma^2$  bzw. der Standardabweichung  $\sigma_z = a\sigma$ .

- 14) a) *Additionssatz* für Mittelwerte bzw. Varianzen verwenden:

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = (200 + 120 + 180) \Omega = 500 \Omega$$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = (4 + 1 + 4) \Omega^2 = 9 \Omega^2; \quad \sigma = 3 \Omega$$

- b) Übergang von der Zufallsvariablen  $R$  zur standardnormalverteilten Zufallsvariablen  $U$ :

$$U = \frac{R - \mu}{\sigma} = \frac{R - 500}{3} \Rightarrow |R - 500| = 3|U|$$

$$|R - 500| \leq c \Rightarrow 3|U| \leq c \Rightarrow |U| \leq c/3$$

$$P(|R - 500| \leq c) = P\left(|U| \leq \frac{c}{3}\right) = 2 \cdot \phi\left(\frac{c}{3}\right) - 1 = 0,95 \Rightarrow$$

$$\phi\left(\frac{c}{3}\right) = 0,975 \Rightarrow \frac{c}{3} = u_{0,975} = 1,960 \quad c = 5,88$$

(Tabelle 2 im Anhang, Teil A)

*Lösung:*  $494,12 \Omega \leq R \leq 505,88 \Omega$

- 15)  $\mu = \mu_x + \mu_y = 10 + 20 = 30; \quad \sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = 9 + 16 = 25; \quad \sigma = 5$

$Z = X + Y$  ist *normalverteilt* mit dem Mittelwert  $\mu = 30$  und der Standardabweichung  $\sigma = 5$ . Die *Dichtefunktion* lautet somit:

$$f(z) = \frac{1}{5 \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{z-30}{5}\right)^2} \quad (-\infty < z < \infty)$$

### III Grundlagen der mathematischen Statistik

#### Abschnitt 1

- 1) Verteilung (*Stabdiagramm*: Bild A-33)

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$n_i$	1	1	2	3	1	2
$h_i$	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2

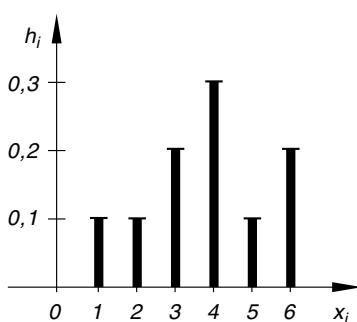


Bild A-33 Stabdiagramm

- 2) a) Verteilung (*Stabdiagramm* und *Verteilungskurve*: Bild A-34)

$x_i$ mm	39,7	39,8	39,9	40,0	40,1	40,2
$f(x_i)$	0,05	0,15	0,20	0,30	0,20	0,10
$F(x_i)$	0,05	0,20	0,40	0,70	0,90	1

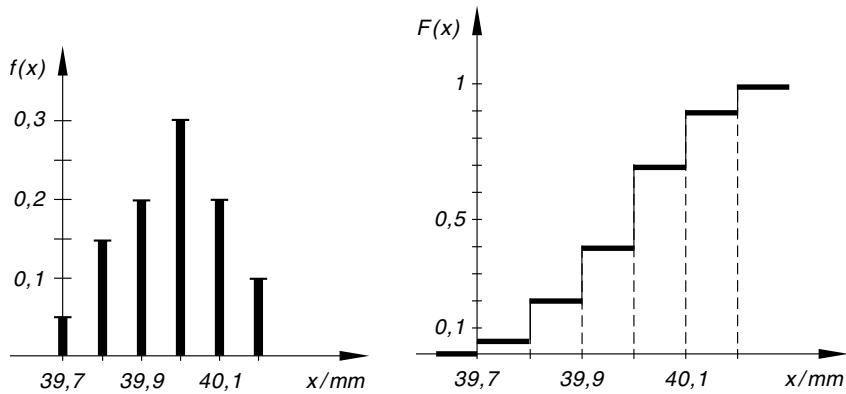


Bild A-34 Stabdiagramm (linkes Bild) und Verteilungskurve (rechtes Bild)

- b) Verteilung (*Stabdiagramm* und *Verteilungskurve*: Bild A-35)

$x_i$ $\Omega$	97	98	99	100	101	102	103
$f(x_i)$	0,04	0,12	0,16	0,36	0,20	0,08	0,04
$F(x_i)$	0,04	0,16	0,32	0,68	0,88	0,96	1

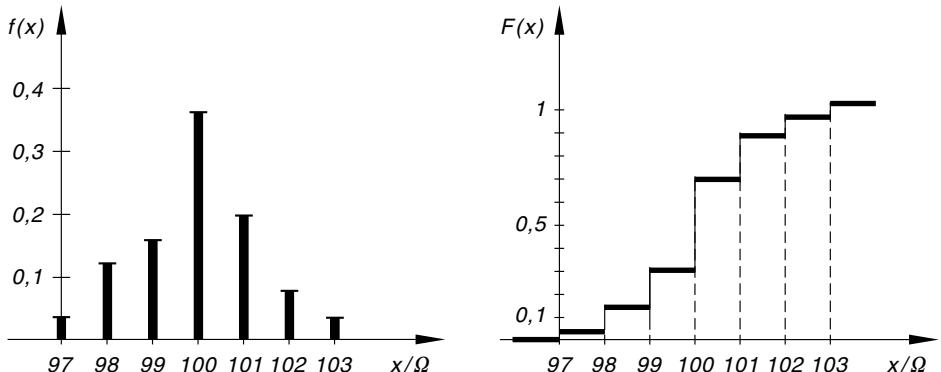


Bild A-35 Stabdiagramm (linkes Bild) und Verteilungskurve (rechtes Bild)

- c) Verteilung (*Stabdiagramm* und *Verteilungskurve*: Bild A-36)

$\frac{x_i}{\mu F}$	10,1	10,2	10,3	10,4	10,5
$f(x_i)$	0,12	0,22	0,38	0,18	0,10
$F(x_i)$	0,12	0,34	0,72	0,90	1

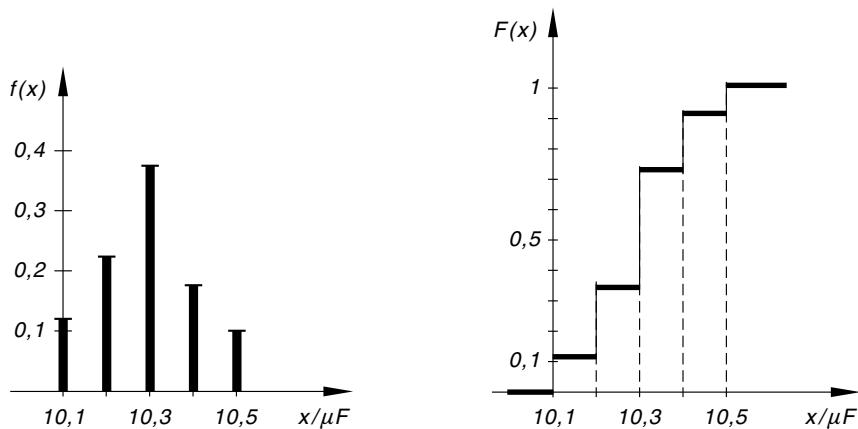


Bild A-36 Stabdiagramm (linkes Bild) und Verteilungskurve (rechtes Bild)

- 3) Verteilung (Stabdiagramm und Verteilungskurve: Bild A-37)

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	0,204	0,176	0,160	0,130	0,180	0,150
$F(x_i)$	0,204	0,380	0,540	0,670	0,850	1

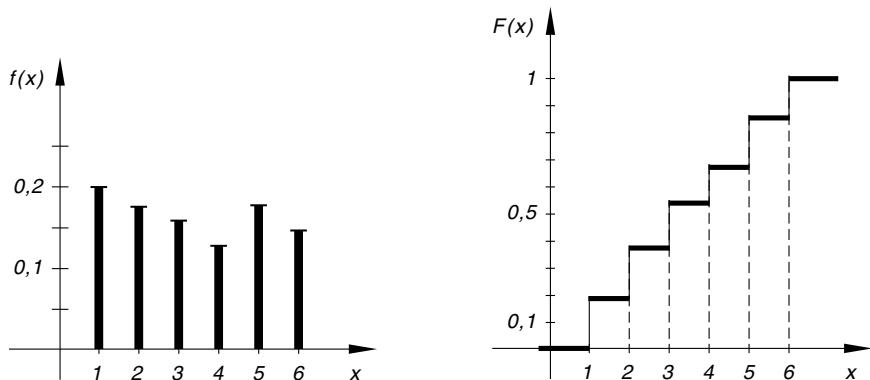


Bild A-37 Stabdiagramm (linkes Bild) und Verteilungskurve (rechtes Bild)

4) a)

$x_i$	0	1	2	3
$f(x_i)$	0,100	0,410	0,365	0,125
$F(x_i)$	0,100	0,510	0,875	1

b) Stabdiagramm und Verteilungskurve: Bild A-38

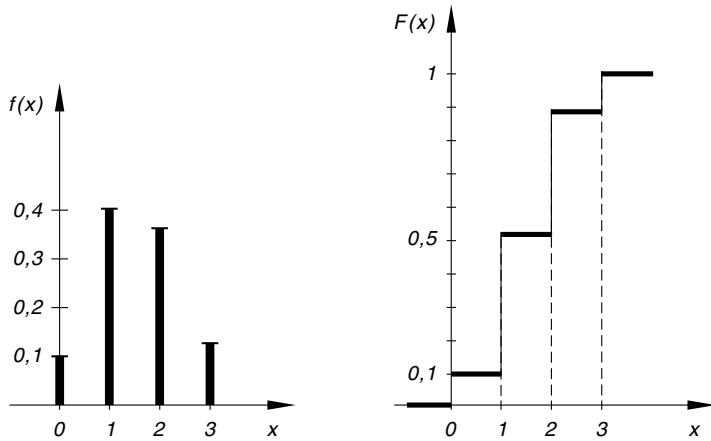


Bild A-38 Stabdiagramm (linkes Bild) und Verteilungskurve (rechtes Bild)

c)  $\frac{82 + 73}{200} = \frac{155}{200} = 0,775 = 77,5\%$

5) a)

Klasse $i$	1	2	3	4	5	6	7
$\tilde{x}_i/h$	425	475	525	575	625	675	725
$n_i$	3	11	20	23	14	7	2
$f(\tilde{x}_i)$	0,0375	0,1375	0,25	0,2875	0,175	0,0875	0,025
$F(\tilde{x}_i)$	0,0375	0,175	0,425	0,7125	0,8875	0,975	1

b) Lebensdauer  $X \leq 500$  h:

$$14/80 = 17,5\%$$

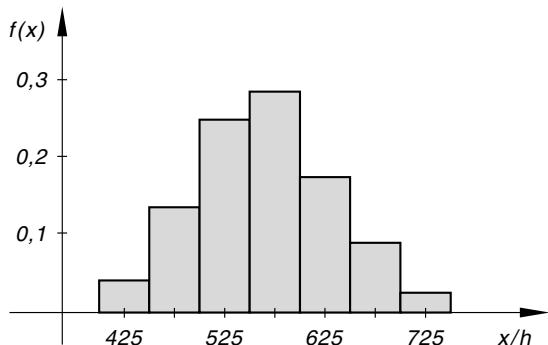
Lebensdauer  $X > 600$  h:

$$23/80 = 28,8\%$$

c) Histogramm:

Bild A-39

Bild A-39

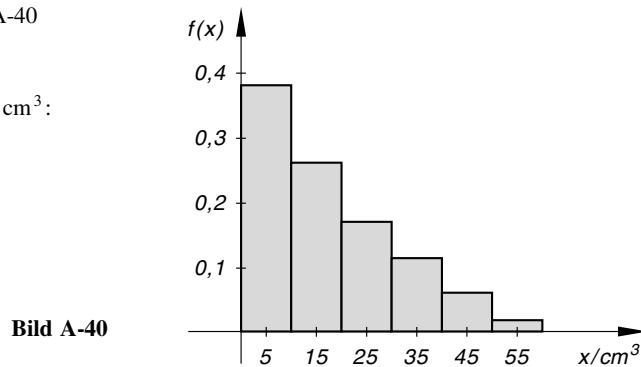


6)	a)	Klasse $i$	1	2	3	4	5	6
		$\tilde{x}_i/\text{cm}^3$	5	15	25	35	45	55
		$n_i$	38	26	17	11	6	2
		$f(\tilde{x}_i)$	0,38	0,26	0,17	0,11	0,06	0,02
		$F(\tilde{x}_i)$	0,38	0,64	0,81	0,92	0,98	1,00

b) Histogramm: Bild A-40

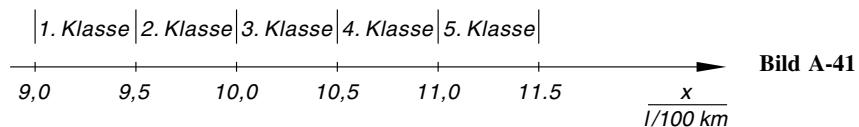
c) Fehlmenge  $X > 20 \text{ cm}^3$ :

$$36/100 = 36\%$$



7) a) Kleinster Wert: 9,0    Größter Wert: 11,4    Spannweite: 2,4

Unterteilung in 5 Klassen der Breite 0,5 nach Bild A-41:



Klassen Nr. $i$	Klassengrenzen (in 1/100 km)	Klassenmitte (in 1/100 km)	$n_i$	$h_i$
1	9,0 ... 9,5	9,25	4	0,10
2	9,5 ... 10,0	9,75	6	0,15
3	10,0 ... 10,5	10,25	18	0,45
4	10,5 ... 11,0	10,75	10	0,25
5	11,0 ... 11,5	11,25	2	0,05
$\sum$			40	1

Hinweis: Die mehrfach auftretenden Werte 10,0 und 10,5 sind Klassengrenzen und wurden daher je zur Hälfte den angrenzenden Klassen (Intervallen) zugeschlagen.

b) Histogramm: Bild A-42

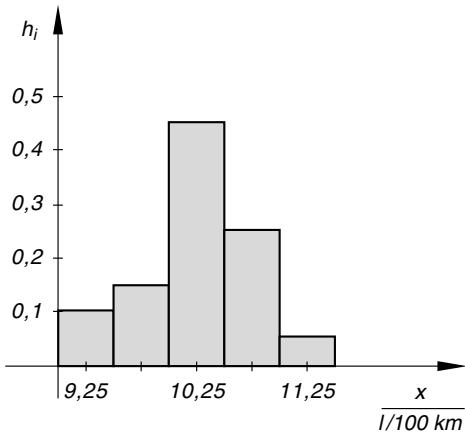


Bild A-42

## Abschnitt 2

**Hinweis:**  $n =$  Stichprobenumfang;  $k =$  Anzahl der verschiedenen Werte in der Stichprobe

$$1) \quad n = 10; \quad k = 6; \quad \bar{x} = \frac{1}{10} \cdot \sum_1^6 n_i x_i = \frac{1}{10} (1 + 2 + 6 + 12 + 5 + 12) = 3,8$$

$$s^2 = \frac{1}{10 - 1} \cdot \sum_1^6 n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{9} [1(1 - 3,8)^2 + 1(2 - 3,8)^2 + 2(3 - 3,8)^2 + \\ + 3(4 - 3,8)^2 + 1(5 - 3,8)^2 + 2(6 - 3,8)^2] = 2,622; \quad s = 1,619$$

$$2) \quad a) \quad n = 20; \quad k = 6;$$

$$\bar{x} = \sum_1^6 x_i \cdot f(x_i) = 1,985 + 5,97 + 7,98 + 12 + 8,02 + 4,02 = 39,975$$

$$s^2 = \frac{20}{20 - 1} \left( \sum_1^6 x_i^2 \cdot f(x_i) - \bar{x}^2 \right) = \frac{20}{19} (78,8045 + 237,606 + 318,402 + 480 +$$

$$+ 321,602 + 161,604 - 39,975^2) = 0,0188; \quad s = 0,1372$$

$$b) \quad n = 25; \quad k = 7; \quad \bar{x} = \sum_1^7 x_i \cdot f(x_i) = 99,96 \Omega$$

$$s^2 = \frac{25}{25 - 1} \left( \sum_1^7 x_i^2 \cdot f(x_i) - \bar{x}^2 \right) = \frac{25}{24} (9993,88 - 99,96^2) \Omega^2 = 1,957 \Omega^2$$

$$s = 1,399 \Omega$$

$$c) \quad n = 50; \quad k = 5; \quad \bar{x} = \sum_1^5 x_i \cdot f(x_i) = 10,292 \mu F$$

$$s^2 = \frac{50}{50 - 1} \left( \sum_1^5 x_i^2 \cdot f(x_i) - \bar{x}^2 \right) = \frac{50}{49} (105,938 - 10,292^2) (\mu F)^2 = 0,013 (\mu F)^2$$

$$s = 0,114 \mu F$$

$$3) \quad n = 500; \quad k = 6; \quad \bar{x} = \sum_1^6 x_i \cdot f(x_i) = 3,356$$

$$s^2 = \frac{500}{500 - 1} \left( \sum_1^6 x_i^2 \cdot f(x_i) - \bar{x}^2 \right) = \frac{500}{499} (14,328 - 3,356^2) = 3,0714; \quad s = 1,7525$$

i	$x_i$	$f(x_i)$	$x_i \cdot f(x_i)$	$x_i^2 \cdot f(x_i)$	$\bar{x} = \sum_1^4 x_i \cdot f(x_i) = 1,515$
1	0	0,1	0	0	$s^2 = \frac{200}{200 - 1} \left( \sum_1^4 x_i^2 \cdot f(x_i) - \bar{x}^2 \right) =$
2	1	0,410	0,410	0,410	
3	2	0,365	0,730	1,460	
4	3	0,125	0,375	1,125	$= \frac{200}{199} (2,995 - 1,515^2) = 0,7033$
$\sum$		1	1,515	2,995	$s = 0,8386$

$$5) \quad n = 80; \quad k = 7; \quad \bar{x} = \sum_1^7 \tilde{x}_i \cdot f(\tilde{x}_i) = 564,375 \text{ h}$$

$$s^2 = \frac{80}{80 - 1} \left( \sum_1^7 \tilde{x}_i^2 \cdot f(\tilde{x}_i) - \bar{x}^2 \right) = \frac{80}{79} (323\,125 - 564,375^2) \text{ h}^2 = 4664,161 \text{ h}^2$$

$$s = 68,295 \text{ h}$$

$$6) \quad n = 100; \quad k = 6; \quad \bar{x} = \sum_1^6 \tilde{x}_i \cdot f(\tilde{x}_i) = 17,7 \text{ cm}^3$$

$$s^2 = \frac{100}{100 - 1} \left( \sum_1^6 \tilde{x}_i^2 \cdot f(\tilde{x}_i) - \bar{x}^2 \right) = \frac{100}{99} (491 - 17,7^2) \text{ cm}^6 = 179,51 \text{ cm}^6$$

$$s = 13,40 \text{ cm}^3$$

7)  $\tilde{x}_i$ : Klassenmitte     $n_i$ : Klassenhäufigkeit

$\tilde{x}_i$	9,25	9,75	10,25	10,75	11,25
$n_i$	4	6	18	10	2
$f(\tilde{x}_i)$	0,1	0,15	0,45	0,25	0,05

$$n = 40; \quad k = 5; \quad \bar{x} = \sum_1^5 \tilde{x}_i \cdot f(\tilde{x}_i) = 10,25 \text{ l}/100 \text{ km}$$

$$s^2 = \frac{40}{40 - 1} \left( \sum_1^5 \tilde{x}_i^2 \cdot f(\tilde{x}_i) - \bar{x}^2 \right) = \frac{40}{39} (105,3125 - 10,25^2) (1/100 \text{ km})^2 =$$

$$= 0,256 (1/100 \text{ km})^2; \quad s = 0,506 \text{ l}/100 \text{ km}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad S'(c) &= 2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - c) (-1) = -2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - c) = -2 \left( \sum_{i=1}^n x_i - nc \right) \\
 S''(c) &= 2n; \quad S'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i - nc = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x} \\
 S''(\bar{x}) &= 2n > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum}
 \end{aligned}$$

### Abschnitt 3

**Hinweis:** Die benötigten Quantile wurden den Tabellen 1 bis 4 im Anhang (Teil A) entnommen.

- 1) *Likelihood-Funktion* (mit  $z = t_1 + t_2 + \dots + t_n$ ):

$$L(\lambda) = f(t_1; \lambda) \cdot f(t_2; \lambda) \cdot \dots \cdot f(t_n; \lambda) = \lambda^n \cdot e^{-\lambda(t_1+t_2+\dots+t_n)} = \lambda^n \cdot e^{-\lambda z}$$

$$L^*(\lambda) = \ln L(\lambda) = \ln(\lambda^n \cdot e^{-\lambda z}) = \ln \lambda^n + \ln e^{-\lambda z} = n \cdot \ln \lambda - \lambda z$$

Aus der Bedingung  $\frac{dL^*}{d\lambda} = 0$  erhält man den gesuchten *Schätzwert*:

$$\frac{dL^*}{d\lambda} = n \cdot \frac{1}{\lambda} - z = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\lambda} = \frac{n}{z} = \frac{n}{t_1 + t_2 + \dots + t_n} = \frac{1}{\bar{t}}$$

$\bar{t}$  ist der *Mittelwert* der Stichprobe.

$$2) \quad \bar{t} = \frac{1}{8} \cdot \sum_1^8 t_i = \frac{1}{8} \cdot 2112 \text{ h} = 264 \text{ h}; \quad \lambda \approx \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{t}} = \frac{1}{264 \text{ h}} \approx 0,003788 \text{ h}^{-1}$$

$$3) \quad \bar{x} = \frac{1}{6} \cdot \sum_1^6 x_i = \frac{1}{6} \cdot 888 \text{ h}^{-1} = 148 \text{ h}^{-1}; \quad \mu \approx \hat{\mu} = \bar{x} = 148 \text{ h}^{-1}$$

- 4) a)  $\sigma^2$  ist bekannt ( $\sigma^2 = 9$ )  $\Rightarrow$  Standardnormalverteilung

$$P(-c \leq U \leq c) = 2 \cdot \phi(c) - 1 = \gamma = 0,95 \quad \Rightarrow$$

$$\phi(c) = 0,975 \rightarrow c = u_{0,975} = 1,960 \quad (\text{aus Tab. 2})$$

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \cdot \sum_1^{10} x_i = \frac{1}{10} \cdot 1407 = 140,7; \quad \sigma = 3; \quad n = 10$$

$$\text{Schranke: } k = c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,86; \quad \text{Vertrauensintervall: } 138,84 \leq \mu \leq 142,56$$

- b)  $\sigma^2$  ist unbekannt  $\Rightarrow$  t-Verteilung

$$P(-c \leq T \leq c) = 2 \cdot F(c) - 1 = \gamma = 0,95 \quad \Rightarrow$$

$$F(c) = 0,975 \xrightarrow{f=n-1=9} c = t_{(0,975; 9)} = 2,262 \quad (\text{aus Tab. 4})$$

$$\bar{x} = 140,7; \quad s^2 = \frac{1}{10-1} \cdot \sum_1^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{9} \cdot 1260,1 = 140,011; \quad s = 11,833$$

$$n = 10; \quad \text{Schranke: } k = c \frac{s}{\sqrt{n}} = 8,46; \quad \text{Vertrauensintervall: } 132,24 \leq \mu \leq 149,16$$

- 5)  $\sigma^2$  ist unbekannt  $\Rightarrow$  t-Verteilung:

$$P(-c \leq T \leq c) = 2 \cdot F(c) - 1 = \gamma = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95 \quad \Rightarrow$$

$$F(c) = 0,975 \xrightarrow{f=n-1=99 \approx 100} c = t_{(0,975; 99)} \approx t_{(0,975; 100)} = 1,984 \quad (\text{aus Tab. 4})$$

$$\bar{x} = 0,620 \text{ cm}; \quad s = 0,035 \text{ cm}; \quad n = 100; \quad \text{Schranke: } k = c \frac{s}{\sqrt{n}} = 0,007 \text{ cm}$$

Vertrauensgrenzen: 0,613 cm bzw. 0,627 cm

Vertrauensintervall:  $0,613 \text{ cm} \leq \mu \leq 0,627 \text{ cm}$

*Hinweis:* Da es sich hier um eine *umfangreiche* Stichprobe handelt (die Faustregel  $n > 30$  ist erfüllt:  $n = 100 > 30$ ), darf man  $\sigma \approx s = 0,035 \text{ cm}$  annehmen und die *Standardnormalverteilung* verwenden. Man erhält dann das gleiche Vertrauensintervall.

- 6) a) Vertrauensintervall für den *Mittelwert*  $\mu$  ( $\sigma^2$  ist unbekannt, daher *t*-Verteilung):

$$P(-c \leq T \leq c) = 2 \cdot F(c) - 1 = \gamma = 0,99 \Rightarrow$$

$$F(c) = 0,995 \xrightarrow{f=n-1=9} c = t_{(0,995;9)} = 3,250 \quad (\text{aus Tab. 4})$$

$$\bar{x} = 102; \quad s^2 = 16; \quad s = 4; \quad n = 10; \quad \text{Schranke: } k = c \frac{s}{\sqrt{n}} = 4,11$$

Vertrauensintervall:  $97,89 \leq \mu \leq 106,11$

- b) Vertrauensintervall für die *Varianz*  $\sigma^2$  (Chi-Quadratverteilung, Tabelle 3):

$$P(c_1 \leq Z \leq c_2) = \gamma = 0,99 \Rightarrow$$

$$F(c_1) = \frac{1}{2} (1 - \gamma) = \frac{1}{2} (1 - 0,99) = 0,005 \xrightarrow{f=n-1=9} c_1 = z_{(0,005;9)} = 1,73$$

$$F(c_2) = \frac{1}{2} (1 + \gamma) = \frac{1}{2} (1 + 0,99) = 0,995 \xrightarrow{f=n-1=9} c_2 = z_{(0,995;9)} = 23,59$$

$$s^2 = 16; \quad n = 10$$

$$\text{Schranken: } k_1 = \frac{(n-1)s^2}{c_2} = 6,10; \quad k_2 = \frac{(n-1)s^2}{c_1} = 83,24$$

Vertrauensintervall:  $6,10 \leq \sigma^2 \leq 83,24$

- 7) a) Vertrauensintervall für den *Mittelwert*  $\mu$  ( $\sigma^2$  ist unbekannt, daher *t*-Verteilung):

$$P(-c \leq T \leq c) = 2 \cdot F(c) - 1 = \gamma = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95 \Rightarrow$$

$$F(c) = 0,975 \xrightarrow{f=n-1=7} c = t_{(0,975;7)} = 2,365 \quad (\text{aus Tab. 4})$$

$$\bar{x} = \frac{1}{8} \cdot \sum_1^8 x_i = \frac{1}{8} \cdot 796 \text{ PS} = 99,5 \text{ PS}$$

$$s^2 = \frac{1}{8-1} \cdot \sum_1^8 (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{7} \cdot 32,84 \text{ (PS)}^2 = 4,6914 \text{ (PS)}^2; \quad s = 2,166 \text{ PS}$$

$$n = 8; \quad \text{Schranke: } k = c \frac{s}{\sqrt{n}} = 1,81 \text{ PS}$$

Vertrauensintervall:  $97,69 \text{ PS} \leq \mu \leq 101,31 \text{ PS}$

- b) Vertrauensintervall für die *Varianz*  $\sigma^2$  (Chi-Quadratverteilung, Tabelle 3):

$$P(c_1 \leq Z \leq c_2) = \gamma = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95 \Rightarrow$$

$$F(c_1) = \frac{1}{2} (1 - \gamma) = \frac{1}{2} (1 - 0,95) = 0,025 \xrightarrow{f=n-1=7} c_1 = z_{(0,025;7)} = 1,69$$

$$F(c_2) = \frac{1}{2} (1 + \gamma) = \frac{1}{2} (1 + 0,95) = 0,975 \xrightarrow{f=n-1=7} c_2 = z_{(0,975;7)} = 16,01$$

$$s^2 = 4,6914 \text{ (PS)}^2; \quad n = 8$$

$$\text{Schranken: } k_1 = \frac{(n-1)s^2}{c_2} = 2,05 \text{ (PS)}^2; \quad k_2 = \frac{(n-1)s^2}{c_1} = 19,43 \text{ (PS)}^2$$

Vertrauensintervall:  $2,05 \text{ (PS)}^2 \leq \sigma^2 \leq 19,43 \text{ (PS)}^2$

- 8) a) Vertrauensintervall für den Mittelwert  $\mu$  ( $\sigma^2$  ist unbekannt, daher  $t$ -Verteilung):

$$P(-c \leq T \leq c) = 2 \cdot F(c) - 1 = \gamma = 0,95 \Rightarrow$$

$$F(c) = 0,975 \xrightarrow{f=n-1=15} c = t_{(0,975; 15)} = 2,131 \quad (\text{aus Tab. 4})$$

$$\bar{x} = 12,54 \text{ kN}; \quad s = 1,02 \text{ kN}; \quad n = 16; \quad \text{Schranke: } k = c \frac{s}{\sqrt{n}} = 0,54 \text{ kN}$$

$$\text{Vertrauensintervall: } 12,00 \text{ kN} \leq \mu \leq 13,08 \text{ kN}$$

- b) Vertrauensintervall für die Varianz  $\sigma^2$  (Chi-Quadratverteilung, Tabelle 3):

$$P(c_1 \leq Z \leq c_2) = \gamma = 0,95 \Rightarrow$$

$$F(c_1) = \frac{1}{2} (1 - \gamma) = \frac{1}{2} (1 - 0,95) = 0,025 \xrightarrow{f=n-1=15} c_1 = z_{(0,025; 15)} = 6,26$$

$$F(c_2) = \frac{1}{2} (1 + \gamma) = \frac{1}{2} (1 + 0,95) = 0,975 \xrightarrow{f=n-1=15} c_2 = z_{(0,975; 15)} = 27,49$$

$$s^2 = 1,0404 \text{ (kN)}^2; \quad n = 16$$

$$\text{Schranken: } k_1 = \frac{(n-1)s^2}{c_2} = 0,568 \text{ (kN)}^2; \quad k_2 = \frac{(n-1)s^2}{c_1} = 2,493 \text{ (kN)}^2$$

$$\text{Vertrauensintervall: } 0,568 \text{ (kN)}^2 \leq \sigma^2 \leq 2,493 \text{ (kN)}^2$$

- 9)  $t$ -Verteilung ( $\sigma^2$  ist unbekannt):  $P(-c \leq T \leq c) = 2 \cdot F(c) - 1 = \gamma = 0,99 \Rightarrow$

$$F(c) = 0,995 \xrightarrow{f=n-1=19} c = t_{(0,995; 19)} = 2,861 \quad (\text{aus Tab. 4})$$

$$\bar{x} = \frac{1}{20} \cdot \sum_1^6 n_i x_i = \frac{1}{20} \cdot 156,32 \text{ g/cm}^3 = 7,816 \text{ g/cm}^3$$

$$s^2 = \frac{1}{20-1} \cdot \sum_1^6 n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{19} \cdot 0,007\,080 \text{ g}^2/\text{cm}^6 = 0,000\,373 \text{ g}^2/\text{cm}^6$$

$$s = 0,0193 \text{ g/cm}^3; \quad n = 20; \quad \text{Schranke: } k = c \frac{s}{\sqrt{n}} = 0,012 \text{ g/cm}^3$$

$$\text{Vertrauensintervall: } 7,804 \text{ g/cm}^3 \leq \mu \leq 7,828 \text{ g/cm}^3$$

- 10) a)  $k = 27; \quad n = 500; \quad \text{Schätzwert: } \hat{p} = k/n = 27/500 = 0,054$

Die Bedingung (III-138) für eine umfangreiche Stichprobe ist erfüllt:

$$\Delta = n\hat{p}(1 - \hat{p}) = 500 \cdot 0,054(1 - 0,054) = 25,542 > 9$$

$$P(-c \leq U \leq c) = 2 \cdot \phi(c) - 1 = \gamma = 0,95 \Rightarrow$$

$$\phi(c) = 0,975 \rightarrow c = u_{0,975} = 1,960 \quad (\text{aus Tab. 2})$$

$$\text{Schranke: } k = \frac{c}{n} \sqrt{\Delta} = 0,020; \quad \text{Vertrauensintervall: } 0,034 \leq p \leq 0,074$$

$$\text{b) } P(-c \leq U \leq c) = 2 \cdot \phi(c) - 1 = \gamma = 0,99 \Rightarrow$$

$$\phi(c) = 0,995 \rightarrow c = u_{0,995} = 2,576 \quad (\text{aus Tab. 2})$$

$$\text{Schranke: } k = \frac{c}{n} \sqrt{\Delta} = 0,026; \quad \text{Vertrauensintervall: } 0,028 \leq p \leq 0,080$$

- 11)  $k = 55; \quad n = 100; \quad \text{Schätzwert: } \hat{p} = k/n = 55/100 = 0,55$

Die Bedingung (III-138) für eine umfangreiche Stichprobe ist erfüllt:

$$\Delta = n\hat{p}(1 - \hat{p}) = 100 \cdot 0,55(1 - 0,55) = 24,75 > 9$$

$$P(-c \leq U \leq c) = 2 \cdot \phi(c) - 1 = \gamma = 1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99 \Rightarrow$$

$$\phi(c) = 0,995 \rightarrow c = u_{0,995} = 2,576 \quad (\text{aus Tab. 2})$$

$$\text{Schranke: } k = \frac{c}{n} \sqrt{\Delta} = 0,128; \quad \text{Vertrauensintervall: } 0,422 \leq p \leq 0,678$$

- 12)  $k = 68; n = 100; \text{ Sch\"atzwert: } \hat{p} = k/n = 68/100 = 0,68$

Die Bedingung (III-138) f\"ur eine *umfangreiche* Stichprobe ist erf\"ullt:

$$\Delta = n\hat{p}(1 - \hat{p}) = 100 \cdot 0,68(1 - 0,68) = 21,76 > 9$$

$$P(-c \leq U \leq c) = 2 \cdot \phi(c) - 1 = \gamma = 0,95 \Rightarrow$$

$$\phi(c) = 0,975 \rightarrow c = u_{0,975} = 1,960 \quad (\text{aus Tab. 2})$$

$$\text{Schranke: } k = \frac{c}{n} \sqrt{\Delta} = 0,091; \quad \text{Vertrauensintervall: } 0,589 \leq p \leq 0,771$$

- 13) Wir d\"urfen wegen der *umfangreichen* Stichprobe ( $n = 100$ ) davon ausgehen, dass die Masse  $X$  *nahezu normalverteilt* ist.

- a) Vertrauensintervall f\"ur den *Mittelwert*  $\mu$  ( $\sigma^2$  ist unbekannt, daher *t*-Verteilung):

$$P(-c \leq T \leq c) = 2 \cdot F(c) - 1 = \gamma = 0,95 \Rightarrow$$

$$F(c) = 0,975 \xrightarrow{f=n-1=99 \approx 100} c = t_{(0,975; 99)} \approx t_{(0,975; 100)} = 1,984 \quad (\text{aus Tab. 4})$$

$$\bar{x} = 5,43 \text{ g}; \quad s = 0,30 \text{ g}; \quad n = 100; \quad \text{Schranke: } k = c \frac{s}{\sqrt{n}} = 0,060 \text{ g}$$

$$\text{Vertrauensintervall: } 5,370 \text{ g} \leq \mu \leq 5,490 \text{ g}$$

*Hinweis:* Da es sich hier um eine *umfangreiche* Stichprobe handelt (die Faustregel  $n > 30$  ist erf\"ullt:  $n = 100 > 30$ ), darf man  $\sigma^2 \approx s^2 = 0,09 \text{ g}^2$  annehmen und die *Standardnormalverteilung* verwenden. Man erh\"alt das gleiche Vertrauensintervall.

- b) Vertrauensintervall f\"ur die *Varianz*  $\sigma^2$  (Chi-Quadrat-Verteilung, Tabelle 3):

$$P(c_1 \leq Z \leq c_2) = \gamma = 0,95 \Rightarrow$$

$$F(c_1) = \frac{1}{2} (1 - \gamma) = \frac{1}{2} (1 - 0,95) = 0,025 \xrightarrow{f=n-1=99} c_1 = z_{(0,025; 99)} = 73,34$$

$$F(c_2) = \frac{1}{2} (1 + \gamma) = \frac{1}{2} (1 + 0,95) = 0,975 \xrightarrow{f=n-1=99} c_2 = z_{(0,975; 99)} = 128,45$$

(interpolierte Werte, Tab. 3);  $s^2 = 0,09 \text{ g}^2; \quad n = 100$

$$\text{Schranken: } k_1 = \frac{(n-1)s^2}{c_2} = 0,069 \text{ g}^2; \quad k_2 = \frac{(n-1)s^2}{c_1} = 0,121 \text{ g}^2$$

$$\text{Vertrauensintervall: } 0,069 \text{ g}^2 \leq \sigma^2 \leq 0,121 \text{ g}^2$$

- c) Vertrauensintervall f\"ur die *Standardabweichung*  $\sigma$ :  $0,263 \text{ g} \leq \sigma \leq 0,349 \text{ g}$

## Abschnitt 4

**Hinweis:** Die ben\"otigten Quantile wurden den Tabellen 1 bis 4 im Anhang (Teil A) entnommen.

- 1)  $\sigma^2$  ist *bekannt*  $\Rightarrow$  Standardnormalverteilung

$$P(-c \leq U \leq c)_{H_0} = 2 \cdot \phi(c) - 1 = 1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99 \Rightarrow$$

$$\phi(c) = 0,995 \rightarrow c = u_{0,995} = 2,576 \quad (\text{aus Tab. 2})$$

Annahmebereich:  $-2,576 \leq u \leq 2,576$

$$\bar{x} = 102 \Omega; \sigma^2 = 9 \Omega^2; \sigma = 3 \Omega; \mu_0 = 100 \Omega; n = 10$$

$$\text{Testwert: } \hat{u} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{(102 - 100) \Omega}{(3/\sqrt{10}) \Omega} = 2,108$$

Der Testwert liegt im Annahmebereich, die Nullhypothese  $H_0$  wird daher *beibehalten* (Bild A-43). Wir können davon ausgehen, dass der Sollwert  $\mu_0 = 100 \Omega$  eingehalten wird.

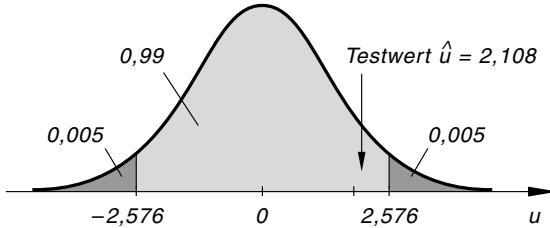


Bild A-43

- 2)  $\sigma^2$  ist bekannt ( $\sigma^2 = 6400 \text{ h}^2$ )  $\Rightarrow$  Standardnormalverteilung; Einseitiger Test (Abgrenzung nach oben):

$$P(U \leq c)_{H_0} = \phi(c) = 1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99 \Rightarrow$$

$$\phi(c) = 0,99 \rightarrow c = u_{0,99} = 2,326 \quad (\text{aus Tab. 2}); \quad \text{Annahmebereich: } u \leq 2,326$$

$$\bar{x} = 1580 \text{ h}; \sigma = 80 \text{ h}; \mu_0 = 1500 \text{ h}; n = 50$$

$$\text{Testwert: } \hat{u} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{(1580 - 1500) \text{ h}}{(80/\sqrt{50}) \text{ h}} = 7,071$$

Die Nullhypothese  $H_0$  wird *abgelehnt*, da der Testwert *außerhalb* des Annahmebereichs liegt (Bild A-44). Wir können davon ausgehen, dass die Materialänderung tatsächlich eine *größere* Lebensdauer der Glühlampen bewirkt.

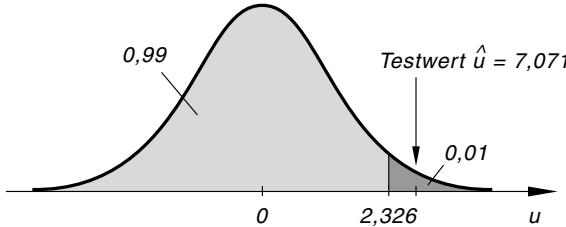


Bild A-44

- 3) Wir testen die Nullhypothese:  $H_0: \mu \geq \mu_0 = 5,20 \text{ kN}$  gegen die Alternativhypothese  $H_1: \mu < \mu_0 = 5,20 \text{ kN}$  (einseitiger Test, Abgrenzung nach unten;  $\sigma^2$  ist unbekannt, daher t-Verteilung):

$$P(T < c)_{H_0} = \alpha = 0,05 < 0,5 \Rightarrow c < 0$$

Wir setzen  $c = -k$  mit  $k > 0$  und bestimmen die Konstante  $k$  aus Bild A-45:

$$P(T \leq k)_{H_0} = F(k) = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95 \Rightarrow$$

$$F(k) = 0,95 \xrightarrow{f=n-1=19} k = t_{(0,95; 19)} = 1,729 \quad (\text{aus Tab. 4}) \Rightarrow c = -k = -1,729$$

Annahmebereich:  $t \geq -1,729$

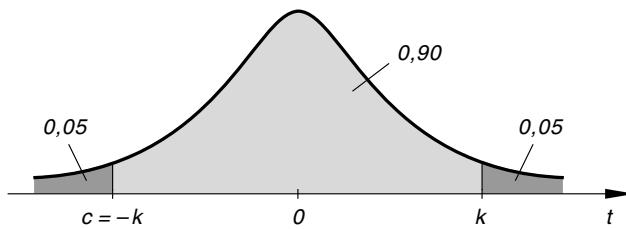


Bild A-45

$$\bar{x} = 5,02 \text{ kN}; \quad s = 0,12 \text{ kN}; \quad n = 20; \quad \mu_0 = 5,20 \text{ kN}$$

$$\text{Testwert: } \hat{t} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{(5,02 - 5,20) \text{ kN}}{(0,12/\sqrt{20}) \text{ kN}} = -6,708$$

Die Nullhypothese  $H_0$  wird *abgelehnt*, da der Testwert *außerhalb* des Annahmebereiches liegt (Bild A-46). Die Zweifel an der Richtigkeit der Herstellerangaben sind *berechtigt*, d. h. man kann davon ausgehen, dass die mittlere Reißlast *kleiner* ist als der angegebene Wert  $\mu_0 = 5,20 \text{ kN}$ .

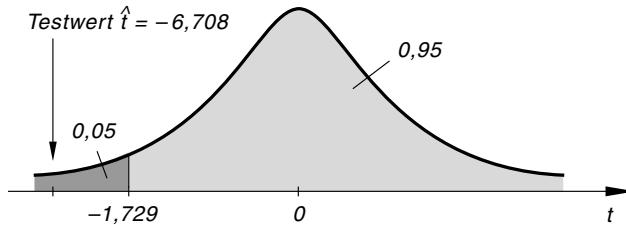


Bild A-46

- 4)  $\sigma^2$  ist *unbekannt*  $\Rightarrow$  *t*-Verteilung

$$P(-c \leq T \leq c)_{H_0} = 2 \cdot F(c) - 1 = 1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99 \Rightarrow$$

$$F(c) = 0,995 \xrightarrow{f=n-1=24} c = t_{(0,995; 24)} = 2,797 \quad (\text{aus Tab. 4})$$

$$\text{Annahmebereich: } -2,797 \leq t \leq 2,797$$

$$\bar{x} = 20,5 \text{ mm}; \quad s = 1,5 \text{ mm}; \quad n = 25; \quad \mu_0 = 21 \text{ mm}$$

$$\text{Testwert: } \hat{t} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{(20,5 - 21) \text{ mm}}{(1,5/\sqrt{25}) \text{ mm}} = -1,667$$

Der Testwert liegt *im* Annahmebereich, die Nullhypothese  $H_0$  wird daher *beibehalten* (Bild A-47). Die Abweichung des Stichprobenmittelwertes  $\bar{x} = 20,5 \text{ mm}$  vom Sollwert  $\mu_0 = 21 \text{ mm}$  ist *nicht signifikant*, sondern *zufallsbedingt*.

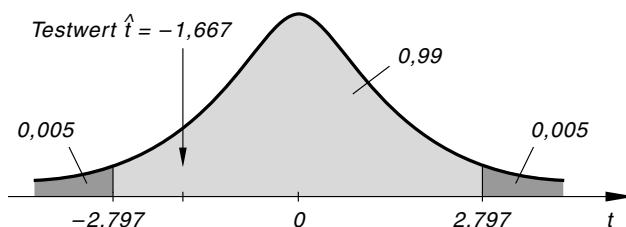


Bild A-47

5) Nullhypothese:  $H_0: \mu = \mu_0 = 8,21/100 \text{ km}$

Alternativhypothese:  $H_1: \mu > \mu_0 = 8,21/100 \text{ km}$

Einseitiger Test (Abgrenzung nach oben;  $\sigma^2$  ist unbekannt, daher t-Verteilung):

$$P(T \leq c)_{H_0} = F(c) = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95 \Rightarrow$$

$$F(c) = 0,95 \xrightarrow{f=n-1=35} c = t_{(0,95; 35)} = 1,690 \quad (\text{aus Tab. 4, interpoliert})$$

Annahmebereich:  $t \leq 1,690$

$$\bar{x} = 9,11/100 \text{ km}; \quad s = 2,31/100 \text{ km}; \quad n = 36; \quad \mu_0 = 8,21/100 \text{ km}$$

$$\text{Testwert: } \hat{t} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{(9,1 - 8,2) 1/100 \text{ km}}{(2,3/\sqrt{36}) 1/100 \text{ km}} = 2,348$$

Der Testwert liegt *außerhalb* des Annahmebereiches, die Nullhypothese wird daher *abgelehnt* (Bild A-48). Folgerung: Die Behauptung des Herstellers kann nicht länger aufrecht gehalten werden. Wir können davon ausgehen, dass der tatsächliche mittlere Benzinverbrauch *größer* ist als vom Hersteller angegeben.

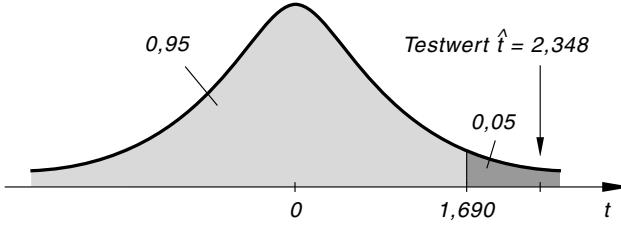


Bild A-48

6) Es handelt sich um *abhängige* Stichproben. Durch *Differenzbildung* erhalten wir die folgende Stichprobe ( $z_i = x_i - y_i$ ):

$i$	1	2	3	4	5
$\frac{z_i}{\Omega}$	2,3	3,3	1,9	0,4	2,2

$$\bar{z} = \frac{1}{5} \cdot \sum_1^5 z_i = \frac{1}{5} \cdot 10,1 \Omega = 2,02 \Omega$$

$$s^2 = \frac{1}{5-1} \cdot \sum_1^5 (z_i - \bar{z})^2 = \frac{1}{4} \cdot 4,388 \Omega^2 = 1,097 \Omega^2; \quad s = 1,0474 \Omega$$

Wir führen einen *zweiseitigen* Test für die Gleichheit der unbekannten Mittelwerte  $\mu_1$  und  $\mu_2$  durch (bei vorausgesetzter Normalverteilung;  $\sigma^2$  ist unbekannt, daher t-Verteilung):

Nullhypothese:  $H_0: \mu = \mu_0 = \mu_1 - \mu_2 = 0$ ; Alternativhypothese:  $H_1: \mu \neq 0$

$$P(-c \leq T \leq c)_{H_0} = 2 \cdot F(c) - 1 = 1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99 \Rightarrow$$

$$F(c) = 0,995 \xrightarrow{f=n-1=4} c = t_{(0,995; 4)} = 4,604 \quad (\text{aus Tab. 4})$$

Annahmebereich:  $-4,604 \leq t \leq 4,604$

$$\bar{z} = 2,02 \Omega; \quad s = 1,0474 \Omega; \quad n = 5; \quad \mu_0 = \mu_1 - \mu_2 = 0 \Omega$$

$$\text{Testwert: } \hat{t} = \frac{\bar{z} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{(2,02 - 0) \Omega}{(1,0474/\sqrt{5}) \Omega} = 4,312$$

Da der Testwert *im* Annahmebereich liegt, wird die Nullhypothese  $H_0$  *beibehalten* (Bild A-49). Aufgrund der verwendeten Stichprobe und des gewählten Signifikanzniveaus  $\alpha = 0,01 = 1\%$  können wir daher von der *Gleichwertigkeit* der beiden Messmethoden ausgehen.

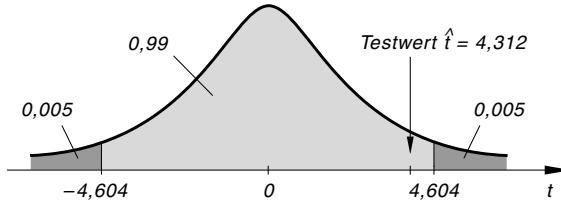


Bild A-49

- 7) Die Stichproben sind voneinander *unabhängig*. Wir führen einen *einseitigen* Test (Abgrenzung nach oben) wie folgt durch:

$$\text{Nullhypothese: } H_0 : \mu_2 \leq \mu_1; \quad \text{Alternativhypothese: } H_1 : \mu_2 > \mu_1$$

Es handelt sich wegen  $n_1 = 100 > 30$  und  $n_2 = 120 > 30$  um *umfangreiche* Stichproben mit  $\sigma_1 \approx s_1$  und  $\sigma_2 \approx s_2$ . Wir dürfen daher die *standardnormalverteilte* Testvariable

$$U = \frac{\bar{Y} - \bar{X}}{\sigma}$$

$$P(U \leq c)_{H_0} = \phi(c) = 1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99 \Rightarrow$$

$$\phi(c) = 0,99 \rightarrow c = u_{0,99} = 2,326 \quad (\text{aus Tab. 2})$$

$$\text{Annahmebereich: } u \leq 2,326$$

$$\bar{x} = 1540 \text{ h}; \quad \bar{y} = 1600 \text{ h}; \quad \sigma_1 \approx s_1 = 142 \text{ h}; \quad \sigma_2 \approx s_2 = 150 \text{ h}$$

$$n_1 = 100; \quad n_2 = 120; \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{142^2}{100} + \frac{150^2}{120}} \text{ h} = 19,727 \text{ h}$$

$$\text{Testwert: } \hat{u} = \frac{\bar{y} - \bar{x}}{\sigma} = \frac{(1600 - 1540) \text{ h}}{19,727 \text{ h}} = 3,042$$

Der Testwert liegt *außerhalb* des Annahmebereiches, die Nullhypothese  $H_0$  wird daher *abgelehnt* (Bild A-50). *Folgerung:* Die im Werk B produzierten Teile haben – wie vermutet – eine *größere* Lebensdauer.

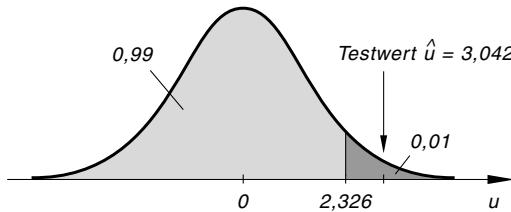


Bild A-50

- 8) Wir testen die Nullhypothese  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  gegen die Alternativhypothese  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$  (Differenzentest mit *unabhängigen* Stichproben und *unbekannten* Varianzen; *t*-Verteilung):

$$P(-c \leq T \leq c)_{H_0} = 2 \cdot F(c) - 1 = 1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99 \Rightarrow$$

$$F(c) = 0,995 \xrightarrow{f=n_1+n_2-2=8} c = t_{(0,995; 8)} = 3,355 \quad (\text{aus Tab. 4})$$

$$\text{Annahmebereich: } -3,355 \leq t \leq 3,355$$

Berechnung der benötigten Mittelwerte und Varianzen ( $n_1 = n_2 = 5$ ):

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$\bar{x} = \frac{1}{5} \cdot \sum_1^5 x_i =$
1	5,98	6,06	35,7604	36,7236	$= \frac{1}{5} \cdot 29,96 = 5,992$
2	6,02	6,08	36,2404	36,9664	
3	6,10	6,12	37,2100	37,4544	$\bar{y} = \frac{1}{5} \cdot \sum_1^5 y_i =$
4	5,82	6,00	33,8724	36,0000	$= \frac{1}{5} \cdot 30,20 = 6,04$
5	6,04	5,94	36,4816	35,2836	
$\sum$	29,96	30,20	179,5648	182,4280	

$$s_1^2 = s_x^2 = \frac{1}{5-1} \left( \sum_1^5 x_i^2 - 5\bar{x}^2 \right) = \frac{1}{4} (179,5648 - 5 \cdot 5,992^2) = 0,01112$$

$$s_2^2 = s_y^2 = \frac{1}{5-1} \left( \sum_1^5 y_i^2 - 5\bar{y}^2 \right) = \frac{1}{4} (182,4280 - 5 \cdot 6,04^2) = 0,005$$

$$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{4 \cdot 0,01112 + 4 \cdot 0,005}{8} = 0,00806; \quad s = 0,0898$$

$$\text{Testwert: } \hat{t} = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \cdot \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s} = \sqrt{\frac{5 \cdot 5}{5+5}} \cdot \frac{5,992 - 6,04}{0,0898} = -0,845$$

Der Testwert liegt im Annahmebereich, die Nullhypothese  $H_0$  wird daher beibehalten (Bild A-51). Folgerung: Die beiden Stichproben stammen aus derselben Grundgesamtheit.

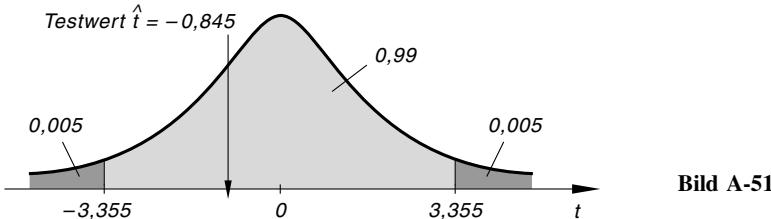


Bild A-51

9) Einseitiger Test (Abgrenzung nach oben; Chi-Quadratverteilung; Tabelle 3):

$$P(Z \leq c)_{H_0} = F(c) = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95 \Rightarrow$$

$$F(c) = 0,95 \xrightarrow{f=n-1=11} c = z_{(0,95;11)} = 19,67; \quad \text{Annahmebereich: } z \leq 19,67$$

$$s = 0,4 \text{ mm}; \quad s^2 = 0,16 \text{ mm}^2; \quad n = 12; \quad \sigma_0^2 = 0,04 \text{ mm}^2$$

$$\text{Testwert: } \hat{z} = (n-1) \frac{s^2}{\sigma_0^2} = (12-1) \frac{0,16 \text{ mm}^2}{0,04 \text{ mm}^2} = 44$$

Der Testwert liegt außerhalb des Annahmebereiches, die Nullhypothese  $H_0$  muss daher abgelehnt werden (Bild A-52). Die Abweichung ist signifikant, die Maschine muss neu eingestellt werden.

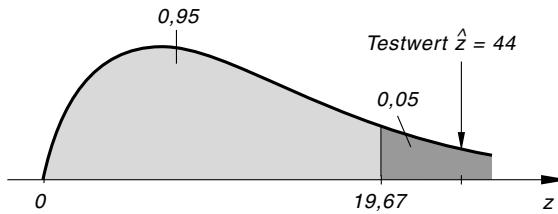


Bild A-52

Für  $\alpha = 1\%$  erhält man den Annahmebereich  $z \leq 24,73$ . Die Entscheidung ist dieselbe.

- 10) Die Bedingung (III-242) für eine *umfangreiche* Stichprobe ist erfüllt:

$$np_0(1 - p_0) = 400 \cdot 0,03(1 - 0,03) = 11,64 > 9$$

Einseitiger Test (Abgrenzung nach oben; die Testvariable  $U$  ist näherungsweise standardnormalverteilt):

$$P(U \leq c)_{H_0} = \phi(c) = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95 \Rightarrow$$

$$\phi(c) = 0,95 \rightarrow c = u_{0,95} = 1,645 \quad (\text{aus Tab. 2})$$

Annahmebereich:  $u \leq 1,645$

$$k = 20; \quad n = 400; \quad \hat{p} = k/n = 20/400 = 0,05; \quad p_0 = 0,03$$

$$\text{Testwert: } \hat{u} = \sqrt{\frac{n}{p_0(1-p_0)}} \cdot (\hat{p} - p_0) = \sqrt{\frac{400}{0,03(1-0,03)}} \cdot (0,05 - 0,03) = 2,345$$

Folgerung: Die Nullhypothese  $H_0$  wird abgelehnt, da der Testwert außerhalb des Annahmebereiches liegt (Bild A-53). Die Stichprobe widerspricht somit der Behauptung des Herstellers, d. h. wir können davon ausgehen, dass der Ausschussanteil größer als 3 % ist.

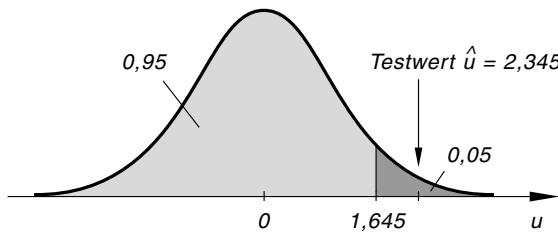


Bild A-53

- 11) Die Bedingung (III-242) für eine *umfangreiche* Stichprobe ist erfüllt:

$$np_0(1 - p_0) = 200 \cdot 0,5(1 - 0,5) = 50 > 9$$

Zweiseitiger Test (die Testvariable  $U$  ist näherungsweise standardnormalverteilt): Wir testen die Nullhypothese  $H_0 : p = p_0 = 0,5$  gegen die Alternativhypothese  $H_1 : p \neq p_0 = 0,5$ .

$$P(-c \leq U \leq c)_{H_0} = 2 \cdot \phi(c) - 1 = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95 \Rightarrow$$

$$\phi(c) = 0,975 \rightarrow c = u_{0,975} = 1,960 \quad (\text{aus Tab. 2})$$

Annahmebereich:  $-1,960 \leq u \leq 1,960$

$$k = 88; \quad n = 200; \quad \hat{p} = k/n = 88/200 = 0,44; \quad p_0 = 0,5$$

$$\text{Testwert: } \hat{u} = \sqrt{\frac{n}{p_0(1-p_0)}} \cdot (\hat{p} - p_0) = \sqrt{\frac{200}{0,5(1-0,5)}} \cdot (0,44 - 0,5) = -1,697$$

*Folgerung:* Die Nullhypothese  $H_0$  wird *beibehalten*, da der Testwert *innerhalb* des Annahmebereiches liegt (Bild A-54). Die Stichprobe steht in *keinem* Widerspruch zu der Annahme, dass der Würfel „*unverfälscht*“ ist.

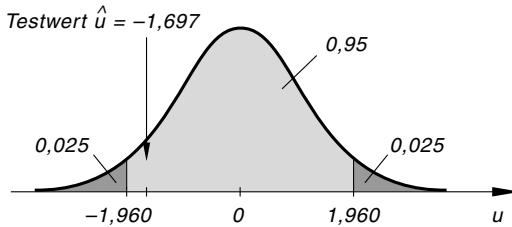


Bild A-54

## Abschnitt 5

**Hinweis:** Die benötigten Quantile wurden den Tabellen 1 bis 4 im Anhang (Teil A) entnommen.

- 1)  $p = p$  (Zahl); Nullhypothese  $H_0$ : Gleichverteilung ( $p = p_0 = 0,5$ )

Klasse $i$	$n_i$	$p_i$	$n_i^* = np_i$	$\Delta n_i = n_i - n_i^*$	$\frac{(\Delta n_i)^2}{n_i^*}$
1 (Zahl)	65	0,5	75	-10	$4/3$
2 (Wappen)	85	0,5	75	10	$4/3$
$\sum$	150	1	150	0	$8/3$

↑  
Testwert

$$P(Z = \chi^2 \leq c)_{H_0} = F(c) = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95 \Rightarrow$$

$$F(c) = 0,95 \xrightarrow{f=k-1=1} c = z_{(0,95;1)} = 3,84 \quad (\text{aus Tab. 3; } k = 2 \text{ Klassen})$$

$$\text{Annahmebereich: } z = \chi^2 \leq 3,84$$

$$\text{Testwert: } \hat{z} = \hat{\chi}^2 = 8/3 = 2,667$$

$H_0$  wird *beibehalten*, da der Testwert *im* Annahmebereich liegt (Bild A-55). Wir können somit bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % „ziemlich sicher“ sein, dass die Münze echt, d. h. unverfälscht ist (die verwendete Stichprobe steht zumindest in *keinem* Widerspruch zu dieser Hypothese).

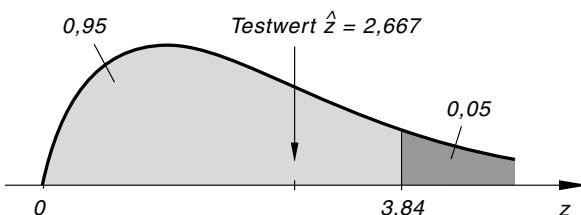


Bild A-55

- 2) Nullhypothese  $H_0$ : Gleichverteilung ( $p_i = p(i) = 1/6$  für  $i = 1, 2, \dots, 6$ )

Klasse $i$	$n_i$	$p_i$	$n_i^* = np_i$	$\Delta n_i = n_i - n_i^*$	$\frac{(\Delta n_i)^2}{n_i^*}$
1	35	1/6	50	-15	225/50
2	39	1/6	50	-11	121/50
3	70	1/6	50	20	400/50
4	62	1/6	50	12	144/50
5	56	1/6	50	6	36/50
6	38	1/6	50	-12	144/50
$\sum$	300	1	300	0	1070/50

↑ Testwert

$$P(Z = \chi^2 \leq c)_{H_0} = F(c) = 1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99 \Rightarrow$$

$$F(c) = 0,99 \xrightarrow{f=k-1=5} c = z_{(0,99;5)} = 15,09 \quad (\text{aus Tab. 3; } k = 6 \text{ Klassen})$$

Annahmebereich:  $z = \chi^2 \leq 15,09$

Testwert:  $\hat{z} = \hat{\chi}^2 = 1070/50 = 21,4$

$H_0$  wird abgelehnt, da der Testwert außerhalb des Annahmebereiches liegt (Bild A-56). Wir können davon ausgehen, dass der Würfel „verfälscht“ ist.

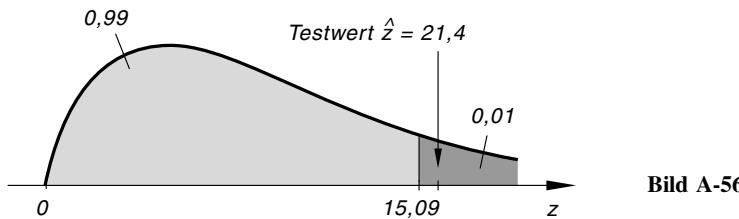


Bild A-56

- 3) Nullhypothese  $H_0$ : Poisson-Verteilung  $f(x) = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu}$

Schätzwert für den unbekannten Parameter (Mittelwert)  $\mu$ :

$$\mu \approx \hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{100} \cdot \sum_1^6 n_i x_i = \frac{1}{100} \cdot 145 = 1,45$$

Wir bilden  $k = 5$  Klassen:  $X = 0, X = 1, X = 2, X = 3$  und  $X \geq 4$

Berechnung der theoretischen Wahrscheinlichkeiten mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$f(x) = \frac{1,45^x}{x!} \cdot e^{-1,45} \quad (x = 0, 1, 2, \dots)$$

$x_i$	0	1	2	3	$\geq 4$
$p_i$	0,2346	0,3401	0,2466	0,1192	0,0595
$f(0)$		$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$1 - \sum_{i=0}^3 f(i)$

Klasse $i$	$n_i$	$p_i$	$n_i^* = np_i$	$\Delta n_i = n_i - n_i^*$	$\frac{(\Delta n_i)^2}{n_i^*}$
1	27	0,2346	23,46	3,54	0,5342
2	31	0,3401	34,01	-3,01	0,2664
3	22	0,2466	24,66	-2,66	0,2869
4	12	0,1192	11,92	0,08	0,0005
5	8	0,0595	5,95	2,05	0,7063
$\sum$	100	1	100	0	1,7943

Testwert  $\uparrow$

$$P(Z = \chi^2 \leq c)_{H_0} = F(c) = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95 \Rightarrow$$

$$F(c) = 0,95 \xrightarrow{f=k-1-r=3} c = z_{(0,95;3)} = 7,81 \quad (\text{aus Tab. 3; } k = 5; r = 1)$$

Annahmebereich:  $z = \chi^2 \leq 7,81$

Testwert:  $\hat{z} = \hat{\chi}^2 = 1,7943$

$H_0$  wird beibehalten, da der Testwert im Annahmebereich liegt (Bild A-57). Die Zufallsvariable  $X$  genügt einer Poisson-Verteilung mit dem (geschätzten) Parameter  $\mu = 1,45$  (zumindest spricht die Stichprobe nicht dagegen).

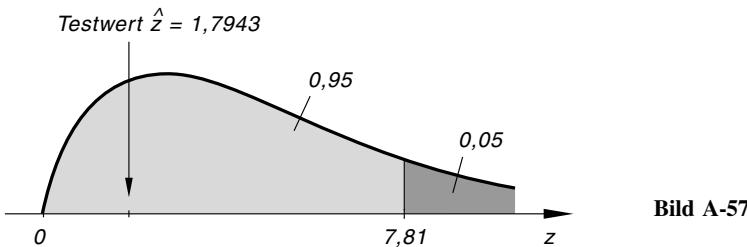


Bild A-57

- 4) Nullhypothese  $H_0 : F_0(x) = \phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$  (Standardnormalverteilung)

Die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  sind unbekannt und werden aus der Stichprobe wie folgt geschätzt:

$i$	$\tilde{x}_i$	$n_i$	$n_i \tilde{x}_i$	$n_i (\tilde{x}_i - \bar{x})^2$	$(\tilde{x}_i, \bar{x} \text{ in l/100 km})$
1	7,75	8	62	8,9888	
2	8,25	20	165	6,2720	
3	8,75	36	315	0,1296	
4	9,25	24	222	4,6464	
5	9,75	12	117	10,6032	
$\sum$		100	881	30,6400	

$$\mu \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_1^5 n_i \tilde{x}_i = \frac{1}{100} \cdot 881 = 8,81 \quad (\text{in l/100 km})$$

$$\sigma^2 \approx s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_1^5 n_i (\tilde{x}_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{99} \cdot 30,6400 = 0,309\,495 \quad (\text{in (l/100 km)}^2)$$

$$\sigma \approx s = 0,5563 \quad (\text{in l/100 km})$$

$$\text{Somit: } F_0(x) = \phi \left( \frac{x - 8,81}{0,5563} \right) \quad (x \text{ in l/100 km})$$

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) mit Hilfe von Tabelle 1:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Klasse: } p_1 &= P(X < 8) = F_0(8) = \phi \left( \frac{8 - 8,81}{0,5563} \right) = \phi(-1,456) = \\ &= 1 - \phi(1,456) = 1 - 0,9273 = 0,0727 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Klasse: } p_2 &= P(8 \leq X < 8,5) = F_0(8,5) - F_0(8) = \phi \left( \frac{8,5 - 8,81}{0,5563} \right) - \phi \left( \frac{8 - 8,81}{0,5563} \right) = \\ &= \phi(-0,557) - \phi(-1,456) = 1 - \phi(0,557) - [1 - \phi(1,456)] = \\ &= \phi(1,456) - \phi(0,557) = 0,9273 - 0,7113 = 0,2160 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ Klasse: } p_3 &= P(8,5 \leq X < 9) = F_0(9) - F_0(8,5) = \\ &= \phi \left( \frac{9 - 8,81}{0,5563} \right) - \phi \left( \frac{8,5 - 8,81}{0,5563} \right) = \phi(0,342) - \phi(-0,557) = \\ &= \phi(0,342) - [1 - \phi(0,557)] = 0,6338 - 1 + 0,7113 = 0,3451 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \text{ Klasse: } p_4 &= P(9 \leq X < 9,5) = F_0(9,5) - F_0(9) = \phi \left( \frac{9,5 - 8,81}{0,5563} \right) - \phi \left( \frac{9 - 8,81}{0,5563} \right) = \\ &= \phi(1,240) - \phi(0,342) = 0,8925 - 0,6338 = 0,2587 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \text{ Klasse: } p_5 &= P(9,5 \leq X \leq 10) = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = \\ &= 1 - (0,0727 + 0,2160 + 0,3451 + 0,2587) = 1 - 0,8925 = 0,1075 \end{aligned}$$

Klasse $i$	$n_i$	$p_i$	$n_i^* = np_i$	$\Delta n_i = n_i - n_i^*$	$\frac{(\Delta n_i)^2}{n_i^*}$
1	8	0,0727	7,27	0,73	0,0733
2	20	0,2160	21,60	-1,60	0,1185
3	36	0,3451	34,51	1,49	0,0643
4	24	0,2587	25,87	-1,87	0,1352
5	12	0,1075	10,75	1,25	0,1453
$\sum$	100	1	100	0	0,5366

Testwert  $\uparrow$

$$P(Z = \chi^2 \leq c)_{H_0} = F(c) = 1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99$$

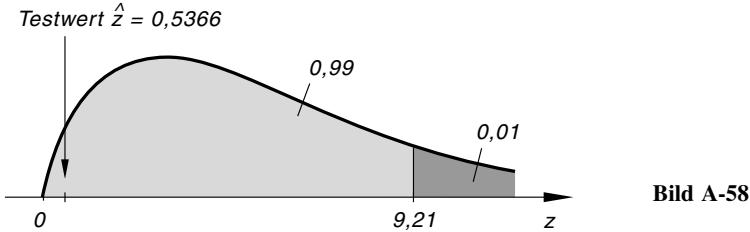
Anzahl der Klassen:  $k = 5$ ; Anzahl der unbekannten Parameter:  $r = 2$

$$F(c) = 0,99 \xrightarrow{f=k-1-r=2} c = z_{(0,99;2)} = 9,21 \quad (\text{aus Tab. 3})$$

Annahmebereich:  $z = \chi^2 \leq 9,21$

Testwert:  $\hat{z} = \hat{\chi}^2 = 0,5366$

$H_0$  wird beibehalten, da der Testwert im Annahmebereich liegt (Bild A-58). Der mittlere Benzinverbrauch  $X$  ist eine normalverteilte Zufallsgröße mit den (geschätzten) Parametern  $\mu = 8,81$  l/100 km und  $\sigma = 0,5563$  l/100 km (das Stichprobenmaterial gibt keinen Anlass, die Hypothese  $H_0$  zu verwerfen).



## Abschnitt 6

1)	a)	$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
		1	2	3	-1	1	1/6	1/36	-1/6
		2	2	2	-1	1	-5/6	25/36	5/6
		3	4	4	1	1	7/6	49/36	7/6
		4	1	2	-2	4	-5/6	25/36	10/6
		5	5	4	2	4	7/6	49/36	14/6
		6	4	2	1	1	-5/6	25/36	-5/6
		$\sum$	18	17	0	12	0	174/36	5

$$\bar{x} = \frac{1}{6} \cdot \sum_1^5 x_i = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3; \quad \bar{y} = \frac{1}{6} \cdot \sum_1^5 y_i = \frac{1}{6} \cdot 17 = \frac{17}{6}$$

$$s_x^2 = \frac{1}{6-1} \cdot \sum_1^5 (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{5} \cdot 12 = 2,4 \Rightarrow s_x = 1,5492$$

$$s_y^2 = \frac{1}{6-1} \cdot \sum_1^5 (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{174}{36} = 0,9667 \Rightarrow s_y = 0,9832$$

$$s_{xy} = \frac{1}{6-1} \cdot \sum_1^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$$

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{1}{1,5492 \cdot 0,9832} = 0,6565$$

Streuungsdiagramm („Punktwolke“): Bild A-59

b) Tabelle erstellen wie in Aufgabe 1 a):

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{1}{5} \cdot 30 = 6; \quad \bar{y} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{i=1}^5 y_i = \frac{1}{5} \cdot 66 = 13,2$$

$$s_x^2 = \frac{1}{5-1} \cdot \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{4} \cdot 40 = 10; \quad s_x = \sqrt{10}$$

$$s_y^2 = \frac{1}{5-1} \cdot \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{4} \cdot 122,8 = 30,7; \quad s_y = 5,5408$$

$$s_{xy} = \frac{1}{5-1} \cdot \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{4} \cdot (-70) = -17,5$$

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{-17,5}{\sqrt{10} \cdot 5,5408} = -0,9988$$

*Streuungsdiagramm („Punktwolke“): Bild A-60*

Die Punkte liegen nahezu auf einer Geraden ( $r \approx -1$ ).

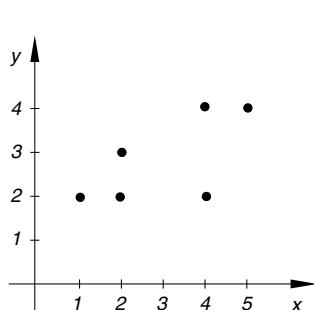


Bild A-59

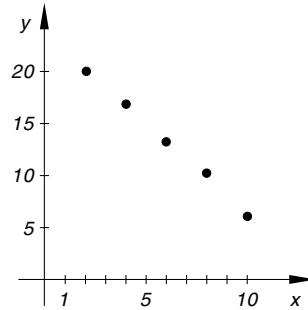


Bild A-60

2) Tabelle erstellen wie in Aufgabe 1 a) ( $x$  in cm;  $y$  in kg):

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{1}{10} \cdot 1721 = 172,1; \quad \bar{y} = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} y_i = \frac{1}{10} \cdot 671 = 67,1$$

$$s_x^2 = \frac{1}{10-1} \cdot \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{9} \cdot 296,9 = 32,9889; \quad s_x = 5,7436$$

$$s_y^2 = \frac{1}{10-1} \cdot \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{9} \cdot 712,9 = 79,2111; \quad s_y = 8,9001$$

$$s_{xy} = \frac{1}{10-1} \cdot \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{9} \cdot 453,9 = 50,4333$$

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{50,4333}{5,7436 \cdot 8,9001} = 0,9866$$

*Streuungsdiagramm: Bild A-61*

3) Tabelle erstellen wie in Aufgabe 1 a) ( $T$  in °C;  $R$  in Ω):

$$\bar{T} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{i=1}^8 T_i = \frac{1}{8} \cdot 370 = 46,25; \quad \bar{R} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{i=1}^8 R_i = \frac{1}{8} \cdot 135,88 = 16,985$$

$$s_T^2 = \frac{1}{8-1} \cdot \sum_1^8 (T_i - \bar{T})^2 = \frac{1}{7} \cdot 317,5 = 448,2143; \quad s_T = 21,1711$$

$$s_R^2 = \frac{1}{8-1} \cdot \sum_1^8 (R_i - \bar{R})^2 = \frac{1}{7} \cdot 2,0286 = 0,2898; \quad s_R = 0,5383$$

$$s_{TR} = \frac{1}{8-1} \cdot \sum_1^8 (T_i - \bar{T})(R_i - \bar{R}) = \frac{1}{7} \cdot 79,6 = 11,3714$$

$$r = \frac{s_{TR}}{s_T \cdot s_R} = \frac{11,3714}{21,1711 \cdot 0,5383} = 0,9978$$

Wegen  $r \approx 1$  besteht zwischen  $R$  und  $T$  ein nahezu *linearer* Zusammenhang.

4)	$i$	$T_i$	$L_i$	$T_i - \bar{T}$	$(T_i - \bar{T})^2$	$L_i - \bar{L}$	$(L_i - \bar{L})^2$	$(T_i - \bar{T})(L_i - \bar{L})$
	1	0	70,8	-50	2500	-48	2304	2400
	2	20	88,4	-30	900	-30,4	924,16	912
	3	40	104,9	-10	100	-13,9	193,21	139
	4	60	124,7	10	100	5,9	34,81	59
	5	80	148,0	30	900	29,2	852,64	876
	6	100	176,0	50	2500	57,2	3271,84	2860
	$\sum$	300	712,8	0	7000	0	7580,66	7246

( $T$  in  $^{\circ}\text{C}$ ;  $L$  in g pro 100 g Wasser)

$$\bar{T} = \frac{1}{6} \cdot \sum_1^6 T_i = \frac{1}{6} \cdot 300 = 50; \quad \bar{L} = \frac{1}{6} \cdot \sum_1^6 L_i = \frac{1}{6} \cdot 712,8 = 118,8$$

$$s_T^2 = \frac{1}{6-1} \cdot \sum_1^6 (T_i - \bar{T})^2 = \frac{1}{5} \cdot 7000 = 1400; \quad s_T = 37,4166$$

$$s_L^2 = \frac{1}{6-1} \cdot \sum_1^6 (L_i - \bar{L})^2 = \frac{1}{5} \cdot 7580,66 = 1516,132; \quad s_L = 38,9375$$

$$s_{TL} = \frac{1}{6-1} \cdot \sum_1^6 (T_i - \bar{T})(L_i - \bar{L}) = \frac{1}{5} \cdot 7246 = 1449,2$$

$$r = \frac{s_{TL}}{s_T \cdot s_L} = \frac{1449,2}{37,4166 \cdot 38,9375} = 0,9947$$

Streuungsdiagramm: Bild A-62

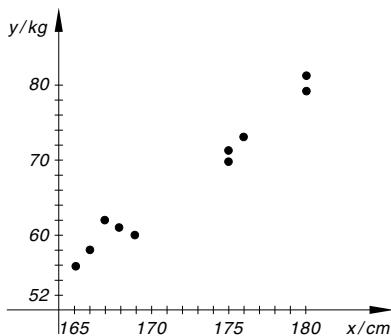


Bild A-61

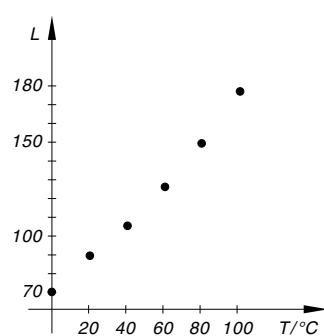


Bild A-62

- 5) Die *Randverteilungen* (Wahrscheinlichkeitsfunktionen von  $X$  und  $Y$ ) sind jeweils *grau* unterlegt.

a)

$X \backslash Y$	-1	1	$\sum$
-1	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
$\sum$	1/2	1/2	

$f_2(y)$

$$\left. \begin{array}{l} E(X) = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0 \\ f_1(x) \\ E(Y) = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0 \end{array} \right\}$$

$$E(X \cdot Y) = -1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{4} - 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$\sigma_{XY} = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = 0 - 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \rho = 0$$

$X$  und  $Y$  sind somit *unkorreliert*.

b)

$X \backslash Y$	0	1	$\sum$
0	1/3	4/15	3/5
1	4/15	2/15	2/5
$\sum$	3/5	2/5	

$f_2(y)$

$$\left. \begin{array}{l} E(X) = 0 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \\ f_1(x) \\ E(Y) = 0 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \end{array} \right\}$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{3}{5} + 1^2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}; \quad E(Y^2) = 0^2 \cdot \frac{3}{5} + 1^2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$E(X \cdot Y) = 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{4}{15} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{4}{15} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{15} = \frac{2}{15}$$

$$\sigma_{XY} = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{2}{15} - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15} - \frac{4}{25} = \frac{10 - 12}{75} = -\frac{2}{75}$$

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} - \frac{4}{25} = \frac{6}{25}; \quad \sigma_x = \frac{1}{5} \sqrt{6}$$

$$\sigma_y^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} - \frac{4}{25} = \frac{6}{25}; \quad \sigma_y = \frac{1}{5} \sqrt{6}$$

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{-\frac{2}{75}}{\left(\frac{1}{5} \sqrt{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{5} \sqrt{6}\right)} = \frac{-\frac{2}{75}}{\frac{6}{25}} = -\frac{2}{75} \cdot \frac{25}{6} = -\frac{1}{9}$$

- 6) Gerade durch die Messpunkte

$P_1 = (0; 3)$  und  $P_2 = (1,5; 6)$ :

$$\frac{y - 3}{x - 0} = \frac{6 - 3}{1,5 - 0} = 2$$

$$y = 2x + 3$$

Die restlichen Messpunkte  $P_3, P_4$  und  $P_5$  liegen ebenfalls auf dieser Geraden:

$$y_3 = 2 \cdot 4 + 3 = 11$$

$$y_4 = 2 \cdot 5 + 3 = 13$$

$$y_5 = 2 \cdot 2,5 + 3 = 8$$

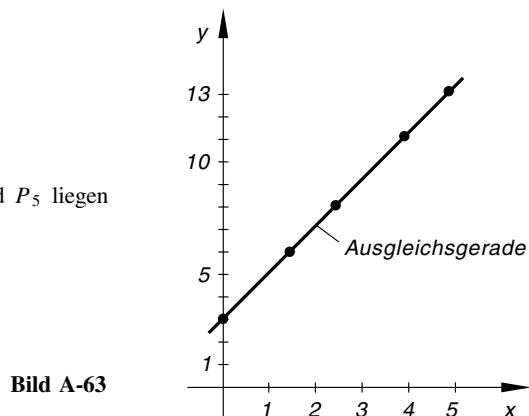


Bild A-63

**Alternative:** Berechnung des Korrelationskoeffizienten

Tabelle erstellen mit den Spalten  $i$ ,  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $x_i - \bar{x}$ ,  $(x_i - \bar{x})^2$ ,  $y_i - \bar{y}$ ,  $(y_i - \bar{y})^2$  und  $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{1}{5} \cdot 13 = 2,6; \quad \bar{y} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{i=1}^5 y_i = \frac{1}{5} \cdot 41 = 8,2$$

$$s_x^2 = \frac{1}{5-1} \cdot \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{4} \cdot 15,7 = 3,925; \quad s_x = 1,9812$$

$$s_y^2 = \frac{1}{5-1} \cdot \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{4} \cdot 62,8 = 15,7; \quad s_y = 3,9623$$

$$s_{xy} = \frac{1}{5-1} \cdot \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{4} \cdot 31,4 = 7,85$$

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{7,85}{1,9812 \cdot 3,9623} = 1$$

Wegen  $r = 1$  liegen sämtliche Messpunkte auf einer Geraden (siehe Bild A-63).

## IV Fehler- und Ausgleichsrechnung

**Hinweis:** Die  $t$ -Werte wurden der Tabelle 1 (Seite 672) entnommen.

### Abschnitt 3

$$1) \quad \bar{U} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^6 U_i = \frac{1}{6} (80,5 + 81,2 + 80,6 + 80,9 + 80,8 + 81,4) \text{ V} = 80,9 \text{ V}$$

$$s_U^2 = \frac{1}{6-1} \cdot \sum_{i=1}^6 (U_i - \bar{U})^2 = \frac{1}{5} (0,16 + 0,09 + 0,09 + 0 + 0,01 + 0,25) \text{ V}^2 = 0,12 \text{ V}^2$$

$$s_U = 0,35 \text{ V}; \quad s_{\bar{U}} = \frac{s_U}{\sqrt{6}} = \frac{0,35 \text{ V}}{\sqrt{6}} = 0,14 \text{ V}$$

$$2) \quad a) \quad \bar{R} = \frac{1}{8} \cdot \sum_1^8 R_i = \frac{1}{8} (115 + 118 + 111 + 112 + 116 + 111 + 114 + 115) \Omega = 114 \Omega$$

$$s_R^2 = \frac{1}{8-1} \cdot \sum_1^8 (R_i - \bar{R})^2 = \frac{1}{7} (1 + 16 + 9 + 4 + 4 + 9 + 0 + 1) \Omega^2 = 6,286 \Omega^2$$

$$s_R = 2,507 \Omega; \quad s_{\bar{R}} = \frac{s_R}{\sqrt{8}} = \frac{2,507 \Omega}{\sqrt{8}} = 0,886 \Omega$$

*Vertrauensintervalle* ( $n = 8$ ;  $t$ -Werte aus Tab. 1):

$$\gamma_1 = 95\% ; \quad t = 2,37 : R = \bar{R} \pm t s_{\bar{R}} = (114 \pm 2,37 \cdot 0,886) \Omega = (114 \pm 2,10) \Omega$$

$$\gamma_2 = 99\% ; \quad t = 3,50 : R = \bar{R} \pm t s_{\bar{R}} = (114 \pm 3,50 \cdot 0,886) \Omega = (114 \pm 3,10) \Omega$$

$$b) \quad \bar{p} = \frac{1}{8} \cdot \sum_1^8 p_i = \frac{1}{8} \cdot 8,09 \text{ bar} = 1,012 \text{ bar}$$

$$s_p^2 = \frac{1}{8-1} \cdot \sum_1^8 (p_i - \bar{p})^2 = \frac{1}{7} \cdot 0,000049 \text{ (bar)}^2 = 0,000007 \text{ (bar)}^2$$

$$s_p = 0,0026 \text{ bar}; \quad s_{\bar{p}} = \frac{s_p}{\sqrt{8}} = \frac{0,0026 \text{ bar}}{\sqrt{8}} = 0,0009 \text{ bar}$$

*Vertrauensintervalle* ( $t$ -Werte wie in a)):

$$\gamma_1 = 95\% : p = \bar{p} \pm t s_{\bar{p}} = (1,012 \pm 2,37 \cdot 0,0009) \text{ bar} = (1,012 \pm 0,002) \text{ bar}$$

$$\gamma_2 = 99\% : p = \bar{p} \pm t s_{\bar{p}} = (1,012 \pm 3,50 \cdot 0,0009) \text{ bar} = (1,012 \pm 0,003) \text{ bar}$$

$$3) \quad \bar{g} = \frac{1}{8} \cdot \sum_1^8 g_i = \frac{1}{8} \cdot 78,48 \text{ m/s}^2 = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$s_g^2 = \frac{1}{8-1} \cdot \sum_1^8 (g_i - \bar{g})^2 = \frac{1}{7} \cdot 0,0028 \text{ m}^2/\text{s}^4 = 0,0004 \text{ m}^2/\text{s}^4$$

$$s_g = 0,02 \text{ m/s}^2; \quad s_{\bar{g}} = \frac{s_g}{\sqrt{8}} = \frac{0,02 \text{ m/s}^2}{\sqrt{8}} = 0,007 \text{ m/s}^2$$

$$a) \quad \gamma_1 = 95\%; \quad n = 8; \quad t = 2,37 \quad (\text{aus Tab. 1})$$

$$\text{Messunsicherheit: } \Delta g = t s_{\bar{g}} = 2,37 \cdot 0,007 \text{ m/s}^2 = 0,017 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Vertrauengrenzen: } \bar{g} \pm \Delta g = (9,81 \pm 0,017) \text{ m/s}^2$$

$$\text{Messergebnis: } g = \bar{g} \pm \Delta g = (9,81 \pm 0,017) \text{ m/s}^2$$

$$b) \quad \gamma_2 = 99\%; \quad n = 8; \quad t = 3,50 \quad (\text{aus Tab. 1})$$

$$\text{Messunsicherheit: } \Delta g = t s_{\bar{g}} = 3,50 \cdot 0,007 \text{ m/s}^2 = 0,025 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Vertrauengrenzen: } \bar{g} \pm \Delta g = (9,81 \pm 0,025) \text{ m/s}^2$$

$$\text{Messergebnis: } g = \bar{g} \pm \Delta g = (9,81 \pm 0,025) \text{ m/s}^2$$

$$4) \quad s_{\bar{R}} = \frac{s_R}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad n \geq \left( \frac{s_R}{s_{\bar{R}}} \right)^2 = \left( \frac{1,4 \Omega}{0,2 \Omega} \right)^2 = 49$$

Es sind also *mindestens* 49 Einzelmessungen durchzuführen.

- 5) Die Masse kann als eine *normalverteilte* Zufallsvariable  $X$  mit dem Mittelwert  $\mu \approx \bar{m} = 105$  und der Standardabweichung  $\sigma \approx s_m = 3$  angesehen werden (beide Werte in g). Wir gehen zur *standardisierten* Zufallsgröße  $U = \frac{X - 105}{3}$  über und berechnen zunächst die benötigten Wahrscheinlichkeiten nach Tabelle 1 im Anhang (Teil A).

$$\text{a)} \quad p_1 = P(103 \leq X \leq 108) = P(-2/3 \leq U \leq 1) = \phi(1) - \phi(-2/3) =$$

$$= \phi(1) - [1 - \phi(2/3)] = 0,8413 - 1 + 0,7476 = 0,5889 \quad \Rightarrow$$

$np_1 = 58,89 \approx 59 \quad \Rightarrow \quad$  Rund 59 Messwerte liegen zwischen 103 g und 108 g.

$$\text{b)} \quad p_2 = P(X > 110) = 1 - P(X \leq 110) = 1 - P(U \leq 5/3) = 1 - \phi(5/3) =$$

$$= 1 - 0,9522 = 0,0478 \quad \Rightarrow \quad np_2 = 4,78 \approx 5 \quad \Rightarrow$$

Rund 5 Messwerte liegen oberhalb von 110 g.

- 6)  $n = 20$  Messwerte, darunter  $k = 5$  verschiedene

$i$	$\frac{T_i}{\text{s}}$	$n_i$	$\frac{n_i T_i}{\text{s}}$	$\frac{T_i - \bar{T}}{\text{s}}$	$\frac{(T_i - \bar{T})^2}{\text{s}^2}$	$\frac{n_i (T_i - \bar{T})^2}{\text{s}^2}$
1	3,8	3	11,4	-0,215	0,046225	0,138675
2	3,9	3	11,7	-0,115	0,013225	0,039675
3	4,0	6	24,0	-0,015	0,000225	0,001350
4	4,1	4	16,4	0,085	0,007225	0,028900
5	4,2	4	16,8	0,185	0,034225	0,136900
$\sum$		20	80,3			0,345500

$$\bar{T} = \frac{1}{20} \cdot \sum_1^5 n_i T_i = \frac{1}{20} \cdot 80,3 \text{ s} = 4,015 \text{ s}$$

$$s_T^2 = \frac{1}{20-1} \cdot \sum_1^5 n_i (T_i - \bar{T})^2 = \frac{1}{19} \cdot 0,345500 \text{ s}^2 = 0,0182 \text{ s}^2; \quad s_T = 0,1349 \text{ s}$$

$$s_{\bar{T}} = \frac{s_T}{\sqrt{20}} = \frac{0,1349 \text{ s}}{\sqrt{20}} = 0,0302 \text{ s}; \quad \gamma = 1 - \alpha = 95\%; \quad n = 20;$$

$$t = 2,09 \quad (\text{aus Tab. 1})$$

$$\text{Messunsicherheit: } \Delta T = t \cdot s_{\bar{T}} = 2,09 \cdot 0,0302 \text{ s} = 0,063 \text{ s}$$

$$\text{Messergebnis: } T = \bar{T} \pm \Delta T = (4,015 \pm 0,063) \text{ s}$$

$$7) \quad \gamma = 95\%; \quad n = 9; \quad t = 2,31 \quad (\text{aus Tab. 1}); \quad \bar{x} = 10,0; \quad s = 1,3$$

$$\text{Vertrauensgrenzen: } \bar{x} \pm \Delta x = \bar{x} \pm t \frac{s}{\sqrt{n}} = 10,0 \pm 2,31 \frac{1,3}{\sqrt{9}} = 10,0 \pm 1,00$$

*Messergebnis:*  $x = \bar{x} \pm \Delta x = 10,0 \pm 1,00$

$$8) \quad n = 10; \quad \bar{x} = \frac{1}{10} \cdot \sum_1^{10} x_i = \frac{1}{10} \cdot 210 = 21; \quad \gamma = 95\%; \quad \sigma = 1,2;$$

$t = t_{\infty} = 1,96$  (aus Tab. 1;  $\sigma$  ist bekannt)

$$\text{Messunsicherheit: } \Delta x = t_{\infty} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \frac{1,2}{\sqrt{10}} = 0,74$$

*Messergebnis:*  $x = \bar{x} \pm \Delta x = 21 \pm 0,74$

## Abschnitt 4

$$1) \quad T = 2\pi \cdot m^{1/2} \cdot c^{-1/2} \text{ ist ein Potenzprodukt der unabhängigen Messgrößen } m \text{ und } c.$$

Daher gilt nach Tabelle 2, Seite 689 ( $k = 2\pi$ ;  $X = m$ ;  $Y = c$ ;  $\alpha = 1/2$ ;  $\beta = -1/2$ ):

$$\left| \frac{\Delta T}{T} \right| = \sqrt{\left| \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta m}{m} \right|^2 + \left| -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta c}{c} \right|^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(1\%)^2 + (1\%)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \% \approx 0,7\%$$

Die *prozentuale Messunsicherheit* der Schwingungsdauer  $T$  beträgt rund 0,7%.

$$2) \quad m = m(r; h; \varrho) = \pi r^2 h \varrho$$

$$\bar{m} = \pi \bar{r}^2 \bar{h} \bar{\varrho} = \pi (17,5)^2 (24,0) (2,5) g = 57726,8 g = 57,73 \text{ kg}$$

$m$  ist ein *Potenzprodukt* der drei unabhängigen Messgrößen  $r$ ,  $h$  und  $\varrho$ . Daher gilt nach Tabelle 2, Seite 689 (die Exponenten lauten der Reihe nach 2, 1 und 1):

$$\left| \frac{\Delta m}{\bar{m}} \right| = \sqrt{\left| 2 \cdot \frac{\Delta r}{\bar{r}} \right|^2 + \left| 1 \cdot \frac{\Delta h}{\bar{h}} \right|^2 + \left| 1 \cdot \frac{\Delta \varrho}{\bar{\varrho}} \right|^2} = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} \% = 7\%$$

$$\Delta m = \left| \frac{\Delta m}{\bar{m}} \right| \cdot \bar{m} = 0,07 \cdot 57,73 \text{ kg} = 4,04 \text{ kg}$$

Die *absolute Messunsicherheit* der Masse  $m$  beträgt 4,04 kg, die *prozentuale* 7%.

$$3) \quad h = h(e; \alpha) = e \cdot \tan \alpha; \quad \bar{h} = \bar{e} \cdot \tan \bar{\alpha} = (75,2 \text{ m}) \cdot \tan 30^\circ = 43,42 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \Delta h &= \sqrt{\left( \frac{\partial h}{\partial e} \cdot \Delta e \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial \alpha} \cdot \Delta \alpha \right)^2} = \sqrt{(\tan \bar{\alpha} \cdot \Delta e)^2 + \left( \frac{\bar{e}}{\cos^2 \bar{\alpha}} \cdot \Delta \alpha \right)^2} = \\ &= \sqrt{(\tan 30^\circ \cdot 2,5)^2 + \left( \frac{75,2}{\cos^2 30^\circ} \cdot \frac{\pi}{180} \right)^2} \text{ m} = 2,27 \text{ m} \end{aligned}$$

↑ im Bogenmaß!

*Messergebnis:*  $h = \bar{h} \pm \Delta h = (43,42 \pm 2,27) \text{ m}$

$$\text{Prozentuale Messunsicherheit: } \left| \frac{\Delta h}{\bar{h}} \right| = \frac{2,27 \text{ m}}{43,42 \text{ m}} = 0,052 \approx 5,2\%$$

4)  $\bar{T} = 2\pi \sqrt{LC} = 2\pi \sqrt{0,2 \text{ H} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ F}} = 6,28 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 6,28 \text{ ms}$

$$\left| \frac{\Delta L}{L} \right| = \frac{0,01 \text{ H}}{0,20 \text{ H}} = 0,05 = 5\%; \quad \left| \frac{\Delta C}{C} \right| = \frac{0,2 \mu\text{F}}{5,0 \mu\text{F}} = 0,04 = 4\%$$

$T = 2\pi \sqrt{LC} = 2\pi \sqrt{L} \cdot \sqrt{C} = 2\pi \cdot L^{1/2} \cdot C^{1/2}$  ist ein *Potenzprodukt* der unabhängigen Messgrößen  $L$  und  $C$ . Daher gilt nach Tabelle 2, Seite 689 (jeweiliger Exponent = 1/2):

$$\left| \frac{\Delta T}{T} \right| = \sqrt{\left| \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta L}{L} \right|^2 + \left| \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta C}{C} \right|^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(5\%)^2 + (4\%)^2} = 3,2\%$$

Absolute Messunsicherheit:  $\Delta T = \left| \frac{\Delta T}{T} \right| \cdot \bar{T} = 0,032 \cdot 6,28 \text{ ms} = 0,20 \text{ ms}$

Messergebnis:  $T = \bar{T} \pm \Delta T = (6,28 \pm 0,20) \text{ ms}$

- 5) Das Volumen  $V = V(a; b; c) = abc$  ist ein *Potenzprodukt* der drei Messgrößen  $a$ ,  $b$  und  $c$ . Daher gilt nach Tabelle 2, Seite 689 (jeweiliger Exponent = 1):

$$\left| \frac{\Delta V}{V} \right| = \sqrt{\left| 1 \cdot \frac{\Delta a}{a} \right|^2 + \left| 1 \cdot \frac{\Delta b}{b} \right|^2 + \left| 1 \cdot \frac{\Delta c}{c} \right|^2} = \sqrt{(3\%)^2 + (3\%)^2 + (3\%)^2} = 5,2\%$$

Die *prozentuale Messunsicherheit* des Quadervolumens  $V$  beträgt rund 5,2%.

6) a)  $\bar{R} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{120,10 \text{ V}}{3,45 \text{ A}} = 34,81 \Omega; \quad \frac{\partial R}{\partial U} = \frac{1}{I}; \quad \frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{U}{I^2}$

$$\begin{aligned} \Delta R &= \sqrt{\left( \frac{\partial R}{\partial U} \cdot \Delta U \right)^2 + \left( \frac{\partial R}{\partial I} \cdot \Delta I \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{\Delta U}{\bar{I}} \right)^2 + \left( -\frac{\bar{U} \cdot \Delta I}{\bar{I}^2} \right)^2} = \\ &= \sqrt{\left( \frac{1,43}{3,45} \right)^2 + \left( -\frac{120,10 \cdot 0,15}{3,45^2} \right)^2} \Omega = 1,57 \Omega \end{aligned}$$

Messergebnis:  $R = \bar{R} \pm \Delta R = (34,81 \pm 1,57) \Omega$

b) Prozentuale Messunsicherheit:  $\left| \frac{\Delta R}{\bar{R}} \right| = \frac{1,57 \Omega}{34,81 \Omega} = 0,0451 \approx 4,5\%$

7)  $\bar{b} = \frac{1}{10} \cdot \sum_1^{10} b_i = \frac{1}{10} \cdot 181 \text{ cm} = 18,1 \text{ cm}$

$$s_b^2 = \frac{1}{10-1} \cdot \sum_1^{10} (b_i - \bar{b})^2 = \frac{1}{9} \cdot 0,86 \text{ cm}^2 = 0,096 \text{ cm}^2$$

$$s_b = 0,310 \text{ cm}; \quad \Delta b = \frac{s_b}{\sqrt{10}} = \frac{0,310 \text{ cm}}{\sqrt{10}} \approx 0,10 \text{ cm}$$

$$\bar{h} = \frac{1}{10} \cdot \sum_1^{10} h_i = \frac{1}{10} \cdot 101 \text{ cm} = 10,1 \text{ cm}$$

$$s_h^2 = \frac{1}{10-1} \cdot \sum_1^{10} (h_i - \bar{h})^2 = \frac{1}{9} \cdot 0,32 \text{ cm}^2 = 0,036 \text{ cm}^2$$

$$s_h = 0,190 \text{ cm}; \quad \Delta h = \frac{s_h}{\sqrt{10}} = \frac{0,190 \text{ cm}}{\sqrt{10}} \approx 0,06 \text{ cm}$$

*Messergebnisse:*

$$b = \bar{b} \pm \Delta b = (18,1 \pm 0,10) \text{ cm}; \quad h = \bar{h} \pm \Delta h = (10,1 \pm 0,06) \text{ cm}$$

$$\bar{W} = \frac{1}{6} \bar{b} \bar{h}^2 = \frac{1}{6} (18,1 \text{ cm}) (10,1 \text{ cm})^2 = 307,73 \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned} \Delta W &= \sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial b} \cdot \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial h} \cdot \Delta h\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{6} \bar{h}^2 \cdot \Delta b\right)^2 + \left(\frac{1}{3} \bar{b} \bar{h} \cdot \Delta h\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{6} \cdot 10,1^2 \cdot 0,10\right)^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot 18,1 \cdot 10,1 \cdot 0,06\right)^2} \text{ cm}^3 = 4,03 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\text{Messergebnis: } W = \bar{W} \pm \Delta W = (307,73 \pm 4,03) \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned} 8) \quad \bar{T} &= 2\pi \sqrt{\bar{L}(\bar{C}_1 + \bar{C}_2)} = 2\pi \sqrt{5 \cdot 10^{-3} \text{ H} (10 + 50) \cdot 10^{-9} \text{ F}} = 1,088 \cdot 10^{-4} \text{ s} \\ T &= 2\pi \sqrt{\bar{L} \cdot \sqrt{\bar{C}_1 + \bar{C}_2}}; \quad \frac{\partial T}{\partial L} = \frac{2\pi}{2\sqrt{\bar{L}}} \sqrt{\bar{C}_1 + \bar{C}_2} = \pi \sqrt{\frac{\bar{C}_1 + \bar{C}_2}{L}} \\ \frac{\partial T}{\partial C_1} &= \frac{\partial T}{\partial C_2} = \frac{2\pi \sqrt{\bar{L}}}{2\sqrt{\bar{C}_1 + \bar{C}_2}} = \pi \sqrt{\frac{\bar{L}}{\bar{C}_1 + \bar{C}_2}} \\ \Delta T &= \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial L} \cdot \Delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial C_1} \cdot \Delta C_1\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial C_2} \cdot \Delta C_2\right)^2} = \\ &= \pi \sqrt{\frac{\bar{C}_1 + \bar{C}_2}{\bar{L}} (\Delta L)^2 + \frac{\bar{L}}{\bar{C}_1 + \bar{C}_2} [(\Delta C_1)^2 + (\Delta C_2)^2]} = \\ &= \pi \sqrt{\frac{(\bar{C}_1 + \bar{C}_2)^2 \cdot (\Delta L)^2 + \bar{L}^2 \cdot [(\Delta C_1)^2 + (\Delta C_2)^2]}{\bar{L}(\bar{C}_1 + \bar{C}_2)}} = \\ &= \pi \sqrt{\frac{(10 + 50)^2 \cdot 10^{-18} \cdot (0,2)^2 \cdot 10^{-6} + 5^2 \cdot 10^{-6} (0,5^2 + 2,0^2) \cdot 10^{-18}}{5 \cdot 10^{-3} (10 + 50) \cdot 10^{-9}}} \text{ s} = \\ &= \pi \sqrt{\frac{60^2 \cdot 0,2^2 + 5^2 (0,5^2 + 2,0^2)}{5 \cdot 60} \cdot 10^{-6} \text{ s}} = 2,9 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 0,029 \cdot 10^{-4} \text{ s} \end{aligned}$$

$$\text{Messergebnis: } T = (1,088 \pm 0,029) \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

- 9)  $J$  ist ein *Potenzprodukt* der unabhängigen Messgrößen  $m$  und  $R$ . Daher gilt nach Tabelle 2, Seite 689 (mit den Exponenten 1 und 2):

$$\left| \frac{\Delta J}{J} \right| = \sqrt{\left| 1 \cdot \frac{\Delta m}{m} \right|^2 + \left| 2 \cdot \frac{\Delta R}{R} \right|^2} = \sqrt{(1 \cdot 3 \%)^2 + (2 \cdot 2 \%)^2} = 5 \%$$

Das Massenträgheitsmoment  $J$  lässt sich mit einer *Genauigkeit* von 5 % bestimmen.

- 10) Das Volumen  $V = V(a) = a^3$  ist eine *Potenzfunktion* der unabhängigen Messgröße (Kantenlänge)  $a$ . Daher gilt nach Tabelle 2, Seite 689:

$$\left| \frac{\Delta V}{V} \right| = \sqrt{\left| 3 \cdot \frac{\Delta a}{a} \right|^2} = 3 \cdot \left| \frac{\Delta a}{a} \right| \leq 3\% \Rightarrow \left| \frac{\Delta a}{a} \right| \leq 1\%$$

Die prozentuale Messunsicherheit der Kantenlänge darf *höchstens* 1 % betragen.

- 11)  $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y} = 50 - 40 = 10$

$$\Delta z = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{0,2^2 + 0,2^2} = 0,28 \approx 0,3 \quad (\text{nach Tabelle 2, Seite 689})$$

*Messergebnis:*  $z = 10 \pm 0,3$

*Prozentuale Messunsicherheit* der Größen  $x, y$  und  $z$ :

$$\left| \frac{\Delta x}{\bar{x}} \right| = \frac{0,2}{50} = 0,4\%; \quad \left| \frac{\Delta y}{\bar{y}} \right| = \frac{0,2}{40} = 0,5\%; \quad \left| \frac{\Delta z}{\bar{z}} \right| = \frac{0,3}{10} = 3\%$$

*Folgerung:* Die *prozentuale* Messunsicherheit der Differenzgröße  $z = x - y$  ist um rund *eine* Größenordnung (Zehnerpotenz) *größer* als die *prozentualen* Unsicherheiten der unabhängigen Messgrößen!

12) a)

$i$	$\frac{R_{1i}}{\Omega}$	$\frac{R_{1i} - \bar{R}_1}{\Omega}$	$\frac{(R_{1i} - \bar{R}_1)^2}{\Omega^2}$	$\frac{R_{2i}}{\Omega}$	$\frac{R_{2i} - \bar{R}_2}{\Omega}$	$\frac{(R_{2i} - \bar{R}_2)^2}{\Omega^2}$
1	96,5	-0,5	0,25	40,1	-1,4	1,96
2	97,2	0,2	0,04	42,3	0,8	0,64
3	98,6	1,6	2,56	41,5	0	0
4	95,9	-1,1	1,21	40,7	-0,8	0,64
5	97,1	0,1	0,01	41,9	0,4	0,16
6	96,7	-0,3	0,09	42,5	1	1
$\sum$	582,0	0	4,16	249,0	0	4,40

$$\bar{R}_1 = \frac{1}{6} \cdot \sum_1^6 R_{1i} = \frac{1}{6} \cdot 582,0 \Omega = 97,0 \Omega$$

$$s_{R_1}^2 = \frac{1}{6-1} \cdot \sum_1^6 (R_{1i} - \bar{R}_1)^2 = \frac{1}{5} \cdot 4,16 \Omega^2 = 0,832 \Omega^2; \quad s_{R_1} = 0,912 \Omega$$

$$\Delta R_1 = \frac{s_{R_1}}{\sqrt{6}} = \frac{0,912 \Omega}{\sqrt{6}} = 0,37 \Omega$$

$$\bar{R}_2 = \frac{1}{6} \cdot \sum_1^6 R_{2i} = \frac{1}{6} \cdot 249,0 \Omega = 41,5 \Omega$$

$$s_{R_2}^2 = \frac{1}{6-1} \cdot \sum_1^6 (R_{2i} - \bar{R}_2)^2 = \frac{1}{5} \cdot 4,40 \Omega^2 = 0,88 \Omega^2; \quad s_{R_2} = 0,938 \Omega$$

$$\Delta R_2 = \frac{s_{R_2}}{\sqrt{6}} = \frac{0,938 \Omega}{\sqrt{6}} = 0,38 \Omega$$

*Messergebnisse:*

$$R_1 = \bar{R}_1 \pm \Delta R_1 = (97,0 \pm 0,37) \Omega; \quad R_2 = \bar{R}_2 \pm \Delta R_2 = (41,5 \pm 0,38) \Omega$$

$$\text{b)} \quad \bar{R} = \frac{\bar{R}_1 \bar{R}_2}{\bar{R}_1 + \bar{R}_2} = \frac{(97,0 \Omega) (41,5 \Omega)}{(97,0 + 41,5) \Omega} = 29,06 \Omega$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2 (R_1 + R_2) - 1(R_1 R_2)}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}; \quad \frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}$$

(Quotientenregel)

$$\Delta R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial R_1} \cdot \Delta R_1\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_2} \cdot \Delta R_2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\bar{R}_2^2 \cdot \Delta R_1}{(\bar{R}_1 + \bar{R}_2)^2}\right)^2 + \left(\frac{\bar{R}_1^2 \cdot \Delta R_2}{(\bar{R}_1 + \bar{R}_2)^2}\right)^2} = \\ = \frac{\sqrt{(\bar{R}_2^2 \cdot \Delta R_1)^2 + (\bar{R}_1^2 \cdot \Delta R_2)^2}}{(\bar{R}_1 + \bar{R}_2)^2} = \frac{\sqrt{(41,5^2 \cdot 0,37)^2 + (97,0^2 \cdot 0,38)^2}}{(97,0 + 41,5)^2} \Omega = 0,19 \Omega$$

*Messergebnis:*  $R = \bar{R} \pm \Delta R = (29,06 \pm 0,19) \Omega$

## Abschnitt 5

1) a) Hinweis: **Musterlösung** zu den Aufgaben 1) bis 5).

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i y_i$
1	0	2,10	0	4,41	0
2	1	0,85	1	0,7225	0,85
3	2	-0,64	4	0,4096	-1,28
4	3	-2,20	9	4,84	-6,60
5	4	-3,60	16	12,96	-14,40
$\sum$	10	-3,49	30	23,3421	-21,43

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \cdot \sum_1^5 x_i = \frac{1}{5} \cdot 10 = 2; \quad \bar{y} = \frac{1}{5} \cdot \sum_1^5 y_i = \frac{1}{5} \cdot (-3,49) = -0,698$$

$$a = \frac{\sum_1^5 x_i y_i - 5 \bar{x} \bar{y}}{\sum_1^5 x_i^2 - 5 \bar{x}^2} = \frac{-21,43 - 5 \cdot 2 \cdot (-0,698)}{30 - 5 \cdot 2^2} = -1,445$$

$$b = \bar{y} - a \bar{x} = -0,698 - (-1,445) \cdot 2 = 2,192$$

*Ausgleichsgerade:*  $y = -1,445x + 2,192$  (siehe Bild A-64)

$$s_x^2 = \frac{1}{5-1} \left( \sum_1^5 x_i^2 - 5 \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{4} (30 - 5 \cdot 2^2) = 2,5$$

$$s_y^2 = \frac{1}{5-1} \left( \sum_1^5 y_i^2 - 5 \bar{y}^2 \right) = \frac{1}{4} (23,3421 - 5 (-0,698)^2) = 5,22652$$

$$r^2 = \frac{a^2 s_x^2}{s_y^2} = \frac{(-1,445)^2 \cdot 2,5}{5,22652} = 0,998764$$

*Unsicherheiten* (Standardabweichungen) der beiden Parameter:

$$s_a^2 = \frac{(1 - r^2) s_y^2}{(n - 2) s_x^2} = \frac{(1 - 0,998764) \cdot 5,22652}{(5 - 2) \cdot 2,5} = 0,000861; \quad s_a = 0,029$$

$$s_b^2 = \frac{(n - 1) s_x^2 + n \bar{x}^2}{n} \cdot s_a^2 = \frac{(5 - 1) \cdot 2,5 + 5 \cdot 2^2}{5} \cdot 0,000861 = 0,005166$$

$$s_b = 0,072$$

*Restvarianz* und *Unsicherheit* der  $y$ -Messwerte:

$$s_{\text{Rest}}^2 = \frac{(n - 1)(1 - r^2) s_y^2}{n - 2} = \frac{(5 - 1)(1 - 0,998764) \cdot 5,22652}{5 - 2} = 0,008613$$

$$s_{\text{Rest}} = 0,093$$

- b) Lösungsweg wie in Aufgabe 1 a): Tabelle erstellen mit den Spalten  $i$ ,  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $x_i^2$ ,  $y_i^2$  und  $x_i y_i$  ( $n = 8$ ).

$$\bar{x} = \frac{1}{8} \cdot \sum_1^8 x_i = \frac{1}{8} \cdot 26,8 = 3,35; \quad \bar{y} = \frac{1}{8} \cdot \sum_1^8 y_i = \frac{1}{8} \cdot 29,9 = 3,7375$$

$$a = \frac{\sum_1^8 x_i y_i - 8 \bar{x} \bar{y}}{\sum_1^8 x_i^2 - 8 \bar{x}^2} = \frac{115,4 - 8 \cdot 3,35 \cdot 3,7375}{105,22 - 8 \cdot 3,35^2} = 0,986723 \approx 0,987$$

$$b = \bar{y} - a \bar{x} = 3,7375 - 0,986723 \cdot 3,35 = 0,431978 \approx 0,432$$

*Ausgleichsgerade*:  $y = 0,987x + 0,432$  (siehe Bild A-65)

$$s_x^2 = \frac{1}{8 - 1} \left( \sum_1^8 x_i^2 - 8 \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{7} (105,22 - 8 \cdot 3,35^2) = 2,205714$$

$$s_y^2 = \frac{1}{8 - 1} \left( \sum_1^8 y_i^2 - 8 \bar{y}^2 \right) = \frac{1}{7} (127,05 - 8 \cdot 3,7375^2) = 2,185536$$

$$r^2 = \frac{a^2 s_x^2}{s_y^2} = \frac{0,986723^2 \cdot 2,205714}{2,185536} = 0,982611$$

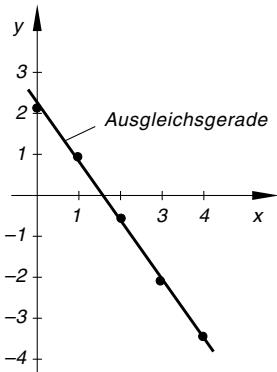


Bild A-64

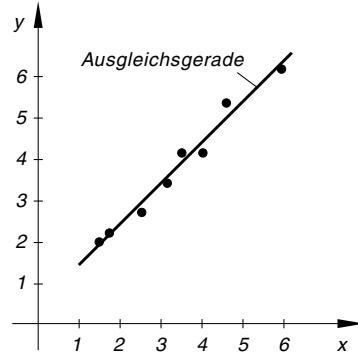


Bild A-65

*Unsicherheiten* (Standardabweichungen) der beiden Parameter:

$$s_a^2 = \frac{(1 - r^2) s_y^2}{(8 - 2) s_x^2} = \frac{(1 - 0,982\,611) \cdot 2,185\,536}{6 \cdot 2,205\,714} = 0,002\,872; \quad s_a = 0,054$$

$$s_b^2 = \frac{(8 - 1) s_x^2 + 8 \bar{x}^2}{8} \cdot s_a^2 = \frac{7 \cdot 2,205\,714 + 8 \cdot 3,35^2}{8} \cdot 0,002\,872 = 0,037\,774$$

$$s_b = 0,194$$

*Restvarianz* und *Unsicherheit* der y-Messwerte:

$$s_{\text{Rest}}^2 = \frac{(8 - 1) (1 - r^2) s_y^2}{8 - 2} = \frac{7 (1 - 0,982\,611) \cdot 2,185\,536}{6} = 0,044\,338$$

$$s_{\text{Rest}} = 0,211$$

- 2) Lösungsweg wie in Aufgabe 1 a): Tabelle erstellen mit den Spalten  $i$ ,  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $x_i^2$ ,  $y_i^2$  und  $x_i y_i$  ( $n = 5$ ).

$$\text{a)} \quad \bar{x} = \frac{1}{5} \cdot \sum_1^5 x_i = \frac{1}{5} \cdot 10 = 2; \quad \bar{y} = \frac{1}{5} \cdot \sum_1^5 y_i = \frac{1}{5} \cdot (-3,8) = -0,76$$

$$a = \frac{\sum_1^5 x_i y_i - 5 \bar{x} \bar{y}}{\sum_1^5 x_i^2 - 5 \bar{x}^2} = \frac{-73,8 - 5 \cdot 2 \cdot (-0,76)}{60 - 5 \cdot 2^2} = -1,655$$

$$b = \bar{y} - a \bar{x} = -0,76 - (-1,655) \cdot 2 = 2,55$$

*Ausgleichsgerade:*  $y = -1,655x + 2,55$  (siehe Bild A-66)

$$\text{b)} \quad s_x^2 = \frac{1}{5 - 1} \left( \sum_1^5 x_i^2 - 5 \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{4} (60 - 5 \cdot 2^2) = 10$$

$$s_y^2 = \frac{1}{5 - 1} \left( \sum_1^5 y_i^2 - 5 \bar{y}^2 \right) = \frac{1}{4} (112,5 - 5 (-0,76)^2) = 27,403$$

$$r^2 = \frac{a^2 s_x^2}{s_y^2} = \frac{(-1,655)^2 \cdot 10}{27,403} = 0,999\,535$$

*Restvarianz* und *Unsicherheit* der y-Messwerte:

$$s_{\text{Rest}}^2 = \frac{(5 - 1) (1 - r^2) s_y^2}{5 - 2} = \frac{4 (1 - 0,999\,535) \cdot 27,403}{3} = 0,016\,990; \quad r_{\text{Rest}} = 0,130$$

- c) *Schätzwerte:*  $y(x = -1) \approx 4,21$ ;  $y(x = 4,5) \approx -4,90$

3)	$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i^2 \cdot 10^{-4}$	$x_i y_i \cdot 10^{-2}$	$x$ in Umdrehungen pro Minute, $y$ in PS
	1	500	5	25	25	
	2	1 000	8	100	80	$\bar{x} = \frac{1}{7} \cdot \sum_1^7 x_i =$
	3	1 500	12	225	180	$= \frac{1}{7} \cdot 14\,000 = 2000$
	4	2 000	17	400	340	
	5	2 500	24	625	600	
	6	3 000	31	900	930	$\bar{y} = \frac{1}{7} \cdot \sum_1^7 y_i =$
	7	3 500	36	1225	1260	$= \frac{1}{7} \cdot 133 = 19$
	$\sum$	14 000	133	3500	3415	

$$\text{a)} \quad a = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i y_i - 7 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^7 x_i^2 - 7 \bar{x}^2} = \frac{3415 \cdot 10^2 - 7 \cdot 2000 \cdot 19}{3500 \cdot 10^4 - 7 \cdot 2000^2} = 0,010786 \approx 0,0108$$

$$b = \bar{y} - a \bar{x} = 19 - 0,010786 \cdot 2000 = -2,572$$

Ausgleichsgerade:  $y = 0,0108x - 2,572$  (siehe Bild A-67)

$$\text{b)} \quad y(x = 2150) = 20,648; \quad \text{„Erwartete“ Motorleistung } \approx 20,65 \text{ PS}$$

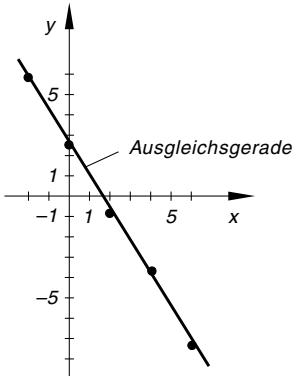


Bild A-66

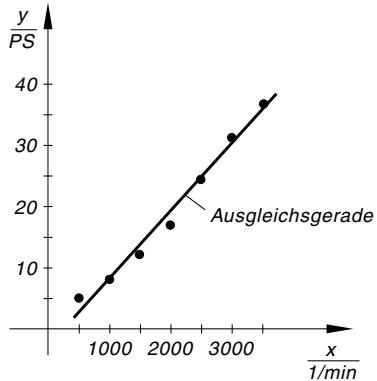


Bild A-67

- 4) Die  $n = 6$  Messpunkte liegen nach „Augenschein“ auf einer *Geraden* (siehe Bild A-68). Bestätigt wird diese Einschätzung durch den Wert des Korrelationskoeffizienten ( $r = 0,9996 \approx 1$ ; siehe weiter unten).

Lösungsweg wie in Aufgabe 1 a): Tabelle erstellen mit den Spalten  $i$ ,  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $x_i^2$ ,  $y_i^2$  und  $x_i y_i$ .

$$\bar{x} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^6 x_i = \frac{1}{6} \cdot 15 = 2,5; \quad \bar{y} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^6 y_i = \frac{1}{6} \cdot 31,5 = 5,25$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i y_i - 6 \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left( \sum_{i=1}^6 x_i^2 - 6 \bar{x}^2 \right) \left( \sum_{i=1}^6 y_i^2 - 6 \bar{y}^2 \right)}} = \frac{121,95 - 6 \cdot 2,5 \cdot 5,25}{\sqrt{(55 - 6 \cdot 2,5^2)(272,095 - 6 \cdot 5,25^2)}} = \\ = 0,999636 \approx 1$$

Linearer Lösungsansatz (Ausgleichsgerade):  $y = ax + b$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i y_i - 6 \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^6 x_i^2 - 6 \bar{x}^2} = \frac{121,95 - 6 \cdot 2,5 \cdot 5,25}{55 - 6 \cdot 2,5^2} = 2,468571 \approx 2,469$$

$$b = \bar{y} - a \bar{x} = 5,25 - 2,468571 \cdot 2,5 = -0,921428 \approx -0,921$$

Lösung:  $y = 2,469x - 0,921$  (siehe Bild A-68)

- 5) Lösungsweg wie in Aufgabe 1 a): Tabelle erstellen mit den Spalten  $i$ ,  $T_i$ ,  $L_i$ ,  $T_i^2$ ,  $L_i^2$  und  $T_i L_i$  ( $n = 6$ ).

$$\bar{T} = \frac{1}{6} \cdot \sum_1^6 T_i = \frac{1}{6} \cdot 300 = 50; \quad \bar{L} = \frac{1}{6} \cdot \sum_1^6 L_i = \frac{1}{6} \cdot 712,8 = 118,8$$

$$\text{a)} \quad r = \frac{\sum_1^6 T_i L_i - 6 \bar{T} \bar{L}}{\sqrt{\left( \sum_1^6 T_i^2 - 6 \bar{T}^2 \right) \left( \sum_1^6 L_i^2 - 6 \bar{L}^2 \right)}} =$$

$$= \frac{42\,904 - 6 \cdot 50 \cdot 118,8}{\sqrt{(22\,000 - 6 \cdot 50^2)(92\,299,92 - 6 \cdot 118,8^2)}} = 0,994\,649$$

$r \approx 1 \Rightarrow$  Die Messpunkte liegen nahezu auf einer *Geraden*  $\Rightarrow$  *Linearer Lösungsansatz* (Ausgleichsgerade):  $L = aT + b$

$$a = \frac{\sum_1^6 T_i L_i - 6 \bar{T} \bar{L}}{\sum_1^6 T_i^2 - 6 \bar{T}^2} = \frac{42\,904 - 6 \cdot 50 \cdot 118,8}{22\,000 - 6 \cdot 50^2} = 1,037\,714 \approx 1,0377$$

$$b = \bar{L} - a \bar{T} = 118,8 - 1,037\,714 \cdot 50 = 66,9143$$

*Lösung:*  $L = 1,0377 T + 66,9143$  (siehe Bild A-69)

b)  $L(T = 30^\circ\text{C}) \approx 98,05 \text{ g pro 100 g Wasser}$

$L(T = 95^\circ\text{C}) \approx 165,50 \text{ g pro 100 g Wasser}$

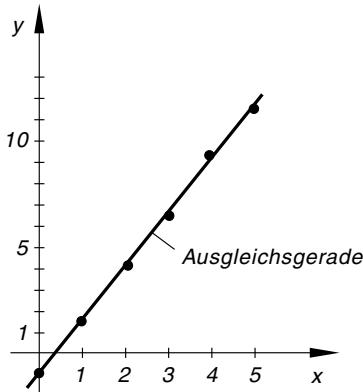


Bild A-68

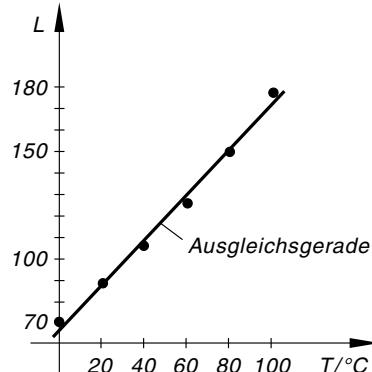


Bild A-69

- 6) Die  $n = 5$  Messpunkte liegen nach „Augenmaß“ nahezu auf einer *Parabel* (siehe Bild A-70). Die Parameter des daher gewählten *quadratischen* Lösungsansatzes  $y = ax^2 + bx + c$  genügen dabei dem folgenden inhomogenen linearen Gleichungssystem:

$$3123a + 503b + 87c = 221$$

$$503a + 87b + 17c = 33$$

$$87a + 17b + 5c = 7$$

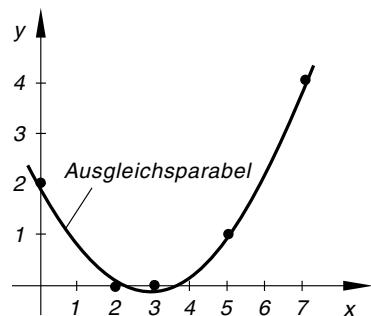


Bild A-70

*Lösung* (Gaußscher Algorithmus):  $a = 0,2442$ ;  $b = -1,4174$ ;  $c = 1,9709$

*Ausgleichsparabel* (Bild A-70):  $y = 0,2442x^2 - 1,4174x + 1,9709$

Die Koeffizienten der obigen Normalgleichungen (Gleichungen IV-146) wurden mit Hilfe der folgenden Tabelle bestimmt:

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i^3$	$x_i^4$	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	0	2	0	0	0	0	0
2	2	0	4	8	16	0	0
3	3	0	9	27	81	0	0
4	5	1	25	125	625	5	25
5	7	4	49	343	2401	28	196
$\sum$	17	7	87	503	3123	33	221

- 7) Das inhomogene lineare Gleichungssystem für die Kurvenparameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  lautet:

$$392\,399\,201a + 3\,622\,893b + 35\,549c = 3\,739\,551,3$$

$$3\,622\,893a + 35\,549b + 387c = 34\,960,9$$

$$35\,549a + 387b + 5c = 352,2$$

Die Koeffizienten der Normalgleichungen (Gleichungen IV-146) wurden anhand der folgenden Tabelle bestimmt (Einheiten der besseren Übersicht wegen weggelassen):

$i$	$v_i$	$s_i$	$v_i^2$	$v_i^3$	$v_i^4$	$v_i s_i$	$v_i^2 s_i$
1	32	16,2	1 024	32 768	1 048 576	518,4	16 588,8
2	50	31,0	2 500	125 000	6 250 000	1 550	77 500
3	80	63,5	6 400	512 000	40 960 000	5 080	406 400
4	100	95,0	10 000	1 000 000	100 000 000	9 500	950 000
5	125	146,5	15 625	1 953 125	244 140 625	18 312,5	2 289 062,5
$\sum$	387	352,2	35 549	3 622 893	392 399 201	34 960,9	3 739 551,3

Lösung:  $a = 0,00917$

$$b = -0,05126$$

$$c = 9,23222$$

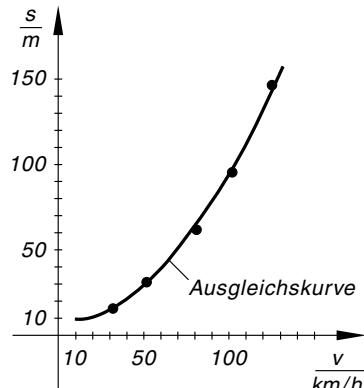
Ausgleichsparabel (Bild A-71):

$$s = 0,00917 v^2 - 0,05126 v + 9,23222$$

( $v$  in km/h,  $s$  in m)

Bremsweg bei  $v = 90$  km/h:  $s \approx 78,9$  m

**Bild A-71**



8)  $v = c u + d$

$i$	$u_i = x_i$	$v_i = \ln y_i$	$u_i^2$	$u_i v_i$
1	0	1,629 241	0	0
2	1	0,559 616	1	0,559 616
3	2	0,076 961	4	0,153 922
4	3	-0,342 490	9	-1,027 471
$\sum$	6	1,923 328	14	-0,313 933

$$\bar{u} = \frac{1}{4} \cdot \sum_1^4 u_i = \frac{1}{4} \cdot 6 = 1,5$$

$$\bar{v} = \frac{1}{4} \cdot \sum_1^4 v_i = \frac{1}{4} \cdot 1,923 328 = 0,480 832$$

$$c = \frac{\sum_1^4 u_i v_i - 4 \bar{u} \bar{v}}{\sum_1^4 u_i^2 - 4 \bar{u}^2} = \frac{-0,313 933 - 4 \cdot 1,5 \cdot 0,480 832}{14 - 4 \cdot 1,5^2} = -0,639 785$$

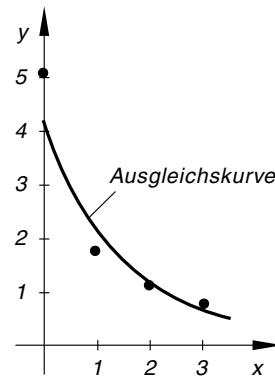
$$d = \bar{v} - c \bar{u} = 0,480 832 - (-0,639 785) \cdot 1,5 = 1,440 510$$

$$\ln a = d \Rightarrow a = e^d = e^{1,440 510} = 4,2229; \quad b = c = -0,6398$$

Ausgleichskurve:  $y = 4,2229 \cdot e^{-0,6398x}$  (siehe Bild A-72)

9)  $v = c u + d$

$i$	$u_i = \ln x_i$	$v_i = \ln y_i$	$u_i^2$	$u_i v_i$
1	0	0	0	0
2	0,693 147	1,131 402	0,480 453	0,784 228
3	1,098 612	1,722 767	1,206 948	1,892 652
4	1,386 294	2,208 274	1,921 811	3,061 317
5	1,609 438	2,557 227	2,590 291	4,115 698
$\sum$	4,787 491	7,619 670	6,199 503	9,853 895



**Bild A-72**

$$\bar{u} = \frac{1}{5} \cdot \sum_1^5 u_i = \frac{1}{5} \cdot 4,787\,491 = 0,957\,498$$

$$\bar{v} = \frac{1}{5} \cdot \sum_1^5 v_i = \frac{1}{5} \cdot 7,619\,670 = 1,523\,934$$

$$c = \frac{\sum_1^5 u_i v_i - 5 \bar{u} \bar{v}}{\sum_1^5 u_i^2 - 5 \bar{u}^2} = \frac{9,853\,895 - 5 \cdot 0,957\,498 \cdot 1,523\,934}{6,199\,503 - 5 \cdot 0,957\,498^2} = 1,583\,467$$

$$d = \bar{v} - c \bar{u} = 1,523\,934 - 1,583\,467 \cdot 0,957\,498 = 0,007\,768$$

$$\ln a = d \Rightarrow a = e^d = e^{0,007\,768} \approx 1,0078; \quad b = c \approx 1,5835$$

Ausgleichskurve:  $y = 1,0078 \cdot x^{1,5835}$  (siehe Bild A-73)

10) a)  $y = \frac{a + bx}{x} = \frac{a}{x} + b = a \cdot \frac{1}{x} + b = au + b$  (Variablentransformation:  $u = 1/x$ )

$i$	$u_i = \frac{1}{x_i}$	$y_i$	$u_i^2$	$u_i y_i$
1	-0,5	1	0,25	-0,5
2	-1	-0,5	1	0,5
3	1	5,6	1	5,6
4	0,5	3,8	0,25	1,9
5	0,25	3,3	0,0625	0,825
$\sum$	0,25	13,2	2,5625	8,325

$$\bar{u} = \frac{1}{5} \cdot \sum_1^5 u_i = \frac{1}{5} \cdot 0,25 = 0,05$$

$$\bar{y} = \frac{1}{5} \cdot \sum_1^5 y_i = \frac{1}{5} \cdot 13,2 = 2,64$$

$$a = \frac{\sum_1^5 u_i y_i - 5 \bar{u} \bar{y}}{\sum_1^5 u_i^2 - 5 \bar{u}^2} = \frac{8,325 - 5 \cdot 0,05 \cdot 2,64}{2,5625 - 5 \cdot 0,05^2} = 3,005\,882 \approx 3,0059$$

$$b = \bar{y} - a \bar{u} = 2,64 - 3,005\,882 \cdot 0,05 = 2,489\,706 \approx 2,4897$$

Ausgleichskurve:  $y = \frac{3,0059 + 2,4897x}{x}$  (siehe Bild A-74)

b)  $y(x=3) \approx 3,49$       c) Verlauf der Ausgleichskurve: Bild A-74

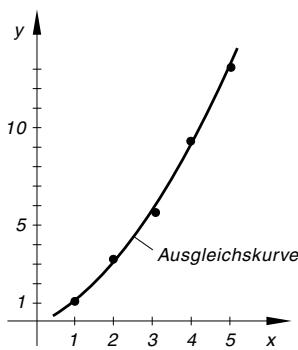


Bild A-73

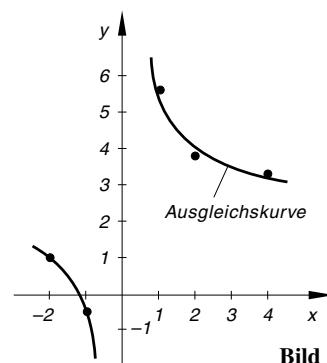


Bild A-74

# Literaturhinweise

## Formelsammlungen

1. *Bronstein / Semendjajew*: Taschenbuch der Mathematik. Deutsch, Thun–Frankfurt/M.
2. *Papula*: Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Springer Vieweg, Wiesbaden.

## Aufgabensammlungen

1. *Minorski*: Aufgabensammlung der Höheren Mathematik. Hanser Verlag–München.
2. *Papula*: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Anwendungsbeispiele. Springer Vieweg, Wiesbaden.
3. *Papula*: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klausur- und Übungsaufgaben. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.

## Vektoranalysis

1. *Schark*: Vektoranalysis für Ingenieurstudenten. Deutsch, Thun–Frankfurt/M.
2. *Spiegel*: Vektoranalysis. Mc Graw-Hill, New York.

## Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

1. *Beyer u. a.*: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Deutsch, Thun–Frankfurt/M.
2. *Blume*: Statistische Methoden für Ingenieure und Naturwissenschaftler. VDI, Düsseldorf.
3. *Bosch*: Elementare Einführung in die angewandte Statistik. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.
4. *Bosch*: Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.
5. *Fisz*: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
6. *Heinhold, Gaede*: Ingenieur-Statistik. Oldenbourg, München.
7. *Henze*: Stochastik für Einsteiger. Springer Spektrum, Wiesbaden.
8. *Krengel*: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Vieweg + Teuber, Wiesbaden.
9. *Kreyszig*: Statistische Methoden und ihre Anwendungen. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen.
10. *Lipschutz*: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mc Graw-Hill, New York.
11. *Spiegel*: Statistik. Mc Graw-Hill, New York.
12. *Stahel*: Statistische Datenanalyse. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.
13. *Weber*: Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Ingenieure. Teubner, Stuttgart.

## Fehler- und Ausgleichsrechnung

1. *Hartwig*: Einführung in die Fehler- und Ausgleichsrechnung. Hanser, München–Wien.
2. *Hänsel*: Grundzüge der Fehlerrechnung. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
3. *Ludwig*: Methoden der Fehler- und Ausgleichsrechnung. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.
4. *Taylor*: Fehleranalyse. Verlag Chemie, Weinheim.

# Sachwortverzeichnis

## A

- abhängige Stichproben 570
- Ablehnungsbereich 543, 548
- Ableitung eines Vektors nach einem Parameter 4ff.
- Ableitungsregeln für Vektoren 8
- Abnahmekontrolle 366, 551f.
- absolute Häufigkeit 276
  - eines Stichprobenwertes 475
- absolute Klassenhäufigkeit 481
- Messabweichung 676
- absoluter Fehler 676
- abzählbar unendliche Ergebnismenge 269
- Additionssatz für beliebige Ereignisse 290
  - für Mittelwerte 425f.
  - für sich gegenseitig ausschließende Ereignisse 285
  - für Varianzen 430f.
- Alternativhypothese 541, 544f., 604, 607
- Annahmebereich 542, 547
- Anpassungstest 604ff.
- Anteilswert 500, 507
  - , Schätzfunktion 500f., 508
  - , Schätzwert 500f., 506ff.
  - , Vertrauensintervall 536f.
- Approximation einer diskreten Verteilung durch die Normalverteilung 401ff.
- Äquipotentialfläche 50
- Arbeit eines Kraftfeldes 143ff., 167f.
- Arbeitsintegral 144f., 167f.
- arithmetischer Mittelwert 663, 674
- Ausfallwahrscheinlichkeit 391
- Ausgleichsgerade 635, 697, 701ff.
- Ausgleichskurven 633, 635f., 694ff.
  - , Lösungsansätze 699
- Ausgleichsparabel 635, 697, 715f.
- Ausgleichsproblem, lineares 701ff.
  - , nichtlineares 719ff.
- Ausgleichsrechnung 694ff.
- axialsymmetrisches Vektorfeld 58, 60, 119f.
- Axiome von Kolmogoroff 284f.

## B

- Basisvektoren in Kugelkoordinaten 129, 131
  - in Polarkoordinaten 95, 99
  - in Zylinderkoordinaten 112, 114
- Baumdiagramm 303
- Bayessche Formel 311ff.
- bedingte Wahrscheinlichkeit 292f.
- Bereich, einfacher zusammenhängender 154f.
  - , kritischer 543, 547
  - , mehrfach zusammenhängender 155
  - , nichtkritischer 542, 547
  - , zweifach zusammenhängender 155
- Bereichsschätzung 494
- Bernoulli-Experiment 350
- Beschleunigungsvektor 9, 27f.
  - , Normalkomponente 28f.
  - , Tangentialkomponente 28f.
- Binomialverteilung 350ff.
  - , Approximation durch eine Normalverteilung 393ff., 402
  - , Approximation durch eine Poissonverteilung 402
  - , Kennwerte 356
  - , Maßzahlen 356
  - , Mittelwert 356
  - , Parameter 353, 356
  - , Schätzwert für den Parameter  $p$  500f., 506ff.
  - , Standardabweichung 356
  - , Varianz 356
  - , Verteilungsfunktion 355f.
  - , Wahrscheinlichkeitsfunktion 353, 356
- Bogendifferential 14
- Bogenelement 14
- Bogenlänge 12ff.
  - einer ebenen Kurve 14
  - einer Raumkurve 14
- Breitenkoordinate 128

## C

- Chi-Quadrat-Test 607ff.
- Chi-Quadrat-Verteilung 441ff.

- , Annäherung durch eine Normalverteilung 445
  - , Dichtefunktion 441, 444
  - , Freiheitsgrad 442, 444
  - , Kennwerte 444
  - , Maßzahlen 444
  - , Mittelwert 443
  - , Parameter 442, 444
  - , Quantile (Tabelle) 744
  - , Standardabweichung 444
  - , Varianz 443 f.
  - , Verteilungsfunktion 443 f.
- D**
- de Morgansche Regeln 275
  - Dichtefunktion einer stetigen Verteilung 327, 330
    - einer stetigen zweidimensionalen Verteilung 411 f.
  - Differentiation eines Vektors nach einem Parameter 4 ff.
  - Differenzentest für Mittelwerte 572, 579 f., 584 ff.
  - Differenzmenge 273
  - disjunkte Menge 274
  - diskrete Verteilung 319 ff.
    - –, Wahrscheinlichkeitsfunktion 320 f.
  - diskrete Zufallsvariable 317
    - –, Erwartungswert 336
    - –, Mittelwert 340 f.
    - –, Standardabweichung 340 f.
    - –, Varianz 340 f.
    - –, Verteilungsfunktion 321
    - –, Wahrscheinlichkeitsverteilung 319 ff.
  - diskrete zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung 408 ff.
  - Divergenz des Ortsvektors 75
    - eines Geschwindigkeitsfeldes 73
    - eines Vektorfeldes 73 f.
    - in Kugelkoordinaten 135
    - in Polarkoordinaten 102
    - in Zylinderkoordinaten 117
    - , Rechenregeln 77
  - doppellogarithmisches Koordinatenpapier 720
  - Durchschnitt von Ereignissen 273
- E**
- ebene Kurve 1 f.
    - –, Tangentenvektor 6
- ebenes Skalarfeld 50
    - Vektorfeld 52
  - effiziente Schätzfunktion 497 f.
  - einfach zusammenhängender Bereich 154 f.
  - einseitiger Parametertest 549, 559, 567, 591, 597
  - elektrisches Feld einer Punktladung 68 ff., 139 ff.
    - – eines homogen geladenen Drahtes 165 f.
    - – eines homogen geladenen Zylinders 58 f., 77 f., 120 f., 222 ff.
  - Elektronen im Magnetfeld 3 f., 10 f., 16, 168 f.
  - Elementarereignis 262, 269
  - empirische Kovarianz 621
    - Restvarianz 710, 713
    - Wahrscheinlichkeitswerte 286
  - empirischer Korrelationskoeffizient 621, 709, 712
    - Mittelwert 486
  - endliche Ergebnismenge 264, 269
    - Grundgesamtheit 472
  - Ereignis 270
    - , Durchschnitt von Ereignissen 273
    - , Elementarereignis 262, 269
    - , komplementäres 273
    - , sicheres 271
    - , statistisch unabhängige Ereignisse 299
    - , stochastisch unabhängige Ereignisse 299
    - , unmögliches 270
    - , Vereinigung von Ereignissen 273
    - , zusammengesetztes 273
  - Ereignisbaum 303
  - Ereignisfeld 270
  - Ereignisraum 270
  - Erfolgswahrscheinlichkeit 357, 507
  - Ergebnismenge 264 f., 269
    - , abzählbar unendliche 269
    - , endliche 269
  - Erigiebigkeit eines Feldvektors 177
  - erwartungstreue Schätzfunktion 497 f.
  - Erwartungswert 335
    - einer diskreten Zufallsvariablen 336
    - einer Funktion 339
    - einer stetigen Zufallsvariablen 337
  - Euler-Venn-Diagramm 273
  - exponentialverteilte Zufallsvariable 333 ff., 338, 347 f., 391

- Exponentialverteilung 390 ff.  
 –, Dichtefunktion 390 f.  
 –, Erwartungswert 391  
 –, Kennwerte 391  
 –, Maßzahlen 391  
 –, Mittelwert 391  
 –, Parameter 391  
 –, Schätzwert für den Parameter 502  
 –, Standardabweichung 391  
 –, Varianz 391  
 –, Verteilungsfunktion 391
- F**
- Fehler 650 ff.  
 –, absoluter 676  
 –, grober 651  
 –, mittlerer Fehler der Einzelmessung 667  
 –, mittlerer Fehler des Mittelwertes 667  
 –, prozentualer 676  
 –, relativer 676  
 –, scheinbarer 663  
 –, statistischer 651 f.  
 –, systematischer 651 f.  
 –, wahrer 650  
 –, zufälliger 651 f.
- Fehler 1. Art 550  
 – 2. Art 550, 552
- Fehlerarten 651
- Fehlerfortpflanzung 683 ff.
- Fehlerfortpflanzungsgesetz nach Gauß 683 ff.
- Fehlerrechnung 650 ff.
- Feldlinie 53
- Fläche vom Typ  $z = f(x; y)$  43 ff., 66 ff.  
 –, Koordinatenlinien 31  
 –, Normaleneinheitsvektor 38  
 –, orientierte 177  
 –, Ortsvektor 33  
 –, Parameterkurven 31  
 –, Parameterlinien 31  
 –, Tangentialebene 38 f., 66 f.  
 –, vektorielle Darstellung 31 ff.
- Flächen im Raum 31 ff.
- Flächenelement 41 ff.  
 – auf dem Zylindermantel 110  
 – auf der Kugeloberfläche 127  
 –, orientiertes 177  
 –, vektorielles 171
- Flächenintegral 177
- Flächenkurven 35 f.  
 –, Tangentenvektor 36
- Flächennormale 37 ff.
- Fluss 177  
 – eines axialsymmetrischen Vektorfeldes 199 ff.  
 – eines homogenen Vektorfeldes 195 ff.  
 – eines kugelsymmetrischen Vektorfeldes 202 ff.  
 – eines radialsymmetrischen Vektorfeldes 202 ff.  
 – eines zylindersymmetrischen Vektorfeldes 199 ff.
- Flussintegral 174, 177
- Funktionsdauer technischer Systeme 391
- G**
- Gamma-Funktion 442
- , Rekursionsformeln 446
- Gaußsche Glockenkurve 371, 373, 657  
 – Methode der kleinsten Quadrate 635, 663  
 696, 701, 715
- Gaußsche Normalverteilung 371 ff., 657 ff.  
 –, Dichtefunktion 371 f.  
 –, Erwartungswert 371  
 –, Kennwerte 372  
 –, Maßzahlen 372  
 –, Mittelwert 371 f.  
 –, Parameter 371 f.  
 –, Schätzwert für die Parameter 502, 512  
 –, Standardabweichung 371 f.  
 –, Symmetriezentrum 372  
 –, Varianz 371 f.  
 –, Verteilungsfunktion 372  
 –, zweidimensionale 415 ff.
- Gaußscher Integralsatz 205 ff.  
 – in der Ebene 211 f.
- Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz 683 ff.  
 – Fehlerintegral 375
- gemeinsame Verteilung 404, 407
- geordnete Stichprobe 264
- Geschwindigkeitsfeld auf einer Kugeloberfläche 136 f.
- einer rotierenden Scheibe 83 ff.
- einer Strömung 70, 74
- Geschwindigkeitsvektor 9, 27  
 – einer gleichförmigen Kreisbewegung 105 f.  
 – in Zylinderkoordinaten 121 ff.

- , Normalkomponente 27 f.
  - , Tangentialkomponente 27 f.
  - Gleichverteilung, stetige 331, 345 f.
  - , Dichtefunktion 331
  - , Erwartungswert 345
  - , Mittelwert 345
  - , Varianz 346
  - , Verteilungsfunktion 331
  - Glockenkurve, Gaußsche 371, 373, 657
  - Gradient eines Skalarfeldes 60
    - in Kugelkoordinaten 135
    - in Polarkoordinaten 102
    - in Zylinderkoordinaten 116
  - , Rechenregeln 63
  - Gravitationsfeld der Erde 57, 139
  - Grenzen, kritische 542, 546 f.
  - Grenzwertsatz von Moivre-Laplace 440
  - , zentraler 436 f.
  - grober Fehler 651
  - Grundgesamtheit 472
    - , endliche 472
    - , unendliche 472
  - gruppierte Stichprobe 479 f.
    - , Mittelwert 491
    - , Varianz 491
    - , Verteilungsfunktion 482
- H**
- halblogarithmisches Koordinatenpapier 719
  - harmonische Funktion 90
  - Häufigkeit eines Stichprobenwertes 475
    - , absolute 276
    - , relative 276
  - Häufigkeitsfunktion einer Stichprobe 475 f., 481, 483
    - einer gruppierten Stichprobe 481, 483
  - Häufigkeitsverteilung einer gruppierten Stichprobe 483
    - einer Messreihe 654
    - einer Stichprobe 476, 483
  - Hauptnormaleneinheitsvektor 16 ff.
  - Hauptwert eines Winkels 95
  - Histogramm 481
    - einer Messreihe 654
  - homogenes Vektorfeld 55, 59
  - Hüllenintegral 177
  - hypergeometrische Verteilung 361 ff.
    - , Approximation durch eine Binomialverteilung 402
- –, Approximation durch eine Normalverteilung 402
  - –, Approximation durch eine Poissonverteilung 402
  - –, Kennwerte 364
  - –, Maßzahlen 364
  - –, Mittelwert 364
  - –, Parameter 364
  - –, Standardabweichung 364
  - –, Varianz 364
  - –, Verteilungsfunktion 364
  - –, Wahrscheinlichkeitsfunktion 363 f.
  - Hypothese 544
  - , statistische 544
- I**
- indirekte Messgröße 682
  - –, Messergebnis 688
  - –, Mittelwert 682, 688
  - Integrabilitätsbedingungen 154 ff.
  - Integralsatz von Gauß 205 ff.
    - von Stokes 214 f.
  - Intervallschätzung 494
  - Irrtumswahrscheinlichkeit 516 f., 541, 546
- K**
- Kennwerte einer gruppierten Stichprobe
    - 491
    - einer Stichprobe 485 ff., 491
    - einer Wahrscheinlichkeitsverteilung 335, 340, 344 f.
    - , statistische 485 ff.
  - Klasse 479
  - Klassenhäufigkeit, relative 481
  - Klassenmitte 480
  - klassische Definition der Wahrscheinlichkeit 279
  - Kolmogoroff, Wahrscheinlichkeitsaxiome 484 f.
  - Kombinationen 255 ff.
    - mit Wiederholung 257 f., 264
    - ohne Wiederholung 255 ff., 264
  - Kombinatorik 251 ff.
  - komplementäres Ereignis 273
  - Konfidenzgrenzen 516
  - Konfidenzintervall 494, 516 f.
  - Konfidenzniveau 516 f.
  - konkrete Stichprobe 496

- konservatives Vektorfeld 153  
 – –, Eigenschaften 157  
 konsistente Schätzfunktion 497 f.  
 Konsumentenrisiko 552  
 Kontrollgrenzen 600  
 Kontrollkarte 603  
 Koordinatenlinien einer Fläche 31  
 – – –, Tangentenvektoren 33  
 Koordinatenpapier, doppellogarithmisches 720  
 –, halblogarithmisches 719  
 Korrelation 620  
 Korrelationskoeffizient 630  
 –, empirischer 621, 709, 712  
 korrelierte Stichproben 570  
 korrigierter Mittelwert 675  
 Kovarianz 630  
 –, empirische 621  
 Kraftfeld 144  
 Kriterium für die Wegunabhängigkeit eines Linien- oder Kurvenintegrals 154  
 kritische Grenzen 542, 546 f.  
 kritischer Bereich 543, 547  
 – Wert 542  
 Krümmung einer ebenen Kurve 23  
 – einer Ellipse 25  
 – einer Kurve 21 ff.  
 – einer Schraubenlinie 26  
 – eines Kreises 25  
 Krümmungsradius 22 f.  
 – einer Schraubenlinie 26  
 – eines Kreises 25  
 Kugelkoordinaten 124 ff.  
 kugelsymmetrisches Vektorfeld 56 f., 59, 137 f., 163 f.  
 Kurve, Bogenlänge 12 ff.  
 –, ebene 1 f.  
 –, Hauptnormaleneinheitsvektor 16 ff.  
 –, Krümmung 21 ff.  
 –, Krümmungsradius 22 f.  
 –, natürliche Darstellung 20  
 –, Ortsvektor 1 f.  
 –, Parameterdarstellung 1 f.  
 –, räumliche 1 f.  
 –, Tangenteneinheitsvektor 16 ff.  
 –, Tangentenvektor 5 f., 33, 36  
 Kurvenintegral 145 ff.  
 – längs einer geschlossenen Linie 147  
 –, Berechnung 148
- , wegunabhängiges 153 f.  
 Kurvenkrümmung 21 ff.
- L**
- Lageparameter 486  
 Längenkoordinate 128  
 Laplace-Experiment 276  
 Laplace-Feld 91  
 Laplace-Gleichung 89 f.  
 Laplace-Operator 89 f.  
 – in Kugelkoordinaten 135  
 – in Polarkoordinaten 102  
 – in Zylinderkoordinaten 117  
 Laplace-Raum 278  
 Lebensdauer technischer Systeme 391  
 leere Menge 270  
 Likelihood-Funktion 504  
 –, logarithmierte 506  
 lineare Regression 635  
 lineares Ausgleichsproblem 701 ff.  
 Linearitätssatz für Mittelwerte 426  
 Linienelement 14  
 – in Kugelkoordinaten 128  
 – in Zylinderkoordinaten 110  
 Linienintegral 145 ff.  
 – längs einer geschlossenen Linie 147  
 –, Berechnung 148  
 –, wegunabhängiges 153 f.  
 Linkskrümmung 23  
 logarithmierte Likelihood-Funktion 506
- M**
- Magnetfeld eines stromdurchflossenen linearen Leiters 54 f., 164 f., 227 ff.  
 Mantelfläche eines Rotationsparaboloids 33, 40  
 – eines Zylinders 34, 36  
 Maßzahlen einer Stichprobe 485 ff., 491  
 – einer Wahrscheinlichkeitsverteilung 335, 340, 344 f.  
 –, statistische 485 ff.  
 mathematische Stichprobe 496  
 Maximum-Likelihood-Methode 504 ff.  
 Maximum-Likelihood-Schätzfunktion 505  
 Maxwellsche Gleichungen 79, 119  
 Medianwert 486  
 mehrfach zusammenhängender Bereich 155  
 mehrstufiges Zufallsexperiment 302  
 – –, Wahrscheinlichkeitsregeln 304

- Menge, Differenzmenge 273  
–, disjunkte 274  
–, Ergebnismenge 264 f., 269  
–, leere 270  
–, Restmenge 273  
Merkmalswert 473  
Messabweichung 650 f.  
–, absolute 676  
–, prozentuale 676  
–, relative 676  
–, statistische 651 f.  
–, systematische 651 f.  
–, zufällige 651 f.  
Messergebnis 672, 674  
– für eine indirekte Messgröße 688  
Messfehler 440, 650  
Messgröße, normalverteilte 656 ff.  
Messreihe 650  
–, Mittelwert 663 f., 674  
–, Standardabweichung 664 f., 674  
Messunsicherheit 673 f., 688 f.  
– bei einer indirekten Messgröße 688  
–, systematische Komponente 675  
–, Zufallskomponente 675  
Messwert 650  
Mittelwert 335, 663 f., 674  
– einer diskreten Zufallsvariablen 340 f.  
– einer gruppierten Stichprobe 491  
– einer indirekten Messgröße 682, 688  
– einer linearen Funktion 348 f.  
– einer Messreihe 663 f., 674  
– einer stetigen Zufallsvariablen 344  
– einer Stichprobe 486, 489 f.  
–, Additionssatz für Mittelwerte 425 f.  
–, arithmetischer 663, 674  
–, empirischer 486  
–, korrigierter 675  
–, Linearitätssatz für Mittelwerte 426  
–, mittlerer Fehler 667  
–, Multiplikationssatz für Mittelwerte 427  
–, Schätzfunktion 496, 498, 501, 512  
–, Schätzwert 496, 498, 501, 512  
–, Stichprobenmittelwert 486  
–, Vertrauensbereich 670 f.  
–, Vertrauengrenzen 670  
–, Vertrauensintervall 521, 526, 540  
mittlerer Fehler der Einzelmessung 667  
– – des Mittelwertes 667  
Modalwert 486  
Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung 295, 299  
– für Mittelwerte 427  
– für stochastisch unabhängige Ereignisse 299
- N**
- Nabla-Operator 61  
natürliche Darstellung einer Kurve 20  
nichtkritischer Bereich 542, 547  
nichtlineare Regression 635  
nichtlineares Ausgleichsproblem 719 ff.  
– –, Lösungsansätze 721  
Niveaufläche 50  
Niveaulinie 50  
Normaleneinheitsvektor einer Fläche 38  
Normalgleichungen 699 f., 702, 716  
Normalkomponente des Beschleunigungsvektors 28 f.  
– des Geschwindigkeitsvektors 27 f.  
normalverteilte Messgröße 656 ff.  
Normalverteilung, Gaußsche 371 ff., 657 ff.  
Null-Eins-Verteilung 357  
Nullhypothese 541, 544 f., 604, 607
- O**
- Oberflächenintegral 174, 176  
– in Flächenparametern 190 f.  
–, Berechnung 177 f.  
Operationscharakteristik 552  
optimale Schätzfunktion 498  
orientierte Fläche 177  
orientiertes Flächenelement 177  
Ortsvektor einer ebenen Kurve 2  
– einer Fläche im Raum 33  
– einer Mittelpunktsellipse 24 f.  
– einer räumlichen Kurve 2
- P**
- Parallaxenfehler 651  
Parameterdarstellung einer Kurve 1 f.  
Parameterkurven einer Fläche 31  
Parameterlinien einer Fläche 31  
Parameterschätzung 493 ff.  
Parametertest, einseitiger 549, 559, 567, 591, 597  
–, Planung und Durchführung 545 ff.  
–, zweiseitiger 545  
Parametertests 540 ff.

- Permutationen 252 ff.  
 Pfad 303  
 Pfadregeln 304  
 Poisson-Feld 91  
 Poisson-Gleichung 89 f.  
 Poisson-Verteilung 367 ff.  
 –, Approximation durch eine Normalverteilung 402  
 –, Kennwerte 402  
 –, Maßzahlen 402  
 –, Mittelwert 367 f.  
 –, Parameter 367 f.  
 –, Schätzwert für den Parameter 502, 508 f.  
 –, Standardabweichung 368  
 –, Varianz 367 f.  
 –, Verteilungsfunktion 367 f.  
 –, Wahrscheinlichkeitsfunktion 367 f.  
 Polarkoordinaten 94 f.  
 –, räumliche 128  
 Potential 90, 153  
 Potentialfeld 153  
 Potentialfunktion 90, 153  
 Potentialgleichung 90  
 – des elektrischen Feldes 93  
 Produktregeln 8  
 Produzentenrisiko 551  
 prozentuale Messabweichung 676  
 prozentualer Fehler 676  
 Prüffunktion 549  
 Prüfgröße 549  
 Prüfvariable 546  
 Prüfverteilungen 441 ff.  
 Prüfwert 547  
 Punktschätzung 494  
 Punktfolge 635, 698  
 –, Schwerpunkt 705
- Q**  
 Qualitätskontrolle 599 ff.  
 Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung 744  
 – der Standardnormalverteilung 388 f., 742  
 – der  $t$ -Verteilung von „Student“ 746  
 Quelldichte 74  
 Quelle 73 f.  
 quellenfreies Vektorfeld 74, 85 f.  
 Quellstärke 74
- R**  
 radialsymmetrisches Vektorfeld 56 f., 59, 137 f., 163 f.
- radioaktiver Zerfall 369 f., 495, 509 f.  
 Randverteilungen 406, 409, 412  
 räumliche Kurve 1 f.  
 – –, Tangentenvektor 6  
 – Polarkoordinaten 128  
 räumliches Skalarfeld 50  
 – Stabdiagramm 405  
 – Vektorfeld 52  
 Rechenregeln für Divergenzen 77  
 – für Gradienten 63  
 – für Rotationen 83  
 Rechteckverteilung 331, 345 f.  
 Rechtskrümmung 23  
 Regression 633  
 –, lineare 635  
 –, nichtlineare 635  
 Regressionsgerade 635, 697, 701 ff.  
 Regressionskoeffizient 703, 709, 712  
 Regressionskurven 633, 635 f., 694 ff.  
 Regressionsparabel 635, 697, 715 f.  
 relative Häufigkeit 276  
 – – eines Stichprobenwertes 475  
 – –, Eigenschaften 284  
 relative Klassenhäufigkeit 481  
 – Messabweichung 676  
 relativer Fehler 676  
 Restmenge 273  
 Restvarianz, empirische 710, 713  
 Richtungsableitung 64 f.  
 ringförmiges Magnetfeld 118 f.  
 Rollkurve 15  
 Rotation des Ortsvektors 81  
 – eines Vektorfeldes 79  
 – in Kugelkoordinaten 135  
 – in Polarkoordinaten 102  
 – in Zylinderkoordinaten 117  
 –, Rechenregeln 83
- S**  
 Schätzfunktion für den Mittelwert 496, 498, 501, 512  
 – für die Standardabweichung 500, 502  
 – für die Varianz 499, 501  
 – für einen Anteilswert 500 f., 508  
 – für einen unbekannten Parameter 494 ff.  
 –, effiziente 497 f.  
 –, erwartungstreue 497 f.  
 –, konsistente 497 f.  
 –, Maximum-Likelihood-Schätzfunktion 505

- , optimale 498
- , wirksame 497 f.
- Schätzwert für den Mittelwert 496, 498, 501, 512
  - für den Parameter der Exponentialverteilung 502
  - für den Parameter der Poisson-Verteilung 502, 508 f.
  - für den Parameter  $p$  der Binomialverteilung 500 f., 506 ff.
  - für die Parameter der Gaußschen Normalverteilung 502, 512
  - für die Varianz 499, 501
  - für einen Anteilswert 500 f., 506 ff.
  - für einen unbekannten Parameter 494 ff.
- scheinbarer Fehler 663
- Scheinkorrelation 626
- Schiefer Wurf 2 f., 10
- Schraubenlinie 3, 25 f., 122 f.
- Schwerpunkt einer Punktwolke 705
- Senke 74
- sicheres Ereignis 271
- Signifikanzniveau 546
- Signifikanztest 555
- Signifikanzzahl 541, 546
- Skalarfeld 49 f.
  - in Kugelkoordinaten 135
  - in Polarkoordinaten 101
  - in Zylinderkoordinaten 116
  - ebenes 50
  - Gradient 60
  - , räumliches 50
  - , stationäres 50
- Sollwert 599
- Spannweite einer Stichprobe 475
- Stabdiagramm 276, 320, 405, 475
  - , räumliches 405
- Standardabweichung 335
  - des Mittelwertes einer Messreihe 665 f., 674
  - einer diskreten Zufallsvariablen 340 f.
  - einer linearen Funktion 349
  - einer Messreihe 664, 666, 674
  - einer stetigen Zufallsvariablen 345
  - einer Stichprobe 486
  - , Schätzfunktion 500, 502
- standardisierte Zufallsvariable 350
- standardnormalverteilte Zufallsvariable 374
- Standardnormalverteilung 374 ff.
  - , Berechnung von Wahrscheinlichkeiten 378 ff.
  - , Dichtefunktion 374
  - , Mittelwert 374
  - , Parameter 374
  - , Quantile 388 f., 742
  - , Standardabweichung 374
  - , Tabelle der Quantile 742
  - , Tabelle der Verteilungsfunktion 740
  - , Verteilungsfunktion 374, 740
- Standardtransformation 350
- stationäres Skalarfeld 50
- statistisch unabhängige Ereignisse 299
- statistische Hypothese 544
  - Kennwerte 485 ff.
  - Messabweichung 651 f.
- Prüfverfahren für die unbekannte Verteilungsfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung 604 ff.
- Prüfverfahren für unbekannte Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung 540 ff.
- Schätzmethoden für unbekannte Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung 493 ff.
- Wahrscheinlichkeitswerte 286
- statistischer Fehler 651 f.
- stetige Gleichverteilung 331, 345 f.
  - Verteilung 327 ff.
- stetige Zufallsvariable 317
  - –, Erwartungswert 337
  - –, Mittelwert 344
  - –, Standardabweichung 345
  - –, Varianz 344
  - –, Verteilungsfunktion 327, 330, 411 f.
  - –, Wahrscheinlichkeitsverteilung 327 ff.
- stetige zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung 411 f.
- Stetigkeitskorrektur 396, 400
- Stichprobe 252, 472 f.
  - , abhängige Stichproben 570
  - , geordnete 264
  - , gruppierte 479 f.
  - , Häufigkeitsfunktion 475 f., 481, 483
  - , Häufigkeitsverteilung 476, 483
  - , Kennwerte 485 ff., 491
  - , konkrete 496
  - , korrelierte Stichproben 570
  - , Maßzahlen 485 ff., 491
  - , mathematische 496
  - , Mittelwert 486, 489, 491
  - , Spannweite 475
  - , Standardabweichung 486
  - , Summenhäufigkeitsfunktion 477 f.

- , unabhängige Stichproben 570
  - , ungeordnete 264
  - , Varianz 486, 489, 491
  - , verbundene Stichproben 570
  - , Verteilungsfunktion 477f., 482
  - Stichprobenfunktion 496
  - Stichprobenmittelwert 486
  - Stichprobenpunkte 620
  - Stichprobenwert 473
  - stochastisch unabhängige Ereignisse 299
  - – –, Multiplikationssatz 299
  - – Zufallsvariable 417f.
  - Stokesscher Integralsatz 214f.
  - Streuungsdiagramm 620, 698
  - Streuungsmaß 341
  - Summe von stochastisch unabhängigen und normalverteilten Zufallsvariablen 431
  - Summenhäufigkeitsfunktion einer Stichprobe 477f.
  - Summenregel 8
  - Symmetriezentrum einer Wahrscheinlichkeitsverteilung 341, 345
  - systematische Messabweichung 651f.
    - Komponente der Messunsicherheit 675
  - systematischer Fehler 651f.
- T**
- t*-Verteilung von „Student“ 446 ff.
  - , Approximation durch die Standardnormalverteilung 449
  - , Dichtefunktion 446, 448
  - , Freiheitsgrad 446, 448
  - , Kennwerte 448
  - , Maßzahlen 448
  - , Mittelwert 447 f.
  - , Parameter 446, 448
  - , Quantile (Tabelle) 746
  - , Varianz 447 f.
  - , Verteilungsfunktion 447 f.
  - Tangenteneinheitsvektor 16 ff.
  - Tangentenvektor 5 f.
    - einer ebenen Kurve 6
    - einer Flächenkurve 36
    - einer Raumkurve 6
  - Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien 33
  - Tangentialebene 38 f., 66 f.
- Tangentialkomponente des Beschleunigungsvektors 28 f.
  - des Geschwindigkeitsvektors 27 f.
  - Test für den Mittelwert einer Normalverteilung (bei bekannter Varianz) 558 f.
    - für den Mittelwert einer Normalverteilung (bei unbekannter Varianz) 565 f.
    - für die Gleichheit der Mittelwerte zweier Normalverteilungen 571, 579 f., 584 f.
    - für die Varianz einer Normalverteilung 589 f.
    - für einen Anteilswert 595 f.
  - Testfunktion 549
  - Testgröße 549
  - Testvariable 546
  - Testverteilungen 441 ff.
  - Testwert 547
  - Toleranzbereich 600
  - Toleranzgrenzen 600
  - totale Wahrscheinlichkeit 308 ff.
  - Trennschärfe 554
  - Treppenfunktion 319, 478, 482
- U**
- Umlaufspannung 166
  - unabhängige Stichproben 570
  - unendliche Grundgesamtheit 472
  - ungeordnete Stichprobe 264
  - unkorrelierte Zufallsvariable 630
  - unmögliches Ereignis 270
  - Urnenmodell 251 f.
- V**
- Varianz 335, 340, 344
    - einer diskreten Zufallsvariablen 340 f.
    - einer gruppierten Stichprobe 491
    - einer linearen Funktion 348 f.
    - einer stetigen Zufallsvariablen 344
    - einer Stichprobe 486, 489, 491
    - , Additionssatz 430 f.
    - , Fortpflanzungsgesetz 685 f.
    - , Schätzfunktion 499, 501
    - , Schätzwert 499, 501
    - , Vertrauensintervall 531 f.
  - Varianzfortpflanzungsgesetz 685 f.
  - Variation 260 ff.
    - mit Wiederholung 261 f., 264
    - ohne Wiederholung 260, 262, 264

- Vektor, parameterabhängiger 2
    - , Ableitung nach einem Parameter 4ff.
    - , Differentiation nach einem Parameter 4ff.
  - Vektordarstellung in Kugelkoordinaten
    - 130f.
    - in Polarkoordinaten 98 ff.
    - in Zylinderkoordinaten 113f.
  - Vektorfeld 48, 52
    - in Kugelkoordinaten 135
    - in Polarkoordinaten 101
    - in Zylinderkoordinaten 116
    - , axialsymmetrisches 58, 60, 119f.
    - , Divergenz 73f.
    - , ebenes 52
    - , homogenes 55, 59
    - , konservatives 153
    - , kugelsymmetrisches 56f., 59, 137f., 163f.
    - , quellenfreies 74, 85f.
    - , radialsymmetrisches 56f., 59, 137f., 163f.
    - , räumliches 52
    - , Rotation 79
    - , Wirbdichte 80
    - , Wirbelfeld 80
    - , Wirbelfluss 215
    - , wirbelfreies 80, 87f.
    - , zylindersymmetrisches 58, 60, 119f.
  - Vektorfunktion 2
    - vektorielle Darstellung einer Fläche 31ff.
    - vektorielles Flächenelement 171
  - Vektorpotential 85f.
  - verbundene Stichproben 570
  - Vereinigung von Ereignissen 273
  - Verteilung, Binomialverteilung 350ff.
    - , Chi-Quadrat-Verteilung 441 ff.
    - , diskrete 319 ff.
    - , Exponentialverteilung 390ff.
    - , Gaußsche Normalverteilung 371 ff., 657 ff.
    - , gemeinsame 404, 407
    - , Gleichverteilung 331, 345f.
    - , hypergeometrische 361ff.
    - , Null-Eins-Verteilung 357
    - , Poisson-Verteilung 367ff.
    - , Prüfverteilung 441 ff.
    - , Randverteilung 406, 409, 412
    - , Rechteckverteilung 331, 345f.
    - , Standardnormalverteilung 374ff.
    - , stetige 327ff.
  - , stetige Gleichverteilung 331, 345f.
  - , Testverteilung 441ff.
  - , *t*-Verteilung von „Student“ 446 ff.
  - , Weibull-Verteilung 335
  - , zweidimensionale 404, 407
  - Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariablen 321
    - einer diskreten zweidimensionalen Verteilung 409
    - einer gruppierten Stichprobe 482
    - einer stetigen Verteilung 327, 330
    - einer stetigen zweidimensionalen Verteilung 411f.
    - einer Stichprobe 477f., 482
    - einer Zufallsvariablen 318f.
    - einer zweidimensionalen Zufallsvariablen 407
  - Verteilungstabelle 475
    - , zweidimensionale 404, 408
  - Verteilungstest 604ff.
  - Vertrauensbereich für den Mittelwert einer Messreihe 670f.
  - Vertrauengrenzen 516
    - für den Mittelwert einer Messreihe 670
  - Vertrauensintervall 494, 516f.
    - für den Mittelwert 521, 526, 540
    - für den Mittelwert einer beliebigen Verteilung 540
    - für den Mittelwert einer Normalverteilung (bei bekannter Varianz) 521
    - für den Mittelwert einer Normalverteilung (bei unbekannter Varianz) 526
    - für die Varianz einer Normalverteilung 531f.
    - für einen Anteilswert 536f.
  - Vertrauensniveau 516f.
  - Verwerfungsbereich 548
  - Verzweigungspunkt 303
  - Volumenelement in Kugelkoordinaten 128
    - in Zylinderkoordinaten 111
  - Vorlaufstichprobe 600
- W**
- wahrer Fehler 650
  - Wahrscheinlichkeit bei einem Laplace-Experiment 278
    - , Additionssatz 285, 290
    - , Axiome von Kolmogoroff 284f.
    - , bedingte 292f.

- , klassische Definition 279
  - , Multiplikationssatz 295, 299
  - , totale 308 ff.
  - Wahrscheinlichkeitsaxiome von Kolmogoroff 284 f.
  - Wahrscheinlichkeitsdiagramm 320
  - Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion 327, 330
  - Wahrscheinlichkeitsfunktion einer diskreten Verteilung 320 f.
  - einer diskreten zweidimensionalen Verteilung 408 f.
  - Wahrscheinlichkeitsraum 287 f.
  - Wahrscheinlichkeitsrechnung 251 ff.
  - Wahrscheinlichkeitsregeln für ein mehrstufiges Zufallsexperiment 304
  - Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen 319 ff.
  - einer stetigen Zufallsvariablen 327 ff.
  - einer Summe von Zufallsvariablen 438 f.
  - von mehreren Zufallsvariablen 403 ff.
  - , Kennwerte 335, 340, 344 f.
  - , Maßzahlen 335, 340, 344 f.
  - , zweidimensionale 406 ff.
  - Wahrscheinlichkeitswerte, statistische 286
  - wegunabhängiges Linien- oder Kurvenintegral 153 f.
  - Weibull-Verteilung 335
  - Wirbdichte eines Vektorfeldes 80
  - Wirbfeld 80
  - Wirbelfluss 215
  - wirbelfreies Vektorfeld 80, 87 f.
  - wirksame Schätzfunktion 497 f.
  - Wurf einer Münze 274, 276, 288 ff., 300, 351, 410 f., 544
  - mit einem Würfel 264 f., 269 f., 271, 274, 279 f., 291 f., 315, 317, 322, 336 f., 605 ff., 613 f.
  - mit zwei Würfeln 263, 265 f., 280, 294 f., 315 f., 323 f., 342 f., 424, 426, 428 ff., 468
  - , schiefer 2 f., 10
  - Wurfparabel 2
- Z**
- zentraler Grenzwertsatz 436 f.
  - Zentralfeld 56 f., 59, 137 f., 163 f.
  - Zentralwert 486
  - Zentripetalbeschleunigung 28
  - Ziehung mit Zurücklegen 252, 257, 261, 267 f.
  - ohne Zurücklegen 251, 255 f., 260 f.
  - Zirkulation 147
  - zufällige Messabweichung 651 f.
  - zufälliger Fehler 651 f.
  - Zufallsexperiment 265, 268
  - , mehrstufiges 302
  - Zufallsgröße 315, 317
  - Zufallskomponente der Messunsicherheit 675
  - Zufallsprozess 302
  - Zufallsstichprobe 473
  - Zufallsvariable 315, 317
  - , diskrete 317
  - , exponentialverteilte 333 ff., 347 f., 391
  - , standardisierte 350
  - , standardnormalverteilte 374
  - , stetige 317
  - , stochastisch unabhängige 417 f.
  - , unkorrelierte 630
  - , Verteilungsfunktion 318 f.
  - , zweidimensionale 404, 406 f.
  - Zufallsvektor, zweidimensionaler 407
  - zusammengesetztes Ereignis 273
  - Zuverlässigkeitsfunktion 392
  - zweidimensionale Normalverteilung 415 ff.
  - Verteilung 404, 407, 409
  - Verteilungstabelle 404, 408
  - Wahrscheinlichkeitsverteilung 406 ff.
  - Wahrscheinlichkeitsverteilung, diskrete 408 f.
  - Wahrscheinlichkeitsverteilung, stetige 411 f.
  - Zufallsvariable 404, 406 f.
  - –, Verteilungsfunktion 407
  - zweidimensionaler Zufallsvektor 407
  - zweifach zusammenhängender Bereich 155
  - Zweig 303
  - zweiseitiger Parametertest 545
  - Zykloide 15
  - Zylinderkoordinaten 107 ff.
  - zylindersymmetrisches Vektorfeld 58, 60, 119 f.