Lothar Papula

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Klausur- und Übungsaufgaben

632 Aufgaben mit ausführlichen Lösungen
zum Selbststudium und zur Prüfungsvorbereitung

4. Auflage

STUDIUM

VIEWEG+
TEUBNER

Lothar Papula

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler
Klausur- und Übungsaufgaben

Das sechsbändige Lehr- und Lernsystem *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler* umfasst neben dem Buch mit Klausur- und Übungsaufgaben die folgenden Bände:

Papula, Lothar
Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1
Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium
Mit 609 Abbildungen, zahlreichen Beispielen aus Naturwissenschaft
und Technik sowie 352 Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2
Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium
Mit 345 Abbildungen, zahlreichen Beispielen aus Naturwissenschaft
und Technik sowie 324 Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 3
Vektoranalysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik,
Fehler- und Ausgleichsrechnung
Mit 549 Abbildungen, zahlreichen Beispielen aus Naturwissenschaft
und Technik sowie 285 Übungsaufgaben mit ausführlichen Lösungen

Mathematische Formelsammlung
für Ingenieure und Naturwissenschaftler
Mit über 400 Abbildungen und zahlreichen Rechenbeispielen
und einer ausführlichen Integraltafel

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler –
Anwendungsbeispiele
Aufgabenstellungen aus Naturwissenschaft und Technik
mit ausführlichen Lösungen

www.viewegteubner.de

Lothar Papula

Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Klausur- und Übungsaufgaben

632 Aufgaben mit ausführlichen Lösungen
zum Selbststudium und zur Prüfungsvorbereitung

4., überarbeitete und erweiterte Auflage

Mit 320 Abbildungen

STUDIUM

VIEWEG+
TEUBNER

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

1. Auflage 2004
2., durchgesehene und erweiterte Auflage 2007
3., durchgesehene und erweiterte Auflage 2008
4., überarbeitete und erweiterte Auflage 2010

Alle Rechte vorbehalten
© Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2010

Lektorat: Thomas Zipsner

Vieweg+Teubner Verlag ist eine Marke von Springer Fachmedien.
Springer Fachmedien ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.viewegteubner.de

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Technische Redaktion: Gabriele McLemore, Wiesbaden
Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg
Bilder: Graphik & Text Studio Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing
Satz: Druckhaus Thomas Müntzer GmbH, Bad Langensalza
Druck und buchbinderische Verarbeitung: Těšínská Tiskárna, a. s., Tschechien
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Czech Republic

ISBN 978-3-8348-1305-3

Vorwort

Entwicklung und Erwerb der Fähigkeit, die im Grundstudium vermittelten mathematischen Kenntnisse auf Problemstellungen aus Naturwissenschaft und Technik erfolgreich anwenden zu können, sind ein wesentliches Ziel der Grundausbildung und somit zugleich auch Voraussetzung für ein erfolgreiches Studium. Dieses Ziel ist aber nur erreichbar durch ständiges und intensives **Training (Üben)**, zumal die Defizite der Studienanfänger in den Grundlagenfächern wie Mathematik nach wie vor *enorm* sind.

Die vorliegende Sammlung enthält 632 ausführlich und vollständig gelöste Übungs- und Klausuraufgaben und bietet dem Studienanfänger *Hilfestellung* und *Unterstützung* auf dem Wege zum genannten Ziel. Dieses Buch ermöglicht

- als ständiger **Begleiter zur Vorlesung** das intensive **Einüben** und **Vertiefen** des Vorlesungsstoffes,
- eine gezielte und optimale Vorbereitung auf die **Prüfungen und Klausuren** des Grundstudiums
- und eignet sich in besonderem Maße zum **Selbststudium.**

Die Lösung der Aufgaben wird dabei *Schritt für Schritt* vorgeführt, der Lösungsweg ist damit leicht nachvollziehbar. Alle verwendeten Regeln werden genannt und erklärt, wobei besondere Sorgfalt auf die **elementaren** Rechenschritte gelegt wird. Denn die tägliche Arbeit mit den Anfangssemestern bringt es immer wieder zu Tage: Die größten Probleme treten meist im Bereich der **Elementarmathematik** auf (*Wer kann heutzutage noch fehlerfrei mit Logarithmen, Wurzeln und Potenzen umgehen? Wie werden eigentlich Brüche addiert?*). Daher werden in diesem Buch auch die beim Lösen einer Aufgabe auftretenden *elementarmathematischen* Probleme behandelt und alle nötigen Rechenschritte besprochen.

Welche Stoffgebiete wurden berücksichtigt?

Die Auswahl der Stoffgebiete ist auf die Mathematikvorlesungen im *Grundstudium* abgestimmt. Zahlreiche der 632 Aufgaben sind dabei **anwendungsorientiert** formuliert und beschreiben einfache Problemstellungen aus *Naturwissenschaft und Technik*. Berücksichtigt wurden folgende Gebiete:

- Funktionen und Kurven
- Differentialrechnung
- Integralrechnung
- Taylor- und Fourier-Reihen
- Partielle Differentiation
- Mehrfachintegrale
- Gewöhnliche Differentialgleichungen
- Laplace-Transformationen (im Zusammenhang mit linearen Differentialgleichungen)
- Komplexe Zahlen und Funktionen
- Vektorrechnung
- Lineare Algebra

Veränderungen gegenüber der 3. Auflage

Neu aufgenommen wurde ein Kapitel über *Komplexe Zahlen und Funktionen* (komplexe Rechnung und Anwendungen u. a. in der Schwingungslehre und Wechselstromtechnik).

Ein Wort des Dankes . . .

. . . an Frau McLemore, Frau Zander und Herrn Zipsner vom Vieweg + Teubner Verlag für die hervorragende Unterstützung bei der Erstellung dieses Werkes,

. . . an Frau Schulz, Herrn Hölzer und Herrn Wunderlich vom Druck- und Satzhaus „Thomas Müntzer“ für den ausgezeichneten mathematischen Satz.

Wiesbaden, im Sommer 2010 *Lothar Papula*

Hinweise für den Benutzer

- Die Übungs- und Klausuraufgaben sind *kapitelweise* durchnummeriert.
- Zu Beginn eines jeden Kapitels bzw. Abschnitts finden Sie Hinweise auf das **Lehrbuch** „Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler“ (Band 1–3) sowie auf die **Mathematische Formelsammlung** des Autors. Hier können Sie die zum Lösen der Aufgaben benötigten mathematischen Hilfsmittel nachlesen und gegebenenfalls nacharbeiten. Beachten Sie auch die weiteren nützlichen Informationen.
- Die *vollständige Lösung* der jeweiligen Aufgabe finden Sie direkt im Anschluss an die Aufgabenstellung. So wird lästiges Blättern vermieden.
- **Folgen Sie meiner Empfehlung:**

  Versuchen Sie zunächst, die Aufgaben **selbst** zu lösen (Lösungsteil vorher abdecken). Skizzen erleichtern dabei in vielen Fällen den Lösungsweg. Vergleichen Sie dann „Ihre“ Lösung mit der angegebenen Lösung. Sollten Sie bei einem Zwischenschritt „hängen bleiben“, so greifen Sie auf die vorgegebene Lösung zurück und versuchen einen neuen Start. Denn auch aus Fehlern lernt man.
- **Verwendete Abkürzungen**

  Bd. 1 → Band 1 des Lehr- und Lernsystems „Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler“

  FS → Mathematische Formelsammlung

  Dgl → Differentialgleichung

  LGS → Lineares Gleichungssystem

Inhaltsverzeichnis

A Funktionen und Kurven

Hinweise für das gesamte Kapitel

Kürzen eines gemeinsamen Faktors wird durch *Grauunterlegung* gekennzeichnet.

1 Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel III.5
Formelsammlung: Kapitel III.4

A1

Zerlegen Sie die folgenden ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen) in *Linearfaktoren*:

a) $y = -2x^3 + 20x^2 - 24x - 144$

b) $y = 2x^4 + 12x^3 - 44x + 30$

c) $y = 3x^5 + 3x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 81x + 81$

d) $y = x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 37x - 30$

Lösungsweg: Durch *Probieren* eine Nullstelle bestimmen, dann das Polynom mit Hilfe des *Horner-Schemas* reduzieren. Das Verfahren so lange wiederholen, bis man auf eine *quadratische* Gleichung stößt, aus der man die restlichen Nullstellen erhält. Fehlen Potenzen (ist also das Polynom *unvollständig*), so sind im Horner-Schema die entsprechenden Koeffizienten gleich *Null* zu setzen.

a) Eine Nullstelle liegt bei $x_1 = -2$; das Polynom ist *vollständig*:

	-2	20	-24	-144
$x_1 = -2$		4	-48	144
	-2	24	-72	0

$\Rightarrow$ *1. reduziertes Polynom:* $-2x^2 + 24x - 72$

Restliche Nullstellen: $-2x^2 + 24x - 72 = 0 \mid : (-2) \quad \Rightarrow \quad x^2 - 12x + 36 = 0 \quad \Rightarrow$

$$x_{2/3} = 6 \pm \sqrt{36 - 36} = 6 \pm \sqrt{0} = 6 \pm 0 = 6$$

Nullstellen: $x_1 = -2; \quad x_2 = 6; \quad x_3 = 6$

Produktform (Zerlegung in Linearfaktoren):

$$y = -2(x + 2)(x - 6)(x - 6) = -2(x + 2)(x - 6)^2$$

L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Klausur- und Übungsaufgaben,*
DOI 10.1007/978-3-8348-9730-5_1,© Vieweg+Teubner Verlag |Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2010

b) Eine Nullstelle liegt bei $x_1 = 1$; das Polynom ist *unvollständig* (es fehlt das *quadratische* Glied):

	2	12	0	-44	30
$x_1 = 1$		2	14	14	-30
	2	14	14	-30	0

⇒ *1. reduziertes Polynom:* $2x^3 + 14x^2 + 14x - 30$

Eine weitere Nullstelle liegt bei $x_2 = 1$; das 1. reduzierte Polynom ist *vollständig*:

	2	14	14	-30
$x_2 = 1$		2	16	30
	2	16	30	0

⇒ *2. reduziertes Polynom:* $2x^2 + 16x + 30$

Restliche Nullstellen: $2x^2 + 16x + 30 = 0 \mid :2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 8x + 15 = 0 \quad \Rightarrow$

$$x_{3/4} = -4 \pm \sqrt{16 - 15} = -4 \pm \sqrt{1} = -4 \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -3; \quad x_4 = -5$$

Nullstellen: $x_1 = 1; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = -3; \quad x_4 = -5$

Produktform (Zerlegung in Linearfaktoren):

$$y = 2(x - 1)(x - 1)(x + 3)(x + 5) = 2(x - 1)^2 (x + 3)(x + 5)$$

c) Eine Nullstelle liegt bei $x_1 = -1$; das Polynom ist *vollständig*:

	3	3	-36	-36	81	81
$x_1 = -1$		-3	0	36	0	-81
	3	0	-36	0	81	0

⇒ *1. reduziertes Polynom:* $3x^4 - 36x^2 + 81$

Die *restlichen* Nullstellen erhalten wir aus der *bi-quadratischen* Gleichung $3x^4 - 36x^2 + 81 = 0$, die wir durch die *Substitution* $u = x^2$ wie folgt lösen:

$$3x^4 - 36x^2 + 81 = 0 \mid :3 \quad \Rightarrow \quad x^4 - 12x^2 + 27 = 0 \quad \Rightarrow \quad u^2 - 12u + 27 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$u_{1/2} = 6 \pm \sqrt{36 - 27} = 6 \pm \sqrt{9} = 6 \pm 3 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 9; \quad u_2 = 3$$

Rücksubstitution: $x^2 = u_1 = 9 \quad \Rightarrow \quad x_{2/3} = \pm 3; \quad x^2 = u_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_{4/5} = \pm\sqrt{3}$

Nullstellen: $x_1 = -1; \quad x_2 = 3; \quad x_3 = -3; \quad x_4 = \sqrt{3}; \quad x_5 = -\sqrt{3}$

Produktform (Zerlegung in Linearfaktoren):

$$y = 3(x + 1)(x - 3)(x + 3)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

d) Eine Nullstelle liegt bei $x_1 = -1$; das Polynom ist *vollständig*:

	1	4	4	-6	-37	-30
$x_1 = -1$		-1	-3	-1	7	30
	1	3	1	-7	-30	0

⇒ *1. reduziertes Polynom:*
$x^4 + 3x^3 + x^2 - 7x - 30$

Eine weitere Nullstelle liegt bei $x_2 = 2$; das 1. reduzierte Polynom ist *vollständig*:

	1	3	1	-7	-30
$x_2 = 2$		2	10	22	30
	1	5	11	15	0

$\Rightarrow$ *2. reduziertes Polynom:* $x^3 + 5x^2 + 11x + 15$

Eine weitere Nullstelle liegt bei $x_3 = -3$; das 2. reduzierte Polynom ist *vollständig*:

	1	5	11	15
$x_3 = -3$		-3	-6	-15
	1	2	5	0

$\Rightarrow$ *3. reduziertes Polynom:* $x^2 + 2x + 5$

Es gibt *keine* weiteren Nullstellen, da die Gleichung $x^2 + 2x + 5 = 0$ *keine* reellen Lösungen hat. Der quadratische Faktor $x^2 + 2x + 5$ lässt sich daher nicht weiter zerlegen.

Produktform (Zerlegung in Linearfaktoren):

$$y = (x + 1)(x - 2)(x + 3)(x^2 + 2x + 5)$$

A2

Wie lautet die Gleichung der in Bild A-1 skizzierten *Polynomfunktion 3. Grades*?

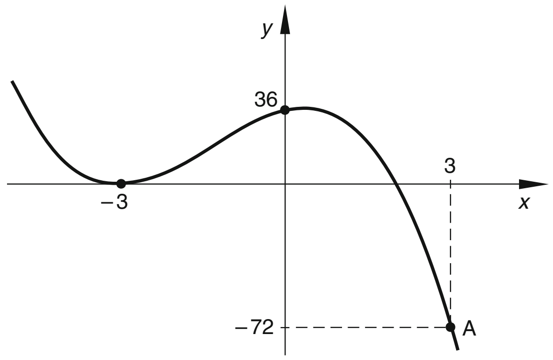


Bild A-1

Bei $x_1 = -3$ liegt eine *doppelte* Nullstelle (relatives Minimum, Berührungspunkt), eine weitere *einfache* Nullstelle gibt es bei x_2 (noch unbekannt, $0 < x_2 < 3$). Wir verwenden den *Produktansatz* (Zerlegung in Linearfaktoren)

$$y = a(x + 3)^2 (x - x_2) \quad (\text{mit } a \neq 0)$$

und bestimmen die noch unbekannten Konstanten a und x_2 aus der Schnittstelle der Kurve mit der *y*-Achse und dem Kurvenpunkt A wie folgt:

$$y(x = 0) = 36 \quad \Rightarrow \quad a(3)^2(-x_2) = -9ax_2 = 36 \mid :(-9) \quad \Rightarrow \quad \text{(I)} \quad ax_2 = -4$$

$$A = (3; -72) \quad \Rightarrow \quad a(3 + 3)^2(3 - x_2) = 36a(3 - x_2) = -72 \mid : 36 \quad \Rightarrow \quad \text{(II)} \quad a(3 - x_2) = -2$$

Gleichung (I) in Gleichung (II) einsetzen:

$$\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad a(3 - x_2) = 3a - \underbrace{ax_2}_{-4} = 3a + 4 = -2 \quad \Rightarrow \quad 3a = -6 \quad \Rightarrow \quad a = -2$$

$$\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad ax_2 = -4 \quad \Rightarrow \quad -2x_2 = -4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2$$

Ergebnis: $y = -2(x + 3)^2(x - 2) = -2(x^2 + 6x + 9)(x - 2) =$

$$= -2(x^3 + 6x^2 + 9x - 2x^2 - 12x - 18) = -2(x^3 + 4x^2 - 3x - 18)$$

A3

$y = 2x^3 + 12x^2 + 19x + 9$

a) Zeigen Sie mit Hilfe einer *Koordinatentransformation*, dass diese ganzrationale Funktion bezüglich des Kurvenpunktes $A = (-2; 3)$ *punktsymmetrisch* verläuft.

b) Wo liegen die *Nullstellen*?

c) Wie lautet die *Produktdarstellung*?

---

a) Wir führen eine *Parallelverschiebung* des x, y-Koordinatensystems durch und wählen dabei den Punkt A als *Nullpunkt* des neuen u, v-Koordinatensystems. Die *Transformationsgleichungen* können wir an Hand einer Skizze direkt ablesen (Bild A-2):

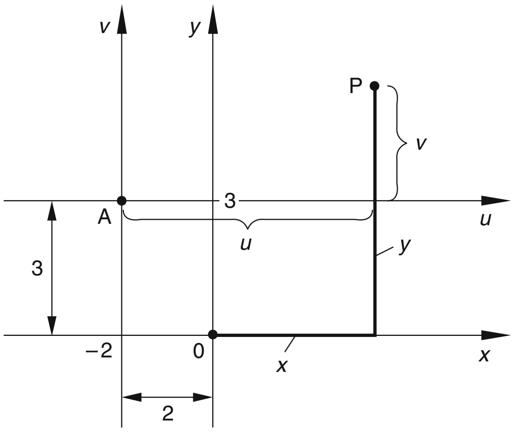


Bild A-2

$$u = x + 2, \quad v = y - 3$$

bzw.

$$x = u - 2, \quad y = v + 3$$

Gleichung der Polynomfunktion im *neuen* u, v-System (x durch $u - 2$, y durch $v + 3$ ersetzen):

$$y = 2x^3 + 12x^2 + 19x + 9 \quad \Rightarrow$$

$$v + 3 = 2(u-2)^3 + 12(u-2)^2 + 19(u-2) + 9 =$$

$$= 2(u^3 - 6u^2 + 12u - 8) + 12(u^2 - 4u + 4) + 19u - 38 + 9 =$$

$$= 2u^3 - 12u^2 + 24u - 16 + 12u^2 - 48u + 48 + 19u - 29 = 2u^3 - 5u + 3$$

Ergebnis: $v = f(u) = 2u^3 - 5u$

Diese Funktion enthält nur *ungerade* Potenzen (*ungerade* Funktion) und verläuft somit *punktsymmetrisch*:

$$f(-u) = 2(-u)^3 - 5(-u) = -2u^3 + 5u = -\underbrace{(2u^3 - 5u)}_{f(u)} = -f(u)$$

b) Durch *Probieren* finden wir eine Nullstelle bei $x_1 = -1$. Mit dem *Horner-Schema* erhalten wir das *1. reduzierte Polynom* und daraus die *restlichen* Nullstellen:

	2	12	19	9
$x_1 = -1$		-2	-10	-9
	2	10	9	0

$\Rightarrow$ *1. reduziertes Polynom:* $2x^2 + 10x + 9$

Restliche Nullstellen: $2x^2 + 10x + 9 = 0 \mid :2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 5x + 4{,}5 = 0 \quad \Rightarrow$

$$x_{2/3} = -2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 4{,}5} = -2{,}5 \pm \sqrt{1{,}75} = -2{,}5 \pm 1{,}3229 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1{,}1771; \quad x_3 = -3{,}8229$$

Nullstellen: $x_1 = -1; \quad x_2 = -1{,}1771; \quad x_3 = -3{,}8229$

c) **Produktdarstellung:** $y = 2(x+1)(x+1{,}1771)(x+3{,}8229)$

A4

Die *Flugbahn* eines Geschosses laute wie folgt:

$$y = -\frac{1}{58}(x^2 - 100x - 416) \qquad (x, y \text{ in m})$$

(Abschussort: $x = 0$). Bestimmen Sie *Flugweite* W und *Steighöhe* (maximale Höhe) H.

Die Flugbahn ist eine nach unten geöffnete *Parabel* (Bild A-3). Wir berechnen zunächst die *Nullstellen* und den Scheitelpunkt $S = (x_0; y_0)$ der Parabel und daraus dann die gesuchten Größen.

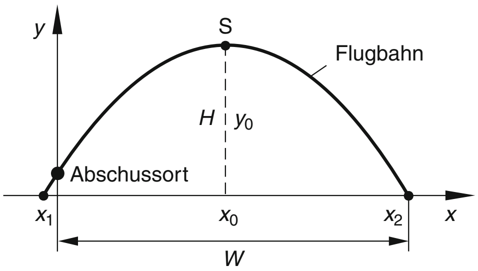


Bild A-3

Nullstellen: $y = 0 \quad \Rightarrow$

$$x^2 - 100x - 416 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x_{1/2} = 50 \pm \sqrt{2500 + 416} = 50 \pm \sqrt{2916} = 50 \pm 54$$

$$x_1 = -4; \quad x_2 = 104$$

Flugweite: $W = x_2 = 104 \qquad (\text{in m})$

Die *Steighöhe* H ist die Ordinate y_0 des Scheitelpunktes S, der genau in der *Mitte* zwischen den beiden Nullstellen liegt:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4 + 104}{2} = 50 \qquad (\text{in m})$$

$$H = y_0 = y(x_0 = 50) = -\frac{1}{58}(50^2 - 100 \cdot 50 - 416) = 50{,}28 \qquad (\text{in m})$$

A5

Welche zur *y*-Achse *spiegelsymmetrische* Polynomfunktion *6. Grades* besitzt bei $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 5$ jeweils (einfache) Nullstellen und schneidet die *y*-Achse an der Stelle $y(0) = 450$?

Wegen der *Spiegelsymmetrie* können nur *gerade* Potenzen auftreten, die gesuchte Funktion hat also die Form

$$y = ax^6 + bx^4 + cx^2 + d$$

Zu jedem Kurvenpunkt gibt es ein *Spiegelbild*. Dies gilt auch für die *Nullstellen*, d. h. es gibt weitere Nullstellen bei $x_4 = 2$, $x_5 = -3$ und $x_6 = -5$. Damit kennen wir *sämtliche* Nullstellen der noch unbekannten Polynomfunktion 6. Grades. Sie lauten also (in *neuer* paarweiser Nummerierung):

$$x_{1/2} = \pm 2; \quad x_{3/4} = \pm 3; \quad x_{5/6} = \pm 5$$

Als *Lösungsansatz* für die Funktionsgleichung verwenden wir jetzt zweckmäßigerweise den *Produktansatz* (mit $a \neq 0$):

$$y = a\,\underbrace{(x-2)(x+2)}_{x^2 - 4}\,\underbrace{(x-3)(x+3)}_{x^2 - 9}\,\underbrace{(x-5)(x+5)}_{x^2 - 25} = a(x^2 - 4)(x^2 - 9)(x^2 - 25)$$

Die Berechnung von a erfolgt aus der Schnittstelle mit der *y*-Achse:

$$y(0) = 450 \quad \Rightarrow \quad a(-4)(-9)(-25) = -900a = 450 \quad \Rightarrow \quad a = -0{,}5$$

Ergebnis: $y = -0{,}5(x^2 - 4)(x^2 - 9)(x^2 - 25) = -0{,}5(x^4 - 4x^2 - 9x^2 + 36)(x^2 - 25) =$

$$= -0{,}5(x^4 - 13x^2 + 36)(x^2 - 25) = -0{,}5(x^6 - 13x^4 + 36x^2 - 25x^4 + 325x^2 - 900) =$$

$$= -0{,}5(x^6 - 38x^4 + 361x^2 - 900) = -0{,}5x^6 + 19x^4 - 180{,}5x^2 + 450$$

A6

Kennlinie einer Glühlampe

Eine Glühlampe stellt einen *nichtlinearen* elektrischen Widerstand dar. Aus einer Messung sind die folgenden Strom-Spannungs-Wertepaare bekannt (I: Stromstärke in Ampere; U: Spannung in Volt):

I/A	0	0,1	0,2	0,5
U/V	0	21,0	48,0	225,0

a) Bestimmen Sie aus diesen Messwerten ein *Näherungspolynom 3. Grades* für die unbekannte Kennlinie $U = f(I)$ der Glühlampe.

b) Welcher Spannungsabfall ist bei einer Stromstärke von $I = 0{,}3$ A zu erwarten?

Anleitung: Verwenden Sie die *Interpolationsformel* von *Newton* (→ Band 1, Kap. III.5.6 und FS, Kap. III.4.7.3)

---

a) *Interpolationsformel* von *Newton*:

$$U = f(I) = a_0 + a_1(I - I_0) + a_2(I - I_0)(I - I_1) + a_3(I - I_0)(I - I_1)(I - I_2) =$$

$$= a_0 + a_1(I - 0) + a_2(I - 0)(I - 0{,}1) + a_3(I - 0)(I - 0{,}1)(I - 0{,}2) =$$

$$= a_0 + a_1 I + a_2 I(I - 0{,}1) + a_3 I(I - 0{,}1)(I - 0{,}2)$$

Berechnung der Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und a_3 aus dem *Steigungs-* oder *Differenzenschema*:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
k & I_k & U_k & & & \\ \hline
 & & a_0 & & & \\
0 & 0 & \boxed{0} & a_1 & & \\
 & & & \boxed{210} & \overset{a_2}{\boxed{300}} & \\
1 & 0{,}1 & 21 & & & \overset{a_3}{\boxed{1000}} \\
 & & & 270 & & \\
2 & 0{,}2 & 48 & & 800 & \\
 & & & 590 & & \\
3 & 0{,}5 & 225 & & &
\end{array}$$

Somit:

$a_0 = 0; \quad a_1 = 210;$

$a_2 = 300; \quad a_3 = 1000$

Näherungspolynom 3. Grades für die unbekannte Kennlinie $U = f(I)$:

$$U = f(I) = 0 + 210I + 300I(I - 0{,}1) + 1000I(I - 0{,}1)(I - 0{,}2) =$$

$$= 210I + 300I^2 - 30I + 1000I(I^2 - 0{,}1I - 0{,}2I + 0{,}02) =$$

$$= 180I + 300I^2 + 1000I(I^2 - 0{,}3I + 0{,}02) =$$

$$= 180I + 300I^2 + 1000I^3 - 300I^2 + 20I = 200I + 1000I^3$$

Unter Berücksichtigung der Einheiten:

$$U = f(I) = 200\,\frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot I + 1000\,\frac{\text{V}}{\text{A}^3} \cdot I^3$$

(siehe Bild A-4)

Anmerkung: Es ist kein Zufall, dass der Zusammenhang zwischen Spannung und Stromstärke *punktsymmetrisch* ist (nur *ungerade* Potenzen). Denn: Bei einer Änderung der Stromrichtung ändert sich lediglich die Richtung der abfallenden Spannung!

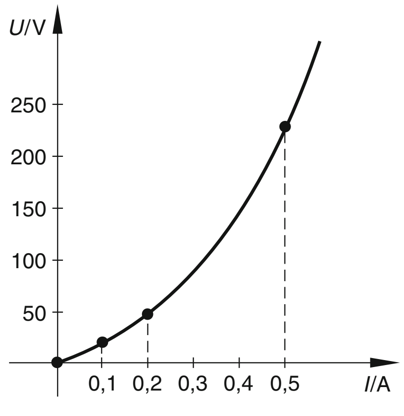


Bild A-4

b) $U = f(I = 0{,}3\text{ A}) = 200\,\frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot 0{,}3\text{ A} + 1000\,\frac{\text{V}}{\text{A}^3} \cdot (0{,}3\text{ A})^3 =$

$= 60\text{ V} + 27\text{ V} = 87\text{ V}$

A7

Biegelinie eines Trägers

Ein im Punkt A eingespannter Träger mit einem zusätzlichen Gelenklager (Punkt B) wird durch eine *konstante* Streckenlast q belastet (Bild A-5). Die *Biegelinie* lässt sich dabei durch die folgende *Polynomfunktion 4. Grades* beschreiben (y ist die Durchbiegung an der Stelle x):

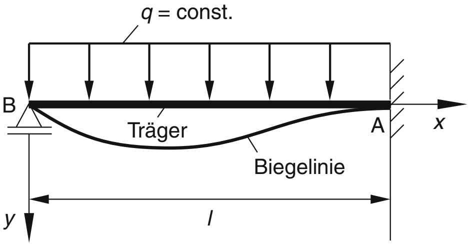


Bild A-5

$$y(x) = \frac{q\,l^3}{48\,EI} \cdot x \left[1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right]$$

($0 \le x \le l$; l: Länge des Trägers; EI: Biegesteifigkeit).

An welchen Stellen des Trägers findet *keine* Durchbiegung statt, wo ist die *größte* Durchbiegung? *Skizzieren* Sie den Verlauf der Biegelinie (Wertetabelle erstellen).

Hinweis: Die Stelle der *größten* Durchbiegung lässt sich exakt nur mit Hilfe der Differentialrechnung bestimmen.

Zur Vereinfachung führen wir eine neue Variable $u = x/l$ mit $0 \le u \le 1$ ein. Die Gleichung der *Biegelinie* lautet dann (wir erweitern zunächst mit l):

$$y(x) = \frac{q\,l^3}{48\,EI} \cdot x \left[1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right] = \frac{q\,l^4}{48\,EI} \cdot \left(\frac{x}{l}\right) \left[1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right] \quad \Rightarrow$$

$$y(u) = K \cdot u(1 - 3u^2 + 2u^3) = K \cdot u(2u^3 - 3u^2 + 1) \quad \text{mit} \quad K = \frac{q\,l^4}{48\,EI} > 0 \quad \text{und} \quad 0 \le u \le 1$$

Berechnung der Nullstellen im Intervall $0 \le u \le 1$

Aus *physikalischen Gründen* ist einleuchtend, dass in den Randpunkten A und B *keine* Durchbiegung stattfinden kann. Somit sind $u_1 = 0$ und $u_2 = 1$ *Nullstellen* der Biegelinie. *Sämtliche* Nullstellen erhält man aus der Gleichung $y(u) = 0$, d. h.

$$K \cdot u(2u^3 - 3u^2 + 1) = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow & u = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 0 \\ \searrow & 2u^3 - 3u^2 + 1 = 0 \end{matrix}$$

$u_1 = 0$ ist dabei die (bereits bekannte) Lösung der *linearen* Gleichung $u = 0$, $u_2 = 1$ eine Lösung der *kubischen* Gleichung $2u^3 - 3u^2 + 1 = 0$ (ebenfalls schon bekannt). Die *restlichen* Lösungen der kubischen Gleichung erhalten wir mit Hilfe des *Horner-Schemas* durch Reduzierung des Polynoms $2u^3 - 3u^2 + 1$ (Abspaltung des Linearfaktors $u - 1$; das Polynom ist *unvollständig*):

	2	−3	0	1
$u_2 = 1$		2	−1	−1
	2	−1	−1	0

$\Rightarrow$ *1. reduziertes Polynom:* $2u^2 - u - 1$

Restliche Nullstellen: $2u^2 - u - 1 = 0 \mid :2 \quad \Rightarrow \quad u^2 - 0{,}5\,u - 0{,}5 = 0 \quad \Rightarrow$

$$u_{3/4} = 0{,}25 \pm \sqrt{0{,}0625 + 0{,}5} = 0{,}25 \pm \sqrt{0{,}5625} = 0{,}25 \pm 0{,}75 \quad \Rightarrow \quad u_3 = 1; \quad u_4 = -0{,}5$$

Am Ort der Einspannung (Punkt A) liegt somit eine *doppelte* Nullstelle $(u_{2/3} = 1)$, der Wert $u_4 = -0{,}5$ dagegen hat *keine* physikalische Bedeutung (er liegt *außerhalb* des Trägers).

Folgerung: Zwischen den Randpunkten A und B des Trägers gibt es *keine* weiteren Stellen ohne Durchbiegung.

Ort der maximalen Durchbiegung

Eine *exakte* Berechnung dieser Stelle ist nur mit Hilfe der *Differentialrechnung* über die 1. und 2. Ableitung der Biegelinie möglich:

$$y = K(2u^4 - 3u^3 + u) \quad \Rightarrow \quad y' = K(8u^3 - 9u^2 + 1), \quad y'' = K(24u^2 - 18u)$$

Aus der *notwendigen* Bedingung $y' = 0$ erhalten wir eine *kubische* Gleichung, von der wir bereits *eine* Lösung kennen (nämlich $u_1 = 1$; an dieser Stelle besitzt die Biegelinie bekanntlich eine *doppelte* Nullstelle!):

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad K(8u^3 - 9u^2 + 1) = 0 \mid : K \quad \Rightarrow \quad 8u^3 - 9u^2 + 1 = 0$$

Die *restlichen* Lösungen dieser Gleichung bestimmen wir mit Hilfe des *Horner-Schemas* (Abspalten des Linearfaktors $u - 1$; das Polynom ist *unvollständig*):

$$\begin{array}{c|cccc} & 8 & -9 & 0 & 1 \\ \hline u_1 = 1 & & 8 & -1 & -1 \\ \hline & 8 & -1 & -1 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \textit{1. reduziertes Polynom: } 8u^2 - u - 1$$

Restliche Nullstellen: $8u^2 - u - 1 = 0 \mid : 8 \quad \Rightarrow \quad u^2 - \frac{1}{8}u - \frac{1}{8} = 0 \quad \Rightarrow$

$$u_{2/3} = \frac{1}{16} \pm \sqrt{\frac{1}{16^2} + \frac{1}{8}} = \frac{1}{16} \pm \sqrt{\frac{1 + 32}{16^2}} = \frac{1}{16} \pm \sqrt{\frac{33}{16^2}} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{16} = \frac{1 \pm 5{,}7446}{16} \quad \Rightarrow$$

$$u_2 = 0{,}4215; \quad u_3 = -0{,}2965 < 0 \quad \text{(ohne physikalische Bedeutung)}$$

Umformungen: Brüche des Radikanden *gleichnamig* machen (Hauptnenner: 16^2), den 2. Bruch also mit $2 \cdot 16 = 32$ *erweitern*, dann *Teilwurzeln* ziehen.

Wegen $y''(u_2 = 0{,}4215) = K \cdot (-3{,}3231) = -3{,}3231\,K < 0$ liegt ein *Maximum* vor. Die *größte* Durchbiegung findet daher an der Stelle $u_2 = 0{,}4215$ und somit $x_2 = 0{,}4215\,l$ statt. Sie hat den Wert $y(u_2 = 0{,}4215) = 0{,}2600\,K$. An der Stelle $u_1 = 1$ (Punkt A) liegt ein *Minimum* (*keine* Durchbiegung).

Der *Kurvenverlauf* (ermittelt mit Hilfe der folgenden Wertetabelle) bestätigt diese Ergebnisse (Bild A-6).

Wertetabelle (ohne den Faktor $K > 0$)

u	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y	0	0,097	0,179	0,235	0,259	0,25	0,211	0,151	0,083	0,025	0

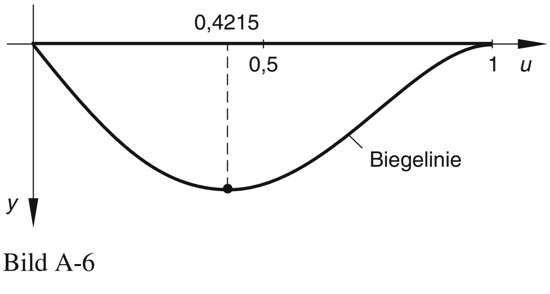


Bild A-6

2 Gebrochenrationale Funktionen

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel III.6
Formelsammlung: Kapitel III.5

A8

$$y = \frac{(x - 1)(x + 5)}{(x + 1)^2 (x - 3)}$$

Bestimmen Sie folgende Eigenschaften: Definitionslücken, Nullstellen, Pole, Asymptoten, Schnittpunkt mit der y-Achse. *Skizzieren* Sie den Kurvenverlauf.

Definitionslücken: Nenner $= 0 \quad \Rightarrow \quad (x + 1)^2 (x - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 ; \quad x = 3$

Nullstellen: Zähler $= 0$, Nenner $\neq 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 1)(x + 5) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 ; \quad x_2 = -5$

Pole: Nenner $= 0$, Zähler $\neq 0 \quad \Rightarrow \quad (x + 1)^2 (x - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{3/4} = -1 ; \quad x_5 = 3$

Bei -1 liegt ein Pol *ohne* Vorzeichenwechsel, bei 3 ein solcher *mit* Vorzeichenwechsel.

Polgeraden (senkrechte Asymptoten): $x = -1 ; \quad x = 3$

Verhalten der Funktion im „Unendlichen"

Die Funktion ist *echt* gebrochen (Zähler: quadratisch, Nenner: kubisch), sie nähert sich daher für $x \rightarrow \pm\infty$ *asymptotisch* der x-Achse $(y = 0)$.

Asymptote im „Unendlichen": $y = 0$

Schnittpunkt mit der *y*-Achse: $y(0) = \frac{(-1)(5)}{(1)^2 (-3)} = \frac{5}{3}$

Kurvenverlauf: siehe Bild A-7

Die Kurve nähert sich für $x \rightarrow -\infty$ von *unten* der x-Achse, *links* von der Nullstelle $x_2 = -5$ besitzt sie daher noch ein *relatives Minimum* (die genaue Lage lässt sich nur mit Hilfe der Differentialrechnung bestimmen).

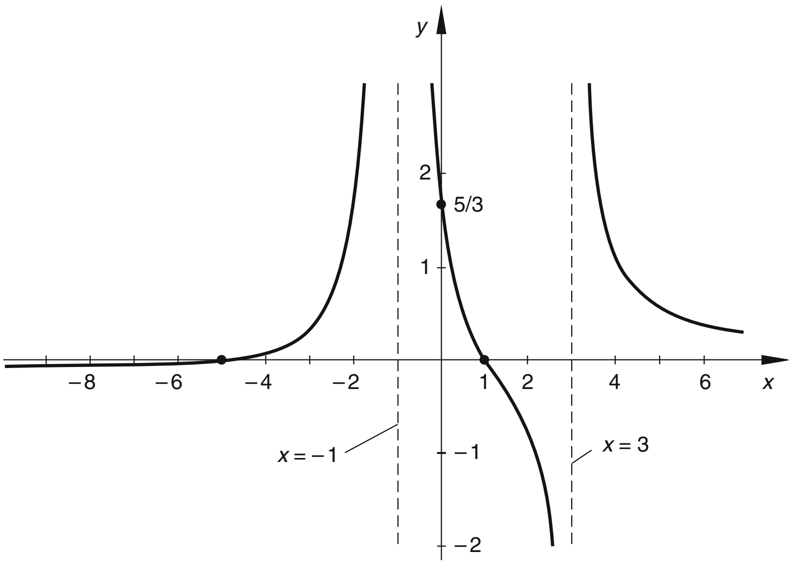


Bild A-7

A9

Diskutieren Sie den Verlauf der gebrochenrationalen Funktion

$$y = \frac{2x^4 - 2x^3 - 20x^2 + 8x + 48}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$$

(Definitionslücken, Nullstellen, Pole, Asymptoten, Schnittpunkt mit der y-Achse). Gibt es *hebbare* Definitionslücken? Wie lautet gegebenenfalls die „erweiterte" Funktion? *Skizzieren* Sie den Kurvenverlauf.

Sinnvoller Weise zerlegen wir zunächst Zähler und Nenner in *Linearfaktoren.*

Zähler: $Z(x) = 2x^4 - 2x^3 - 20x^2 + 8x + 48 = 0$

Durch *Probieren* findet man die Lösung $x_1 = 2$, mit dem *Horner-Schema* wird dann reduziert:

	2	-2	-20	8	48
$x_1 = 2$		4	4	-32	-48
	2	2	-16	-24	0

$\Rightarrow$ *1. reduziertes Polynom:* $2x^3 + 2x^2 - 16x - 24$

Eine weitere Nullstelle liegt bei $x_2 = 3$:

	2	2	-16	-24
$x_2 = 3$		6	24	24
	2	8	8	0

$\Rightarrow$ *2. reduziertes Polynom:* $2x^2 + 8x + 8$

Restliche Zählernullstellen: $2x^2 + 8x + 8 = 0 \mid :2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{3/4} = -2$

Zähler: $Z(x) = 2x^4 - 2x^3 - 20x^2 + 8x + 48 = 2(x - 2)(x - 3)(x + 2)^2$

Nenner: $N(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

Durch *Probieren* erhält man die Lösung $x_1 = -1$, mit dem *Horner-Schema* wird reduziert:

	1	1	-4	-4
$x_1 = -1$		-1	0	4
	1	0	-4	0

$\Rightarrow$ *1. reduziertes Polynom:* $x^2 - 4$

Restliche Nennernullstellen: $x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_{2/3} = \pm 2$

Nenner: $N(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x + 1)(x - 2)(x + 2)$

Die (unecht) gebrochenrationale Funktion lässt sich damit auch wie folgt darstellen:

$$y = \frac{2x^4 - 2x^3 - 20x^2 + 8x + 48}{x^3 + x^2 - 4x - 4} = \frac{2(x - 2)(x - 3)(x + 2)^2}{(x + 1)(x - 2)(x + 2)} \qquad (x \neq -1;\ 2;\ -2)$$

Es gibt *drei* Definitionslücken bei -1, 2 und -2 (dort wird der Nenner jeweils gleich Null). Zähler und Nenner haben bei $x = 2$ und $x = -2$ *gemeinsame* Nullstellen, diese Definitionslücken sind jedoch beide behebbar, da die jeweiligen Grenzwerte vorhanden sind:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2(x - 2)(x - 3)(x + 2)^2}{(x + 1)(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x - 3)(x + 2)^2}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{2(-1)(4)^2}{(3)(4)} = -\frac{8}{3}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{2(x - 2)(x - 3)(x + 2)^2}{(x + 1)(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \to -2} \frac{2(x - 2)(x - 3)(x + 2)(x + 2)}{(x + 1)(x - 2)(x + 2)} =$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{2(x - 2)(x - 3)(x + 2)}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{2(-4)(-5)(0)}{(-1)(-4)} = 0$$

„Erweiterte“ Funktion und ihre Eigenschaften

Die „erweiterte“ Funktion y^{*} erhalten wir durch *kürzen* der gemeinsamen Faktoren:

$$y = \frac{2\,(x-2)\,(x-3)\,(x+2)\,(x+2)}{(x+1)\,(x-2)\,(x+2)} \rightarrow y^{*} = \frac{2\,(x-3)\,(x+2)}{x+1} \qquad (x \neq -1)$$

Wir bestimmen zunächst die Eigenschaften dieser Funktion.

Definitionsbereich: $x \neq -1$

Nullstellen: $(x-3)\,(x+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3\,; \quad x_2 = -2$

Pole: $x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -1$ (Pol *mit* Vorzeichenwechsel)

Polgerade (senkrechte Asymptote): $x = -1$

Verhalten im „Unendlichen“

Die Funktion ist *unecht* gebrochenrational (Grad des Zählers > Grad des Nenners). Wir zerlegen sie durch *Polynomdivision* wie folgt:

$$y^{*} = \frac{2\,(x-3)\,(x+2)}{x+1} = \frac{2\,(x^2 - 3x + 2x - 6)}{x+1} = \frac{2\,(x^2 - x - 6)}{x+1} = \frac{2x^2 - 2x - 12}{x+1}$$

$$\begin{array}{ll} y^{*} = & (2x^2 - 2x - 12) : (x+1) = 2x - 4 - \underbrace{\dfrac{8}{x+1}}_{\text{echt gebrochen}} \\ & \underline{-(2x^2 + 2x)} \\ & \qquad -4x - 12 \\ & \qquad \underline{-(-4x - 4)} \\ & \qquad\qquad -8 \end{array}$$

Für *große* x-Werte (d. h. für $x \rightarrow \pm\infty$) wird der *echt* gebrochenrationale Anteil *vernachlässigbar klein* (er strebt gegen *Null*). Unsere Kurve nähert sich daher „im Unendlichen“ *asymptotisch* der Geraden $y = 2x - 4$.

Asymptote im Unendlichen: $y = 2x - 4$

Schnittpunkt mit der *y*-Achse: $y\,(x = 0) = -12$

Kurvenverlauf: siehe Bild A-8

Gezeichnet ist die „erweiterte“ Funktion; nimmt man die beiden *dick* gekennzeichneten Punkte heraus, erhält man den Verlauf der *Ausgangsfunktion* (Definitionslücken bei -1, -2 und 2).

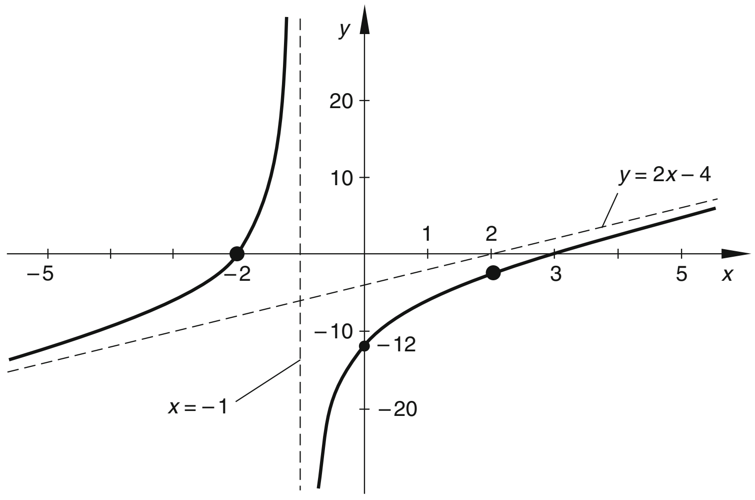


Bild A-8

A10

Bestimmen Sie den Verlauf der gebrochenrationalen Funktion

$$y = \frac{2(x^2 - 6x + 9)}{(x + 3)^2} \qquad (x \neq -3)$$

aus den Null- und Polstellen, den Asymptoten und dem Schnittpunkt mit der *y*-Achse.

Wir zerlegen zunächst den Zähler $Z(x)$ in *Linearfaktoren:* $Z(x) = 2(x^2 - 6x + 9) = 2(x - 3)^2$. Somit gilt:

$$y = \frac{2(x^2 - 6x + 9)}{(x + 3)^2} = \frac{2(x - 3)^2}{(x + 3)^2} \qquad (x \neq -3)$$

Wir stellen fest: Zähler und Nenner haben *keine* gemeinsamen Nullstellen. Damit ergeben sich folgende Funktionseigenschaften:

Nullstellen: $Z(x) = 2(x - 3)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = 3$
(doppelte Nullstelle, d. h. Berührungspunkt und relativer Extremwert)

Pole: $N(x) = (x + 3)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{3/4} = -3$ (Pol *ohne* Vorzeichenwechsel)

Polgerade (senkrechte Asymptote): $x = -3$

Verhalten im „Unendlichen“

Die Funktion ist *unecht* gebrochenrational ($Z(x)$ und $N(x)$ sind jeweils Polynome *2. Grades*), wir müssen sie daher zunächst durch *Polynomdivision* zerlegen:

$$y = \frac{2(x - 3)^2}{(x + 3)^2} = \frac{2(x^2 - 6x + 9)}{(x + 3)^2} = \frac{2x^2 - 12x + 18}{x^2 + 6x + 9}$$

$$\begin{array}{l} y = \quad (2x^2 - 12x + 18) : (x^2 + 6x + 9) = 2 - \underbrace{\dfrac{24x}{x^2 + 6x + 9}}_{\text{echt gebrochen}} \\ \underline{-(2x^2 + 12x + 18)} \\ \qquad -24x \end{array}$$

Im „Unendlichen“, d. h. für $x \rightarrow \pm\infty$ *verschwindet* der *echt* gebrochenrationale Anteil und die Kurve nähert sich *asymptotisch* der Geraden $y = 2$ (Parallele zur *x*-Achse).

Asymptote im „Unendlichen“: $y = 2$

Schnittpunkt mit der *y*-Achse: $y(x = 0) = 2$

Kurvenverlauf: siehe Bild A-9

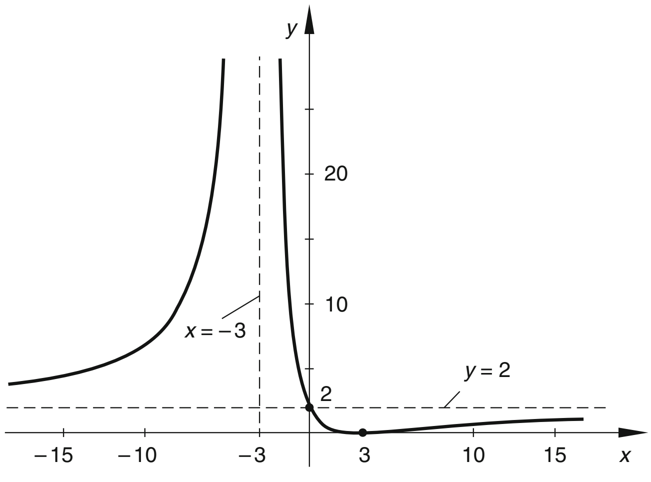


Bild A-9

A11

Diskutieren Sie den Verlauf der gebrochenrationalen Funktion

$$y = \frac{(x+1)^2\,(x^2+x-2)}{x^3+5x^2+6x}$$

(Definitionslücken, Null- und Polstellen, Asymptoten, Schnittpunkt mit der *y*-Achse). Prüfen Sie, ob es *hebbare* Definitionslücken gibt und *skizzieren* Sie die Funktion bzw. die „erweiterte“ Funktion.

Wir zerlegen zunächst Zähler $Z(x)$ und Nenner $N(x)$ in *Linearfaktoren*:

Zähler: $Z(x) = (x+1)^2\,(x^2+x-2) = 0$

Faktor x^2+x-2 in Linearfaktoren zerlegen:

$$x^2+x-2=0 \quad\Rightarrow\quad x_{1/2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25+2} = -0{,}5 \pm \sqrt{2{,}25} = -0{,}5 \pm 1{,}5 \quad\Rightarrow$$

$$x_1 = 1\,; \quad x_2 = -2$$

$$Z(x) = (x+1)^2\,(x^2+x-2) = (x+1)^2\,(x-1)\,(x+2)$$

Nenner: $N(x) = x^3+5x^2+6x = 0 \quad\Rightarrow\quad x(x^2+5x+6) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \quad\Rightarrow\quad x_1 = 0 \\ x^2+5x+6 = 0 \end{array}\right.$

$$x^2+5x+6=0 \quad\Rightarrow\quad x_{2/3} = -2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25-6} = -2{,}5 \pm \sqrt{0{,}25} = -2{,}5 \pm 0{,}5 \quad\Rightarrow$$

$$x_2 = -2\,; \quad x_3 = -3$$

$$N(x) = x^3+5x^2+6x = (x-0)\,(x+2)\,(x+3) = x\,(x+2)\,(x+3)$$

Somit gilt:

$$y = \frac{(x+1)^2\,(x^2+x-2)}{x^3+5x^2+6x} = \frac{(x+1)^2\,(x-1)\,(x+2)}{x\,(x+2)\,(x+3)}$$

Definitionslücken liegen bei 0, -2 und -3. Da Zähler und Nenner an der Stelle $x = -2$ eine *gemeinsame einfache* Nullstelle haben, ist der *Grenzwert* an dieser Stelle jedoch vorhanden:

$$\lim_{x\to -2} \frac{(x+1)^2\,(x-1)\,(x+2)}{x\,(x+2)\,(x+3)} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+1)^2\,(x-1)}{x\,(x+3)} = \frac{(-1)^2\,(-3)}{-2\,(1)} = \frac{3}{2}$$

Die Definitionslücke bei $x = -2$ lässt sich daher *beheben*, in dem wir nachträglich diesen Grenzwert zum Funktionswert an der Stelle $x = -2$ erklären. Wir erhalten dann die „erweiterte“ Funktion

$$y^* = \frac{(x+1)^2\,(x-1)}{x\,(x+3)} \qquad (x \neq 0\,; -3)$$

(sie entsteht aus der Ausgangsfunktion durch *Kürzen* des gemeinsamen Faktors $x+2$). Diese Funktion besitzt nur noch *zwei* Definitionslücken bei 0 und -3. Wir ermitteln nun die Eigenschaften der „erweiterten“ Funktion y^*.

Definitionslücken: $x = 0\,; \quad x = -3$

Nullstellen: $Z(x) = (x+1)^2\,(x-1) = 0 \quad\Rightarrow\quad x_{1/2} = -1\,; \quad x_3 = 1$

Die *doppelte* Nullstelle $x_{1/2} = -1$ ist zugleich ein *Berührungspunkt* mit der *x*-Achse und somit ein *relativer Extremwert*.

Pole: $N(x) = x\,(x+3) = 0 \quad\Rightarrow\quad x_4 = 0\,; \quad x_5 = -3$ (bei Pole *mit* Vorzeichenwechsel)

Polgeraden (senkrechte Asymptoten): $x = 0$ (*y*-Achse); $x = -3$

Verhalten im „Unendlichen“

Die Funktion ist *unecht* gebrochenrational (Grad des Zählers > Grad des Nenners), wir zerlegen sie daher zunächst mit Hilfe der *Polynomdivision* in einen *ganzrationalen* und einen *echt* gebrochenrationalen Anteil:

$$y^* = \frac{(x+1)^2(x-1)}{x(x+3)} = \frac{(x^2+2x+1)(x-1)}{x^2+3x} = \frac{x^3+2x^2+x-x^2-2x-1}{x^2+3x} = \frac{x^3+x^2-x-1}{x^2+3x}$$

$$\begin{array}{l} y^* = \quad (x^3 + \;\; x^2 - x - 1) : (x^2 + 3x) = x - 2 + \underbrace{\dfrac{5x-1}{x^2+3x}}_{\text{echt gebrochen}} \\ \quad\;\; \underline{-(x^3 + 3x^2) \qquad\qquad\quad} \\ \qquad\quad - 2x^2 - \;\; x - 1 \\ \qquad\; \underline{-(-2x^2 - 6x) \qquad\;\;} \\ \qquad\qquad\qquad\;\; 5x - 1 \end{array}$$

Für $x \to \pm\infty$ *verschwindet* der *echt* gebrochenrationale Anteil, die Kurve nähert sich dann *asymptotisch* der Geraden $y = x - 2$.

Asymptote im „Unendlichen“: $y = x - 2$

Schnittpunkt mit der *y*-Achse: nicht vorhanden (Polstelle bei $x = 0$)

Funktionsverlauf: siehe Bild A-10

Gezeichnet wurde die „erweiterte“ Funktion y^*. Die Ausgangsfunktion y hat an der *fett* gezeichneten Stelle $(x = -2)$ eine weitere *Definitionslücke*, ansonsten aber den gleichen Verlauf wie die „erweiterte“ Funktion.

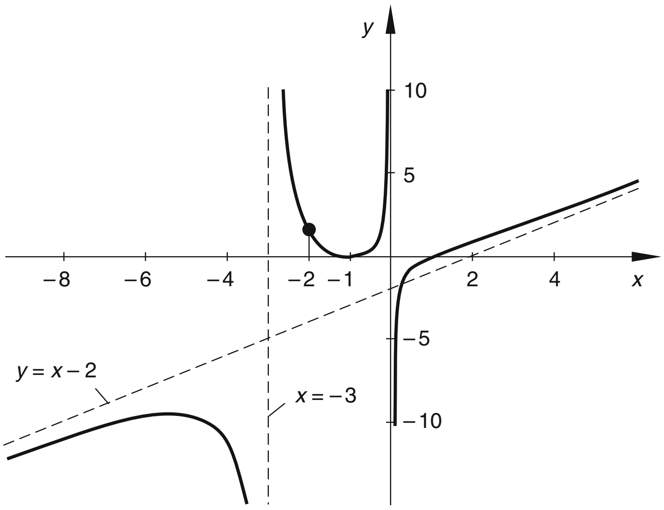


Bild A-10

A12

Eine *gebrochenrationale* Funktion besitzt an den Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 5$ *einfache* Nullstellen und bei $x_3 = 0$ und $x_4 = 6$ *Pole 1. Ordnung*. Für große *x*-Werte, d. h. für $x \to \pm\infty$ nähert sie sich *asymptotisch* der Geraden $y = -2$. Durch welche Gleichung lässt sich diese Funktion beschreiben? *Skizzieren* Sie den Kurvenverlauf.

Die *Nullstellen* der gesuchten Funktion sind die *Nullstellen des Zählerpolynoms* $Z(x)$, die *Pole* die *Nullstellen des Nennerpolynoms* $N(x)$ (*gemeinsame* Nullstellen gibt es nicht). Wir wählen daher für Zähler und Nenner den *Produktansatz*:

$$y = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{a(x+2)(x-5)}{(x-0)(x-6)} = \frac{a(x+2)(x-5)}{x(x-6)} \qquad (x \neq 0;\, 6)$$

Die *Asymptote* im „Unendlichen“, deren Gleichung bekannt ist $(y = -2)$, erhält man durch *Polynomdivision*. Sie entspricht dabei dem *ganzrationalen* Anteil, der bei dieser Division entsteht:

$$y = \frac{a(x+2)(x-5)}{x(x-6)} = \frac{a(x^2+2x-5x-10)}{x^2-6x} = a \cdot \frac{x^2-3x-10}{x^2-6x}$$

Polynomdivision (der Faktor $a \neq 0$ wird zunächst weggelassen):

$$\begin{array}{l} (x^2 - 3x - 10) : (x^2 - 6x) = 1 + \dfrac{3x - 10}{x^2 - 6x} \\ \underline{-(x^2 - 6x)\qquad\qquad} \\ \qquad 3x - 10 \end{array}$$

Damit erhalten wir die folgende Zerlegung:

$$y = a \cdot \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 6x} = a \left(1 + \underbrace{\frac{3x - 10}{x^2 - 6x}}_{\text{echt gebrochen}} \right)$$

Im „Unendlichen" verschwindet der *echt* gebrochenrationale Anteil und die Funktion nähert sich *asymptotisch* der Geraden $y = a$ (Parallele zur x-Achse). Sie ist identisch mit der Geraden $y = -2$, woraus folgt: $a = -2$. Die gesuchte *Funktionsgleichung* lautet somit:

$$y = \frac{-2(x + 2)(x - 5)}{x(x - 6)} = \frac{-2(x^2 - 3x - 10)}{x^2 - 6x} \qquad (x \neq 0;\, 6)$$

Kurvenverlauf: siehe Bild A-11

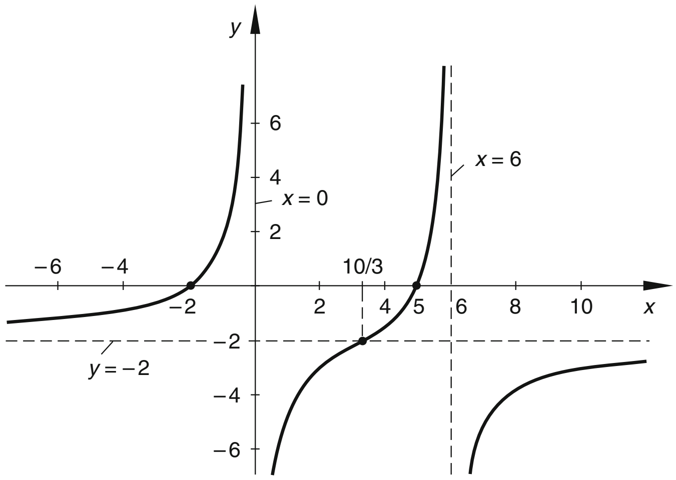


Bild A-11

A13

Eine *gebrochenrationale* Funktion besitze folgende Eigenschaften:

Doppelte Nullstelle bei $x_{1/2} = 2$;

Einfache Polstellen bei $x_3 = -4$, $x_4 = 0$ und $x_5 = 10$;

Punkt $P = (1;\, 0{,}2)$ liegt auf der Kurve.

a) Wie lautet die *Funktionsgleichung*?

b) *Skizzieren* Sie den Kurvenverlauf.

---

a) Die *Nullstellen* der gesuchten Funktion sind die *Nullstellen des Zählerpolynoms*, die *Polstellen* dagegen die *Nullstellen des Nennerpolynoms*. Die Linearfaktorenzerlegung von Zähler und Nenner ist somit (bis auf einen noch unbekannten Faktor $a \neq 0$) bekannt. Wir wählen daher den folgenden *Ansatz* (Zähler und Nenner jeweils in der *Produktform*):

$$y = a \cdot \frac{(x - 2)(x - 2)}{(x + 4)(x - 0)(x - 10)} = a \cdot \frac{(x - 2)^2}{x(x + 4)(x - 10)} \qquad (x \neq -4;\, 0;\, 10)$$

Die Konstante a bestimmen wir aus dem Kurvenpunkt $P = (1;\, 0{,}2)$:

$$y(x = 1) = 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad a \cdot \frac{(-1)^2}{1(5)(-9)} = 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{45}\, a = 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad a = -9$$

Funktionsgleichung: $\quad y = -9 \cdot \dfrac{(x - 2)^2}{x(x + 4)(x - 10)}$

b) **Nullstellen:** $x_{1/2} = 2$ (Berührungspunkt und relativer Extremwert)

Pole: $x_3 = -4; \quad x_4 = 0; \quad x_5 = 10$ (alle *mit* Vorzeichenwechsel)

Asymptote im „Unendlichen": $y = 0$ (die Funktion ist *echt* gebrochenrational)

Schnittpunkt mit der *y*-Achse: nicht vorhanden (Polstelle bei $x = 0$)

Kurvenverlauf: siehe Bild A-12

Es ist hier sinnvoll, einige Kurvenpunkte zu berechnen (insbesondere im Intervall $-4 < x < 0$ wissen wir wenig über den Verlauf der Kurve).

Wertetabelle:

x	y
– 10	1,08
– 8	1,56
– 5	5,88
– 3	– 5,77
– 2	– 3
– 1	– 2,45
1	0,2
5	0,36
8	1,69
9	3,77
11	– 4,42
15	– 1,07
20	– 0,61

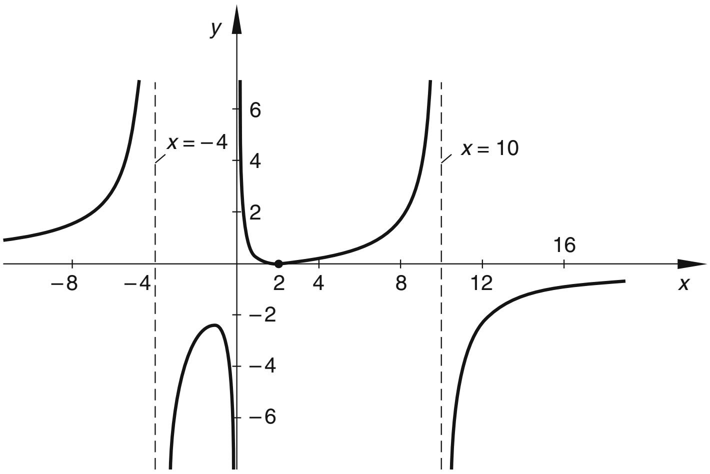


Bild A-12

A14

Eine *gebrochenrationale* Funktion $y = Z(x) / N(x)$ schneide die *y*-Achse bei 3. *Sämtliche* Nullstellen des Zählerpolynoms $Z(x)$ und des Nennerpolynoms $N(x)$ sind bekannt:

$$Z(x): \quad x_1 = 2; \quad x_2 = -1; \qquad N(x): \quad x_{3/4} = 1; \quad x_5 = 4$$

a) Bestimmen Sie die *Gleichung* dieser Funktion und *skizzieren* Sie den Kurvenverlauf.

b) Wie lautet die Partialbruchzerlegung der Funktion?

---

a) Zähler und Nenner können in der *Produktform* angesetzt werden, da *alle* Nullstellen des Zähler- und Nennerpolynoms bekannt sind:

$$y = \frac{a(x-2)(x+1)}{(x-1)(x-1)(x-4)} = \frac{a(x-2)(x+1)}{(x-1)^2(x-4)} \qquad (x \neq 1; 4)$$

Die Berechnung der Konstanten $a \neq 0$ erfolgt aus dem (bekannten) Schnittpunkt mit der *y*-Achse:

$$y(x=0) = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{a(-2)(1)}{(-1)^2(-4)} = \frac{-2a}{-4} = \frac{a}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad a = 6$$

Funktionsgleichung: $y = \dfrac{6(x-2)(x+1)}{(x-1)^2(x-4)} \qquad (x \neq 1; 4)$

Eigenschaften der Funktion

Nullstellen: $x_1 = 2; \quad x_2 = -1$

Pole: $x_{3/4} = 1$ (Pol *ohne* Vorzeichenwechsel); $x_5 = 4$ (Pol *mit* Vorzeichenwechsel)

Polgeraden (senkrechte Asymptoten): $x = 1; \quad x = 4$

Asymptote im „Unendlichen“: $y = 0$ (die Funktion ist *echt* gebrochenrational)

Schnittpunkt mit der *y*-Achse: $y(x = 0) = 3$

Kurvenverlauf: siehe Bild A-13

Wertetabelle:

x	y
-10	$-0{,}38$
-8	$-0{,}43$
-6	$-0{,}49$
-4	$-0{,}54$
-2	$-0{,}44$
3	-6
5	$6{,}75$
10	$1{,}09$

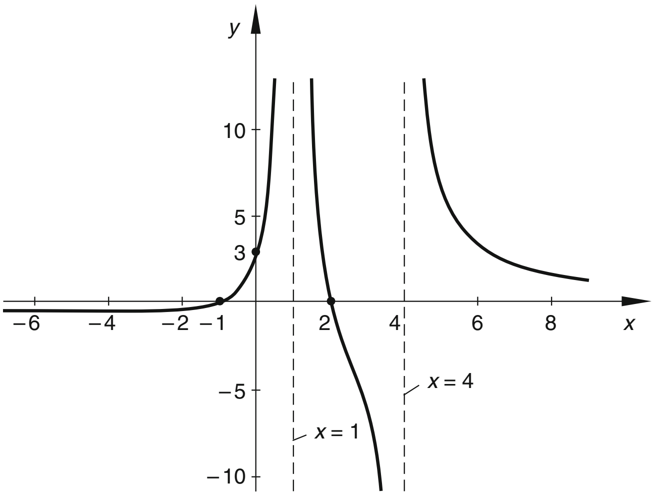


Bild A-13

b) **1. Schritt:** Berechnung der Nennernullstellen

$$N(x) = (x-1)^2(x-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = 1\,; \quad x_3 = 4$$

2. Schritt: Zuordnung der Partialbrüche

$$x_{1/2} = 1 \;\; (\textit{doppelte}\text{ Nullstelle}) \quad \rightarrow \quad \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

$$x_3 \;\; = 4 \;\; (\textit{einfache}\text{ Nullstelle}) \quad \rightarrow \quad \frac{C}{x-4}$$

3. Schritt: Partialbruchzerlegung (Ansatz)

$$\frac{6(x-2)(x+1)}{(x-1)^2(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-4}$$

4. Schritt: Alle Brüche werden *gleichnamig* gemacht, d. h. auf den *Hauptnenner* $(x-1)^2(x-4)$ gebracht. Dazu müssen die Teilbrüche der *rechten* Seite der Reihe nach mit $(x-1)(x-4)$, $(x-4)$ bzw. $(x-1)^2$ *erweitert* werden:

$$\frac{6(x-2)(x+1)}{(x-1)^2(x-4)} = \frac{A(x-1)(x-4) + B(x-4) + C(x-1)^2}{(x-1)^2(x-4)}$$

Da die Nenner beider Seiten übereinstimmen, gilt dies auch für die Zähler:

$$6(x-2)(x+1) = A(x-1)(x-4) + B(x-4) + C(x-1)^2$$

Um die drei Konstanten A, B und C zu bestimmen, benötigen wir *drei* Gleichungen. Diese erhalten wir durch Einsetzen der Werte $x = 1$, $x = 4$ (es sind die *Nullstellen des Nenners*) und $x = 0$:

$$\boxed{x = 1} \quad 6(-1)(2) = -3B \quad \Rightarrow \quad -3B = -12 \quad \Rightarrow \quad B = 4$$

$$\boxed{x = 4} \quad 6(2)(5) = 9C \quad \Rightarrow \quad 9C = 60 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{60}{9} = \frac{20}{3}$$

$$\boxed{x = 0} \quad 6(-2)(1) = A(-1)(-4) - 4B + C \quad \Rightarrow \quad 4A - 4B + C = 4A - 4 \cdot 4 + \frac{20}{3} = -12 \quad \Rightarrow$$

$$4A = -12 + 16 - \frac{20}{3} = 4 - \frac{20}{3} = \frac{12-20}{3} = -\frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{2}{3}$$

Ergebnis: $$y = \frac{6(x-2)(x+1)}{(x-1)^2(x-4)} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{20}{3} \cdot \frac{1}{x-4}$$

A15

Magnetfeld in der Umgebung einer stromdurchflossenen elektrischen Doppelleitung

Die in Bild A-14 skizzierte *elektrische Doppelleitung* besteht aus zwei langen parallelen Leitern, deren Durchmesser gegenüber dem Leiterabstand $d = 2a$ vernachlässigbar klein ist. Die Ströme in den beiden Leitern L_1 und L_2 haben die *gleiche Stärke* I, fließen jedoch in *entgegengesetzte* Richtungen. Der Verlauf der *magnetischen Feldstärke* H längs der Verbindungslinie der beiden Leiterquerschnitte (x-Achse) wird durch die Gleichung

$$H(x) = \frac{Ia}{\pi} \cdot \frac{1}{a^2 - x^2}, \quad |x| \neq a$$

beschrieben. Bestimmen Sie die wesentlichen *Eigenschaften* dieser gebrochenrationalen Funktion und skizzieren Sie den *Feldstärkeverlauf*.

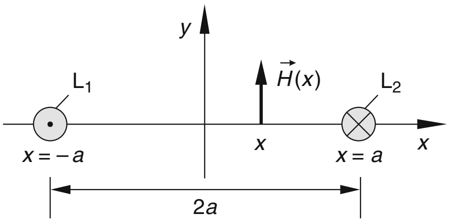


Bild A-14

Definitionsbereich: $|x| \neq a$ (am Ort der beiden Leiter *verschwindet* der Nenner)

Symmetrie: Nur *gerade* Potenzen $\Rightarrow$ *Spiegelsymmetrie* zu H-Achse

Nullstellen: keine

Pole: $a^2 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm a$ (Pole *mit* Vorzeichenwechsel)

Physikalische Deutung: Die magnetische Feldstärke wird unendlich groß am Ort der Leiter und ändert ihr *Vorzeichen* (Richtungsänderung), wenn man auf die andere Seite des Leiters geht!

Polgeraden (senkrechte Asymptoten): $x = \pm a$

Schnittpunkt mit *H*-Achse: $H(x = 0) = \frac{Ia}{\pi} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{I}{\pi a}$

Verhalten im „Unendlichen"

Die Funktion ist *echt* gebrochenrational (Zähler: *konstante* Funktion; Nenner: *quadratische* Funktion), für große Werte von x, d. h in *großer* Entfernung von der Doppelleitung nimmt die magnetische Feldstärke H rasch gegen *Null* ab.

Asymptote im „Unendlichen": $H = 0$ (x-Achse)

Verlauf der magnetischen Feldstärke: siehe Bild A-15

Deutung aus physikalischer Sicht

Kleinster Wert (Minimum) zwischen den beiden Leitern genau in der Mitte $(x = 0)$: $H(x = 0) = \frac{I}{\pi a}$

H nimmt in Richtung der Leiter zunächst zu, wird am Ort der Leiter *unendlich* groß (*Polstellen* $x_{1/2} = \pm a$) und fällt dann nach außen hin gegen Null ab, wobei sich gleichzeitig die *Richtung* des Feldstärkevektors *umkehrt*:

$$H(x) > 0 \quad \text{für} \quad |x| < a$$

$$H(x) < 0 \quad \text{für} \quad |x| > a$$

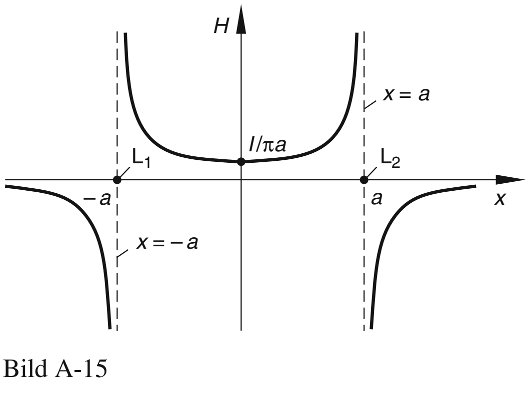


Bild A-15

3 Trigonometrische Funktionen und Arkusfunktionen

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel III.9 und 10

Formelsammlung: Kapitel III.7 und 8

A16 Zeige: $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \le x \le 1$

Wir setzen $y = \arccos x$ (mit $0 \le y \le \pi$). Durch *Umkehrung* folgt $x = \cos y$. Dann gilt:

$$\sin(\arccos x) = \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

(unter Berücksichtigung der trigonometrischen Bezeichnung $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ und $\sin y \ge 0$ im Intervall $0 \le y \le \pi$). Damit ist die Formel bewiesen.

A17 Welche Lösungen besitzen die folgenden *trigonometrischen Gleichungen*?

a) $2(\sin x + \cos^3 x) = -\sin x \cdot \sin(2x)$

b) $\cos(2x) = 2 \cdot \sin^2 x$

---

a) Unter Verwendung der trigonometrischen Formeln $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und $\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ (→ FS) werden beide Seiten zunächst wie folgt umgeformt:

Linke Seite: $2(\sin x + \cos^3 x) = 2 \cdot \sin x + 2 \cdot \cos^3 x = 2 \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x \cdot \underbrace{\cos^2 x}_{1 - \sin^2 x} =$

$$= 2 \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x (1 - \sin^2 x) = 2 \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x - 2 \cdot \cos x \cdot \sin^2 x$$

Rechte Seite: $-\sin x \cdot \underbrace{\sin(2x)}_{2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = -\sin x \cdot (2 \cdot \sin x \cdot \cos x) = -2 \cdot \cos x \cdot \sin^2 x$

Die trigonometrische Gleichung $2(\sin x + \cos^3 x) = -\sin x \cdot \sin(2x)$ geht damit über in:

$$2 \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x - 2 \cdot \cos x \cdot \sin^2 x = -2 \cdot \cos x \cdot \sin^2 x \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x = 0 \mid :2 \quad \Rightarrow$$

$$\sin x + \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x = -\cos x \mid :\cos x \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = -1$$

(unter Berücksichtigung der trigonometrischen Beziehung $\tan x = \sin x / \cos x$)

Die Lösungen dieser Gleichung lassen sich anhand einer Skizze leicht bestimmen (Bild A-16). Sie entsprechen den *Schnittstellen* der Tangenskurve mit der Geraden $y = -1$ (*Parallele* zur x-Achse).

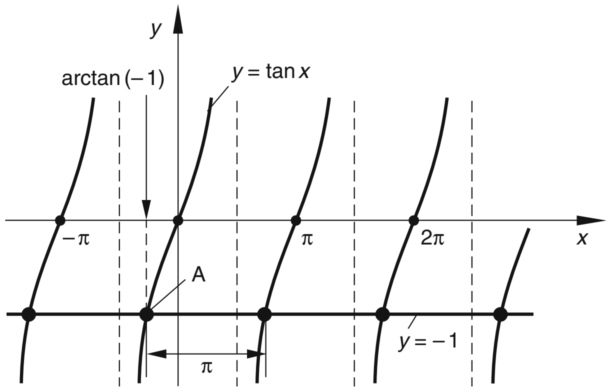


Bild A-16

Der Schnittpunkt A liegt dabei an der Stelle $x = \arctan(-1) = -\pi/4$, die weiteren Schnittpunkte im Abstand von *ganzzahligen Vielfachen* der Periode $p = \pi$ *links* und *rechts* von A. Wir erhalten somit folgende Lösungen:

$$x_k = \arctan(-1) + k \cdot \pi = -\pi/4 + k \cdot \pi \quad (\text{mit } k \in \mathbb{Z})$$

b) Unter Verwendung der trigonometrischen Beziehungen $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ und $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (→ FS) lässt sich die *linke* Seite der Gleichung wie folgt umformen:

$$\cos(2x) = \underbrace{\cos^2 x}_{1 - \sin^2 x} - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$$

Somit folgt aus $\cos(2x) = 2 \cdot \sin^2 x$:

$$1 - 2 \cdot \sin^2 x = 2 \cdot \sin^2 x \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot \sin^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x = 0{,}25 \quad \Rightarrow \quad \sin x = \pm\sqrt{0{,}25} = \pm 0{,}5$$

Wir untersuchen zunächst die Lösungen dieser beiden einfachen trigonometrischen Gleichungen im *Periodenintervall* $0 \le x < 2\pi$. Sie entsprechen den *Schnittstellen* der Sinuskurve mit den beiden zur x-Achse *parallelen* Geraden $y = 0{,}5$ bzw. $y = -0{,}5$ (siehe Bild A-17).

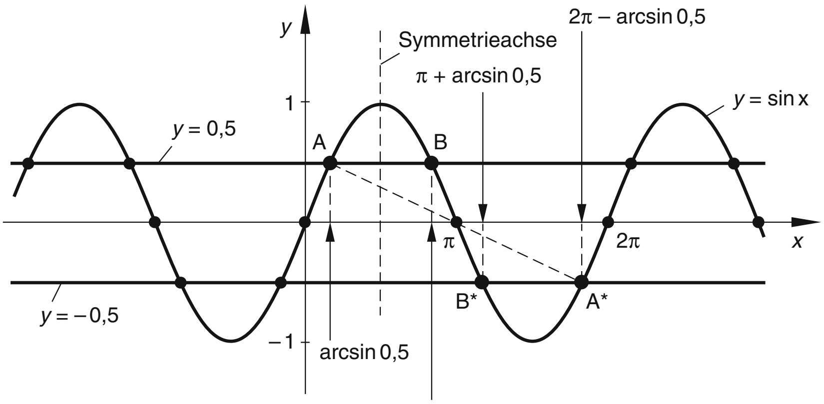


Bild A-17

$\boxed{\sin x = 0{,}5}$ Die *Umkehrung* dieser Gleichung im Intervall $0 \le x \le \pi$ liefert die Lösung $x = \arcsin 0{,}5 = \pi/6$ (Punkt A), eine weitere Lösung liegt *spiegelsymmetrisch* zur eingezeichneten Symmetrieachse an der Stelle $x = \pi - \arcsin 0{,}5$ (Punkt B). Somit ergeben sich für die Gleichung $\sin x = 0{,}5$ insgesamt folgende Lösungen (mit $k \in \mathbb{Z}$):

$$x_{1k} = \arcsin 0{,}5 + k \cdot 2\pi = \pi/6 + k \cdot 2\pi$$

$$x_{2k} = (\pi - \arcsin 0{,}5) = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + k \cdot 2\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

Denn wegen der *Periodizität* der Sinusfunktion wiederholen sich die Schnittstellen im Abstand von *ganzzahligen Vielfachen* der Periode $p = 2\pi$.

$\boxed{\sin x = -0{,}5}$ Die Lösungen dieser Gleichung erhalten wir aus den Lösungen der ersten Gleichung $\sin x = 0{,}5$ durch eine einfache *Symmetriebetrachtung*. Die im Periodenintervall $0 \le x < 2\pi$ gelegenen Schnittstellen A^* und B^* liegen bezüglich der Nullstelle $x = \pi$ der Sinusfunktion *punktsymmetrisch* zu den Punkten A und B (siehe Bild A-17). Der Schnittpunkt B^* liegt daher an der Stelle $x = \pi + \arcsin 0{,}5$, der Schnittpunkt A^* bei $x = 2\pi - \arcsin 0{,}5$.

Weitere Schnittstellen ergeben sich, wenn wir wiederum *ganzzahlige Vielfache* der Periode $p = 2\pi$ addieren oder subtrahieren (mit $k \in \mathbb{Z}$):

$$x_{3k} = (\pi + \arcsin 0{,}5) + k \cdot 2\pi = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + k \cdot 2\pi = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x_{4k} = (2\pi - \arcsin 0{,}5) + k \cdot 2\pi = \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + k \cdot 2\pi = \frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

Lösungsmenge der Ausgangsgleichung (mit $k \in \mathbb{Z}$):

$$x_{1k} = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi; \quad x_{2k} = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi; \quad x_{3k} = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi; \quad x_{4k} = \frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

A18

Bestimmen Sie *sämtliche Nullstellen* der periodischen Funktion

$$y = 5 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 3 \cdot \cos\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

a) unter Verwendung des *Additionstheorems* der Kosinusfunktion,

b) mit Hilfe des *Zeigerdiagramms*.

Hinweis zu b): Fassen Sie die beiden Summanden als *gleichfrequente* (mechanische) Schwingungen auf (x: Zeit; y: Auslenkung; Kreisfrequenz: $\omega = 1/2$) und ersetzen Sie die beiden Einzelschwingungen durch eine *resultierende Sinusschwingung* gleicher Frequenz, deren Nullstellen dann leicht bestimmt werden können.

---

a) **Nullstellen:** $y = 0 \quad \Rightarrow \quad 5 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 3 \cdot \cos\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad \Rightarrow$

$$5 \cdot \sin\underbrace{\left(\frac{1}{2}x\right)}_{u} = 3 \cdot \cos\left(\underbrace{\frac{1}{2}x}_{u} - \frac{\pi}{6}\right) \quad \Rightarrow \quad 5 \cdot \sin u = 3 \cdot \cos\left(u - \frac{\pi}{6}\right) \quad \left(\text{Substitution: } u = \frac{1}{2}x\right)$$

Mit dem *Additionstheorem* der Kosinusfunktion (→ FS) erhalten wir:

$$5 \cdot \sin u = 3 \cdot \cos(u - \pi/6) = 3\,[\cos u \cdot \cos(\pi/6) + \sin u \cdot \sin(\pi/6)] =$$

$$= 3 \cdot \cos(\pi/6) \cdot \cos u + 3 \cdot \sin(\pi/6) \cdot \sin u = 2{,}5981 \cdot \cos u + 1{,}5 \cdot \sin u \quad \Rightarrow$$

$$3{,}5 \cdot \sin u = 2{,}5981 \cdot \cos u \;|\; : 3{,}5 \cdot \cos u \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{2{,}5981}{3{,}5} \quad \Rightarrow \quad \tan u = 0{,}7423$$

(unter Verwendung der trigonometrischen Beziehung $\tan u = \sin u / \cos u$)

Die Lösungen der Gleichung $\tan u = 0{,}7423$ entsprechen den *Schnittstellen* der Tangenskurve mit der zur u-Achse *parallelen* Geraden $y = 0{,}7423$ und lassen sich aus Bild A-18 leicht ermitteln:

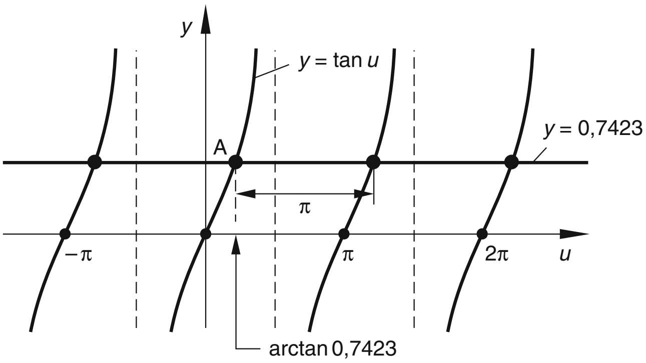


Bild A-18

Lösung im Periodenintervall $-\pi/2 < u < \pi/2$ (Punkt A in Bild A-18): $u = \arctan 0{,}7423 = 0{,}6386$

Weitere Lösungen liegen im Abstand von *ganzzahligen Vielfachen* der Periode $p = \pi$:

$$u_k = \arctan 0{,}7423 + k \cdot \pi = 0{,}6386 + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Durch *Rücksubstitution* erhalten wir die gesuchten Nullstellen $(x = 2u)$:

$$x_k = 2u_k = 2(0{,}6386 + k \cdot \pi) = 1{,}2772 + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

b) Die gleichfrequenten *Einzelschwingungen*

$$y_1 = 5 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \quad \text{und} \quad y_2 = -3 \cdot \cos\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -3 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right)$$

ergeben bei *ungestörter Überlagerung* eine gleichfrequente *resultierende Schwingung* in der Sinusform

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x + \varphi\right) \qquad (\text{mit } A > 0)$$

Zunächst aber müssen wir die Kosinusschwingung y_2 in eine *Sinusschwingung* mit positiver Amplitude verwandeln. Dies geschieht besonders anschaulich mit Hilfe des *Zeigerdiagramms* (Bild A-19):

Drehwinkel: $240^\circ \mathrel{\widehat{=}} \frac{4}{3}\pi$

$$y_2 = -3 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right) = 3 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{4}{3}\pi\right)$$

Auf die Berechnung der Amplitude A können wir verzichten, da diese *keinen* Einfluss auf die Lage der Nullstellen hat.

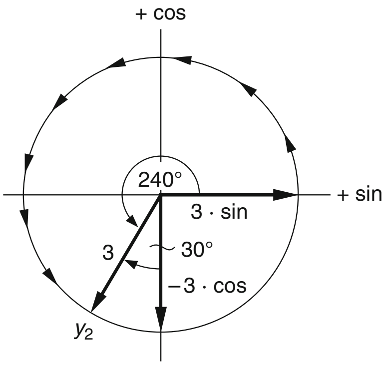


Bild A-19

Berechnung des Nullphasenwinkels φ

Mit $A_1 = 5$, $A_2 = 3$, $\varphi_1 = 0^\circ$ und $\varphi_2 = 240^\circ$ folgt dann:

$$\tan\varphi = \frac{A_1 \cdot \sin\varphi_1 + A_2 \cdot \sin\varphi_2}{A_1 \cdot \cos\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2} = \frac{5 \cdot \sin 0^\circ + 3 \cdot \sin 240^\circ}{5 \cdot \cos 0^\circ + 3 \cdot \cos 240^\circ} = \frac{0 - 2{,}5981}{5 - 1{,}5} = -0{,}7423$$

Aus dem Zeigerdiagramm entnehmen wir, dass der resultierende Zeiger im *4. Quadranten* liegt (siehe Bild A-20). Somit gilt:

$$\tan\varphi = -0{,}7423 \quad \Rightarrow$$

$$\varphi = \arctan(-0{,}7423) = -0{,}6386$$

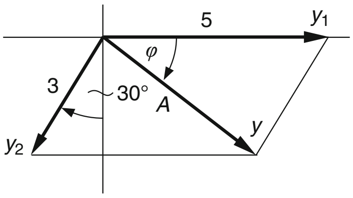


Bild A-20

Resultierende Schwingung: $y = y_1 + y_2 = A \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x - 0{,}6386\right)$ (mit $A > 0$)

Die Nullstellen der Funktion $\sin u$ liegen bekanntlich an den Stellen $u_k = k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Somit besitzt die resultierende Schwingung genau dort Nullstellen, wo ihr Argument $u = x/2 - 0{,}6386$ einen der Werte $k \cdot \pi$ annimmt:

$$\frac{1}{2}x_k - 0{,}6386 = k \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x_k = 0{,}6386 + k \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad x_k = 1{,}2772 + k \cdot 2\pi \qquad (\text{mit } k \in \mathbb{Z})$$

A19

Das Weg-Zeit-Gesetz einer *periodischen Bewegung* laute wie folgt:

$$s(t) = 2 \cdot \sin^2 t - \cos t, \quad t \geq 0$$

(s: Auslenkung; t: Zeit). Zu welchen Zeiten hat die Auslenkung den Wert $s = 2$?

Uns interessieren also die *positiven* Lösungen der trigonometrischen Gleichung

$$2 \cdot \sin^2 t - \cos t = 2.$$

Umformung mit Hilfe des „trigonometrischen Pythagoras“ $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ führt zu:

$$2 \cdot \sin^2 t - \cos t = 2 \quad \Rightarrow \quad 2(1 - \cos^2 t) - \cos t = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 - 2 \cdot \cos^2 t - \cos t = 2 \quad \Rightarrow$$

$$-2 \cdot \cos^2 t - \cos t = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos t(-2 \cdot \cos t - 1) = 0 \begin{cases} \cos t = 0 \\ -2 \cdot \cos t - 1 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\cos t = 0}$ $\Rightarrow$ Lösungen sind die *positiven Nullstellen* des Kosinus: $t_{1k} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{N})$

$\boxed{-2 \cdot \cos t - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad \cos t = -0{,}5}$

Die Lösungen dieser Gleichung entsprechen den *Schnittpunkten* der Kosinuskurve mit der zur Zeitachse *parallelen* Geraden $y = -0{,}5$ (Bild A-21):

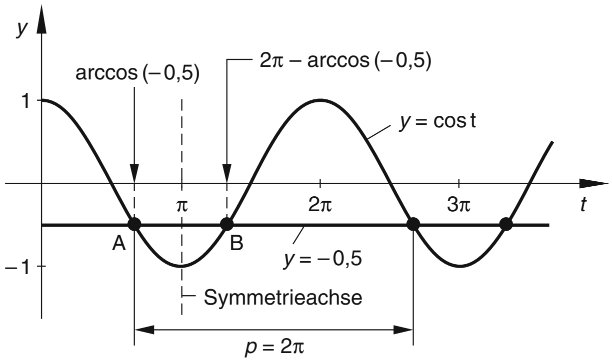


Bild A-21

Im *Periodenintervall* $0 \leq t < 2\pi$ gibt es genau *zwei* Lösungen (Punkte A und B). Die *erste* Lösung (Punkt A) erhalten wir aus der Gleichung $\cos t = -0{,}5$ durch *Umkehrung*: $t = \arccos(-0{,}5)$. Die *zweite* Lösung (Punkt B) liegt bezüglich der eingezeichneten Symmetrieachse *spiegelsymmetrisch* zur ersten Lösung bei $t = 2\pi - \arccos(-0{,}5)$. Wegen der *Periodizität* der Kosinusfunktion liegen weitere Lösungen *rechts* der Punkte A bzw. B im Abstand jeweils *ganzzahliger Vielfacher* der Periode $p = 2\pi$. Damit ergeben sich insgesamt folgende Lösungen (zu diesen Zeitpunkten hat die Auslenkung jeweils den Wert $s = 2$; $k \in \mathbb{N}$):

$$t_{1k} = \arccos(-0{,}5) + k \cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t_{2k} = (2\pi - \arccos(-0{,}5)) + k \cdot 2\pi = \left(2\pi - \frac{2}{3}\pi\right) + k \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

A20

Bestimmen Sie auf elementarem Wege die *Nullstellen* und *relativen Extremwerte* der Funktion $y = \sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x$.

Hinweis: Bringen Sie die Funktion zunächst auf die *Sinusform* $y = A \cdot \sin(x + \varphi)$ mit $A > 0$ und $0 \le \varphi < 2\pi$.

Wir fassen die Funktionsgleichung als eine harmonische Schwingung auf, die durch ungestörte *Überlagerung* zweier *gleichfrequenter* Schwingungen entstanden ist (Periode: $p = 2\pi$; Winkelgeschwindigkeit: $\omega = 1$). Aus dem *Zeigerdiagramm* können wir die „Amplitude“ A und den „Nullphasenwinkel“ φ leicht berechnen“ (siehe Bild A-22):

$$y_1 = 1 \cdot \sin x$$

$$y_2 = \sqrt{3} \cdot \cos x$$

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot \sin(x + \varphi)$$

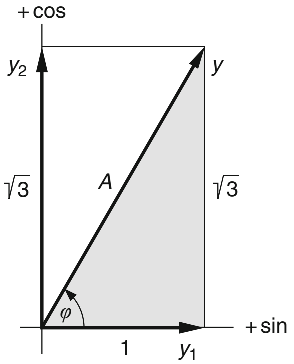


Bild A-22

Satz des Pythagoras (im grau unterlegten Dreieck):

$$A^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{4} = 2$$

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan \sqrt{3} = 60^\circ \mathrel{\widehat{=}} \pi/3$$

$$y = y_1 + y_2 = \sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 2 \cdot \sin(x + \pi/3)$$

Die *Resultierende* ist also eine um $\pi/3$ nach *links* verschobene Sinuskurve mit der „Amplitude“ $A = 2$ und der Periode $p = 2\pi$ (siehe Bild A-23)

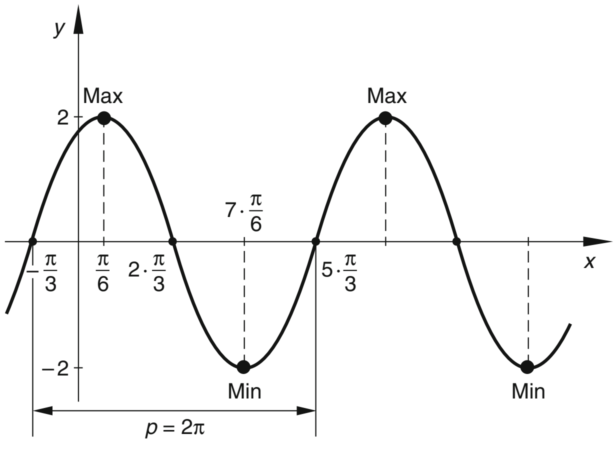


Bild A-23

Die Lage der *Nullstellen* und *relativen Extremwerte* lässt sich unmittelbar ablesen $(k \in \mathbb{Z})$:

Nullstellen: $x_{1k} = -\pi/3 + k \cdot \pi$

Relative Maxima: $x_{2k} = \pi/6 + k \cdot 2\pi; \quad y_{2k} = 2$

Relative Minima: $x_{3k} = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi; \quad y_{3k} = -2$

A21

Überlagerung gleichfrequenter Wechselspannungen

Wie groß ist der *Scheitelwert* u_0 und der *Nullphasenwinkel* φ einer Wechselspannung, die durch ungestörte Überlagerung der *gleichfrequenten* Wechselspannungen

$$u_1(t) = 100\text{ V} \cdot \sin(\omega t - \pi/6) \quad \text{und} \quad u_2(t) = 200\text{ V} \cdot \cos(\omega t - \pi/4)$$

mit $\omega = 100\text{ s}^{-1}$ entsteht?

a) Zeichnerische Lösung im *Zeigerdiagramm*.

b) Rechnerische Lösung.

Hinweis: Verwenden Sie den Lösungsansatz

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = u_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{mit} \quad u_0 > 0 \quad \text{und} \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

---

a) **Zeigerdiagramm:** Bild A-24

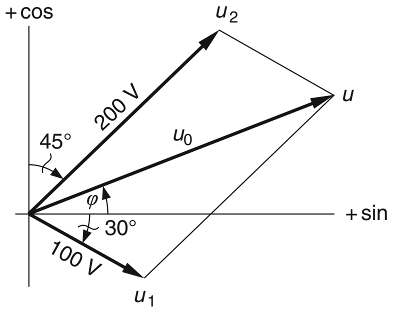


Bild A-24

abgelesene Werte:

$u_0 \approx 246$ V

$\varphi \approx 22°$

b) Die *kosinusförmige* Wechselspannung $u_2(t)$ bringen wir zunächst mit Hilfe des Zeigerdiagramms (Bild A-24) auf die *Sinusform* (Drehung des entsprechenden Sinuszeigers aus der unverschobenen Position um $45° \,\widehat{=}\, \pi/4$):

$$u_2(t) = 200\text{ V} \cdot \cos(\omega t - \pi/4) = 200\text{ V} \cdot \sin(\omega t + \pi/4)$$

Berechnung von Scheitelwert u_0 und Nullphasenwinkel φ

Somit gilt: $u_{01} = 100$ V; $u_{02} = 200$ V; $\varphi_1 = -\pi/6 \,\widehat{=}\, -30°$; $\varphi_2 = \pi/4 \,\widehat{=}\, 45°$

$$u_0^2 = u_{01}^2 + u_{02}^2 + 2u_{01} \cdot u_{02} \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1) =$$

$$= (100\text{ V})^2 + (200\text{ V})^2 + 2 \cdot (100\text{ V}) \cdot (200\text{ V}) \cdot \cos\underbrace{(45° + 30°)}_{75°} =$$

$$= (10\,000 + 40\,000 + 10\,352{,}76)\text{ V}^2 = 60\,352{,}76\text{ V}^2 \quad \Rightarrow \quad u_0 = 245{,}67\text{ V}$$

$$\tan\varphi = \frac{u_{01} \cdot \sin\varphi_1 + u_{02} \cdot \sin\varphi_2}{u_{01} \cdot \cos\varphi_1 + u_{02} \cdot \cos\varphi_2} = \frac{(100\text{ V}) \cdot \sin(-30°) + (200\text{ V}) \cdot \sin 45°}{(100\text{ V}) \cdot \cos(-30°) + (200\text{ V}) \cdot \cos 45°} =$$

$$= \frac{(-50 + 141{,}4214)\text{ V}}{(86{,}6025 + 141{,}4214)\text{ V}} = \frac{91{,}4214}{228{,}0239} = 0{,}4009$$

Da der gesuchte Nullphasenwinkel φ im *1. Quadranten* liegt (siehe Zeigerdiagramm, Bild A-24), gilt:

$$\varphi = \arctan 0{,}4009 = 21{,}85° \,\widehat{=}\, 0{,}3813$$

Ergebnis: $u(t) = u_1(t) + u_2(t) = 245{,}67\text{ V} \cdot \sin(\omega t + 0{,}3813)$ (mit $\omega = 100\text{ s}^{-1}$)

A22

Superposition gedämpfter Schwingungen

Die *gedämpfte mechanische Schwingung* mit der Funktionsgleichung

$$y(t) = 5\ \text{cm} \cdot e^{-0{,}1\,t/\text{s}} \cdot [2 \cdot \sin(2\ \text{s}^{-1} \cdot t) + 3 \cdot \cos(2\ \text{s}^{-1} \cdot t)], \quad t \geq 0$$

kann als *Überlagerung* zweier *gleichfrequenter* gedämpfter Schwingungen aufgefasst werden. Bringen Sie diese Schwingung mit Hilfe des *Zeigerdiagramms* auf die „Sinusform“

$$y(t) = A \cdot e^{-0{,}1\,t/\text{s}} \cdot \sin(2\ \text{s}^{-1} \cdot t + \varphi), \quad t \geq 0$$

mit $A > 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Aus der Gleichung

$$5\ \text{cm} \cdot e^{-0{,}1\,t/\text{s}} \cdot [2 \cdot \sin(2\ \text{s}^{-1} \cdot t) + 3 \cdot \cos(2\ \text{s}^{-1} \cdot t)] = A \cdot e^{-0{,}1\,t/\text{s}} \cdot \sin(2\ \text{s}^{-1} \cdot t + \varphi)$$

folgt unmittelbar durch Kürzen der e-Funktion:

$$5\ \text{cm}\,[2 \cdot \sin(2\ \text{s}^{-1} \cdot t) + 3 \cdot \cos(2\ \text{s}^{-1} \cdot t)] = 10\ \text{cm} \cdot \sin(2\ \text{s}^{-1} \cdot t) + 15\ \text{cm} \cdot \cos(2\ \text{s}^{-1} \cdot t) =$$

$$= A \cdot \sin(2\ \text{s}^{-1} \cdot t + \varphi)$$

Die beiden *gleichfrequenten ungedämpften Einzelschwingungen*

$$x_1(t) = 10\ \text{cm} \cdot \sin(2\ \text{s}^{-1} \cdot t) \quad \text{und} \quad x_2(t) = 15\ \text{cm} \cdot \cos(2\ \text{s}^{-1} \cdot t)$$

können durch die *resultierende Sinusschwingung*

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \cdot \sin(2\ \text{s}^{-1} \cdot t + \varphi)$$

ersetzt werden, deren *Amplitude* A und *Nullphasenwinkel* φ sich wie folgt aus dem *Zeigerdiagramm* berechnen lassen (Bild A-25):

Satz des Pythagoras (im grau unterlegten Dreieck):

$$A^2 = (10\ \text{cm})^2 + (15\ \text{cm})^2 = (100 + 225)\ \text{cm}^2 = 325\ \text{cm}^2$$

$$A = \sqrt{325}\ \text{cm} = 18{,}03\ \text{cm}$$

$$\tan\varphi = \frac{15\ \text{cm}}{10\ \text{cm}} = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan 1{,}5 = 56{,}31^\circ \mathrel{\widehat{=}} 0{,}983$$

Somit gilt:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 18{,}03\ \text{cm} \cdot \sin(2\ \text{s}^{-1} \cdot t + 0{,}983), \quad t \geq 0$$

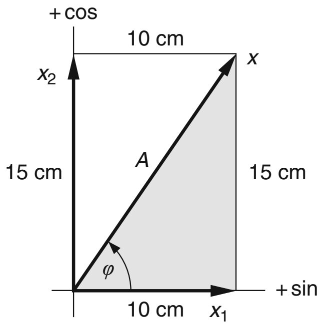


Bild A-25

Darstellung der *gedämpften* Schwingung in der *Sinusform*:

$$y(t) = e^{-0{,}1\,t/\text{s}} \cdot x(t) = e^{-0{,}1\,t/\text{s}} \cdot 18{,}03\ \text{cm} \cdot \sin(2\ \text{s}^{-1} \cdot t + 0{,}983) =$$

$$= 18{,}03\ \text{cm} \cdot e^{-0{,}1\,t/\text{s}} \cdot \sin(2\,\text{s}^{-1} \cdot t + 0{,}983)$$

A23

Zünd- und Löschspannung einer Glimmlampe

Eine *Glimmlampe* liegt an der Wechselspannung

$$u(t) = 360\ \text{V} \cdot \sin(100\pi\,\text{s}^{-1} \cdot t), \quad t \geq 0\ \text{s}$$

Sie beginnt zu leuchten, wenn die *Zündspannung* $u_Z = 180\ \text{V}$ erreicht wird und sie erlischt bei Unterschreitung der *Löschspannung* $u_L = 90\ \text{V}$. Wie lange leuchtet sie (bezogen auf eine *Periode* der angelegten Wechselspannung)?

Wir führen folgende Bezeichnungen ein (siehe hierzu Bild A-26):

t_1: Die Lampe beginnt zu dieser Zeit erstmals zu leuchten, d. h. $u(t_1) = 180\ \text{V}$

t_2: Die Lampe erlischt erstmals, d. h. $u(t_2) = 90\ \text{V}$

t_3: Die Lampe beginnt wieder zu leuchten, d. h. $u(t_3) = -180\ \text{V}$

t_4: Die Lampe erlischt wieder, d. h. $u(t_4) = -90\ \text{V}$

t^*: Die Spannung an der Lampe erreicht erstmals den Wert 90 V, d. h. $u(t^*) = 90\ \text{V}$.

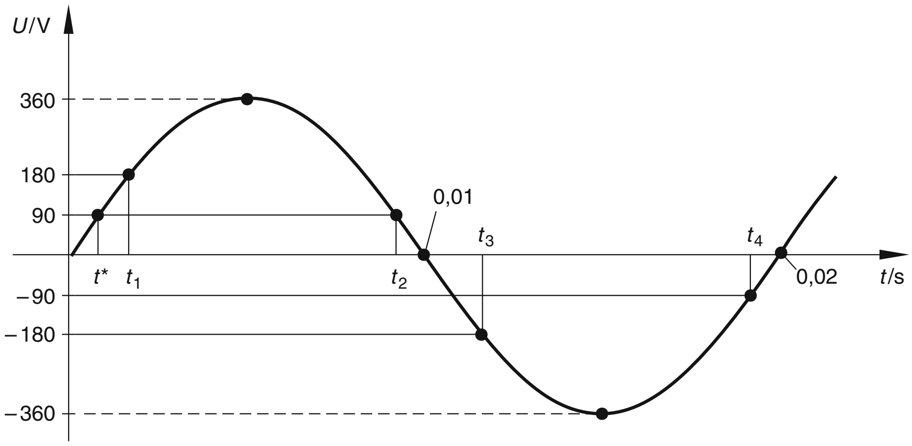


Bild A-26

Sie leuchtet also in den beiden (wegen der Symmetrie der Sinuskurve) *gleichlangen* Zeitintervallen $t_1 \leq t \leq t_2$ und $t_3 \leq t \leq t_4$, insgesamt also während der Zeit $\Delta t = 2(t_2 - t_1)$ (innerhalb *einer* Periode der angelegten Wechselspannung).

Berechnung der Zeitpunkte t_1 und t_2

Kreisfrequenz der Wechselspannung: $\omega = 100\pi\,\text{s}^{-1}$

Periode (Schwingungsdauer) der Wechselspannung: $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{100\pi\,\text{s}^{-1}} = 0{,}02\ \text{s}$

Zeitpunkt t_1: $u(t_1) = 180\ \text{V} \quad \Rightarrow$

$$360\ \text{V} \cdot \sin(\underbrace{100\pi\,\text{s}^{-1} \cdot t_1}_{x}) = 180\ \text{V} \quad | : 360\ \text{V} \quad \Rightarrow \quad \sin x = 0{,}5$$

Durch *Umkehrung* und anschließende *Rücksubstitution* folgt:

$$x = \arcsin 0{,}5 = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad 100\pi\,\text{s}^{-1} \cdot t_1 = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{1}{600}\ \text{s} = 0{,}001\,667\ \text{s}$$

Zeitpunkt t_2: $u(t_2) = 90\ \text{V} \quad \Rightarrow$

$$360\ \text{V} \cdot \sin(\underbrace{100\pi\,\text{s}^{-1} \cdot t_2}_{y}) = 90\ \text{V} \quad | : 360\ \text{V} \quad \Rightarrow \quad \sin y = 0{,}25$$

Beim Auflösen dieser Gleichung müssen wir beachten, dass die Löschspannung von 90 V *erstmals* bereits zum früheren Zeitpunkt $t^* < t_1$ erreicht wird (siehe Bild A-26). Diesen Zeitpunkt t^* erhalten wir wie folgt durch *Umkehrung* der Gleichung $\sin y^* = 0{,}25$ und anschließender *Rücksubstitution*:

$$\sin y^* = 0{,}25 \quad \Rightarrow \quad y^* = \arcsin 0{,}25 = 0{,}252\,68 \quad \Rightarrow \quad 100\,\pi\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t^* = 0{,}252\,68 \quad \Rightarrow \quad t^* = 0{,}000\,804\ \mathrm{s}$$

Aus Bild A-26 entnehmen wir dann für den gesuchten Zeitpunkt t_2:

$$t_2 = 0{,}01\ \mathrm{s} - t^* = (0{,}01 - 0{,}000\,804)\ \mathrm{s} = 0{,}009\,196\ \mathrm{s}$$

„Leuchtintervall“ $\Delta t = 2\,(t_2 - t_1)$

$$\Delta t = 2\,(t_2 - t_1) = 2\,(0{,}009\,196 - 0{,}001\,667)\ \mathrm{s} = 0{,}015\,058\ \mathrm{s}$$

Im Verhältnis zur Periode T der angelegten Wechselspannung:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{0{,}015\,058\ \mathrm{s}}{0{,}02\ \mathrm{s}} = 0{,}752\,9 \approx 75{,}3\,\%$$

Die Glimmlampe leuchtet also während einer Periode zu rund 3 / 4 dieser Zeit.

A24

a) Wie lauten die *Gleichungen* der in Bild A-27 durch *Zeiger* dargestellten *gleichfrequenten* Schwingungen (Kreisfrequenz: ω; $t \geq 0$ s)?

b) Bestimmen Sie *zeichnerisch* die durch ungestörte Superposition erzeugte *resultierende* Schwingung.

c) Wie lautet die Gleichung der *resultierenden* Schwingung (elementare Berechnung *ohne* fertige Formeln).

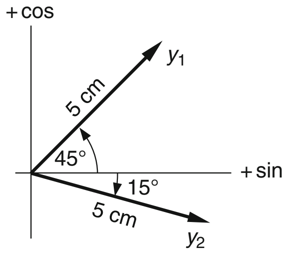


Bild A-27

Hinweis: Alle Schwingungen sind in der *Sinusform* mit *positiver* Amplitude anzugeben.

---

a) **Zeiger y_1:** $A_1 = 5\ \mathrm{cm}$; $\varphi_1 = 45° \mathrel{\widehat{=}} \pi/4 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 5\ \mathrm{cm} \cdot \sin(\omega t + \pi/4)$, $t \geq 0\ \mathrm{s}$

Zeiger y_2: $A_2 = 5\ \mathrm{cm}$; $\varphi_2 - 15° \mathrel{\widehat{=}} -\pi/12 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 5\ \mathrm{cm} \cdot \sin(\omega t - \pi/12)$, $t \geq 0\ \mathrm{s}$

b) **Zeigerdiagramm:** siehe Bild A-28

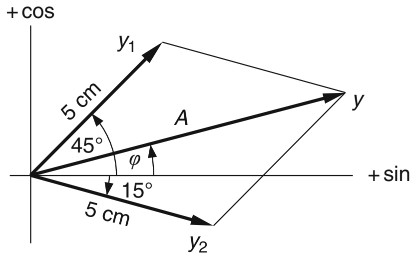


Bild A-28

abgelesene Werte:

$A \approx 8{,}7\ \mathrm{cm}$

$\varphi \approx 15°$

c) Darstellung der *resultierenden* Schwingung in der *Sinusform*:

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{mit } A > 0 \text{ und } t \geq 0)$$

Das Parallelogramm ist eine *Raute* (Rhombus) mit der Seitenlänge 5 cm und Innenwinkeln von $60°$ und $120°$ (siehe Bild A-29). Da die Diagonalen einer Raute bekanntlich die Innenwinkel *halbieren*, muss der gesuchte *Phasenwinkel* $\varphi = 15° \mathrel{\widehat{=}} \pi / 12$ betragen. Die Berechnung der *Amplitude* A erfolgt aus dem in Bild A-29 *grau* unterlegten gleichschenkligen Dreieck mit Hilfe des *Kosinussatzes* (→ FS):

$$A^2 = (5\text{ cm})^2 + (5\text{ cm})^2 - 2 \cdot (5\text{ cm}) \cdot (5\text{ cm}) \cdot \cos 120° =$$

$$= (25 + 25 + 25)\text{ cm}^2 = 75\text{ cm}^2 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{75}\text{ cm} = 8{,}66\text{ cm}$$

Ergebnis: $y = y_1 + y_2 = 8{,}66\text{ cm} \cdot \sin(\omega t + \pi / 12), \quad t \geq 0\text{ s}$

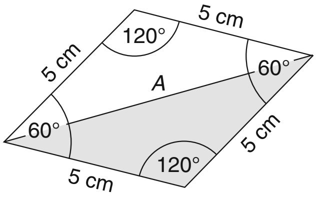


Bild A-29

A25

Gegeben sind die *gleichfrequenten* Sinusschwingungen mit den Gleichungen

$$y_1 = 5\text{ cm} \cdot \sin(2\text{ s}^{-1} \cdot t + \pi / 3) \quad \text{und} \quad y_2 = A_2 \cdot \cos(2\text{ s}^{-1} \cdot t + 4\pi / 3)$$

($t \geq 0$ s). Bestimmen Sie (zeichnerisch und rechnerisch) die *Amplitude* $A_2 > 0$ so, dass die durch *Superposition* entstandene *resultierende* Schwingung zu einem *unverschobenen* Sinuszeiger mit *positiver* Amplitude A führt. Wie groß ist A?

Für die *resultierende* Schwingung gilt also $(\varphi = 0)$:

$$y = y_1 + y_2 = 5\text{ cm} \cdot \sin(2\text{ s}^{-1} \cdot t + \pi / 3) + A_2 \cdot \cos(2\text{ s}^{-1} \cdot t + 4\pi / 3) = A \cdot \sin(2\text{ s}^{-1} \cdot t)$$

Zeigerdiagramm: siehe Bild A-30

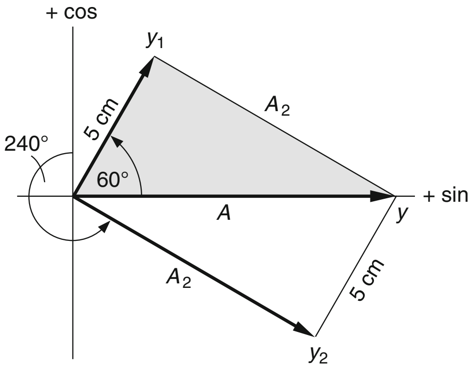


Bild A-30

abgelesene Werte:

$A \approx 10$ cm

$A_2 \approx 8{,}7$ cm

Berechnung der Amplituden A_2 und A

Aus dem *Zeigerdiagramm* entnehmen wir: die Zeiger y_1 und y_2 stehen *senkrecht* aufeinander, das Parallelogramm ist somit ein *Rechteck* und wir können daher auf fertige Berechnungsformeln verzichten. Aus dem *grau* unterlegten *rechtwinkligen* Dreieck folgt dann:

$$\tan 60° = \frac{A_2}{5\text{ cm}} \quad \Rightarrow \quad A_2 = 5\text{ cm} \cdot \tan 60° = 8{,}66\text{ cm}$$

$$\cos 60° = \frac{5\text{ cm}}{A} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{5\text{ cm}}{\cos 60°} = 10\text{ cm}$$

Resultierende Schwingung: $y = y_1 + y_2 = 10\text{ cm} \cdot \sin(2\text{ s}^{-1} \cdot t), \quad t \geq 0\text{ s}$

A26

Überlagerung sinusförmiger Wechselströme

Wie lauten die *Funktionsgleichungen* der in Bild A-31 dargestellten *Wechselströme*? Durch welche Gleichung lässt sich der *Gesamtstrom* beschreiben, der durch *ungestörte Überlagerung* der beiden Einzelströme entsteht?

Hinweis: Sämtliche Ströme sind in der *Sinusform* $i(t) = i_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ anzugeben mit $i_0 > 0$ und $0 \le \varphi < 2\pi$.

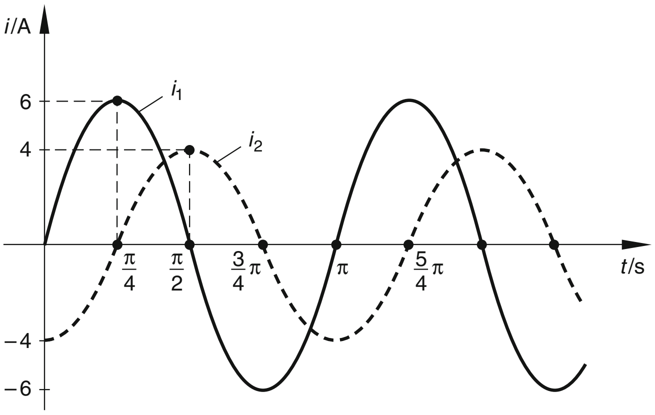


Bild A-31

Wechselstrom $i_1(t) = i_{01} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$

Scheitelwert: $i_{01} = 6\,\text{A}$; Nullphasenwinkel: $\varphi_1 = 0$; Schwingungsdauer: $T_1 = \pi\,\text{s}$

Kreisfrequenz: $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T_1} = \dfrac{2\pi}{\pi\,\text{s}} = 2\,\text{s}^{-1}$

Somit gilt:

$$i_1(t) = i_{01} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) = 6\,\text{A} \cdot \sin(2\,\text{s}^{-1} \cdot t), \quad t \ge 0\,\text{s}$$

Wechselstrom $i_2(t) = i_{02} \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$

Scheitelwert: $i_{02} = 4\,\text{A}$; Schwingungsdauer: $T_2 = \pi\,\text{s}$; Kreisfrequenz: $\omega_2 = \dfrac{2\pi}{T_2} = \dfrac{2\pi}{\pi\,\text{s}} = 2\,\text{s}^{-1}$

Die Sinuskurve

$$i_2(t) = i_{02} \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2) = 4\,\text{A} \cdot \sin(2\,\text{s}^{-1} \cdot t + \varphi_2)$$

ist auf der Zeitachse um $t_0 = \pi/4\,\text{s}$ nach *rechts* verschoben. Daraus lässt sich der *Nullphasenwinkel* φ_2 wie folgt bestimmen:

$$i_2(t_0 = \pi/4\,\text{s}) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\,\text{A} \cdot \sin\left(2\,\text{s}^{-1} \cdot \frac{\pi}{4}\,\text{s} + \varphi_2\right) = 4\,\text{A} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_2\right) = 0 \;|\; : 4\,\text{A} \quad \Rightarrow$$

$$\sin\underbrace{\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_2\right)}_{0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} + \varphi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$$

Somit gilt:

$$i_2(t) = 4\,\text{A} \cdot \sin(2\,\text{s}^{-1} \cdot t - \pi/2), \quad t \ge 0\,\text{s}$$

Überlagerung der Teilströme $i_1(t)$ und $i_2(t)$

Da die Teilströme *gleiche* Schwingungsdauer und damit *gleiche* Kreisfrequenz haben $(\omega_1 = \omega_2 = 2\text{ s}^{-1})$, entsteht bei der *Überlagerung* ebenfalls ein Wechselstrom der Kreisfrequenz $\omega = 2\text{ s}^{-1}$:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = 6\text{ A} \cdot \sin(2\text{ s}^{-1} \cdot t) + 4\text{ A} \cdot \sin(2\text{ s}^{-1} \cdot t - \pi/2) = i_0 \cdot \sin(2\text{ s}^{-1} \cdot t + \varphi)$$

Die Berechnung des *Scheitelwertes* i_0 und des *Nullphasenwinkels* φ erfolgt anhand des *Zeigerdiagramms* (Bild A-32). Die Zeiger der beiden Teilströme stehen *aufeinander senkrecht*, das Parallelogramm ist somit ein *Rechteck*. i_0 und φ lassen sich daher *elementar* wie folgt berechnen:

Satz des Pythagoras (im grau unterlegten Dreieck):

$$i_0^2 = (4\text{ A})^2 + (6\text{ A})^2 = (16 + 36)\text{ A}^2 = 52\text{ A}^2$$

$$i_0 = \sqrt{52}\text{ A} = 7{,}211\text{ A}$$

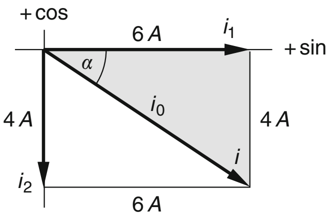


Bild A-32

Phasenwinkel: $\varphi = 2\pi - \alpha$

$$\tan\alpha = \frac{4\text{ A}}{6\text{ A}} = \frac{2}{3} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 0{,}588 \quad\Rightarrow\quad \varphi = 2\pi - \alpha = 2\pi - 0{,}588 = 5{,}695$$

Ergebnis: $i(t) = i_1(t) + i_2(t) = 7{,}211\text{ A} \cdot \sin(2\text{ s}^{-1} \cdot t + 0{,}5695), \quad t \ge 0\text{ s}$

A27

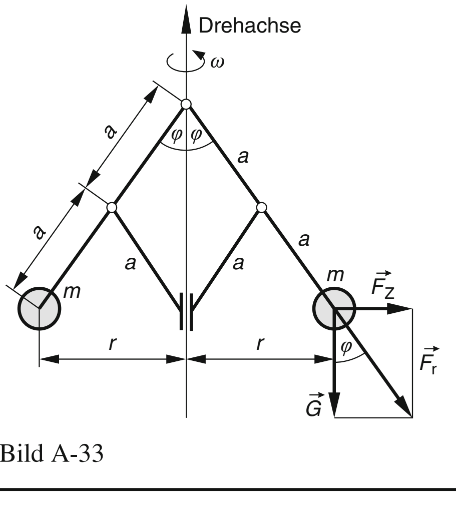
Zentrifugalkraftregler

Bild A-33 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines *Zentrifugalkraftreglers*. An den (als *masselos* angenommenen) Armen der Länge $2a$ hängt jeweils eine *punktförmige* Masse m, die mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die eingezeichnete Drehachse rotiert. Zwischen dem *Winkel* φ, unter dem sich infolge der *Zentrifugalkräfte* die Arme gegenüber der Achse einstellen, und der *Winkelgeschwindigkeit* ω besteht dabei der folgende Zusammenhang:

$$\cos\varphi = \frac{g}{2a\omega^2} \qquad (g\text{: Erdbeschleunigung})$$

a) Zeigen Sie, dass zum *Abheben* der Arme eine *Mindestwinkelgeschwindigkeit* ω_0 nötig ist.

b) *Skizzieren* Sie die Abhängigkeit des Winkels φ von der Winkelgeschwindigkeit ω. Welcher *maximale* Winkel $\varphi_{\max}$ ist möglich?



$\vec{G}$: Gewichtskraft

$\vec{F}_Z$: Zentrifugalkraft

$\vec{F}_r$: Resultierende Kraft

Bild A-33

a) Der *kleinstmögliche* Winkel ist $\varphi = 0^{\circ}$. Zu ihm gehört der *Mindestwert* ω_0 der Winkelgeschwindigkeit:

$$\underbrace{\cos 0^{\circ}}_{1} = \frac{g}{2a\omega_0^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2 = \frac{g}{2a} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2a}}$$

b) Wir lösen die Gleichung $\cos\varphi = \dfrac{g}{2a\omega^2}$ nach φ auf und erhalten die gesuchte Beziehung zwischen φ und ω in Form einer *Arkusfunktion*:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{g}{2a\omega^2}\right) = \arccos\left(\frac{g/2a}{\omega^2}\right) = \arccos\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = \arccos\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2, \quad \omega \geq \omega_0$$

Kurvenverlauf: siehe Bild A-34

Wertetabelle: Wir setzen $x = \omega/\omega_0$ und berechnen einige Werte der Funktion

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = \arccos\left[\frac{1}{(\omega/\omega_0)^2}\right] = \arccos(1/x^2), \quad x \geq 1$$

x	φ
1	0°
1,2	46°
1,4	59,3°
1,6	67,0°
1,8	72,0°
2	75,5°
2,5	80,8°
3	83,6°
4	86,4°
5	87,7°
10	89,4°

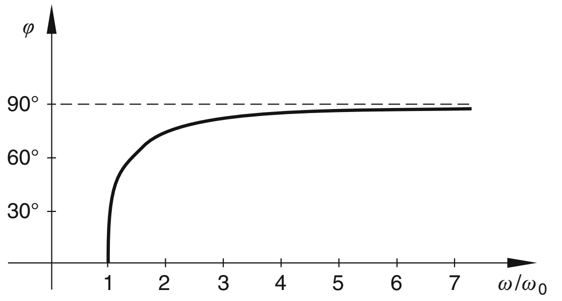


Bild A-34

Der *größtmögliche* Winkel ist $\varphi_{\max} = 90^{\circ}$ (*waagerechte* Arme!), er wird bei *unendlich hoher* Winkelgeschwindigkeit erreicht ($\omega \to \infty$ und somit auch $x \to \infty$):

$$\varphi_{\max} = \lim_{\omega \to \infty} \arccos\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = \lim_{x \to \infty} \arccos(1/x^2) = \arccos 0 = 90^{\circ}$$

4 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel III.11 und 12
Formelsammlung: Kapitel III.9 und 10

A28

Zeigen Sie: Die Funktion $y = 3 \cdot 2^{3x+1} \cdot 5^{3x-1}, \quad -\infty < x < \infty$ ist *umkehrbar*. Wie lautet die *Umkehrfunktion*?

Zunächst bringen wir die Funktion auf eine „*günstigere*" Form:

$$y = 3 \cdot \underbrace{2^{3x+1}}_{2^{3x} \cdot 2^1} \cdot \underbrace{5^{3x-1}}_{5^{3x} \cdot 5^{-1}} = 3 \cdot 2^{3x} \cdot 2^1 \cdot 5^{3x} \cdot 5^{-1} = 3 \cdot 2 \cdot 5^{-1} \cdot \underbrace{2^{3x} \cdot 5^{3x}}_{(2 \cdot 5)^{3x}} = \frac{6}{5} \cdot (2 \cdot 5)^{3x} = 1{,}2 \cdot 10^{3x}$$

Rechenregeln: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n; \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Es handelt sich also um eine *streng monoton wachsende* Exponentialfunktion, die bekanntlich *umkehrbar* ist. Wir lösen die Funktionsgleichung nun nach x auf, in dem wir beide Seiten *logarithmieren* (Zehnerlogarithmus verwenden):

$$y = 1{,}2 \cdot 10^{3x} \mid \lg \quad \Rightarrow$$

$$\lg y = \lg(1{,}2 \cdot 10^{3x}) = \lg 1{,}2 + \lg 10^{3x} = \lg 1{,}2 + 3x \cdot \lg 10 = \lg 1{,}2 + 3x \quad \Rightarrow$$

$$3x = \lg y - \lg 1{,}2 \mid :3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3} \cdot \lg y - \frac{1}{3} \cdot \lg 1{,}2 = \frac{1}{3} \cdot \lg y - 0{,}0264$$

Rechenregeln: $\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b; \quad \lg a^n = n \cdot \lg a; \quad \lg 10 = 1$

Durch *Vertauschen* der beiden Variablen erhalten wir schließlich die gesuchte *Umkehrfunktion*:

$$y = \frac{1}{3} \cdot \lg x - 0{,}0264, \quad x > 0$$

A29

Aufladen eines Kondensators

Beim *Aufladen eines Kondensators* steigt die Kondensatorspannung u im Laufe der Zeit t nach dem Exponentialgesetz

$$u(t) = 100\text{ V}\,(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}), \quad t \geq 0\text{ s}$$

($\tau > 0$: Zeitkonstante, noch unbekannt).

a) Bestimmen Sie die *Zeitkonstante* τ aus dem *Messwert* $u(t = 2\text{ s}) = 80$ V.

b) Welchen *Endwert* u_E erreicht die am Kondensator liegende Spannung? Nach welcher Zeit wird der *halbe* Endwert erreicht? Skizzieren Sie den *Spannungsverlauf* am Kondensator.

c) Berechnen Sie die Kondensatorspannung zum Zeitpunkt $t = 5$ s.

a) $u(t = 2\ \mathrm{s}) = 80\ \mathrm{V} \quad \Rightarrow$

$$100\ \mathrm{V}\ (1 - \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{s}/\tau}) = 80\ \mathrm{V} \quad |\ : 100\ \mathrm{V} \quad \Rightarrow \quad 1 - \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{s}/\tau} = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad 0{,}2 = \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{s}/\tau} \quad |\ \ln \quad \Rightarrow$$

$$\ln 0{,}2 = \ln \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{s}/\tau} = -\frac{2\ \mathrm{s}}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{-2\ \mathrm{s}}{\ln 0{,}2} = 1{,}242\,67\ \mathrm{s}$$

Rechenregel: $\ln \mathrm{e}^{n} = n$

b) Der *Endwert* u_E wird erst nach unendlich langer Zeit, d. h. für $t \rightarrow \infty$ erreicht. Er beträgt:

$$u_E = \lim_{t \to \infty} u(t) = \lim_{t \to \infty} 100\ \mathrm{V}\ (1 - \mathrm{e}^{-t/1{,}242\,67\,\mathrm{s}}) = 100\ \mathrm{V}$$

(die streng monoton fallende e-Funktion *verschwindet* für $t \rightarrow \infty$). Der *halbe* Endwert, also $u = 50$ V, wird zum Zeitpunkt $t = T$ erreicht:

$$u(t = T) = 50\ \mathrm{V} \quad \Rightarrow$$

$$100\ \mathrm{V}\ (1 - \mathrm{e}^{-T/1{,}242\,67\,\mathrm{s}}) = 50\ \mathrm{V} \quad |\ : 100\ \mathrm{V} \quad \Rightarrow \quad 1 - \mathrm{e}^{-T/1{,}242\,67\,\mathrm{s}} = 0{,}5 \quad \Rightarrow$$

$$0{,}5 = \mathrm{e}^{-T/1{,}242\,67\,\mathrm{s}} \quad |\ \ln \quad \Rightarrow \quad \ln 0{,}5 = \ln \mathrm{e}^{-T/1{,}242\,67\,\mathrm{s}} = -\frac{T}{1{,}242\,67\ \mathrm{s}} \quad \Rightarrow$$

$$T = (-1{,}242\,67\ \mathrm{s}) \cdot \ln 0{,}5 = 0{,}8614\ \mathrm{s}$$

Rechenregel: $\ln \mathrm{e}^{n} = n$

Spannungsverlauf: siehe Bild A-35

$$u(t) = 100\ \mathrm{V}\ (1 - \mathrm{e}^{-t/1{,}242\,67\,\mathrm{s}}) =$$

$$= 100\ \mathrm{V}\ (1 - \mathrm{e}^{-0{,}804\,72\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t})$$

(für $t \geq 0$ s)

c) $u(t = 5\ \mathrm{s}) = 100\ \mathrm{V}\ (1 - \mathrm{e}^{-0{,}804\,72\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 5\,\mathrm{s}}) =$

$$= 100\ \mathrm{V}\ (1 - \mathrm{e}^{-4{,}023\,60}) = 98{,}21\ \mathrm{V}$$

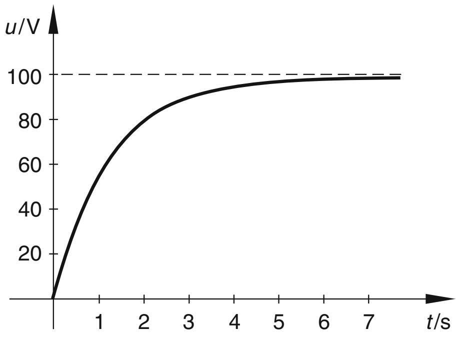


Bild A-35

A30

Zeigen Sie, dass für *jedes* $x \geq 1$ gilt:

$$\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = 0\,.$$

Wir formen zunächst die Gleichung wie folgt um:

$$\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = -\ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = -1 \cdot \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^{-1}$$

(*Rechenregel:* $n \cdot \ln a = \ln a^{n}$). Durch *Entlogarithmieren* folgt weiter:

$$\mathrm{e}^{\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)} = \mathrm{e}^{\ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^{-1}} \quad \Rightarrow \quad x + \sqrt{x^2 - 1} = \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^{-1} \quad \Rightarrow$$

$$x + \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \quad \Bigg| \cdot \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)}_{\text{3. Binom: } (a + b)(a - b) = a^2 - b^2} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 - (x^2 - 1) = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x^2 + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1$$

Rechenregel: $\ln a = \ln b \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{\ln a} = \mathrm{e}^{\ln b} \quad \Rightarrow \quad a = b$ *(Entlogarithmierung)*

Damit ist die vorgegebene Beziehung für jedes $x \geq 1$ bewiesen.

A31

Abkühlungsgesetz von Newton

Ein Körper besitzt zurzeit $t = 0$ die Temperatur $T_0 = 30\ °\mathrm{C}$ und wird dann durch einen Luftstrom der *konstanten* Temperatur $T_L = 20\ °\mathrm{C}$ *gekühlt*, wobei

$$T(t) = (T_0 - T_L) \cdot \mathrm{e}^{-kt} + T_L, \quad t \geq 0$$

gilt ($T(t)$: Körpertemperatur zum Zeitpunkt t; $k > 0$: Konstante).

a) Nach 5 min beträgt die Körpertemperatur 28 °C. Bestimmen Sie aus diesem Messwert die Konstante k.

b) Welche Temperatur besitzt der Körper nach 60 min?

c) Wann ist der Abkühlungsprozess *beendet*, welche Temperatur T_E besitzt dann der Körper? *Skizzieren* Sie den *Temperaturverlauf.*

Das *Abkühlungsgesetz* lautet für die vorgegebenen Werte wie folgt:

$$T(t) = (30\ °\mathrm{C} - 20\ °\mathrm{C}) \cdot \mathrm{e}^{-kt} + 20\ °\mathrm{C} = 10\ °\mathrm{C} \cdot \mathrm{e}^{-kt} + 20\ °\mathrm{C}, \quad t \geq 0\ \mathrm{min}$$

a) $T(t = 5\ \mathrm{min}) = 28\ °\mathrm{C} \quad \Rightarrow$

$$10\ °\mathrm{C} \cdot \mathrm{e}^{-(5\ \mathrm{min})k} + 20\ °\mathrm{C} = 28\ °\mathrm{C} \quad \Rightarrow \quad 10\ °\mathrm{C} \cdot \mathrm{e}^{(-5\ \mathrm{min})k} = 8\ °\mathrm{C} \mid : 10\ °\mathrm{C} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-(5\ \mathrm{min})k} = 0{,}8 \mid \ln \quad \Rightarrow$$

$$\ln \mathrm{e}^{-(5\ \mathrm{min})k} = -(5\ \mathrm{min})\,k = \ln 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln 0{,}8}{-5\ \mathrm{min}} = 0{,}044\,63\ \mathrm{min}^{-1}$$

Rechenregel: $\ln \mathrm{e}^{n} = n$

b) $T(t) = 10\ °\mathrm{C} \cdot \mathrm{e}^{-0{,}044\,63\ \mathrm{min}^{-1} \cdot t} + 20\ °\mathrm{C}, \quad t \geq 0\ \mathrm{min}$

$$T(t = 60\ \mathrm{min}) = 10\ °\mathrm{C} \cdot \mathrm{e}^{-0{,}044\,63\ \mathrm{min}^{-1} \cdot 60\ \mathrm{min}} + 20\ °\mathrm{C} =$$

$$= 10\ °\mathrm{C} \cdot \mathrm{e}^{-2{,}677\,8} + 20\ °\mathrm{C} = 0{,}687\ °\mathrm{C} + 20\ °\mathrm{C} = 20{,}687\ °\mathrm{C}$$

c) Der Abkühlungsprozess ist (theoretisch) erst nach *unendlich langer* Zeit beendet ($t \rightarrow \infty$). Der Körper hat dann die Temperatur der *Luft* angenommen:

$$T_E = \lim_{t \to \infty} T(t) = \lim_{t \to \infty} \left[10\ °\mathrm{C} \cdot \mathrm{e}^{-0{,}044\,63\ \mathrm{min}^{-1} \cdot t} + 20\ °\mathrm{C} \right] = 20\ °\mathrm{C} = T_L$$

(die streng monoton fallende e-Funktion *verschwindet* für $t \rightarrow \infty$)

Aus physikalischer Sicht: Der Abkühlungsprozess ist *beendet*, wenn (auf Grund *gleicher* Temperaturen) *kein* Wärmeaustausch mehr stattfindet (Körpertemperatur = Lufttemperatur).

Temperaturverlauf: siehe Bild A-36

$$T(t) = 10\ °\mathrm{C} \cdot \mathrm{e}^{-0{,}044\,63\ \mathrm{min}^{-1} \cdot t} + 20\ °\mathrm{C}$$

(für $t \geq 0$ min)

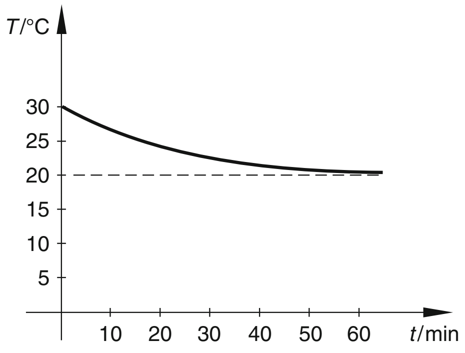


Bild A-36

A32

Fallschirmspringer

Beim *Fallschirmspringen* gilt unter der Annahme, dass der Luftwiderstand R der Fallgeschwindigkeit v *proportional* ist ($R \sim v$, d. h. $R = c\,v$), das folgende *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz*:

$$v(t) = \frac{m\,g}{c}\,(1 - \mathrm{e}^{-(c/m)\,t}), \quad t \geq 0$$

(m: Masse des Fallschirmspringers incl. Fallschirm; g: Erdbeschleunigung; $c > 0$: Reibungsfaktor, abhängig von den äußeren Umweltbedingungen).

a) Welche *Endgeschwindigkeit* v_E erreicht der Fallschirmspringer?

Annahme: Der Sprung erfolgt aus *großer* Höhe, der Fallschirmspringer ist also lange unterwegs.

b) *Skizzieren* Sie das *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz.*

c) Nach welcher Zeit τ wird die *halbe* Endgeschwindigkeit erreicht?

Wir setzen im Exponenten $c/m = \alpha$ und beachten dabei, dass $\alpha > 0$ ist:

$$v(t) = \frac{m\,g}{c}\,(1 - \mathrm{e}^{-(c/m)\,t}) = \frac{m\,g}{c}\,(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}), \quad t \geq 0$$

a) Die streng monoton fallende e-Funktion besitzt für große Fallzeiten *vernachlässigbar kleine* Werte. Bei (theoretisch) *unendlich langer* Fallzeit ($t \to \infty$) erreicht der Fallschirmspringer folgende *Endgeschwindigkeit*:

$$v_E = \lim_{t \to \infty} v(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{m\,g}{c}\,(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}) = \frac{m\,g}{c}$$

Dieses Ergebnis ist *physikalisch gesehen* einleuchtend: Die *Endgeschwindigkeit* v_E wird erreicht, wenn der Fallschirmspringer *kräftefrei* fällt. Dies aber ist genau dann der Fall, wenn Gewicht $G = m\,g$ und der entgegen wirkende Luftwiderstand $R = c\,v$ sich gerade *kompensieren*:

$$G = R \quad \Rightarrow \quad m\,g = c\,v_E \quad \Rightarrow \quad v_E = m\,g/c$$

b) **Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz** in „neuer Schreibweise" (siehe Bild A-37):

$$v(t) = v_E\,(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}), \quad t \geq 0$$

(mit $v_E = m\,g/c$ und $\alpha = c/m$)

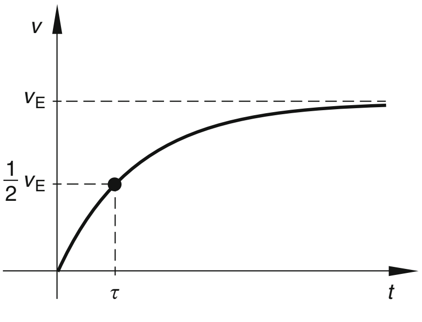


Bild A-37

c) $v(t = \tau) = \frac{1}{2}\,v_E \quad \Rightarrow$

$$v_E\,(1 - \mathrm{e}^{-\alpha\tau}) = \frac{1}{2}\,v_E \quad \Rightarrow \quad 1 - \mathrm{e}^{-\alpha\tau} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-\alpha\tau} = \frac{1}{2} \;\Big|\; \ln \quad \Rightarrow$$

$$\ln \mathrm{e}^{-\alpha\tau} = -\alpha\tau = \ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\ln 2}{\alpha} = (\ln 2) \cdot \frac{m}{c}$$

Rechenregeln: $\ln \mathrm{e}^n = n$; $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$; $\ln 1 = 0$

A33

Gaußsche Glockenkurve: $y = a \cdot \mathrm{e}^{-b(x-c)^2}, \quad -\infty < x < \infty$

Bestimmen Sie die *Kurvenparameter* $a, b > 0$ und c so, daß das *Maximum* an der Stelle $x = 10$ angenommen wird und die Punkte $A = (5\,;\,8)$ und $B = (12\,;\,10)$ auf der Kurve liegen. *Skizzieren* Sie den Kurvenverlauf.

Das *Maximum* wird an der Stelle $x = c$ angenommen ($x = c$ ist *Symmetrieachse*, die Kurve fällt auf beiden Seiten gleichmäßig streng monoton gegen Null ab). Somit ist $c = 10$.

Berechnung der Kurvenparameter *a* und *b*

$$A = (5\,;\,8) \quad \Rightarrow \quad y(x = 5) = 8 \quad \Rightarrow \quad \text{(I)} \quad a \cdot \mathrm{e}^{-b(5-10)^2} = a \cdot \mathrm{e}^{-25b} = 8$$

$$B = (12\,;\,10) \quad \Rightarrow \quad y(x = 12) = 10 \quad \Rightarrow \quad \text{(II)} \quad a \cdot \mathrm{e}^{-b(12-10)^2} = a^{-4b} = 10$$

Wir *dividieren* Gleichung (I) durch Gleichung (II) (linke Seite durch linke Seite, rechte Seite durch rechte Seite), dabei *kürzt* sich der Faktor a heraus:

$$\frac{a \cdot \mathrm{e}^{-25b}}{a \cdot \mathrm{e}^{-4b}} = \frac{8}{10} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-21b} = 0{,}8 \mid \ln \quad \Rightarrow \quad \ln \mathrm{e}^{-21b} = \ln 0{,}8 \quad \Rightarrow$$

$$-21b = \ln 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\ln 0{,}8}{-21} = 0{,}010\,626$$

Rechenregeln: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \quad \ln \mathrm{e}^n = n$

Diesen Wert setzen wir für b in Gleichung (II) ein:

$$\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad a \cdot \mathrm{e}^{-4 \cdot 0{,}010\,626} = a \cdot \mathrm{e}^{-0{,}042\,504} = a \cdot 0{,}958\,387 = 10 \quad \Rightarrow \quad a = 10{,}4342$$

Gaußsche Glockenkurve:

$$y = 10{,}4342 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}010\,626\,(x-10)^2}$$

(für $-\infty < x < \infty$)

Kurvenverlauf: siehe Bild A-38

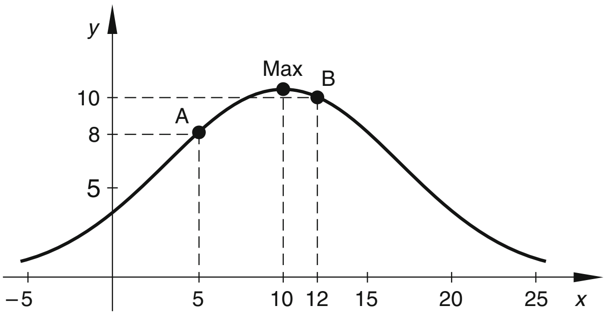


Bild A-38

A34

Barometrische Höhenformel

Zwischen dem *Luftdruck* p und der *Höhe* h (gemessen gegenüber dem Meeresniveau) gilt unter der Annahme *konstanter* Lufttemperatur der folgende Zusammenhang:

$$p(h) = p_0 \cdot \mathrm{e}^{-h/\alpha}, \quad h \geq 0 \ \text{(in m)}$$

($p_0 = 1{,}013$ bar: Luftdruck an der Erdoberfläche; $\alpha = 7991$ m).

a) Geben Sie die Höhe als Funktion des Luftdruckes an und *skizzieren* Sie den Funktionsverlauf.

b) In welcher Höhe hat sich der Luftdruck *halbiert*?

c) Wie groß ist der Luftdruck in 10 km Höhe?

a) Gleichung zunächst geringfügig umformen, dann *logarithmieren*:

$$p = p_0 \cdot \mathrm{e}^{-h/\alpha} \Big| : p_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{p_0} = \mathrm{e}^{-h/\alpha} \Big| \ln \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \ln \mathrm{e}^{-h/\alpha} = -\frac{h}{\alpha} \quad \Rightarrow$$

$$h = -\alpha \cdot \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\alpha(\ln p - \ln p_0) = \alpha(\ln p_0 - \ln p) = \alpha \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p}\right)$$

Rechenregeln: $\ln \mathrm{e}^n = n; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Ergebnis:

$$h(p) = \alpha \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p}\right) = 7991\ \mathrm{m} \cdot \ln\left(\frac{1{,}013\ \mathrm{bar}}{p}\right)$$

(für $0 < p \le p_0$)

Kurvenverlauf: siehe Bild A-39

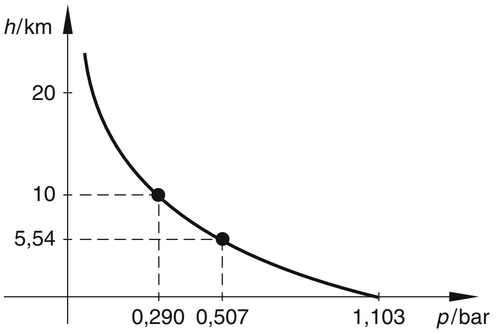


Bild A-39

b) $h(p = p_0/2) = \alpha \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p_0/2}\right) = \alpha \cdot \ln\left(\frac{1}{1/2}\right) = \alpha \cdot \ln 2 = (7991\ \mathrm{m}) \cdot \ln 2 = 5538{,}9\ \mathrm{m} \approx 5{,}54\ \mathrm{km}$

c) $p(h = 10\,000\ \mathrm{m}) = 1{,}013\ \mathrm{bar} \cdot \mathrm{e}^{-10\,000\ \mathrm{m}/7991\ \mathrm{m}} = 1{,}013\ \mathrm{bar} \cdot \mathrm{e}^{-1{,}251\,408} = 0{,}290\ \mathrm{bar}$

A35

Aperiodischer Grenzfall einer Schwingung

Die Bewegung eines *stark gedämpften* Federpendels lässt sich im sog. *aperiodischen Grenzfall* durch das *Weg-Zeit-Gesetz*

$$s(t) = (A + Bt) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad t \ge 0$$

beschreiben (s: Auslenkung in cm; t: Zeit in s). Es liegen drei Messwertpaare vor:

t / s	0	0,5	10
s / cm	3	0,0	– 0,3

Bestimmen Sie die drei *Kurvenparameter* A, B und λ und *skizzieren* Sie den „Schwingungsverlauf“.

Wir führen die Zwischenrechnungen *ohne* Einheiten durch.

$$s(t = 0) = 3 \quad \Rightarrow \quad (A + 0) \cdot \mathrm{e}^{-0} = A \cdot 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad A = 3$$

$$s(t = 0{,}5) = 0 \quad \Rightarrow \quad (A + 0{,}5B) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\lambda} = (3 + 0{,}5B) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-0{,}5\lambda}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 + 0{,}5B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -6$$

Zwischenergebnis: $s(t) = (3 - 6t) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}$

Die noch fehlende Konstante λ bestimmen wir aus dem Messwert $s(t = 10) = -0{,}3$:

$$(3 - 60) \cdot \mathrm{e}^{-10\lambda} = -57 \cdot \mathrm{e}^{-10\lambda} = -0{,}3 \Big| : (-57) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-10\lambda} = \frac{1}{190} \Big| \ln \quad \Rightarrow$$

$$\ln \mathrm{e}^{-10\lambda} = -10\lambda = \ln\left(\frac{1}{190}\right) = \ln 1 - \ln 190 = -\ln 190 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{-\ln 190}{-10} = 0{,}524\,702$$

Rechenregeln: $\ln \mathrm{e}^n = n; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b; \quad \ln 1 = 0$

Ergebnis: $A = 3\text{ cm}; \quad B = -6\text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}; \quad \lambda = 0{,}524\,702\text{ s}^{-1}$

$$s(t) = (3\text{ cm} - 6\text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} \cdot t) \cdot \text{e}^{-0{,}524\,702\text{ s}^{-1} \cdot t} \qquad (t \geq 0\text{ s})$$

Kurvenverlauf: siehe Bild A-40

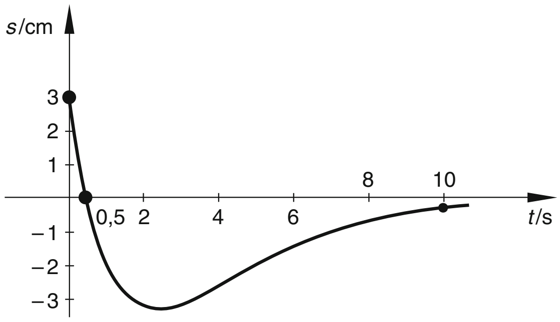


Bild A-40

A36

Elektrischer Schwingkreis

In einem stark gedämpften *elektrischen Schwingkreis* fließt ein Strom, dessen Stärke i dem *exponentiellen Zeitgesetz*

$$i(t) = a \cdot \text{e}^{-2t} + b \cdot \text{e}^{-6t}, \qquad t \geq 0$$

genügt (*aperiodische Schwingung*; i in A, t in s). Gemessen wurden die Werte $i(t = 0) = 2$ und $i(t = 2) = -0{,}1$. Berechnen Sie die *Parameter* a und b und *skizzieren* Sie den zeitlichen Verlauf der Stromstärke i. Gibt es einen Zeitpunkt, in dem der Schwingkreis *stromlos* ist?

$$i(t = 0) = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{(I)} \quad a \cdot \text{e}^{0} + b \cdot \text{e}^{0} = a + b = 2 \quad \Rightarrow \quad b = 2 - a$$

$$i(t = 2) = -0{,}1 \quad \Rightarrow \quad \text{(II)} \quad a \cdot \text{e}^{-4} + b \cdot \text{e}^{-12} = -0{,}1$$

Gleichung (I) in Gleichung (II) einsetzen:

$$\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad a \cdot \text{e}^{-4} + (2 - a) \cdot \text{e}^{-12} = a \cdot \text{e}^{-4} + 2 \cdot \text{e}^{-12} - a \cdot \text{e}^{-12} =$$

$$= a(\text{e}^{-4} - \text{e}^{-12}) + 2 \cdot \text{e}^{-12} = -0{,}1$$

$$\Rightarrow \quad a(\text{e}^{-4} - \text{e}^{-12}) = -0{,}1 - 2 \cdot \text{e}^{-12} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-0{,}1 - 2 \cdot \text{e}^{-12}}{\text{e}^{-4} - \text{e}^{-12}} = -5{,}4623$$

$$\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad b = 2 - a = 2 + 5{,}4623 = 7{,}4623$$

Ergebnis: $i(t) = -5{,}4623 \cdot \text{e}^{-2t} + 7{,}4623 \cdot \text{e}^{-6t}, \qquad t \geq 0$

Stromloser Zustand, wenn $i(t) = 0$:

$$-5{,}4623 \cdot \text{e}^{-2t} + 7{,}4623 \cdot \text{e}^{-6t} = 0 \quad \Rightarrow \quad 5{,}4623 \cdot \text{e}^{-2t} = 7{,}4623 \cdot \text{e}^{-6t} \mid \cdot\, \text{e}^{6t} \quad \Rightarrow$$

$$5{,}4623 \cdot \text{e}^{-2t} \cdot \text{e}^{6t} = 7{,}4623 \cdot \text{e}^{-6t} \cdot \text{e}^{6t} \quad \Rightarrow \quad 5{,}4623 \cdot \text{e}^{4t} = 7{,}4623 \cdot \text{e}^{-0} = 7{,}4623 \mid : 5{,}4623 \quad \Rightarrow$$

$$\text{e}^{4t} = 1{,}366\,146 \mid \ln \quad \Rightarrow \quad \ln \text{e}^{4t} = 4t = \ln 1{,}366\,146 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 1{,}366\,146}{4} = 0{,}078$$

Rechenregeln: $\text{e}^{a} \cdot \text{e}^{b} = \text{e}^{a+b}; \quad \ln \text{e}^{n} = n; \quad \text{e}^{0} = 1$

Der Schwingkreis ist zum Zeitpunkt $t = 0{,}078\ \text{s} = 78\ \text{ms}$ *stromlos*. Der zeitliche Verlauf der Stromstärke i ist in Bild A-41 dargestellt.

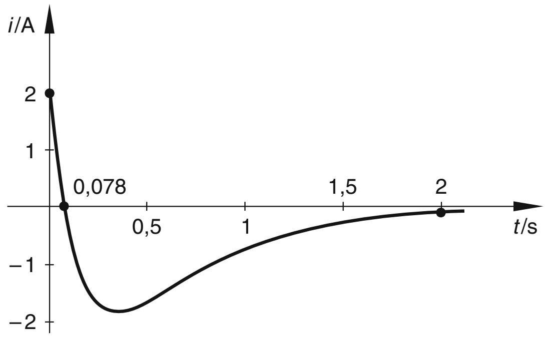


Bild A-41

A37

Adiabatische Zustandsgleichung eines idealen Gases

Bei einer *adiabatischen* Zustandsänderung des *idealen* Gases besteht zwischen den beiden *Zustandsvariablen* p (Druck) und T (absolute Temperatur) der folgende Zusammenhang:

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\varkappa - 1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\varkappa}$$

($\varkappa$: Stoffkonstante, Verhältnis der Molwärmen c_p und c_v; p_1: Druck bei der Temperatur T_1).

Wie lässt sich die *Stoffkonstante* $\varkappa$ aus Druck und Temperatur bestimmen?

Wir lösen die Zustandsgleichung durch *Logarithmieren* wie folgt nach $\varkappa$ auf:

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\varkappa - 1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\varkappa} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\varkappa - 1} = \ln\left(\frac{T}{T_1}\right)^{\varkappa} \quad \Rightarrow \quad (\varkappa - 1) \cdot \ln\left(\frac{p}{p_1}\right) = \varkappa \cdot \ln\left(\frac{T}{T_1}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\varkappa \cdot \ln\left(\frac{p}{p_1}\right) - \ln\left(\frac{p}{p_1}\right) = \varkappa \cdot \ln\left(\frac{T}{T_1}\right) \quad \Rightarrow \quad \varkappa \cdot \ln\left(\frac{p}{p_1}\right) - \varkappa \cdot \ln\left(\frac{T}{T_1}\right) = \ln\left(\frac{p}{p_1}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\varkappa\left(\ln\left(\frac{p}{p_1}\right) - \ln\left(\frac{T}{T_1}\right)\right) = \ln\left(\frac{p}{p_1}\right) \quad \Rightarrow \quad \varkappa = \frac{\ln\left(\frac{p}{p_1}\right)}{\ln\left(\frac{p}{p_1}\right) - \ln\left(\frac{T}{T_1}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{p}{p_1}\right)}{\ln\left(\frac{p/p_1}{T/T_1}\right)}$$

Rechenregeln: $\ln a^n = n \cdot \ln a$; $\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

5 Hyperbel- und Areafunktionen

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel III.13
Formelsammlung: Kapitel III.11 und 12

A38

Zeigen Sie: Für jedes reelle x gilt $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ („hyperbolischer Pythagoras“).

Unter Verwendung der *Definitionsformeln* $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ und $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{1}{4}[(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2] = \\ &= \frac{1}{4}[e^{2x} + 2 \cdot e^0 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 \cdot e^0 + e^{-2x})] = \\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1\end{aligned}$$

Rechenregeln: $(e^a)^n = e^{na}$; $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$; $e^0 = 1$

A39

Beweisen Sie das sogenannte *Additionstheorem* für den Sinus hyperbolicus:

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y$$

Mit Hilfe der *Definitionsformeln* $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ und $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ lässt sich die *rechte* Seite der Gleichung schrittweise wie folgt umgestalten:

$$\begin{aligned}&\sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y = \\ &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \cdot \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \cdot \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = \\ &= \frac{1}{4}(e^x \cdot e^y - e^{-x} \cdot e^y + e^x \cdot e^{-y} - e^{-x} \cdot e^{-y} + e^x \cdot e^y + e^{-x} \cdot e^y - e^x \cdot e^{-y} - e^{-x} \cdot e^{-y}) = \\ &= \frac{1}{4}(e^{x+y} - e^{-x+y} + e^{x-y} - e^{-x-y} + e^{x+y} + e^{-x+y} - e^{x-y} - e^{-x-y}) = \\ &= \frac{1}{4}(2 \cdot e^{x+y} - 2 \cdot e^{-x-y}) = \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-x-y}) = \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-(x+y)})\end{aligned}$$

Rechenregel: $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$

Der letzte Ausdruck ist definitionsgemäß der *Sinus hyperbolicus* von $u = x + y$:

$$\frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-(x+y)}) = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) = \sinh u = \sinh(x + y)$$

Damit ist das Additionstheorem bewiesen.

A40

Beweisen Sie die Formel $\cosh^2 x = \frac{1}{2}\,[\cosh(2x) + 1]\,.$

Wir ersetzen auf der *linken* Seite der Gleichung $\cosh x$ mit Hilfe der *Definitionsformel* $\cosh x = \frac{1}{2}\,(e^{x} + e^{-x})$ und erhalten nach einigen Umformungen genau den Ausdruck auf der *rechten* Seite der Gleichung:

$$\cosh^2 x = \left[\frac{1}{2}\,(e^{x} + e^{-x})\right]^2 = \frac{1}{4}\,(e^{x} + e^{-x})^2 = \frac{1}{4}\,(e^{2x} + 2 \cdot e^{0} + e^{-2x}) = \frac{1}{4}\,(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) =$$

$$= \frac{1}{4}[(e^{2x} + e^{-2x}) + 2] = \frac{1}{4}\,(e^{2x} + e^{-2x}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\,(e^{2x} + e^{-2x})}_{\cosh(2x)} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \cosh(2x) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,[\cosh(2x) + 1]$$

Rechenregeln: $(e^{a})^{n} = e^{na}$; $e^{a} \cdot e^{b} = e^{a+b}$; $e^{0} = 1$

A41

$2 \cdot \cosh(2x) + 3 \cdot \sinh(2x) = 3$

Lösen Sie diese Gleichung unter Verwendung der *Definitionsformeln* der Hyperbelfunktionen.

Substitution: $u = 2x \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \cosh u + 3 \cdot \sinh u = 3$

Mit $\cosh u = \frac{e^{u} + e^{-u}}{2}$ und $\sinh u = \frac{e^{u} - e^{-u}}{2}$ folgt:

$$2 \cdot \cosh u + 3 \cdot \sinh u = 2 \cdot \frac{e^{u} + e^{-u}}{2} + 3 \cdot \frac{e^{u} - e^{-u}}{2} = e^{u} + e^{-u} + 1{,}5\,(e^{u} - e^{-u}) =$$

$$= e^{u} + e^{-u} + 1{,}5 \cdot e^{u} - 1{,}5 \cdot e^{-u} = 2{,}5 \cdot e^{u} - 0{,}5 \cdot e^{-u} = 3$$

Wir *multiplizieren* beide Seiten mit e^{u}:

$$(2{,}5 \cdot e^{u} - 0{,}5 \cdot e^{-u}) \cdot e^{u} = 2{,}5 \cdot e^{u} \cdot e^{u} - 0{,}5 \cdot \underbrace{e^{-u} \cdot e^{u}}_{e^{-u+u} = e^{0} = 1} = 2{,}5 \cdot (e^{u})^2 - 0{,}5 = 3 \cdot e^{u}$$

Mit der *Substitution* $z = e^{u}$ erhalten wir schließlich eine *quadratische Gleichung*:

$$2{,}5z^2 - 0{,}5 = 3z \quad \Rightarrow \quad 2{,}5z^2 - 3z - 0{,}5 = 0 \mid : 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 1{,}2z - 0{,}2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$z_{1/2} = 0{,}6 \pm \sqrt{0{,}36 + 0{,}2} = 0{,}6 \pm \sqrt{0{,}56} = 0{,}6 \pm 0{,}7483 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 1{,}3483; \quad z_2 = -0{,}1483$$

Rücksubstitution: $z = e^{u} = e^{2x}$

$$e^{2x} = z_1 = 1{,}3483 \mid \ln \quad \Rightarrow \quad \ln e^{2x} = 2x = \ln 1{,}3483 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\ln 1{,}3483}{2} = 0{,}1494$$

$$e^{2x} = z_2 = -0{,}1483 \quad \Rightarrow \quad \text{nicht lösbar, da stets } e^{2x} > 0 \text{ ist}$$

Rechenregel: $\ln e^{n} = n$

Lösung: $x_1 = 0{,}1494$

A42

Überlandleitung (Kettenlinie)

Die in Bild A-42 skizzierte *Überlandleitung* wird zwischen zwei aufeinander folgenden Strommasten durch die *Kettenlinie*

$$y(x) = 1000 \text{ m} \cdot \cosh\left(0{,}001 \text{ m}^{-1} \cdot x\right) - 980 \text{ m}$$

mit $-150 \le x/\text{m} \le 150$ beschrieben. Berechnen Sie die *Höhe* der Strommasten sowie den *Durchhang* H in der Mitte der Leitung.

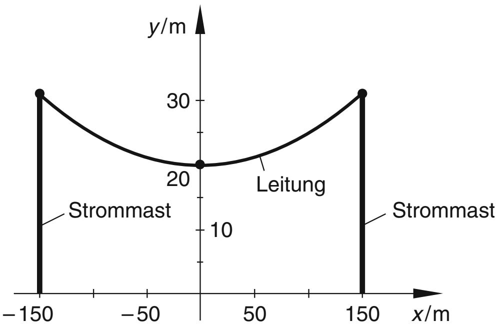


Bild A-42

Höhe der Strommasten:

$$y(x = 150 \text{ m}) = 1000 \text{ m} \cdot \cosh\left(0{,}001 \text{ m}^{-1} \cdot 150 \text{ m}\right) - 980 \text{ m} = (1000 \cdot \cosh 0{,}15 - 980) \text{ m} = 31{,}27 \text{ m}$$

Höhe in der Mitte der Leitung ($x = 0$ m):

$$y(x = 0 \text{ m}) = 1000 \text{ m} \cdot \cosh 0 - 980 \text{ m} = 1000 \text{ m} \cdot 1 - 980 \text{ m} = 20 \text{ m}$$

Durchhang: $H = y(x = 150 \text{ m}) - y(x = 0 \text{ m}) = 31{,}27 \text{ m} - 20 \text{ m} = 11{,}27 \text{ m}$

A43

Die Hyperbelfunktion $y = \sinh x$ setzt sich definitionsgemäß aus Exponentialfunktionen wie folgt zusammen:

$$y = \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right), \quad -\infty < x < \infty$$

Zeigen Sie, dass sich ihre *Umkehrfunktion* $y = \operatorname{arsinh} x$ durch eine *logarithmische* Funktion darstellen lässt.

Wir *multiplizieren* die Funktionsgleichung beiderseits mit $2 \cdot e^{x}$, führen dann die *Substitution* $u = e^{x}$ durch und lösen die erhaltene *quadratische Gleichung*:

$$y = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) \mid \cdot 2 \cdot e^{x} \quad \Rightarrow \quad 2y \cdot \underbrace{e^{x}}_{u} = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) \cdot 2 \cdot e^{x} = e^{x} \cdot e^{x} - e^{0} = \underbrace{(e^{x})}_{u}{}^{2} - 1 \quad \Rightarrow$$

$$2yu = u^{2} - 1 \quad \Rightarrow \quad u^{2} - 2yu - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{1/2} = y \pm \sqrt{y^{2} + 1}$$

Da wegen $u = e^{x} > 0$ nur *positive* Lösungen in Frage kommen, scheidet $u_2 < 0$ als Lösung aus (beachte: $\sqrt{y^{2} + 1} > |y|$ für $y \neq 0$). Somit gilt:

$$u = e^{x} = y + \sqrt{y^{2} + 1}$$

Diese Gleichung lösen wir durch *Logarithmieren* nach x auf:

$$\ln e^{x} = x = \ln\left(y + \sqrt{y^{2} + 1}\right)$$

Rechenregeln: $e^{a} \cdot e^{b} = e^{a+b}; \quad e^{0} = 1; \quad \ln e^{n} = n$

Durch *Vertauschen* der beiden Variablen erhalten wir die *Umkehrfunktion* von $y = \sinh x$, also die Funktion $y = \operatorname{arsinh} x$, in der gewünschten *logarithmischen* Darstellungsform:

$$y = \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^{2} + 1}\right), \quad -\infty < x < \infty$$

A44

Zeige: Die Funktion $y = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right), \quad |x| < 1$ ist die *Umkehrfunktion* von $y = \tanh x$.

Wenn diese Aussage zutrifft, muss die logarithmische Funktion *identisch* sein mit der Areafunktion $y = \text{artanh}\, x$. Es genügt daher zu zeigen, dass die *Umkehrung* der logaritmischen Funktion auf den *Tangens hyperbolicus* führt.
Wir setzen $u = \frac{1+x}{1-x}$ und lösen dann die Funktionsgleichung durch *Entlogarithmieren* nach u auf:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2} \cdot \ln u \mid \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad 2y = \ln u \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{2y} = u$$

Rechenregel: $\ln a = b \quad \Rightarrow \quad a = \mathrm{e}^{b}$.

Die aus $u = \mathrm{e}^{2y}$ durch *Rücksubstitution* erhaltene Gleichung lösen wir nach x auf:

$$u = \mathrm{e}^{2y} \quad \Rightarrow \quad \frac{1+x}{1-x} = \mathrm{e}^{2y} \mid \cdot (1-x) \quad \Rightarrow \quad 1 + x = (1-x) \cdot \mathrm{e}^{2y} \quad \Rightarrow \quad 1 + x = \mathrm{e}^{2y} - x \cdot \mathrm{e}^{2y} \quad \Rightarrow$$

$$x + x \cdot \mathrm{e}^{2y} = \mathrm{e}^{2y} - 1 \quad \Rightarrow \quad x(1 + \mathrm{e}^{2y}) = \mathrm{e}^{2y} - 1 \mid : (1 + \mathrm{e}^{2y}) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\mathrm{e}^{2y} - 1}{1 + \mathrm{e}^{2y}} = \frac{\mathrm{e}^{2y} - 1}{\mathrm{e}^{2y} + 1}$$

Durch *Vertauschen* der Variablen erhalten wir die *Umkehrfunktion*, die in der Tat auf den *Tangens hyperbolicus* führt:

$$y = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = \frac{(\mathrm{e}^{2x} - 1) \cdot \mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^{2x} + 1) \cdot \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{2x} \cdot \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x} \cdot \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} = \tanh x$$

Umformungen: Gleichung zunächst mit e^{-x} erweitern, dann die Rechenregel $\mathrm{e}^{a} \cdot \mathrm{e}^{b} = \mathrm{e}^{a+b}$ anwenden.

A45

Freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes

Berücksichtigt man beim *freien Fall* den Luftwiderstand durch eine dem *Quadrat* der Fallgeschwindigkeit v proportionale Reibungskraft $R = k v^2$, so ergeben sich für *Fallweg* s und *Fallgeschwindigkeit* v die folgenden (komplizierten) *Zeitgesetze*:

$$s(t) = \frac{m}{k} \cdot \ln [\cosh (\alpha t)], \quad v(t) = \sqrt{\frac{m g}{k}} \cdot \tanh (\alpha t), \qquad t \geq 0$$

(m: Masse; g: Erdbeschleunigung; k: Reibungsfaktor; $\alpha = \sqrt{g k / m}$)

a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der *Fallgeschwindigkeit* v und dem *Fallweg* s?

b) Welche *Endgeschwindigkeit* v_E wird erreicht?

c) Welche Strecke muss der Körper fallen, um die *halbe* Endgeschwindigkeit zu erreichen? Wie lange ist er dann bereits unterwegs?

a) Mit Hilfe der Formeln $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ und $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (→ FS) lässt sich die im *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz* auftretende Funktion $\tanh (\alpha t)$ wie folgt durch $\cosh (\alpha t)$ ausdrücken, wobei wir vorübergehend $x = \alpha t$ setzen:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\sqrt{\cosh^2 x}} = \sqrt{\frac{\cosh^2 x - 1}{\cosh^2 x}} = \sqrt{\frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x} - \frac{1}{\cosh^2 x}} = \sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2 x}}$$

Umformungen: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1}$; $\cosh x = \sqrt{\cosh^2 x}$; Rechenregel $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ anwenden.

Damit erhalten wir:

$$v = \sqrt{\frac{m g}{k}} \cdot \tanh(\alpha t) = \sqrt{\frac{m g}{k}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2(\alpha t)}}$$

Das *Weg-Zeit-Gesetz* lösen wir durch *Entlogarithmierung* wie folgt nach $\cosh(\alpha t)$ auf:

$$s = \frac{m}{k} \cdot \ln[\cosh(\alpha t)] \; \Big| \cdot \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{m} \cdot s = \ln[\cosh(\alpha t)] \quad \Rightarrow \quad e^{(k/m)s} = e^{\ln[\cosh(\alpha t)]} = \cosh(\alpha t)$$

Diesen Ausdruck setzen wir in das *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz* ein und erhalten die gesuchte Abhängigkeit der *Fallgeschwindigkeit* v vom *Fallweg* s:

$$v(s) = \sqrt{\frac{m g}{k}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{[e^{(k/m)s}]^2}} = \sqrt{\frac{m g}{k}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{e^{(2k/m)s}}} = \sqrt{\frac{m g}{k}} \cdot \sqrt{1 - e^{-(2k/m)s}}; \qquad s \geq 0$$

Rechenregeln: $\ln a = b \quad \Rightarrow \quad e^{\ln a} = a = e^b; \quad (e^a)^n = e^{na}; \quad \frac{1}{e^a} = e^{-a}$

b) *Endgeschwindigkeit* (nach unendlich langer Fallzeit und damit auch unendlich langem Fallweg):

$$v_E = \lim_{s \to \infty} v(s) = \lim_{s \to \infty} \sqrt{\frac{m g}{k}} \cdot \sqrt{1 - e^{-(2k/m)s}} = \sqrt{\frac{m g}{k}} \cdot \sqrt{\underbrace{\lim_{s \to \infty} (1 - e^{-(2k/m)s})}_{1}} = \sqrt{\frac{m g}{k}}$$

Umformungen: Der Grenzübergang $s \to \infty$ darf *unter der Wurzel* vorgenommen werden; die streng monoton fallende e-Funktion *verschwindet* für $s \to \infty$.

Damit können wir den Zusammenhang zwischen v und s auch wie folgt darstellen (Bild A-43):

$$v(s) = v_E \cdot \sqrt{1 - e^{-(2k/m)s}}$$

(mit $s \geq 0$)

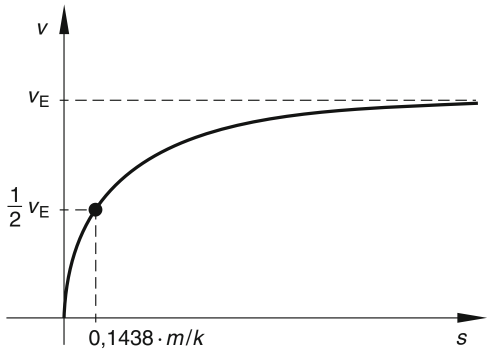


Bild A-43

c) **Fallweg** bis zum Erreichen der *halben* Endgeschwindigkeit:

$$v(s) = \frac{1}{2} v_E \quad \Rightarrow \quad v_E \cdot \sqrt{1 - e^{-(2k/m)s}} = \frac{1}{2} v_E \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 - e^{-(2k/m)s}} = \frac{1}{2} \; \Big| \text{ quadrieren} \quad \Rightarrow$$

$$1 - e^{-(2k/m)s} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad e^{-(2k/m)s} = \frac{3}{4} \; \Big| \ln \quad \Rightarrow \quad \ln e^{-(2k/m)s} = -\frac{2k}{m} \cdot s = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \quad \Rightarrow$$

$$s = -\frac{m}{2k} \cdot \ln\left(\frac{3}{4}\right) = 0{,}1438 \cdot \frac{m}{k}$$

Rechenregel: $\ln e^n = n$

Fallzeit τ bis zum Erreichen der *halben* Endgeschwindigkeit:

$$v(t) = \sqrt{\frac{m g}{k}} \cdot \tanh(\alpha t) = v_E \cdot \tanh(\alpha t)$$

$$v(\tau) = \frac{1}{2} v_E \quad \Rightarrow \quad v_E \cdot \tanh(\alpha \tau) = \frac{1}{2} v_E \quad \Rightarrow \quad \tanh(\alpha \tau) = \frac{1}{2}$$

Auflösen dieser Gleichung durch Übergang zur *Umkehrfunktion* Areatangens hyperbolicus:

$$\alpha \tau = \operatorname{artanh}(1/2) \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\operatorname{artanh}(1/2)}{\alpha} = \frac{0{,}5493}{\alpha} = 0{,}5493 \cdot \sqrt{\frac{m}{g k}}$$

6 Funktionen und Kurven in Parameterdarstellung

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel III.1.2.4

Formelsammlung: Kapitel III.1.2.2

A46

Wie lauten die folgenden in der *Parameterform* dargestellten Funktionen in der *expliziten kartesischen* Darstellungsform $y = f(x)$?

a) $x(t) = \frac{t}{1-t}, \quad y(t) = \frac{1+t}{1-t}, \quad t \neq 1$

b) $x(t) = \frac{1}{2} \cdot \ln t, \quad y(t) = 1 - \frac{2}{t+1}, \quad t > 0$

Jeweils die *erste* Parametergleichung nach dem Parameter t auflösen, den gefundenen Ausdruck dann in die *zweite* Gleichung einsetzen.

a)
$$x = \frac{t}{1-t} \left| \cdot (1-t) \right. \quad \Rightarrow \quad x(1-t) = t \quad \Rightarrow \quad x - xt = t \quad \Rightarrow \quad xt + t = x \quad \Rightarrow$$

$$t(x+1) = x \mid : (x+1) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{x+1} \quad (x \neq -1)$$

$$y = \frac{1+t}{1-t} = \frac{1 + \frac{x}{x+1}}{1 - \frac{x}{x+1}} = \frac{\frac{x+1+x}{x+1}}{\frac{x+1-x}{x+1}} = \frac{\frac{2x+1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{2x+1}{x+1} \cdot \frac{x+1}{1} = 2x+1$$

Umformungen: Zunächst im Zähler und im Nenner die jeweiligen Brüche auf den *Hauptnenner* $x + 1$ bringen, dann den Zählerbruch mit dem *Kehrwert* des Nennerbruches *multiplizieren* und den gemeinsamen Faktor $x + 1$ *kürzen*.

Lösung: $y = 2x + 1, \quad x \neq -1$

b) Die 1. Parametergleichung wird durch *Entlogarithmierung* nach t aufgelöst:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \ln t \mid \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad \ln t = 2x \quad \Rightarrow \quad e^{\ln t} = t = e^{2x}$$

Rechenregel: $\ln a = b \quad \Rightarrow \quad a = e^{b}$

$$y = 1 - \frac{2}{t+1} = \frac{(t+1)-2}{t+1} = \frac{t-1}{t+1} =$$

$$= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{(e^{2x}-1) \cdot e^{-x}}{(e^{2x}+1) \cdot e^{-x}} = \frac{e^{2x} \cdot e^{-x} - e^{-x}}{e^{2x} \cdot e^{-x} + e^{-x}} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \tanh x$$

Umformungen: Brüche zunächst auf den *Hauptnenner* $t + 1$ bringen, t durch e^{2x} ersetzen, Bruch dann mit e^{-x} *erweitern*, *Rechenregel* $e^{a} \cdot e^{b} = e^{a+b}$ anwenden.

Lösung: $y = \tanh x, \quad -\infty < x < \infty$

A47

Die nachstehenden in der *Parameterform* vorliegenden Funktionen sind in der *expliziten kartesischen* Form $y = f(x)$ darzustellen. Um welche Kurven handelt es sich dabei? Bestimmen Sie den Definitionsbereich und *skizzieren* Sie den Kurvenverlauf.

a) $x(u) = 2 \cdot \sinh u, \quad y(u) = \cosh^2 u, \quad u \in \mathbb{R}$

b) $x(t) = 2 \cdot \cos t + 5, \quad y(t) = 4 \cdot \sin t, \quad 0 \le t \le \pi$

---

a) Mit $\sinh u = x/2$ und unter Verwendung des „hyperbolischen Pythagoras“ $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ (→ FS) geht die 2. Parametergleichung über in:

$$y = \cosh^2 u = 1 + \sinh^2 u = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}x^2$$

Es handelt sich um eine nach oben geöffnete *Parabel* mit dem Scheitelpunkt $S = (0;\, 1)$ (siehe Bild A-44).

Definitionsbereich: Da $\sinh u$ für $u \in \mathbb{R}$ *sämtliche* reellen Werte durchläuft, gilt diese Aussage auch für die Variable $x = 2 \cdot \sinh u$.

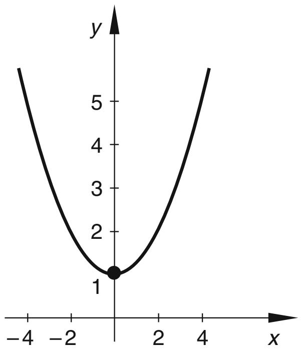


Bild A-44

b) Wir lösen die Parametergleichungen nach $\cos t$ bzw. $\sin t$ auf und setzen die gefundenen Ausdrücke in den „trigonometrischen Pythagoras“ $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ ein:

$$x = 2 \cdot \cos t + 5 \quad \Rightarrow \quad \cos t = \frac{x-5}{2}; \quad y = 4 \cdot \sin t \quad \Rightarrow \quad \sin t = \frac{y}{4}$$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x-5}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-5)^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \qquad (\text{mit } y \ge 0)$$

Diese Gleichung beschreibt eine *Ellipse* mit dem Mittelpunkt $M = (5;\, 0)$ und den Halbachsen $a = 2$ und $b = 4$. Wegen der *Einschränkung* $y = 4 \cdot \sin t,\ 0 \le t \le \pi$ kommen jedoch nur Kurvenpunkte mit *positiver* Ordinate in Frage (die y-Werte liegen zwischen 0 und 4). Die gesuchte Kurve ist damit die *oberhalb* der x-Achse liegende *Halbellipse* (Bild A-45). Sie wird in *expliziter* Form wie folgt beschrieben (Ellipsengleichung nach y auflösen):

$$\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{16} = 1 - \frac{(x-5)^2}{4} \;\Big|\; \cdot 16 \quad \Rightarrow$$

$$y^2 = 16 - 4(x-5)^2 = 4[4 - (x-5)^2] \quad \Rightarrow$$

$$y = 2 \cdot \sqrt{4 - (x-5)^2}, \quad 3 \le x \le 7$$

Definitionsbereich: $\cos t$ durchläuft für $0 \le t \le \pi$ *sämtliche* Werte zwischen -1 und $+1$, die Variable $x = 2 \cdot \cos t + 5$ damit sämtliche Werte zwischen $x = -2 + 5 = 3$ und $x = 2 + 5 = 7$.

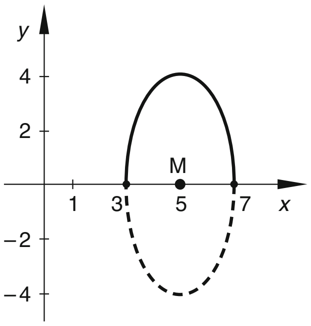


Bild A-45

A48

Gegeben sind die folgenden Kurven in *Parameterdarstellung:*

a) $x = \ln t, \quad y = \dfrac{1}{1 + t^2}$; b) $x = \sqrt{t^2 - 4}, \quad y = \dfrac{2(t^2 - 1)}{t^2 + 1}$

Bestimmen Sie den *größtmöglichen* Definitionsbereich für den Parameter t und geben Sie eine *parameterfreie* Darstellung an.

---

a) Die 1. Parametergleichung ist nur für *positive* Werte des Parameters t definiert, die 2. Gleichung dagegen für *jedes* reelle t. Daher ist $t > 0$ der gesuchte *größtmögliche Definitionsbereich*.

Eine *parameterfreie Darstellung* erhalten wir, in dem wir die 1. Gleichung nach t auflösen und den gefundenen Ausdruck in die 2. Gleichung einsetzen:

$$x = \ln t \quad \Rightarrow \quad e^x = e^{\ln t} = t \quad (\textit{Entlogarithmierung}\colon \ln a = b \;\Rightarrow\; a = e^b)$$

$$y = \frac{1}{1 + t^2} = \frac{1}{1 + (e^x)^2} = \frac{1}{1 + e^{2x}} \quad (\text{mit } x \in \mathbb{R})$$

Rechenregel: $(e^a)^n = e^{na}$

b) Der *Radikand* der Wurzel muss größer oder gleich *Null* sein:

$$t^2 - 4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 \geq 4 \quad \Rightarrow \quad |t| \geq 2$$

Da es für die 2. Parametergleichung *keine* Einschränkung gibt, ist $|t| \geq 2$ der gesuchte *größtmögliche Definitionsbereich*.

Parameterfreie Darstellung

$$x = \sqrt{t^2 - 4} \,\Big|\, \text{quadrieren} \quad \Rightarrow \quad x^2 = t^2 - 4 \quad \Rightarrow \quad t^2 = x^2 + 4$$

$$y = \frac{2(t^2 - 1)}{t^2 + 1} = \frac{2(x^2 + 4 - 1)}{x^2 + 4 + 1} = \frac{2(x^2 + 3)}{x^2 + 5} \quad (\text{mit } x \geq 0)$$

A49

Die *Parameterdarstellung* einer Kurve laute wie folgt:

$$x(u) = a \cdot \cot u, \quad y(u) = b / \sin u, \quad 0 < u < \pi \quad (a, b > 0)$$

Eliminieren Sie den Parameter u und beschreiben Sie die Kurve in *kartesischer* Form. *Skizzieren* Sie den Kurvenverlauf.

Die 1. Parametergleichung *quadrieren*, dann $\cot u$ mit Hilfe der trigonometrischen Beziehungen $\cot u = \cos u / \sin u$ und $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ durch $\sin u$ ausdrücken:

$$x = a \cdot \cot u \quad \Rightarrow \quad x^2 = a^2 \cdot (\cot u)^2 = a^2 \cdot \left(\frac{\cos u}{\sin u}\right)^2 = \frac{a^2 \cdot \cos^2 u}{\sin^2 u} = \frac{a^2(1 - \sin^2 u)}{\sin^2 u}$$

Die 2. Parametergleichung nach $\sin u$ auflösen $(\sin u = b / y)$, den gefundenen Ausdruck in die (quadrierte) 1. Gleichung einsetzen:

$$x^2 = \frac{a^2(1 - \sin^2 u)}{\sin^2 u} = \frac{a^2\left(1 - \dfrac{b^2}{y^2}\right)}{\dfrac{b^2}{y^2}} = a^2\left(1 - \frac{b^2}{y^2}\right) \cdot \frac{y^2}{b^2} = a^2\left(\frac{y^2}{b^2} - 1\right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Umformungen: Zählerbruch mit dem *Kehrwert* des Nennerbruches *multiplizieren*, dann beide Seiten durch a^2 *dividieren*.

Es handelt sich um eine um 90° gedrehte *Ursprungshyperbel* (siehe Bild A-46).

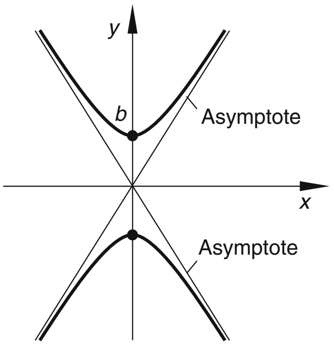


Bild A-46

A50

Schiefer Wurf mit und ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes

Die Bewegung eines Körpers, der von der Erdoberfläche aus mit der Geschwindigkeit v_0 unter dem Winkel α schräg nach oben geworfen wird, lässt sich durch die *Parametergleichungen*

$$x(t) = (a v_0 \cdot \cos \alpha) \cdot t^b \quad \text{und} \quad y(t) = (a v_0 \cdot \sin \alpha) \cdot t^b - \frac{1}{2} g t^2$$

mit $t \geq 0$ beschreiben (Bild A-47).

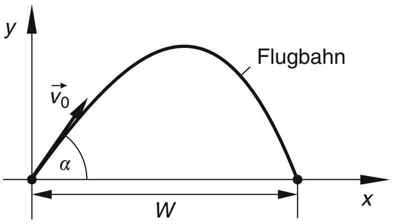


Bild A-47

t:	Zeit
x, y:	Kartesische Koordinaten des Körpers zum Zeitpunkt
a, b:	Positive, von den äußeren Bedingungen abhängige Konstanten

a) Wie lautet die *Bahnkurve* in *explizieter* Form?

b) Berechnen Sie *Flugzeit* τ und *Wurfweite* W.

c) Welche Ergebnisse erhält man im *luftleeren* Raum (dort gilt $a = b = 1$)? Welche maximale Höhe erreicht der Körper (*Wurfhöhe* H)?

---

a) Wir lösen die 1. Gleichung nach t auf und setzen den gefundenen Ausdruck in die 2. Gleichung ein:

$$x = (a v_0 \cdot \cos \alpha) \cdot t^b \quad \Rightarrow \quad t^b = \frac{x}{a v_0 \cdot \cos \alpha} \quad \Rightarrow \quad t = \left(\frac{x}{a v_0 \cdot \cos \alpha} \right)^{1/b}$$

(beide Seiten mit $1/b$ potenzieren: $(t^b)^{1/b} = t^{b \cdot 1/b} = t^1 = t$)

$$y = (a v_0 \cdot \sin \alpha) \cdot t^b - \frac{1}{2} g t^2 = (a v_0 \cdot \sin \alpha) \cdot \frac{x}{a v_0 \cdot \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \left[\left(\frac{x}{a v_0 \cdot \cos \alpha} \right)^{1/b} \right]^2 =$$

$$= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{a v_0 \cdot \cos \alpha} \right)^{2/b} = (\tan \alpha) \cdot x - \frac{g}{2 (a v_0 \cdot \cos \alpha)^{2/b}} \cdot x^{2/b}$$

Bahnkurve: $y(x) = (\tan \alpha) \cdot x - \dfrac{g}{2 (a v_0 \cdot \cos \alpha)^{2/b}} \cdot x^{2/b}, \quad x \geq 0$

Umformungen: $\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$; $\left(\dfrac{a}{b} \right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

b) Berechnung der Flugzeit τ

Die Parametergleichung $y(t)$ beschreibt die *Höhe* des Körpers zur Zeit t. Sie ist genau *Null* im Augenblick des Abwurfs $(t = 0)$ und im Augenblick des Auftreffens auf dem Erdboden $(t = \tau > 0)$. Aus der Bedingung $y = 0$ berechnen wir die gesuchte *Flugzeit* τ wie folgt:

$$y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad (a v_0 \cdot \sin\alpha) \cdot t^b - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (a v_0 \cdot \sin\alpha) \cdot t^b - \frac{1}{2} g t^2 \cdot \frac{t^b}{t^b} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$t^b \left(a v_0 \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^{2-b} \right) = 0 \quad \begin{cases} t^b = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0 \quad \text{(Zeitpunkt des Abwurfs)} \\ a v_0 \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^{2-b} = 0 \end{cases}$$

(der 2. Summand wurde zunächst mit t^b *erweitert*, dann der *gemeinsame* Faktor t^b *ausgeklammert*)

Die untere Gleichung liefert die *Flugzeit* τ:

$$a v_0 \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^{2-b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} g t^{2-b} = a v_0 \cdot \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad t^{2-b} = \frac{2 a v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \quad \Rightarrow$$

$$t_2 = \tau = \left(\frac{2 a v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \right)^{1/(2-b)}$$

(beide Seiten wurden mit $1/(2 - b)$ potenziert)

Berechnung der Wurfweite W

Die *Wurfweite* W entspricht der x-Koordinate zum Zeitpunkt $t = \tau$:

$$W = x(t = \tau) = (a v_0 \cdot \cos\alpha) \cdot \tau^b =$$

$$= (a v_0 \cdot \cos\alpha) \cdot \left[\left(\frac{2 a v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \right)^{1/(2-b)} \right]^b = (a v_0 \cdot \cos\alpha) \cdot \left(\frac{2 a v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \right)^{b/(2-b)}$$

Rechenregel: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

c) Sonderfall luftleerer Raum $(a = b = 1)$

Bahnkurve:

$$y(x) = (\tan\alpha) \cdot x - \frac{g}{2(v_0 \cdot \cos\alpha)^2} \cdot x^2, \quad x \geq 0$$

Die Flugbahn ist eine *Parabel* (auch „Wurfparabel" genannt, siehe Bild A-48).

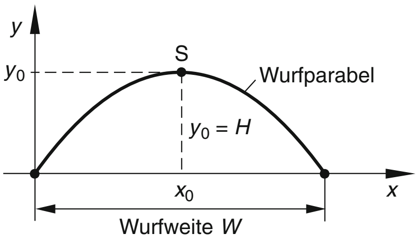


Bild A-48

Flugzeit τ und Wurfweite W

$$\tau = \frac{2 v_0 \cdot \sin\alpha}{g}$$

$$W = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot \frac{2 v_0 \cdot \sin\alpha}{g} = \frac{2 v_0^2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}$$

(unter Verwendung der trigonometrischen Beziehung $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$)

Wurfhöhe *H*

Die *Wurfhöhe* H ist durch die *Ordinate* y_0 des Scheitelpunktes $S = (x_0; y_0)$ der Wurfparabel gegeben, wobei x_0 die *halbe* Wurfweite ist (wegen der *Symmetrie* der Flugbahn):

$$x_0 = \frac{W}{2} = \frac{v_0^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g}$$

$$H = y_0 = y(x = x_0) = (\tan\alpha) \cdot x_0 - \frac{g}{2(v_0 \cdot \cos\alpha)^2} \cdot x_0^2 =$$

$$= \tan\alpha \cdot \frac{v_0^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g} - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot \left(\frac{v_0^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g}\right)^2 =$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{v_0^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g} - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot \frac{v_0^4 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}{g^2} =$$

$$= \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{g} - \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g} = \frac{2v_0^2 \cdot \sin^2\alpha - v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g}$$

(unter Berücksichtigung der trigonometrischen Beziehung $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$)

A51

Lissajons-Figuren

Durch *ungestörte Überlagerung* der beiden zueinander *senkrechten* Schwingungen mit den Gleichungen

$$x(t) = a \cdot \sin t \quad \text{und} \quad y(t) = a \cdot \sin(2t + \varphi)$$

entsteht eine sog. *Lissajons-Figur* ($a > 0$; $t \geq 0$: Zeit). Beschreiben Sie die Bahnkurve in *kartesischen* Koordinaten für $a = 2$ und

a) $\varphi = 0$, b) $\varphi = -\pi/2$

und *skizzieren* Sie die Kurven.

---

a) Die *Parametergleichungen* lauten für $a = 2$ und $\varphi = 0$ wie folgt:

$$x(t) = 2 \cdot \sin t, \quad y(t) = 2 \cdot \sin(2t), \quad t \geq 0$$

Unter Verwendung der trigonometrischen Formeln $\sin(2t) = 2 \cdot \sin t \cdot \cos t$ und $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ (→ FS) lässt sich die 2. Parametergleichung wie folgt durch $\sin t$ ausdrücken:

$$y = 2 \cdot \sin(2t) = 4 \cdot \sin t \cdot \cos t = \pm 4 \cdot \sin t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t}, \quad t \geq 0$$

Die 1. Parametergleichung wird nach $\sin t$ aufgelöst, der gefundene Ausdruck $\sin t = x/2$ dann in die 2. Gleichung eingesetzt:

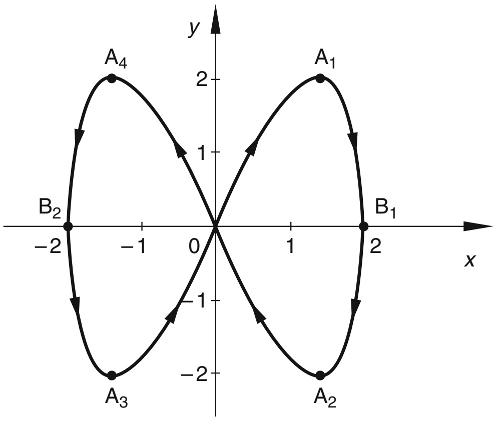
$$y = \pm 4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \pm 2x \cdot \sqrt{\frac{4 - x^2}{4}} = \pm 2x \cdot \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} = \pm x \cdot \sqrt{4 - x^2} \qquad (-2 \leq x \leq 2)$$

Wir erhalten somit zwei (ungerade) Funktionen, die durch *Spiegelung* an der x-Achse ineinander übergehen und die in Bild A-49 skizzierte *geschlossene* Kurve ergeben. Diese sog. *Lissajous-Figur* ist sowohl zur x-Achse als auch zur y-Achse *spiegelsymmetrisch*.

Wertetabelle:

x	y
0	0
0,5	0,97
1	1,73
1,5	1,98
2	0

Bild A-49



Die *geschlossene* Kurve wird dabei innerhalb der Periode $0 \leq t < 2\pi$ wie folgt durchlaufen:

Startpunkt $0 \rightarrow A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_2 \rightarrow 0 \rightarrow A_4 \rightarrow B_2 \rightarrow A_3 \rightarrow 0$

b) *Parametergleichungen* für $a = 2$ und $\varphi = -\pi/2$:

$$x(t) = 2 \cdot \sin t, \quad y(t) = 2 \cdot \sin(2t - \pi/2), \quad t \geq 0$$

Die 2. Gleichung lässt sich unter Verwendung des *Additionstheorems* der Sinusfunktion und der Formel $\cos(2t) = 1 - 2 \cdot \sin^2 t$ (→ FS) wie folgt darstellen:

$$y = 2 \cdot \sin(2t - \pi/2) = 2[\sin(2t) \cdot \underbrace{\cos(\pi/2)}_{0} - \cos(2t) \cdot \underbrace{\sin(\pi/2)}_{1}] =$$

$$= 2[0 - \cos(2t)] = -2 \cdot \cos(2t) = -2(1 - 2 \cdot \sin^2 t) = 2(2 \cdot \sin^2 t - 1), \quad t \geq 0$$

Aus der 1. Parametergleichung folgt $\sin t = x/2$ und durch Einsetzen in die 2. Gleichung somit

$$y = 2(2 \cdot \sin^2 t - 1) = 2\left(2 \cdot \frac{x^2}{4} - 1\right) = 2\left(\frac{x^2}{2} - 1\right) = x^2 - 2 \qquad (-2 \leq x \leq 2)$$

Die (periodische) Bewegung verläuft längs der in Bild A-50 skizzierten *Parabel* zwischen den Punkten A und B. *Startpunkt* ist dabei der *Scheitelpunkt* S mit den Koordinaten

$$x(t = 0) = 2 \cdot \sin 0 = 0, \quad y(t = 0) = 2 \cdot \sin(-\pi/2) = -2$$

Die geschlossene Kurve wird innerhalb *einer* Periode $0 \leq t \leq 2\pi$ wie folgt durchlaufen:

$$S \rightarrow A \rightarrow S \rightarrow B \rightarrow S$$

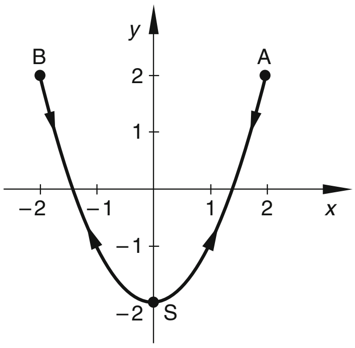


Bild A-50

7 Funktionen und Kurven in Polarkoordinaten

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel III.3.3.2
Formelsammlung: Kapitel I.9.1.3.2 und III.1.2.3

A52

Gegeben sind folgende Kurven in *Polarkoordinatendarstellung*:

a) $r(\varphi) = \sqrt{4 \cdot \sin^2 \varphi + 2 \cdot \cos^2 \varphi}$

b) $r(\varphi) = -a \cdot \tan \varphi \cdot \sin \varphi\,; \quad a > 0$

Für welche Winkel aus dem Intervall $0^\circ \le \varphi < 360^\circ$ sind diese Kurven *definiert*? Wie lauten die Gleichungen der Kurven in *kartesischen* Koordinaten?

Zur Erinnerung: Es sind (definitionsgemäß) nur solche Winkel zugelassen, für die $r \ge 0$ ist.

Die benötigten *Transformationsgleichungen* lauten: $\cos \varphi = x / r\,, \quad \sin \varphi = y / r\,, \quad r^2 = x^2 + y^2$

a) Unter Verwendung des „trigonometrischen Pythagoras" $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ lässt sich die Gleichung wie folgt umschreiben (wir beschränken uns zunächst auf den *Radikand* der Wurzel):

$$4 \cdot \sin^2 \varphi + 2 \cdot \cos^2 \varphi = 4 \cdot \sin^2 \varphi + 2(1 - \sin^2 \varphi) = 4 \cdot \sin^2 \varphi + 2 - 2 \cdot \sin^2 \varphi = 2(\sin^2 \varphi + 1)$$

Somit: $r = \sqrt{2(\sin^2 \varphi + 1)}$

Definitionsbereich: $r \ge 0 \quad \Rightarrow \quad 2(\sin^2 \varphi + 1) \ge 0 \mid :2 \quad \Rightarrow \quad \sin^2 \varphi + 1 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \sin^2 \varphi \ge -1$

Diese Bedingung ist für *jeden* Winkel aus dem Intervall $0^\circ \le \varphi < 360^\circ$ erfüllt (das Quadrat einer reellen Zahl kann nicht negativ sein).

Kurvengleichung in kartesischen Koordinaten

$$r = \sqrt{2(\sin^2 \varphi + 1)} \;\Big|\; \text{quadrieren} \quad \Rightarrow$$

$$r^2 = 2(\sin^2 \varphi + 1) = 2\left(\frac{y^2}{r^2} + 1\right) = 2\left(\frac{y^2 + r^2}{r^2}\right) = \frac{2(y^2 + r^2)}{r^2} \;\Bigg|\; \cdot r^2 \quad \Rightarrow \quad r^4 = 2(y^2 + r^2) \quad \Rightarrow$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(y^2 + x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 + 2y^2)$$

b) Unter Verwendung der Beziehung $\tan \varphi = \sin \varphi / \cos \varphi$ lässt sich die Kurvengleichung wie folgt umschreiben:

$$r = -a \cdot \tan \varphi \cdot \sin \varphi = -a \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cdot \sin \varphi = -a \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$$

Definitionsbereich: Die Bedingung $r \ge 0$ ist wegen $a > 0$ und $\sin^2 \varphi \ge 0$ nur erfüllt, wenn der Nenner des Bruches (also $\cos \varphi$) *negativ* ist:

$\cos \varphi < 0 \quad \Rightarrow \quad 90^\circ < \varphi < 270^\circ$ (2. und 3. Quadrant)

Kurvengleichung in kartesischen Koordinaten

$$r = -a \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \;\Big|\cdot \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad \underbrace{r \cdot \cos \varphi}_{x} = -a \cdot \sin^2 \varphi \quad \Rightarrow \quad x = -a \cdot \frac{y^2}{r^2} \;\Big|\cdot r^2 \quad \Rightarrow$$

$$x r^2 = -a y^2 \quad \Rightarrow \quad x(x^2 + y^2) = -a y^2$$

A53

Wie lauten die Gleichungen der nachfolgenden Kurven in *Polarkoordinaten*? Welche Aussagen lassen sich über den *Definitionsbereich* (*Winkelbereich*) machen?

a) Gerade: $ax + by + c = 0$ (mit $c > 0$)

b) rechtwinklige Hyperbel: $y = 8/x, \quad x > 0$

c) Parabel: $y^2 = 2px$ (mit $p > 0$)

Wir benötigen die *Transformationsgleichungen* $x = r \cdot \cos \varphi$ und $y = r \cdot \sin \varphi$.

a) $ax + by + c = 0 \quad \Rightarrow \quad a(r \cdot \cos \varphi) + b(r \cdot \sin \varphi) + c = 0 \quad \Rightarrow \quad r(a \cdot \cos \varphi + b \cdot \sin \varphi) + c = 0 \quad \Rightarrow$

$$r(a \cdot \cos \varphi + b \cdot \sin \varphi) = -c \quad \Rightarrow \quad r = \frac{-c}{a \cdot \cos \varphi + b \cdot \sin \varphi}$$

Definitionsbereich: $r \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot \cos \varphi + b \cdot \sin \varphi < 0$ (da $c > 0$ und somit $-c < 0$)

b) $y = \frac{8}{x} \;\Big|\cdot x \quad \Rightarrow \quad xy = 8 \quad \Rightarrow \quad (r \cdot \cos \varphi)(r \cdot \sin \varphi) = 8 \quad \Rightarrow \quad r^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi = 8 \quad \Rightarrow$

$$r^2 = \frac{8}{\cos \varphi \cdot \sin \varphi} = \frac{2 \cdot 8}{\underbrace{2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi}_{\sin(2\varphi)}} = \frac{16}{\sin(2\varphi)} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{4}{\sqrt{\sin(2\varphi)}}$$

(unter Verwendung der Beziehung $\sin(2\varphi) = 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$ → FS)

Definitionsbereich: $r \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0° < \varphi < 90°$ (1. Quadrant) (wegen $x > 0$ und somit $y = 8/x > 0$)

c) $y^2 = 2px \quad \Rightarrow \quad (r \cdot \sin \varphi)^2 = 2p(r \cdot \cos \varphi) \quad \Rightarrow \quad r^2 \cdot \sin^2 \varphi = 2pr \cdot \cos \varphi \mid : r \quad \Rightarrow$

$$r \cdot \sin^2 \varphi = 2p \cdot \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2p \cdot \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$$

Definitionsbereich: $-90° \leq \varphi \leq 90°, \quad \varphi \neq 0°$ (1. und 4. Quadrant)

(die Bedingung $r \geq 0$ ist nur für $\cos \varphi \geq 0$ erfüllt und somit nur für Winkel aus dem 1. und 4. Quadranten außerdem muss der Nenner $\sin^2 \varphi \neq 0$ und damit $\varphi \neq 0°$ sein)

A54

Wie lauten die folgenden Kurvengleichungen in *Polarkoordinaten*?

a) Cartesisches Blatt: $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

b) Konchoide: $(x^2 + y^2)(x - b)^2 = a^2 x^2$

c) Zissoide: $x^2 + y^2(x - a) = 0$

Transformationsgleichungen: $x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi, \quad x^2 + y^2 = r^2$

a) $x^3 + y^3 - 3xy = 0 \quad \Rightarrow \quad r^3 \cdot \cos^3 \varphi + r^3 \cdot \sin^3 \varphi - 3(r \cdot \cos \varphi)(r \cdot \sin \varphi) = 0 \quad \Rightarrow$

$$r^3(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) - 3r^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi = 0 \mid : r^2 \quad \Rightarrow \quad r(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) - 3 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi = 0 \quad \Rightarrow$$

$$r(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi) = 3 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}$$

b) $(x^2 + y^2)(x - b)^2 = a^2 x^2 \quad \Rightarrow \quad r^2(r \cdot \cos\varphi - b)^2 = a^2 \cdot r^2 \cdot \cos^2\varphi \;\big|\; : r^2 \quad \Rightarrow$

$(r \cdot \cos\varphi - b)^2 = a^2 \cdot \cos^2\varphi \mid \sqrt{} \quad \Rightarrow \quad r \cdot \cos\varphi - b = \pm\, a \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow$

$$r \cdot \cos\varphi = b \pm a \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad r = \frac{b \pm a \cdot \cos\varphi}{\cos\varphi} = \frac{b}{\cos\varphi} \pm a$$

c) $x^2 + y^2(x - a) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 \cdot \cos^2\varphi + r^2 \cdot \sin^2\varphi\,(r \cdot \cos\varphi - a) = 0 \mid : r^2 \quad \Rightarrow$

$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\,(r \cdot \cos\varphi - a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\varphi + r \cdot \cos\varphi \cdot \sin^2\varphi - a \cdot \sin^2\varphi = 0 \quad \Rightarrow$

$r \cdot \cos\varphi \cdot \sin^2\varphi = a \cdot \sin^2\varphi - \cos^2\varphi \quad \Rightarrow$

$$r = \frac{a \cdot \sin^2\varphi - \cos^2\varphi}{\cos\varphi \cdot \sin^2\varphi} = \frac{a(1 - \cos^2\varphi) - \cos^2\varphi}{\cos\varphi\,(1 - \cos^2\varphi)} = \frac{a - a \cdot \cos^2\varphi - \cos^2\varphi}{\cos\varphi\,(1 - \cos^2\varphi)} = \frac{a - (a + 1) \cdot \cos^2\varphi}{\cos\varphi\,(1 - \cos^2\varphi)}$$

(unter Verwendung des „trigonometrischen Pythagoras“ $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \;\Rightarrow\; \sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$)

A55

Charakterisieren und skizzieren Sie die Kurven, die durch die folgenden Gleichungen in *Polarkoordinaten* beschrieben werden:

a) $r = \dfrac{2}{\cos\varphi}, \quad 0 \le \varphi < \pi/2;$ b) $r = \dfrac{-1}{\sin\varphi}, \quad \pi < \varphi \le \dfrac{3}{2}\pi$

Anleitung: Gehen Sie zunächst zu kartesischen Koordinaten über.

Benötigte **Transformationsgleichungen:** $x = r \cdot \cos\varphi$ und $y = r \cdot \sin\varphi$

a) $r = \dfrac{2}{\cos\varphi} \;\Big|\; \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \underbrace{r \cdot \cos\varphi}_{x} = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

Die Gleichung $x = 2$ beschreibt eine *Parallele zur y-Achse* (im Abstand $d = 2$ *rechts* von dieser Achse). Wegen $0 \le \varphi < \pi/2$ kommt nur der im *1. Quadranten* gelegene Teil $x = 2,\; y \ge 0$ in Frage (*Halbgerade*, siehe Bild A-51):

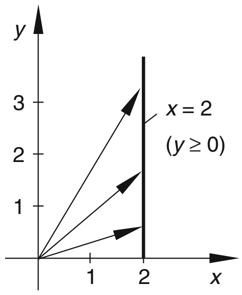


Bild A-51

b) $r = \dfrac{-1}{\sin\varphi} \;\Big|\; \cdot \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \underbrace{r \cdot \sin\varphi}_{y} = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -1$

Durch die Gleichung $y = -1$ wird eine *Parallele zur x-Achse* beschrieben, die im Abstand $d = 1$ *unterhalb* dieser Achse verläuft. Wegen $\pi < \varphi \le 3\pi/2$ kommt nur der im *3. Quadranten* gelegene Teil in Frage (*Halbgerade* $y = -1,\;\; x \le 0$; siehe Bild A-52).

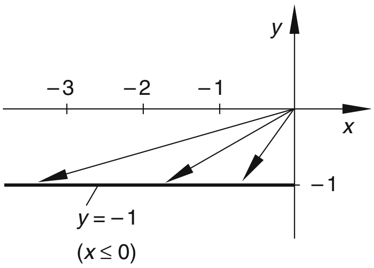


Bild A-52

A56

Strophoide: $(x + a)x^2 + (x - a)y^2 = 0$ (mit $a > 0$)

a) Beschreiben Sie diese Kurve durch *Funktionen* und zeichnen Sie den Kurvenverlauf für den Parameterwert $a = 3$.

b) Bringen Sie die Kurvengleichung in die *Polarkoordinatenform* $r = r(\varphi)$ und bestimmen Sie den zulässigen *Winkelbereich* (im Intervall $0° \le \varphi < 360°$).

---

a) Wir lösen die Kurvengleichung nach y auf und erhalten *zwei* Funktionen, die durch *Spiegelung* an der x-Achse ineinander übergehen:

$$(x + a)\,x^2 + (x - a)\,y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - a)\,y^2 = -(x + a)\,x^2 \quad \Rightarrow$$

$$y^2 = \frac{-(x + a)x^2}{x - a} = \frac{-(x + a)\,x^2 \cdot (-1)}{(x - a)(-1)} = \frac{(x + a)x^2}{a - x} \quad \Rightarrow \quad y = \pm x \cdot \sqrt{\frac{x + a}{a - x}}, \quad -a \le x < a$$

Umformungen: Bruch mit -1 *erweitern*, dann *Teilwurzel* ziehen.

Kurvenverlauf (für $a = 3$): siehe Bild A-53

Wir erstellen eine *Wertetabelle* für die Funktion

$$y = +x \cdot \sqrt{\frac{x + 3}{3 - x}}, \quad -3 \le x < 3$$

Wertetabelle:

x	y
-3	0
$-2{,}5$	$-0{,}75$
-2	$-0{,}89$
$-1{,}5$	$-0{,}87$
-1	$-0{,}71$
$-0{,}5$	$-0{,}42$
0	0

x	y
0,5	0,59
1	1,41
1,5	2,60
2	4,47
2,5	8,29
2,9	22,28

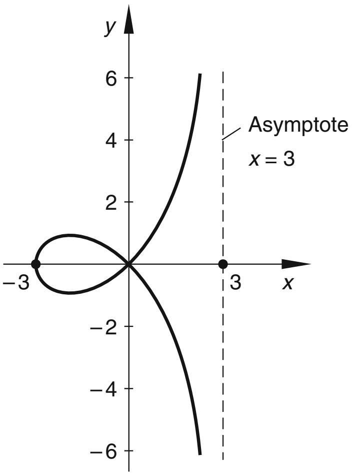


Bild A-53

b) **Kurvengleichung in Polarkoordinaten**

Unter Verwendung der *Transformationsgleichungen* $x = r \cdot \cos\varphi$ und $y = r \cdot \sin\varphi$ folgt:

$$(x + a)\,x^2 + (x - a)\,y^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(r \cdot \cos\varphi + a) \cdot r^2 \cdot \cos^2\varphi + (r \cdot \cos\varphi - a) \cdot r^2 \cdot \sin^2\varphi = 0 \mid : r^2 \quad \Rightarrow$$

$$(r \cdot \cos\varphi + a) \cdot \cos^2\varphi + (r \cdot \cos\varphi - a) \cdot \sin^2\varphi = 0 \quad \Rightarrow$$

$$r \cdot \cos^3\varphi + a \cdot \cos^2\varphi + r \cdot \cos\varphi \cdot \sin^2\varphi - a \cdot \sin^2\varphi = 0 \quad \Rightarrow$$

$$r \cdot \cos^3\varphi + r \cdot \cos\varphi \cdot \sin^2\varphi = a \cdot \sin^2\varphi - a \cdot \cos^2\varphi \quad \Rightarrow$$

$$r \cdot \cos\varphi \cdot \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} = a\,\underbrace{(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)}_{-\cos(2\varphi)} \quad \Rightarrow$$

(unter Verwendung der Formeln $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ und $\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ → FS)

$$r \cdot \cos\varphi = -a \cdot \cos(2\varphi) \quad \Rightarrow \quad r = \frac{-a \cdot \cos(2\varphi)}{\cos\varphi}$$

Bestimmung des Definitionsbereiches (Winkelbereiches)

Wir wissen bereits, dass die Kurve *spiegelsymmetrisch zur x-Achse* verläuft, können uns daher bei den weiteren Untersuchungen auf den 1. und 2. Quadranten beschränken. Wegen der Bedingung $r \geq 0$ und da nach Voraussetzung $a > 0$ ist müssen $\cos \varphi$ und $\cos(2\varphi)$ *unterschiedliche* Vorzeichen haben. Wir unterteilen den Winkelbereich $0° \leq \varphi \leq 180°$ in vier gleiche Teilbereiche, in denen $\cos \varphi$ und $\cos(2\varphi)$ folgende *Vorzeichen* besitzen:

Winkelbereich	0° – 45°	45° – 90°	90° – 135°	135° – 180°
$\cos \varphi$	+	+	−	−
$\cos(2\varphi)$	+	−	−	+

Somit sind nur Winkel zwischen 45° und 90° bzw. zwischen 135° und 180° zulässig ($\varphi \neq 90°$ wegen $\cos \varphi \neq 0$). Für die *Gesamtkurve* ergibt sich daher wegen der Spiegelsymmetrie zur *x*-Achse der folgende **Definitionsbereich:** $45° \leq \varphi < 90°,\ 135° \leq \varphi \leq 225°,\ 270° < \varphi \leq 315°$.

A57

Zeigen Sie, dass durch die Gleichung $r(\varphi) = 2a \cdot \sin \varphi,\ 0° \leq \varphi < 180°$ ein *Kreis* beschrieben wird $(a > 0)$. Bestimmen Sie den Mittelpunkt M und den Radius R des Kreises.

Anleitung: Gehen Sie von den Polarkoordinaten über zu den kartesischen Koordinaten.

Mit den **Transformationsgleichungen** $y = r \cdot \sin \varphi$ und $r^2 = x^2 + y^2$ erhalten wir zunächst:

$$r = 2a \cdot \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad r = 2a \cdot \frac{y}{r} \ \Big| \cdot r \quad \Rightarrow \quad r^2 = 2ay \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2ay$$

Der *y*-Term wird *quadratisch ergänzt*:

$$x^2 + (y^2 - 2ay) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + (y^2 - 2ay + a^2) = a^2 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2$$

Dies ist die Gleichung eines *verschobenen Kreises* mit dem Mittelpunkt $M = (0;\ a)$ und dem Radius $R = a$ (Bild A-54).

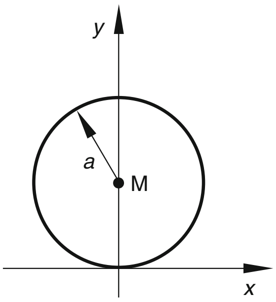


Bild A-54

Kurvengleichung in Polarkoordinaten: $r(\varphi) = 3 \cdot \cos \varphi + 2$

A58

a) Bestimmen Sie den *Definitionsbereich* (*Winkelbereich*) und *skizzieren* Sie den Kurvenverlauf mit Hilfe einer Wertetabelle (Schrittweite: $\Delta \varphi = 15°$).

b) Wie lautet die Kurvengleichung in *kartesischen* Koordinaten in *impliziter* Form?

---

a) **Definitionsbereich** $(r \geq 0)$

$$r \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot \cos \varphi + 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot \cos \varphi \geq -2 \quad \Rightarrow \quad \cos \varphi \geq -2/3$$

Wegen der *Spiegelsymmetrie* der Kurve bezüglich der *x-Achse* (*r* ändert sich nicht, wenn wir den Winkel nach *unten*, d. h. in Uhrzeigerrichtung abtragen, da $\cos \varphi$ eine *gerade* Funktion ist) beschränken wir uns zunächst auf das *oberhalb* der *x*-Achse gelegene Kurvenstück (1. und 2. Quadrant).

Zum Definitionsbereich gehören alle Winkel zwischen $\varphi = 0°$ und der *1. Schnittstelle* der Kosinusfunktion $y = \cos \varphi$ mit der Geraden $y = -2/3$ (siehe Bild A-55). Dieser Schnittpunkt liegt bei $\varphi = \arccos(-2/3) = 131{,}81°$. Wegen der *Spiegelsymmetrie zur x-Achse* gilt dann für die *Gesamtkurve*:

Definitionsbereich: $-131{,}81° \le \varphi \le 131{,}81°$

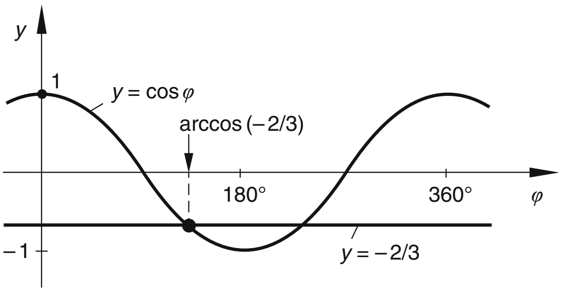


Bild A-55

Kurvenverlauf: Bild A-56 zeigt den Kurvenverlauf im Winkelbereich $0° \le \varphi \le 131{,}81°$. Durch *Spiegelung* an der *x*-Achse erhält man die *geschlossene* Gesamtkurve.

Wertetabelle für den 1. und 2. Quadranten:

φ	r
0°	5
15°	4,90
30°	4,60
45°	4,12
60°	3,5
75°	2,78
90°	2
105°	1,22
120°	0,5
131,81°	0

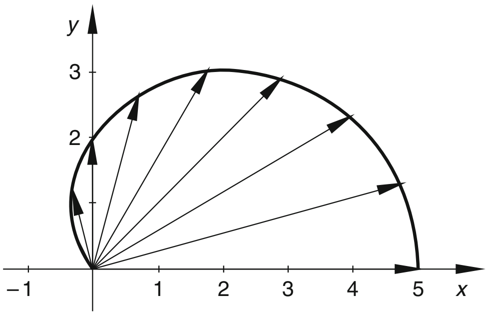


Bild A-56

b) Wir benötigen die **Transformationsgleichungen** $x = r \cdot \cos \varphi$ und $r^2 = x^2 + y^2$:

$$r = 3 \cdot \cos \varphi + 2 \quad \Rightarrow \quad r = 3 \cdot \frac{x}{r} + 2 \;\Big|\; \cdot r \quad \Rightarrow \quad r^2 = 3x + 2r \quad \Rightarrow$$

$$r^2 - 3x = 2r \mid \text{quadrieren} \quad \Rightarrow \quad (r^2 - 3x)^2 = 4r^2 \quad \Rightarrow \quad (x^2 + y^2 - 3x)^2 = 4(x^2 + y^2)$$

A59

Nockenkurve

Im Maschinenbau werden im Zusammenhang mit Steuersystemen sog. *Nockenkurven* benötigt, die sich in Polarkoordinaten abschnittsweise wie folgt beschreiben lassen:

$$r(\varphi) = \begin{cases} a + b \cdot \sin^2(c\varphi) & \text{für} \quad 0 \le \varphi \le \pi/c \\ a & \phantom{\text{für}} \quad \pi/c \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$(a, b > 0,\ c > 1)$. *Skizzieren* Sie mit Hilfe einer *Wertetabelle* den Verlauf der Nockenkurve für die Parameterwerte $a = 4$, $b = 2$ und $c = 1{,}2$.

Die Kurvengleichung lautet für $a = 4$, $b = 2$ und $c = 1{,}2$:

$$r(\varphi) = \begin{cases} 4 + 2 \cdot \sin^2(1{,}2\varphi) & \text{für} \quad 0 \le \varphi \le 5 \cdot \pi/6 \\ 4 & \phantom{\text{für}} \quad 5 \cdot \pi/6 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

Diese Nockenkurve besteht aus *zwei* Teilen, die wir jetzt genauer untersuchen.

Im Winkelbereich von $5 \cdot \pi / 6$ bis 2π, d. h. im Bereich von $150°$ bis $360°$ verläuft die Nockenkurve *kreisförmig*:

$$r = \text{const.} = 4 \quad (\textit{Ursprungskreis} \text{ mit dem Radius } R = 4).$$

Im restlichen Winkelbereich von $0°$ bis $150°$ lautet die Gleichung der Nockenkurve:

$$r(\varphi) = 4 + 2 \cdot \sin^2 (1{,}2\varphi), \quad 0 \le \varphi \le 5 \cdot \pi / 6 \quad \text{oder} \quad 0° \le \varphi \le 150°$$

In den beiden *Randpunkten* gilt:

$$r(\varphi = 0) = 4 + 2 \cdot \sin^2 0 = 4; \quad r(\varphi = 5 \cdot \pi / 6) = 4 + 2 \cdot \sin^2 (1{,}2 \cdot 5 \cdot \pi / 6) = 4 + 2 \cdot \sin^2 \pi = 4$$

Die beiden Teile gehen also in den Randpunkten *stetig* ineinander über.

Verlauf der Nockenkurve: siehe Bild A-57

Wertetabelle für das Intervall $0° \le \varphi \le 150°$:

φ	r
0°	4
30°	4,69
45°	5,31
60°	5,81
90°	5,81
120°	4,69
135°	4,19
150°	4

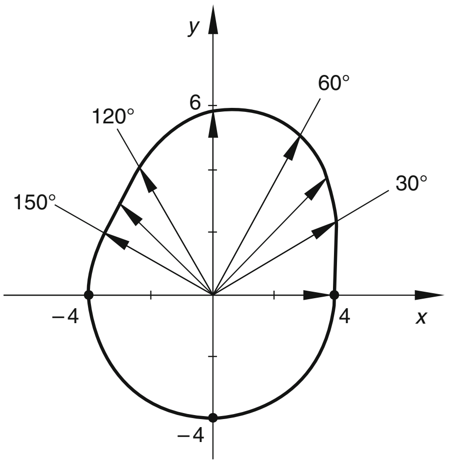


Bild A-57

A60

Bestimmen Sie die Gleichung einer *Kurve* mit den folgenden *Eigenschaften*: Ist P ein *beliebiger* Punkt der Kurve und bezeichnet man die Abstände dieses Punktes von zwei *festen* Punkten P_1 und P_2 im Abstand $\overline{P_1 P_2} = 2\text{e}$ mit r_1 und r_2, so soll das *Produkt* dieser Abstände stets konstant e^2 betragen. Bestimmen Sie die Kurvengleichung

a) in *kartesischen* Koordinaten (in impliziter Form)

b) in *Polarkoordinaten*.

c) *Skizzieren* Sie den Kurvenverlauf für $\text{e}^2 = 8$.

Wir wählen das kartesische Koordinatensystem so, dass die Punkte P_1 und P_2 auf der *x-Achse* liegen und die *Mittelsenkrechte* auf $\overline{P_1 P_2}$ die *y*-Achse bildet (siehe Bild A-58). Die Punkte P_1, P_2 und P haben dann folgende Koordinaten:

$$P_1 = (-\text{e}; 0), \quad P_2 = (\text{e}; 0)$$

$$P = (x; y)$$

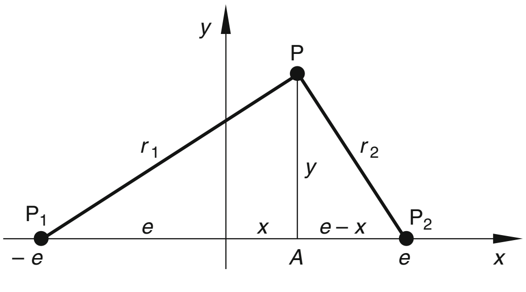


Bild A-58

a) Die Kurvenpunkte erfüllen die Bedingung $r_1 \cdot r_2 = \text{const.} = \text{e}^2$. Aus den beiden *rechtwinkligen* Dreiecken $P_1 A P$ und $A P_2 P$ in Bild A-58 erhalten wir mit dem *Satz des Pythagoras*:

$$r_1^2 = (\text{e} + x)^2 + y^2 \quad \text{und} \quad r_2^2 = (\text{e} - x)^2 + y^2$$

Aus der Bedingung $r_1 \cdot r_2 = \mathrm{e}^2$ folgt dann:

$$r_1 \cdot r_2 = \mathrm{e}^2 \mid \text{quadrieren} \quad \Rightarrow \quad r_1^2 \cdot r_2^2 = \mathrm{e}^4 \quad \Rightarrow \quad [(\mathrm{e} + x)^2 + y^2][(\mathrm{e} - x)^2 + y^2] = \mathrm{e}^4 \quad \Rightarrow$$

$$(\mathrm{e} + x)^2 (\mathrm{e} - x)^2 + y^2 (\mathrm{e} - x)^2 + y^2 (\mathrm{e} + x)^2 + y^4 = \mathrm{e}^4 \quad \Rightarrow$$

$$[\underbrace{(\mathrm{e} + x)(\mathrm{e} - x)}_{\text{3. Binom}}]^2 + y^2 [(\mathrm{e} - x)^2 + (\mathrm{e} + x)^2] + y^4 = \mathrm{e}^4 \quad \Rightarrow$$

$$(\mathrm{e}^2 - x^2)^2 + y^2 (\mathrm{e}^2 - 2\,\mathrm{e}\,x + x^2 + \mathrm{e}^2 + 2\,\mathrm{e}\,x + x^2) + y^4 = \mathrm{e}^4 \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{e}^4 - 2\,\mathrm{e}^2 x^2 + x^4 + y^2 (2\,\mathrm{e}^2 + 2x^2) + y^4 = \mathrm{e}^4 \quad \Rightarrow$$

$$-2\,\mathrm{e}^2 x^2 + x^4 + 2\,\mathrm{e}^2 y^2 + 2x^2 y^2 + y^4 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-2\,\mathrm{e}^2 x^2 + 2\,\mathrm{e}^2 y^2 + \underbrace{x^4 + 2x^2 y^2 + y^4}_{(x^2 + y^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-2\,\mathrm{e}^2 (x^2 - y^2) + (x^2 + y^2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2 + y^2)^2 = 2\,\mathrm{e}^2 (x^2 - y^2) \quad \Rightarrow$$

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2) \quad (\text{mit } a^2 = 2\,\mathrm{e}^2)$$

b) Mit Hilfe der *Transformationsgleichungen* $x = r \cdot \cos \varphi$, $y = r \cdot \sin \varphi$ und $x^2 + y^2 = r^2$ erhalten wir aus der hergeleiteten Kurvengleichung in kartesischer Form die folgende Darstellung in *Polarkoordinaten*:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2) \quad \Rightarrow \quad (r^2)^2 = a^2 (r^2 \cdot \cos^2 \varphi - r^2 \cdot \sin^2 \varphi) \quad \Rightarrow$$

$$r^2 \cdot r^2 = a^2 r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \quad \Rightarrow \quad r^2 = a^2 \underbrace{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}_{\cos (2\varphi)} = a^2 \cdot \cos (2\,\varphi) \quad \Rightarrow$$

$$r = a \cdot \sqrt{\cos (2\varphi)}$$

(unter Verwendung der trigonometrischen Beziehung $\cos (2\varphi) = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$ → FS)

c) **Kurvenverlauf für $\mathbf{e^2 = 8}$:** siehe Bild A-59

$$a^2 = 2\,\mathrm{e}^2 = 2 \cdot 8 = 16 \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

Kurvengleichung in *Polarkoordinaten*: $r(\varphi) = 4 \cdot \sqrt{\cos (2\varphi)}$

Wir müssen die Winkelbereiche von 45° bis 135° und 225° bis 315° *ausklammern*, da dort $\cos (2\varphi) < 0$ gilt. Die Kurve ist *geschlossen* und sowohl zur x-Achse als auch zur y-Achse *spiegelsymmetrisch*, da die kartesische Kurvengleichung nur *gerade* Potenzen der Koordinaten x und y enthält (Vorzeichenänderung bei x bzw. y bewirkt *keine* Änderung der anderen Koordinate). Wir können uns daher bei der Wertetabelle auf den Winkelbereich $0° \le \varphi \le 45°$ beschränken:

Wertetabelle:

φ	r
0°	4
7,5°	3,93
15,0°	3,72
22,5°	3,36
30°	2,83
37,5°	2,03
45°	0

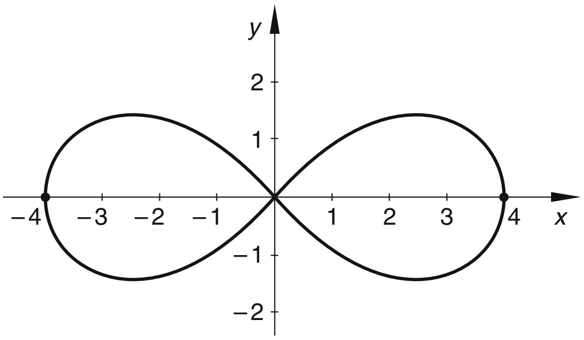


Bild A-59

B Differentialrechnung

Hinweise für das gesamte Kapitel

Kürzen eines gemeinsamen Faktors wird durch *Grauunterlegung* gekennzeichnet.

1 Ableitungsregeln

1.1 Produktregel

Wir verwenden die *Produktregel* in der folgenden Form:

$$\boxed{y = u\,v \quad \Rightarrow \quad y' = u'v + v'u \qquad (u, v\text{: Funktionen von } x)}$$

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel IV.2.3

Formelsammlung: Kapitel IV.3.3

B1 $y = (5x^3 - 4x)(x^2 + 5x)\,, \quad y' = ?$

Die vorliegende Funktion ist ein *Produkt* aus *zwei* Faktoren u und v, die jeweils von der Variablen x abhängen:

$$y = \underbrace{(5x^3 - 4x)}_{u}\ \underbrace{(x^2 + 5x)}_{v} = u\,v$$

Somit gilt:

$$u = 5x^3 - 4x\,, \quad v = x^2 + 5x \quad \text{und} \quad u' = 15x^2 - 4\,, \quad v' = 2x + 5$$

Die *Produktregel* liefert dann die gesuchte Ableitung:

$$y' = u'v + v'u = (15x^2 - 4)(x^2 + 5x) + (2x + 5)(5x^3 - 4x) =$$

$$= 15x^4 + 75x^3 - 4x^2 - 20x + 10x^4 - 8x^2 + 25x^3 - 20x = 25x^4 + 100x^3 - 12x^2 - 40x$$

Anmerkung: Diese Funktion lässt sich auch ohne Produktregel differenzieren (Klammern ausmultiplizieren, anschließend gliedweise differenzieren).

L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Klausur- und Übungsaufgaben,*
DOI 10.1007/978-3-8348-9730-5_2,© Vieweg+Teubner Verlag |Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2010

B2 $y = x^5 \cdot \ln x , \quad y' = ?$

Die Funktion ist ein *Produkt* der beiden Faktorfunktionen $u = x^5$ und $v = \ln x$:

$$y = \underbrace{x^5}_{u} \cdot \underbrace{\ln x}_{v} = u\,v \quad \text{mit} \quad u = x^5 , \quad v = \ln x \quad \text{und} \quad u' = 5x^4 , \quad v' = \frac{1}{x}$$

Die *Produktregel* liefert die gesuchte Ableitung:

$$y' = u'v + v'u = 5x^4 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x^5 = 5x^4 \cdot \ln x + x^4 = x^4 (5 \cdot \ln x + 1)$$

B3 $y = 4 \cdot \sin x \cdot \tan x , \quad y' = ?$

Wir „zerlegen“ die Funktion wie folgt:

$$y = 4 \cdot \underbrace{\sin x}_{u} \cdot \underbrace{\tan x}_{v} = 4\,(u\,v)$$

Der *konstante* Faktor 4 bleibt beim Differenzieren *erhalten*. Die *Produktregel* lautet daher in diesem Beispiel wie folgt:

$$y' = 4\,(u'v + v'u) \quad \text{mit} \quad u = \sin x , \quad v = \tan x \quad \text{und} \quad u' = \cos x , \quad v' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y' = 4\,(u'v + v'u) = 4 \left(\cos x \cdot \tan x + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sin x \right) = 4 \left(\cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) =$$

$$= 4 \cdot \sin x \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x} \right) = 4 \cdot \sin x \cdot \frac{\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} = \frac{4 \cdot \sin x\,(\cos^2 x + 1)}{\cos^2 x}$$

Anmerkung: Sie können den konstanten Faktor 4 auch in den Faktor u einbeziehen:

$$y = 4 \cdot \sin x \cdot \tan x = \underbrace{(4 \cdot \sin x)}_{u} \cdot \underbrace{\tan x}_{v} \quad \text{mit} \quad u = 4 \cdot \sin x \quad \text{und} \quad v = \tan x$$

B4 $y = (\cos x - \sin x) \cdot \mathrm{e}^x , \quad y' = ?$

„Zerlegung“ der Funktion in ein *Produkt* aus zwei Faktorfunktionen u und v:

$$y = \underbrace{(\cos x - \sin x)}_{u} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v} = u\,v \quad \text{mit} \quad u = \cos x - \sin x , \quad v = \mathrm{e}^x \quad \text{und} \quad u' = -\sin x - \cos x , \quad v' = \mathrm{e}^x$$

Mit Hilfe der *Produktregel* erhalten wir dann:

$$y' = u'v + v'u = (-\sin x - \cos x) \cdot \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x (\cos x - \sin x) =$$

$$= (-\sin x - \cos x + \cos x - \sin x) \cdot \mathrm{e}^x = -2 \cdot \sin x \cdot \mathrm{e}^x$$

B5 $y = 2 \cdot e^{x} \cdot \arcsin x , \quad y = ? \quad y'(0) = ?$

„Zerlegung“ der Funktion in ein *Produkt*:

$$y = 2 \cdot e^{x} \cdot \arcsin x = 2\,(\underbrace{e^{x}}_{u} \cdot \underbrace{\arcsin x}_{v}) = 2\,(u\,v)$$

Der *konstante* Faktor 2 bleibt beim Differenzieren *erhalten*. Mit

$$u = e^{x} , \quad v = \arcsin x \quad \text{und} \quad u' = e^{x} , \quad v' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^{2}}}$$

erhalten wir mit Hilfe der *Produktregel* die folgende Ableitung:

$$y' = 2\,(u'v + v'u) = 2\left(e^{x} \cdot \arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1 - x^{2}}} \cdot e^{x}\right) = 2 \cdot e^{x} \cdot \left(\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1 - x^{2}}}\right)$$

$$y'(0) = 2 \cdot e^{0}\,(\arcsin 0 + 1) = 2 \cdot 1\,(0 + 1) = 2$$

B6 $y = \sqrt{x} \cdot \arctan x , \quad y' = ?$

Wir „zerlegen“ die Funktion wie folgt:

$$y = \underbrace{\sqrt{x}}_{u} \cdot \underbrace{\arctan x}_{v} = u\,v \quad \text{mit} \quad u = \sqrt{x} , \quad v = \arctan x \quad \text{und} \quad u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} , \quad v' = \frac{1}{1 + x^{2}}$$

Mit Hilfe der *Produktregel* erhalten wir die gesuchte Ableitung:

$$y' = u'v + v'u = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \arctan x + \frac{1}{1 + x^{2}} \cdot \sqrt{x} = \frac{\arctan x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1 + x^{2}} = \frac{(1 + x^{2}) \cdot \arctan x + 2x}{2\sqrt{x}\,(1 + x^{2})}$$

Umformungen: Hauptnenner $2\sqrt{x}\,(1 + x^{2})$ bilden, d. h. die Brüche mit $(1 + x^{2})$ bzw. $2\sqrt{x}$ erweitern.

B7 $y = x^{4} \cdot e^{x} \cdot \cosh x , \quad y' = ?$

Die vorliegende Funktion ist ein *Produkt* aus *drei* Faktorfunktionen u, v und w, die alle von der Variablen x abhängen:

$$y = \underbrace{x^{4}}_{u} \cdot \underbrace{e^{x}}_{v} \cdot \underbrace{\cosh x}_{w} = u\,v\,w$$

$$u = x^{4} , \quad v = e^{x} , \quad w = \cosh x \quad \text{und} \quad u' = 4x^{3} , \quad v' = e^{x} , \quad w' = \sinh x$$

Mit Hilfe der *Produktregel* für *drei* Faktoren erhalten wir die folgende Ableitung:

$$y' = u'vw + uv'w + uvw' = 4x^{3} \cdot e^{x} \cdot \cosh x + x^{4} \cdot e^{x} \cdot \cosh x + x^{4} \cdot e^{x} \cdot \sinh x =$$

$$= x^{3} \cdot e^{x}\,(4 \cdot \cosh x + x \cdot \cosh x + x \cdot \sinh x)$$

B8 $y = 5\,(x^2 - 1)\,(2x + 1) \cdot \sin x\,, \quad y' = ?\,, \quad y'(\pi) = ?$

Wir *könnten* diese Funktion mit Hilfe der *Produktregel* für *drei* Faktoren differenzieren:

$$y = 5\,\underbrace{(x^2 - 1)}_{u}\,\underbrace{(2x + 1)}_{v} \cdot \underbrace{\sin x}_{w} = 5\,(u\,v\,w)$$

Günstiger ist es jedoch, die Funktion zunächst zu *vereinfachen* (ausmultiplizieren der ersten beiden Faktoren):

$$y = 5\,(x^2 - 1)\,(2x + 1) \cdot \sin x = 5\,(2x^3 + x^2 - 2x - 1) \cdot \sin x$$

Wir haben jetzt ein Produkt aus nur *zwei* Faktorfunktionen (der *konstante* Faktor 5 bleibt beim Differenzieren *erhalten*):

$$y = 5\,\underbrace{(2x^3 + x^2 - 2x - 1)}_{u} \cdot \underbrace{\sin x}_{v} = 5\,(u\,v)$$

$$u = 2x^3 + x^2 - 2x - 1\,, \quad v = \sin x \quad \text{und} \quad u' = 6x^2 + 2x - 2 = 2\,(3x^2 + x - 1)\,, \quad v' = \cos x$$

Die *Produktregel* für *zwei* Faktoren liefert jetzt die gewünschte Ableitung:

$$y' = 5\,(u'v + v'u) = 5\,[\,2\,(3x^2 + x - 1) \cdot \sin x + \cos x \cdot (2x^3 + x^2 - 2x - 1)\,]$$

Ableitung an der Stelle $x = \pi$: $y'(\pi) = 5\,[\,2\,(3\pi^2 + \pi - 1) \cdot \underbrace{\sin \pi}_{0} + \underbrace{\cos \pi}_{-1} \cdot (2\pi^3 + \pi^2 - 2\pi - 1)\,] =$

$$= -5\,(2\pi^3 + \pi^2 - 2\pi - 1) = -322{,}995$$

1.2 Quotientenregel

Wir verwenden die *Quotientenregel* in der folgenden Form:

$$\boxed{y = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \qquad (u,\ v\text{: Funktionen von } x)}$$

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel IV.2.4
Formelsammlung: Kapitel IV.3.4

B9 $y = \dfrac{x^2}{1 - x^2}\,, \quad y' = ?$

Die vorliegende Funktion ist der *Quotient* aus $u = x^2$ und $v = 1 - x^2$:

$$y = \frac{x^2}{1 - x^2} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = x^2, \quad v = 1 - x^2 \quad \text{und} \quad u' = 2x, \quad v' = -2x$$

Die *Quotientenregel* liefert dann:

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{2x\,(1 - x^2) - (-2x)\,x^2}{(1 - x^2)^2} = \frac{2x - 2x^3 + 2x^3}{(1 - x^2)^2} = \frac{2x}{(1 - x^2)^2}$$

B10

$$y = \frac{\cos x}{x^2}\,, \quad y' = ?\,, \quad y'(\pi) = ?$$

Die vorliegende Funktion ist der *Quotient* der Funktionen $u = \cos x$ und $v = x^2$:

$$y = \frac{\cos x}{x^2} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = \cos x\,, \quad v = x^2 \quad \text{und} \quad u' = -\sin x\,, \quad v' = 2x$$

Die *Quotientenregel* führt zu der folgenden Ableitung:

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{(-\sin x)\cdot x^2 - 2x \cdot \cos x}{x^4} = \frac{-x^2 \cdot \sin x - 2x \cdot \cos x}{x^4} =$$

$$= \frac{(-x \cdot \sin x - 2 \cdot \cos x)\, \colorbox{lightgray}{x}}{x^3 \cdot \colorbox{lightgray}{x}} = \frac{-x \cdot \sin x - 2 \cdot \cos x}{x^3} = -\frac{x \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x}{x^3}$$

Ableitung an der Stelle $x = \pi$:

$$y'(\pi) = -\frac{\pi \cdot \sin \pi + 2 \cdot \cos \pi}{\pi^3} = -\frac{\pi \cdot 0 + 2 \cdot (-1)}{\pi^3} = -\frac{-2}{\pi^3} = \frac{2}{\pi^3}$$

B11

$$y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,, \quad y' = ?$$

Zähler u und Nenner v dieses *Quotienten* sind elementare Funktionen mit bekannten Ableitungen:

$$u = \ln x\,, \quad v = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{1}{x}\,, \quad v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Die gesuchte Ableitung erhalten wir mit Hilfe der *Quotientenregel*:

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot \ln x}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot \ln x}{x} = \frac{\frac{2 - \ln x}{2\sqrt{x}}}{\frac{x}{1}} = \frac{2 - \ln x}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$$

Umformungen: Bruch im Zähler mit dem *Kehrwert* des Nennerbruches multiplizieren.

B12

$$y = \frac{2 \cdot \cos x - \sin x}{\cos x + 2 \cdot \sin x}\,, \quad y' = ?\,, \quad y'(\pi/2) = ?$$

Die vorliegende Funktion ist der *Quotient* aus den Funktionen $u = 2 \cdot \cos x - \sin x$ und $v = \cos x + 2 \cdot \sin x$:

$$y = \frac{2 \cdot \cos x - \sin x}{\cos x + 2 \cdot \sin x} = \frac{u}{v}$$

Somit gilt:

$$u = 2 \cdot \cos x - \sin x\,, \quad v = \cos x + 2 \cdot \sin x \quad \text{und} \quad u' = -2 \cdot \sin x - \cos x\,, \quad v' = -\sin x + 2 \cdot \cos x$$

Bei genauerer Betrachtung der Ableitungen u' und v' fällt auf, dass $u' = -v$ und $v' = u$ ist:

$$u' = -2 \cdot \sin x - \cos x = -(2 \cdot \sin x + \cos x) = -\underbrace{(\cos x + 2 \cdot \sin x)}_{v} = -v$$

$$v' = -\sin x + 2 \cdot \cos x = \underbrace{2 \cdot \cos x - \sin x}_{v} = u$$

Die *Quotientenregel* lautet dann unter Berücksichtigung dieser Beziehungen wie folgt:

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{(-v)\,v - u\,u}{v^2} = \frac{-v^2 - u^2}{v^2} = \frac{-(v^2 + u^2)}{v^2} = -\frac{u^2 + v^2}{v^2}$$

Für den Zähler dieser Bruches erhalten wir unter Verwendung des „trigonometrischen Pythagoras“ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= (2 \cdot \cos x - \sin x)^2 + (\cos x + 2 \cdot \sin x)^2 = \\ &= 4 \cdot \cos^2 x - 4 \cdot \cos x \cdot \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x + 4 \cdot \cos x \cdot \sin x + 4 \cdot \sin^2 x = \\ &= 5 \cdot \cos^2 x + 5 \cdot \sin^2 x = 5\,\underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{1} = 5 \end{aligned}$$

Die gesuchte Ableitung lautet damit:

$$y' = -\frac{u^2 + v^2}{v^2} = -\frac{5}{(\cos x + 2 \cdot \sin x)^2}$$

An der Stelle $x = \pi/2$ besitzt die Ableitung den folgenden Wert:

$$y'(\pi/2) = -\frac{5}{[\underbrace{\cos(\pi/2)}_{0} + 2 \cdot \underbrace{\sin(\pi/2)}_{1}]^2} = -\frac{5}{(0 + 2)^2} = -\frac{5}{4}$$

B13 $\quad y = \dfrac{x^3 - 2x + 5}{x^2 - 4x + 1}\,, \quad y' = ?$

$$y = \frac{x^3 - 2x + 5}{x^2 - 4x + 1} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = x^3 - 2x + 5\,, \quad v = x^2 - 4x + 1\,, \quad u' = 3x^2 - 2\,, \quad v' = 2x - 4$$

Die *Quotientenregel* liefert die gesuchte Ableitung:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{(3x^2 - 2)(x^2 - 4x + 1) - (2x - 4)(x^3 - 2x + 5)}{(x^2 - 4x + 1)^2} = \\ &= \frac{3x^4 - 12x^3 + 3x^2 - 2x^2 + 8x - 2 - (2x^4 - 4x^2 + 10x - 4x^3 + 8x - 20)}{(x^2 - 4x + 1)^2} = \\ &= \frac{3x^4 - 12x^3 + x^2 + 8x - 2 - (2x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 18x - 20)}{(x^2 - 4x + 1)^2} = \\ &= \frac{3x^4 - 12x^3 + x^2 + 8x - 2 - 2x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 18x + 20}{(x^2 - 4x + 1)^2} = \frac{x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 10x + 18}{(x^2 - 4x + 1)^2} \end{aligned}$$

1.3 Kettenregel

Die *Kettenregel* ist eine *Substitutionsregel*. Mit Hilfe einer geeigneten Substitution wird die vorgegebene Funktion $y = f(x)$ zunächst in eine *elementar differenzierbare* Funktion $y = F(u)$ der „Hilfsvariablen" u übergeführt. Dann gilt (*Kettenregel*):

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{oder} \quad y' = F'(u) \cdot u'(x) \qquad (\text{„äußere Ableitung mal innere Ableitung"})}$$

Anschließend wird *rücksubstituiert*.

Hinweise

(1) In manchen Fällen müssen mehrere Substitutionen nacheinander durchgeführt werden, bis man auf eine elementar differenzierbare Funktion stößt.

(2) **Lehrbuch:** Band 1, Kapitel IV.2.5
Formelsammlung: Kapitel IV.3.5

B14 $y = (4x^2 - 2x + 1)^5, \quad y' = ?$

Durch die *Substitution* $u = 4x^2 - 2x + 1$ wird die vorliegende Funktion in eine *elementare Potenzfunktion* übergeführt:

$$y = \underbrace{(4x^2 - 2x + 1)}_{u}{}^5 \quad \rightarrow \quad y = u^5 \quad \text{mit} \quad u = 4x^2 - 2x + 1$$

$y = u^5$ ist dabei die *äußere*, $u = 4x^2 - 2x + 1$ die *innere* Funktion. Beide Funktionen sind *elementar differenzierbar*. Mit Hilfe der *Kettenregel* erhalten wir zunächst:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 5u^4 \cdot (8x - 2) = 5u^4 \cdot 2(4x - 1) = 10(4x - 1) \cdot u^4$$

Rücksubstitution $(u = 4x^2 - 2x + 1)$ führt zur gesuchten Ableitung:

$$y' = 10(4x - 1)\,u^4 = 10(4x - 1)(4x^2 - 2x + 1)^4$$

Anmerkung: Die Funktion lässt sich auch ohne Kettenregel differenzieren (Binom auflösen, dann gliedweise differenzieren). Dieser Weg ist jedoch aufwendig und daher nicht zu empfehlen (überzeugen Sie sich selbst).

B15 $y = \ln\sqrt{4x - x^2}, \quad y' = ?$

Wir vereinfachen die Funktion zunächst wie folgt:

$$y = \ln\sqrt{4x - x^2} = \ln(4x - x^2)^{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \ln(4x - x^2) \qquad (\textit{Rechenregel:}\ \ln a^n = n \cdot \ln a)$$

Mit Hilfe der *Substitution* $u = 4x - x^2$ zerlegen wir die Funktion in ihre *elementaren* Bestandteile:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \ln \underbrace{(4x - x^2)}_{u} \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2} \cdot \ln u \quad \text{mit} \quad u = 4x - x^2$$

(*äußere* und *innere* Funktion). Die *Kettenregel* liefert dann (nach erfolgter *Rücksubstitution*):

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u} \cdot (4 - 2x) = \frac{4 - 2x}{2u} = \frac{2(2 - x)}{2(4x - x^2)} = \frac{2 - x}{4x - x^2}$$

B16

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{a + bx^2}} \quad (a,\, b\colon \text{Konstanten}), \quad y' = ?$$

Die Funktion lässt sich auch als *Potenz* darstellen:

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{a + bx^2}} = \frac{1}{(a + bx^2)^{1/3}} = (a + bx^2)^{-1/3}$$

Durch die *Substitution* $u = a + bx^2$ wird die Funktion in zwei elementare Funktionen zerlegt:

äußere Funktion: $y = u^{-1/3}$; *innere* Funktion: $u = a + bx^2$

Die *Kettenregel* führt dann zu dem folgenden Ergebnis (zunächst wird y nach u, dann u nach x differenziert):

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{1}{3}\, u^{-4/3} \cdot (2bx) = -\frac{2}{3}\, bx \cdot u^{-4/3}$$

Durch *Rücksubstitution* $(u = a + bx^2)$ folgt schließlich:

$$y' = -\frac{2}{3}\, bx(a + bx^2)^{-4/3} = -\frac{2}{3}\, b \cdot \frac{x}{(a + bx^2)^{4/3}} = -\frac{2bx}{3 \cdot \sqrt[3]{(a + bx^2)^4}}$$

B17

$$y = 4 \cdot \mathrm{e}^{\cos x - \sin x}, \quad y' = ?, \quad y'(\pi) = ?$$

Durch die *Substitution* $u = \cos x - \sin x$ führen wir die vorliegende Exponentialfunktion auf die *elementare* e-Funktion zurück:

$$y = 4 \cdot \mathrm{e}^{\cos x - \sin x} \quad \rightarrow \quad y = 4 \cdot \mathrm{e}^{u} \quad \text{mit} \quad u = \cos x - \sin x$$

Beide Funktionen (*äußere* und *innere*) sind *elementar differenzierbar*. Die *Kettenregel* liefert dann (äußere Ableitung mal innere Ableitung):

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4 \cdot \mathrm{e}^{u} \cdot (-\sin x - \cos x) = -4(\sin x + \cos x) \cdot \mathrm{e}^{u}$$

Durch *Rücksubstitution* $(u = \cos x - \sin x)$ erhalten wir die gewünschte Ableitung:

$$y' = -4(\sin x + \cos x) \cdot \mathrm{e}^{\cos x - \sin x}$$

$$y'(\pi) = -4(\sin \pi + \cos \pi) \cdot \mathrm{e}^{\cos \pi - \sin \pi} = -4(0 - 1) \cdot \mathrm{e}^{-1-0} = 4 \cdot \mathrm{e}^{-1}$$

B18

$y = 4 \cdot \sqrt{x^2 + \sqrt{x}}\,, \quad y' = ?\,, \quad y'(x = 1) = ?$

Mit der *Substitution* $u = x^2 + \sqrt{x}$ (Wurzelradikand) errechnen wir unser Ziel: die Funktion wird in zwei *elementar differenzierbare* Bestandteile (*äußere* und *innere* Funktion) zerlegt:

$$y = 4 \cdot \sqrt{\underbrace{x^2 + \sqrt{x}}_{u}} \quad \rightarrow \quad y = 4 \cdot \sqrt{u} \quad \text{mit} \quad u = x^2 + \sqrt{x}$$

Wir wenden die *Kettenregel* an (*äußere* Ableitung mal *innere* Ableitung)

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{4}{\sqrt{u}} \cdot \frac{4x\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}} = \frac{4x\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{u}} = \frac{4x\sqrt{x} + 1}{\sqrt{xu}}$$

Rücksubstitution $(u = x^2 + \sqrt{x})$ liefert das gewünschte Ergebnis:

$$y' = \frac{4x\sqrt{x} + 1}{\sqrt{xu}} = \frac{4x\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x(x^2 + \sqrt{x})}} = \frac{4x\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^3 + x\sqrt{x}}}$$

Ableitung an der Stelle $x = 1$:

$$y'(x = 1) = \frac{4 \cdot 1\sqrt{1} + 1}{\sqrt{1^3 + 1\sqrt{1}}} = \frac{4 + 1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

B19

Zeigen Sie: $y = [f(x)]^n \quad \Rightarrow \quad y' = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$

Wenden Sie diese Ableitungsformel an auf: a) $y = \sin^4 x$ b) $y = \ln^3 x$

Mit der *Substitution* $u = f(x)$ wird die gegebene Funktion auf die *elementar differenzierbare* Potenzfunktion $y = u^n$ zurückgeführt:

$$y = [\underbrace{f(x)}_{u}]^n \quad \rightarrow \quad y = u^n \quad \text{mit} \quad u = f(x)$$

$y = u^n$ ist dabei die *äußere*, $u = f(x)$ die *innere* Funktion. Mit Hilfe der *Kettenregel* erhalten wir:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = n \cdot u^{u-1} \cdot f'(x)$$

Rücksubstitution $u = f(x)$ führt dann zu dem gewünschten Ergebnis:

$$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot f'(x) = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$$

Anwendungsbeispiele

a) $y = \sin^4 x = (\underbrace{\sin x}_{u})^4 \quad \Rightarrow \quad y' = 4(\sin x)^3 \cdot \cos x = 4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x$

b) $y = \ln^3 x = (\underbrace{\ln x}_{u})^3 \quad \Rightarrow \quad y' = 3(\ln x)^2 \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{3 \cdot \ln^2 x}{x}$

B20

$y = \cos(5x^2 - 3x + 1)\,, \quad y' = ?$

Mit der *Substitution* $u = 5x^2 - 3x + 1$ erreichen wir unser Ziel: die vorliegende Funktion wird in die elementare Kosinusfunktion übergeführt:

$$y = \cos(5x^2 - 3x + 1) \quad \rightarrow \quad y = \cos u \quad \text{mit} \quad u = 5x^2 - 3x + 1$$

Dabei ist $y = \cos u$ die *äußere* und $u = 5x^2 - 3x + 1$ die *innere* Funktion. Die *Kettenregel* liefert dann (erst wird y nach u, dann u nach x differenziert):

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (-\sin u) \cdot (10x - 3) = -(10x - 3) \cdot \sin u$$

Die *Rücksubstitution* $u = 5x^2 - 3x + 1$ führt zur gesuchten Ableitung:

$$y' = -(10x - 3) \cdot \sin u = -(10x - 3) \cdot \sin(5x^2 - 3x + 1)$$

B21

$y = \ln[\cos(1 - x^2)]\,, \quad y' = ?$

Diese Aufgabe unterscheidet sich von den bisherigen dadurch, dass sie *nicht* mit Hilfe einer einzigen Substitution lösbar ist. Wir benötigen insgesamt *zwei* Substitutionen, die wir nacheinander von innen nach außen ausführen, um unser Ziel zu erreichen:

1. Substitution: $y = \ln[\cos(\underbrace{1 - x^2}_{u})] = \ln[\cos u] \quad \text{mit} \quad u = 1 - x^2$

2. Substitution: $y = \ln[\underbrace{\cos u}_{v}] = \ln v \quad \text{mit} \quad v = \cos u$

Somit gilt: $y = \ln v$ mit $v = \cos u$ und $u = 1 - x^2$

Alle drei Bestandteile (Funktionen) sind *elementar differenzierbar.* Die *Kettenregel* liefert dann (erst wird y nach v, dann v nach u und schließlich u nach x differenziert):

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{v} \cdot (-\sin u) \cdot (-2x) = \frac{2x \cdot \sin u}{v}$$

Rücksubstitution $(v \rightarrow u \rightarrow x)$ liefert das gewünschte Ergebnis:

$$y' = \frac{2x \cdot \sin u}{v} = \frac{2x \cdot \sin u}{\cos u} = 2x \cdot \tan u = 2x \cdot \tan(1 - x^2)$$

B22

$y = A \cdot e^{-ax^2} + B \cdot e^{-bx+c} \quad (A, B, a, b, c\text{: Konstanten})\,, \quad y' = ?\,, \quad y'(x = 0) = ?$

Es wird gliedweise differenziert. Die e-Funktionen werden dabei durch die *Substitutionen* $u = -ax^2$ bzw. $v = -bx + c$ in *elementare* Funktionen übergeführt:

$$y_1 = A \cdot e^{-ax^2} \quad \Rightarrow \quad y_1 = A \cdot e^u \quad \text{mit} \quad u = -ax^2$$

$$y_2 = B \cdot e^{-bx+c} \quad \Rightarrow \quad y_2 = B \cdot e^v \quad \text{mit} \quad v = -bx + c$$

Die *Kettenregel* liefert dann:

$$y_1' = \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy_1}{du} \cdot \frac{du}{dx} = A \cdot \mathrm{e}^{u} \cdot (-2ax) = -2aAx \cdot \mathrm{e}^{u}$$

$$y_2' = \frac{dy_2}{dx} = \frac{dy_2}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = B \cdot \mathrm{e}^{v} \cdot (-b) = -bB \cdot \mathrm{e}^{v}$$

Nach *Rücksubstitution* erhalten wir schließlich die gewünschte Ableitung. Sie lautet:

$$y' = y_1' + y_2' = -2aAx \cdot \mathrm{e}^{u} - bB \cdot \mathrm{e}^{v} = -2aAx \cdot \mathrm{e}^{-ax^2} - bB \cdot \mathrm{e}^{-bx+c}$$

Ableitung an der Stelle $x = 0$:

$$y'(x = 0) = -2aA \cdot 0 \cdot \mathrm{e}^{0} - bB \cdot \mathrm{e}^{c} = -bB \cdot \mathrm{e}^{c}$$

B23

$$y = \sqrt{\cos(5x^2)}, \quad y' = ?$$

Mit Hilfe von *zwei* Substitutionen gelingt es, die vorliegende Funktion in ihre *elementaren* Bestandteile zu zerlegen (wir substituieren von *innen* nach *außen*):

1. Substitution: $y = \sqrt{\cos\underbrace{(5x^2)}_{u}} = \sqrt{\cos u}$ mit $u = 5x^2$

2. Substitution: $y = \sqrt{\underbrace{\cos u}_{v}} = \sqrt{v}$ mit $v = \cos u$

Aus $y = \sqrt{v}$ mit $v = \cos u$ und $u = 5x^2$ folgt dann mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot (-\sin u) \cdot 10x = \frac{-5x \cdot \sin u}{\sqrt{v}}$$

Rücksubstitution in der Reihenfolge $v \rightarrow u \rightarrow x$ führt zur gesuchten Ableitung:

$$y' = \frac{-5x \cdot \sin u}{\sqrt{v}} = \frac{-5x \cdot \sin u}{\sqrt{\cos u}} = \frac{-5x \cdot \sin(5x^2)}{\sqrt{\cos(5x^2)}}$$

B24

$$y = \ln(ax + \mathrm{e}^{x})^4, \quad y'(1) = ?$$

Zunächst *vereinfachen* wir die Funktion unter Verwendung der logarithmischen *Rechenregel* $\ln c^n = n \cdot \ln c$:

$$y = \ln(ax + \mathrm{e}^{x})^4 = 4 \cdot \ln(ax + \mathrm{e}^{x})$$

Die *Substitution* $u = ax + \mathrm{e}^{x}$ führt dann zum Ziel:

$$y = 4 \cdot \ln\underbrace{(ax + \mathrm{e}^{x})}_{u} \quad \rightarrow \quad y = 4 \cdot \ln u \quad \text{mit} \quad u = ax + \mathrm{e}^{x}$$

Anwendung der *Kettenregel* und Rücksubstitution:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4 \cdot \frac{1}{u} \cdot (a + \mathrm{e}^{x}) = \frac{4(a + \mathrm{e}^{x})}{u} = \frac{4(a + \mathrm{e}^{x})}{ax + \mathrm{e}^{x}} \quad \Rightarrow \quad y'(1) = \frac{4(a + \mathrm{e}^{1})}{a + \mathrm{e}^{1}} = 4$$

1.4 Kombinationen mehrerer Ableitungsregeln

Sie benötigen beim Lösen der folgenden Aufgaben stets *mehrere* Ableitungsregeln, meist die Produkt- oder Quotientenregel in Verbindung mit der Kettenregel.

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel IV.2.3 bis 2.6

Formelsammlung: Kapitel IV.3.3 bis 3.5

B25 $y = \mathrm{e}^{x \cdot \cos x}, \quad y' = ?$

Wir *substituieren* den Exponenten, setzen also $t = x \cdot \cos x$ und erhalten die *elementare* e-Funktion:

$$y = \mathrm{e}^{x \cdot \cos x} \quad \rightarrow \quad y = \mathrm{e}^{t} \quad \text{mit} \quad t = x \cdot \cos x$$

Die *Kettenregel* führt zunächst zu:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \mathrm{e}^{t} \cdot \frac{dt}{dx}$$

Die *innere* Ableitung, d. h. die Ableitung von $t = x \cdot \cos x$ nach x bilden wir mit Hilfe der *Produktregel*:

$$t = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{v} = u\,v \quad \text{mit} \quad u = x, \quad v = \cos x \quad \text{und} \quad u' = 1, \quad v' = -\sin x$$

$$\frac{dt}{dx} = u'v + v'u = 1 \cdot \cos x + (-\sin x) \cdot x = \cos x - x \cdot \sin x$$

Die gesuchte Ableitung lautet damit (nach erfolgter Rücksubstitution):

$$y' = \mathrm{e}^{t} \cdot \frac{dt}{dx} = \mathrm{e}^{t} \cdot (\cos x - x \cdot \sin x) = (\cos x - x \cdot \sin x) \cdot \mathrm{e}^{t} = (\cos x - x \cdot \sin x) \cdot \mathrm{e}^{x \cdot \cos x}$$

B26 $y(t) = A \cdot \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (A, \delta, \omega, \varphi\text{: Konstanten}), \quad y'(t = 0) = ?$

A bleibt als *konstanter* Faktor beim Differenzieren *erhalten*, das Produkt aus Exponential- und Sinusfunktion wird nach der *Produktregel* differenziert:

$$y = A \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-\delta t}}_{u} \cdot \underbrace{\sin(\omega t + \varphi)}_{v} = A(u\,v) \quad \Rightarrow \quad y' = A(u'v + v'u)$$

Die dabei benötigten Ableitungen der Faktorfunktionen $u = \mathrm{e}^{-\delta t}$ und $v = \sin(\omega t + \varphi)$ bilden wir wie folgt mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$u = \mathrm{e}^{-\delta t} = \mathrm{e}^{z} \quad \text{mit} \quad z = -\delta t \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \mathrm{e}^{z} \cdot (-\delta) = -\delta \cdot \mathrm{e}^{-\delta t}$$

$$v = \sin(\omega t + \varphi) = \sin z \quad \text{mit} \quad z = \omega t + \varphi \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = (\cos z) \cdot \omega = \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Die gesuchte Ableitung lautet damit:

$$y' = A(u'v + v'u) = A[-\delta \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi) + \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot e^{-\delta t}] =$$

$$= A \cdot e^{-\delta t}[-\delta \cdot \sin(\omega t + \varphi) + \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)]$$

$$y'(t = 0) = A \cdot e^{0}[-\delta \cdot \sin\varphi + \omega \cdot \cos\varphi] = A(-\delta \cdot \sin\varphi + \omega \cdot \cos\varphi)$$

B27 $y = e^{-x^2} \cdot \ln(x^3 + 1), \quad y' = ?$

Es liegt ein *Produkt* aus *zwei* Faktoren u und v vor:

$$y = \underbrace{e^{-x^2}}_{u} \cdot \underbrace{\ln(x^3 + 1)}_{v} = uv$$

Wir benötigen daher die *Produktregel*, beim Differenzieren der beiden Faktorfunktionen $u = e^{-x^2}$ und $v = \ln(x^3 + 1)$ jeweils auch die *Kettenregel*:

$$u = e^{-x^2} = e^{t} \quad \text{mit} \quad t = -x^2 \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{t} \cdot (-2x) = -2x \cdot e^{-x^2}$$

$$v = \ln(x^3 + 1) = \ln z \quad \text{mit} \quad z = x^3 + 1 \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{x^3 + 1}$$

Unter Berücksichtigung dieser Ableitungen liefert dann die *Produktregel* das gewünschte Ergebnis:

$$y' = u'v + v'u = -2x \cdot e^{-x^2} \cdot \ln(x^3 + 1) + \frac{3x^2}{x^3 + 1} \cdot e^{-x^2} = \left(-2x \cdot \ln(x^3 + 1) + \frac{3x^2}{x^3 + 1}\right) \cdot e^{-x^2}$$

B28 $y = \arctan\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), \quad y'(3) = ?$

Wir wählen die *Substitution* $z = \frac{1 + x}{1 - x}$ und zerlegen damit die vorliegende Funktion in eine elementare *äußere* und eine (gebrochenrationale) *innere* Funktion:

$$y = \arctan\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \quad \rightarrow \quad y = \arctan z \quad \text{mit} \quad z = \frac{1 + x}{1 - x}$$

Die *äußere* Funktion $y = \arctan z$ besitzt bekanntlich die Ableitung

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{1 + z^2}$$

Die Ableitung der *inneren* Funktion erhalten wir mit Hilfe der *Quotientenregel*:

$$z = \frac{1 + x}{1 - x} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = 1 + x, \quad v = 1 - x \quad \text{und} \quad u' = 1, \quad v' = -1$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{1(1 - x) - (-1)(1 + x)}{(1 - x)^2} = \frac{1 - x + 1 + x}{(1 - x)^2} = \frac{2}{(1 - x)^2}$$

Mit der *Kettenregel* folgt dann:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{1 + z^2} \cdot \frac{2}{(1 - x)^2} = \frac{2}{(1 + z^2)(1 - x)^2}$$

Rücksubstitution $z = \dfrac{1 + x}{1 - x}$ führt schließlich zur gesuchten Ableitung (wir bringen zunächst den im Nenner auftretenden Ausdruck $1 + z^2$ auf eine möglichst einfache Form):

$$1 + z^2 = 1 + \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^2 = 1 + \frac{(1 + x)^2}{(1 - x)^2} = \frac{(1 - x)^2 + (1 + x)^2}{(1 - x)^2} =$$

$$= \frac{1 - 2x + x^2 + 1 + 2x + x^2}{(1 - x)^2} = \frac{2 + 2x^2}{(1 - x)^2} = \frac{2(1 + x^2)}{(1 - x)^2}$$

Umformungen: Der erste Summand wird mit $(1 - x)^2$ erweitert.

$$y' = \frac{2}{(1 + z^2)(1 - x)^2} = \frac{2}{\dfrac{2(1 + x^2)}{(1 - x)^2} \cdot (1 - x)^2} = \frac{1}{1 + x^2} \quad \Rightarrow \quad y'(3) = \frac{1}{10}$$

B29

$$y = \frac{\sqrt{a + x^2} + 5}{5 - \sqrt{a + x^2}} \quad (a\text{: Konstante}), \quad y' = ?$$

Zähler und Nenner des Bruches enthalten den gleichen Wurzelausdruck. Wir versuchen daher, diese Aufgabe mit Hilfe der *Substitution* $z = \sqrt{a + x^2}$ zu lösen:

$$y = \frac{\sqrt{a + x^2} + 5}{5 - \sqrt{a + x^2}} \quad \rightarrow \quad y = \frac{z + 5}{5 - z} \quad \text{mit} \quad z = \sqrt{a + x^2}$$

Die *äußere* Ableitung erhalten wir mit der *Quotientenregel*, die *innere* Ableitung über die *Kettenregel*:

äußere Ableitung: $y = \dfrac{z + 5}{5 - z} = \dfrac{u}{v}$ mit $u = z + 5, \quad v = 5 - z$ und $u' = 1, \quad v' = -1$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{1(5 - z) - (-1)(z + 5)}{(5 - z)^2} = \frac{5 - z + z + 5}{(5 - z)^2} = \frac{10}{(5 - z)^2}$$

innere Ableitung: $z = \sqrt{\underbrace{a + x^2}_{t}} = \sqrt{t}$ mit $t = a + x^2$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{t}} = \frac{x}{\sqrt{a + x^2}} \qquad \text{(nach erfolgter Rücksubstitution } t = a + x^2\text{)}$$

Die Ableitung der Ausgangsfunktion erhalten wir mit Hilfe der *Kettenregel* (erst y nach z differenzieren, dann z nach x) mit anschließender *Rücksubstitution*:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{10}{(5 - z)^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a + x^2}} = \frac{10x}{(5 - z)^2 \cdot \sqrt{a + x^2}} = \frac{10x}{\left(5 - \sqrt{a + x^2}\right)^2 \cdot \sqrt{a + x^2}}$$

B30

$$y = \frac{\ln(x^2+1)}{x^3}, \quad y' = ?$$

Die vorliegende Funktion ist ein *Quotient* und lässt sich daher nach der *Quotientenregel* differenzieren:

$$y = \frac{\ln(x^2+1)}{x^3} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = \ln(x^2+1), \quad v = x^3 \quad \text{und} \quad u' = ?, \quad v' = 3x^2$$

Die noch fehlende Ableitung der Zählerfunktion $u = \ln(x^2+1)$ erhalten wir mit Hilfe der Kettenregel:

$$u = \ln \underbrace{(x^2+1)}_{t} = \ln t \quad \text{mit} \quad t = x^2+1 \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cdot 2x = \frac{2x}{t} = \frac{2x}{x^2+1}$$

(nach erfolgter Rücksubstitution $t = x^2+1$). Somit gilt zusammenfassend:

$$u = \ln(x^2+1), \quad v = x^3 \quad \text{und} \quad u' = \frac{2x}{x^2+1}, \quad v' = 3x^2$$

Die *Quotientenregel* liefert dann die gewünschte Ableitung:

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{\dfrac{2x}{x^2+1} \cdot x^3 - 3x^2 \cdot \ln(x^2+1)}{x^6} = \frac{\dfrac{2x^4}{x^2+1} - 3x^2 \cdot \ln(x^2+1)}{x^6} =$$

$$= \frac{\dfrac{2x^4 - 3x^2(x^2+1) \cdot \ln(x^2+1)}{x^2+1}}{\dfrac{x^6}{1}} = \frac{x^2[2x^2 - 3(x^2+1) \cdot \ln(x^2+1)]}{x^2+1} \cdot \frac{1}{x^6} =$$

$$= \frac{x^2[2x^2 - 3(x^2+1) \cdot \ln(x^2+1)]}{(x^2+1) \cdot x^4 \cdot x^2} = \frac{2x^2 - 3(x^2+1) \cdot \ln(x^2+1)}{(x^2+1) \cdot x^4}$$

Umformungen: Im Zähler des Gesamtbruches den Hauptnenner x^2+1 bilden, den 2. Summand also mit x^2+1 erweitern → Nenner x^6 als Bruch schreiben: $x^6 = x^6/1$ → im Zähler den gemeinsamen Faktor x^2 ausklammern → Zählerbruch mit dem Kehrwert des Nennerbruches multiplizieren → gemeinsamen Faktor x^2 kürzen.

B31

$$y = \frac{x \cdot \sin x + \cos x}{x \cdot \cos x - \sin x}, \quad y' = ?$$

Der Quotient aus $u = x \cdot \sin x + \cos x$ und $v = x \cdot \cos x - \sin x$ wird nach der *Quotientenregel* differenziert. Die dabei benötigten Ableitungen u' und v' erhalten wir wie folgt mit Hilfe der *Summen*- und *Produktregel*:

Zähler: $u = \underbrace{x}_{\alpha} \cdot \underbrace{\sin x}_{\beta} + \cos x = \alpha\beta + \cos x$ mit $\alpha = x, \quad \beta = \sin x$ und $\alpha' = 1, \quad \beta' = \cos x$

$$u' = \alpha'\beta + \beta'\alpha - \sin x = 1 \cdot \sin x + (\cos x) \cdot x - \sin x = x \cdot \cos x$$

Nenner: $v = \underbrace{x}_{\alpha} \cdot \underbrace{\cos x}_{\beta} - \sin x = \alpha\beta - \sin x$ mit $\alpha = x, \quad \beta = \cos x$ und $\alpha' = 1, \quad \beta' = -\sin x$

$$v' = \alpha'\beta + \beta'\alpha - \cos x = 1 \cdot \cos x + (-\sin x) \cdot x - \cos x = -x \cdot \sin x$$

Somit gilt zusammenfassend:

$$u = x \cdot \sin x + \cos x, \quad v = x \cdot \cos x - \sin x \quad \text{und} \quad u' = x \cdot \cos x, \quad v' = -x \cdot \sin x$$

Die *Quotientenregel* liefert dann die gesuchte Ableitung:

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{x \cdot \cos x\,(x \cdot \cos x - \sin x) - (-x \cdot \sin x)\,(x \cdot \sin x + \cos x)}{(x \cdot \cos x - \sin x)^2} =$$

$$= \frac{x^2 \cdot \cos^2 x - x \cdot \cos x \cdot \sin x + x^2 \cdot \sin^2 x + x \cdot \sin x \cdot \cos x}{(x \cdot \cos x - \sin x)^2} = \frac{x^2 \cdot \cos^2 x + x^2 \cdot \sin^2 x}{(x \cdot \cos x - \sin x)^2} =$$

$$= \frac{x^2\,(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(x \cdot \cos x - \sin x)^2} = \frac{x^2}{(x \cdot \cos x - \sin x)^2}$$

(unter Verwendung des „trigonometrischen Pythagoras“ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$).

B32 $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - a^2}{a^2 + x^2}}$ (a: Konstante), $y' = ?$

Wir substituieren den *Radikand* der Wurzel und führen damit die gegebene Funktion auf eine *elementare* Wurzelfunktion zurück:

$$y = \sqrt{\underbrace{\frac{x^2 - a^2}{a^2 + x^2}}_{z}} \quad \rightarrow \quad y = \sqrt{z} \quad \text{mit} \quad z = \frac{x^2 - a^2}{a^2 + x^2}$$

Die gesuchte Ableitung erhalten wir dann mit Hilfe der *Kettenregel* (erst y nach z differenzieren, dann z nach x). Die „äußere“ Funktion $y = \sqrt{z}$ ist *elementar* differenzierbar:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\dfrac{x^2 - a^2}{a^2 + x^2}}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2 + x^2}{x^2 - a^2}}$$

Die Ableitung der gebrochenrationalen „inneren“ Funktion erfolgt mit der *Quotientenregel*:

$$z = \frac{x^2 - a^2}{a^2 + x^2} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = x^2 - a^2, \quad v = a^2 + x^2 \quad \text{und} \quad u' = 2x, \quad v' = 2x$$

$$\frac{dz}{dx} = z' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{2x\,(a^2 + x^2) - 2x\,(x^2 - a^2)}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{2a^2x + 2x^3 - 2x^3 + 2a^2x}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{4a^2x}{(a^2 + x^2)^2}$$

Mit der *Kettenregel* folgt dann:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2 + x^2}{x^2 - a^2}} \cdot \frac{4a^2x}{(a^2 + x^2)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + x^2}{(x^2 - a^2)\,(a^2 + x^2)^4}} \cdot 2a^2x =$$

$$= 2a^2x \cdot \sqrt{\frac{1}{(x^2 - a^2)\,(a^2 + x^2)^3}} = 2a^2x \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^2 - a^2)\,(a^2 + x^2)\,(a^2 + x^2)^2}} =$$

$$= \frac{2a^2x}{(a^2 + x^2) \cdot \sqrt{(x^2 - a^2)\,(a^2 + x^2)}} = \frac{2a^2x}{(a^2 + x^2) \cdot \sqrt{x^4 - a^4}}$$

Umformungen: $(a^2 + x^2)^2$ mit $(a^2 + x^2)^4$ unter die Wurzel bringen → durch $a^2 + x^2$ kürzen → aus dem verbliebenen Faktor $(a^2 + x^2)^3$ die Teilwurzel ziehen.

1.5 Logarithmische Ableitung

Die Funktion wird zunächst *logarithmiert*, dann *differenziert*.

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel IV.2.6
Formelsammlung: Kapitel IV.3.6

B33 $y = \left(2 + \frac{1}{x}\right)^{x}, \quad y' = ?$

---

1. Schritt: Beide Seiten *logarithmieren*:

$$\ln y = \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)^{x} = x \cdot \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) \qquad (\textit{Rechenregel:}\ \ln a^{n} = n \cdot \ln a)$$

2. Schritt: Beide Seiten nach x *differenzieren*:

Linke Seite: $z = \ln y$ mit $y = f(x)$

Da y eine von x abhängige Funktion ist, muss nach der *Kettenregel* differenziert werden:

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{y'}{y}$$

Rechte Seite: $z = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)}_{v} = uv$ mit $u = x \quad v = \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$ und $u' = 1, \quad v' = ?$

Diese Funktion wird mit Hilfe der *Produktregel* differenziert. Vorher müssen wir noch die Ableitung v' des *rechten* Faktors bestimmen. Dies geschieht wie folgt nach der *Kettenregel*:

$$v = \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) = \ln\underbrace{(2 + x^{-1})}_{t} = \ln t \quad \text{mit} \quad t = 2 + x^{-1}$$

$$v' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cdot (-x^{-2}) = \frac{-x^{-2}}{t} = -\frac{1}{t \cdot x^{2}} = -\frac{1}{(2 + x^{-1})\,x^{2}} = -\frac{1}{2x^{2} + x}$$

Damit gilt:

$$u = x, \quad v = \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) \quad \text{und} \quad u' = 1, \quad v' = -\frac{1}{2x^{2} + x} = -\frac{1}{x(2x + 1)}$$

Wir erhalten schließlich mit Hilfe der *Produktregel* die folgende Ableitung für die *rechte* Seite der logarithmierten Funktionsgleichung:

$$z' = u'v + v'u = 1 \cdot \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x(2x + 1)} \cdot x = \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x + 1}$$

Somit gilt:

$$\frac{y'}{y} = \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x + 1} \quad \Rightarrow$$

$$y' = \left[\ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x + 1}\right] y = = \left[\ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x + 1}\right] \cdot \left(2 + \frac{1}{x}\right)^{x}$$

B34

$y = x^{\cos x} \quad (x > 0)\,, \quad y' = ?$

Die vorliegende Funktion ist weder eine Potenz- noch eine Exponentialfunktion, da Basis (x) *und* Exponent $(\cos x)$ von der Variablen x abhängen. Wir können daher weder die Potenzregel noch die Ableitungsregel für Exponentialfunktionen anwenden.

1. Schritt: Durch *Logarithmieren* beider Seiten lässt sich der Potenzausdruck der rechten Seite in *Produkt* verwandeln, dass leicht über die *Produktregel* differenziert werden kann:

$$\ln y = \ln x^{\cos x} = \cos x \cdot \ln x \qquad (\textit{Rechenregel:}\ \ln a^n = n \cdot \ln a)$$

2. Schritt: *Beide* Seiten werden nach x differenziert. Beim Differenzieren der *linken* Seite ist zu beachten, dass y eine von x abhängige Funktion ist $(y = f(x))$. Der Term $z = \ln y$ muss daher nach der *Kettenregel* differenziert werden (erst z nach y differenzieren, dann y nach x):

$$z = \ln y \quad \text{mit} \quad y = f(x) \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{y'}{y}$$

Die Ableitung der *rechten* Seite erfolgt mit Hilfe der *Produktregel*:

$$z = \underbrace{\cos x}_{u} \cdot \underbrace{\ln x}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = \cos x\,, \quad v = \ln x \quad \text{und} \quad u' = -\sin x\,, \quad v' = \frac{1}{x}$$

$$z' = u'v + v'u = -\sin x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \cos x = \frac{-x \cdot \sin x \cdot \ln x + \cos x}{x}$$

Damit gilt:

$$\frac{y'}{y} = \frac{-x \cdot \sin x \cdot \ln x + \cos x}{x} \quad \Rightarrow$$

$$y' = \frac{-x \cdot \sin x \cdot \ln x + \cos x}{x} \cdot y = \frac{-x \cdot \sin x \cdot \ln x + \cos x}{x} \cdot x^{\cos x} =$$

$$= (-x \cdot \sin x \cdot \ln x + \cos x) \cdot x^{-1} \cdot x^{\cos x} = (-x \cdot \sin x \cdot \ln x + \cos x) \cdot x^{(\cos x - 1)}$$

B35

$y = \mathrm{e}^{x \cdot \cos x}, \quad y' = ?\,, \quad y'(\pi) = ?$

1. Schritt: Beide Seiten *logarithmieren*:

$$\ln y = \ln \mathrm{e}^{x \cdot \cos x} = (x \cdot \cos x) \cdot \ln \mathrm{e} = x \cdot \cos x \qquad (\textit{Rechenregel:}\ \ln \mathrm{e}^n = n)$$

2. Schritt: Jetzt beide Seiten der logarithmierten Gleichung nach x *differenzieren*:

Linke Seite: Kettenregel anwenden, da y von x abhängt:

$$z = \ln y \quad \text{mit} \quad y = f(x) \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{y'}{y}$$

Rechte Seite: Produktregel anwenden:

$$z = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = x\,, \quad v = \cos x \quad \text{und} \quad u' = 1\,, \quad v' = -\sin x$$

$$z' = u'v + v'u = 1 \cdot \cos x + (-\sin x) \cdot x = \cos x - x \cdot \sin x$$

Somit ist:

$$\frac{y'}{y} = \cos x - x \cdot \sin x \quad \Rightarrow \quad y' = (\cos x - x \cdot \sin x) \cdot y = (\cos x - x \cdot \sin x) \cdot \mathrm{e}^{x \cdot \cos x}$$

$$y'(\pi) = (\cos \pi - \pi \cdot \sin \pi) \cdot \mathrm{e}^{\pi \cdot \cos \pi} = (-1 - \pi \cdot 0) \cdot \mathrm{e}^{\pi \cdot (-1)} = -\mathrm{e}^{-\pi}$$

Anmerkung: Diese Aufgabe lässt sich auch mit Hilfe der Ketten- und Produktregel lösen (siehe Aufgabe B 25).

B36

$$y^2 - (\sin x)^{\ln x} = 0 \quad (x > 0), \quad y' = ?$$

Zunächst stellen wir die Gleichung wie folgt um: $y^2 = (\sin x)^{\ln x}$

1. Schritt: Beide Seiten werden *logarithmiert*:

$$\ln y^2 = \ln (\sin x)^{\ln x} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \ln y = \ln x \cdot \ln (\sin x) \qquad (\textit{Rechenregel: } \ln a^n = n \cdot \ln a)$$

2. Schritt: Jetzt werden beide Seiten der logarithmierten Gleichung nach x *differenziert*:

Linke Seite: Kettenregel anwenden, denn y ist eine von x abhängige Funktion:

$$z = 2 \cdot \ln y \quad \text{mit} \quad y = f(x) \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2}{y} \cdot y'$$

Rechte Seite: Produktregel anwenden:

$$z = \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{\ln (\sin x)}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = \ln x, \quad v = \ln (\sin x) \quad \text{und} \quad u' = \frac{1}{x}, \quad v' = ?$$

Die noch unbekannte Ableitung v' des *rechten* Faktors erhalten wir mit der *Kettenregel*:

$$v = \ln \underbrace{(\sin x)}_{t} = \ln t \quad \text{mit} \quad t = \sin x \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

Die *Produktregel* liefert dann mit

$$u = \ln x, \quad v = \ln (\sin x) \quad \text{und} \quad u' = \frac{1}{x}, \quad v' = \cot x$$

die gesuchte Ableitung der *rechten* Seite:

$$y' = u'v + v'u = \frac{1}{x} \cdot \ln (\sin x) + \cot x \cdot \ln x = \frac{\ln (\sin x) + x \cdot \cot x \cdot \ln x}{x}$$

Somit erhalten wir für y' den folgenden Ausdruck:

$$\frac{2y'}{y} = \frac{\ln (\sin x) + x \cdot \cot x \cdot \ln x}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\ln (\sin x) + x \cdot \cot x \cdot \ln x}{2x} \cdot y$$

y' hängt noch von x *und* y ab. Durch Auflösen der vorgegebenen Funktionsgleichung nach y folgt:

$$y = \pm \sqrt{(\sin x)^{\ln x}}$$

Diesen Ausdruck setzen wir in die Ableitungsformel ein und erhalten y' in Abhängigkeit von x:

$$y' = \pm \frac{\ln (\sin x) + x \cdot \cot x \cdot \ln x}{2x} \cdot \sqrt{(\sin x)^{\ln x}}$$

1.6 Implizite Differentiation

Die in der *impliziten* Form $F(x; y) = 0$ vorliegende Funktion wird *gliedweise* mit Hilfe der bekannten Ableitungsregeln nach der Variablen x differenziert. Dabei ist zu beachten, dass y eine Funktion von x ist. Terme mit der Variablen y müssen daher nach der *Kettenregel* differenziert werden. Die (differenzierte) Gleichung wird anschließend nach y' aufgelöst. Die Ableitung hängt dabei von x *und* y ab.

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel IV.2.9

Formelsammlung: Kapitel IV.3.8

B37 $x^3 + y^3 - 3xy = 0\,, \quad y' = ?$

Es wird *gliedweise* nach x differenziert.

1. Summand: $z_1 = x^3 \quad \Rightarrow \quad z_1' = 3x^2$

2. Summand: $z_2 = y^3$ mit $y = f(x)$

$z_2 = y^3$ ist die *äußere*, $y = f(x)$ die *innere* Funktion. Die *Kettenregel* liefert dann (erst y^3 nach y, dann y nach x differenzieren):

$$z_2' = 3y^2 \cdot y'$$

3. Summand: $z_3 = -3xy = -3(\underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{y}_{v}) = -3(uv)$ mit $u = x, \quad v = y$ und $u' = 1, \quad v' = 1 \cdot y' = y'$

Mit der *Produktregel* erhalten wir (der rechte Faktor $v = y$ wurde nach der *Kettenregel* differenziert):

$$z_3' = -3(u'v + v'u) = -3(1 \cdot y + y' \cdot x) = -3(y + xy')$$

Die *gliedweise* Differentiation der impliziten Funktion führt damit zu dem folgenden Ergebnis:

$$z_1' + z_2' + z_3' = 3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3(y + xy') = 0 \quad |:3 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 \cdot y' - (y + xy') = x^2 + y^2 \cdot y' - y - xy' = (y^2 - x)\,y' + x^2 - y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(y^2 - x)\,y' = y - x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x} = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$$

B38 $(x + 2)\,x^2 + (x - 2)\,y^2 = 0\,, \quad y' = ?\,, \quad y'(x = 1;\, y = \sqrt{3}\,) = ?$

Wir bringen die Funktion zunächst auf eine für das implizite Differenzieren *günstigere* Form:

$$\underbrace{x^3 + 2x^2}_{z_1} + \underbrace{(x - 2)\,y^2}_{z_2} = z_1 + z_2 = 0$$

Es wird *gliedweise* nach x differenziert, der zweite Summand z_2 dabei nach der *Produktregel* (in Verbindung mit der *Kettenregel*).

1. Summand: $z_1 = x^3 + 2x^2 \quad \Rightarrow \quad z_1' = 3x^2 + 4x$

2. Summand: $z_2 = \underbrace{(x-2)}_{u}\,\underbrace{y^2}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = x - 2, \quad v = y^2 \quad \text{und} \quad u' = 1, \quad v' = 2y \cdot y'$

Die Ableitung des rechten Faktors $v = y^2$ erfolgte nach der *Kettenregel*, da y von x abhängt (erst y^2 nach y differenzieren, dann y nach x). Somit gilt:

$$z_2' = u'v + v'u = 1 \cdot y^2 + 2y \cdot y'(x-2) = y^2 + 2(x-2) \cdot y \cdot y'$$

Die gliedweise Differentiation der vorgegebenen impliziten Funktion führt schließlich zu dem folgenden Ergebnis (wir lösen die Gleichung noch nach y' auf):

$$z_1' + z_2' = 3x^3 + 4x + y^2 + 2(x-2)\,y \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2(x-2)\,y \cdot y' = -3x^2 - 4x - y^2 = -(3x^2 + 4x + y^2) \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{3x^2 + 4x + y^2}{2(x-2)\,y}$$

$$y'(x = 1;\, y = \sqrt{3}) = -\frac{3 + 4 + 3}{2(1-2)\sqrt{3}} = -\frac{10}{-2\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{3}\sqrt{3}$$

B39

$$(y - x)^3 + \sin^2 y = 0, \quad y' = ?$$

Die Funktionsgleichung wird *gliedweise* nach x differenziert, beide Summanden dabei jeweils nach der *Kettenregel*:

1. Summand: $z_1 = \underbrace{(y-x)}_{u}{}^3 = u^3 \quad \text{mit} \quad u = y - x \quad \text{und} \quad y = f(x)$

$$z_1' = 3u^2 \cdot u' = 3u^2(1 \cdot y' - 1) = 3(y-x)^2(y'-1)$$

Bei der Ableitung der *inneren* Funktion $u = y - x$ musste der Summand y nach der *Kettenregel* differenziert werden (erst y nach y, dann y nach x differenzieren).

2. Summand: $z_2 = \sin^2 y = (\underbrace{\sin y}_{u})^2 = u^2 \quad \text{mit} \quad u = \sin y \quad \text{und} \quad y = f(x)$

Die *Kettenregel* (für zwei Substitutionen) führt zu:

$$z_2' = \frac{dz_2}{dx} = \frac{dz_2}{du} \cdot \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 2u \cdot (\cos y) \cdot y' = \underbrace{2 \cdot \sin y \cdot \cos y}_{\sin(2y)} \cdot y' = \sin(2y) \cdot y'$$

(unter Verwendung der trigonometrischen Beziehung $\sin(2y) = 2 \cdot \sin y \cdot \cos y$). Damit erhalten wir:

$$z_1' + z_2' = 3(y-x)^2(y'-1) + \sin(2y) \cdot y' = 3(y-x)^2 y' - 3(y-x)^2 + \sin(2y) \cdot y' = 0$$

$$[3(y-x)^2 + \sin(2y)] \cdot y' = 3(y-x)^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{3(y-x)^2}{3(y-x)^2 + \sin(2y)}$$

B40 Bestimmen Sie die *Tangentensteigung* der Kardioide $y^2 + 2x(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2 = 0$.
Wie groß ist die Steigung im Kurvenpunkt $P = (0;\, -1)$?

Es wird *gliedweise* nach der Variablen x differenziert.

1. Summand: $z_1 = y^2$ mit $y = f(x)$

Differenziert wird nach der *Kettenregel*, da y von x abhängt (zuerst y^2 nach y differenzieren, dann y nach x):

$$z_1' = \frac{dz_1}{dx} = \frac{dz_1}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 2y \cdot y'$$

2. Summand: $z_2 = 2\underbrace{x}_{u}\underbrace{(x^2 + y^2)}_{v} = 2(uv)$ mit $u = x,\quad v = x^2 + y^2$ und $u' = 1,\quad v' = 2x + 2y \cdot y'$

Differenziert wird nach der *Produktregel*, wobei der Summand y^2 im rechten Faktor v nach der *Kettenregel* zu differenzieren ist:

$$z_2' = 2(u'v + v'u) = 2[1(x^2 + y^2) + (2x + 2y \cdot y')x] = 2(x^2 + y^2 + 2x^2 + 2xy \cdot y') =$$
$$= 2(3x^2 + y^2 + 2xy \cdot y')$$

3. Summand: $z_3 = -\underbrace{(x^2 + y^2)}_{u}{}^2 = -u^2$ mit $u = x^2 + y^2$

Die *Kettenregel* liefert dann:

$$z_3' = \frac{dz_3}{dx} = \frac{dz_3}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -2u \cdot u' = -2u(2x + 2y \cdot y') = -2(x^2 + y^2) \cdot 2(x + y \cdot y') =$$
$$= -4(x^2 + y^2)(x + y \cdot y')$$

Bei der Ableitung der *inneren* Funktion $u = x^2 + y^2$ wurde dabei berücksichtigt, dass der Summand y^2 nach der *Kettenregel* zu differenzieren ist (y hängt ja von x ab).

Damit erhalten wir folgendes Ergebnis:

$$z_1' + z_2' + z_3' = 2y \cdot y' + 2(3x^2 + y^2 + 2xy \cdot y') - 4(x^2 + y^2)(x + y \cdot y') = 0 \quad |:2$$

$$y \cdot y' + 3x^2 + y^2 + 2xy \cdot y' - 2(x^2 + y^2)(x + y \cdot y') =$$
$$= y \cdot y' + 3x^2 + y^2 + 2xy \cdot y' - 2(x^2 + y^2)x - 2(x^2 + y^2)y \cdot y' =$$
$$= [y + 2xy - 2(x^2 + y^2)y]y' + 3x^2 + y^2 - 2(x^2 + y^2)x = 0$$

Wir lösen diese Gleichung noch nach y' auf und erhalten:

$$y' = \frac{2(x^2 + y^2)x - 3x^2 - y^2}{y + 2xy - 2(x^2 + y^2)y} = \frac{2x(x^2 + y^2) - 3x^2 - y^2}{y[1 + 2x - 2(x^2 + y^2)]}$$

Steigung der Kurventangente im Punkt $P = (0;\, -1)$:

$$y'(x = 0;\, y = -1) = \frac{0(0 + 1) - 0 - 1}{-1[1 + 0 - 2(0 + 1)]} = \frac{-1}{-1 \cdot (-1)} = -1$$

1.7 Differenzieren in der Parameterform

Die Funktion bzw. Kurve liegt in der Parameterform $x = x(t)$, $y = y(t)$ vor (t: Parameter). Die ersten beiden Ableitungen werden wie folgt gebildet:

$$\boxed{y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\,, \quad y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}}$$

Die Striche kennzeichnen die Ableitungen nach der Variablen x, die Punkte die Ableitungen nach dem Parameter t.

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel IV.2.12

Formelsammlung: Kapitel IV.3.9

B41

Bestimmen Sie den Anstieg der Kurve mit der Parameterdarstellung $x = 4 \cdot \cos^3 t + 3 \cdot \cos t$, $y = 2 \cdot \sin(2t) + 3 \cdot \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$ für den Parameterwert $t = \pi/2$.

Beide Gleichungen werden *gliedweise* und mit Hilfe der *Kettenregel* wie folgt nach dem Parameter t differenziert:

$$x = 4 \cdot \cos^3 t + 3 \cdot \cos t = 4\,(\underbrace{\cos t}_{u})^3 + 3 \cdot \cos t = 4u^3 + 3 \cdot \cos t \quad \text{mit} \quad u = \cos t$$

$$\dot{x} = 12u^2 \cdot (-\sin t) - 3 \cdot \sin t = -12 \cdot \cos^2 t \cdot \sin t - 3 \cdot \sin t = -3 \cdot \sin t\,(4 \cdot \cos^2 t + 1)$$

$$y = 2 \cdot \sin\,\underbrace{(2t)}_{v} + 3 \cdot \sin t = 2 \cdot \sin v + 3 \cdot \sin t \quad \text{mit} \quad v = 2t$$

$$\dot{y} = 2 \cdot \cos v \cdot 2 + 3 \cdot \cos t = 4 \cdot \cos(2t) + 3 \cdot \cos t$$

Der Kurvenanstieg in Abhängigkeit vom Kurvenparameter t beträgt dann:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{4 \cdot \cos(2t) + 3 \cdot \cos t}{-3 \cdot \sin t\,(4 \cdot \cos^2 t + 1)}$$

Somit gilt an der Stelle $t = \pi/2$:

$$y'(t = \pi/2) = \frac{4 \cdot \cos\pi + 3 \cdot \cos(\pi/2)}{-3 \cdot \sin(\pi/2)\,(4 \cdot \cos^2(\pi/2) + 1)} = \frac{4 \cdot (-1) + 3 \cdot 0}{-3 \cdot 1\,(4 \cdot 0^2 + 1)} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

B42

$x = \dfrac{t^2 - 1}{t}$, $y = \ln t$, $t > 0$; $y'(t) = ?$, $y''(t) = ?$, $y'(2) = ?$, $y''(2) = ?$

Wir bilden zunächst die benötigten Ableitungen $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dot{y}$ und $\ddot{y}$:

$$x = \frac{t^2 - 1}{t} = t - \frac{1}{t} = t - t^{-1} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = 1 + t^{-2}\,, \quad \ddot{x} = -2t^{-3}$$

$$y = \ln t \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = \frac{1}{t} = t^{-1}, \quad \ddot{y} = -t^{-2}$$

Damit erhalten wir für y' und y'', jeweils in Abhängigkeit vom Parameter t:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{t^{-1}}{1 + t^{-2}} = \frac{t^{-1} \cdot t^{2}}{(1 + t^{-2})\, t^{2}} = \frac{t}{t^{2} + 1} \qquad \text{(der Bruch wurde mit } t^{2} \text{ erweitert)}$$

$$y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^{3}} = \frac{(1 + t^{-2})(-t^{-2}) - t^{-1}(-2t^{-3})}{(1 + t^{-2})^{3}} = \frac{-t^{-2} - t^{-4} + 2t^{-4}}{\left(1 + \dfrac{1}{t^{2}}\right)^{3}} = \frac{t^{-4} - t^{-2}}{\left(\dfrac{t^{2} + 1}{t^{2}}\right)^{3}} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{t^{4}} - \dfrac{1}{t^{2}}}{\dfrac{(t^{2} + 1)^{3}}{t^{6}}} = \frac{\dfrac{1 - t^{2}}{t^{4}}}{\dfrac{(t^{2} + 1)^{3}}{t^{6}}} = \frac{1 - t^{2}}{t^{4}} \cdot \frac{t^{4} \cdot t^{2}}{(t^{2} + 1)^{3}} = \frac{(1 - t^{2}) \cdot t^{2}}{(t^{2} + 1)^{3}}$$

$$y'(2) = \frac{2}{2^{2} + 1} = \frac{2}{5}\,; \quad y''(2) = \frac{(1 - 2^{2}) \cdot 2^{2}}{(2^{2} + 1)^{3}} = \frac{-12}{125} = -\frac{12}{125}$$

Umformungen: Die Brüche im Zähler bzw. Nenner werden auf den Hauptnenner t^{4} bzw. t^{2} gebracht → der Zählerbruch wird mit dem Kehrwert des Nennerbruches multipliziert, dann den gemeinsamen Faktor t^{4} kürzen.

B43

Gegeben ist die folgende *Parameterform* einer Kurve:

$$x = \sqrt{2 \cdot \sin t + 1}\,, \quad y = 2 \cdot \cos^{2} t\,, \quad 0 \le t \le \pi$$

Bestimmen Sie den *Kurvenanstieg* in Abhängigkeit vom Parameter t. Wie groß ist die Steigung der Kurventangente für den Parameterwert $t = \pi/2$?

Beide Parametergleichungen werden nach der *Kettenregel* differenziert:

$$x = \sqrt{\underbrace{2 \cdot \sin t + 1}_{u}} = \sqrt{u} \quad \text{mit} \quad u = 2 \cdot \sin t + 1$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2 \cdot \cos t = \frac{\cos t}{\sqrt{u}} = \frac{\cos t}{\sqrt{2 \cdot \sin t + 1}}$$

$$y = 2 \cdot \cos^{2} t = 2\,(\underbrace{\cos t}_{u})^{2} = 2u^{2} \quad \text{mit} \quad u = \cos t$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 4u \cdot (-\sin t) = -4u \cdot \sin t = -4 \cdot \cos t \cdot \sin t$$

Kurvenanstieg in Abhängigkeit vom Parameter t:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-4 \cdot \cos t \cdot \sin t}{\dfrac{\cos t}{\sqrt{2 \cdot \sin t + 1}}} = -4 \cdot \cos t \cdot \sin t \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot \sin t + 1}}{\cos t} = -4 \cdot \sin t \cdot \sqrt{2 \cdot \sin t + 1}$$

An der Stelle $t = \pi/2$ gilt:

$$y'(t = \pi/2) = -4 \cdot \sin(\pi/2) \cdot \sqrt{2 \cdot \sin(\pi/2) + 1} = -4 \cdot 1 \cdot \sqrt{2 \cdot 1 + 1} = -4\sqrt{3}$$

B44

Welchen *Anstieg* besitzt die Kurve mit der *Parameterdarstellung*

$$x = \cos t - \sin(2t), \quad y = 2 \cdot \cos^2 t + \sin(3t)$$

in Abhängigkeit vom (reellen) Parameter t?

Bestimmen Sie die Steigung der Kurventangente für den Parameterwert $t = \pi$.

Wie lautet die Gleichung der dortigen *Tangente*?

Beim Differenzieren der beiden Parametergleichungen benötigen wir neben der Summenregel jeweils die *Kettenregel*:

$$x = \cos t - \sin \underbrace{(2t)}_{u} = \cos t - \sin u \quad \text{mit} \quad u = 2t$$

$$\dot{x} = -\sin t - (\cos u) \cdot 2 = -\sin t - 2 \cdot \cos(2t)$$

$$y = 2 \cdot \cos^2 t + \sin(3t) = 2(\underbrace{\cos t}_{v})^2 + \sin \underbrace{(3t)}_{w} = 2v^2 + \sin w \quad \text{mit} \quad v = \cos t \quad \text{und} \quad w = 3t$$

$$\dot{y} = 4v \cdot (-\sin t) + (\cos w) \cdot 3 = -4v \cdot \sin t + 3 \cdot \cos w = -4 \cdot \cos t \cdot \sin t + 3 \cdot \cos(3t) =$$

$$= -2\underbrace{[2 \cdot \cos t \cdot \sin t]}_{\sin(2t)} + 3 \cdot \cos(3t) = -2 \cdot \sin(2t) + 3 \cdot \cos(3t)$$

(unter Verwendung der trigonometrischen Beziehung $\sin(2t) = 2 \cdot \sin t \cdot \cos t$)

Der Anstieg der Kurve hängt damit wie folgt vom Kurvenparameter t ab:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-2 \cdot \sin(2t) + 3 \cdot \cos(3t)}{-\sin t - 2 \cdot \cos(2t)} = \frac{2 \cdot \sin(2t) - 3 \cdot \cos(3t)}{\sin t + 2 \cdot \cos(2t)}$$

Somit gilt an der Stelle $t = \pi$:

$$y'(t = \pi) = \frac{2 \cdot \sin(2\pi) - 3 \cdot \cos(3\pi)}{\sin \pi + 2 \cdot \cos(2\pi)} = \frac{2 \cdot 0 - 3 \cdot (-1)}{0 + 2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

Tangentenberührungspunkt $P = (x_0;\ y_0)$:

$$x_0 = x(t = \pi) = \cos \pi - \sin(2\pi) = -1 - 0 = -1$$

$$y_0 = y(t = \pi) = 2 \cdot \cos^2 \pi + \sin(3\pi) = 2 \cdot (-1)^2 + 0 = 2$$

Somit: $P = (-1;\ 2)$

Tangentensteigung: $m = y'(t = \pi) = \frac{3}{2}$

Tangentengleichung:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \quad \Rightarrow \quad \frac{y - 2}{x + 1} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad y - 2 = \frac{3}{2}(x + 1) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

1.8 Differenzieren in Polarkoordinaten

Sie müssen die in *Polarkoordinaten* r, φ dargestellte Kurve mit der Gleichung $r = r(\varphi)$ zunächst in die *Parameterform* bringen:

$$\boxed{x(\varphi) = r(\varphi) \cdot \cos \varphi\,, \quad y(\varphi) = r(\varphi) \cdot \sin \varphi \quad \text{(Parameter: Winkel } \varphi)}$$

Die Ableitungen erhalten Sie wie in Abschnitt 1.7 beschrieben, sie sind Funktionen des Winkelparameters φ.

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel IV.2.13

Formelsammlung: Kapitel IV.3.10

B45

Bestimmen Sie den *Anstieg* der Kurve

$$r = 1 + \mathrm{e}^{\varphi}, \quad \varphi \ge 0$$

in Abhängigkeit vom Winkel φ.

Welche *Steigung* m besitzt die Kurventangente für $\varphi = \pi$?

Die Kurve wird zunächst in die *Parameterform* gebracht:

$$x = r \cdot \cos \varphi = (1 + \mathrm{e}^{\varphi}) \cdot \cos \varphi\,, \quad y = r \cdot \sin \varphi = (1 + \mathrm{e}^{\varphi}) \cdot \sin \varphi$$

Die benötigten Ableitungen $\dot{x}$ und $\dot{y}$ nach dem Winkelparameter φ erhalten wir mit der *Produktregel*:

$$x = \underbrace{(1 + \mathrm{e}^{\varphi})}_{u} \cdot \underbrace{\cos \varphi}_{v} = u\,v \quad \text{mit} \quad u = 1 + \mathrm{e}^{\varphi}\,, \quad v = \cos \varphi \quad \text{und} \quad \dot{u} = \mathrm{e}^{\varphi}\,, \quad \dot{v} = -\sin \varphi$$

$$\dot{x} = \dot{u}\,v + \dot{v}\,u = \mathrm{e}^{\varphi} \cdot \cos \varphi - \sin \varphi \cdot (1 + \mathrm{e}^{\varphi}) = \mathrm{e}^{\varphi} \cdot \cos \varphi - (1 + \mathrm{e}^{\varphi}) \cdot \sin \varphi$$

$$y = \underbrace{(1 + \mathrm{e}^{\varphi})}_{u} \cdot \underbrace{\sin \varphi}_{v} = u\,v \quad \text{mit} \quad u = 1 + \mathrm{e}^{\varphi}\,, \quad v = \sin \varphi \quad \text{und} \quad \dot{u} = \mathrm{e}^{\varphi}\,, \quad \dot{v} = \cos \varphi$$

$$\dot{y} = \dot{u}\,v + \dot{v}\,u = \mathrm{e}^{\varphi} \cdot \sin \varphi + \cos \varphi \cdot (1 + \mathrm{e}^{\varphi}) = \mathrm{e}^{\varphi} \cdot \sin \varphi + (1 + \mathrm{e}^{\varphi}) \cdot \cos \varphi$$

Steigung der Kurventangente in Abhängigkeit vom Winkel φ:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\mathrm{e}^{\varphi} \cdot \sin \varphi + (1 + \mathrm{e}^{\varphi}) \cdot \cos \varphi}{\mathrm{e}^{\varphi} \cdot \cos \varphi - (1 + \mathrm{e}^{\varphi}) \cdot \sin \varphi}$$

Dividiert man die Summanden in Zähler und Nenner jeweils durch $\cos \varphi$ und beachtet dabei die trigonometrische Beziehung $\tan \varphi = \dfrac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$, so lässt sich die Steigungsformel auch wie folgt schreiben:

$$y' = \frac{\mathrm{e}^{\varphi} \cdot \sin \varphi + (1 + \mathrm{e}^{\varphi}) \cdot \cos \varphi}{\mathrm{e}^{\varphi} \cdot \cos \varphi - (1 + \mathrm{e}^{\varphi}) \cdot \sin \varphi} = \frac{\mathrm{e}^{\varphi} \cdot \tan \varphi + 1 + \mathrm{e}^{\varphi}}{\mathrm{e}^{\varphi} - (1 + \mathrm{e}^{\varphi}) \cdot \tan \varphi}$$

Steigung der Tangente für $\varphi = \pi$:

$$m = y'(t = \pi) = \frac{\mathrm{e}^{\pi} \cdot \tan \pi + 1 + \mathrm{e}^{\pi}}{\mathrm{e}^{\pi} - (1 + \mathrm{e}^{\pi}) \cdot \tan \pi} = \frac{\mathrm{e}^{\pi} \cdot 0 + 1 + \mathrm{e}^{\pi}}{\mathrm{e}^{\pi} - (1 + \mathrm{e}^{\pi}) \cdot 0} = \frac{1 + \mathrm{e}^{\pi}}{\mathrm{e}^{\pi}} = 1{,}0432$$

B46 $r = \dfrac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}\,, \quad -\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ („Zissoide“)

Bestimmen Sie die *Tangentensteigung* dieser Kurve in Abhängigkeit vom Winkel φ.

Wir stellen die Kurve zunächst in der *Parameterform* dar (mit dem Winkel φ als Kurvenparameter):

$$x = r \cdot \cos \varphi = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \cdot \cos \varphi = \sin^2 \varphi\,, \quad y = r \cdot \sin \varphi = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \cdot \sin \varphi = \frac{\sin^3 \varphi}{\cos \varphi}$$

Die benötigten Ableitungen $\dot{x}$ und $\dot{y}$ erhalten wir wie folgt:

$$x = \sin^2 \varphi = \underbrace{(\sin \varphi)}_{u}{}^2 = u^2 \quad \text{mit} \quad u = \sin \varphi$$

Die *Kettenregel* liefert dann (nach erfolgter Rücksubstitution):

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\varphi} = \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{d\varphi} = 2u \cdot \cos \varphi = 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

Die zweite Parametergleichung wird mit Hilfe der *Quotientenregel* differenziert:

$$y = \frac{\sin^3 \varphi}{\cos \varphi} = \frac{(\sin \varphi)^3}{\cos \varphi} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = (\sin \varphi)^3\,, \quad v = \cos \varphi \quad \text{und} \quad \dot{u} = ?\,, \quad \dot{v} = -\sin \varphi$$

Die noch unbekannte Ableitung von $u = (\sin \varphi)^3$ erhalten wir mit der *Kettenregel*:

$$u = \underbrace{(\sin \varphi)}_{t}{}^3 = t^3 \quad \text{mit} \quad t = \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{u} = \frac{du}{d\varphi} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi} = 3t^2 \cdot \cos \varphi = 3 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi$$

Die *Quotientenregel* liefert dann mit

$$u = \sin^3 \varphi\,, \quad v = \cos \varphi \quad \text{und} \quad \dot{u} = 3 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi\,, \quad \dot{v} = -\sin \varphi$$

die gesuchte Ableitung $\dot{y}$:

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}v - \dot{v}u}{v^2} = \frac{3 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi - (-\sin \varphi) \cdot \sin^3 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{3 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi + \sin^4 \varphi}{\cos^2 \varphi} =$$

$$= \frac{\sin^2 \varphi\,(3 \cdot \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}{\cos^2 \varphi} = \frac{\sin^2 \varphi\,(3 \cdot \cos^2 \varphi + 1 - \cos^2 \varphi)}{\cos^2 \varphi} = \frac{\sin^2 \varphi\,(2 \cdot \cos^2 \varphi + 1)}{\cos^2 \varphi}$$

(unter Verwendung von $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$). Die *Steigungsformel* lautet damit:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dfrac{\sin^2 \varphi\,(2 \cdot \cos^2 \varphi + 1)}{\cos^2 \varphi}}{\dfrac{2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{1}} = \frac{\sin^2 \varphi\,(2 \cdot \cos^2 \varphi + 1)}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi} =$$

$$= \frac{\sin \varphi \cdot \sin \varphi\,(2 \cdot \cos^2 \varphi + 1)}{2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos^3 \varphi} = \frac{\sin \varphi\,(2 \cdot \cos^2 \varphi + 1)}{2 \cdot \cos^3 \varphi}$$

Umformungen: Zählerbruch mit dem Kehrwert des Nennerbruches multiplizieren, dann den gemeinsamen Faktor $\sin \varphi$ kürzen.

B47

Welche *Steigung* hat die Tangente an die Kurve mit der Gleichung

$$r = \frac{1}{2 + \varphi}\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

im Schnittpunkt mit der negativen x-Achse? Wie lautet die Gleichung dieser Tangente?

Darstellung der Kurve in der *Parameterform* mit dem Winkelparameter φ:

$$x = r \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2 + \varphi} \cdot \cos\varphi = \frac{\cos\varphi}{2 + \varphi}\,, \quad y = r \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2 + \varphi} \cdot \sin\varphi = \frac{\sin\varphi}{2 + \varphi}$$

Beide Parametergleichungen werden mit Hilfe der *Quotientenregel* nach φ differenziert:

$$x = \frac{\cos\varphi}{2 + \varphi} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = \cos\varphi\,, \quad v = 2 + \varphi \quad \text{und} \quad \dot{u} = -\sin\varphi\,, \quad \dot{v} = 1$$

$$\dot{x} = \frac{\dot{u}\,v - \dot{v}\,u}{v^2} = \frac{-\sin\varphi\,(2 + \varphi) - 1 \cdot \cos\varphi}{(2 + \varphi)^2} = \frac{-(2 + \varphi) \cdot \sin\varphi - \cos\varphi}{(2 + \varphi)^2}$$

$$y = \frac{\sin\varphi}{2 + \varphi} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = \sin\varphi\,, \quad v = 2 + \varphi \quad \text{und} \quad \dot{u} = \cos\varphi\,, \quad \dot{v} = 1$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}\,v - \dot{v}\,u}{v^2} = \frac{\cos\varphi \cdot (2 + \varphi) - 1 \cdot \sin\varphi}{(2 + \varphi)^2} = \frac{(2 + \varphi) \cdot \cos\varphi - \sin\varphi}{(2 + \varphi)^2}$$

Die *Steigung* der Kurventangente berechnet sich damit wie folgt:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dfrac{(2 + \varphi) \cdot \cos\varphi - \sin\varphi}{(2 + \varphi)^2}}{\dfrac{-(2 + \varphi) \cdot \sin\varphi - \cos\varphi}{(2 + \varphi)^2}} = \frac{(2 + \varphi) \cdot \cos\varphi - \sin\varphi}{(2 + \varphi)^2} \cdot \frac{(2 + \varphi)^2}{-(2 + \varphi) \cdot \sin\varphi - \cos\varphi} =$$

$$= \frac{(2 + \varphi) \cdot \cos\varphi - \sin\varphi}{-(2 + \varphi) \cdot \sin\varphi - \cos\varphi} = \frac{\sin\varphi - (2 + \varphi) \cdot \cos\varphi}{(2 + \varphi) \cdot \sin\varphi + \cos\varphi} = \frac{\tan\varphi - (2 + \varphi)}{(2 + \varphi) \cdot \tan\varphi + 1}$$

Umformungen: Zählerbruch mit dem Kehrwert des Nennerbruches multiplizieren → gemeinsamen Faktor $(2 + \varphi)^2$ kürzen → Bruch mit -1 erweitern → alle Summanden in Zähler und Nenner durch $\cos\varphi$ dividieren → trigonometrische Beziehung $\tan\varphi = \sin\varphi / \cos\varphi$ beachten.

Steigung der Kurventangente für den Winkel $\varphi = \pi$ (Schnittstelle mit der negativen x-Achse):

$$y'(\varphi = \pi) = \frac{\tan\pi - 2 - \pi}{(2 + \pi) \cdot \tan\pi + 1} = \frac{0 - 2 - \pi}{(2 + \pi) \cdot 0 + 1} = \frac{-2 - \pi}{1} = -2 - \pi = -5{,}1416$$

Tangentenberührungspunkt $P = (x_0;\ y_0)$:

$$\varphi = \pi \quad \Rightarrow \quad r(\varphi = \pi) = \frac{1}{2 + \pi} = 0{,}1945$$

$$x_0 = -r(\varphi = \pi) = -0{,}1945\,; \quad y_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad P = (-0{,}1945;\ 0)$$

Tangentengleichung $(m = y'(\varphi = \pi) = -5{,}1416)$:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \quad \Rightarrow \quad \frac{y - 0}{x + 0{,}1945} = -5{,}1416 \quad \Rightarrow \quad y = -5{,}1416\,(x + 0{,}1945) = -5{,}1416\,x - 1$$

2 Anwendungen

In diesem Abschnitt finden Sie anwendungsorientierte Aufgaben zu folgenden Themen:

- Einfache Anwendungen in Physik und Technik
- Tangente und Normale
- Linearisierung einer Funktion
- Krümmung einer ebenen Kurve
- Relative Extremwerte, Wende- und Sattelpunkte
- Kurvendiskussion
- Extremwertaufgaben
- Tangentenverfahren von Newton
- Grenzwertberechnung nach Bernoulli und de L'Hospital

2.1 Einfache Anwendungen in Physik und Technik

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel IV.2.14.1
Formelsammlung: Kapitel IV.4.1

B48

Die Ladung q eines Kondensators genügte dem Zeitgesetz $q(t) = q_0 \cdot \mathrm{e}^{\sin t}$ mit $t \geq 0$.
Bestimmen Sie den *Ladestrom* $i = i(t)$ $(q_0$: Ladung zu Beginn, d. h. zur Zeit $t = 0)$.

Die Stromstärke i ist die *zeitliche Ableitung* der Ladung q. Differenziert wird nach der *Kettenregel*:

$$q = q_0 \cdot \mathrm{e}^{\sin t} = q_0 \cdot \mathrm{e}^{u} \quad \text{mit} \quad u = \sin t$$

$$i = \dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du} \cdot \frac{du}{dt} = q_0 \cdot \mathrm{e}^{u} \cdot \cos t = q_0 \cdot \mathrm{e}^{\sin t} \cdot \cos t$$

B49

Beim freien Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes gilt das Weg-Zeit-Gesetz

$$s = s(t) = \frac{v_e^2}{g} \cdot \ln\left[\cosh\left(\frac{g}{v_e}\,t\right)\right], \quad t \geq 0 \quad \text{mit} \quad v_e = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

(g: Erdbeschleunigung; m: Masse; k: Reibungskoeffizient).
Bestimmen Sie *Geschwindigkeit* v und *Beschleunigung* a als Funktionen der Zeit.
Welcher *Kraft* unterliegt der frei fallende Körper?

Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz $v = \dot{s}$

Die Geschwindigkeit v ist die *1. Ableitung* des Weges s nach der Zeit t. Mit Hilfe der *Kettenregel* erhalten wir (es sind *zwei* Substitutionen durchzuführen):

$$s = \frac{v_e^2}{g} \cdot \ln\left[\cosh\underbrace{\left(\frac{g}{v_e}\,t\right)}_{u}\right] = \frac{v_e^2}{g} \cdot \ln\,[\underbrace{\cosh u}_{w}] = \frac{v_e^2}{g} \cdot \ln w \quad \text{mit} \quad w = \cosh u \quad \text{und} \quad u = \frac{g}{v_e}\,t$$

$$v = \dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dw} \cdot \frac{dw}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{v_e^2}{g} \cdot \frac{1}{w} \cdot (\sinh u) \cdot \frac{g}{v_e} = v_e \cdot \frac{\sinh u}{w} = v_e \cdot \frac{\sinh u}{\cosh u} =$$

$$= v_e \cdot \tanh u = v_e \cdot \tanh\left(\frac{g}{v_e}\, t\right)$$

(Zur Erinnerung: $\tanh u = \sinh u / \cosh u$). Wegen

$$\lim_{t \to \infty} v(t) = \lim_{t \to \infty} v_e \cdot \tanh\left(\frac{g}{v_e}\, t\right) = v_e \cdot \lim_{t \to \infty} \tanh\left(\frac{g}{v_e}\, t\right) = v_e \cdot 1 = v_e$$

ist v_e die *Endgeschwindigkeit* (die theoretisch erst nach unendlich langer Fallzeit erreicht wird).
Bild B-1 zeigt das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm.

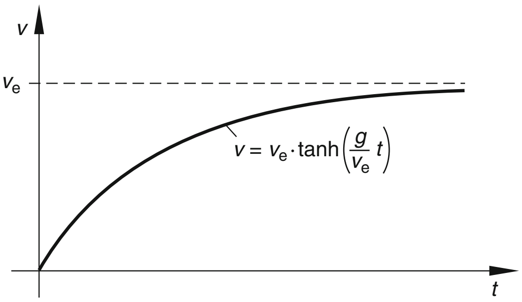


Bild B-1

Beschleunigung-Zeit-Gesetz $a = \dot{v} = \ddot{s}$

Die Beschleunigung a ist die *1. Ableitung* der Geschwindigkeit v nach der Zeit t. Die *Kettenregel* liefert:

$$v = v_e \cdot \tanh\underbrace{\left(\frac{g}{v_e}\, t\right)}_{u} = v_e \cdot \tanh u \quad \text{mit} \quad u = \frac{g}{v_e}\, t$$

$$a = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dt} = v_e \cdot (1 - \tanh^2 u) \cdot \frac{g}{v_e} = g\,(1 - \tanh^2 u) = g\left(1 - \tanh^2\left(\frac{g}{v_e}\, t\right)\right)$$

Diese Gleichung lässt sich noch aussagekräftiger gestalten, wenn man die aus dem *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz* folgende Beziehung

$$\tanh\left(\frac{g}{v_e}\, t\right) = \frac{v}{v_e} \quad \text{mit} \quad v_e = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

beachtet:

$$a = g\left(1 - \frac{v^2}{v_e^2}\right) = g - \frac{g v^2}{v_e^2} = g - \frac{g v^2}{\frac{mg}{k}} = g - \frac{k v^2}{m}$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit der Masse m erhält man die beschleunigende *Kraft* F:

$$F = ma = m\left(g - \frac{k v^2}{m}\right) = mg - k v^2$$

Physikalische Bedeutung der beiden Summanden:

mg: Gewichtskraft (Gravitationskraft)
$k v^2$: Luftwiderstand (proportional dem Geschwindigkeitsquadrat)

B50

Die Gleichung

$$x = (4t - 2) \cdot e^{-0{,}5t}, \quad t \geq 0$$

beschreibe die aperiodische Schwingung eines Feder-Masse-Schwingers (x: Auslenkung; t: Zeit). Bestimmen Sie die *Geschwindigkeit* v und die *Beschleunigung* a in Abhängigkeit von der Zeit. Nach welcher Zeit ist die Auslenkung x am *größten*?

Geschwindigkeit $v = \dot{x}$

Mit Hilfe der *Produkt-* und *Kettenregel* erhalten wir:

$$x = \underbrace{(4t - 2)}_{u} \cdot \underbrace{e^{-0{,}5t}}_{w} = uw \quad \text{mit} \quad u = 4t - 2, \quad w = e^{-0{,}5t} \quad \text{und} \quad \dot{u} = 4, \quad \dot{w} = -0{,}5 \cdot e^{-0{,}5t}$$

(w wurde dabei nach der *Kettenregel* differenziert, Substitution: $z = -0{,}5\,t$)

$$v = \dot{x} = \dot{u}w + \dot{w}u = 4 \cdot e^{-0{,}5t} - 0{,}5 \cdot e^{-0{,}5t}(4t - 2) = [4 - 0{,}5(4t - 2)] \cdot e^{-0{,}5t} =$$

$$= (4 - 2t + 1) \cdot e^{-0{,}5t} = (5 - 2t) \cdot e^{-0{,}5t}$$

Beschleunigung $a = \dot{v} = \ddot{x}$

Wir differenzieren das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz $v = v(t)$ nach der Zeit t unter Verwendung von *Produkt-* und *Kettenregel*:

$$v = \underbrace{(5 - 2t)}_{u} \cdot \underbrace{e^{-0{,}5t}}_{w} = uw \quad \text{mit} \quad u = 5 - 2t, \quad w = e^{-0{,}5t} \quad \text{und} \quad \dot{u} = -2, \quad \dot{w} = -0{,}5 \cdot e^{-0{,}5t}$$

$$a = \dot{v} = \dot{u}w + \dot{w}u = -2 \cdot e^{-0{,}5t} - 0{,}5 \cdot e^{-0{,}5t} \cdot (5 - 2t) = [-2 - 0{,}5(5 - 2t)] \cdot e^{-0{,}5t} =$$

$$= (-2 - 2{,}5 + t) \cdot e^{-0{,}5t} = (t - 4{,}5) \cdot e^{-0{,}5t}$$

Maximale Auslenkung: $\dot{x} = v = 0, \; \ddot{x} = \dot{v} = a < 0$

$$\dot{x} = v = 0 \quad \Rightarrow \quad (5 - 2t) \cdot \underbrace{e^{-0{,}5t}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad 5 - 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 2{,}5$$

$$\ddot{x}(t_1 = 2{,}5) = a(t_1 = 2{,}5) = -2 \cdot e^{-1{,}25} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum}$$

$$x_{\text{max}} = x(t_1 = 2{,}5) = 8 \cdot e^{-1{,}25} = 2{,}2920$$

Das Weg-Zeit-Gesetz ist in Bild B-2 bildlich dargestellt.

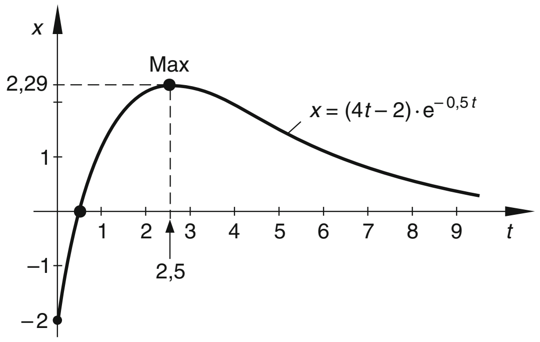


Bild B-2

B51

Das Weg-Zeit-Gesetz einer erzwungenen Schwingung laute wie folgt:

$$s = s(t) = \mathrm{e}^{-t} \cdot \cos(5t) + \sin(2t + \pi), \quad t \geq 0$$

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v sowie die *Beschleunigung* a zu Beginn der Bewegung $(t = 0)$.

Wegen $v = \dot{s}$ und $a = \ddot{s}$ müssen wir das Weg-Zeit-Gesetz *zweimal* nacheinander nach t differenzieren.

1. Ableitung $v = \dot{s}$ (Geschwindigkeit)

Wir differenzieren das Weg-Zeit-Gesetz gliedweise mit Hilfe von *Produkt-* und *Kettenregel*:

$$s = \underbrace{\mathrm{e}^{-t}}_{x} \cdot \underbrace{\cos(5t)}_{y} + \underbrace{\sin(2t + \pi)}_{z} = xy + z$$

Der 1. Summand xy wird dabei nach der *Produktregel* differenziert, die dabei benötigten Ableitungen $\dot{x}$ und $\dot{y}$ der beiden Faktoren erhält man jeweils nach der *Kettenregel* (Substitutionen: $u = -t$ bzw. $u = 5t$). Die Ableitung des 2. Summanden z erfolgt mit der *Kettenregel* (Substitution: $u = 2t + \pi$). Somit gilt:

$$x = \mathrm{e}^{-t}, \quad y = \cos(5t), \quad \dot{x} = -\mathrm{e}^{-t}, \quad \dot{y} = -5 \cdot \sin(5t), \quad z = \sin(2t + \pi), \quad \dot{z} = 2 \cdot \cos(2t + \pi)$$

$$\dot{s} = \dot{x}y + \dot{y}x + \dot{z} = -\mathrm{e}^{-t} \cdot \cos(5t) - 5 \cdot \sin(5t) \cdot \mathrm{e}^{-t} + 2 \cdot \cos(2t + \pi) =$$

$$= [-\cos(5t) - 5 \cdot \sin(5t)] \cdot \mathrm{e}^{-t} + 2 \cdot \cos(2t + \pi)$$

Damit erhalten wir das folgende **Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz:**

$$v = \dot{s} = [-\cos(5t) - 5 \cdot \sin(5t)] \cdot \mathrm{e}^{-t} + 2 \cdot \cos(2t + \pi)$$

Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$v(t = 0) = \dot{s}(t = 0) = [-\cos 0 - 5 \cdot \sin 0] \cdot \mathrm{e}^{0} + 2 \cdot \cos \pi = (-1 - 5 \cdot 0) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = -3$$

2. Ableitung $a = \ddot{s}$ (Beschleunigung)

Wir benötigen (analog wie bei der Bildung der 1. Ableitung) *Produkt-* und *Kettenregel*:

$$\dot{s} = \underbrace{[-\cos(5t) - 5 \cdot \sin(5t)]}_{x} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-t}}_{y} + \underbrace{2 \cdot \cos(2t + \pi)}_{z} = xy + z$$

$$\dot{x} = 5 \cdot \sin(5t) - 25 \cdot \cos(5t), \quad \dot{y} = -\mathrm{e}^{-t} \quad \text{und} \quad \dot{z} = -4 \cdot \sin(2t + \pi)$$

$$\ddot{s} = \dot{x}y + \dot{y}x + \dot{z} = [5 \cdot \sin(5t) - 25 \cdot \cos(5t)] \cdot \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}[-\cos(5t) - 5 \cdot \sin(5t)] - 4 \cdot \sin(2t + \pi) =$$

$$= [5 \cdot \sin(5t) - 25 \cdot \cos(5t) + \cos(5t) + 5 \cdot \sin(5t)] \cdot \mathrm{e}^{-t} - 4 \cdot \sin(2t + \pi) =$$

$$= [10 \cdot \sin(5t) - 24 \cdot \cos(5t)] \cdot \mathrm{e}^{-t} - 4 \cdot \sin(2t + \pi)$$

Das **Beschleunigung-Zeit-Gesetz** lautet somit:

$$a = \ddot{s} = [10 \cdot \sin(5t) - 24 \cdot \cos(5t)] \cdot \mathrm{e}^{-t} - 4 \cdot \sin(2t + \pi)$$

Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$a(t = 0) = \ddot{s}(t = 0) = (10 \cdot \sin 0 - 24 \cdot \cos 0) \cdot \mathrm{e}^{0} - 4 \cdot \sin \pi = (10 \cdot 0 - 24 \cdot 1) \cdot 1 - 4 \cdot 0 = -24$$

B52

Die Bahnkurve eines Massenpunktes in der x, y-Ebene wird durch die Gleichungen

$$x = x(t) = (\sin t) \cdot e^{-t}, \quad y = y(t) = (\cos t) \cdot e^{-t}, \quad t \geq 0$$

beschrieben. Bestimmen Sie *Geschwindigkeit* v und *Beschleunigung* a zur Zeit $t = \pi$.

Wir benötigen die ersten beiden Ableitungen der Parametergleichungen. Differenziert wird jeweils nach der *Produktregel* in Verbindung mit der *Kettenregel*:

$$x = \underbrace{(\sin t)}_{u} \cdot \underbrace{e^{-t}}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = \sin t, \quad v = e^{-t} \quad \text{und} \quad \dot{u} = \cos t, \quad \dot{v} = -e^{-t}$$

(Ableitung von v nach der Kettenregel, Substitution: $z = -t$)

$$\dot{x} = \dot{u}v + \dot{v}u = (\cos t) \cdot e^{-t} - e^{-t} \cdot \sin t = (\cos t - \sin t) \cdot e^{-t}$$

$$\dot{x} = \underbrace{(\cos t - \sin t)}_{u} \cdot \underbrace{e^{-t}}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = \cos t - \sin t, \quad v = e^{-t} \quad \text{und} \quad \dot{u} = -\sin t - \cos t, \quad \dot{v} = -e^{-t}$$

$$\ddot{x} = \dot{u}v + \dot{v}u = (-\sin t - \cos t) \cdot e^{-t} - e^{-t}(\cos t - \sin t) =$$

$$= (-\sin t - \cos t - \cos t + \sin t) \cdot e^{-t} = -2(\cos t) \cdot e^{-t}$$

Analog erhält man $\dot{y}$ und $\ddot{y}$:

$$y = \underbrace{(\cos t)}_{u} \cdot \underbrace{e^{-t}}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = \cos t, \quad v = e^{-t} \quad \text{und} \quad \dot{u} = -\sin t, \quad \dot{v} = -e^{-t}$$

$$\dot{y} = \dot{u}v + \dot{v}u = (-\sin t) \cdot e^{-t} - e^{-t} \cdot \cos t = (-\sin t - \cos t) \cdot e^{-t}$$

$$\dot{y} = \underbrace{(-\sin t - \cos t)}_{u} \cdot \underbrace{e^{-t}}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = -\sin t - \cos t, \quad v = e^{-t} \quad \text{und} \quad \dot{u} = -\cos t + \sin t, \quad \dot{v} = -e^{-t}$$

$$\ddot{y} = \dot{u}v + \dot{v}u = (-\cos t + \sin t) \cdot e^{-t} - e^{-t}(-\sin t - \cos t) =$$

$$= (-\cos t + \sin t + \sin t + \cos t) \cdot e^{-t} = 2(\sin t) \cdot e^{-t}$$

Geschwindigkeit $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\cos t - \sin t)^2 \cdot e^{-2t} + (-\sin t - \cos t)^2 \cdot e^{-2t} =$$

$$= [(\cos t - \sin t)^2 + (-\sin t - \cos t)^2] \cdot e^{-2t} =$$

$$= (\cos^2 t - 2\sin t \cdot \cos t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2\sin t \cdot \cos t + \cos^2 t) \cdot e^{-2t} =$$

$$= (2 \cdot \cos^2 t + 2 \cdot \sin^2 t) \cdot e^{-2t} = 2\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1} \cdot e^{-2t} = 2 \cdot e^{-2t}$$

(unter Verwendung des trigonometrischen Pythagoras $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$). Somit gilt:

$$v = \sqrt{2 \cdot e^{-2t}} = \sqrt{2} \cdot e^{-t} \quad \Rightarrow \quad v(t = \pi) = \sqrt{2} \cdot e^{-\pi} = 0{,}0611 \qquad (e^{-2t} = e^{-t} \cdot e^{-t} = (e^{-t})^2)$$

Beschleunigung $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$

$$a^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = 4(\cos^2 t) \cdot e^{-2t} + 4(\sin^2 t) \cdot e^{-2t} = 4\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1} \cdot e^{-2t} = 4 \cdot e^{-2t}$$

$$a = \sqrt{4 \cdot e^{-2t}} = 2 \cdot e^{-t} \quad \Rightarrow \quad a(t = \pi) = 2 \cdot e^{-\pi} = 0{,}0864$$

B53

Ein Rad mit dem Radius $R = 1$ rollt reibungsfrei auf einer Geraden (x-Achse) und beschreibt dabei eine sog. Rollkurve oder gewöhnliche Zykloide mit der folgenden Parameterdarstellung:

$$x = t - \sin(\pi t), \quad y = 1 - \cos(\pi t) \quad (t \geq 0\text{: Zeit})$$

Bestimmen Sie *Geschwindigkeit* v und *Beschleunigung* a in Abhängigkeit von der Zeit.
Nach welcher Zeit erreicht die Geschwindigkeit erstmals ihren *größten* Wert?

Wir bilden zunächst die benötigten Ableitungen $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dot{y}$ und $\ddot{y}$ (*gliedweises* Differenzieren in Verbindung mit der *Kettenregel*):

$$x = t - \sin\underbrace{(\pi t)}_{u} = t - \sin u \quad \text{mit} \quad u = \pi t \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = 1 - (\cos u) \cdot \pi = 1 - \pi \cdot \cos(\pi t)$$

$$\dot{x} = 1 - \pi \cdot \cos\underbrace{(\pi t)}_{u} = 1 - \pi \cdot \cos u \quad \text{mit} \quad u = \pi t \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = 0 - \pi(-\sin u) \cdot \pi = \pi^2 \cdot \sin(\pi t)$$

Analog erhalten wir $\dot{y}$ und $\ddot{y}$:

$$y = 1 - \cos\underbrace{(\pi t)}_{u} = 1 - \cos u \quad \text{mit} \quad u = \pi t \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = 0 + (\sin u) \cdot \pi = \pi \cdot \sin(\pi t)$$

$$\dot{y} = \pi \cdot \sin\underbrace{(\pi t)}_{u} = \pi \cdot \sin u \quad \text{mit} \quad u = \pi t \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = \pi \cdot (\cos u) \cdot \pi = \pi^2 \cdot \cos(\pi t)$$

Geschwindigkeit $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = [1 - \pi \cdot \cos(\pi t)]^2 + \pi^2 \cdot \sin^2(\pi t) =$$

$$= 1 - 2\pi \cdot \cos(\pi t) + \pi^2 \cdot \cos^2(\pi t) + \pi^2 \cdot \sin^2(\pi t) =$$

$$= 1 - 2\pi \cdot \cos(\pi t) + \pi^2 \underbrace{(\cos^2(\pi t) + \sin^2(\pi t))}_{1} = 1 - 2\pi \cdot \cos(\pi t) + \pi^2$$

(unter Verwendung der Beziehung $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$ mit $u = \pi t$). Somit gilt:

$$v = \sqrt{1 - 2\pi \cdot \cos(\pi t) + \pi^2}, \quad t \geq 0$$

Das *Geschwindigkeitsmaximum* wird erreicht, wenn $\cos(\pi t)$ den *kleinsten* Wert -1 annimmt:

$$\cos(\pi t) = -1 \quad \text{für} \quad \pi t = \pi, \quad \text{d. h.} \quad t_1 = 1$$

Nach einer *halben* Drehung des Rades, d. h. im *höchsten* Bahnpunkt ist die Geschwindigkeit am *größten*. Sie beträgt dann:

$$v_{\max} = v(t_1 = 1) = \sqrt{1 - 2\pi \cdot (-1) + \pi^2} = \sqrt{1 + 2\pi + \pi^2} = \sqrt{(1 + \pi)^2} = 1 + \pi$$

Beschleunigung $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$

$$a^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 = \pi^4 \cdot \sin^2(\pi t) + \pi^4 \cdot \cos^2(\pi t) = \pi^4 \underbrace{[\sin^2(\pi t) + \cos^2(\pi t)]}_{1} = \pi^4 = \text{const.}$$

Die Bewegung erfolgt also mit *konstanter* Beschleunigung: $a = \pi^2 = \text{const.}$

2.2 Tangente und Normale

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel IV.3.1

Formelsammlung: Kapitel IV.4.2

B54 Wie lauten die Gleichungen der *Tangente* und *Normale* im Punkt $P = (6;\, 6)$ der in der impliziten Form gegebenen Kurve $x^3 - 12xy + y^3 = 0$?

Für die Berechnung der Steigungswerte von Tangente und Normale benötigen wir die 1. Ableitung der *impliziten* Funktion. Die Funktionsgleichung wird daher *gliedweise* nach x differenziert. Dabei ist y als eine Funktion von x zu betrachten, d. h. Terme mit der Variablen y müssen nach der *Kettenregel* differenziert werden (erst nach y differenzieren, dann y nach x):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\,(x^3 - 12\,\underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{y}_{v} + y^3) &= 3x^2 - 12\,(u'v + v'u) + 3y^2 \cdot y' = \\ &= 3x^2 - 12\,(1 \cdot y + 1 \cdot y' \cdot x) + 3y^2 \cdot y' = \\ &= 3x^2 - 12\,(y + x \cdot y') + 3y^2 \cdot y' = 0\end{aligned}$$

Der 2. Summand $-12x \cdot y = -12\,(x \cdot y)$ wurde dabei nach der *Produktregel* differenziert (mit $u = x$, $v = y$ und $u' = 1$, $v' = 1 \cdot y' = y'$). Wir lösen jetzt diese Gleichung schrittweise nach y' auf (zunächst wird durch 3 dividiert):

$$x^2 - 4\,(y + x \cdot y') + y^2 \cdot y' = x^2 - 4y - 4x \cdot y' + y^2 \cdot y' = y'\,(-4x + y^2) + x^2 - 4y = 0$$

$$y'\,(-4x + y^2) = -x^2 + 4y \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-x^2 + 4y}{-4x + y^2} = \frac{x^2 - 4y}{4x - y^2}$$

Gleichung der Tangente in $P = (6;\, 6)$

$$m_t = y'(x_0 = 6;\, y_0 = 6) = \frac{36 - 24}{24 - 36} = \frac{12}{-12} = -1$$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m_t \quad \Rightarrow \quad \frac{y - 6}{x - 6} = -1, \quad y - 6 = -1\,(x - 6) = -x + 6$$

Tangente: $y = -x + 12$

Gleichung der Normale in $P = (6;\, 6)$

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y - y_0}{x - x_0} = m_n \quad \Rightarrow \quad \frac{y - 6}{x - 6} = 1, \quad y - 6 = 1\,(x - 6) = x - 6$$

Normale: $y = x$

B55

Bestimmen Sie die *Tangente* der Funktion $y = \mathrm{e}^{-2x} \cdot \cos(4x + \pi)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

Tangentenberührungspunkt: $x_0 = 0, \quad y_0 = \mathrm{e}^0 \cdot \cos(0 + \pi) = 1 \cdot (-1) = -1 \quad \Rightarrow \quad P = (0; -1)$

Steigung m der Kurventangente in P

Die benötigte Ableitung erhalten wir mit der *Produktregel*, wobei *beide* Faktoren mit Hilfe der *Kettenregel* zu differenzieren sind:

$$y = \underbrace{\mathrm{e}^{-2x}}_{u} \cdot \underbrace{\cos(4x + \pi)}_{v} = uv$$

$$u = \mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^t \quad \text{mit} \quad t = -2x \quad \Rightarrow \quad u' = \mathrm{e}^t \cdot (-2) = -2 \cdot \mathrm{e}^{-2x}$$

$$v = \cos(4x + \pi) = \cos z \quad \text{mit} \quad z = 4x + \pi \quad \Rightarrow \quad v' = (-\sin z) \cdot 4 = -4 \cdot \sin(4x + \pi)$$

$$y' = u'v + v'u = -2 \cdot \mathrm{e}^{-2x} \cdot \cos(4x + \pi) - 4 \cdot \sin(4x + \pi) \cdot \mathrm{e}^{-2x} =$$

$$= -2 \cdot \mathrm{e}^{-2x} [\cos(4x + \pi) + 2 \cdot \sin(4x + \pi)]$$

$$m = y'(0) = -2 \cdot \mathrm{e}^0 [\cos \pi + 2 \cdot \sin \pi] = -2 \cdot 1(-1 + 2 \cdot 0) = 2$$

Gleichung der Tangente in $P = (0; -1)$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \quad \Rightarrow \quad \frac{y + 1}{x - 0} = 2 \quad \Rightarrow \quad y + 1 = 2x \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 1$$

B56

Wo besitzt die Kurve $y = \ln(1{,}5 - \cos^2 x)$ *waagerechte* Tangenten?

Wegen der *Spiegelsymmetrie* der Kurve dürfen wir uns zunächst auf das Intervall $x \ge 0$ beschränken. Die benötigte 1. Ableitung der Funktion bilden wir wie folgt mit Hilfe der *Kettenregel*, wobei *zwei* Substitutionen nacheinander durchzuführen sind (von innen nach außen).

1. Substitution: $y = \ln(1{,}5 - \underbrace{\cos^2 x}_{u}) = \ln(1{,}5 - u^2) \quad \text{mit} \quad u = \cos x$

2. Substitution: $y = \ln \underbrace{(1{,}5 - u^2)}_{v} = \ln v \quad \text{mit} \quad v = 1{,}5 - u^2$

Somit gilt: $y = \ln v \quad \text{mit} \quad v = 1{,}5 - u^2 \quad \text{und} \quad u = \cos x$

Die *Kettenregel* liefert dann die gewünschte Ableitung:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{v} \cdot (-2u) \cdot (-\sin x) = \frac{2u \cdot \sin x}{v} = \frac{2u \cdot \sin x}{1{,}5 - u^2} = \frac{2 \cdot \cos x \cdot \sin x}{1{,}5 - \cos^2 x}$$

In den Kurvenpunkten mit einer *waagerechten* Tangente muss die 1. Ableitung *verschwinden*:

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \cos x \cdot \sin x = 0 \begin{array}{l} \nearrow \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pi/2; \quad 3\pi/2; \quad 5\pi/2; \quad \ldots \\ \searrow \sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0; \quad \pi; \quad 2\pi; \quad \ldots \end{array}$$

Lösungen sind somit die *Nullstellen* der Sinus- und Kosinusfunktion (siehe Bild B-3). Sie lassen sich im Intervall $x \geq 0$ durch die Gleichung

$$x_k = k \cdot \frac{\pi}{2} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

beschreiben. Wir berechnen noch die zugehörigen *Ordinaten* y_k:

$$y_k = \ln(1{,}5 - \cos^2 x_k) = \ln(1{,}5 - \cos^2(k\,\pi/2))$$

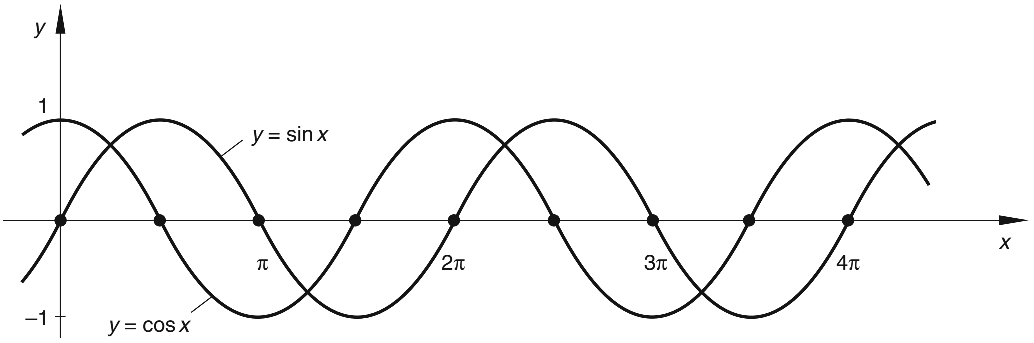


Bild B-3

Der Wert der Kosinusfunktion an der Stelle $x_k = k \cdot \pi/2$ hängt dabei noch wie folgt vom Laufindex k ab:

$$\cos(k \cdot \pi/2) = \begin{cases} +1 \quad \text{oder} \quad -1 & k = \text{gerade} \\ & \text{für} \\ 0 & k = \text{ungerade} \end{cases}$$

Somit ist $\cos^2(k \cdot \pi/2)$ entweder gleich $+1$ oder 0 und wir erhalten folgende Ordinatenwerte:

$$y_k = \begin{cases} \ln(1{,}5 - 1) = \ln 0{,}5 & k = \text{gerade} \\ & \text{für} \\ \ln(1{,}5 - 0) = \ln 1{,}5 & k = \text{ungerade} \end{cases}$$

Die Kurvenpunkte mit einer *waagerechten* Tangente lauten somit (im Intervall $x \geq 0$):

$$P_0 = (0;\ \ln 0{,}5); \quad P_1 = \left(\frac{\pi}{2};\ \ln 1{,}5\right); \quad P_2 = (\pi;\ \ln 0{,}5); \quad P_3 = \left(\frac{3}{2}\pi;\ \ln 1{,}5\right), \quad \ldots$$

Durch *Spiegelung* dieser Punkte an der *y-Achse* erhält man die restlichen Kurvenpunkte mit einer *waagerechten* Tangente (siehe Bild B-4). Sie liegen an den Stellen $x_k = -k \cdot \pi/2$ mit $k = 1, 2, 3, \ldots$.

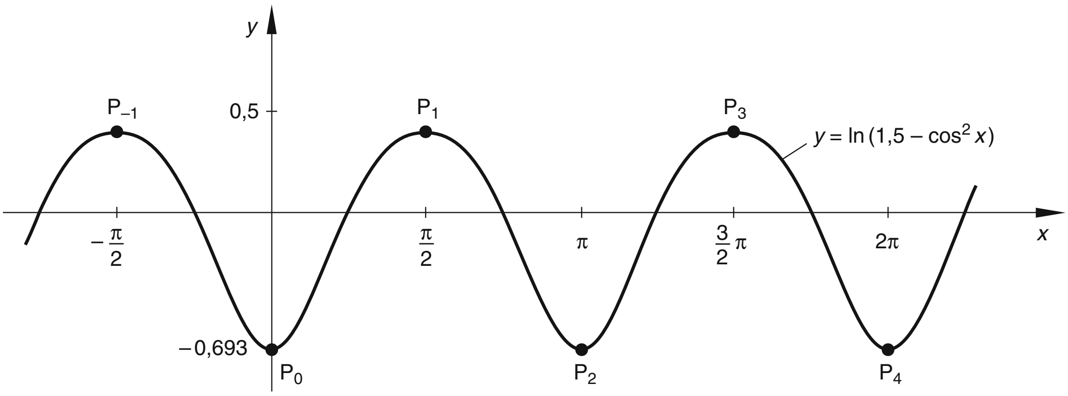


Bild B-4

B57 An welchen Stellen hat die Kurve $y = e^x \cdot \cos(0{,}5x)$ *waagerechte* Tangenten?
Es genügt die Angabe der Abszissenwerte.

Die Funktion wird nach der *Produktregel* differenziert, wobei die Ableitung des *rechten* Faktors in der angedeuteten Weise mit Hilfe der *Kettenregel* erfolgt:

$$y = \underbrace{e^x}_{u} \cdot \underbrace{\cos(0{,}5x)}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = e^x, \quad v = \cos(0{,}5x) \quad \text{und} \quad u' = e^x, \quad v' = -0{,}5 \cdot \sin(0{,}5x)$$

(Ableitung von $v = \cos(0{,}5x)$ nach der *Kettenregel*, Substitution: $t = 0{,}5x$)

$$y' = u'v + v'u = e^x \cdot \cos(0{,}5x) - 0{,}5 \cdot \sin(0{,}5x) \cdot e^x = e^x[\cos(0{,}5x) - 0{,}5 \cdot \sin(0{,}5x)]$$

Für einen Kurvenpunkt mit *waagerechter* Tangente gilt $y' = 0$:

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{e^x}_{\neq 0}[\cos(0{,}5x) - 0{,}5 \cdot \sin(0{,}5x)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(0{,}5x) - 0{,}5 \cdot \sin(0{,}5x) = 0$$

Diese Gleichung stellen wir zunächst wie folgt um:

$$\cos(0{,}5x) = 0{,}5 \cdot \sin(0{,}5x) \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \cos(0{,}5x) = \sin(0{,}5x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin(0{,}5x)}{\cos(0{,}5x)} = \tan(0{,}5x) = 2$$

(Zur Erinnerung: $\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$; hier mit $\alpha = 0{,}5x$)

Wir *substituieren* $z = 0{,}5x$ und erhalten die einfache *trigonometrische* Gleichung $\tan z = 2$. Die Lösungen sind die *Schnittstellen* der elementaren Tangensfunktion $y = \tan z$ mit der zur z-Achse parallelen Geraden $y = 2$ (siehe Bild B-5):

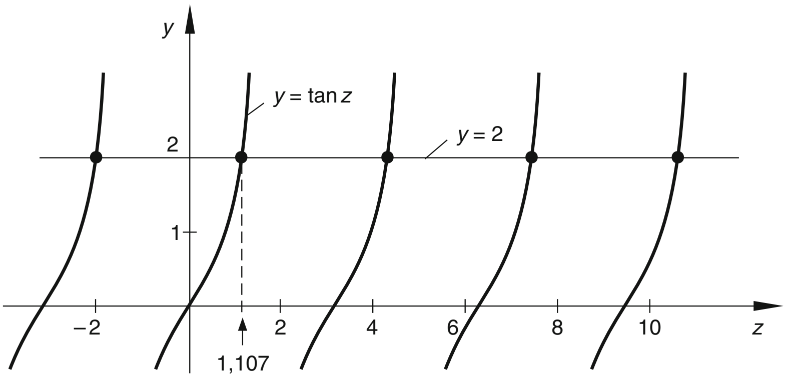


Bild B-5

Die 1. *positive* Schnittstelle erhalten wir durch *Umkehrung* der Gleichung $\tan z = 2$ im Intervall $-\pi/2 < z < \pi/2$. Sie liegt bei $z_0 = \arctan 2 = 1{,}107$. Wegen der *Periodizität* der Tangensfunktion gibt es *unendlich* viele weitere Lösungen im Abstand von jeweils einer Periode $p = \pi$. Die Lösungen lauten somit:

$$z_k = \arctan 2 + k \cdot \pi = 1{,}107 + k \cdot \pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Rücksubstitution liefert uns dann die gesuchten x-Werte mit einer *waagerechten* Tangente:

$$z = 0{,}5x \quad \Rightarrow \quad x = 2z \quad \Rightarrow \quad x_k = 2z_k = 2(1{,}107 + k \cdot \pi) = 2{,}214 + k \cdot 2\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

B58

Bestimmen Sie die Gleichung der *Tangente* der in der Parameterform

$$x(t) = \sin(2t) + 2 \cdot \cos^2 t, \quad y(t) = 2 \cdot \sin t - \cos(2t)$$

dargestellten Kurve für den Parameterwert $t_0 = \pi$.

Wir berechnen zunächst die *kartesischen Koordinaten* zum Parameterwert $t_0 = \pi$:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = \sin(2\pi) + 2 \cdot \cos^2 \pi = 0 + 2 \cdot (-1)^2 = 2 \\ y_0 = 2 \cdot \sin \pi - \cos(2\pi) = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad P = (2; -1)$$

Steigung der Kurventangente in $P = (2; -1)$

Wir benötigen die Ableitungen der beiden Parametergleichungen nach dem Parameter t, die wir mit Hilfe der *Kettenregel* wie folgt erhalten:

$$x = \sin(2t) + 2 \cdot \cos^2 t = \sin \underbrace{(2t)}_{u} + 2 \cdot (\underbrace{\cos t}_{v})^2 = \sin u + 2v^2 \quad \text{mit} \quad u = 2t, \quad v = \cos t$$

$$\dot{x} = (\cos u) \cdot 2 + 2 \cdot 2v \cdot (-\sin t) = 2 \cdot \cos(2t) - 4 \cdot \sin t \cdot \cos t = 2 \cdot \cos(2t) - 2 \cdot \sin(2t)$$

(unter Verwendung der trigonometrischen Beziehung $\sin(2t) = 2 \cdot \sin t \cdot \cos t$)

$$y = 2 \cdot \sin t - \cos \underbrace{(2t)}_{u} = 2 \cdot \sin t - \cos u \quad \text{mit} \quad u = 2t$$

$$\dot{y} = 2 \cdot \cos t + (\sin u) \cdot 2 = 2 \cdot \cos t + 2 \cdot \sin(2t)$$

Für die *Steigung* der Kurventangente in Abhängigkeit vom Parameter t erhalten wir damit:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2 \cdot \cos t + 2 \cdot \sin(2t)}{2 \cdot \cos(2t) - 2 \cdot \sin(2t)} = \frac{\cos t + \sin(2t)}{\cos(2t) - \sin(2t)}$$

Im Punkt $P = (2; -1)$, d. h. für $t_0 = \pi$ gilt dann:

$$m = y'(t_0 = \pi) = \frac{\cos \pi + \sin(2\pi)}{\cos(2\pi) - \sin(2\pi)} = \frac{-1 + 0}{1 - 0} = -1$$

Gleichung der Kurventangente in $P = (2; -1)$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \quad \Rightarrow \quad \frac{y + 1}{x - 2} = -1 \quad \Rightarrow \quad y + 1 = -1(x - 2) = -x + 2 \quad \Rightarrow \quad y = -x + 1$$

B59

Wie lautet die *Tangente* an die Kurve mit der Parameterdarstellung $x = \frac{2t^2}{1 - t^3}$, $y = \frac{6t}{1 - t^3}$, $t \neq 1$ an der Stelle $t_0 = -1$?

Wir berechnen zunächst die zum Parameterwert $t_0 = -1$ gehörenden kartesischen Koordinaten des *Tangentenberührungspunktes* P:

$$x_0 = \frac{2 \cdot 1}{1 - (-1)} = \frac{2}{2} = 1, \quad y_0 = \frac{6 \cdot (-1)}{1 - (-1)} = \frac{-6}{2} = -3 \quad \Rightarrow \quad P = (1; -3)$$

Die für die Tangentensteigung benötigten Ableitungen der Parametergleichungen nach dem Parameter t erhalten wir jeweils über die *Quotientenregel*:

$$x = \frac{2t^2}{1 - t^3} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = 2t^2, \quad v = 1 - t^3 \quad \text{und} \quad \dot{u} = 4t, \quad \dot{v} = -3t^2$$

$$\dot{x} = \frac{\dot{u}v - \dot{v}u}{v^2} = \frac{4t(1 - t^3) - (-3t^2)\,2t^2}{(1 - t^3)^2} = \frac{4t - 4t^4 + 6t^4}{(1 - t^3)^2} = \frac{4t + 2t^4}{(1 - t^3)^2}$$

$$y = \frac{6t}{1 - t^3} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = 6t, \quad v = 1 - t^3 \quad \text{und} \quad \dot{u} = 6, \quad \dot{v} = -3t^2$$

$$\dot{y} = \frac{\dot{u}v - \dot{v}u}{v^2} = \frac{6(1 - t^3) - (-3t^2) \cdot 6t}{(1 - t^3)^2} = \frac{6 - 6t^3 + 18t^3}{(1 - t^3)^2} = \frac{6 + 12t^3}{(1 - t^3)^2}$$

Tangentensteigung in Abhängigkeit vom Parameter t

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dfrac{6 + 12t^3}{(1 - t^3)^2}}{\dfrac{4t + 2t^4}{(1 - t^3)^2}} = \frac{6 + 12t^3}{(1 - t^3)^2} \cdot \frac{(1 - t^3)^2}{4t + 2t^4} = \frac{6 + 12t^3}{4t + 2t^4} = \frac{6(1 + 2t^3)}{2t(2 + t^3)} = \frac{3(1 + 2t^3)}{t(2 + t^3)}$$

Steigung im Punkt $P = (1; -3)$, d. h. für $t_0 = -1$:

$$m = y'(t_0 = -1) = \frac{3(1 + 2 \cdot (-1))}{-1(2 - 1)} = \frac{3(1 - 2)}{-1 \cdot 1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

Gleichung der Kurventangente in $P = (1; -3)$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \quad \Rightarrow \quad \frac{y + 3}{x - 1} = 3 \quad \Rightarrow \quad y + 3 = 3(x - 1) = 3x - 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3x - 6$$

B60

Wo besitzt die Kurve mit der Parameterdarstellung

$$x = t \cdot e^{-t}, \quad y = \cos t \cdot e^{-t}, \quad -\infty < t < \infty$$

waagerechte bzw. *senkrechte Tangenten*?

Wir bilden zunächst die 1. Ableitung der beiden Parametergleichungen unter Verwendung von *Produkt-* und *Kettenregel*:

$$x = \underbrace{t}_{u} \cdot \underbrace{e^{-t}}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = t, \quad v = e^{-t} \quad \text{und} \quad \dot{u} = 1, \quad \dot{v} = -e^{-t}$$

(Ableitung von $v = e^{-t}$ über die *Kettenregel*, Substitution $z = -t$)

$$\dot{x} = \dot{u}v + \dot{v}u = 1 \cdot e^{-t} - e^{-t} \cdot t = (1 - t) \cdot e^{-t}$$

$$y = \underbrace{\cos t}_{u} \cdot \underbrace{e^{-t}}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = \cos t, \quad v = e^{-t} \quad \text{und} \quad \dot{u} = -\sin t, \quad \dot{v} = -e^{-t}$$

$$\dot{y} = \dot{u}v + \dot{v}u = -\sin t \cdot e^{-t} - e^{-t} \cdot \cos t = (-\sin t - \cos t) \cdot e^{-t}$$

Kurvenanstieg in Abhängigkeit vom Parameter t

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{(-\sin t - \cos t) \cdot e^{-t}}{(1 - t) \cdot e^{-t}} = \frac{-\sin t - \cos t}{1 - t} = \frac{\sin t + \cos t}{t - 1}$$

Kurvenpunkte mit waagerechter Tangente: $y' = 0$, d. h. $\dot{y} = 0$ und $\dot{x} \neq 0$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin t + \cos t = 0 \qquad (\text{für } t \neq 1)$$

Diese *trigonometrische* Gleichung formen wir wie folgt um:

$$\sin t = -\cos t \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t = -1$$

Die Lösungen lassen sich anhand einer Skizze leicht bestimmen, es sind die Abszissenwerte der *Schnittpunkte* der Tangenskurve $y = \tan t$ mit der konstanten Funktion $y = -1$ (Parallele zur t-Achse; siehe Bild B-6).

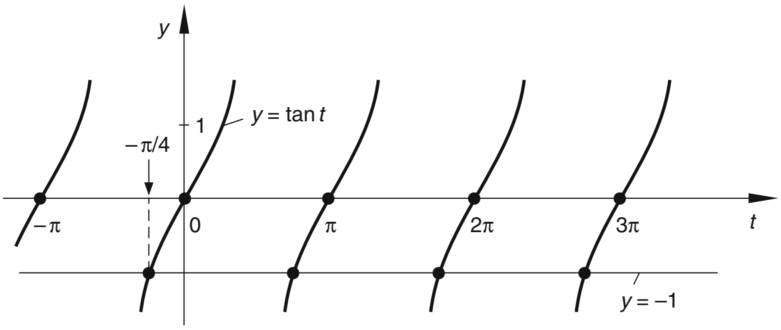


Bild B-6

Die im Intervall $-\pi/2 < t < \pi/2$ liegende Schnittstelle ist $t_0 = \arctan(-1) = -\pi/4$. Wegen der *Periodizität* der Tangensfunktion gibt es weitere Lösungen im jeweiligen Abstand von genau einer Periode $p = \pi$. Die *unendlich* vielen Lösungen lassen sich durch die Formel

$$t_k = \arctan(-1) + k \cdot \pi = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

beschreiben. An diesen Stellen verlaufen die Kurventangenten *waagerecht* ($t_k \neq 1$).

Kurvenpunkte mit senkrechter Tangente (parallel zur y-Achse): $y' = \infty$, d. h. $\dot{x} = 0$ und $\dot{y} \neq 0$

$$y' = \infty \quad \Rightarrow \quad t - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 1$$

Wegen

$$\dot{y}(t_1 = 1) = \sin 1 + \cos 1 = 0{,}8415 + 0{,}5403 = 1{,}3818 \neq 0$$

verläuft die Kurventangente an dieser Stelle *parallel* zur y-Achse. Weitere Lösungen gibt es nicht.

B61

Durch ungestörte Überlagerung der beiden zueinander senkrechten Schwingungen mit den Gleichungen $x(t) = a \cdot \sin t$ und $y(t) = a \cdot \sin(2t)$ $(a > 0;\ t \geq 0)$ entsteht eine sog. Lissajous-Figur (Frequenzverhältnis 1 : 2). Bestimmen Sie die Stellen mit einer *waagerechten* bzw. *senkrechten* Tangente im Periodenintervall $0 \leq t < 2\pi$.

Wir bestimmen zunächst die benötigten Ableitungen $\dot{x}$ und $\dot{y}$ (letztere erhält man mit der *Kettenregel*):

$$x = a \cdot \sin t \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = a \cdot \cos t$$

$$y = a \cdot \sin \underbrace{(2t)}_{u} = a \cdot \sin u \quad \text{mit} \quad u = 2t \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = a \cdot \cos u \cdot \dot{u} = a \cdot \cos(2t) \cdot 2 = 2a \cdot \cos(2t)$$

Für den *Kurvenanstieg* (Steigung der Tangente) erhalten wir in Abhängigkeit vom Parameter t:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2a \cdot \cos(2t)}{a \cdot \cos t} = \frac{2 \cdot \cos(2t)}{\cos t}$$

Kurvenpunkte mit waagerechter Tangente: $y' = 0$, d. h. $\dot{y} = 0$ und $\dot{x} \neq 0$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \cos(2t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \underbrace{(2t)}_{u} = \cos u = 0$$

(Substitution $u = 2t$). Die Lösungen sind die *Nullstellen* der Kosinusfunktion $y = \cos u$ (siehe Bild B-7):

$$u_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

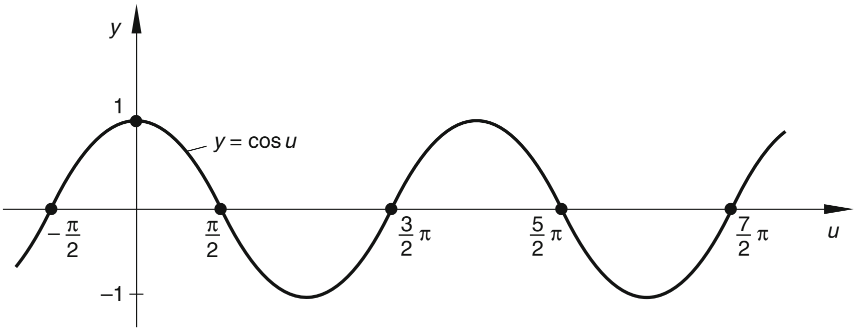


Bild B-7

Rücksubstitution ergibt:

$$u = 2t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{2}u \quad \Rightarrow \quad t_k = \frac{1}{2}u_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right) = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Wegen der Beschränkung auf das Periodenintervall $0 \leq t < 2\pi$ gibt es nur vier Lösungen:

$$t_0 = \frac{\pi}{4}, \quad t_1 = \frac{\pi}{4} + 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi, \quad t_2 = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5}{4}\pi, \quad t_3 = \frac{\pi}{4} + 3 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{7}{4}\pi$$

Der Nenner $\cos t$ der Steigungsformel ist an diesen Stellen von Null *verschieden*. Es gibt somit genau *vier* Kurvenpunkte mit einer *waagerechten* Tangente. Wir berechnen noch die kartesischen Koordinaten dieser Punkte:

$$t_0 = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_0 = a \cdot \sin(\pi/4) = a \cdot 0{,}707 = 0{,}707\,a \\ y_0 = a \cdot \sin(\pi/2) = a \cdot 1 = a \end{array} \quad \Rightarrow \quad A_0 = (0{,}707\,a;\ a)$$

Wegen der *Spiegelsymmetrie* der Lissajous-Kurve gilt für die vier Kurvenpunkte mit *waagerechter* Tangente (ohne Rechnung; siehe Bild B-8):

$$A_0 = (0{,}707\,a;\ a); \quad A_1 = (0{,}707\,a;\ -a); \quad A_2 = (-0{,}707\,a;\ a); \quad A_3 = (-0{,}707\,a;\ -a)$$

Kurvenpunkte mit senkrechter Tangente: $y' = \infty$, d. h. $\dot{x} = 0$ und $\dot{y} \neq 0$

$$y' = \infty \quad \Rightarrow \quad \cos t = 0 \quad \Rightarrow \quad t_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

(*Nullstellen* der Kosinusfunktion, siehe hierzu auch Bild B-7). Uns interessieren aber nur die im Periodenintervall $0 \leq t < 2\pi$ liegenden Werte. Sie lauten:

$$t_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad t_1 = \frac{\pi}{2} + 1 \cdot \pi = \frac{3}{2}\pi$$

Der Zähler $\dot{x} = 2 \cdot \cos(2t)$ der Steigungsformel ist an diesen Stellen (wie gefordert) von Null *verschieden*. Es gibt somit genau *zwei* Kurvenpunkte mit einer *senkrechten* Tangente. Wir berechnen noch die kartesischen Koordinaten dieser Punkte:

$$t_0 = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_0 = a \cdot \sin(\pi/2) = a \cdot 1 = a \\ y_0 = a \cdot \sin \pi = a \cdot 0 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad B_0 = (a;\ 0)$$

Der *zweite* Punkt liegt *spiegelsymmetrisch* zur y-Achse bei $B_1 = (-a;\ 0)$.

Bild B-8 zeigt den Verlauf der geschlossenen Kurve mit den vier waagerechten und den zwei senkrechten Tangenten.

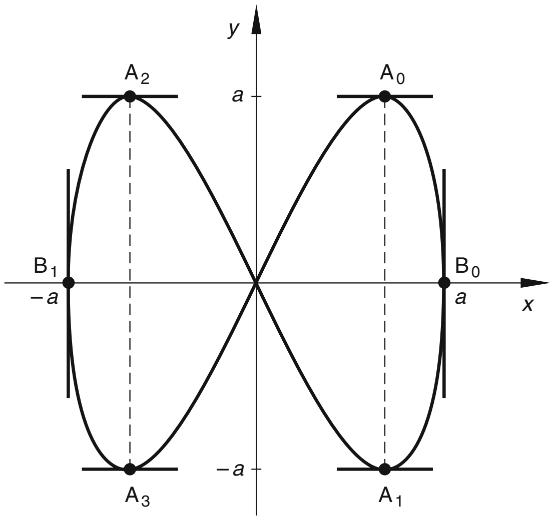


Bild B-8

B62

In welchen Punkten hat die in Polarkoordinaten definierte Kurve $r = 1 + \sin^2 \varphi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$ *waagerechte* Tangenten?

Wir müssen die Kurve zunächst in der *Parameterform* darstellen (Parameter ist dabei die Winkelkoordinate φ):

$$x = r \cdot \cos \varphi = (1 + \sin^2 \varphi) \cdot \cos \varphi , \qquad y = r \cdot \sin \varphi = (1 + \sin^2 \varphi) \cdot \sin \varphi = \sin \varphi + \sin^3 \varphi$$

Jetzt bilden wir die für die Steigungsformel benötigten Ableitungen $\dot{x}$ und $\dot{y}$ (differenziert wird nach dem Parameter φ), wobei wir *Produkt-* und *Kettenregel* einsetzen:

$$x = \underbrace{(1 + \sin^2 \varphi)}_{u} \cdot \underbrace{\cos \varphi}_{v} = u\,v$$

$$u = 1 + \sin^2 \varphi , \quad v = \cos \varphi \quad \text{und} \quad \dot{u} = 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi , \quad \dot{v} = -\sin \varphi$$

(Ableitung von $v = 1 + \sin^2 \varphi = 1 + (\sin \varphi)^2$ nach der *Kettenregel*, Substitution: $t = \sin \varphi$)

$$\dot{x} = \dot{u}\,v + \dot{v}\,u = 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \varphi - \sin \varphi\,(1 + \sin^2 \varphi) = 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi - \sin \varphi - \sin^3 \varphi =$$

$$= (2 \cdot \underbrace{\cos^2 \varphi}_{1 - \sin^2 \varphi} - 1 - \sin^2 \varphi) \cdot \sin \varphi = (2\,(1 - \sin^2 \varphi) - 1 - \sin^2 \varphi) \cdot \sin \varphi =$$

$$= (2 - 2 \cdot \sin^2 \varphi - 1 - \sin^2 \varphi) \cdot \sin \varphi = (1 - 3 \cdot \sin^2 \varphi) \cdot \sin \varphi$$

(unter Verwendung der trigonometrischen Beziehung $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$)

Für $\dot{y}$ erhalten wir durch *gliedweises* Differenzieren und mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$y = \sin \varphi + \sin^3 \varphi = \sin \varphi + (\underbrace{\sin \varphi}_{u})^3 = \sin \varphi + u^3 \quad \text{mit} \quad u = \sin \varphi$$

$$\dot{y} = \cos \varphi + 3\,u^2 \cdot \dot{u} = \cos \varphi + 3 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi = (1 + 3 \cdot \sin^2 \varphi) \cdot \cos \varphi$$

Die *Steigung* der Kurventangente hängt damit wie folgt vom Kurvenparameter φ ab:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{(1 + 3 \cdot \sin^2 \varphi) \cdot \cos \varphi}{(1 - 3 \cdot \sin^2 \varphi) \cdot \sin \varphi}$$

In den Kurvenpunkten mit einer *waagerechten* Tangente muss die 1. Ableitung *verschwinden*: $y' = 0$, d. h. $\dot{y} = 0$ und $\dot{x} \neq 0$:

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(1 + 3 \cdot \sin^2 \varphi)}_{\neq 0} \cdot \cos \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{3}{2}\pi$$

Denn es kommen nur Lösungen aus dem Intervall $0 \leq \varphi < 2\pi$ in Frage (siehe Bild B-9):

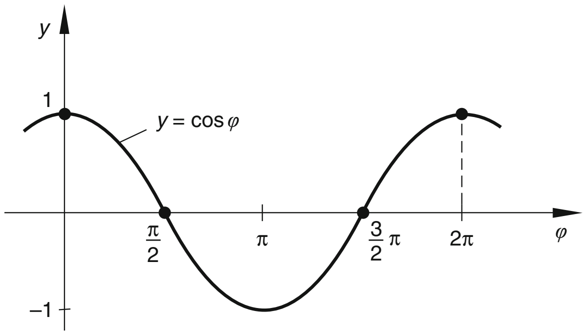


Bild B-9

Da der Nenner $\dot{x} = (1 - 3 \cdot \sin^2 \varphi) \cdot \sin \varphi$ der Steigungsformel an diesen Stellen (wie gefordert) *ungleich* Null ist, haben wir in der Tat Kurvenpunkte mit einer *waagerechten* Tangente vorliegen (es sind genau die beiden Schnittpunkte der Kurve mit der *y*-Achse: $x_{1/2} = 0$, $y_{1/2} = \pm 2$).

B63

Archimedische Spirale: $r(\varphi) = 2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$

a) In welchen Punkten gibt es *waagerechte* bzw. *senkrechte* Tangenten?

b) Bestimmen Sie die *Tangentengleichung* im Schnittpunkt mit der y-Achse.

Wir bringen zunächst die Kurve in die *Parameterform*:

$$x = r \cdot \cos \varphi = 2\varphi \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi = 2\varphi \cdot \sin \varphi \qquad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

Die für die *Steigungsformel* benötigten Ableitungen $\dot{x}$ und $\dot{y}$ erhalten wir mit der *Produktregel*:

$$x = 2\varphi \cdot \cos \varphi = 2(\underbrace{\varphi}_{u} \cdot \underbrace{\cos \varphi}_{v}) = 2(uv) \quad \text{mit} \quad u = \varphi, \quad v = \cos \varphi \quad \text{und} \quad \dot{u} = 1, \quad \dot{v} = -\sin \varphi$$

$$\dot{x} = 2(\dot{u}v + \dot{v}u) = 2(1 \cdot \cos \varphi - (\sin \varphi) \cdot \varphi) = 2(\cos \varphi - \varphi \cdot \sin \varphi)$$

$$y = 2\varphi \cdot \sin \varphi = 2(\underbrace{\varphi}_{u} \cdot \underbrace{\sin \varphi}_{v}) = 2(uv) \quad \text{mit} \quad u = \varphi, \quad v = \sin \varphi \quad \text{und} \quad \dot{u} = 1, \quad \dot{v} = \cos \varphi$$

$$\dot{y} = 2(\dot{u}v + \dot{v}u) = 2(1 \cdot \sin \varphi + (\cos \varphi) \cdot \varphi) = 2(\sin \varphi + \varphi \cdot \cos \varphi)$$

Damit erhalten wir für den *Kurvenanstieg* y' in Abhängigkeit vom Winkelparameter φ den folgenden Ausdruck:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2(\sin \varphi + \varphi \cdot \cos \varphi)}{2(\cos \varphi - \varphi \cdot \sin \varphi)} = \frac{\sin \varphi + \varphi \cdot \cos \varphi}{\cos \varphi - \varphi \cdot \sin \varphi} = \frac{\tan \varphi + \varphi}{1 - \varphi \cdot \tan \varphi}$$

Wir haben am Schluss noch gliedweise in Zähler und Nenner durch $\cos \varphi$ dividiert und dabei beachtet, dass $\sin \varphi / \cos \varphi = \tan \varphi$ ist.

a) Kurvenpunkte mit einer waagerechten Tangente: $y' = 0$, d. h. $\dot{y} = 0$ und $\dot{x} \neq 0$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan \varphi + \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan \varphi = -\varphi$$

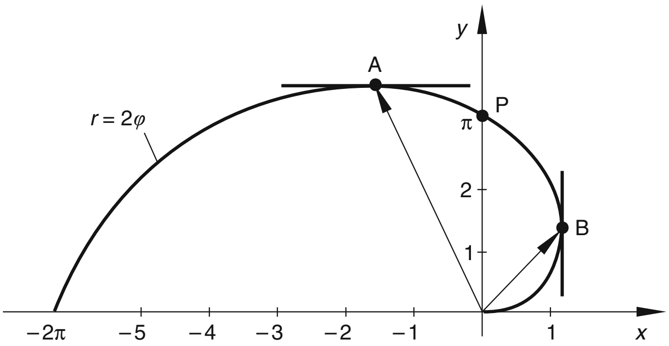
Diese *trigonometrische* Gleichung besitzt im vorgegebenen Intervall $0 \le \varphi \le \pi$ genau *eine* Lösung. Sie lautet: $\varphi_1 = 2{,}0288$ (entspricht 116,24°; siehe Aufgabe B-96). Der *Nenner* ist an dieser Stelle (wie gefordert) von Null *verschieden*.

Kurvenpunkte mit einer senkrechten Tangente: $y' = \infty$, d. h. $\dot{x} = 0$ und $\dot{y} \neq 0$

$$y' = \infty \quad \Rightarrow \quad 1 - \varphi \cdot \tan \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan \varphi = \frac{1}{\varphi}$$

Diese *trigonometrische* Gleichung wird in Aufgabe B-97 nach dem Tangentenverfahren von Newton gelöst. Sie besitzt im Intervall $0 \le \varphi \le \pi$ genau *eine* Lösung $\varphi_2 = 0{,}8603$ (im Gradmaß: 49,29°). Da der Zähler $\tan \varphi + \varphi$ der Steigungsformel an dieser Stelle (wie gefordert) *ungleich* Null ist, besitzt die Kurve dort eine *senkrechte* Tangente.

Bild B-10 zeigt den Kurvenverlauf und die beiden Kurvenpunkte mit einer *waagerechten* bzw. *senkrechten* Tangente.



A: $\varphi = 116{,}24°$; $r = 4{,}0576$
$x = -1{,}794$; $y = 3{,}639$

B: $\varphi = 49{,}29°$; $r = 1{,}7206$
$x = 1{,}222$; $y = 1{,}304$

Bild B-10

b) Schnittpunkt mit der positiven y-Achse: $\varphi_0 = \pi/2$

$$x_0 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos(\pi/2) = \pi \cdot 0 = 0; \quad y_0 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin(\pi/2) = \pi \cdot 1 = \pi \quad \Rightarrow \quad P = (0; \pi)$$

Steigung der Tangente in $P = (0; \pi)$, d. h. für $\varphi_0 = \pi/2$:

$$y'(\varphi_0 = \pi/2) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1 + \frac{\pi}{2} \cdot 0}{0 - \frac{\pi}{2} \cdot 1} = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

Gleichung der Tangente in $P = (0; \pi)$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \quad \Rightarrow \quad \frac{y - \pi}{x - 0} = -\frac{2}{\pi} \quad \Rightarrow \quad y - \pi = -\frac{2}{\pi}\, x \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{\pi}\, x + \pi$$

2.3 Linearisierung einer Funktion

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel IV.3.2
Formelsammlung: Kapitel IV.4.3

B64

Linearisieren Sie die Funktion $y = \dfrac{\pi^2}{\sin x - x}$ in der Umgebung der Stelle $x_0 = \pi$. Bestimmen Sie ferner den *exakten* Wert sowie den *Näherungswert* an der Stelle $x = 3$.

Berechnung des „*Arbeitspunktes*" (Tangentenberührungspunktes) P:

$$x_0 = \pi, \quad y_0 = \frac{\pi^2}{\sin \pi - \pi} = \frac{\pi^2}{0 - \pi} = -\pi \quad \Rightarrow \quad P = (\pi;\, -\pi)$$

Tangentensteigung $\boldsymbol{m}$

Die benötigte Ableitung der Funktion bilden wir mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$y = \frac{\pi^2}{\sin x - x} = \pi^2 (\underbrace{\sin x - x}_{u})^{-1} = \pi^2 u^{-1} \quad \text{mit} \quad u = \sin x - x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \pi^2(-u^{-2})\,(\cos x - 1) = \frac{-\pi^2(\cos x - 1)}{u^2} = \frac{-\pi^2(\cos x - 1)}{(\sin x - x)^2}$$

$$m = y'(\pi) = \frac{-\pi^2(\cos \pi - 1)}{(\sin \pi - \pi)^2} = \frac{-\pi^2(-1 - 1)}{(0 - \pi)^2} = \frac{2\,\pi^2}{\pi^2} = 2$$

Gleichung der Tangente in $\boldsymbol{P = (\pi;\, -\pi)}$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \quad \Rightarrow \quad \frac{y + \pi}{x - \pi} = 2 \quad \Rightarrow \quad y + \pi = 2\,(x - \pi) = 2x - 2\pi \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 3\pi$$

Im „Arbeitspunkt" $P = (\pi;\, -\pi)$ *linearisierte* Funktion: $y = \dfrac{\pi^2}{\sin x - x} = 2x - 3\pi$

Exakter Funktionswert an der Stelle $x = 3$: $y = \dfrac{\pi^2}{\sin 3 - 3} = -3{,}4523$

Näherungswert an der Stelle $x = 3$: $y = 2 \cdot 3 - 3\pi = -3{,}4248$

B65

Linearisieren Sie die Funktion $y = \ln \left(\dfrac{1 + x^2}{2 - x} \right)$ in der Umgebung der Stelle $x_0 = 1$.

Wir ersetzen die Kurve in der Umgebung der Stelle $x_0 = 1$ durch die dortige *Tangente*. Zunächst wird die zugehörige Ordinate y_0 des „Arbeitspunktes" P berechnet:

$$y_0 = \ln \left(\frac{1 + 1}{2 - 1} \right) = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad P = (1;\, \ln 2)$$

Bevor wir die Ableitung bilden, bringen wir die Funktion noch in eine für das Differenzieren *günstigere* Form:

$$y = \ln\left(\frac{1 + x^2}{2 - x}\right) = \ln\underbrace{(1 + x^2)}_{u} - \ln\underbrace{(2 - x)}_{v} = \ln u - \ln v \quad \text{mit} \quad u = 1 + x^2 \quad \text{und} \quad v = 2 - x$$

$\Big($*Rechenregel:* $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b\Big)$. Gliedweise Differentiation unter Verwendung der *Kettenregel* (in der durch die Substitutionen angedeuteten Weise) führt dann zu:

$$y' = \frac{1}{u} \cdot 2x - \frac{1}{v} \cdot (-1) = \frac{2x}{1 + x^2} + \frac{1}{2 - x} \quad \Rightarrow \quad m = y'(1) = \frac{2}{1 + 1} + \frac{1}{2 - 1} = 1 + 1 = 2$$

Gleichung der Tangente in $P = (1; \ln 2)$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \quad \Rightarrow \quad \frac{y - \ln 2}{x - 1} = 2 \quad \Rightarrow \quad y - \ln 2 = 2(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 2 + \ln 2 = 2x - 1{,}3069$$

Die Gleichung der *linearisierten* Funktion lautet damit (in der Umgebung von $x_0 = 1$):

$$y = \ln\left(\frac{1 + x^2}{2 - x}\right) = 2x - 1{,}3069$$

B66 Ersetzen Sie die Funktion $y = \sqrt{2 - \mathrm{e}^{-2x}}$ in der Umgebung von $x_0 = 0$ durch eine *lineare* Funktion.

Berechnung des Tangentenberührungspunktes („Arbeitspunktes“) $P = (x_0; y_0)$:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \sqrt{2 - \mathrm{e}^0} = \sqrt{2 - 1} = 1 \quad \Rightarrow \quad P = (0; 1)$$

Berechnung der Tangentensteigung m

Die Funktion wird mit Hilfe der *Kettenregel* wie folgt differenziert (dabei sind *zwei* Substitutionen durchzuführen):

$$y = \sqrt{u} \quad \text{mit} \quad u = 2 - \mathrm{e}^v \quad \text{und} \quad v = -2x$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (-\mathrm{e}^v) \cdot (-2) = \frac{2 \cdot \mathrm{e}^v}{2\sqrt{u}} = \frac{\mathrm{e}^v}{\sqrt{u}} = \frac{\mathrm{e}^v}{\sqrt{2 - \mathrm{e}^v}} = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{\sqrt{2 - \mathrm{e}^{-2x}}}$$

$$m = y'(0) = \frac{\mathrm{e}^0}{\sqrt{2 - \mathrm{e}^0}} = \frac{1}{\sqrt{2 - 1}} = 1$$

Gleichung der Tangente in $P = (0; 1)$

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \quad \Rightarrow \quad \frac{y - 1}{x - 0} = 1 \quad \Rightarrow \quad y - 1 = x \quad \Rightarrow \quad y = x + 1$$

Linearisierte Funktion (in der Umgebung von $x_0 = 0$):

$$y = \sqrt{2 - \mathrm{e}^{-2x}} = x + 1$$

2.4 Krümmung einer ebenen Kurve

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel IV.3.3.3
Formelsammlung: Kapitel IV.4.4.2

B67

Welche *Krümmung* hat die Kurve $y = 1 - \cos x$?
Bestimmen Sie den *Krümmungskreis* an der Stelle $x = \pi$.

Die für das Krümmungsverhalten der Kurve benötigten Ableitungen 1. und 2. Ordnung lauten $y' = \sin x$ und $y'' = \cos x$. Damit erhalten wir für die *Krümmung* κ den folgenden von der Koordinate x abhängigen Ausdruck:

$$\kappa(x) = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{\cos x}{[1 + \sin^2 x]^{3/2}}$$

An der Stelle $x = \pi$, d. h. im Kurvenpunkt $P = (\pi; 2)$ ergeben sich für die *Kurvenkrümmung* κ und den *Krümmungsradius* ϱ die Werte

$$\kappa(\pi) = \frac{\cos \pi}{[1 + \sin^2 \pi]^{3/2}} = \frac{-1}{[1 + 0]^{3/2}} = -1 \quad \text{und} \quad \varrho(\pi) = \frac{1}{|\kappa(\pi)|} = \frac{1}{|-1|} = 1$$

Wegen der *Spiegelsymmetrie* der Kurve bezüglich der zur y-Achse parallelen Geraden $x = \pi$ liegt der Mittelpunkt M des Krümmungskreises *auf* dieser Symmetrieachse im Abstand $\varrho(\pi) = 1$ *unterhalb* des Kurvenpunktes $P = (\pi; 2)$. Daher hat der Mittelpunkt die Koordinaten $x_0 = \pi$ und $y_0 = 1$ (die x-Achse *tangiert* den Krümmungskreis, siehe Bild B-11).

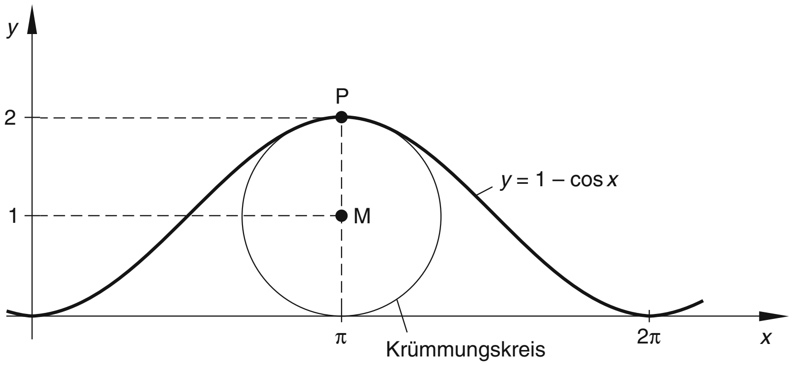


Bild B-11

B68

An welcher Stelle besitzt die Kurve $y = \ln(\cos x)$, $-\pi/2 < x < \pi/2$ die *größte* Krümmung?
Bestimmen Sie den *Krümmungskreis* an dieser Stelle.

Wir bilden zunächst die für die Krümmung benötigten Ableitungen y' und y'':

$$y = \ln \underbrace{(\cos x)}_{u} = \ln u \quad \text{mit} \quad u = \cos x \qquad (\textit{Kettenregel} \text{ verwenden!})$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x; \quad y'' = -\frac{1}{\cos^2 x} = -(1 + \tan^2 x)$$

Damit erhalten wir für die *Kurvenkrümmung* κ den folgenden von der Abszisse x abhängigen Ausdruck:

$$\kappa(x) = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{-(1 + \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)^{3/2}} = \frac{-(1 + \tan^2 x)}{(1 + \tan^2 x)\,(1 + \tan^2)^{1/2}} = \frac{-1}{(1 + \tan^2 x)^{1/2}} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$$

Dieser Ausdruck ist *stets negativ*, die Kurve daher überall im Intervall $-\pi/2 < x < \pi/2$ nach *rechts* gekrümmt. Die Krümmung ist betragsmäßig dort am *größten*, wo der Nenner des Bruches und somit der Wurzelradikand $1 + \tan^2 x$ am *kleinsten* ist. Dies ist der Fall, wenn $\tan x = 0$ und somit $x = 0$ ist. *Krümmung* und *Krümmungsradius* besitzen dort, d. h. im Kurvenpunkt $P = (0;\, 0)$ die folgenden Werte:

$$\kappa(0) = \frac{-1}{\sqrt{1 + \tan^2 0}} = \frac{-1}{\sqrt{1 + 0}} = -1, \qquad \varrho(0) = \frac{1}{|\kappa(0)|} = \frac{1}{|-1|} = 1$$

Die Kurve verläuft *spiegelsymmetrisch* zur y-Achse, der *Krümmungsmittelpunkt* M (Mittelpunkt des Krümmungskreises) muss somit auf der y-Achse liegen und zwar um $\varrho(0) = 1$ *unterhalb* des Nullpunkts (zugleich Maximum der Kurve). Daher besitzt M die Koordinaten $x_0 = 0$ und $y_0 = -1$. Bild B-12 zeigt den Verlauf der Kurve mit dem zum Nullpunkt gehörenden *Krümmungskreis*.

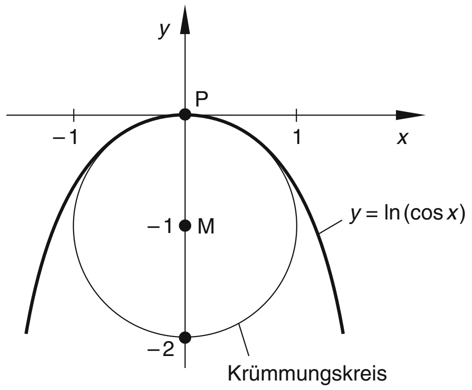


Bild B-12

B69

Zeigen Sie, dass das in Bild B-13 abgebildete Seil mit der Gleichung

$$y = a \cdot \cosh(x/a), \quad -c \le x \le c$$

(Kettenlinie mit $a > 0$)

a) überall *Linkskrümmung* und

b) im tiefsten Punkt ($x = 0$) die *größte* Krümmung besitzt.

c) Bestimmen Sie den *Krümmungskreis* im tiefsten Punkt des Seiles.

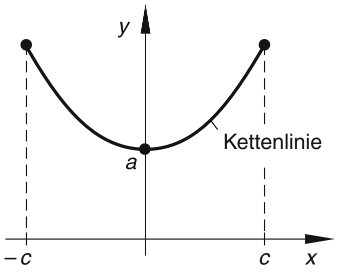


Bild B-13

---

a) Wir bestimmen zunächst die für das Krümmungsverhalten maßgeblichen Ableitungen y' und y'' und daraus dann die Abhängigkeit der *Krümmung* κ von der Koordinate x:

$$y = a \cdot \cosh\underbrace{\left(\frac{x}{a}\right)}_{u} = a \cdot \cosh u \quad \text{mit} \quad u = \frac{x}{a} \qquad (\textit{Kettenregel} \text{ verwenden!})$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (a \cdot \sinh u) \cdot \frac{1}{a} = \frac{a \cdot \sinh u}{a} = \sinh u = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Nochmalige Anwendung der *Kettenregel* (mit der selben Substitution) liefert die 2. Ableitung:

$$y' = \sinh\underbrace{\left(\frac{x}{a}\right)}_{u} = \sinh u \quad \text{mit} \quad u = \frac{x}{a} \quad \Rightarrow \quad y'' = (\cosh u) \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot \cosh u = \frac{1}{a} \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Kurvenkrümmung in Abhängigkeit von der Abszisse x

$$\kappa(x) = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}} = \frac{\frac{1}{a} \cdot \cosh(x/a)}{[1+\sinh^2(x/a)]^{3/2}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\cosh(x/a)}{[\cosh^2(x/a)]^{3/2}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\cosh(x/a)}{\cosh^3(x/a)} =$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{\cosh(x/a)}{\cosh(x/a) \cdot \cosh^2(x/a)} = \frac{1}{a \cdot \cosh^2(x/a)}$$

(unter Verwendung der Beziehung $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1 \quad \Rightarrow \quad \cosh^2 u = 1 + \sinh^2 u$ mit $u = x/a$)

Wegen $a > 0$ und $\cosh^2(x/a) > 0$ ist der Nenner *stets positiv* und daher auch $\kappa > 0$. Dies aber bedeutet *Linkskrümmung* an jeder Stelle der Kettenlinie.

b) Die Krümmung ist im *tiefsten* Kurvenpunkt (d. h. an der Stelle $x = 0$) am *größten*, da dort der Nenner des Bruches seinen *kleinsten* Wert hat ($\cosh^2 0 = 1$, sonst $\cosh^2 x > 1$).

c) **Krümmungskreis im tiefsten Punkt $P = (0; a)$**

Krümmung bzw. Krümmungsradius in P:

$$\kappa(0) = \frac{1}{a \cdot \cosh^2 0} = \frac{1}{a \cdot 1} = \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad \varrho(0) = \frac{1}{|\kappa(0)|} = \frac{1}{1/a} = a$$

Der *Krümmungsmittelpunkt* M muss auf der *Symmetrieachse* (d. h. y-Achse) liegen, und zwar im Abstand $\varrho(0) = a$ *oberhalb* von $P = (0; a)$. M hat somit die Koordinaten $x_0 = 0$ und $y_0 = 2a$.

Krümmungskreis: Mittelpunkt $M = (0; 2a)$; Radius $\varrho = a$

B70

Die gewöhnliche Zykloide (Rollkurve) lässt sich in der Parameterform

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t) \qquad (\text{Parameter: Drehwinkel } t \geq 0)$$

darstellen.

a) Bestimmen Sie die *Krümmung* der Kurve in Abhängigkeit vom Parameter (Drehwinkel) t.

b) Wo im Periodenintervall $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ist der *Krümmungsradius* ϱ am *größten*? Bestimmen Sie den zugehörigen *Krümmungskreis*.

---

a) Wir benötigen für die Berechnung der *Krümmung* die ersten beiden Ableitungen der Parametergleichungen. Sie lauten:

$$\dot{x} = R(1 - \cos t), \quad \ddot{x} = R(0 + \sin t) = R \cdot \sin t, \quad \dot{y} = R(0 + \sin t) = R \cdot \sin t, \quad \ddot{y} = R \cdot \cos t$$

Für die Abhängigkeit der Krümmung κ vom Parameter t entnehmen wir der Formelsammlung die folgende Berechnungsformel:

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \qquad (\rightarrow \text{ FS: Kap. XIII.1.5})$$

Der besseren Übersicht wegen berechnen wir Zähler und Nenner getrennt und vereinfachen dabei so weit wie möglich:

$$\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = R(1 - \cos t) \cdot R \cdot \cos t - R \cdot \sin t \cdot R \cdot \sin t = R^2(\cos t - \cos^2 t) - R^2 \cdot \sin^2 t =$$

$$= R^2(\cos t - \underbrace{\cos^2 t - \sin^2 t}_{-1}) = R^2(\cos t - 1) = -R^2(1 - \cos t)$$

(unter Verwendung der trigonometrischen Beziehung $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$)

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = R^2(1 - \cos t)^2 + R^2 \cdot \sin^2 t = R^2(1 - 2 \cdot \cos t + \cos^2 t) + R^2 \cdot \sin^2 t =$$

$$= R^2(1 - 2 \cdot \cos t + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1}) = R^2(2 - 2 \cdot \cos t) = 2R^2(1 - \cos t)$$

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2} = [2R^2(1 - \cos t)]^{3/2} = (2R^2)^{3/2} \cdot (1 - \cos t)^{3/2} =$$

$$= 2^{3/2} \cdot (R^2)^{3/2} \cdot (1 - \cos t)^1 \cdot (1 - \cos t)^{1/2} = 2\sqrt{2} \cdot R^3(1 - \cos t) \cdot \sqrt{1 - \cos t}$$

Einsetzen dieser Ausdrücke in die Krümmungsformel ergibt:

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{-R^2(1 - \cos t)}{2\sqrt{2} \cdot R \cdot R^2(1 - \cos t) \cdot \sqrt{1 - \cos t}} = \frac{-1}{2\sqrt{2} \cdot R \cdot \sqrt{1 - \cos t}}$$

Die *Krümmung* ist im Intervall $0 < t < 2\pi$ stets *negativ*, die Kurve somit nach *rechts* gekrümmt $(1 - \cos t > 0)$.

b) Für den *Krümmungsradius* ϱ in Abhängigkeit vom Parameter t gilt dann:

$$\varrho(t) = \frac{1}{|K(t)|} = \frac{1}{\left| \dfrac{-1}{2\sqrt{2} \cdot R \cdot \sqrt{1 - \cos t}} \right|} = 2\sqrt{2}\, R \cdot \sqrt{1 - \cos t}$$

Der *größte* Wert für ϱ liegt vor, wenn der Wurzelradikand $1 - \cos t$ am *größten* wird. Dies ist der Fall, wenn $\cos t$ den *kleinsten* Wert -1 annimmt. Dieser Wert wird bekanntlich an der Stelle $t = \pi$ erreicht. Der *Krümmungsradius* ϱ hat also für $t = \pi$ seinen *größten* Wert (dies entspricht einer *halben* Drehung des Rades und somit der *höchsten* Stelle der Rollkurve, siehe hierzu auch Bild B-14).

Krümmungskreis für $t = \pi$

$$t = \pi \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} x &= R(\pi - \sin \pi) = R(\pi - 0) = \pi R \\ y &= R(1 - \cos \pi) = R(1 + 1) = 2R \end{aligned} \right\} \quad \Rightarrow \quad P = (\pi R;\, 2R)$$

$$\varrho_{\max} = \varrho(t = \pi) = 2\sqrt{2}\, R \cdot \sqrt{1 - \cos \pi} = 2\sqrt{2}\, R \cdot \sqrt{1 + 1} = 2\sqrt{2}\, R \cdot \sqrt{2} = 4R$$

Da die Rollkurve *spiegelsymmetrisch* bezüglich der Geraden $x = \pi R$ (Parallele zur y-Achse durch den höchsten Punkt $P = (\pi R; 2R)$) verläuft, liegt auch der *Krümmungsmittelpunkt* M auf dieser Geraden und zwar um die Strecke $\varrho_{\max} = 4R$ *unterhalb* des Punktes P:

Krümmungskreis in $P = (\pi R; 2R)$: Mittelpunkt $M = (\pi R; -2R)$; Radius $\varrho = 4R$

Bild B-14 zeigt den Verlauf der *Rollkurve* im Parameterintervall $0 \le t \le 2\pi$ und den *Krümmungskreis* im höchsten Kurvenpunkt.

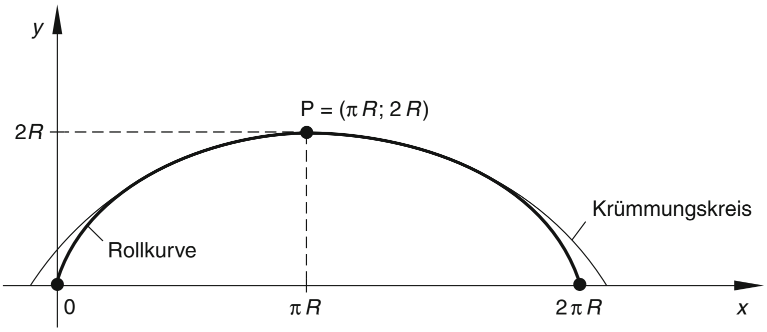


Bild B-14

2.5 Relative Extremwerte, Wende- und Sattelpunkte

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel IV.3.4
Formelsammlung: Kapitel IV.4.5 und 4.6

B71 Bestimmen Sie die *relativen Extremwerte* der Funktion $y = x - \arctan(2x)$.

Wir bilden zunächst die benötigten Ableitungen y' und y''.

$$y = x - \arctan \underbrace{(2x)}_{u} = x - \arctan u \quad \text{mit} \quad u = 2x, \quad u' = 2$$

Summen- und *Kettenregel* liefern:

$$y' = 1 - \frac{1}{1+u^2} \cdot 2 = \frac{1(1+u^2) - 2}{1+u^2} = \frac{1+u^2-2}{1+u^2} = \frac{u^2-1}{u^2+1} = \frac{4x^2-1}{4x^2+1}$$

Mit Hilfe der *Quotientenregel* bilden wir die 2. Ableitung:

$$y' = \frac{4x^2-1}{4x^2+1} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = 4x^2 - 1, \quad v = 4x^2 + 1 \quad \text{und} \quad u' = 8x, \quad v' = 8x$$

$$y'' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{8x(4x^2+1) - 8x(4x^2-1)}{(4x^2+1)^2} = \frac{32x^3 + 8x - 32x^3 + 8x}{(4x^2+1)^2} = \frac{16x}{(4x^2+1)^2}$$

Wir berechnen jetzt die Kurvenpunkte mit einer *waagerechten* Tangente (*notwendige* Bedingung für einen relativen Extremwert):

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4x^2-1}{4x^2+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm \frac{1}{2}$$

Die 2. Ableitung muss *ungleich* Null sein und entscheidet mit ihrem *Vorzeichen* über die *Art* des Extremwertes (*hinreichende* Bedingung für einen Extremwert):

$$y''\left(x_1 = \frac{1}{2}\right) = \frac{8}{(1+1)^2} = \frac{8}{4} = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{relatives Minimum}$$

$$y''\left(x_2 = -\frac{1}{2}\right) = \frac{-8}{(1+1)^2} = \frac{-8}{4} = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{relatives Maximum}$$

Wir berechnen noch die zugehörigen Ordinaten:

$$y_1 = \frac{1}{2} - \arctan 1 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = -0{,}2854; \quad y_2 = -\frac{1}{2} - \arctan(-1) = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = 0{,}2854$$

Es gibt somit *zwei* Extremwerte. Sie lauten:

$$\text{Min} = (0{,}5;\ -0{,}2854); \quad \text{Max} = (-0{,}5;\ 0{,}2854)$$

B72

Bestimmen Sie die *relativen Extremwerte* der Funktion $y = \ln \sqrt{1 + x^2} + \arctan x$.

Wir *vereinfachen* zunächst die Funktion unter Verwendung der logarithmischen *Rechenregel* $\ln a^n = n \cdot \ln a$:

$$y = \ln \sqrt{1 + x^2} + \arctan x = \ln (1 + x^2)^{1/2} + \arctan x = \frac{1}{2} \cdot \ln (1 + x^2) + \arctan x$$

Die 1. Ableitung erhalten wir durch *gliedweise* Differentiation, wobei der 1. Summand nach der *Kettenregel* zu differenzieren ist:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \ln \underbrace{(1 + x^2)}_{u} + \arctan x = \frac{1}{2} \cdot \ln u + \arctan x \quad \text{mit} \quad u = 1 + x^2, \quad u' = 2x$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u} \cdot 2x + \frac{1}{1 + x^2} = \frac{x}{u} + \frac{1}{1 + x^2} = \frac{x}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + x^2} = \frac{x + 1}{1 + x^2}$$

Für die 2. Ableitung verwenden wir die *Quotientenregel:*

$$y' = \frac{x + 1}{1 + x^2} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = x + 1, \quad v = 1 + x^2 \quad \text{und} \quad u' = 1, \quad v' = 2x$$

$$y'' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{1(1 + x^2) - 2x(x + 1)}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 + x^2 - 2x^2 - 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2 - 2x}{(1 + x^2)^2}$$

Berechnung der relativen Extremwerte: $y' = 0, \; y'' \neq 0$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x + 1}{1 + x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1$$

Die Kurve besitzt also an der Stelle $x_1 = -1$ eine *waagerechte* Tangente. Wie verhält sich die 2. Ableitung an dieser Stelle?

$$y''(x_1 = -1) = \frac{1 - 1 + 2}{(1 + 1)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{relatives Minimum}$$

Die Kurve ist demnach an der Stelle $x_1 = -1$ nach *links* gekrümmt und besitzt daher dort ein *relatives Minimum.*

Zugehöriger Ordinatenwert: $y_1 = \frac{1}{2} \cdot \ln (1 + 1) + \arctan(-1) = \frac{1}{2} \cdot \ln 2 - \frac{\pi}{4} = -0{,}4388$

Ergebnis: Relatives Minimum in $(-1; -0{,}4388)$

B73

Wo besitzt die Funktion $y = 2\sqrt{1 - x} + 2\sqrt{x + 1}, \; -1 \leq x \leq 1$ *relative Extremwerte*?

Bildung der benötigten Ableitungen y' und y''

Die 1. Ableitung erhalten wir durch *gliedweise* Differentiation, wobei *beide* Summanden nach der *Kettenregel* zu differenzieren sind:

$$y = 2\sqrt{\underbrace{1 - x}_{u}} + 2\sqrt{\underbrace{x + 1}_{v}} = 2\sqrt{u} + 2\sqrt{v} \quad \text{mit} \quad u = 1 - x, \quad v = x + 1 \quad \text{und} \quad u' = -1, \quad v' = 1$$

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot v' = \frac{1}{\sqrt{1 - x}} \cdot (-1) + \frac{1}{\sqrt{x + 1}} \cdot 1 = -\frac{1}{\sqrt{1 - x}} + \frac{1}{\sqrt{x + 1}}$$

Bevor wir die 2. Ableitung bilden, verwandeln wir die Wurzelausdrücke in *Potenzen* mit negativ gebrochenen Exponenten, die mit Hilfe der *Kettenregel* leicht zu differenzieren sind:

$$y' = -\frac{1}{(1-x)^{1/2}} + \frac{1}{(x+1)^{1/2}} = -\underbrace{(1-x)}_{u}{}^{-1/2} + \underbrace{(x+1)}_{v}{}^{-1/2} = -u^{-1/2} + v^{-1/2}$$

$$u = 1 - x, \quad v = x + 1 \quad \text{und} \quad u' = -1, \quad v' = 1$$

$$y'' = -\left(-\frac{1}{2}\right) u^{-3/2} \cdot (-1) - \frac{1}{2} v^{-3/2} \cdot 1 = \frac{-1}{2u^{3/2}} - \frac{1}{2v^{3/2}} = \frac{-1}{2\sqrt{u^3}} - \frac{1}{2\sqrt{v^3}} =$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{(1-x)^3}} - \frac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{(1-x)^3}} + \frac{1}{\sqrt{(x+1)^3}}\right)$$

Berechnung der relativen Extremwerte: $y' = 0, \ y'' \neq 0$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{x+1} \ \mid \text{quadrieren} \quad \Rightarrow \quad 1 - x = x + 1 \quad \Rightarrow \quad -2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

Der gefundene Wert $x_1 = 0$ erfüllt die Wurzelgleichung und ist daher eine Lösung (die Kurve hat an dieser Stelle eine *waagerechte* Tangente). Anhand der 2. Ableitung prüfen wir die Art der Kurvenkrümmung (*Rechts-* oder *Linkskrümmung*):

$$y''(x_1 = 0) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1^3}} + \frac{1}{\sqrt{1^3}}\right) = -\frac{1}{2}(1+1) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{relatives Maximum}$$

Zugehöriger Ordinatenwert: $y_1 = 2\sqrt{1} + 2\sqrt{1} = 2 + 2 = 4$

Ergebnis: Relatives Maximum in $(0;\,4)$

B74

Bremskraft K einer Wirbelstrombremse in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v:

$$K(v) = \frac{v}{v^2 + a^2} \qquad (a > 0;\ v \geq 0)$$

Bei welcher Geschwindigkeit erreicht die Bremskraft ihren *größten* Wert?

Wir bilden zunächst die benötigten Ableitungen 1. und 2. Ordnung, jeweils mit Hilfe der *Quotientenregel*:

$$K(v) = \frac{v}{v^2 + a^2} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{mit} \quad \alpha = v, \quad \beta = v^2 + a^2 \quad \text{und} \quad \alpha' = 1, \quad \beta' = 2v$$

$$K'(v) = \frac{\alpha'\beta - \beta'\alpha}{\beta^2} = \frac{1(v^2 + a^2) - 2v \cdot v}{(v^2 + a^2)^2} = \frac{v^2 + a^2 - 2v^2}{(v^2 + a^2)^2} = \frac{a^2 - v^2}{(v^2 + a^2)^2}$$

$$K'(v) = \frac{a^2 - v^2}{(v^2 + a^2)^2} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\alpha = a^2 - v^2, \quad \beta = (v^2 + a^2)^2 \quad \text{und} \quad \alpha' = -2v, \quad \beta' = 2(v^2 + a^2) \cdot 2v = 4v(v^2 + a^2)$$

(β wurde dabei nach der *Kettenregel* differenziert, Substitution: $t = v^2 + a^2$)

$$K''(v) = \frac{\alpha'\beta - \beta'\alpha}{\beta^2} = \frac{-2v(v^2+a^2)^2 - 4v(v^2+a^2)(a^2-v^2)}{(v^2+a^2)^4} =$$

$$= \frac{(v^2+a^2)\,[-2v(v^2+a^2) - 4v(a^2-v^2)]}{(v^2+a^2)\cdot(v^2+a^2)^3} = \frac{-2v^3 - 2a^2v - 4a^2v + 4v^3}{(v^2+a^2)^3} = \frac{2v^3 - 6a^2v}{(v^2+a^2)^3}$$

Umformungen: Im Zähler den gemeinsamen Faktor $v^2 + a^2$ ausklammern, dann kürzen.

Berechnung des gesuchten Maximums: $\boldsymbol{K'(v) = 0,\ K''(v) < 0}$

$$K'(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2 - v^2}{(v^2+a^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 - v^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{1/2} = \pm a$$

Wegen $v \geq 0$ kommt nur der *positive* Wert $v_1 = a$ infrage. An dieser Stelle gilt:

$$K''(v_1 = a) = \frac{2a^3 - 6a^3}{(a^2+a^2)^3} = \frac{-4a^3}{8a^6} = -\frac{1}{2a^3} < 0$$

(wegen $a > 0$ nach Aufgabenstellung). Die *hinreichende* Bedingung für ein *Maximum* ist damit erfüllt.

Ergebnis: Für $v = a$ wird die Bremskraft am *größten*. Sie beträgt dann:

$$K_{\max} = K(v = a) = \frac{a}{a^2 + a^2} = \frac{a}{2a^2} = \frac{1}{2a}$$

B75

Zeigen Sie: Die Funktion $y = 3 + \dfrac{x}{(x+a)^2}$ mit $a > 0$ besitzt an der Stelle $x_1 = a$ ein *relatives Maximum.*

Wir müssen zeigen, dass an der Stelle $x_1 = a$ die folgenden *hinreichenden* Bedingungen für ein *relatives Maximum* erfüllt sind:

$$y'(x_1 = a) = 0 \quad (\textit{waagerechte}\ \text{Tangente}), \qquad y''(x_1 = a) < 0 \quad (\textit{Rechtskrümmung}\ \text{der Kurve})$$

Daher bilden wir zunächst die benötigten Ableitungen y' und y'', jeweils mit Hilfe der *Quotientenregel* in Verbindung mit der *Kettenregel*:

$$y = 3 + \frac{x}{(x+a)^2} = 3 + \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = x, \quad v = (x+a)^2 \quad \text{und} \quad u' = 1, \quad v' = 2(x+a)$$

(die Ableitung von v erhalten wir mit der *Kettenregel*, Substitution: $t = x + a$)

$$y' = 0 + \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{1(x+a)^2 - 2(x+a)x}{(x+a)^4} = \frac{(x+a)\,[(x+a) - 2x]}{(x+a)\,(x+a)^3} = \frac{x + a - 2x}{(x+a)^3} = \frac{a-x}{(x+a)^3}$$

$$y' = \frac{a-x}{(x+a)^3} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = a - x, \quad v = (x+a)^3 \quad \text{und} \quad u' = -1, \quad v' = 3(x+a)^2$$

(v' haben wir mit Hilfe der *Kettenregel* gebildet, analog wie bei der 1. Ableitung, Substitution: $t = x + a$)

$$y'' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{-1(x+a)^3 - 3(x+a)^2(a-x)}{(x+a)^6} = \frac{(x+a)^2\,[-(x+a) - 3(a-x)]}{(x+a)^2\cdot(x+a)^4} =$$

$$= \frac{-x - a - 3a + 3x}{(x+a)^4} = \frac{2x - 4a}{(x+a)^4}$$

Einsetzen des Wertes $x_1 = a$ in y' und y'':

$$y'(x_1 = a) = \frac{a - a}{(a + a)^3} = \frac{0}{8a^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{waagerechte}\text{ Tangente}$$

$$y''(x_1 = a) = \frac{2a - 4a}{(a + a)^4} = \frac{-2a}{16a^4} = -\frac{1}{8a^3} < 0 \qquad (\text{wegen } a > 0) \quad \Rightarrow \quad \text{relatives } \textit{Maximum}$$

Damit haben wir die Behauptung als richtig nachgewiesen. Die zugehörige Ordinate lautet:

$$y_1 = 3 + \frac{a}{(a + a)^2} = 3 + \frac{a}{4a^2} = 3 + \frac{1}{4a} = \frac{12a + 1}{4a}$$

Ergebnis: Relatives Maximum in $\left(a;\ \frac{12a + 1}{4a}\right)$

B76 Bestimmen Sie die relativen *Extremwerte, Wende-* und *Sattelpunkte* der Funktion $y = x^3 \cdot e^{-2x}$.

Bildung aller benötigten Ableitungen (bis zur 3. Ordnung)

Wir benötigen jeweils die *Produkt-* und *Kettenregel*.

1. Ableitung

$$y = \underbrace{x^3}_{u} \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = x^3, \quad v = e^{-2x} \quad \text{und} \quad u' = 3x^2, \quad v' = -2 \cdot e^{-2x}$$

(Ableitung von $v = e^{-2x}$ nach der *Kettenregel*, Substitution: $t = -2x$)

$$y' = u'v + v'u = 3x^2 \cdot e^{-2x} - 2 \cdot e^{-2x} \cdot x^3 = (3x^2 - 2x^3) \cdot e^{-2x}$$

2. Ableitung

$$y' = \underbrace{(3x^2 - 2x^3)}_{u} \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{v} = uv, \quad u = 3x^2 - 2x^3, \quad v = e^{-2x}, \quad u' = 6x - 6x^2, \quad v' = -2 \cdot e^{-2x}$$

$$\begin{aligned} y'' &= u'v + v'u = (6x - 6x^2) \cdot e^{-2x} - 2 \cdot e^{-2x} \cdot (3x^2 - 2x^3) = \\ &= [6x - 6x^2 - 2(3x^2 - 2x^3)] \cdot e^{-2x} = (6x - 6x^2 - 6x^2 + 4x^3) \cdot e^{-2x} = \\ &= (4x^3 - 12x^2 + 6x) \cdot e^{-2x} \end{aligned}$$

3. Ableitung

$$y'' = \underbrace{(4x^3 - 12x^2 + 6x)}_{u} \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{v} = uv$$

$$u = 4x^3 - 12x^2 + 6x, \quad v = e^{-2x} \quad \text{und} \quad u' = 12x^2 - 24x + 6, \quad v' = -2 \cdot e^{-2x}$$

$$\begin{aligned} y''' &= u'v + v'u = (12x^2 - 24x + 6) \cdot e^{-2x} - 2 \cdot e^{-2x} \cdot (4x^3 - 12x^2 + 6x) = \\ &= [12x^2 - 24x + 6 - 2(4x^3 - 12x^2 + 6x)] \cdot e^{-2x} = \\ &= (12x^2 - 24x + 6 - 8x^3 + 24x^2 - 12x) \cdot e^{-2x} = (-8x^3 + 36x^2 - 36x + 6) \cdot e^{-2x} \end{aligned}$$

Berechnung der Extremwerte: $y' = 0, \; y'' \neq 0$

$$y' = 0 \;\Rightarrow\; (3x^2 - 2x^3) \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{\neq 0} = 0 \;\Rightarrow\; 3x^2 - 2x^3 = x^2(3 - 2x) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = 0 \\ 3 - 2x = 0 \;\Rightarrow\; x_3 = 1{,}5 \end{array} \right.$$

Wir prüfen jetzt über die 2. Ableitung, ob an diesen Stellen *relative Extremwerte* vorliegen:

$$y''(x_{1/2} = 0) = (4 \cdot 0 - 12 \cdot 0 + 6 \cdot 0) \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0$$

An der Stelle $x_{1/2} = 0$ ist die *hinreichende* Bedingung für einen Extremwert $(y'' \neq 0)$ *nicht* erfüllt. Es *kann* sich um einen *Sattelpunkt* handeln (siehe spätere Berechnung der Wende- und Sattelpunkte).

$$y''(x_3 = 1{,}5) = (13{,}5 - 27 + 9) \cdot e^{-3} = -4{,}5 \cdot e^{-3} < 0 \quad\Rightarrow\quad \text{relatives Maximum}$$

Die Koordinaten des Maximums lauten: $x_3 = 1{,}5; \quad y_3 = (1{,}5)^3 \cdot e^{-3} = 0{,}1680$

Relative Extremwerte: Max $= (1{,}5;\, 0{,}1680)$

Berechnung der Wendepunkte: $y'' = 0, \; y''' \neq 0$

$$y'' = 0 \;\Rightarrow\; (4x^3 - 12x^3 + 6x) \cdot \underbrace{e^{-2x}}_{\neq 0} = 0 \;\Rightarrow\; 4x^3 - 12x^2 + 6x = 0$$

$$\Rightarrow\; x(4x^2 - 12x + 6) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \;\Rightarrow\; x_4 = 0 \\ 4x^2 - 12x + 6 = 0 \;\Rightarrow\; x_5 = 2{,}3660, \quad x_6 = 0{,}6340 \end{array} \right.$$

(bitte nachrechnen!). Wir prüfen jetzt, ob an diesen Stellen die *hinreichende* Bedingung für einen *Wendepunkt* erfüllt ist:

$$y'''(x_4 = 0) = 6 \cdot e^0 = 6 \cdot 1 = 6 \neq 0 \quad\Rightarrow\quad \text{Wendepunkt}$$

$$\begin{aligned} y'''(x_5 = 2{,}3660) &= (-105{,}9581 + 201{,}5264 - 85{,}1760 + 6) \cdot e^{-4{,}7320} = \\ &= 16{,}3923 \cdot e^{-4{,}7320} \neq 0 \quad\Rightarrow\quad \text{Wendepunkt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'''(x_6 = 0{,}6340) &= (-2{,}0387 + 14{,}4704 - 22{,}8240 + 6) \cdot e^{-1{,}2680} = \\ &= -4{,}3923 \cdot e^{-1{,}2680} \neq 0 \quad\Rightarrow\quad \text{Wendepunkt} \end{aligned}$$

Es gibt somit *drei* Wendepunkte: $W_1 = (0;\, 0)$; $W_2 = (2{,}3660;\, 0{,}1167)$; $W_3 = (0{,}6340;\, 0{,}0717)$

Der Wendepunkt W_1 ist sogar ein *Sattelpunkt*, denn die dortige Tangente verläuft *waagerecht* (was wir bereits weiter vorne vermutet haben):

$$y'(0) = 0 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0$$

B77

$y = (x - 1) \cdot e^{-2x}$

Bestimmen Sie die *relativen Extremwerte*, *Wendepunkte* und *Wendetangenten* dieser Funktion.

Wir bilden zunächst die benötigten ersten drei Ableitungen, die wir jeweils mit Hilfe von *Produkt-* und *Kettenregel* erhalten.

1. Ableitung (Produkt- und Kettenregel)

$$y = \underbrace{(x-1)}_{u} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-2x}}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = x-1, \quad v = \mathrm{e}^{-2x} \quad \text{und} \quad u' = 1, \quad v' = -2 \cdot \mathrm{e}^{-2x}$$

(der Faktor $v = \mathrm{e}^{-2x}$ wurde dabei nach der *Kettenregel* differenziert, Substitution: $t = -2x$)

$$y' = u'v + v'u = 1 \cdot \mathrm{e}^{-2x} - 2 \cdot \mathrm{e}^{-2x} \cdot (x-1) = [1 - 2(x-1)] \cdot \mathrm{e}^{-2x} = (3-2x) \cdot \mathrm{e}^{-2x}$$

2. Ableitung (Produkt- und Kettenregel)

$$y' = \underbrace{(3-2x)}_{u} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-2x}}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = 3-2x, \quad v = \mathrm{e}^{-2x} \quad \text{und} \quad u' = -2, \quad v' = -2 \cdot \mathrm{e}^{-2x}$$

$$y'' = u'v + v'u = -2 \cdot \mathrm{e}^{-2x} - 2 \cdot \mathrm{e}^{-2x} \cdot (3-2x) = [-2 - 2(3-2x)] \cdot \mathrm{e}^{-2x} = (-8+4x) \cdot \mathrm{e}^{-2x}$$

3. Ableitung (Produkt- und Kettenregel)

$$y'' = \underbrace{(-8+4x)}_{u} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-2x}}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = -8+4x, \quad v = \mathrm{e}^{-2x} \quad \text{und} \quad u' = 4, \quad v' = -2 \cdot \mathrm{e}^{-2x}$$

$$y''' = u'v + v'u = 4 \cdot \mathrm{e}^{-2x} - 2 \cdot \mathrm{e}^{-2x} \cdot (-8+4x) = [4 - 2(-8+4x)] \cdot \mathrm{e}^{-2x} = (20-8x) \cdot \mathrm{e}^{-2x}$$

Berechnung der Extremwerte: $y' = 0, \; y'' \neq 0$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad (3-2x) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-2x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1{,}5$$

$$y''(x_1 = 1{,}5) = (-8+6) \cdot \mathrm{e}^{-3} = -2 \cdot \mathrm{e}^{-3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{relatives Maximum}$$

Zugehörige Ordinate: $y_1 = (1{,}5 - 1) \cdot \mathrm{e}^{-3} = 0{,}5 \cdot \mathrm{e}^{-3} = 0{,}0249$

Extremwerte: Max $= (1{,}5;\ 0{,}0249)$

Berechnung der Wendepunkte: $y'' = 0, \; y''' \neq 0$

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad (-8+4x) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-2x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad -8 + 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2$$

$$y'''(x_2 = 2) = (20 - 16) \cdot \mathrm{e}^{-4} = 4 \cdot \mathrm{e}^{-4} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt}$$

Zugehörige Ordinate: $y_2 = (2 - 1) \cdot \mathrm{e}^{-4} = \mathrm{e}^{-4} = 0{,}0183$

Wendepunkte: $W = (2;\ 0{,}0183)$

Wendetangente in $W = (2; 0{,}0183)$

Steigung in W: $m = y'(x_2 = 2) = (3-4) \cdot \mathrm{e}^{-4} = -\mathrm{e}^{-4} = -0{,}0183$

Gleichung der Wendetangente (Ansatz in der *Punkt-Steigungs-Form*):

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = m \quad \Rightarrow \quad \frac{y - 0{,}0183}{x - 2} = -0{,}0183 \quad \Rightarrow \quad y - 0{,}0183 = -0{,}0183\,(x-2) = -0{,}0183\,x + 0{,}0366$$

$$\Rightarrow \quad y = -0{,}0183\,x + 0{,}0549$$

Wendetangente: $y = -0{,}0183\,x + 0{,}0549$

B78 Wo besitzt die Funktion $y = 2x^2 \cdot \ln \sqrt{x},\ x > 0$ *relative Extremwerte* bzw. *Wendepunkte*?

Die Funktion wird zunächst wie folgt *vereinfacht*:

$$y = 2x^2 \cdot \ln \sqrt{x} = 2x^2 \cdot \ln x^{1/2} = 2x^2 \cdot \frac{1}{2} \ln x = x^2 \cdot \ln x \qquad \text{(Rechenregel: } \ln a^n = n \cdot \ln a\text{)}$$

Ableitungen 1. bis 3. Ordnung (Produktregel)

$$y = \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{\ln x}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = x^2, \quad v = \ln x \quad \text{und} \quad u' = 2x, \quad v' = \frac{1}{x}$$

$$y' = u'v + v'u = 2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x^2 = 2x \cdot \ln x + x$$

$$y' = \underbrace{2x}_{u} \cdot \underbrace{\ln x}_{v} + x = uv + x \quad \text{mit} \quad u = 2x, \quad v = \ln x \quad \text{und} \quad u' = 2, \quad v' = \frac{1}{x}$$

$$y'' = u'v + v'u + 1 = 2 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot 2x + 1 = 2 \cdot \ln x + 2 + 1 = 2 \cdot \ln x + 3$$

$$y''' = 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

Berechnung der Extremwerte: $y' = 0,\ y'' \neq 0$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x \cdot \ln x + x = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x}_{>\,0}(2 \cdot \ln x + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \ln x + 1 = 0$$

Diese *logarithmische Gleichung* lösen wir wie folgt durch *Entlogarithmieren* (*Rechenregel:* $e^{\ln z} = z$ für $z > 0$):

$$2 \cdot \ln x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = -0{,}5 \quad \Rightarrow \quad e^{\ln x} = x = e^{-0{,}5} \quad \Rightarrow \quad x_1 = e^{-0{,}5}$$

Es gibt somit nur *einen* Kurvenpunkt mit *waagerechter* Tangente. Wegen

$$y''(x_1 = e^{-0{,}5}) = 2 \cdot \ln e^{-0{,}5} + 3 = 2 \cdot (-0{,}5) + 3 = -1 + 3 = 2 > 0$$

liegt ein *relatives Minimum* vor. Die zugehörigen Koordinaten lauten:

$$x_1 = e^{-0{,}5} = 0{,}6065; \quad y_1 = (e^{-0{,}5})^2 \cdot \ln e^{-0{,}5} = e^{-1} \cdot (-0{,}5) = -0{,}5 \cdot e^{-1} = -0{,}1839$$

Relative Extremwerte: Min $= (0{,}6065;\ -0{,}1839)$

Berechnung der Wendepunkte: $y'' = 0,\ y''' \neq 0$

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \ln x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = -1{,}5 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{e^{\ln x}}_{x} = e^{-1{,}5} \quad \Rightarrow \quad x_2 = e^{-1{,}5}$$

$$y'''(x_2 = e^{-1{,}5}) = \frac{2}{e^{-1{,}5}} = 2 \cdot e^{1{,}5} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt}$$

Die Koordinaten des Wendepunktes sind:

$$x_2 = e^{-1{,}5} = 0{,}2231; \quad y_2 = (e^{-1{,}5})^2 \cdot \ln e^{-1{,}5} = e^{-3} \cdot (-1{,}5) \cdot \underbrace{\ln e}_{1} = -1{,}5 \cdot e^{-3} = -0{,}0747$$

Wendepunkte: $W = (0{,}2231;\ -0{,}0747)$

2.6 Kurvendiskussion

Diskutieren Sie den Verlauf der Funktionen und Kurven nach dem folgenden Schema: Definitionsbereich, Symmetrie, Nullstellen, Pole, Ableitungen (in der Regel bis zur 3. Ordnung), relative Extremwerte, Wende- und Sattelpunkte, Verhalten „im Unendlichen“. Am Schluss ist eine saubere Skizze des Kurvenverlaufs anzufertigen.

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel IV.3.6

B79 $y = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$

Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$

Symmetrie: nicht vorhanden

Nullstellen: $x_1 = 1$ (durch *Probieren* gefunden)

Horner-Schema (Abspalten des Linearfaktors $x - 1$):

	1	-1	-3	5	-2
$x_1 = 1$		1	0	-3	2
	1	0	-3	2	0

$\Rightarrow$ *1. reduziertes Polynom:* $x^3 - 3x + 2$

Eine weitere Nullstelle liegt bei $x_2 = 1$ (durch Probieren gefunden).

Horner-Schema (Abspalten des Linearfaktors $x - 1$):

	1	0	-3	2
$x_2 = 1$		1	1	-2
	1	1	-2	0

$\Rightarrow$ *2. reduziertes Polynom:* $x^2 + x - 2$

Restliche Nullstellen: $x^2 + x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -2$

Die Funktion besitzt also eine *dreifache* Nullstelle bei $x_{1/2/3} = 1$ und eine *einfache* Nullstelle bei $x_4 = -2$.

Ableitungen (bis zur 3. Ordnung)

$$y' = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5, \quad y'' = 12x^2 - 6x - 6, \quad y''' = 24x - 6$$

Relative Extremwerte: $y' = 0$, $y'' \neq 0$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_5 = 1 \qquad \text{(durch } \textit{Probieren} \text{ gefunden)}$$

Horner-Schema (Abspalten des Linearfaktors $x - 1$):

	4	-3	-6	5
$x_5 = 1$		4	1	-5
	4	1	-5	0

$\Rightarrow$ *1. reduziertes Polynom:* $4x^2 + x - 5$

$$4x^2 + x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 0{,}25x - 1{,}25 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_6 = 1, \quad x_7 = -1{,}25$$

Die Kurve besitzt also an den Stellen $x_{5/6} = 1$ und $x_7 = -1{,}25$ *waagerechte* Tangenten. Ob es sich dabei auch um *Extremwerte* handelt, entscheidet die 2. Ableitung:

$$y''(x_{5/6} = 1) = 12 - 6 - 6 = 0$$

Die *hinreichende* Bedingung für einen Extremwert ist somit an der Stelle $x_{5/6} = 1$ *nicht* erfüllt (später zeigt sich, dass dort ein *Sattelpunkt* liegt).

$$y''(x_7 = -1{,}25) = 18{,}75 + 7{,}5 - 6 = 20{,}25 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{relatives Minimum}$$

Ordinate des relativen Minimums: $y_7 = -8{,}543$

Relative Extremwerte: Min $= (-1{,}25;\ -8{,}543)$

Wendepunkte: $y'' = 0,\ y''' \neq 0$

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 12x^2 - 6x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 0{,}5x - 0{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_8 = 1, \quad x_9 = -0{,}5$$

$$y'''(x_8 = 1) = 24 - 6 = 18 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt}$$

$$y'''(x_9 = -0{,}5) = -12 - 6 = -18 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt}$$

Die zugehörigen *Ordinaten* sind $y_8 = 0$ und $y_9 = -5{,}0625$.

Wendepunkte: $W_1 = (1;\ 0)$ und $W_2 = (-0{,}5;\ -5{,}0625)$

Wegen $y'(1) = 12 - 6 - 6 = 0$ ist W_1 ein *Sattelpunkt* (wie bereits weiter oben vermutet).

Bild B-15 zeigt den Verlauf der Polynomfunktion.

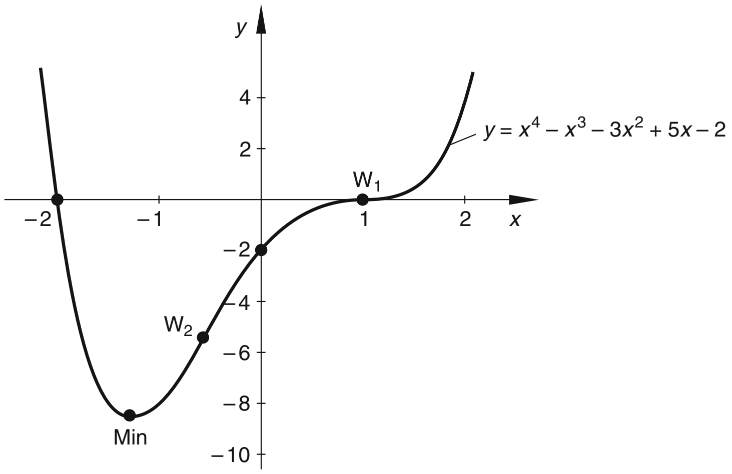


Bild B-15

B80 $$y = -\frac{(x-2)^2}{x+2}$$

Definitionsbereich: $x + 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq -2$

Symmetrie: nicht vorhanden

Nullstellen: Zähler $= 0$, Nenner $\neq 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = 2$ (*doppelte* Nullstelle)

Die Kurve berührt an dieser Stelle die x-Achse, d. h. es liegt ein *Extremwert* vor (→ relative Extremwerte).

Pole: Nenner $= 0$, Zähler $\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -2$ (Pol *mit* Vorzeichenwechsel)

Polgerade (senkrechte Asymptote): $x = -2$

Ableitungen (bis zur 3. Ordnung)

$$y = -\frac{(x-2)^2}{x+2} = -\frac{-(x-2)^2}{x+2} = \frac{-x^2+4x-4}{x+2}$$

1. Ableitung (Quotientenregel)

$$y = \frac{-x^2+4x-4}{x+2} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = -x^2+4x-4, \quad v = x+2 \quad \text{und} \quad u' = -2x+4, \quad v' = 1$$

$$y' = \frac{(-2x+4)(x+2) - 1(-x^2+4x-4)}{(x+2)^2} = \frac{-2x^2-4x+4x+8+x^2-4x+4}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{-x^2-4x+12}{(x+2)^2}$$

2. Ableitung (Quotienten- und Kettenregel)

$$y' = \frac{-x^2-4x+12}{(x+2)^2} = \frac{u}{v}, \quad u = -x^2-4x+12, \quad v = (x+2)^2 \quad \text{und} \quad u' = -2x-4, \quad v' = 2(x+2)$$

(v wurde nach der *Kettenregel* differenziert; Substitution: $t = x + 2$)

$$y'' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{(-2x-4)(x+2)^2 - 2(x+2)(-x^2-4x+12)}{(x+2)^4} =$$

$$= \frac{(x+2)\,[(-2x-4)(x+2) - 2(-x^2-4x+12)]}{(x+2)\,(x+2)^3} = \frac{(-2x-4)(x+2) - 2(-x^2-4x+12)}{(x+2)^3} =$$

$$= \frac{-2x^2-4x-4x-8+2x^2+8x-24}{(x+2)^3} = \frac{-32}{(x+2)^3}$$

Wegen $y'' \neq 0$ kann es *keine* Wendepunkte geben, die dritte Ableitung wird daher *nicht* benötigt.

Relative Extremwerte: $y' = 0,\ y'' \neq 0$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-x^2-4x+12}{(x+2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2-4x+12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 2, \quad x_5 = -6$$

Es gibt somit *zwei* Kurvenpunkte mit *waagerechter* Tangente. Wir prüfen über die 2. Ableitung, ob die *hinreichende* Bedingung für relative Extremwerte erfüllt ist:

$$y''(x_4 = 2) = \frac{-32}{4^3} = \frac{-32}{64} = -\frac{1}{2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{relatives Maximum}$$

$$y''(x_5 = -6) = \frac{-32}{(-4)^3} = \frac{-32}{-64} = \frac{1}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{relatives Minimum}$$

Zugehörige Ordinaten: $y_4 = -\dfrac{(2-2)^2}{2+2} = 0 \quad y_5 = -\dfrac{(-6-2)^2}{-6+2} = -\dfrac{64}{-4} = 16$

Relative Extremwerte: Max $= (2;\ 0)$; Min $= (-6;\ 16)$

Wendepunkte: $y'' = 0,\ y''' \neq 0$

Wegen $y'' \neq 0$ ist die *notwendige* Bedingung für Wendepunkte *nicht* erfüllbar, d. h. es gibt *keine* Wendepunkte.

Verhalten im Unendlichen

Die Funktion ist *unecht* gebrochenrational (Grad des Zählers > Grad des Nenners). Wir zerlegen sie durch *Polynomdivision* wie folgt:

$$
\begin{array}{l}
y = (-x^2 + 4x - 4) : (x + 2) = -x + 6 - \underbrace{\dfrac{16}{x+2}}_{\text{echt gebrochen}} \\
\underline{-\ (-x^2 - 2x)\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad 6x - 4 \\
\qquad\quad \underline{-(6x + 12)} \\
\qquad\qquad -\ 16
\end{array}
$$

Für *große* x-Werte dürfen wir den *echt* gebrochenen Anteil *vernachlässigen* (er strebt gegen Null). Unsere Kurve nähert sich daher „im Unendlichen“ *asymptotisch* der Geraden $y = -x + 6$.

Asymptote im Unendlichen: $y = -x + 6$

Bild B-16 zeigt den Verlauf der Kurve mit ihren beiden Asymptoten.

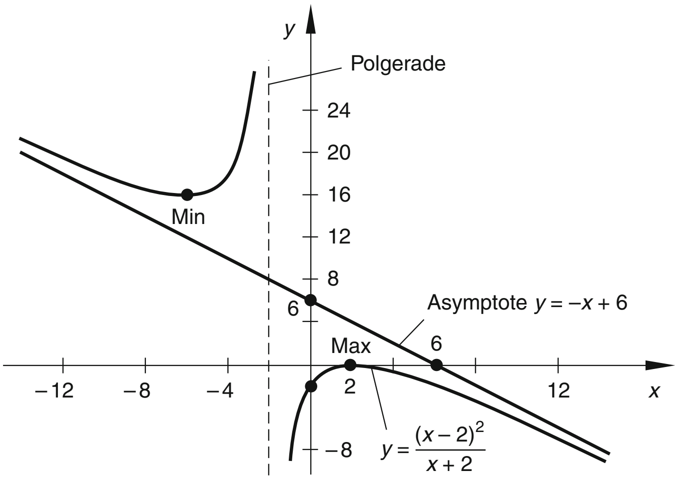


Bild B-16

B81 $y = \dfrac{3x^3 + 3x - 6}{x}$

Definitionsbereich: $x \neq 0$

Symmetrie: nicht vorhanden

Nullstellen: Zähler $= 0$, Nenner $\neq 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^3 + 3x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 + x - 2 = 0$

Durch *Probieren* findet man die Lösung $x_1 = 1$, mit dem *Horner-Schema* erhält man dann das *1. reduzierte Polynom*, dessen Nullstellen (falls vorhanden) weitere Lösungen liefern:

	1	0	1	−2
$x_1 = 1$		1	1	2
	1	1	2	0

$\Rightarrow \quad x^2 + x + 2 = 0 \quad \Rightarrow$ keine reellen Lösungen

Es gibt nur *eine* Nullstelle bei $x_1 = 1$.

Pole: Nenner $= 0$, Zähler $\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0$

Bei $x_2 = 0$ liegt eine Polstelle *mit* Vorzeichenwechsel (der Zähler ist dort *ungleich* Null).

Polgerade: $x = 0$ (y-Achse)

Ableitungen 1. bis 3. Ordnung

Durch Polynomdivision lässt sich die *unecht* gebrochenrationale Funktion auf eine für das Differenzieren *günstigere* Form bringen:

$$y = \frac{3x^3 + 3x - 6}{x} = 3x^2 + 3 - \frac{6}{x} = 3x^2 + 3 - 6x^{-1}$$

Gliedweise differenzieren:

$$y' = 6x + 0 - 6(-x^{-2}) = 6x + 6x^{-2} \quad \text{oder} \quad y' = 6x + \frac{6}{x^2} = \frac{6x^3 + 6}{x^2}$$

$$y'' = 6 + 6 \cdot (-2x^{-3}) = 6 - 12x^{-3} = 6 - \frac{12}{x^3} = \frac{6x^3 - 12}{x^3}$$

$$y''' = -12(-3x^{-4}) = 36x^{-4} = \frac{36}{x^4}$$

Relative Extremwerte: $y' = 0,\ y'' \neq 0$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x^3 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -1$$

$$y''(x_3 = -1) = \frac{-6 - 12}{-1} = 18 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{relatives Minimum}$$

Relative Extremwerte: Min $= (-1;\ 12)$

Wendepunkte: $y'' = 0,\ y''' \neq 0$

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x^3 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_4 = \sqrt[3]{2} = 1{,}260$$

$$y'''(x_4 = \sqrt[3]{2}) = \frac{36}{(\sqrt[3]{2})^4} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt}$$

Wendepunkte: $W = (1{,}260;\ 3)$

Verhalten im Unendlichen

$$y = \frac{3x^3 + 3x - 6}{x} = 3x^2 + 3 - \frac{6}{x}$$

Der *echt* gebrochenrationale Anteil $-6/x$ wird für *große* x-Werte *verschwindend klein* und darf dann *vernachlässigt* werden. Die Kurve zeigt daher „im Unendlichen“ nahezu das gleiche Verhalten wie die Polynomfunktion $y = 3x^2 + 3$ (Parabel).

Asymptote im Unendlichen: $y = 3x^2 + 3$

Bild B-17 zeigt den Verlauf der Kurve.

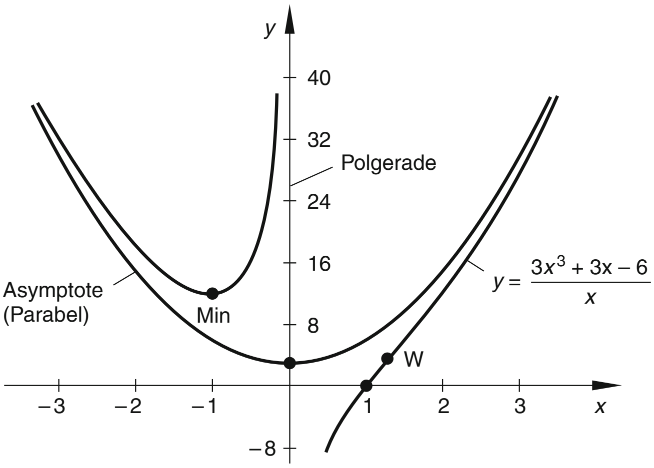


Bild B-17

B82 $y^2 = (4 - x)^2 (x + 2)$

Die Kurve besteht aus *zwei* zur x-Achse *spiegelsymmetrischen* Teilen, die durch die Funktionen

$$y = \pm (4 - x) \sqrt{x + 2}, \qquad x \geq -2$$

beschrieben werden. Wir beschränken uns im folgenden auf das *oberhalb* der x-Achse verlaufende Kurvenstück mit der Gleichung $y = (4 - x) \sqrt{x + 2}$.

Definitionsbereich: $x + 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -2$

Symmetrie: nicht vorhanden

Nullstellen: $(4 - x) \sqrt{x + 2} = 0 <$

$$4 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4$$

$$\underbrace{\sqrt{x + 2}}_{0} = 0 \quad \Rightarrow x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2$$

Zwei Nullstellen in $x_1 = 4$ und $x_2 = -2$.

Ableitungen 1. bis 3. Ordnung

$$y = \underbrace{(4 - x)}_{u} \underbrace{\sqrt{x + 2}}_{v} = u v \quad \text{mit} \quad u = 4 - x, \quad v = \sqrt{\underbrace{x + 2}_{t}} \quad \text{und} \quad u' = -1, \quad v' = \frac{1}{2 \sqrt{x + 2}}$$

(die Ableitung v' erhalten wir in der angedeuteten Weise über die *Kettenregel*, Substitution: $t = x + 2$)

Die *Produktregel* liefert dann:

$$y' = u' v + v' u = -1 \cdot \sqrt{x + 2} + \frac{1}{2 \sqrt{x + 2}} \cdot (4 - x) = -\sqrt{x + 2} + \frac{4 - x}{2 \sqrt{x + 2}} =$$

$$= \frac{-2 (x + 2) + 4 - x}{2 \sqrt{x + 2}} = \frac{-2x - 4 + 4 - x}{2 \sqrt{x + 2}} = \frac{-3x}{2 \sqrt{x + 2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{x}{(x + 2)^{1/2}}$$

Umformungen: Hauptnenner bilden $(2 \sqrt{x + 2})$, also den 1. Summand mit $2 \sqrt{x + 2}$ erweitern.

Die 2. Ableitung wird mit Hilfe der *Quotientenregel* gebildet:

$$y' = -\frac{3}{2} \cdot \frac{x}{(x + 2)^{1/2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = x, \quad v = (\underbrace{x + 2}_{t})^{1/2} \quad \text{und} \quad u' = 1, \quad v' = \frac{1}{2} (x + 2)^{-1/2}$$

(v' bekommen wir in der angedeuteten Weise mit der *Kettenregel*, Substitution: $t = x + 2$)

$$y'' = -\frac{3}{2} \cdot \frac{u' v - v' u}{v^2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1 (x + 2)^{1/2} - \frac{1}{2} (x + 2)^{-1/2} \cdot x}{(x + 2)^1}$$

Erweitern mit $2 (x + 2)^{1/2}$:

$$y'' = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2 (x + 2)^1 - x}{2 (x + 2)^{3/2}} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{2x + 4 - x}{(x + 2)^{3/2}} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{x + 4}{(x + 2)^{3/2}}$$

Die 3. Ableitung wird *nicht* benötigt, da es *keine* Wendepunkte geben kann (warum?).

Relative Extremwerte: $y' = 0, \ y'' \neq 0$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x + 2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0$$

$$y''(x_3 = 0) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{2^{3/2}} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{relatives Maximum}$$

Relative Extremwerte: Max $= (0;\, 4\sqrt{2}) = (0;\, 5{,}6569)$

Wendepunkte: $y'' = 0,\ y''' \neq 0$

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{4} \cdot \frac{x+4}{(x+2)^{3/2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 = -4$$

Dieser Wert liegt *außerhalb* des Definitionsbereiches, daher gibt es *keine* Wendepunkte (die 3. Ableitung wird also – wie bereits vorher erwähnt – *nicht* benötigt).

Zusammenfassung

Die Gesamtkurve mit der Gleichung $y^2 = (4 - x)^2\,(x + 2)$ ist nur für $x \geq -2$ definiert und verläuft *spiegelsymmetrisch* zur x-Achse (siehe Bild B-18). Sie besitzt folgende Eigenschaften:

Nullstellen: $x_1 = 4,\ x_2 = -2$; *Extremwerte:* Max $= (0;\, 5{,}6569)$, Min $= (0;\, -5{,}6569)$

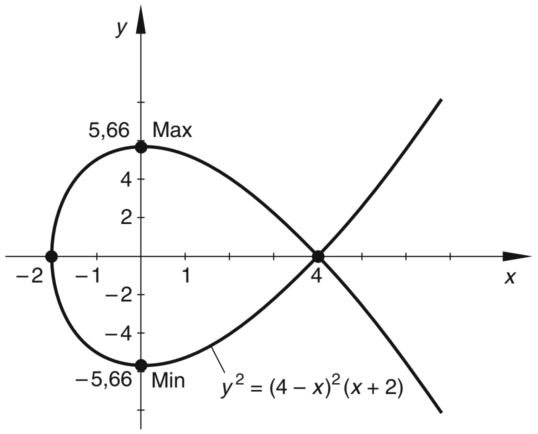


Bild B-18

B83

$$y = 1 + \sin^2 x = 1 + (\sin x)^2$$

Diese überall definierte Funktion ist *periodisch* mit der Periode $p = \pi$ und verläuft *spiegelsymmetrisch* zur y-Achse. Wir beschränken uns daher zunächst auf das *Periodenintervall* $0 \leq x \leq \pi$.

Nullstellen: Wegen $1 + \sin^2 x = 1 + (\sin x)^2 \geq 1$ gibt es *keine* Nullstellen.

Ableitungen bis zur 3. Ordnung

Gliedweise Differentiation unter Verwendung der *Kettenregel*:

$$y = 1 + (\underbrace{\sin x}_{u})^2 = 1 + u^2 \quad \text{mit} \quad u = \sin x \quad \Rightarrow \quad y' = 0 + 2u \cdot \cos x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin(2x)$$

(unter Verwendung der trigonometrischen Formel $\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$)

$$y' = \sin(\underbrace{2x}_{u}) = \sin u \quad \text{mit} \quad u = 2x \quad \Rightarrow \quad y'' = (\cos u) \cdot 2 = 2 \cdot \cos(2x)$$

$$y'' = 2 \cdot \cos(\underbrace{2x}_{u}) = 2 \cdot \cos u \quad \text{mit} \quad u = 2x \quad \Rightarrow \quad y''' = 2 \cdot (-\sin u) \cdot 2 = -4 \cdot \sin(2x)$$

Relative Extremwerte: $y' = 0, \; y'' \neq 0$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \underbrace{(2x)}_{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin u = 0 \quad \text{mit} \quad u = 2x$$

Lösungen sind die *Nullstellen* von $\sin u$ im Periodenintervall $0 \leq u \leq 2\pi$. Sie lauten: $u_1 = 0, \; u_2 = \pi, u_3 = 2\pi$ (durch die Substitution $u = 2x$ geht das Periodenintervall $0 \leq x \leq \pi$ in das Periodenintervall $0 \leq u \leq 2\pi$ über). Durch Rücksubstitution $(x = u/2)$ folgt dann:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \pi/2, \quad x_3 = \pi$$

An diesen Stellen besitzt die Kurve nicht nur *waagerechte* Tangenten, sondern auch *Extremwerte*, da dort $y'' \neq 0$ ist:

$$y''(x_1 = 0) = 2 \cdot \cos 0 = 2 \cdot 1 = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{relatives Minimum}$$

$$y''(x_2 = \pi/2) = 2 \cdot \cos \pi = 2 \cdot (-1) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{relatives Maximum}$$

$$y''(x_3 = \pi) = 2 \cdot \cos(2\pi) = 2 \cdot 1 = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{relatives Minimum}$$

Relative Extremwerte im Periodenintervall $0 \leq x \leq \pi$: Min $= (0; 1)$; Max $= (\pi/2; 2)$; Min $= (\pi; 1)$

Wendepunkte: $y'' = 0, \; y''' \neq 0$

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \cos \underbrace{(2x)}_{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \cos u = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos u = 0 \quad \text{mit} \quad u = 2x$$

Lösungen sind die *Nullstellen* von $\cos u$ im *Periodenintervall* $0 \leq u \leq 2\pi$. Sie lauten $u_1 = \frac{\pi}{2}, \; u_2 = \frac{3}{2}\,\pi$. Rücksubstitution $(x = u/2)$ führt dann zu:

$$x_1 = \pi/4, \quad x_2 = 3\pi/4$$

An diesen Stellen ist die 3. Ableitung von Null *verschieden*:

$$y'''(x_1 = \pi/4) = -4 \cdot \sin(\pi/2) = -4 \cdot 1 = -4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt}$$

$$y'''(x_2 = 3\pi/4) = -4 \cdot \sin(3\pi/2) = -4 \cdot (-1) = 4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt}$$

Wendepunkte im Periodenintervall $0 \leq x \leq \pi$: $W_1 = (\pi/4; 1{,}5), \; W_2 = (3\pi/4; 1{,}5)$

Zusammenfassung

Die periodische Funktion $y = 1 + \sin^2 x$ ist *überall* definiert und verläuft *spiegelsymmetrisch* zur y-Achse, da $1 + \sin^2(-x) = 1 + \sin^2 x$ ist. Es gibt *keine* Nullstellen, jedoch relative Extremwerte und Wendepunkte an den folgenden Stellen (Kurvenverlauf: siehe Bild B-19):

Minima: $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ (Ordinate: $y = 1$)

Maxima: $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\,\pi, \pm\frac{5}{2}\,\pi, \ldots$ (Ordinate: $y = 2$)

Wendepunkte: $x = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3}{4}\,\pi, \pm\frac{5}{4}\,\pi, \ldots$ (Ordinate: $y = 1{,}5$)

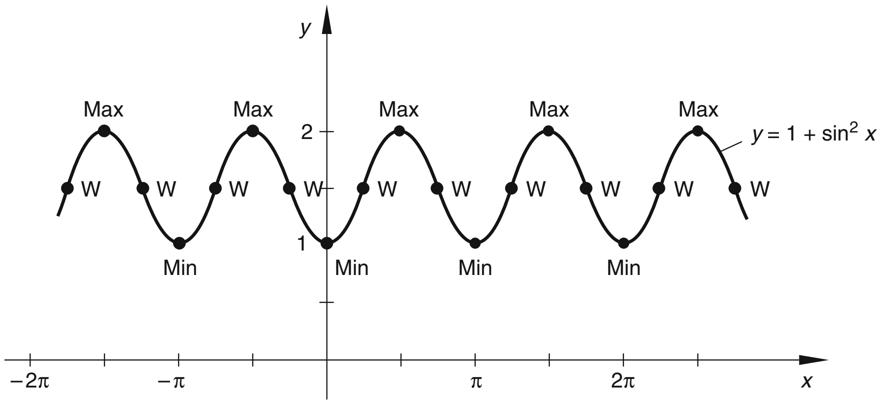


Bild B-19

B84

$$y = 10x^2 \cdot \ln|x|$$

Definitionsbereich: $x \neq 0$

Symmetrie: Wegen $10(-x)^2 \cdot \ln|-x| = 10x^2 \cdot \ln|x|$ ist die Funktion *gerade*, d. h. die Kurve verläuft *spiegelsymmetrisch* zur y-Achse.

Nullstellen: $y = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{10x^2}_{>\,0} \cdot \ln|x| = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = 0$

Wir lösen diese Gleichung wie folgt durch *Entlogarithmieren* (*Rechenregel:* $e^{\ln z} = z$ für $z > 0$):

$$e^{\ln|x|} = |x| = e^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad |x| = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm 1$$

Nullstellen: $x_{1/2} = \pm 1$

Ableitungen bis zur 3. Ordnung

Wir differenzieren im Wesentlichen mit Hilfe der *Produktregel*:

$$y = 10\underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{\ln|x|}_{v} = 10(uv) \quad \text{mit} \quad u = x^2, \quad v = \ln|x| \quad \text{und} \quad u' = 2x, \quad v' = \frac{1}{x}$$

$$y' = 10(u'v + v'u) = 10\left(2x \cdot \ln|x| + \frac{1}{x} \cdot x^2\right) = 10(2x \cdot \ln|x| + x) = 10x(2 \cdot \ln|x| + 1)$$

$$y' = 10\underbrace{x}_{u}\underbrace{(2 \cdot \ln|x| + 1)}_{v} = 10(uv) \quad \text{mit} \quad u = x, \quad v = 2 \cdot \ln|x| + 1 \quad \text{und} \quad u' = 1, \quad v' = \frac{2}{x}$$

$$y'' = 10(u'v + v'u) = 10\left[1(2 \cdot \ln|x| + 1) + \frac{2}{x} \cdot x\right] = 10(2 \cdot \ln|x| + 1 + 2) = 10(2 \cdot \ln|x| + 3)$$

$$y''' = 10 \cdot 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{20}{x}$$

Relative Extremwerte: $\boldsymbol{y' = 0,\ y'' \neq 0}$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{10x}_{\neq\,0}(2 \cdot \ln|x| + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \ln|x| + 1 = 0$$

Wir lösen diese Gleichung durch *Entlogarithmierung*:

$$2 \cdot \ln|x| + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = -0{,}5 \quad \Rightarrow \quad e^{\ln|x|} = |x| = e^{-0{,}5} \quad \Rightarrow \quad x_{3/4} = \pm e^{-0{,}5} = \pm 0{,}6065$$

$$y''(x_{3/4} = \pm e^{-0{,}5}) = 10(2 \cdot \ln|\pm e^{-0{,}5}| + 3) = 10(2 \cdot \ln e^{-0{,}5} + 3) = 10(2 \cdot (-0{,}5) + 3) =$$

$$= 10(-1 + 3) = 20 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{relative Minima}$$

Relative Extremwerte: Minima $= (\pm 0{,}6065;\ -1{,}8394)$

Wendepunkte: $\boldsymbol{y'' = 0,\ y''' \neq 0}$

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 10(2 \cdot \ln|x| + 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \ln|x| + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = -1{,}5$$

Durch *Entlogarithmierung* folgt:

$$\ln|x| = -1{,}5 \quad \Rightarrow \quad e^{\ln|x|} = e^{-1{,}5} \quad \Rightarrow \quad |x| = e^{-1{,}5} \quad \Rightarrow \quad x_{5/6} = \pm e^{-1{,}5} = \pm 0{,}2231$$

$$y'''(x_{5/6} = \pm e^{-1{,}5}) = \frac{20}{\pm e^{-1{,}5}} = \pm 20 \cdot e^{1{,}5} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkte}$$

Wendepunkte: $W_{1/2} = (\pm 0{,}2231;\ -0{,}7468)$

Kurvenlauf: siehe Bild B-20

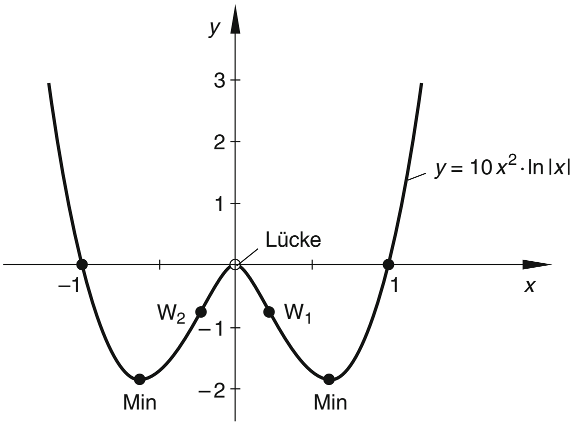


Bild B-20

B85

$$y = 4x \cdot e^{-0{,}5x}$$

Definitionsbereich: $-\infty < x < \infty$

Symmetrie: nicht vorhanden

Nullstellen: $y = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x \cdot \underbrace{e^{-0{,}5x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

Ableitungen bis zur 3. Ordnung

Wir benötigen jeweils die *Produktregel* in Verbindung mit der *Kettenregel.*

$$y = \underbrace{4x}_{u} \cdot \underbrace{e^{-0{,}5x}}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = 4x, \quad v = e^{-0{,}5x} \quad \text{und} \quad u' = 4, \quad v' = -0{,}5 \cdot e^{-0{,}5x}$$

(die Ableitung des Faktors v wurde dabei mit Hilfe der *Kettenregel* gebildet, Substitution: $t = -0{,}5x$)

$$y' = u'v + v'u = 4 \cdot e^{-0{,}5x} - 0{,}5 \cdot e^{-0{,}5x} \cdot 4x = 4 \cdot e^{-0{,}5x} - 2x \cdot e^{-0{,}5x} = (4 - 2x) \cdot e^{-0{,}5x}$$

$$y' = \underbrace{(4 - 2x)}_{u} \cdot \underbrace{e^{-0{,}5x}}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = 4 - 2x, \quad v = e^{-0{,}5x} \quad \text{und} \quad u' = -2, \quad v' = -0{,}5 \cdot e^{-0{,}5x}$$

$$y'' = u'v + v'u = -2 \cdot e^{-0{,}5x} - 0{,}5 \cdot e^{-0{,}5x} \cdot (4 - 2x) = [-2 - 0{,}5(4 - 2x)] \cdot e^{-0{,}5x} =$$

$$= (-2 - 2 + x) \cdot e^{-0{,}5x} = (x - 4) \cdot e^{-0{,}5x}$$

$$y'' = \underbrace{(x - 4)}_{u} \cdot \underbrace{e^{-0{,}5x}}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = x - 4, \quad v = e^{-0{,}5x} \quad \text{und} \quad u' = 1, \quad v' = -0{,}5 \cdot e^{-0{,}5x}$$

$$y''' = u'v + v'u = 1 \cdot e^{-0{,}5x} - 0{,}5 \cdot e^{-0{,}5x} \cdot (x - 4) = [1 - 0{,}5(x - 4)] \cdot e^{-0{,}5x} =$$

$$= (1 - 0{,}5x + 2) \cdot e^{-0{,}5x} = (3 - 0{,}5x) \cdot e^{-0{,}5x}$$

Relative Extremwerte: $\boldsymbol{y' = 0,\ y'' \neq 0}$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad (4 - 2x) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-0{,}5x}}_{\neq\, 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2$$

$$y''(x_2 = 2) = -2 \cdot \mathrm{e}^{-1} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{relatives Maximum}$$

Relative Extremwerte: Max $=$ (2; 2,9430)

Wendepunkte: $\boldsymbol{y'' = 0,\ y''' \neq 0}$

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 4) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-0{,}5x}}_{\neq\, 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 4$$

$$y'''(x_3 = 4) = 1 \cdot \mathrm{e}^{-2} = \mathrm{e}^{-2} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wendepunkt}$$

Wendepunkte: $W = (4;\ 2{,}1654)$

Verhalten im Unendlichen

Wegen

$$\lim_{x \to \infty} 4x \cdot \mathrm{e}^{-2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x}{\mathrm{e}^{2x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{(4x)'}{(\mathrm{e}^{2x})'} = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{2 \cdot \mathrm{e}^{2x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\mathrm{e}^{2x}} = 0$$

nähert sich die Kurve im „Unendlichen“ *asymptotisch* der x-Achse (siehe Bild B-21). Den Grenzwert, der zunächst auf den *unbestimmten Ausdruck* ∞/∞ führt, haben wir nach der Regel von *Bernoulli* und *de L’Hospital* berechnet (→ Band 1, Kap. VI.3.3.3).

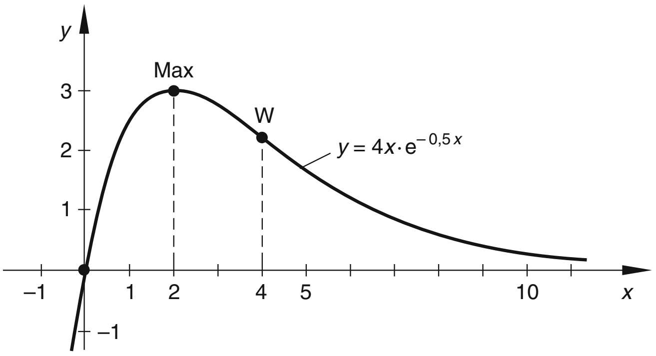


Bild B-21

2.7 Extremwertaufgaben

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel IV.3.5

B86 Der Querschnitt eines Tunnels besteht aus einem Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis. Wie müssen die Abmessungen gewählt werden, damit bei fest vorgegebenem Umfang $U = \text{const.} = c$ die Querschnittsfläche *möglichst groß* wird?

Für den Flächeninhalt A des Tunnelquerschnitts gilt die Formel

$$A = 2xy + \frac{1}{2}\,\pi x^2 \qquad \text{(siehe Bild B-22)}$$

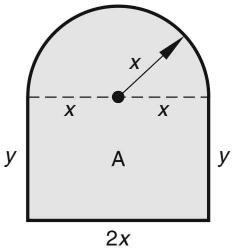


Bild B-22

A hängt also zunächst von *zwei* Größen, nämlich x und y ab.
Diese sind jedoch *nicht unabhängig* voneinander, sondern über die *Nebenbedingung*

$$U = 2x + 2y + \pi x = \text{const.} = c \qquad (\text{mit } c > 0)$$

miteinander verknüpft. Denn es kommen nach der Aufgabenstellung nur solche Querschnitte infrage, deren Umfang U die *konstante* Länge c besitzt. Wir lösen die Nebenbedingung zweckmäßigerweise nach y auf, setzen dann den gefundenen Ausdruck in die Flächenformel ein und erhalten den Flächeninhalt A in Abhängigkeit vom Radius x des aufgesetzten Halbkreises:

$$y = \frac{c - 2x - \pi x}{2} \quad \Rightarrow \quad A(x) = 2xy + \frac{1}{2}\,\pi x^2 = 2x \cdot \frac{c - 2x - \pi x}{2} + \frac{1}{2}\,\pi x^2 = cx - 2x^2 - \frac{1}{2}\,\pi x^2$$

Mit Hilfe der Differentialrechnung bestimmen wir jetzt das *absolute Maximum* dieser Funktion, wobei die Lösung zwischen $x = 0$ und $x = c/(2 + \pi)$ liegen muss (die Randwerte kommen *nicht* infrage). Wir bilden zunächst die benötigten ersten beiden Ableitungen:

$$A'(x) = c - 4x - \pi x = c - (4 + \pi)\,x\,, \qquad A''(x) = -(4 + \pi) < 0$$

Aus der *notwendigen* Bedingung $A'(x) = 0$ erhalten wir den folgenden Wert:

$$A'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c - (4 + \pi)\,x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{c}{4 + \pi}$$

Dieser Wert liegt im Gültigkeitsbereich der Funktion und ist das gesuchte (*absolute*) *Maximum*, da die 2. Ableitung überall, also auch an dieser Stelle *negativ* ist (die *hinreichende* Bedingung für ein *Maximum* ist somit erfüllt). Wir berechnen noch die zum Maximum gehörenden Werte für y und A:

$$2y = c - 2x - \pi x = c - (2 + \pi)\,x = c - (2 + \pi) \cdot \frac{c}{4 + \pi} = \frac{(4 + \pi)\,c - (2 + \pi)\,c}{4 + \pi} =$$

$$= \frac{[4 + \pi - (2 + \pi)]\,c}{4 + \pi} = \frac{2c}{4 + \pi} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{c}{4 + \pi}$$

$$A_{\max} = A\left(x = \frac{c}{4 + \pi}\right) = \frac{c^2}{4 + \pi} - \frac{2c^2}{(4 + \pi)^2} - \frac{\pi c^2}{2\,(4 + \pi)^2} = \frac{2\,(4 + \pi)\,c^2 - 4c^2 - \pi c^2}{2\,(4 + \pi)^2} =$$

$$= \frac{(8 + 2\pi - 4 - \pi)\,c^2}{2\,(4 + \pi)^2} = \frac{(4 + \pi)\,c^2}{2\,(4 + \pi)\,(4 + \pi)} = \frac{c^2}{2\,(4 + \pi)}$$

Lösung: Bei gegebenem Umfang $U = \text{const.} = c$ ist die Querschnittsfläche des Tunnels am *größten*, wenn Radius x und Seitenhöhe y übereinstimmen.

B87

Zur Zeit $t = 0$ startet von A aus ein Fahrzeug 1 mit der konstanten Geschwindigkeit v_1 in Richtung B. Zur gleichen Zeit setzt sich ein Fahrzeug 2 von B aus mit der konstanten Geschwindigkeit v_2 in Richtung C in Bewegung (Bild B-23).

Nach welcher Zeit besitzen die beiden Fahrzeuge den geringsten Abstand voneinander?

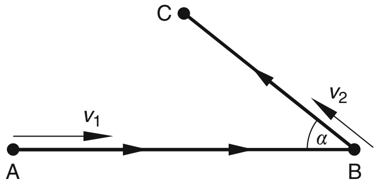


Bild B-23

$\overline{AB} = e = 700\text{ m}$

$\alpha = 60°$

$v_1 = 10\text{ m/s}, \qquad v_2 = 5\text{ m/s}$

Fahrzeug 1 bewegt sich in der Zeit t von A nach A^*, Fahrzeug 2 in der gleichen Zeit von B nach B^* (Bild B-24). Die dabei zurückgelegten Wege x bzw. y betragen (wir rechnen ohne Einheiten):

$$x = v_1 \cdot t = 10t$$

$$y = v_2 \cdot t = 5t$$

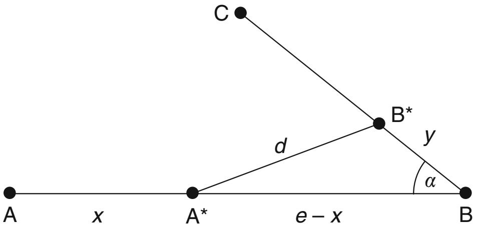


Bild B-24

Die Seiten im Dreieck A^*BB^* haben damit folgende Längen:

$$\overline{A^*B} = \overline{AB} - \overline{AA^*} = e - x = 700 - 10t,$$

$$\overline{BB^*} = y = 5t, \quad \overline{A^*B^*} = d, \quad \alpha = 60°$$

Der *Kosinussatz* liefert dann den folgenden Zusammenhang (→ FS: Kap. I.6.7):

$$d^2 = \left(\overline{A^*B}\right)^2 + \left(\overline{BB^*}\right)^2 - 2\left(\overline{A^*B}\right)\left(\overline{BB^*}\right) \cdot \cos\alpha =$$

$$= (700 - 10t)^2 + 25t^2 - 2(700 - 10t) \cdot 5t \cdot \underbrace{\cos 60°}_{1/2} = (700 - 10t)^2 + 25t^2 - (700 - 10t) \cdot 5t =$$

$$= 700^2 - 14\,000t + 100t^2 + 25t^2 - 3\,500t + 50t^2 = 175t^2 - 17\,500t + 490\,000$$

Wenn der Abstand d einen *kleinsten* Wert annimmt, dann gilt dies auch für das Abstandsquadrat d^2. Es genügt daher, das absolute Minimum der „*Zielfunktion*“

$$z(t) = d^2 = 175t^2 - 17\,500t + 490\,000$$

im Zeitintervall $t \geq 0$ zu bestimmen. Mit

$$z'(t) = 350t - 17\,500 \quad \text{und} \quad z''(t) = 350 > 0$$

folgt dann aus der für ein Minimum *notwendigen* Bedingung $z'(t) = 0$:

$$z'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad 350t - 17\,500 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 50 \quad (\text{in s})$$

Wegen $z''(t_0) = 350 > 0$ handelt es sich um ein (relatives) *Minimum*. Der Abstand der beiden Fahrzeuge zur Zeit $t_0 = 50\text{ s}$ beträgt dann (in der Einheit m):

$$d^2(t_0 = 50) = 175 \cdot 50^2 - 17\,500 \cdot 50 + 490\,000 = 52\,500 \quad \Rightarrow \quad d(t_0 = 50) = 229{,}13$$

Da der Abstand zu Beginn ($t = 0$) *größer* ist (er beträgt $e = 700$ m), ist dieser Wert der *kleinste* Abstand der beiden Fahrzeuge.

Lösung: Nach genau 50 s ist der Abstand der beiden Fahrzeuge am *kleinsten*. Er beträgt dann $d_{\min} = 229{,}13$ m.

B88

Der in Bild B-25 skizzierte Körper vom Gewicht G soll durch eine schräg nach oben angreifende konstante Kraft F gerade in Bewegung gesetzt werden. Wählen Sie den Angriffswinkel α so, dass die Kraft *möglichst klein* wird.

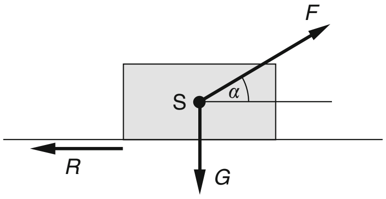


Bild B-25

$R = \mu N$: Reibungskraft
N: Normalkraft
μ: Reibungskoeffizient
S: Schwerpunkt

Wir zerlegen die angreifende Kraft F zunächst in eine *Horizontal-* und eine *Normalkomponente* (Bild B-26):

Horizontalkomponente: $F_H = F \cdot \cos \alpha$

Normalkomponente: $F_N = F \cdot \sin \alpha$

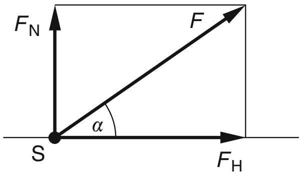


Bild B-26

Die *Normalkraft* N, die den Körper auf die Ebene drückt, ist die Differenz aus der Gewichtskraft G und der Normalkomponente F_N. Die Haftreibungskraft R berechnet sich damit wie folgt:

$$R = \mu N = \mu (G - F_N) = \mu (G - F \cdot \sin \alpha)$$

Der Körper setzt sich in Bewegung, wenn die Horizontalkomponente F_H die Haftreibung R gerade überwindet. Somit gilt:

$$F_H = R \quad \Rightarrow \quad F \cdot \cos \alpha = \mu (G - F \cdot \sin \alpha) = \mu G - \mu F \cdot \sin \alpha$$

Diese Gleichung lösen wir nach F auf und erhalten dann für diese Kraft in Abhängigkeit vom Winkel α:

$$F \cdot \cos \alpha + \mu F \cdot \sin \alpha = F (\cos \alpha + \mu \cdot \sin \alpha) = \mu G \quad \Rightarrow \quad F(\alpha) = \frac{\mu G}{\cos \alpha + \mu \cdot \sin \alpha}$$

Wir bestimmen jetzt den im Intervall $0 < \alpha < 90^\circ$ liegenden Winkel so, dass die angreifende Kraft F den *kleinstmöglichen* Wert annimmt. Die dafür benötigten Ableitungen 1. und 2. Ordnung erhalten wir wie folgt:

$$F(\alpha) = \frac{\mu G}{\underbrace{\cos \alpha + \mu \cdot \sin \alpha}_{u}} = \frac{\mu G}{u} = \mu G \cdot u^{-1} \quad \text{mit} \quad u = \cos \alpha + \mu \cdot \sin \alpha$$

Die *Kettenregel* liefert dann:

$$F'(\alpha) = \frac{dF}{d\alpha} = \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{d\alpha} = \mu G \cdot (-u^{-2}) \cdot (-\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) = \mu G \cdot \frac{\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha}{(\cos \alpha + \mu \cdot \sin \alpha)^2}$$

Aus der für ein Minimum *notwendigen* Bedingung $F'(\alpha) = 0$ folgt dann:

$$\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha = \mu \cdot \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \mu \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = \arctan \mu$$

In unserem Beispiel ist $\mu = 0{,}2$ und somit $\alpha_0 = \arctan 0{,}2 = 11{,}31^\circ$.

Dass für diesen Winkel der Kraftaufwand am *kleinsten* ist, lässt sich aus physikalischer Sicht leicht nachvollziehen. Trotz des relativ hohen Rechenaufwands wollen wir zeigen, dass auch die *hinreichende* Bedingung für ein *Minimum* erfüllt ist. Den Nachweis $F''(\alpha_0) > 0$ führen wir wie folgt: Zunächst differenzieren wir $F'(\alpha)$ nach der *Quotientenregel*:

$$F'(\alpha) = \frac{\mu G (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha)}{(\cos \alpha + \mu \cdot \sin \alpha)^2} = \frac{u(\alpha)}{v(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad F''(\alpha) = \frac{u'(\alpha) \cdot v(\alpha) - v'(\alpha) \cdot u(\alpha)}{[v(\alpha)]^2}$$

An der Stelle α_0 ist $F'(\alpha_0) = 0$ und somit auch $u(\alpha_0) = 0$. Damit erhalten wir für die 2. Ableitung an der gleichen Stelle den folgenden Ausdruck:

$$F''(\alpha_0) = \frac{u'(\alpha_0) \cdot v(\alpha_0) - v'(\alpha_0) \cdot u(\alpha_0)}{[v(\alpha_0)]^2} = \frac{u'(\alpha_0) \cdot v(\alpha_0) - v'(\alpha_0) \cdot 0}{[v(\alpha_0)]^2} = \frac{u'(\alpha_0) \cdot v(\alpha_0)}{[v(\alpha_0)]^2} = \frac{u'(\alpha_0)}{v(\alpha_0)}$$

Mit $u'(\alpha) = \mu G(\cos\alpha + \mu \cdot \sin\alpha)$ und $v(\alpha) = (\cos\alpha + \mu \cdot \sin\alpha)^2$ folgt dann:

$$F''(\alpha_0) = \frac{u'(\alpha_0)}{v(\alpha_0)} = \frac{\mu G(\cos\alpha_0 + \mu \cdot \sin\alpha_0)}{(\cos\alpha_0 + \mu \cdot \sin\alpha_0)^2} = \frac{\mu G}{\cos\alpha_0 + \mu \cdot \sin\alpha_0} > 0$$

Anmerkung: Da der Winkel α_0 im 1. Quadrant liegt, ist sowohl $\cos\alpha_0$ als auch $\sin\alpha_0$ *positiv*!

B89

Bei einer Feuerwehrübung soll mit einer Wasserspritze eine $e = 15$ m weit entfernte Wand *möglichst weit oben* getroffen werden. Wie muss der „Abspritzwinkel" α eingestellt werden, wenn der Wasserstrahl eine Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 20$ m/s besitzt?

Anleitung: Behandeln Sie das Problem als einen *schiefen Wurf* mit dem Abwurfwinkel α (gegenüber der Horizontalen).

Bild B-27a) zeigt die vom Wasserstrahl beschriebene Bahnkurve. Die Geschwindigkeit v_0 zerlegen wir wie folgt in Komponenten (siehe hierzu Bild B-27b)):

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha \quad \text{und} \quad v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$$

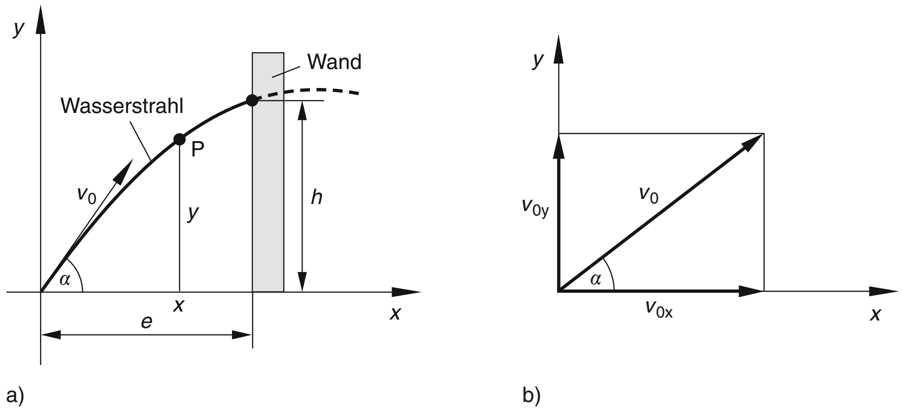


Bild B-27 a) Bahnkurve
b) Zerlegung der Geschwindigkeit in Komponenten

In der x-Richtung bewegt sich ein Wasserteilchen mit der *konstanten* Geschwindigkeit v_{0x} und legt daher in der Zeit t den Weg $x = v_{0x} \cdot t$ zurück. Nach oben, d. h. in der y-Richtung überlagert sich in der *konstanten* Geschwindigkeit v_{0y} der *freie Fall*, sodass wir hier den Fallweg abziehen müssen. Die Gesamtbewegung wird daher durch die folgenden *Parametergleichungen* beschrieben:

$$x = v_{0x} \cdot t = (v_0 \cdot \cos\alpha) \cdot t, \quad y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = (v_0 \cdot \sin\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (t \ge 0)$$

Die Bahnkurve in expliziter Form erhalten wir, indem wir die erste Gleichung nach t auflösen und den gefundenen Ausdruck für t in die zweite Gleichung einsetzen:

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad y = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha} - \frac{1}{2}\, g\, \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} = (\tan\alpha) \cdot x - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cdot \cos^2\alpha}$$

Die Bahnkurve ist also eine *Parabel* (in diesem Zusammenhang auch als „*Wurfparabel*“ bezeichnet). Die im Abstand e befindliche Wand wird damit in der Höhe

$$h = y(x = e) = (\tan\alpha) \cdot e - \frac{g e^2}{2 v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} = e \cdot \tan\alpha - \frac{g e^2}{2 v_0^2} (\cos\alpha)^{-2}$$

getroffen. Mit Hilfe der Differentialrechnung bestimmen wir den Winkel α so, dass die Wand in *möglichst großer* Höhe getroffen wird, wobei die Lösung im Intervall $0 < \alpha < 90^\circ$ liegen muss. Die (zunächst) benötigte 1. Ableitung erhalten wir durch *gliedweises* Differenzieren unter Verwendung der *Kettenregel*:

$$h(\alpha) = e \cdot \tan\alpha - \frac{g e^2}{2 v_0^2} \underbrace{(\cos\alpha)}_{u}{}^{-2} = e \cdot \tan\alpha - \frac{g e^2}{2 v_0^2} \cdot u^{-2} \quad \text{mit} \quad u = \cos\alpha, \quad u' = -\sin\alpha$$

$$h'(\alpha) = e \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{g e^2}{2 v_0^2} \cdot (-2 u^{-3}) \cdot (-\sin\alpha) = \frac{e}{\cos^2\alpha} + \frac{g e^2}{v_0^2} (\cos\alpha)^{-3} \cdot (-\sin\alpha) =$$

$$= \frac{e}{\cos^2\alpha} - \frac{g e^2 \cdot \sin\alpha}{v_0^2 \cdot \cos^3\alpha} = \frac{e v_0^2 \cdot \cos\alpha - g e^2 \cdot \sin\alpha}{v_0^2 \cdot \cos^3\alpha} = \frac{e}{v_0^2} \cdot \frac{v_0^2 \cdot \cos\alpha - g e \cdot \sin\alpha}{\cos^3\alpha}$$

Aus der für ein Maximum *notwendigen* Bedingung $h'(\alpha) = 0$ folgt dann:

$$v_0^2 \cdot \cos\alpha - g e \cdot \sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{v_0^2}{g e} \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \frac{v_0^2}{g e} \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 = \arctan\left(\frac{v_0^2}{g e}\right)$$

Aus physikalischer Sicht kann es sich bei diesem Wert nur um das gesuchte *Maximum* handeln, sodass wir auf den Nachweis $h''(\alpha_0) < 0$ verzichten können. Die Wand wird dabei in der folgenden Höhe getroffen:

$$h_{\max} = h(\alpha = \alpha_0) = e \cdot \tan\alpha_0 - \frac{g e^2}{2 v_0^2 \cdot \cos^2\alpha_0} = e \cdot \tan\alpha_0 - \frac{g\ {}^2}{2 v_0^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha_0} =$$

$$= e \cdot \tan\alpha_0 - \frac{g e^2}{2 v_0^2} \cdot (1 + \tan^2\alpha_0) = e \cdot \frac{v_0^2}{g e} - \frac{g e^2}{2 v_0^2} \left(1 + \frac{v_0^4}{g^2 e^2}\right) = \frac{v_0^2}{g} - \frac{g e^2}{2 v_0^2} - \frac{g e^2}{2 v_0^2} \cdot \frac{v_0^4}{g^2 e^2} =$$

$$= \frac{v_0^2}{g} - \frac{g e^2}{2 v_0^2} - \frac{v_0^2}{2 g} = \frac{v_0^2}{2 g} - \frac{g e^2}{2 v_0^2} = \frac{v_0^4 - g^2 e^2}{2 g v_0^2} \qquad (v_0 > \sqrt{g e})$$

Umformungen: Verwendung der trigonometrischen Beziehung $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1 + \tan^2\alpha}$ (→ FS: Kap. III.7.5) → $\tan\alpha_0$ durch $\dfrac{v_0^2}{g e}$ ersetzen → Klammer ausmultiplizieren, gemeinsame Faktoren in Zähler und Nenner kürzen → Hauptnenner $2 g v_0^2$ bilden.

Die Wand wird nur dann getroffen, wenn die Bedingung $h_{\max} > 0$ erfüllt ist:

$$h_{\max} > 0 \quad \Rightarrow \quad v_0^4 - g^2 e^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad v_0^4 > g^2 e^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 > \sqrt{g e}$$

Diese Bedingung ist für die vorgegebenen Werte $v_0 = 20\,\text{m/s}$, $e = 15\,\text{m}$ und $g = 9{,}81\,\text{m/s}$ *erfüllt*:

$$v_0 = 20\,\text{m/s}, \quad \sqrt{g e} = \sqrt{9{,}81 \cdot 15}\ \text{m/s} = 12{,}13\,\text{m/s} \quad \Rightarrow \quad v_0 > \sqrt{g e} = 12{,}13\,\text{m/s}$$

Die Wand wird dann in der folgenden *Höhe* getroffen:

$$h = \frac{v_0^4 - g^2 e^2}{2 g v_0^2} = \frac{20^4 - 9{,}81^2 \cdot 15^2}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 20^2}\ \text{m} = 17{,}63\,\text{m}$$

Der „*Abspritzwinkel*“ α_0 beträgt dann:

$$\alpha_0 = \arctan\left(\frac{v_0^2}{g e}\right) = \arctan\left(\frac{20^2}{9{,}81 \cdot 15}\right) = \arctan 2{,}7183 = 69{,}80^\circ$$

B90

Ein beiderseits aufliegender Balken mit einem rechteckigen Querschnitt wird durch eine konstante Streckenlast $q = \text{const.}$ belastet (Bild B-28). Die Durchbiegung y des Balkens an der (festen) Stelle x ist dabei umgekehrt proportional zum Flächenmoment

$$I = \frac{1}{12}\,a\,b^3$$

$$\left.\begin{array}{l} a\text{: Breite} \\ b\text{: Dicke} \end{array}\right\}\ \text{des Balkens}$$

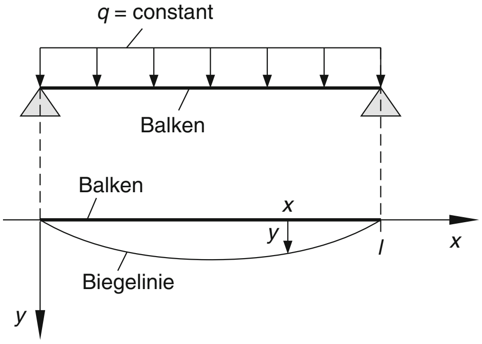


Bild B-28

Der Balken soll aus einem kreisrunden Baumstamm vom Radius R heraus geschnitten werden und zwar so, dass die Durchbiegung des (belasteten) Balkens *möglichst klein* wird.

Wie sind a und b zu wählen?

Da die Durchbiegung y dem Flächenmoment I *umgekehrt proportional* ist, ist y genau dann am *kleinsten*, wenn I den *größten* Wert annimmt. Da der Balken aus einem kreisrunden Baumstamm vom Durchmesser $2R$ herausgeschnitten werden soll, sind Breite a und Dicke b nicht unabhängig voneinander, sondern – wie man Bild B-29 entnehmen kann – über den *Satz des Pythagoras* miteinander verknüpft:

$$a^2 + b^2 = 4R^2$$

Diese *Nebenbedingung* lösen wir nach a auf:

$$a = \sqrt{4R^2 - b^2}$$

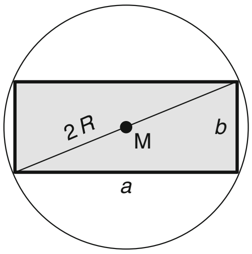


Bild B-29

Einsetzen in die Formel für das Flächenmoment liefert dann:

$$I(b) = \frac{1}{12}\,a\,b^3 = \frac{1}{12}\,\sqrt{4R^2 - b^2}\cdot b^3 =$$

$$= \frac{1}{12}\,\sqrt{(4R^2 - b^2)\,b^6} = \frac{1}{12}\,\sqrt{4R^2 b^6 - b^8}$$

Damit hängt I nur noch von der einen Variablen b ab. Wir müssen b so bestimmen, dass das Flächenmoment den *größtmöglichen* Wert annimmt. Die Lösung muss dabei im offenen Intervall $0 < b < 2R$ liegen (die Werte $b = 0$ bzw. $b = 2R$ und damit $a = 0$ geben keinen Sinn). Es genügt im folgenden, das absolute Maximum der unter der Wurzel stehenden „*Zielfunktion*“

$$z(b) = 4R^2 b^6 - b^8, \quad 0 < b < 2R$$

zu bestimmen. Die dabei benötigten Ableitungen lauten:

$$z'(b) = 24R^2 b^5 - 8b^7, \qquad z''(b) = 120R^2 b^4 - 56b^6$$

Die *hinreichenden* Bedingungen $z'(b) = 0$ und $z''(b) < 0$ führen zu folgender Lösung:

$$z'(b) = 0 \quad\Rightarrow\quad 24R^2 b^5 - 8b^7 = \underbrace{8b^5}_{\neq 0}(3R^2 - b^2) = 0 \quad\Rightarrow\quad 3R^2 - b^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad b_{1/2} = \pm\sqrt{3}\,R$$

(der negative Wert scheidet dabei wegen $b > 0$ aus)

$$z''(b_1 = \sqrt{3}\,R) = 120R^2\cdot 9R^4 - 56\cdot 27R^6 = -432R^6 < 0 \quad\Rightarrow\quad \text{Maximum}$$

Zugehörige Balkenbreite: $a = \sqrt{4R^2 - b^2} = \sqrt{4R^2 - 3R^2} = R$

Lösung: Die Durchbiegung des Balkens ist am *kleinsten*, wenn Balkenbreite a und Balkendicke b die Werte $a = R$ und $b = \sqrt{3}\,R$ annehmen.

B91

Bild B-30 zeigt den Querschnitt einer kreisförmigen Transformatorspule mit einem kreuzförmigen Eisenkern. Die Querschnittsfläche A des Eisenkerns (im Bild *grau* unterlegt) soll dabei *möglichst groß* werden.
Wie sind die Abmessungen zu wählen, wenn die Spule den Querschnittsradius r besitzt?

Anleitung: Machen Sie den Flächeninhalt A vom eingezeichneten Winkel φ abhängig.

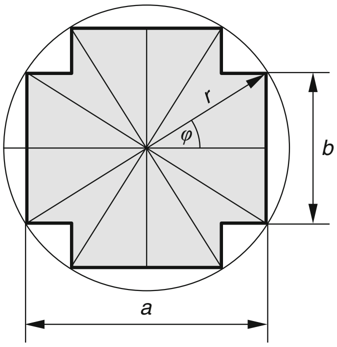


Bild B-30

Die Querschnittsfläche A des kreuzförmigen Eisenkerns erhalten wir anhand von Bild B-31, wenn wir aus dem eingezeichneten Quadrat mit der Seitenlänge a die vier grau unterlegten *kongruenten* Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{a-b}{2}$ herausnehmen:

$$A = a^2 - 4\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = a^2 - (a-b)^2 =$$

$$= a^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = 2ab - b^2$$

Die Größen a und b lassen sich dabei durch den Radius r und den eingezeichneten Winkel φ ausdrücken:

$$\cos\varphi = \frac{a/2}{r} \quad \Rightarrow \quad a = 2r \cdot \cos\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{b/2}{r} \quad \Rightarrow \quad b = 2r \cdot \sin\varphi$$

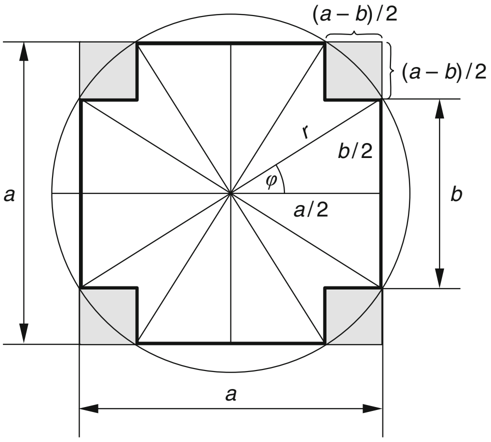


Bild B-31

Für den Flächeninhalt A erhalten wir damit in Abhängigkeit vom Winkel φ:

$$A(\varphi) = 2ab - b^2 = 2 \cdot (2r \cdot \cos\varphi) \cdot (2r \cdot \sin\varphi) - (2r \cdot \sin\varphi)^2 =$$

$$= 8r^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi - 4r^2 \cdot \sin^2\varphi = 4r^2(\underbrace{2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}_{\sin(2\varphi)} - \sin^2\varphi) = 4r^2(\sin(2\varphi) - \sin^2\varphi)$$

Wir bestimmen das *Maximum* dieser Flächenfunktion im Intervall $0 < \varphi \le 45°$ ($\varphi = 0$ bedeutet $b = 0$; für $\varphi = 45°$ erhalten wir als *Grenzfall* ein Quadrat mit $a = b = \sqrt{2}\,r$). Die benötigten Ableitungen erhalten wir in der angedeuteten Weise mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$A(\varphi) = 4r^2(\sin(\underbrace{2\varphi}_{u}) - (\underbrace{\sin\varphi}_{v})^2) = 4r^2(\sin u - v^2) \quad \text{mit} \quad u = 2\varphi, \quad v = \sin\varphi, \quad u' = 2, \quad v' = \cos\varphi$$

$$A'(\varphi) = 4r^2((\cos u) \cdot 2 - 2v \cdot \cos\varphi) = 4r^2(2 \cdot \cos(2\varphi) - \underbrace{2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}_{\sin(2\varphi)}) =$$

$$= 4r^2(2 \cdot \cos(2\varphi) - \sin(2\varphi))$$

(unter Verwendung der trigonometrischen Beziehung $\sin(2\varphi) = 2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$)

$$A'(\varphi) = 4r^2(2 \cdot \cos\underbrace{(2\varphi)}_{t} - \sin\underbrace{(2\varphi)}_{t}) = 4r^2(2 \cdot \cos t - \sin t) \quad \text{mit} \quad t = 2\varphi, \quad t' = 2$$

$$A''(\varphi) = 4r^2(2 \cdot (-\sin t) \cdot 2 - (\cos t) \cdot 2) = -8r^2(2 \cdot \sin(2\varphi) + \cos(2\varphi))$$

Aus der für ein Maximum *notwendigen* Bedingung $A'(\varphi) = 0$ folgt:

$$4r^2(2 \cdot \cos(2\varphi) - \sin(2\varphi)) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \cos(2\varphi) - \sin(2\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(2\varphi) = 2 \cdot \cos(2\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(2\varphi)}{\cos(2\varphi)} = \tan(2\varphi) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2\varphi = \arctan 2 = 63{,}435^\circ \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = 31{,}72^\circ$$

Ohne Rechnung sehen wir, dass die 2. Ableitung für diesen Winkel *negativ* ist, da $\sin(2\varphi_0)$ und $\cos(2\varphi_0)$ beide *positiv* sind (der Winkel $2\varphi_0 = 63{,}435^\circ$ liegt im 1. Quadrant):

$$A''(\varphi_0) = -8r^2(2 \cdot \underbrace{\sin(2\varphi_0)}_{>0} + \underbrace{\cos(2\varphi_0)}_{>0}) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum}$$

Der Flächeninhalt beträgt dann:

$$A(\varphi_0 = 31{,}72^\circ) = 4r^2(\sin 63{,}435^\circ - \sin^2(31{,}72^\circ)) = 4r^2(0{,}8944 - 0{,}2764) = 2{,}472\,r^2$$

Ein Vergleich mit der Fläche im Intervallrandpunkt $\varphi = 45^\circ$ (der Flächeninhalt beträgt dann $A = 2r^2$) zeigt, dass φ_0 das gesuchte *absolute Maximum* ist.

Lösung: Für $\varphi_0 = 31{,}72^\circ$ hat der dem Kreis einbeschriebene kreuzförmige Querschnitt den *größten* Flächeninhalt:

$$A_{\max} = A(\varphi_0 = 31{,}72^\circ) = 2{,}472\,r^2$$

B92

Welcher Punkt der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ hat den *kleinsten Abstand* vom Punkt $Q = (0;\, 2)$?

Der Abstand des Hyperbelpunktes $P = (x;\, y)$ vom Punkt $Q = (0;\, 2)$ beträgt nach Bild B-32:

$$d = \sqrt{x^2 + (2-y)^2}$$

Da P ein Punkt der Hyperbel ist, gilt die *Nebenbedingung*

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{oder} \quad x^2 = 1 + y^2$$

Damit ist der Abstand d nur noch von der Ordinate y des Hyperbelpunktes P abhängig:

$$d(y) = \sqrt{x^2 + (2-y)^2} = \sqrt{1 + y^2 + (2-y)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + y^2 + 4 - 4y + y^2} = \sqrt{2y^2 - 4y + 5}$$

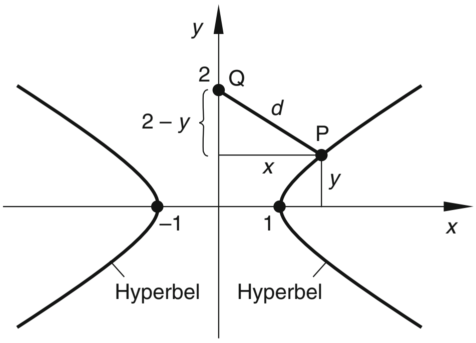


Bild B-32

y muss nun so bestimmt werden, dass der Abstand d seinen *kleinstmöglichen* Wert annimmt. Dies ist der Fall, wenn der unter der Wurzel stehende Ausdruck $z(y) = 2y^2 - 4y + 5$ den *kleinsten* Wert annimmt. Mit Hilfe der Differentialrechnung lässt sich das (absolute) *Minimum* dieser „*Zielfunktion*“ wie folgt bestimmen:

$$z'(y) = 4y - 4, \qquad z''(y) = 4 > 0$$

$$z'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4y - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1$$

Wegen $z''(y) = 4 > 0$ handelt es sich bei diesem Extremwert um das gesuchte absolute *Minimum*. Aus der Nebenbedingung erhalten wir für die Abszisse des Hyperbelpunktes P *zwei* Werte $x = \pm\sqrt{2}$. Es gibt also wegen der *Spiegelsymmetrie* der Hyperbel genau *zwei* Punkte $P_{1/2} = (\pm\sqrt{2};\, 1)$, die vom Punkt $Q = (0;\, 2)$ den *kleinstmöglichen* Abstand haben. Dieser beträgt:

$$d_{\min} = d(y = 1) = \sqrt{2 - 4 + 5} = \sqrt{3}$$

B93

Ein veränderlicher Verbraucherwiderstand R_a wird von einer Spannungsquelle mit der Quellenspannung U_0 und dem Innenwiderstand R_i gespeist (Bild B-33). Bestimmen Sie den Verbraucherwiderstand so, dass er die *größtmögliche Leistung*

$$P = R_a I^2$$

aufnimmt (I: Stromstärke).

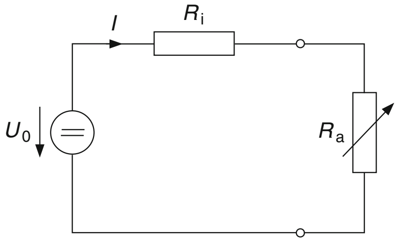


Bild B-33

R_i und R_a sind in Reihe geschaltet, sodass der Gesamtwiderstand $R = R_i + R_a$ beträgt. Aus dem *Ohmschen Gesetz* folgt für die Stromstärke I:

$$R = \frac{U_0}{I} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U_0}{R} = \frac{U_0}{R_i + R_a}$$

Die vom Widerstand R_a aufgenommene Leistung P ist dann nur noch von R_a abhängig:

$$P = P(R_a) = R_a I^2 = R_a \cdot \frac{U_0^2}{(R_i + R_a)^2} = U_0^2 \cdot \frac{R_a}{(R_i + R_a)^2} \qquad (R_a > 0)$$

Da der positive konstante Faktor U_0^2 *keinen* Einfluss auf die Art und Lage der Extremwerte hat, beschränken wir uns bei den weiteren Untersuchungen auf die *„Zielfunktion"*

$$y = \frac{R_a}{(R_i + R_a)^2}, \quad R_a > 0$$

Wir bestimmen jetzt R_a so, dass die *größtmögliche* Leistung aufgenommen wird. Die dafür benötigten ersten beiden Ableitungen erhalten wir wie folgt mit Hilfe von *Quotienten-* und *Kettenregel* (der besseren Übersicht wegen setzen wir vorübergehend $R_a = x$):

$$y = \frac{x}{(R_i + x)^2} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = x, \quad v = (R_i + x)^2 \quad \text{und} \quad u' = 1, \quad v' = 2(R_i + x)$$

(Ableitung von v mit der *Kettenregel*, Substitution: $t = R_i + x$)

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{1(R_i + x)^2 - 2(R_i + x)x}{(R_i + x)^4} = \frac{(R_i + x)[R_i + x - 2x]}{(R_i + x)(R_i + x)^3} = \frac{R_i - x}{(R_i + x)^3}$$

$$y' = \frac{R_i - x}{(R_i + x)^3} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = R_i - x, \quad v = (R_i + x)^3 \quad \text{und} \quad u' = -1, \quad v' = 3(R_i + x)^2$$

(Ableitung von v mit der Kettenregel, Substitution: $t = R_i + x$)

$$y'' = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{-1(R_i + x)^3 - 3(R_i + x)^2(R_i - x)}{(R_i + x)^6} = \frac{(R_i + x)^2[-(R_i + x) - 3(R_i - x)]}{(R_i + x)^2(R_i + x)^4} =$$

$$= \frac{-R_i - x - 3R_i + 3x}{(R_i + x)^4} = \frac{-4R_i + 2x}{(R_i + x)^4}$$

Berechnung des Maximums: $y' = 0, \; y'' < 0$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{R_i - x}{(R_i + x)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_i - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = R_i$$

$$y''(x = R_i) = \frac{-4R_i + 2R_i}{(R_i + R_i)^4} = \frac{-2R_i}{16R_i^4} = -\frac{1}{8R_i^3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum}$$

Lösung: Die vom Verbraucherwiderstand R_a aufgenommene Leistung wird am *größten*, wenn $x = R_a = R_i$ ist.

B94 Einer Ellipse mit den Halbachsen $a = 6$ und $b = 3$ ist ein achsenparalleles Rechteck *größten Flächeninhalts* einzubeschreiben. Bestimmen Sie Breite und Höhe dieses Rechtecks.

Bild B-34 zeigt die Ursprungsellipse mit dem einbeschriebenen Rechteck. Wir müssen die Koordinaten x und y des im 1. Quadranten gelegenen Eckpunktes P so bestimmen, dass der Flächeninhalt A seinen *größten* Wert annimmt $(0 < x < 6,\ 0 < y < 3)$. Wegen der *Spiegelsymmetrie* bezüglich *beider* Achsen gilt dann:

$$A = A(x;\, y) = 4xy$$

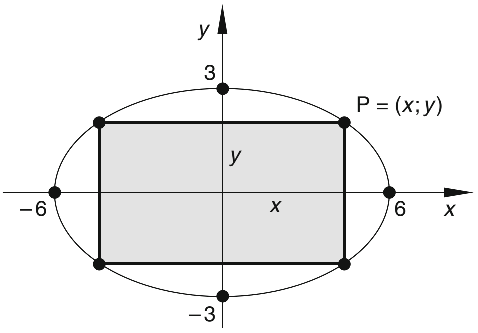


Bild B-34

Die Koordinaten x und y genügen dabei der Ellipsengleichung, da der Punkt $P = (x;\, y)$ auf der Ellipse liegt. Dies ist die benötigte *Nebenbedingung*, die wir nach y auflösen:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{36} = \frac{36 - x^2}{36} \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{9}{36}(36 - x^2) = \frac{1}{4}(36 - x^2)$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{36 - x^2}$$

Es kommt nur das *positive* Vorzeichen infrage, da der Punkt P auf der *oberen* Halbellipse liegt. Diesen Ausdruck setzen wir für y in die Flächenformel ein und erhalten den Flächeninhalt A in Abhängigkeit von der Koordinate x:

$$A(x) = 4xy = 4x \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{36 - x^2} = 2x \cdot \sqrt{36 - x^2} = 2 \cdot \sqrt{x^2(36 - x^2)} = 2 \cdot \sqrt{36x^2 - x^4}$$

$(0 < x < 6)$. Das *Maximum* dieser Wurzelfunktion liegt an der gleichen Stelle wie das Maximum der unter der Wurzel stehenden „*Zielfunktion*“

$$z = z(x) = 36x^2 - x^4, \quad 0 < x < 6$$

Mit den Ableitungen

$$z'(x) = 72x - 4x^3 \quad \text{und} \quad z''(x) = 72 - 12x^2$$

lässt sich die Lösung dieser Extremwertaufgabe wie folgt bestimmen:

$$z'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 72x - 4x^3 = 4x(18 - x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_{2/3} = \pm 3\sqrt{2}$$

Nur die Lösung $x_2 = +3\sqrt{2} = 4{,}2426$ liegt im Gültigkeitsbereich $0 < x < 6$. An dieser Stelle liegt das gesuchte *Maximum*, denn es gilt:

$$z''(x_2 = 3\sqrt{2}) = 72 - 12 \cdot (3\sqrt{2})^2 = 72 - 12 \cdot 18 = -144 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{relatives Maximum}$$

Lösung: $x = 3\sqrt{2}, \quad y = \frac{3}{2}\sqrt{2}, \quad A_{\max} = 4xy = 4 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} = 36$

B95 Einer Kugel vom Radius R soll ein gerader Kreiskegel mit *möglichst kleinem* Volumen umbeschrieben werden. Wie ist dieser Kegel zu dimensionieren (Radius r, Höhe h)?

Bild B-35 zeigt einen ebenen Schnitt längs der Symmetrieachse. Das Kegelvolumen $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ hängt zunächst sowohl vom Radius r als auch von der Höhe h und somit von *zwei* Variablen ab. Diese sind jedoch *nicht unabhängig* voneinander, sondern über eine *Neben-* oder *Kopplungsbedingung* miteinander verknüpft, die wir wie folgt durch eine geometrische Betrachtung erhalten.

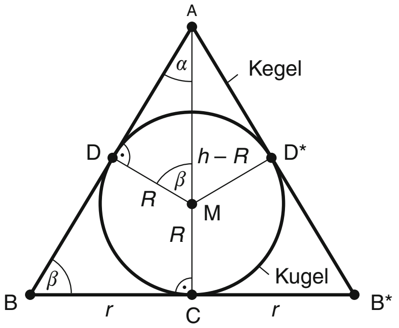


Bild B-35

Die Dreiecke ABC und ADM in Bild B-35 sind *ähnlich*, da sie in *zwei* Winkeln (und damit auch im 3. Winkel) übereinstimmen: *gemeinsamer* Winkel α in A, ein *rechter* Winkel in C bzw. D. Damit sind auch die Winkel in B bzw. M gleich ($\beta = 90° - \alpha$). Wir betrachten jetzt die den Winkeln α und β jeweils gegenüber liegenden Seiten in beiden Dreiecken. Dem Winkel α liegen die Seiten $\overline{BC} = r$ und $\overline{DM} = R$ gegenüber, dem Winkel β entsprechend die Seiten $\overline{AC} = h$ und $\overline{AD}$. Es gilt dann:

$$(*) \quad \overline{BC} : \overline{DM} = \overline{AC} : \overline{AD} \quad \text{oder} \quad r : R = h : \overline{AD}$$

Im Dreieck ADM liefert der *Satz des Pythagoras*:

$$\overline{AD}^2 + \overline{DM}^2 = \overline{AM}^2 \quad \text{mit} \quad \overline{DM} = R \quad \text{und} \quad \overline{AM} = \overline{AC} - \overline{MC} = h - R$$

$$\overline{AD}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{DM}^2 = (h - R)^2 - R^2 = h^2 - 2Rh = h(h - 2R) \quad \Rightarrow \quad \overline{AD} = \sqrt{h(h - 2R)}$$

Die Nebenbedingung $(*)$ lautet damit:

$$(*) \quad r : R = h : \sqrt{h(h - 2R)} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{Rh}{\sqrt{h(h - 2R)}}$$

Diesen Ausdruck setzen wir in die Volumenformel für r ein und erhalten das Kegelvolumen V in Abhängigkeit von der Höhe h:

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2 h^2}{h(h - 2R)} \cdot h = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \frac{h^2}{h - 2R} \qquad (h > 2R)$$

Da der (positive) konstante Faktor *keinen* Einfluss auf die Lage der Extremwerte hat, beschränken wir die weiteren Untersuchungen auf die „*Zielfunktion*“

$$z(h) = \frac{h^2}{h - 2R} \qquad (h > 2R)$$

deren Ableitungen $z'(h)$ und $z''(h)$ sich wie folgt mit Hilfe von *Quotienten-* und *Kettenregel* bilden lassen:

$$z(h) = \frac{h^2}{h - 2R} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = h^2, \quad v = h - 2R \quad \text{und} \quad u' = 2h, \quad v' = 1$$

$$z'(h) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{2h(h - 2R) - 1 \cdot h^2}{(h - 2R)^2} = \frac{2h^2 - 4Rh - h^2}{(h - 2R)^2} = \frac{h^2 - 4Rh}{(h - 2R)^2}$$

$$z'(h) = \frac{h^2 - 4Rh}{(h - 2R)^2} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = h^2 - 4Rh, \quad v = (h - 2R)^2 \quad \text{und} \quad u' = v' = 2(h - 2R)$$

(Ableitung von v mit der *Kettenregel*, Substitution: $t = h - 2R$)

$$z''(h) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{2(h - 2R)(h - 2R)^2 - 2(h - 2R)(h^2 - 4Rh)}{(h - 2R)^4} =$$

$$= \frac{2(h - 2R)[(h - 2R)^2 - (h^2 - 4Rh)]}{(h - 2R)(h - 2R)^3} = \frac{2(h^2 - 4Rh + 4R^2 - h^2 + 4Rh)}{(h - 2R)^3} = \frac{8R^2}{(h - 2R)^3}$$

Berechnung des Minimums: $z'(h) = 0, \ \ z''(h) > 0$

$$z'(h) = 0 \quad \Rightarrow \quad h^2 - 4Rh = \underbrace{h}_{> 0}(h - 4R) = 0 \quad \Rightarrow \quad h - 4R = 0 \quad \Rightarrow \quad h = 4R$$

$$z''(h = 4R) = \frac{8R^2}{(4R - 2R)^3} = \frac{8R^2}{8R^3} = \frac{1}{R} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum}$$

Lösung: Wählt man die Höhe $h = 4R$, so hat der Kegel das *kleinstmögliche* Volumen. Der aus der Nebenbedingung (∗) berechnete Radius beträgt dann $r = \sqrt{2}\,R$.

$$V_{\min} = V(h = 4R) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{2}\,R)^2 \cdot 4R = \frac{8}{3}\pi R^3$$

2.8 Tangentenverfahren von Newton

Hinweise

(1) Das *Tangentenverfahren von Newton* liefert Näherungswerte für die Nullstellen der Funktion $y = f(x)$. Die (zu lösende) Gleichung muss daher in der Form $f(x) = 0$ vorliegen!

(2) **Lehrbuch:** Band 1, Kapitel IV.3.7

Formelsammlung: Kapitel I.4.5

B96 Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $2{,}4 \cdot \ln x + 0{,}5x^2 + 1 = 0$ auf mindestens 5 Stellen nach dem Komma genau.

Wir stellen die Gleichung $f(x) = 2{,}4 \cdot \ln x + 0{,}5x^2 + 1 = 0$ zunächst wie folgt um:

$$2{,}4 \cdot \ln x = -0{,}5x^2 - 1$$

Dann zeichnen wir die Kurven $y = 2{,}4 \cdot \ln x$ und $y = -0{,}5x^2 - 1$ und entnehmen der Skizze, dass es genau *einen* Schnittpunkt in der Nähe von $x = 0{,}6$ gibt (Bild B-36). Diesen Wert wählen wir als *Startwert* für die *Newton-Iteration*: $x_0 = 0{,}6$.

$$f(x) = 2{,}4 \cdot \ln x + 0{,}5x^2 + 1\,,$$

$$f'(x) = \frac{2{,}4}{x} + x\,, \quad f''(x) = -\frac{2{,}4}{x^2} + 1$$

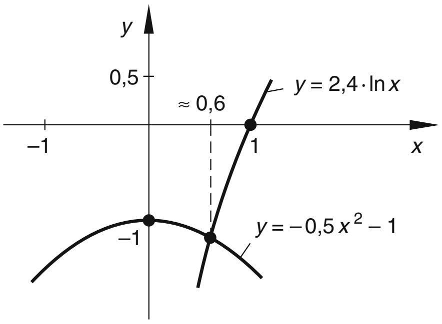


Bild B-36

Zunächst prüfen wir noch, ob der gewählte Startwert $x_0 = 0{,}6$ „geeignet“ ist, d. h. die *Konvergenzbedingung* erfüllt:

$$\left|\frac{f(x_0) \cdot f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2}\right| = \left|\frac{f(0{,}6) \cdot f''(0{,}6)}{[f'(0{,}6)]^2}\right| = \left|\frac{(-0{,}045\,981) \cdot (-5{,}667)}{4{,}6^2}\right| = 0{,}0123 < 1$$

Folgerung: Der Startwert $x_0 = 0{,}6$ ist *geeignet.*

Der *1. Iterationsschritt* liefert dann den folgenden (verbesserten) *Näherungswert*:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0{,}6 - \frac{f(0{,}6)}{f'(0{,}6)} = 0{,}6 - \frac{-0{,}045\,981}{4{,}6} = 0{,}609\,996$$

Mit diesem Wert als *Startwert* berechnen wir die *2. Näherung*:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0{,}609\,996 - \frac{f(0{,}609\,996)}{f'(0{,}609\,996)} = 0{,}609\,996 - \frac{-0{,}000\,279}{4{,}544\,448} = 0{,}610\,057$$

Der Start in die 3. Iteration zeigt dann, dass dieser Näherungswert sogar auf 6 Dezimalstellen nach dem Komma genau ist. Die gesuchte *Lösung* ist $x = 0{,}610\,057$.

B97

Ein liegender zylindrischer Behälter mit einem Volumen von $V_z = 2000\,\ell$ ist zu drei Viertel mit Heizöl gefüllt. Berechnen Sie die *Füllhöhe* h des Behälters.

Hinweis: Radius r und Länge l des Zylinders sind (zahlenmäßig) nicht bekannt. Die gesuchte Füllhöhe h wird daher noch von r bzw. l abhängen.

Bild B-37 zeigt den liegenden Zylinderkessel mitsamt der kreisförmigen Querschnittsfläche.

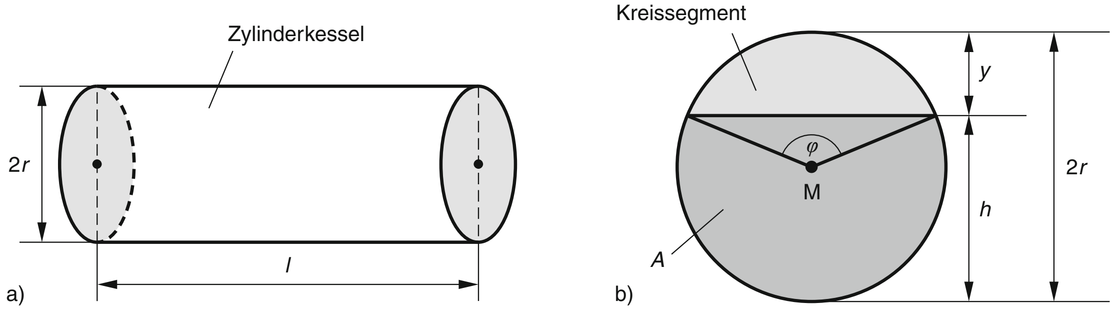


Bild B-37 a) Zylinderkessel
b) Querschnitt des Kessels

Das Füllvolumen erhalten wir (formelmäßig), wenn wir die im Bild *dunkelgrau* unterlegte Querschnittsfläche A mit der Zylinderlänge l multiplizieren. Die Querschnittsfläche A wiederum ist die Differenz zwischen der *Kreisfläche* πr^2 und der Fläche des *hellgrau* unterlegten *Kreissegments*. Aus der **Formelsammlung** entnehmen wir (Kap. I.7.10):

$$A = \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2(\varphi - \sin \varphi) = \frac{1}{2} r^2(2\pi - \varphi + \sin \varphi), \quad 0 < \varphi < \pi$$

Damit gilt für das Füllvolumen (der Behälter ist zu drei Viertel gefüllt $\Rightarrow$ $V = 1500\ \ell$):

$$(*) \quad V = A\,l = \frac{1}{2} r^2 l (2\pi - \varphi + \sin \varphi) = 1500$$

Radius r und Länge l des Kessels sind zwar unbekannt, hängen jedoch wie folgt zusammen (Zylindervolumen $V_z = 2000\ \ell$):

$$V_z = \pi r^2 l = 2000 \quad \Rightarrow \quad r^2 l = \frac{2000}{\pi}$$

Diesen Wert setzen wir in Gleichung $(*)$ ein und erhalten eine *Bestimmungsgleichung* für den noch unbekannten Zentriwinkel φ, aus dem wir dann die gesuchte Füllhöhe ermitteln können:

$$\frac{1}{2} r^2 l (2\pi - \varphi + \sin \varphi) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2000}{\pi} (2\pi - \varphi + \sin \varphi) = \frac{1000}{\pi} (2\pi - \varphi + \sin \varphi) = 1500 \quad \Rightarrow$$

$$2\pi - \varphi + \sin \varphi = 1{,}5\,\pi \quad \text{oder} \quad \sin \varphi = \varphi - 0{,}5\,\pi$$

Da der Behälter zu drei Viertel gefüllt ist, muss die Füllhöhe h zwischen r und $2r$ und der Zentriwinkel φ demnach zwischen 0 und π liegen. Wir suchen also die Lösung der Gleichung $\sin \varphi = \varphi - 0{,}5\,\pi$ im Intervall $0 < \varphi < \pi$. Anhand einer Skizze erkennen wir, dass sich die Kurven $y = \sin \varphi$ und $y = \varphi - 0{,}5\,\pi$ in der Nähe von $\varphi = 2{,}3$ schneiden (Bild B-38). Wir wählen daher $\varphi_0 = 2{,}3$ als *Startwert* für das Newtonsche Tangentenverfahren:

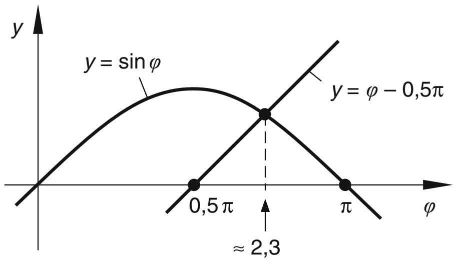


Bild B-38

$$f(\varphi) = \sin \varphi - \varphi + 0{,}5\,\pi$$

$$f'(\varphi) = \cos \varphi - 1$$

1. Näherung: $\varphi_1 = \varphi_0 - \dfrac{f(\varphi_0)}{f'(\varphi_0)} = 2{,}3 - \dfrac{f(2{,}3)}{f'(2{,}3)} = 2{,}3 - \dfrac{0{,}016\,502}{-1{,}666\,276} = 2{,}309\,904$

2. Näherung: $\varphi_2 = \varphi_1 - \dfrac{f(\varphi_1)}{f'(\varphi_1)} = 2{,}309\,904 - \dfrac{f(2{,}309\,904)}{f'(2{,}309\,904)} = 2{,}309\,904 - \dfrac{-0{,}000\,038}{-1{,}673\,629} = 2{,}309\,881$

Wegen $f(\varphi_2) = f(2{,}309\,881) = 7{,}69 \cdot 10^{-7}$ ist dieser Näherungswert bereits auf 6 Stellen nach dem Komma genau. Somit ist $\varphi = 2{,}309\,881$ die gesuchte Lösung (im Gradmaß: $\varphi = 132{,}346°$).

Die Berechnung der *Füllhöhe* erfolgt nach der Formel

$$h = 2r - y = 2r - r[1 - \cos(\varphi/2)] = 2r - r + r \cdot \cos(\varphi/2) = r + r \cdot \cos(\varphi/2) = r[1 + \cos(\varphi/2)]$$

(→ FS: Kap. I.7.10 und Bild B-37 b). Wir erhalten:

$$h = r[1 + \cos(\varphi/2)] = r(1 + \cos 66{,}173°) = 1{,}404 \cdot r$$

B98

Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $\tan \varphi = -\varphi$ im Intervall $0 < \varphi < \pi$ (auf mindestens 4 gültige Stellen nach dem Komma).

Der *Schnittpunkt* der beiden Kurven $y = \tan \varphi$ und $y = -\varphi$ im Intervall $0 < \varphi < \pi$ liegt in der Nähe von $\varphi = 2$. Er dient uns als *Startwert* für die Newton-Iteration: $\varphi_0 = 2$ (Bild B-39). Auf die Überprüfung der Konvergenzbedingung wollen wir dabei verzichten.

$$f(\varphi) = \tan \varphi + \varphi$$

$$f'(\varphi) = (1 + \tan^2 \varphi) + 1 = 2 + \tan^2 \varphi$$

1. Näherung: $\varphi_1 = \varphi_0 - \dfrac{f(\varphi_0)}{f'(\varphi_0)} = 2 - \dfrac{f(2)}{f'(2)} =$

$$= 2 - \frac{-0{,}185\,040}{6{,}774\,399} = 2{,}027\,315$$

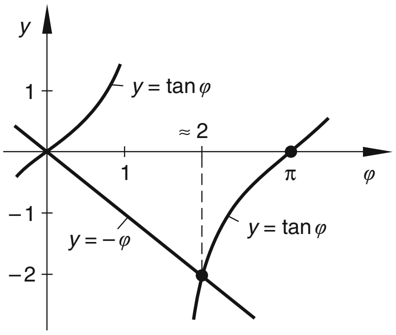


Bild B-39

2. Näherung: $\varphi_2 = \varphi_1 - \dfrac{f(\varphi_1)}{f'(\varphi_1)} = 2{,}027\,315 - \dfrac{f(2{,}027\,315)}{f'(2{,}027\,315)} = 2{,}027\,315 - \dfrac{-0{,}008\,846}{6{,}145\,951} = 2{,}028\,754$

Wegen $f(\varphi_2) = f(2{,}028\,754) = -0{,}000\,023$ und $f'(\varphi_2) = f'(2{,}028\,754) = 6{,}115\,938$ bringt die 3. Iteration *keine* Veränderung mehr in der 4. Stelle nach dem Komma. Der Näherungswert x_2 ist sogar auf 5 Nachkommastellen genau.

Ergebnis: $\varphi = 2{,}02875$.

B99

Welche Lösungen besitzt die Gleichung $x \cdot \tan x - 1 = 0$ im Intervall $0 \le x \le \pi$?

Wir stellen zunächst die Gleichung wie folgt um:

$$x \cdot \tan x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tan x = \frac{1}{x}$$

Der Schnittpunkt der beiden Kurven $y = \tan x$ und $y = 1/x$ liegt nach Bild B-40 in der Nähe von $x = 0{,}9$ und liefert uns den für das *Newton-Verfahren* benötigten Startwert: $x_0 = 0{,}9$

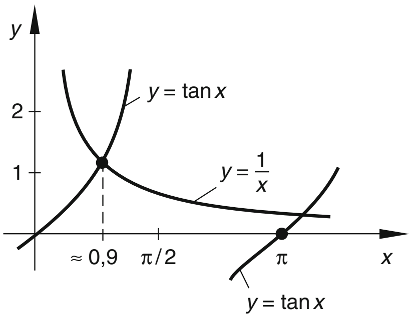


Bild B-40

$$f(x) = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\tan x}_{v} - 1 \qquad (\textit{Produktregel}!)$$

$$f'(x) = u'v + v'u - 0 = 1 \cdot \tan x + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot x =$$

$$= \tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$$

1. Näherung: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0{,}9 - \dfrac{f(0{,}9)}{f'(0{,}9)} = 0{,}9 - \dfrac{0{,}134\,142}{3{,}589\,357} = 0{,}862\,628$

2. Näherung: $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0{,}862\,628 - \dfrac{f(0{,}862\,628)}{f'(0{,}862\,628)} = 0{,}862\,628 - \dfrac{0{,}007\,332}{3{,}206\,688} = 0{,}860\,341$

Analog wird die 3. Näherung bestimmt. Die Ergebnisse stellen wir in einer Tabelle wie folgt zusammen:

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$f'(x_{n-1})$	x_n
1	0,9	0,134 142	3,589 357	0,862 628
2	0,862 628	0,007 333	3,206 688	0,860 341
3	0,860 341	0,000 024	3,185 083	0,860 333

Ergebnis: $x = 0{,}8603$

2.9 Grenzwertberechnung nach Bernoulli und de L'Hospital

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel VI.3.3.3

Formelsammlung: Kapitel III.3.4

B100 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{\tan x} = \,?\qquad (a,\ b > 0)$

Zähler *und* Nenner des Bruches streben für $x \to 0$ jeweils gegen Null, der Grenzwert führt also zunächst zu einem *unbestimmten Ausdruck* vom Typ $0/0$, auf den die Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital *anwendbar* ist:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{\tan x} = \lim_{x \to 0} \frac{(a^x - b^x)'}{(\tan x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{(\ln a) \cdot a^x - (\ln b) \cdot b^x}{1 + \tan^2 x} = \frac{(\ln a) \cdot a^0 - (\ln b) \cdot b^0}{1 + \tan^2 0} =$$

$$= \frac{(\ln a) \cdot 1 - (\ln b) \cdot 1}{1 + 0^2} = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \qquad \left(\textit{Rechenregel:}\ \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b\right)$$

B101 $g = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{(e^x - 1) \cdot x} = \,?$

Der Grenzwert führt zunächst auf den *unbestimmten Ausdruck* $0/0$, da Zähler *und* Nenner für $x \to 0$ gegen Null streben:

$$\lim_{x \to 0} (e^x - x - 1) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0, \quad \lim_{x \to 0} (e^x - 1) \cdot x = (e^0 - 1) \cdot 0 = 0$$

Die Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital führt ebenfalls auf den *unbestimmten Ausdruck* $0/0$:

$$g = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{(e^x - 1) \cdot x} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - x - 1)'}{\underbrace{[(e^x - 1) \cdot x]'}_{\text{Produktregel}}} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{e^x \cdot x + 1\,(e^x - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x \cdot e^x + e^x - 1} \to \frac{0}{0}$$

Nochmalige Anwendung der Grenzwertregel führt schließlich zu dem folgenden Ergebnis:

$$g = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x \cdot \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{(\mathrm{e}^x - 1)'}{(\underbrace{x \cdot \mathrm{e}^x}_{\text{Produktregel}} + \mathrm{e}^x - 1)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x}{1 \cdot \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \cdot x + \mathrm{e}^x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x}{2 \cdot \mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x (2 + x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2}$$

B102

$$g = \lim_{t \to 0} \frac{\sin(3t)}{\sqrt{t + 2} - \sqrt{2}} = ?$$

Bei der Grenzwertbildung streben Zähler *und* Nenner jeweils gegen Null, der Bruch damit gegen den *unbestimmten Ausdruck* $0/0$. Die Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital ist daher *anwendbar* und führt zu folgendem Ergebnis (Ableitungen von Zähler und Nenner jeweils mit Hilfe der *Kettenregel*, Substitutionen: $u = 3t$ bzw. $v = t + 2$):

$$g = \lim_{t \to 0} \frac{\sin(3t)}{\sqrt{t + 2} - \sqrt{2}} = \lim_{t \to 0} \frac{(\sin(3t))'}{(\sqrt{t + 2} - \sqrt{2})'} = \lim_{t \to 0} \frac{3 \cdot \cos(3t)}{\dfrac{1}{2\sqrt{t + 2}} \cdot 1} = \lim_{t \to 0} 3 \cdot \cos(3t) \cdot \frac{2\sqrt{t + 2}}{1} =$$

$$= 6 \cdot \lim_{t \to 0} \cos(3t) \cdot \sqrt{t + 2} = 6 \cdot \cos 0 \cdot \sqrt{2} = 6 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

B103

$$g = \lim_{x \to \infty} x \cdot \ln \frac{x - 1}{x + 1} = ?$$

Der Grenzwert führt zu dem folgenden *unbestimmten Ausdruck*:

$$g = \lim_{x \to \infty} x \cdot \ln \frac{x - 1}{x + 1} \quad \rightarrow \quad \infty \cdot \ln 1 = \infty \cdot 0 \qquad \left(\ln \frac{x - 1}{x + 1} = \ln \frac{1 - 1/x}{1 + 1/x} \rightarrow \ln 1 \quad \text{für} \quad x \rightarrow \infty \right)$$

Auf diese Form ist die Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital *nicht* anwendbar, wir können diesen unbestimmten Ausdruck jedoch durch eine *elementare* Umformung auf den *zulässigen* Typ $0/0$ zurückführen $\left(\text{mathematischer Trick: Faktor } x \text{ ist der } \textit{Kehrwert} \text{ von } \frac{1}{x}, \text{ d. h. } x = \frac{1}{1/x}\right)$:

$$g = \lim_{x \to \infty} x \cdot \ln \frac{x - 1}{x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln \dfrac{x - 1}{x + 1}}{\dfrac{1}{x}} \quad \rightarrow \quad \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Jetzt dürfen wir die Grenzwertregel *anwenden*. Die dabei benötigte Ableitung der *Zählerfunktion* erhalten wir wie folgt mit Hilfe von *Ketten-* und *Produktregel*:

$$y = \ln \frac{x - 1}{x + 1} = \ln z \quad \text{mit} \quad z = \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{u}{v} \qquad (u = x - 1, \ v = x + 1 \quad \text{und} \quad u' = v' = 1)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1\,(x+1) - 1\,(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{z} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{\dfrac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2}{\dfrac{(x-1)\,(x+1)\,(x+1)}{x+1}} = \frac{2}{\underbrace{(x-1)\,(x+1)}_{\text{3. Binom}}} = \frac{2}{x^2-1}$$

Die Grenzwertregel führt jetzt zu dem folgenden Ergebnis:

$$g = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln \dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\ln \dfrac{x-1}{x+1}\right)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{2}{x^2-1}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x^2-1} \cdot \left(-\frac{x^2}{1}\right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-2x^2}{x^2-1} = -2 \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2-1} = -2 \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1-\dfrac{1}{x^2}} = -2 \cdot 1 = -2$$

Umformungen: Zählerbruch mit dem Kehrwert des Nennerbruches multiplizieren → Zähler und Nenner *vor* der Grenzwertbildung noch gliedweise durch x^2 dividieren.

B104 $g = \lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = ?$

Wegen $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$ und $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = \infty$ führt der Grenzwert g zunächst auf den *unbestimmten Ausdruck* 1^{∞}, für den die Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital *nicht* anwendbar ist. Wir können diesen Ausdruck jedoch durch *elementare* Umformungen auf die Form $0/0$ zurückführen. Wegen $z = e^{\ln z}$ für $z > 0$ gilt:

$$x^{\frac{1}{x-1}} = e^{\left(\ln x^{\frac{1}{x-1}}\right)} = e^{\left(\frac{1}{x-1} \cdot \ln x\right)} = e^{\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)} \qquad (\textit{Rechenregel:}\ \ln a^n = n \cdot \ln a)$$

Somit lässt sich der Grenzwert auch wie folgt darstellen:

$$g = \lim_{x \to 1} x^{\left(\frac{1}{x-1}\right)} = \lim_{x \to 1} e^{\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)} = e^{\left(\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}\right)}$$

Dabei haben wir bereits berücksichtigt, dass die Grenzwertbildung im *Exponenten* vorgenommen werden darf (siehe Rechenregel für Grenzwerte: Band 1, Kap. III.4.2.3 und Formelsammlung, Kap. III.3.3).

Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$ führt zunächst zu dem *unbestimmten Ausdruck* $0/0$, da Zähler *und* Nenner für $x \to 1$ gegen *Null* streben. Die Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital ist daher anwendbar und führt zu dem folgenden Ergebnis:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

Damit haben wir die gestellte Aufgabe gelöst. Es ist:

$$g = \lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e^{\left(\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}\right)} = e^1 = e$$

B105

$$g = \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1 - x} \right) = ?$$

Der Grenzwert führt zunächst auf einen *unbestimmten Ausdruck*, auf den die Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital *nicht* anwendbar ist:

$$g = \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1 - x} \right) \to \infty - \infty$$

Wir müssen daher den in der Klammer stehenden Ausdruck *vor* dem Grenzübergang umformen (*Hauptnenner* bilden: $(1 - x) \cdot \ln x$). Die Grenzwertbildung führt dann zu dem *unbestimmten Ausdruck* $0/0$, den wir mit der Grenzwertregel weiter behandeln können:

$$g = \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1 - x} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{1 - x + \ln x}{(1 - x) \cdot \ln x} \to \frac{1 - 1 + \ln 1}{(1 - 1) \cdot \ln 1} = \frac{0}{0}$$

$$g = \lim_{x \to 1} \frac{(1 - x + \ln x)'}{\underbrace{((1 - x) \cdot \ln x)'}_{\text{Produktregel}}} = \lim_{x \to 1} \frac{-1 + \dfrac{1}{x}}{-1 \cdot \ln x + \dfrac{1}{x} \cdot (1 - x)} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{-x + 1}{x}}{\dfrac{-x \cdot \ln x + 1 - x}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-x + 1}{x} \cdot \frac{x}{-x \cdot \ln x - x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{-x + 1}{-x \cdot \ln x - x + 1} \to \frac{-1 + 1}{-1 \cdot \underbrace{\ln 1}_{0} - 1 + 1} = \frac{0}{0}$$

Umformungen: Im Zähler und Nenner jeweils den Hauptnenner x bilden → den Zählerbruch mit dem Kehrwert des Nennerbruches multiplizieren → Faktor x kürzen.

Nochmalige Anwendung der Grenzwertregel führt schließlich zum Ziel:

$$g = \lim_{x \to 1} \frac{(-x + 1)'}{(\underbrace{-\, x \cdot \ln x}_{\text{Produktregel}} - x + 1)'} = \lim_{x \to 1} \frac{-1}{-1 \cdot \ln x + \dfrac{1}{x} \cdot (-x) - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{-1}{-\ln x - 1 - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-1}{-\ln x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{\underbrace{\ln 1}_{0} + 2} = \frac{1}{2}$$

B106

Die Tangentensteigung der Kardioide $r = 1 + \cos \varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$ wird nach der Formel

$$y'(\varphi) = \frac{-2 \cdot \cos^2 \varphi - \cos \varphi + 1}{\sin \varphi + \sin (2\varphi)}$$

berechnet. An der Stelle $\varphi = \pi$ erhält man zunächst den unbestimmten Ausdruck $0/0$. Zeigen Sie mit Hilfe der Grenzwertregel von *Bernoulli* und *de L'Hospital*, dass die Kurventangente an dieser Stelle *waagerecht* verläuft.

Die Steigungsformel führt beim Grenzübergang $\varphi \to \pi$ zunächst auf einen *unbestimmten Ausdruck*:

$$m = \lim_{\varphi \to \pi} y'(\varphi) = \lim_{\varphi \to \pi} \frac{-2 \cdot \cos^2 \varphi - \cos \varphi + 1}{\sin \varphi + \sin (2\varphi)} \to \frac{-2 \cdot \cos^2 \pi - \cos \pi + 1}{\sin \pi + \sin (2\pi)} =$$

$$= \frac{-2 \cdot (-1)^2 + 1 + 1}{0 + 0} = \frac{-2 + 2}{0} = \frac{0}{0}$$

Mit Hilfe der Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital lässt sich der Grenzwert wie folgt bestimmen:

$$m = \lim_{\varphi \to \pi} \frac{(-2 \cdot \cos^2 \varphi - \cos \varphi + 1)'}{(\sin \varphi + \sin(2\varphi))'} = \lim_{\varphi \to \pi} \frac{-2 \cdot 2 \cdot \cos \varphi \cdot (-\sin \varphi) + \sin \varphi}{\cos \varphi + 2 \cdot \cos(2\varphi)} =$$

$$= \lim_{\varphi \to \pi} \frac{4 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \sin \varphi}{\cos \varphi + 2 \cdot \cos(2\varphi)} = \lim_{\varphi \to \pi} \frac{(4 \cdot \cos \varphi + 1) \cdot \sin \varphi}{\cos \varphi + 2 \cdot \cos(2\varphi)} = \frac{(4 \cdot \cos \pi + 1) \cdot \sin \pi}{\cos \pi + 2 \cdot \cos(2\pi)} =$$

$$= \frac{(4 \cdot (-1) + 1) \cdot 0}{-1 + 2 \cdot 1} = \frac{0}{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{waagerechte Tangente}$$

Die Tangente im Nullpunkt (d. h. für $\varphi = \pi$ und $r = 0$) verläuft daher – wie behauptet – *waagerecht*.

B107

Beim *freien Fall* unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes besteht der folgende komplizierte Zusammenhang zwischen der Fallgeschwindigkeit v und dem Fallweg s:

$$v = \sqrt{mg \left(\frac{1 - e^{-\frac{2ks}{m}}}{k} \right)}, \qquad s \geq 0$$

m: Masse
g: Erdbeschleunigung
k: Reibungskoeffizient

Wie lautet dieses Gesetz im *luftleeren* Raum?

Anleitung: Betrachten Sie v als eine Funktion des Reibungskoeffizienten k und bilden Sie dann den Grenzwert für $k \to 0$.

Die Abhängigkeit der Fallgeschwindigkeit v vom Fallweg s im *luftleeren* Raum erhalten wir durch den Grenzübergang $k \to 0$. Mit der Abkürzung $\alpha = 2\,s/m$ und unter Beachtung der Rechenregeln für Grenzwerte (hier: der Grenzwert darf „unter der Wurzel" ausgeführt werden) erhalten wir zunächst:

$$v_{k=0} = \lim_{k \to 0} v(k) = \lim_{k \to 0} \sqrt{mg \left(\frac{1 - e^{-\alpha k}}{k} \right)} = \sqrt{mg \cdot \lim_{k \to 0} \frac{1 - e^{-\alpha k}}{k}}$$

Berechnung des Grenzwertes

Der Grenzwert führt zunächst auf einen *unbestimmten Ausdruck*:

$$\lim_{k \to 0} \frac{1 - e^{-\alpha k}}{k} \to \frac{1 - e^0}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

Mit der Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital erreichen wir unser Ziel:

$$\lim_{k \to 0} \frac{1 - e^{-\alpha k}}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{(1 - e^{-\alpha k})'}{(k)'} = \lim_{k \to 0} \frac{\alpha \cdot e^{-\alpha k}}{1} = \lim_{k \to 0} \alpha \cdot e^{-\alpha k} = \alpha \cdot e^0 = \alpha \cdot 1 = \alpha = \frac{2\,s}{m}$$

(Ableitung von $e^{-\alpha k}$ nach der *Kettenregel*, Substitution: $t = -\alpha k$)

Wir erhalten damit im *luftleeren* Raum die folgende Abhängigkeit der Fallgeschwindigkeit v vom Fallweg s:

$$v_{k=0} = \sqrt{mg \cdot \frac{2\,s}{m}} = \sqrt{2gs}, \qquad s \geq 0$$

Bild B-41 zeigt den Zusammenhang zwischen v und s im *luftleeren* Raum (Kurve a) bzw. unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes (Kurve b).

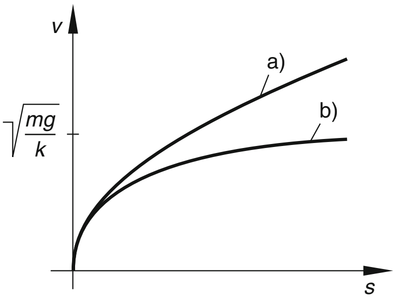


Bild B-41

C Integralrechnung

Hinweise für das gesamte Kapitel

(1) Kürzen eines gemeinsamen Faktors wird durch *Grauunterlegung* gekennzeichnet.

(2) Treten *mehrere* Integrationskonstanten auf, so werden diese (zusammen mit eventuell vorhandenen konstanten Gliedern) am Schluss zu *einer* Integrationskonstanten zusammengefügt.

1 Integration durch Substitution

Alle Integrale in diesem Abschnitt lassen sich mit Hilfe einer geeigneten Substitution auf *Grund-* oder *Stammintegrale* zurückführen.

Hinweise

(1) **Lehrbuch:** Band 1, Kapitel V.8.1
Formelsammlung: Kapitel V.3.1

(2) **Tabelle der Grund- oder Stammintegrale** → Band 1, Kapitel V. 5 und Formelsammlung, Kapitel V. 2.3

(3) Bei einem *bestimmten* Integral kann auf die Rücksubstitution verzichtet werden, wenn die Integrationsgrenzen mit Hilfe der Substitutionsgleichung *mitsubstituiert* werden.

C1 $$I = \int_{0}^{1} \frac{x}{(1 + x^2)^2}\, dx = ?$$

Durch die Substitution $u = 1 + x^2$ wird der Nenner des Integranden vereinfacht und wir erhalten nach Durchführung der vollständigen Substitution ein *Grundintegral* (die Integrationsgrenzen werden mitsubstituiert). Die Substitutionsgleichungen lauten:

$$u = 1 + x^2, \quad \frac{du}{dx} = 2x, \quad dx = \frac{du}{2x}, \qquad \text{Grenzen} \begin{cases} \text{unten: } x = 0 \;\Rightarrow\; u = 1 + 0 = 1 \\ \text{oben: } x = 1 \;\Rightarrow\; u = 1 + 1 = 2 \end{cases}$$

Durchführung der Integralsubstitution:

$$I = \int_{0}^{1} \frac{x}{(1 + x^2)^2}\, dx = \int_{u=1}^{2} \frac{\boxed{x}}{u^2} \cdot \frac{du}{2\,\boxed{x}} = \frac{1}{2} \cdot \int_{1}^{2} \frac{1}{u^2}\, du$$

Integration (Potenzregel der Integralrechnung):

$$I = \frac{1}{2} \cdot \int_{1}^{2} \frac{1}{u^2}\, du = \frac{1}{2} \cdot \int_{1}^{2} u^{-2}\, du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^{-1}}{-1} \right]_{1}^{2} = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{u} \right]_{1}^{2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Klausur- und Übungsaufgaben,*
DOI 10.1007/978-3-8348-9730-5_3,© Vieweg+Teubner Verlag |Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2010

C2

$$I = \int \frac{3x^8}{x^3 + 1}\, dx = ?$$

Sinnvoll erscheint die Substitution $u = x^3 + 1$, da sie den Nenner des Integranden vereinfacht. Mit

$$u = x^3 + 1\,, \quad \frac{du}{dx} = 3x^2\,, \quad dx = \frac{du}{3x^2}$$

erhalten wir zunächst:

$$I = \int \frac{3x^8}{x^3 + 1}\, dx = \int \frac{3x^8}{u} \cdot \frac{du}{3x^2} = \int \frac{3x^2 \cdot x^6}{u} \cdot \frac{du}{3x^2} = \int \frac{x^6}{u}\, du$$

Die Durchführung der Integralsubstitution ist jedoch *unvollständig*, denn das neue Integral enthält noch die alte Variable x. Wir müssen diese daher noch durch die neue Variable u ausdrücken. Dies geschieht mit Hilfe der Substitutionsgleichung $u = x^3 + 1$, die nach x^3 aufgelöst und anschließend quadriert wird:

$$x^3 = u - 1 \quad \Rightarrow \quad x^6 = (u - 1)^2 = u^2 - 2u + 1$$

Damit geht das Integral über in:

$$I = \int \frac{x^6}{u}\, du = \int \frac{u^2 - 2u + 1}{u}\, du = \int \left(u - 2 + \frac{1}{u} \right) du = \frac{1}{2}\, u^2 - 2u + \ln|u| + C$$

Rücksubstitution $(u = x^3 + 1)$ führt schließlich zur Lösung dieser Aufgabe:

$$I = \frac{1}{2}\,(x^3 + 1)^2 - 2\,(x^3 + 1) + \ln|x^3 + 1| + C = \frac{1}{2}\,(x^6 + 2x^3 + 1) - 2x^3 - 2 + \ln|x^3 + 1| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\,x^6 + x^3 + \frac{1}{2} - 2x^3 - 2 + \ln|x^3 + 1| + C = \frac{1}{2}\,x^6 - x^3 + \ln|x^3 + 1| + - \frac{3}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\,x^6 - x^3 + \ln|x^3 + 1| + C^* \qquad \left(C^* = - \frac{3}{2} + C\right)$$

C3

$$I = \int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1 + \mathrm{e}^x}\, dx = ?$$

Die Substitution $u = 1 + \mathrm{e}^x$ führt zu einer Vereinfachung im Nenner des Integranden. Somit gilt (versuchsweise):

$$u = 1 + \mathrm{e}^x\,, \quad \frac{du}{dx} = \mathrm{e}^x\,, \quad dx = \frac{du}{\mathrm{e}^x}$$

Durchführung der Integralsubstitution:

$$I = \int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1 + \mathrm{e}^x}\, dx = \int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{u} \cdot \frac{du}{\mathrm{e}^x} = \int \frac{\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^x}{u} \cdot \frac{du}{\mathrm{e}^x} = \int \frac{\mathrm{e}^x}{u}\, du$$

Um die alte Variable x vollständig aus dem Integral zu entfernen, lösen wir die Substitutionsgleichung $u = 1 + \mathrm{e}^x$ nach e^x auf und setzen den gefundenen Ausdruck $\mathrm{e}^x = u - 1$ ein. Das Integral I lässt sich jetzt leicht lösen:

$$I = \int \frac{\mathrm{e}^x}{u}\, du = \int \frac{u - 1}{u}\, du = \int \left(1 - \frac{1}{u} \right) du = u - \ln|u| + C$$

Nach der Rücksubstitution $u = 1 + \mathrm{e}^x$ erhält man die folgende Lösung:

$$I = \int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1 + \mathrm{e}^x}\, dx = (1 + \mathrm{e}^x) - \ln|1 + \mathrm{e}^x| + C = \mathrm{e}^x - \ln(1 + \mathrm{e}^x) + C^* \qquad (C^* = 1 + C)$$

C4

$$I = \int \sin^3 x \cdot \cos^3 x\, dx = ?$$

Wir versuchen, das Integral mit der folgenden Substitution zu lösen:

$$u = \sin x, \qquad \frac{du}{dx} = \cos x, \qquad dx = \frac{du}{\cos x}$$

Durchführung der Integralsubstitution führt zunächst zu:

$$I = \int \sin^3 x \cdot \cos^3 x\, dx = \int u^3 \cdot \cos^3 x \cdot \frac{du}{\cos x} = \int u^3 \cdot \cos^2 x \cdot \cos x \cdot \frac{du}{\cos x} = \int u^3 \cdot \cos^2 x\, du$$

Die Substitution ist offensichtlich *unvollständig*, da die alte Variable x immer noch im Integral vorhanden ist. Den Faktor $\cos^2 x$ im Integral können wir jedoch unter Verwendung der trigonometrischen Formel $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ wie folgt durch die neue Variable u ausdrücken:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - u^2$$

Das Integral I geht dann in *Grundintegrale* über:

$$I = \int u^3 \cdot \cos^2 x\, du = \int u^3 (1 - u^2)\, du = \int (u^3 - u^5)\, du = \frac{1}{4}\, u^4 - \frac{1}{6}\, u^6 + C$$

Durch Rücksubstitution $(u = \sin x)$ erhalten wir die gesuchte Lösung. Sie lautet:

$$I = \int \sin^3 x \cdot \cos^3 x\, dx = \frac{1}{4} \cdot \sin^4 x - \frac{1}{6} \cdot \sin^6 x + C$$

Anmerkung: Auch die Substitution $u = \cos x$ führt zum Ziel!

C5

$$I = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sqrt{\tan x}} = ?$$

Der Integrand enthält die Funktion $\tan x$ und deren Ableitung $\dfrac{1}{\cos^2 x}$. Wir wählen daher versuchsweise die folgende Substitution:

$$u = \tan x, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad dx = \cos^2 x\, du$$

Sie führt (wie erhofft) zu einem *Grundintegral*:

$$I = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sqrt{\tan x}} = \int \frac{\cos^2 x\, du}{\cos^2 x \cdot \sqrt{u}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{du}{u^{1/2}} = \int u^{-1/2}\, du = \frac{u^{1/2}}{1/2} + C = 2 \cdot \sqrt{u} + C$$

Nach der Rücksubstitution $u = \tan x$ erhalten wir die Lösung:

$$I = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sqrt{\tan x}} = 2 \cdot \sqrt{\tan x} + C$$

C6

$$I = \int \frac{\arctan x}{1 + x^2}\, dx = ?$$

Wir schreiben den Integranden als *Produkt* und erkennen, dass der rechte Faktor genau die *Ableitung* des linken Faktors ist:

$$\int \frac{\arctan x}{1 + x^2}\, dx = \int \underbrace{\arctan x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + x^2}}_{f'(x)}\, dx = \int f(x) \cdot f'(x)\, dx \quad \text{mit} \quad f(x) = \arctan x \quad \text{und} \quad f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Ein solches Integral wird bekanntlich durch die Substitution $u = f(x)$ gelöst (→ FS: Kap. V.3.1.2, Integraltyp B). Wir setzen daher $u = \arctan x$ und erhalten folgende Substitutionsgleichungen:

$$u = \arctan x\,, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}\,, \quad dx = (1 + x^2)\, du$$

Nach der Durchführung dieser Integralsubstitution erhalten wir ein *Grundintegral*:

$$I = \int \frac{\arctan x}{1 + x^2}\, dx = \int \frac{u}{1 + x^2}\, (1 + x^2)\, du = \int u\, du = \frac{1}{2}\, u^2 + C$$

Die Rücksubstitution $u = \arctan x$ führt schließlich zur gesuchten Lösung:

$$I = \int \frac{\arctan x}{1 + x^2}\, dx = \frac{1}{2}\, (\arctan x)^2 + C$$

C7

$$I = \int \frac{8x^3 - 20x}{x^4 - 5x^2 + 4}\, dx = ?$$

Eine genaue Betrachtung des echt gebrochenrationalen Integranden zeigt, dass im Zähler genau die *Ableitung* des Nenners steht (bis auf den konstanten Faktor 2, den wir vor das Integral ziehen):

$$I = \int \frac{8x^3 - 20x}{x^4 - 5x^2 + 4}\, dx = \int \frac{2\,(4x^3 - 10x)}{x^4 - 5x^2 + 4}\, dx = 2 \cdot \int \frac{4x^3 - 10x}{x^4 - 5x^2 + 4}\, dx = 2 \cdot \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$$

Nenner: $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ Zähler: $f'(x) = 4x^3 - 10x$

Ein solches Integral wird durch die Substitution $u = f(x)$ gelöst (→ FS: Kap. V.3.1.2, Integraltyp E). Wir setzen daher $u = x^4 - 5x^2 + 4$ und erhalten folgende Substitutionsgleichungen:

$$u = x^4 - 5x^2 + 4\,, \quad \frac{du}{dx} = 4x^3 - 10x\,, \quad dx = \frac{du}{4x^3 - 10x}$$

Durchführung der Integralsubstitution:

$$I = 2 \cdot \int \frac{4x^3 - 10x}{x^4 - 5x^2 + 4}\, dx = 2 \cdot \int \frac{4x^3 - 10x}{u} \cdot \frac{du}{4x^3 - 10x} = 2 \cdot \int \frac{1}{u}\, du = 2 \cdot \ln|u| + C$$

Rücksubstitution und Lösung:

$$I = \int \frac{8x^3 - 20x}{x^4 - 5x^2 + 4}\, dx = 2 \cdot \ln|x^4 - 5x^2 + 4| + C$$

C8

$$I = \int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} = ?$$

Das Integral enthält einen Wurzelausdruck vom allgemeinen Typ $\sqrt{x^2 + a^2}$. Aus der Formelsammlung entnehmen wir für ein solches Integral die hyperbolische Substitution $x = a \cdot \sinh u$, die den Wurzelausdruck beseitigt (→ FS: Kap. V.3.1.2, Integraltyp G). In diesem speziellen Fall ist $a = 1$ und die Substitutionsgleichungen lauten:

$$x = \sinh u\,, \quad \frac{dx}{du} = \cosh u\,, \quad dx = \cosh u \, du\,, \qquad \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{\sinh^2 u + 1} = \sqrt{\cosh^2 u} = \cosh u$$

(unter Verwendung der Beziehung $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1 \;\Rightarrow\; \sinh^2 + 1 = \cosh^2 u$). Wir erhalten ein *Grundintegral*:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{\cosh u \, du}{\sinh^2 u \cdot \cosh u} = \int \frac{1}{\sinh^2 u} \, du = -\coth u + C$$

Vor der Rücksubstitution drücken wir diese Lösung noch wie folgt durch $\sinh u$ aus (dies ist wegen der Rücksubstitution $x = \sinh u$ sinnvoll):

$$I = -\coth u + C = -\frac{\cosh u}{\sinh u} + C = -\frac{\sqrt{\sinh^2 u + 1}}{\sinh u} + C$$

$\left(\text{unter Verwendung der Beziehungen } \coth u = \frac{\cosh u}{\sinh u} \text{ und } \cosh^2 u - \sinh^2 u = 1 \;\Rightarrow\; \cosh u = \sqrt{\sinh^2 u + 1}\right)$

Rücksubstitution $(x = \sinh u)$ und Lösung:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} = -\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} + C$$

C9

$$I = \int \frac{x \cdot \arcsin(x^2)}{\sqrt{1 - x^4}} \, dx = ?$$

Dieses komplizierte Integral lässt sich schrittweise durch *zwei* Substitutionen auf ein *Grundintegral* zurückführen. Zunächst einmal erreichen wir mit Hilfe der Substitution $u = x^2$ eine Vereinfachung im Zähler des Integranden:

$$u = x^2\,, \quad \frac{du}{dx} = 2x\,, \quad dx = \frac{du}{2x}\,, \quad u^2 = x^4$$

$$I = \int \frac{x \cdot \arcsin(x^2)}{\sqrt{1 - x^4}} \, dx = \int \frac{x \cdot \arcsin u}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot \frac{du}{2\,x} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{\arcsin u}{\sqrt{1 - u^2}} \, du$$

Bedauerlicherweise liegt noch kein Grundintegral vor. Eine genauere Betrachtung zeigt jedoch, dass dieses Integral vom Typ $\int f(u) \cdot f'(u) \, du$ ist. Dazu formen wir den Integranden wie folgt in ein *Produkt* aus zwei Faktoren um:

$$\frac{\arcsin u}{\sqrt{1 - u^2}} = \underbrace{(\arcsin u)}_{f(u)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}}_{f'(u)} = f(u) \cdot f'(u)$$

Wir erkennen: Der rechte Faktor ist genau die *Ableitung* des linken Faktors. Für ein solches Integral entnehmen wir aus der Formelsammlung die Substitution $v = f(u)$, hier also $v = \arcsin u$ (→ FS: Kap. V.3.1.2, Integraltyp B).

Die Substitutionsgleichungen lauten somit:

$$v = \arcsin u\,, \quad \frac{dv}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,, \quad du = \sqrt{1-u^2}\,dv$$

Wir erhalten jetzt ein *Grundintegral*:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{v}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \sqrt{1-u^2}\,dv = \frac{1}{2} \cdot \int v\,dv = \frac{1}{4}\,v^2 + C$$

Bei der Rücksubstitution $(v \rightarrow u \rightarrow x)$ ersetzen wir zunächst v durch $\arcsin u$ und anschließend u durch x^2. Damit erhalten wir folgende Lösung:

$$I = \int \frac{x \cdot \arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{1}{4}\,v^2 + C = \frac{1}{4}\,(\arcsin u)^2 + C = \frac{1}{4}\,[\arcsin(x^2)]^2 + C$$

C10

$$I = \int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx = ?$$

Mit der naheliegenden Substitution

$$u = \ln x\,, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\,, \quad dx = x\,du$$

erreichen wir unser Ziel:

$$I = \int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx = \int \frac{u^3}{x} \cdot x\,du = \int u^3\,du = \frac{1}{4}\,u^4 + C$$

Die Lösung lautet somit nach vollzogener Rücksubstitution $u = \ln x$ wie folgt:

$$I = \int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx = \frac{1}{4}\,(\ln x)^4 + C$$

C11

$$I = \int \cos^5 x\,dx = ?$$

Wir zerlegen den Integrand $\cos^5 x$ zunächst wie folgt in ein *Produkt* aus zwei Faktoren:

$$I = \int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x \cdot \cos x\,dx$$

Der rechte Faktor $\cos x$ ist dabei bekanntlich die Ableitung von $\sin x$. Sollte es uns gelingen, den linken Faktor $\cos^4 x$ durch $\sin x$ auszudrücken, dann hilft uns die Substitution $u = \sin x$ (voraussichtlich) weiter. Unter Verwendung der Beziehung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und damit $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ erreichen wir unser Ziel:

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = (1 - \sin^2 x)^2$$

Das vorgegebene Integral I geht damit über in

$$I = \int \cos^4 x \cdot \cos x\,dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \cos x\,dx$$

Es lässt sich mit Hilfe der bereits weiter oben erwähnten Substitution $u = \sin x$ in ein *Grundintegral* verwandeln:

$$u = \sin x\,, \quad \frac{du}{dx} = \cos x\,, \quad dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$I = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \cos x \, dx = \int (1 - u^2)^2 \cdot \cos x \cdot \frac{du}{\cos x} = \int (1 - u^2)^2 \, du =$$

$$= \int (1 - 2u^2 + u^4) \, du = u - \frac{2}{3} u^3 + \frac{1}{5} u^5 + C$$

Durch Rücksubstitution $u = \sin x$ erhalten wir schließlich die folgende Lösung:

$$I = \int \cos^5 x \, dx = \sin x - \frac{2}{3} \cdot \sin^3 x + \frac{1}{5} \cdot \sin^5 x + C$$

C12

$$I = \int \frac{(x + 2)^2}{(x - 10)^2} \, dx = ?$$

Mit der Substitution $u = x - 10$ wird der Nenner des Integranden vereinfacht, was sicher sinnvoll ist. Gleichzeitig ersetzen wir im Zähler die alte Variable x durch $u + 10$ (Auflösen der Substitutionsgleichung nach x). Die vollständige Integralsubstitution lautet also:

$$u = x - 10\,, \quad \frac{du}{dx} = 1\,, \quad dx = du\,, \quad x = u + 10$$

Sie führt zu *Grundintegralen*:

$$I = \int \frac{(x + 2)^2}{(x - 10)^2} \, dx = \int \frac{(u + 10 + 2)^2}{u^2} \, du = \int \frac{(u + 12)^2}{u^2} \, du = \int \frac{u^2 + 24u + 144}{u^2} \, du =$$

$$= \int \left(1 + \frac{24}{u} + \frac{144}{u^2}\right) du = \int \left(1 + \frac{24}{u} + 144 \cdot u^{-2}\right) du = u + 24 \cdot \ln |u| - \frac{144}{u} + C$$

Rücksubstitution $(u = x - 10)$ und Lösung:

$$I = x - 10 + 24 \cdot \ln |x - 10| - \frac{144}{x - 10} + C = x + 24 \cdot \ln |x - 10| - \frac{144}{x - 10} + C^* \quad (C^* = C - 10)$$

C13

$$I = \int 2 \cdot e^{2x+1} \cdot \cosh x \, dx = ?$$

Der Integrand lässt sich wesentlich vereinfachen, wenn man sich an die Definitionsformel der Hyperbelfunktion $\cosh x$ erinnert. Sie lautet (→ FS: Kap. III.11.1):

$$\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

Umformung des Integranden mit Hilfe dieser Formel ergibt:

$$2 \cdot e^{2x+1} \cdot \cosh x = 2 \cdot e^{2x+1} \cdot \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = e^{2x+1} (e^x + e^{-x}) = e^{3x+1} + e^{x+1}$$

Das Integral I lässt sich dann wie folgt in zwei Teilintegrale I_1 und I_2 aufspalten:

$$I = \int 2 \cdot \mathrm{e}^{2x+1} \cdot \cosh x \, dx = \int (\mathrm{e}^{3x+1} + \mathrm{e}^{x+1}) \, dx = \underbrace{\int \mathrm{e}^{3x+1} \, dx}_{I_1} + \underbrace{\int \mathrm{e}^{x+1} \, dx}_{I_2} = I_1 + I_2$$

Diese sind durch einfache Substitutionen leicht lösbar:

Integral I_1: $u = 3x + 1 , \quad \frac{du}{dx} = 3 , \quad dx = \frac{du}{3}$

$$I_1 = \int \mathrm{e}^{3x+1} \, dx = \int \mathrm{e}^{u} \cdot \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \cdot \int \mathrm{e}^{u} \, du = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{e}^{u} + C_1 = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{e}^{3x+1} + C_1$$

Integral I_2: $v = x + 1 , \quad \frac{dv}{dx} = 1 , \quad dx = dv$

$$I_2 = \int \mathrm{e}^{x+1} \, dx = \int \mathrm{e}^{v} \, dv = \mathrm{e}^{v} + C_2 = \mathrm{e}^{x+1} + C_2$$

In beiden Integralen wurde die Rücksubstitution bereits durchgeführt. Für das Integral I erhalten wir damit:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{e}^{3x+1} + C_1 + \mathrm{e}^{x+1} + C_2 = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{e}^{3x+1} + \mathrm{e}^{x+1} + C \qquad (C = C_1 + C_2)$$

C14

Lösen Sie das Integral $I = \int \frac{dx}{\sin(2x)}$ mit Hilfe einer geeigneten *trigonometrischen* Umformung (→ Formelsammlung) und der sich anschließenden *Substitution* $u = \tan x$.

Wir drücken den Integrand zunächst durch elementare trigonometrische Funktionen aus. Dabei verwenden wir die Beziehung $\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ (→ FS: Kap. III.7.6.3). Das Integral I nimmt dann die folgende Gestalt an:

$$I = \int \frac{dx}{\sin(2x)} = \int \frac{dx}{2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x}$$

Mit der (vorgegebenen) Substitution

$$u = \tan x , \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} , \quad dx = \cos^2 x \, du$$

wird daraus zunächst

$$I = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{\cos^2 x \, du}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{\cos x \cdot \cos x}{\sin x \cdot \cos x} \, du = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{\cos x}{\sin x} \, du$$

Der Integrand ist wegen der trigonometrischen Beziehung $\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x = \frac{1}{\tan x}$ der Kehrwert von $\tan x$ und somit der Kehrwert der neuen Variablen u:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{\cos x}{\sin x} \, du = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{\tan x} \, du = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u} \, du$$

Die Substitution führt damit zu einem *Grundintegral* und schließlich nach erfolgter Rücksubstitution $(u = \tan x)$ zur Lösung dieser Aufgabe:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u} \, du = \frac{1}{2} \cdot \ln |u| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln |\tan x| + C$$

C15 Lösen Sie das Integral $I = \int \cos^4 x \, dx$ mit Hilfe einer geeigneten *trigonometrischen* Umformung (→ Formelsammlung) und anschließender *Substitution*. Überprüfen Sie das Ergebnis.

Mit Hilfe der trigonometrischen Beziehung

$$\cos^4 x = \frac{1}{8} \left[\cos(4x) + 4 \cdot \cos(2x) + 3 \right] \qquad (\rightarrow \text{FS: Kap. III.7.6.4})$$

lässt sich das Integral in drei einfache Teilintegrale aufspalten:

$$I = \int \cos^4 x \, dx = \frac{1}{8} \cdot \int \left[\cos(4x) + 4 \cdot \cos(2x) + 3 \right] dx =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \int \cos \underbrace{(4x)}_{u} \, dx + \frac{1}{2} \cdot \int \cos \underbrace{(2x)}_{v} \, dx + \frac{3}{8} \cdot \int 1 \, dx$$

Das letzte Integral ist bereits ein *Grundintegral*, die beiden übrigen lassen sich in der angedeuteten Weise wie folgt durch einfache Substitutionen in solche überführen:

$$u = 4x, \quad \frac{du}{dx} = 4, \quad dx = \frac{du}{4}, \quad v = 2x, \quad \frac{dv}{dx} = 2, \quad dx = \frac{dv}{2}$$

$$I = \frac{1}{8} \cdot \int \cos u \cdot \frac{du}{4} + \frac{1}{2} \cdot \int \cos v \cdot \frac{dv}{2} + \frac{3}{8} \, x = \frac{1}{32} \cdot \int \cos u \, du + \frac{1}{4} \cdot \int \cos v \, dv + \frac{3}{8} \, x =$$

$$= \frac{1}{32} \cdot \sin u + \frac{1}{4} \cdot \sin v + \frac{3}{8} \, x + C$$

Durch Rücksubstitution $(u = 4x, \; v = 2x)$ erhalten wir die gesuchte Lösung:

$$I = \int \cos^4 x \, dx = \frac{1}{32} \cdot \sin(4x) + \frac{1}{4} \cdot \sin(2x) + \frac{3}{8} \, x + C$$

Wir überprüfen das Ergebnis (die 1. Ableitung der rechten Seite muss den Integrand $\cos^4 x$ ergeben):

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{32} \cdot \sin \underbrace{(4x)}_{u} + \frac{1}{4} \cdot \sin \underbrace{(2x)}_{v} + \frac{3}{8} \, x + C \right] = \frac{1}{32} \cdot 4 \cdot \cos(4x) + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \cos(2x) + \frac{3}{8} =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \cos(4x) + \frac{1}{2} \cdot \cos(2x) + \frac{3}{8} = \underbrace{\frac{1}{8} \left[\cos(4x) + 4 \cdot \cos(2x) + 3 \right]}_{\cos^4 x} = \cos^4 x$$

(unter Verwendung der *Kettenregel*, Substitutionen: $u = 4x$ bzw. $v = 2x$)

C16

$$I = \int \frac{x}{x^2 - 2x + 10}\, dx = ?$$

Der Nenner des Integranden muss zunächst durch elementare Umformungen auf die einfachere Form $u^2 + 1$ gebracht werden. Dies geschieht auf folgende Weise:

$$\underbrace{x^2 - 2x}_{\substack{\text{quadratische}\\ \text{Ergänzung}}} + 10 = \underbrace{(x^2 - 2x + 1)}_{(x-1)^2} + 10 - 1 = (x-1)^2 + 9 = \frac{9}{9}\,(x-1)^2 + 9 = 9\left[\frac{1}{9}\,(x-1)^2 + 1\right] =$$

$$= 9\left[\underbrace{\left(\frac{x-1}{3}\right)}_{u}^{2} + 1\right] = 9\,(u^2 + 1) \quad \text{mit} \quad u = \frac{x-1}{3}$$

Durch die (vollständige) Substitution

$$u = \frac{1}{3}\,(x-1)\,, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{3}\,, \quad dx = 3\,du\,, \quad 3u = x - 1 \quad \Rightarrow \quad x = 3u + 1$$

geht das Integral I über in:

$$I = \int \frac{x}{x^2 - 2x + 10}\, dx = \int \frac{3u + 1}{9\,(u^2 + 1)} \cdot 3\,du = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{3u + 1}{u^2 + 1}\, du$$

Aufspaltung in zwei Teilintegrale:

$$I = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{3u}{u^2 + 1}\, du + \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{u^2 + 1}\, du = \underbrace{\int \frac{u}{u^2 + 1}\, du}_{I_1} + \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\int \frac{1}{u^2 + 1}\, du}_{I_2 \,=\, \arctan u \,+\, C_2} = I_1 + \frac{1}{3} \cdot I_2$$

I_2 ist bereits ein Grundintegral und führt auf den Arkustangens. Das Integral I_1 lösen wir mit der Substitution

$$v = u^2 + 1\,, \quad \frac{dv}{du} = 2u\,, \quad du = \frac{dv}{2u}$$

(im Zähler steht – vom fehlenden Faktor 2 abgesehen – die *Ableitung* des Nenners → FS: Kap. V.3.1.2, Integraltyp E):

$$I_1 = \int \frac{u}{u^2 + 1}\, du = \int \frac{u}{v} \cdot \frac{dv}{2u} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{v}\, dv = \frac{1}{2} \cdot \ln|v| + C_1 = \frac{1}{2} \cdot \ln|u^2 + 1| + C_1$$

(nach erfolgter Rücksubstitution $v = u^2 + 1$). Somit gilt:

$$I = I_1 + \frac{1}{3} \cdot I_2 = \frac{1}{2} \cdot \ln(u^2 + 1) + C_1 + \frac{1}{3}\,(\arctan u + C_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln(u^2 + 1) + C_1 + \frac{1}{3} \cdot \arctan u + \frac{1}{3}\, C_2 = \frac{1}{2} \cdot \ln(u^2 + 1) + \frac{1}{3} \cdot \arctan u + C$$

Rücksubstitution: $u = \frac{1}{3}\,(x-1)\,, \quad u^2 + 1 = \frac{x^2 - 2x + 10}{9}$

Die gesuchte Lösung lautet dann:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 10}{9}\right) + \frac{1}{3} \cdot \arctan \frac{1}{3}\,(x-1) + C$$

2 Partielle Integration (Produktintegration)

Alle Integrale in diesem Abschnitt lassen sich durch *Partielle Integration* lösen. Wir verwenden die folgende Formel:

$$\boxed{\int \underbrace{f(x)}_{u\,v'}\,dx = \int u\,v'\,dx = u\,v - \underbrace{\int u'\,v\,dx}_{\text{„Hilfsintegral"}} \qquad (u,\ v\text{: Funktionen von } x)}$$

Hinweise

(1) **Lehrbuch:** Band 1, Kapitel V.8.2
Formelsammlung: Kapitel V.3.2

(2) **Tabelle der Grund- oder Stammintegrale** → Band 1, Kapitel V. 5 und Formelsammlung, Kapitel V. 2.3

(3) In einigen Fällen muss man *mehrmals* hintereinander partiell integrieren, ehe man auf ein *Grundintegral* stößt.

(4) Häufig führt die *Partielle Integration* zwar auf ein einfacheres Integral, das aber noch *kein* Grundintegral darstellt. Dann muss dieses „Hilfsintegral" nach einer anderen Integrationsmethode (meist mit Hilfe einer *Substitution*) weiter behandelt werden, bis man auf ein *Grundintegral* stößt.

C17 $I = \int (1 + 2x) \cdot \mathrm{e}^{-x}\,dx = ?$

Zerlegung des Integranden $f(x) = (1 + 2x) \cdot \mathrm{e}^{-x}$ in zwei Faktoren u und v'

$$f(x) = \underbrace{(1 + 2x)}_{u} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{v'} \quad \text{mit} \quad u = 1 + 2x, \quad v' = \mathrm{e}^{-x} \quad \text{und} \quad u' = 2, \quad v = -\mathrm{e}^{-x}$$

Die Stammfunktion zu $v' = \mathrm{e}^{-x}$ haben wir dabei mit Hilfe der folgenden *Substitution* erhalten:

$$t = -x, \quad \frac{dt}{dx} = -1, \quad dx = -dt$$

$$v = \int v'\,dx = \int \mathrm{e}^{-x}\,dx = \int \mathrm{e}^{t} \cdot (-dt) = -\int \mathrm{e}^{t}\,dt = -\mathrm{e}^{t} + K = -\mathrm{e}^{-x} + K$$

(die Integrationskonstante K wird für die partielle Integration nicht benötigt und daher weggelassen).

Die Formel der *partiellen Integration* führt dann zu der folgenden Lösung:

$$I = \int (1 + 2x) \cdot \mathrm{e}^{-x}\,dx = \int u\,v'\,dx = u\,v - \int u'\,v\,dx = (1 + 2x) \cdot (-\mathrm{e}^{-x}) - \int 2 \cdot (-\mathrm{e}^{-x})\,dx =$$

$$= -(1 + 2x) \cdot \mathrm{e}^{-x} + 2 \cdot \underbrace{\int \mathrm{e}^{-x}\,dx}_{-\mathrm{e}^{-x} + C} = -(1 + 2x) \cdot \mathrm{e}^{-x} + 2(-\mathrm{e}^{-x} + C) =$$

$$= -(1 + 2x) \cdot \mathrm{e}^{-x} - 2 \cdot \mathrm{e}^{-x} + 2C = -(3 + 2x) \cdot \mathrm{e}^{-x} + C^{*} \qquad (C^{*} = 2C)$$

C18

$$I = \int x^n \cdot \ln x \, dx = \; ? \quad (n \neq -1)$$

Zerlegung des Integranden $f(x) = x^n \cdot \ln x$ in zwei Faktoren u und v':

$$f(x) = x^n \cdot \ln x = \underbrace{(\ln x)}_{u} \cdot \underbrace{x^n}_{v'} = u v' \quad \text{mit} \quad u = \ln x \, , \quad v' = x^n \quad \text{und} \quad u' = \frac{1}{x} \, , \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Begründung: Die ebenfalls denkbare Zerlegung in die Faktoren $u = x^n$ und $v' = \ln x$ kommt *nicht* infrage, da wir keine Stammfunktion zu $v' = \ln x$ angeben können!

Partielle Integration führt dann zu einem *Grundintegral*:

$$I = \int x^n \cdot \ln x \, dx = \int (\ln x) \cdot x^n \, dx = \int u v' \, dx = u v - \int u' v \, dx = \ln x \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \, dx =$$

$$= \frac{x^{n+1} \cdot \ln x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \cdot \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1} \cdot \ln x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C$$

C19

$$I = \int x \cdot \arctan x \, dx = \; ?$$

Zerlegung des Integranden $f(x) = x \cdot \arctan x$ in zwei Faktoren u und v':

$$f(x) = x \cdot \arctan x = \underbrace{(\arctan x)}_{u} \cdot \underbrace{x}_{v'} = u v' \qquad u = \arctan x \, , \; v' = x \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{1}{1 + x^2} \, , \; v = \frac{1}{2} \, x^2$$

Begründung: Die auch mögliche Zerlegung in umgekehrter Reihenfolge $(u = x, \; v' = \arctan x)$ scheidet aus, da wir *keine* Stammfunktion zu $v' = \arctan x$ angeben können!

Die Formel der *partiellen Integration* liefert dann:

$$I = \int (\arctan x) \cdot x \, dx = \int u v' \, dx = u v - \int u' v \, dx = (\arctan x) \cdot \frac{1}{2} \, x^2 - \int \frac{1}{1 + x^2} \cdot \frac{1}{2} \, x^2 \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \, x^2 \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\int \frac{x^2}{1 + x^2} \, dx}_{I_1} = \frac{1}{2} \, x^2 \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \cdot I_1$$

Das „Hilfsintegral“ I_1 der rechten Seite ist leider kein Grundintegral, lässt sich aber auf solche zurückführen. Aus diesem Grund zerlegen wir den unecht gebrochenrationalen Integrand durch Polynomdivision wie folgt:

$$\begin{array}{l} (x^2 \qquad) : (x^2 + 1) = 1 - \dfrac{1}{x^2 + 1} = 1 - \dfrac{1}{1 + x^2} \\ -(x^2 + 1) \\ \hline \qquad -1 \end{array}$$

Damit erhalten wir für das Hilfsintegral I_1 die folgende Lösung:

$$I_1 = \int \frac{x^2}{1 + x^2} \, dx = \int \left(1 - \frac{1}{1 + x^2} \right) dx = \int 1 \, dx - \int \frac{1}{1 + x^2} \, dx = x - \arctan x + C$$

Die Lösung der gestellten Aufgabe lautet dann:

$$I = \int x \cdot \arctan x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \cdot I_1 = \frac{1}{2} x^2 \cdot \arctan x - \frac{1}{2} (x - \arctan x + C) =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \cdot \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cdot \text{arcxtan}\, x - \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} x^2 \cdot \arctan x + \frac{1}{2} \cdot \arctan x - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \arctan x \cdot (x^2 + 1) - \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} (x^2 + 1) \cdot \arctan x - \frac{1}{2} x + C^* \qquad \left(C^* = -\frac{1}{2} C \right)$$

C20

$$I = \int \cos^n x \, dx = \int \underbrace{\cos^{n-1} x}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{v'} \, dx = \, ?$$

Leiten Sie mit Hilfe der angedeuteten Zerlegung des Integranden eine *Rekursionsformel* für das Integral I her und wenden Sie diese auf den Fall $n = 3$ an.

Aufgrund der vorgegebenen Zerlegung gilt:

$$u = \cos^{n-1} x = (\cos x)^{n-1}, \quad v' = \cos x \quad \Rightarrow \quad u' = -(n-1) \sin x \cdot \cos^{n-2} x, \quad v = \sin x$$

(die Ableitung von u erhält man mit der *Kettenregel*, Substitution: $t = \cos x$)

Die Formel der *partiellen Integration* liefert dann:

$$I = \int \cos^n x \, dx = \int \cos^{n-1} x \cdot \cos x \, dx = \int u v' \, dx = u v - \int u' v \, dx =$$

$$= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) \cdot \int \sin x \cdot \cos^{n-2} x \cdot \sin x \, dx =$$

$$= \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) \cdot \underbrace{\int \sin^2 x \cdot \cos^{n-2} x \, dx}_{I_1} = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) I_1 \qquad (*)$$

Unter Verwendung der trigonometrischen Beziehung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und damit $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ lässt sich das „Hilfsintegral“ I_1 wie folgt aufspalten:

$$I_1 = \int \sin^2 x \cdot \cos^{n-2} x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^{n-2} x \, dx = \int (\cos^{n-2} x - \cos^n x) \, dx =$$

$$= \int \cos^{n-2} x \, dx - \underbrace{\int \cos^n x \, dx}_{I} = \int \cos^{n-2} x \, dx - I$$

Dabei haben wir bereits berücksichtigt, dass es sich beim zweiten Integral der rechten Seite um das gesuchte Integral I handelt. Gleichung $(*)$ geht damit über in:

$$I = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) I_1 = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) \left(\int \cos^{n-2} x \, dx - I \right) =$$

$$= \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) \cdot \int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) I$$

Durch „Rückwurf“ erhalten wir aus dieser Gleichung die gesuchte *Rekursionsformel*:

$$I + (n-1) I = I + nI - I = nI = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) \cdot \int \cos^{n-2} x \, dx$$

$$I = \frac{\sin x \cdot \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \int \cos^{n-2} x \, dx$$

Somit gilt:

$$\int \cos^{n} x \, dx = \frac{\sin x \cdot \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \int \cos^{n-2} \, dx$$

Das Integral der rechten Seite ist vom gleichen Typ wie das Ausgangsintegral I, besitzt aber einen um 2 *kleineren* Exponenten. Durch wiederholte Anwendung dieser *Rekursionsformel* lässt sich der Exponent der Potenz $\cos^{n} x$ schrittweise reduzieren, bis man auf ein *Grundintegral* stößt.

Anwendungsbeispiel für $n = 3$:

$$\int \cos^{3} x \, dx = \frac{\sin x \cdot \cos^{2} x}{3} + \frac{2}{3} \cdot \underbrace{\int \cos x \, dx}_{\text{Grundintegral}} = \frac{1}{3} \cdot \sin x \cdot \cos^{2} x + \frac{2}{3} \cdot \sin x + C$$

C21

$$I = \int (\ln x)^{2} \, dx = \ ?$$

Zerlegung des Integranden $f(x) = (\ln x)^{2}$ in ein Produkt aus zwei Faktoren u und v':

$$f(x) = (\ln x)^{2} = \underbrace{(\ln x)^{2}}_{u} \cdot \underbrace{1}_{v'} \quad \text{mit} \quad u = (\ln x)^{2}, \quad v' = 1 \quad \text{und} \quad u' = \frac{2 \cdot \ln x}{x}, \quad v = x$$

(mathematischer „Trick“: Faktor 1 ergänzen; $u = (\ln x)^{2}$ wird nach der *Kettenregel* differenziert, Substitution: $t = \ln x$).

Begründung: Die ebenfalls mögliche (und zunächst nahe liegende) Zerlegung in zwei *gleiche* Faktoren $u = \ln x$ und $v' = \ln x$ führt *nicht* zum Ziel, da wir *keine* Stammfunktion zu $v' = \ln x$ angeben können!

Die Formel der *partiellen Integration* führt mit der gewählten Zerlegung auf ein *einfacher* gebautes Integral vom gleichen Typ, das jedoch noch *kein* Grundintegral ist:

$$I = \int (\ln x)^{2} \cdot 1 \, dx = \int u v' \, dx = u v - \int u' v \, dx = (\ln x)^{2} \cdot x - \int \frac{2 \cdot \ln x}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} \, dx =$$

$$= x (\ln x)^{2} - 2 \cdot \underbrace{\int \ln x \, dx}_{I_1} = x (\ln x)^{2} - 2 I_1$$

Was hat die *partielle Integration* bisher gebracht? Aus dem Integral $\int (\ln x)^{2} \, dx$ wurde das Integral $\int (\ln x)^{1} \, dx$ (Absenkung des Exponenten um 1):

$$\int (\ln x)^{2} \, dx \longrightarrow \int (\ln x)^{1} \, dx$$

Wir *vermuten* daher: Das „Hilfsintegral“ $I_1 = \int \ln x \, dx$ geht in das *Grundintegral* $\int (\ln x)^{0} \, dx = \int 1 \, dx$ über, wenn wir auf I_1 die gleiche Methode (bei sinngemäß gleicher Zerlegung) anwenden:

$$I_1 = \int \ln x \, dx = \int \underbrace{(\ln x)}_{u} \cdot \underbrace{1}_{v'} \, dx \quad \text{mit} \quad u = \ln x, \quad v' = 1 \quad \text{und} \quad u' = \frac{1}{x}, \quad v = x$$

$$I_1 = \int (\ln x) \cdot 1\, dx = \int u v'\, dx = u v - \int u' v\, dx = (\ln x) \cdot x - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\, dx =$$

$$= x \cdot \ln x - \int 1\, dx = x \cdot \ln x - x + C$$

Unsere Vermutung hat sich also bestätigt. Durch *zweimalige* Anwendung der *partiellen Integration* haben wir unser Ziel endlich erreicht. Die Lösung lautet damit:

$$I = \int (\ln x)^2\, dx = x (\ln x)^2 - 2 I_1 = x (\ln x)^2 - 2 (x \cdot \ln x - x + C) =$$

$$= x (\ln x)^2 - 2x \cdot \ln x + 2x - 2C = x [(\ln x)^2 - 2 \cdot \ln x + 2] + C^* \qquad (C^* = -2C)$$

C22

$$I = \int \operatorname{artanh} x\, dx = ?$$

Wir ergänzen zunächst im Integrand $f(x) = \operatorname{artanh} x$ den Faktor 1 (der ja nichts verändert) und zerlegen dann wie folgt in zwei Faktoren u und v':

$$f(x) = \operatorname{artanh} x = \underbrace{(\operatorname{artanh} x)}_{u} \cdot \underbrace{1}_{v'} = u v'$$

Begründung: Die ebenfalls mögliche Zerlegung $u = 1$ und $v' = \operatorname{artanh} x$ kommt *nicht* infrage, da wir zu $v' = \operatorname{artanh} x$ *keine* Stammfunktion angeben können (eine solche Stammfunktion soll ja gerade bestimmt werden).

Mit der gewählten Zerlegung

$$u = \operatorname{artanh} x , \quad v' = 1 \quad \text{und damit} \quad u' = \frac{1}{1 - x^2} , \quad v = x$$

liefert die *partielle Integration* ein „Hilfsintegral“, das zwar *kein* Grundintegral ist, aber mit Hilfe einer *Substitution* gelöst werden kann:

$$I = \int \operatorname{artanh} x\, dx = \int (\operatorname{artanh} x) \cdot 1\, dx = \int u v'\, dx = u v - \int u' v\, dx =$$

$$= (\operatorname{artanh} x) \cdot x - \int \frac{1}{1 - x^2} \cdot x\, dx = x \cdot \operatorname{artanh} x - \underbrace{\int \frac{x}{1 - x^2}\, dx}_{I_1} = x \cdot \operatorname{artanh} x - I_1$$

Das „Hilfsintegral“ I_1 lösen wir mit der folgenden *Substitution* (im Zähler steht – vom fehlenden Faktor -2 abgesehen – die *Ableitung* des Nenners → FS: Kap. V.3.1.2, Integraltyp E):

$$u = 1 - x^2 , \quad \frac{du}{dx} = -2x , \quad dx = \frac{du}{-2x}$$

$$I_1 = \int \frac{x}{1 - x^2}\, dx = \int \frac{\cancel{x}}{u} \cdot \frac{du}{-2\cancel{x}} = -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{u}\, du = -\frac{1}{2} \cdot \ln |u| + C = -\frac{1}{2} \cdot \ln |1 - x^2| + C$$

Die gesuchte Lösung lautet damit:

$$I = \int \operatorname{artanh} x\, dx = x \cdot \operatorname{artanh} x - I_1 = x \cdot \operatorname{artanh} x - \left(-\frac{1}{2} \cdot \ln |1 - x^2| + C \right) =$$

$$= x \cdot \operatorname{artanh} x + \frac{1}{2} \cdot \ln |1 - x^2| - C = x \cdot \operatorname{artanh} x + \frac{1}{2} \cdot \ln |1 - x^2| + C^* \qquad (C^* = -C)$$

C23

$I = \int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx = ?$ „Verifizieren“ Sie anschließend das Ergebnis.

Wir zerlegen den Integrand $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ wie folgt in ein *Produkt* aus zwei Faktoren u und v':

$$f(x) = \frac{x}{\cos^2 x} = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{v'} = u\,v'$$

Begründung: Diese Zerlegung hat Aussicht auf Erfolg, da $v' = \frac{1}{\cos^2 x}$ bekanntlich die *Ableitung* von $\tan x$ ist. Mit der gewählten Zerlegung

$$u = x\,, \quad v' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{und damit} \quad u' = 1\,, \quad v = \tan x$$

führt die *partielle Integration* zu folgendem Ergebnis:

$$I = \int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx = \int x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \int u\,v'\, dx = u\,v - \int u'\,v\, dx = x \cdot \tan x - \int 1 \cdot \tan x\, dx =$$

$$= x \cdot \tan x - \underbrace{\int \tan x\, dx}_{I_1} = x \cdot \tan x - I_1$$

Das „Hilfsintegral“ I_1 ist zwar *kein* Grundintegral, lässt sich aber durch eine *Substitution* leicht lösen, wenn man die trigonometrische Beziehung $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ beachtet:

$$I_1 = \int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$$

Im Zähler steht — vom Vorzeichen abgesehen — die *Ableitung* des Nenners, das Integral I_1 ist daher durch die *Substitution* $u = \cos x$ wie folgt lösbar (→ FS: Kap. V.3.12, Integraltyp E):

$$u = \cos x\,, \quad \frac{du}{dx} = -\sin x\,, \quad dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$I_1 = \int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int \frac{\sin x}{u} \cdot \frac{du}{-\sin x} = -\int \frac{1}{u}\, du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

Für das vorgegebene Integral I erhalten wir damit die Lösung

$$I = \int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx = x \cdot \tan x - I_1 = x \cdot \tan x - (-\ln|\cos x| + C) = x \cdot \tan x + \ln|\cos x| - C =$$

$$= x \cdot \tan x + \ln|\cos x| + C^* \qquad (C^* = -C)$$

Wir „verifizieren“ das Ergebnis, in dem wir zeigen, dass die 1. Ableitung des unbestimmten Integrals zum Integranden führt. Dabei verwenden wir in der angedeuteten Weise die *Produktregel* (1. Summand) und die *Kettenregel* (2. Summand):

$$I = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\tan x}_{v} + \ln|\underbrace{\cos x}_{t}| + C^* = u\,v + \ln|t| + C^*$$

$$I' = u'\,v + v'\,u + \frac{1}{t} \cdot t' = 1 \cdot \tan x + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot x + \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x} - \tan x = \frac{x}{\cos^2 x}$$

(unter Verwendung der trigonometrischen Beziehung $\sin x / \cos x = \tan x$)

C24

$$I = \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{\cos x}{\sin^3 x}}_{v'} \, dx = ?$$

Lösen Sie dieses Integral in der angedeuteten Weise durch *partielle Integration*. Die benötigte Stammfunktion zum Faktor v' erhalten Sie durch eine geeignete *Substitution*.

Die vorgegebene Zerlegung des Integranden lautet:

$$u = x , \quad v' = \frac{\cos x}{\sin^3 x} \quad \text{und} \quad u' = 1 , \quad v = ?$$

Die zunächst noch unbekannte Stammfunktion zu $v' = \dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$ erhalten wir mit Hilfe der folgenden *Substitution* (im Zähler steht genau die *Ableitung* von $\sin x$ → FS: Kap. V.3.1.2, Integraltyp C mit $f(x) = \sin x$ und $n = -3$):

$$t = \sin x , \quad \frac{dt}{dx} = \cos x , \quad dx = \frac{dt}{\cos x}$$

$$v = \int v' \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} \, dx = \int \frac{\cos x}{t^3} \cdot \frac{dt}{\cos x} = \int \frac{1}{t^3} \, dt = \int t^{-3} \, dt = \frac{t^{-2}}{-2} + K =$$

$$= -\frac{1}{2t^2} + K = -\frac{1}{2 \cdot \sin^2 x} + K$$

Die Integrationskonstante K ist für die *partielle Integration* ohne Bedeutung und wird daher weggelassen. Mit der jetzt *vollständigen* Zerlegung

$$u = x , \quad v' = \frac{\cos x}{\sin^3 x} \quad \text{und} \quad u' = 1 , \quad v = -\frac{1}{2 \cdot \sin^2 x}$$

führt die *partielle Integration* zu einem *Grundintegral* und damit zur gesuchten Lösung:

$$I = \int x \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x} \, dx = \int u v' \, dx = u v - \int u' v \, dx = x \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot \sin^2 x} \right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot \sin^2 x} \right) dx =$$

$$= -\frac{x}{2 \cdot \sin^2 x} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx}_{-\cot x + C} = -\frac{x}{2 \cdot \sin^2 x} + \frac{1}{2} (-\cot x + C) =$$

$$= -\frac{x}{2 \cdot \sin^2 x} - \frac{1}{2} \cdot \cot x + \frac{1}{2} C = -\frac{x}{2 \cdot \sin^2 x} - \frac{1}{2} \cdot \cot x + C^* \qquad \left(C^* = \frac{1}{2} C \right)$$

3 Integration einer echt gebrochenrationalen Funktion durch Partialbruchzerlegung des Integranden

Alle Integrale in diesem Abschnitt lassen sich durch Partialbruchzerlegung des *echt* gebrochenrationalen Integranden auf Grund- oder Stammintegrale zurückführen.

Hinweise

(1) **Lehrbuch:** Band 1, Kapitel V.8.3
Formelsammlung: Kapitel V.3.3

(2) Ist der Integrand *unecht* gebrochenrational, so muss er zunächst (z. B. durch Polynomdivision) in eine *ganzrationale* und eine *echt* gebrochenrationale Funktion zerlegt werden. Der *echt* gebrochenrationale Anteil wird dann in Partialbrüche zerlegt.

(3) Die Integration der Partialbrüche erfolgt mit Hilfe einer einfachen *linearen Substitution*. Man erhält stets logarithmische und echt gebrochenrationale Funktionen (bei *mehrfachen* Nennernullstellen).

C25 $I = \int \frac{8x^2 - 2x - 43}{(x+2)^2 (x-5)}\, dx = ?$

Der Integrand ist *echt* gebrochenrational und wird in *Partialbrüche* zerlegt. Zunächst benötigen wir die *Nullstellen* des Nenners:

$$(x+2)^2 (x-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = -2, \quad x_3 = 5$$

Ihnen ordnen wir folgende *Partialbrüche* zu:

$$x_{1/2} = -2 \text{ (doppelte Nullstelle)} \longrightarrow \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

$$x_3 = 5 \qquad \text{(einfache Nullstelle)} \longrightarrow \frac{C}{x-5}$$

Der Partialbruchansatz lautet damit:

$$\frac{8x^2 - 2x - 43}{(x+2)^2 (x-5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-5}$$

Um die unbekannten Konstanten A, B und C bestimmen zu können, müssen die Brüche zunächst *gleichnamig* gemacht werden (Hauptnenner: $(x+2)^2 (x-5)$). Die Brüche der rechten Seite müssen daher der Reihe nach mit $(x+2)(x-5)$, $(x-5)$ und $(x+2)^2$ erweitert werden:

$$\frac{8x^2 - 2x - 43}{(x+2)^2 (x-5)} = \frac{A(x+2)(x-5) + B(x-5) + C(x+2)^2}{(x+2)^2 (x-5)}$$

Da die Brüche der beiden Seiten im Nenner übereinstimmen, müssen sie auch im Zähler übereinstimmen:

$$8x^2 - 2x - 43 = A(x+2)(x-5) + B(x-5) + C(x+2)^2$$

Diese Gleichung gilt für alle reellen x-Werte. Wir setzen jetzt der Reihe nach die Werte $x = -2$, $x = 5$ (d. h. die *Nennernullstellen* unserer gebrochenrationalen Funktion) und zusätzlich den Wert $x = 0$ ein und erhalten ein *gestaffeltes* lineares Gleichungssystem für die drei Unbekannten A, B und C:

$$\boxed{x = -2} \quad \Rightarrow \quad -7 = -7B \quad \Rightarrow \quad B = 1$$

$$\boxed{x = 5} \quad \Rightarrow \quad 147 = 49C \quad \Rightarrow \quad C = 3$$

$$\boxed{x = 0} \quad \Rightarrow \quad -43 = -10A - 5B + 4C = -10A - 5 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = -10A + 7 \quad \Rightarrow \quad A = 5$$

Somit gilt $A = 5$, $B = 1$ und $C = 3$, die Partialbruchzerlegung lautet daher:

$$\frac{8x^2 - 2x - 43}{(x+2)^2(x-5)} = \frac{5}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{3}{x-5}$$

Die Integration der Partialbrüche führt auf drei einfache Integrale, die mit den angedeuteten Substitutionen gelöst werden:

$$I = \int \left(\frac{5}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{3}{x-5} \right) dx = 5 \cdot \int \frac{dx}{\underbrace{x+2}_{u}} + \int \frac{dx}{(\underbrace{x+2}_{u})^2} + 3 \cdot \int \frac{dx}{\underbrace{x-5}_{v}}$$

$$u = x + 2, \quad \frac{du}{dx} = 1, \quad dx = du \quad \text{und} \quad v = x - 5, \quad \frac{dv}{dx} = 1, \quad dx = dv$$

$$I = 5 \cdot \int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{dx}{(x+2)^2} + 3 \cdot \int \frac{dx}{x-5} = 5 \cdot \int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{u^2} + 3 \cdot \int \frac{dv}{v} =$$

$$= 5 \cdot \int \frac{du}{u} + \int u^{-2}\,du + 3 \cdot \int \frac{dv}{v} = 5 \cdot \ln|u| + \frac{u^{-1}}{-1} + 3 \cdot \ln|v| + C =$$

$$= 5 \cdot \ln|u| - \frac{1}{u} + 3 \cdot \ln|v| + C$$

Durch Rücksubstitution $(u = x + 2,\ v = x - 5)$ erhalten wir schließlich die folgende Lösung:

$$I = \int \frac{8x^2 - 2x - 43}{(x+2)^2(x-5)}\,dx = 5 \cdot \ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + 3 \cdot \ln|x-5| + C$$

C26

$$I = \int \frac{2x^3 - 12x^2 + 20x - 2}{x^2 - 6x + 9}\,dx = ?$$

Der Integrand ist *unecht* gebrochenrational und muss zunächst (durch Polynomdivision) zerlegt werden:

$$\begin{array}{l} (2x^3 - 12x^2 + 20x - 2) : (x^2 - 6x + 9) = 2x + \dfrac{2x - 2}{x^2 - 6x + 9} \\ \underline{-(2x^3 - 12x^2 + 18x)} \\ 2x - 2 \end{array}$$

Der *echt* gebrochenrationale Bestandteil $\dfrac{2x - 2}{x^2 - 6x + 9}$ wird dann schrittweise wie folgt in *Partialbrüche* zerlegt.

Partialbruchzerlegung

1. Schritt: Berechnung der Nennernullstellen

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = 3$$

2. Schritt: Zuordnung der Partialbrüche

$$x_{1/2} = 3 \text{ (doppelte Nullstelle)} \longrightarrow \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

3. Schritt: Partialbruchzerlegung (Ansatz)

$$\frac{2x-2}{x^2-6x+9} = \frac{2x-2}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

4. Schritt: Berechnung der Konstanten A und B

Die Brüche werden *gleichnamig* gemacht (Hauptnenner: $(x-3)^2$). Der erste Partialbruch muss daher mit $x - 3$ erweitert werden:

$$\frac{2x-2}{(x-3)^2} = \frac{A(x-3)+B}{(x-3)^2}$$

Da die Nenner beider Brüche übereinstimmen, gilt diese Aussage auch für die Zähler:

$$2x - 2 = A(x-3) + B = Ax - 3A + B$$

Durch *Koeffizientenvergleich* erhalten wir zwei Gleichungen für die Unbekannten A und B mit folgender Lösung:

$$A = 2; \quad -3A + B = -2 \quad \Rightarrow \quad -3 \cdot 2 + B = -6 + B = -2 \quad \Rightarrow \quad B = 4$$

Die Partialbruchzerlegung ist damit abgeschlossen:

$$\frac{2x-2}{x^2-6x+9} = \frac{2}{x-3} + \frac{4}{(x-3)^2}$$

Durchführung der Integration

$$I = \int \frac{2x^3 - 12x^2 + 20x - 2}{x^2 - 6x + 9}\,dx = \int \left(2x + \frac{2x-2}{x^2-6x+9}\right) dx = \int 2x\,dx + \int \frac{2x-2}{x^2-6x+9}\,dx =$$

$$= x^2 + \int \left(\frac{2}{x-3} + \frac{4}{(x-3)^2}\right) dx = x^2 + 2 \cdot \int \frac{dx}{x-3} + 4 \cdot \int \frac{dx}{(x-3)^2}$$

Das erste Integral der rechten Seite ist bereits ein *Grundintegral*, die beiden restlichen werden mit Hilfe der *Substitution*

$$u = x - 3, \quad \frac{du}{dx} = 1, \quad dx = du$$

in solche übergeführt:

$$I = x^2 + 2 \cdot \int \frac{dx}{x-3} + 4 \cdot \int \frac{dx}{(x-3)^2} = x^2 + 2 \cdot \int \frac{du}{u} + 4 \cdot \int \frac{du}{u^2} =$$

$$= x^2 + 2 \cdot \ln|u| + 4 \cdot \int u^{-2}\,du = x^2 + 2 \cdot \ln|u| + 4 \cdot \frac{u^{-1}}{-1} + C = x^2 + 2 \cdot \ln|u| - \frac{4}{u} + C$$

Durch *Rücksubstitution* $(u = x - 3)$ erhalten wir schließlich die gesuchte Lösung:

$$I = x^2 + 2 \cdot \ln|x-3| - \frac{4}{x-3} + C$$

C27 $$I = \int \frac{x^3}{x^3 + 2x^2 - x - 2}\, dx = ?$$

Der Integrand ist *unecht* gebrochenrational und muss daher zunächst (durch Polynomdivision) wie folgt zerlegt werden:

$$\begin{array}{l} \quad (x^3 \qquad\qquad\qquad\quad) : (x^3 + 2x^2 - x - 2) = 1 + \dfrac{-2x^2 + x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2} \\ \underline{-(x^3 + 2x^2 - x - 2)\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ \qquad\; -2x^2 + x + 2 \end{array}$$

Der *echt* gebrochenrationale Bestandteil $\dfrac{-2x^2 + x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$ wird schrittweise in Partialbrüche zerlegt.

Partialbruchzerlegung

1. Schritt: Nullstellenberechnung des Nenners

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \text{(durch Probieren)}$$

Die restlichen Nullstellen (falls überhaupt vorhanden) erhält man nach Abspalten des Linearfaktors $x - 1$ (mit Hilfe des *Hornerschemas*) aus dem 1. reduzierten Polynom:

	1	2	−1	−2
$x_1 = 1$		1	3	2
	1	3	2	0

$$\Rightarrow \quad x^2 + 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -2$$

2. Schritt: Zuordnung der Partialbrüche

Den einfachen Nennernullstellen $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ und $x_3 = -2$ werden der Reihe nach die folgenden *Partialbrüche* zugeordnet:

$$\frac{A}{x-1}, \quad \frac{B}{x+1}, \quad \frac{C}{x+2}$$

3. Schritt: Partialbruchzerlegung (Ansatz)

$$\frac{-2x^2 + x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{-2x^2 + x + 2}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

4. Schritt: Alle Brüche werden auf den *Hauptnenner* $(x-1)(x+1)(x+2)$ gebracht. Dazu müssen die drei Teilbrüche der rechten Seite der Reihe nach mit $(x+1)(x+2)$, $(x-1)(x+2)$ bzw. $(x-1)(x+1)$ erweitert werden:

$$\frac{-2x^2 + x + 2}{(x-1)(x+1)(x+2)} = \frac{A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

Die Brüche stimmen im Nenner, somit auch im Zähler überein:

$$-2x^2 + x + 2 = A(x+1)(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+1)$$

Um drei Gleichungen für die drei Unbekannten A, B und C zu erhalten, setzen wir für die Variable x drei (verschiedene) Werte ein. Günstig sind die Werte der drei *Nennernullstellen* des Integranden (das lineare Gleichungssystem ist dann *gestaffelt* und leicht zu lösen). Wir erhalten:

$$\boxed{x = 1} \quad \Rightarrow \quad 1 = 6A \quad \Rightarrow \quad A = 1/6$$

$$\boxed{x = -1} \quad \Rightarrow \quad -1 = -2B \quad \Rightarrow \quad B = 1/2$$

$$\boxed{x = -2} \quad \Rightarrow \quad -8 = 3C \quad \Rightarrow \quad C = -8/3$$

Die Partialbruchzerlegung lautet somit:

$$\frac{-2x^2+x+2}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{1/6}{x-1} + \frac{1/2}{x+1} + \frac{-8/3}{x+2} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{x+2}$$

Durchführung der Integration

Der Integrand des gesuchten Integrals I lässt sich jetzt wie folgt darstellen:

$$\frac{x^3}{x^3+2x^2-x-2} = 1 + \frac{-2x^2+x+2}{x^3+2x^2-x-2} = 1 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{x+2}$$

Gliedweise Integration führt auf ein *Grundintegral* und drei einfache Integrale, die in der angedeuteten Weise mit Hilfe einfacher *Substitutionen* gelöst werden:

$$I = \int 1\,dx + \frac{1}{6}\cdot\int\frac{dx}{\underbrace{x-1}_{u}} + \frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{\underbrace{x+1}_{v}} - \frac{8}{3}\cdot\int\frac{dx}{\underbrace{x+2}_{w}}$$

$$u = x-1, \quad \frac{du}{dx} = 1, \quad dx = du; \quad \text{analog: } v = x+1, \quad dx = dv \quad \text{und} \quad w = x+2, \quad dx = dw$$

$$I = \int 1\,dx + \frac{1}{6}\cdot\int\frac{du}{u} + \frac{1}{2}\cdot\int\frac{dv}{v} - \frac{8}{3}\cdot\int\frac{dw}{w} = x + \frac{1}{6}\cdot\ln|u| + \frac{1}{2}\cdot\ln|v| - \frac{8}{3}\cdot\ln|w| + C$$

Durch *Rücksubstitution* $(u = x-1,\ v = x+1,\ w = x+2)$ erhält man die gesuchte Lösung:

$$I = x + \frac{1}{6}\cdot\ln|x-1| + \frac{1}{2}\cdot\ln|x+1| - \frac{8}{3}\cdot\ln|x+2| + C$$

C28

$$I = \int\frac{4x^4 - x^3 - 38x^2 + 9x + 45}{(x^2-9)(x+1)}\,dx = ?$$

Da der Integrand *unecht* gebrochenrational ist, müssen wir ihn zunächst zerlegen (Polynomdivision).

Nenner: $(x^2-9)(x+1) = x^3 + x^2 - 9x - 9$

$$\begin{array}{l}
(4x^4 - x^3 - 38x^2 + 9x + 45) : (x^3 + x^2 - 9x - 9) = 4x - 5 + \underbrace{\dfrac{3x^2}{(x^2-9)(x+1)}}_{\text{echt gebrochen}} \\
-(4x^4 + 4x^3 - 36x^2 - 36x) \\
\hline
\quad -5x^3 - 2x^2 + 45x + 45 \\
\quad -(-5x^3 - 5x^2 + 45x + 45) \\
\hline
\qquad\qquad 3x^2
\end{array}$$

Partialbruchzerlegung (des echt gebrochenrationalen Anteils)

1. Schritt: Berechnung der Nennernullstellen

$$(x^2-9)(x+1) = 0 \begin{array}{l} \nearrow\ x^2 - 9 = 0 \quad\Rightarrow\quad x_{1/2} = \pm 3 \\ \searrow\ x + 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad x_3 = -1 \end{array}$$

2. Schritt: Zuordnung der Partialbrüche

Den drei *einfachen* Nennernullstellen $x_1 = 3$, $x_2 = -3$ und $x_3 = -1$ werden der Reihe nach folgende Partialbrüche zugeordnet:

$$\frac{A}{x-3}, \quad \frac{B}{x+3}, \quad \frac{C}{x+1}$$

3. Schritt: Partialbruchzerlegung (Ansatz)

$$\frac{3x^2}{(x^2-9)(x+1)} = \frac{3x^2}{(x-3)(x+3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+1}$$

4. Schritt: Alle Brüche werden *gleichnamig* gemacht, d. h. auf den *Hauptnenner* $(x-3)(x+3)(x-1)$ gebracht. Dazu müssen die Teilbrüche der rechten Seite der Reihe nach mit $(x+3)(x-1)$, $(x-3)(x-1)$ bzw. $(x-3)(x+3)$ erweitert werden:

$$\frac{3x^2}{(x-3)(x+3)(x+1)} = \frac{A(x+3)(x+1) + B(x-3)(x+1) + C(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+3)(x+1)}$$

Da die *Nenner* beider Brüche übereinstimmen, gilt dies auch für die *Zähler.* Somit ist:

$$3x^2 = A(x+3)(x+1) + B(x-3)(x+1) + C(x-3)(x+3)$$

Durch Einsetzen der Werte $x = 3$, $x = -3$ und $x = -1$ (es sind die *Nennernullstellen* des Integranden!) erhalten wir ein leicht lösbares *gestaffeltes* lineares Gleichungssystem:

$$\boxed{x = 3} \quad \Rightarrow \quad 27 = 24A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{27}{24} = \frac{9}{8}$$

$$\boxed{x = -3} \quad \Rightarrow \quad 27 = 12B \quad \Rightarrow \quad B = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$$

$$\boxed{x = -1} \quad \Rightarrow \quad 3 = -8C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{3}{8}$$

Die Partialbruchzerlegung lautet damit:

$$\frac{3x^2}{(x^2-9)(x+1)} = \frac{9/8}{x-3} + \frac{9/4}{x+3} + \frac{-3/8}{x+1} = \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{x-3} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{x+3} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{x+1}$$

Durchführung der Integration

Der Integrand des gesuchten Integrals I lässt sich jetzt in der folgenden Form darstellen:

$$\frac{4x^4 - x^3 - 38x^2 + 9x + 45}{(x^2-9)(x+1)} = 4x - 5 + \frac{3x^2}{(x^2-9)(x+1)} =$$

$$= 4x - 5 + \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{x-3} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{x+3} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{x+1}$$

Gliedweise Integration führt auf ein *Grundintegral* und drei weitere durch die angedeuteten *Substitutionen* leicht lösbare Integrale:

$$I = \int (4x-5)\,dx + \frac{9}{8} \cdot \int \frac{dx}{\underbrace{x-3}_{u}} + \frac{9}{4} \cdot \int \frac{dx}{\underbrace{x+3}_{v}} - \frac{3}{8} \cdot \int \frac{dx}{\underbrace{x+1}_{w}}$$

$$u = x - 3, \quad \frac{du}{dx} = 1, \quad dx = du; \quad \text{analog: } v = x + 3, \quad dx = dv \quad \text{und} \quad w = x + 1, \quad dx = dw$$

$$I = \int (4x-5)\,dx + \frac{9}{8} \cdot \int \frac{du}{u} + \frac{9}{4} \cdot \int \frac{dv}{v} - \frac{3}{8} \cdot \int \frac{dw}{w} =$$

$$= 2x^2 - 5x + \frac{9}{8} \cdot \ln|u| + \frac{9}{4} \cdot \ln|v| - \frac{3}{8} \cdot \ln|w| + C$$

Rücksubstitution $(u = x - 3,\ v = x + 3,\ w = x + 1)$ führt schließlich zur gesuchten Lösung:

$$I = 2x^2 - 5x + \frac{9}{8} \cdot \ln|x-3| + \frac{9}{4} \cdot \ln|x+3| - \frac{3}{8} \cdot \ln|x+1| + C$$

C29

$$I = \int \frac{5x^2 - 7x + 20}{x^3 - 3x^2 + 12x - 10}\, dx = ?$$

Der *echt* gebrochenrationale Integrand wird in Partialbrüche zerlegt.

1. Schritt: Berechnung der Nennernullstellen

$$x^3 - 3x^2 + 12x - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \text{(durch Probieren)}$$

Die restlichen Nullstellen sind die Nullstellen des 1. reduzierten Polynoms, das wir mit Hilfe des *Horner-Schemas* ermitteln:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 12 & -10 \\ \hline x_1 = 1 & & 1 & -2 & 10 \\ \hline & 1 & -2 & 10 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 10 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{2/3} = 1 \pm \sqrt{1 - 10} = 1 \pm \sqrt{-9} = 1 \pm 3\,\mathrm{j}$$

2. Schritt: Zuordnung der Partialbrüche

$$x_1 = 1 \text{ (einfache reelle Nullstelle)} \longrightarrow \frac{A}{x - 1}$$

$$x_{2/3} = 1 \pm 3\,\mathrm{j} \text{ (konjugiert komplexe Nullstelle)} \longrightarrow \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 10}$$

3. Schritt: Partialbruchzerlegung (Ansatz)

$$\frac{5x^2 - 7x + 20}{x^3 - 3x^2 + 12x - 10} = \frac{5x^2 - 7x + 20}{(x - 1)(x^2 - 2x + 10)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 10}$$

4. Schritt: Alle Teilbrüche werden auf den *Hauptnenner* $(x - 1)(x^2 - 2x + 10)$ gebracht. Sie müssen daher der Reihe nach mit $x^2 - 2x + 10$ bzw. $x - 1$ erweitert werden:

$$\frac{5x^2 - 7x + 20}{(x - 1)(x^2 - 2x + 10)} = \frac{A(x^2 - 2x + 10) + (Bx + C)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 - 2x + 10)}$$

Die Brüche auf beiden Seiten dieser Gleichung stimmen im *Nenner* überein und somit auch im *Zähler*:

$$5x^2 - 7x + 20 = A(x^2 - 2x + 10) + (Bx + C)(x - 1)$$

Wir benötigen drei Gleichungen für die drei Unbekannten A, B und C und setzen daher für die Variable x drei verschiedene Werte ein: $x = 1$ (reelle Nennernullstelle), $x = 0$ und $x = 2$. Das bereits *gestaffelte* lineare Gleichungssystem führt zu der folgenden Lösung:

$$\boxed{x = 1} \quad \Rightarrow \quad 18 = 9A \quad \Rightarrow \quad A = 2$$

$$\boxed{x = 0} \quad \Rightarrow \quad 20 = 10A - C \quad \Rightarrow \quad 20 = 10 \cdot 2 - C = 20 - C \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

$$\boxed{x = 2} \quad \Rightarrow \quad 26 = 10A + 2B + C \quad \Rightarrow \quad 26 = 10 \cdot 2 + 2B + 0 = 20 + 2B \quad \Rightarrow \quad 6 = 2B \quad \Rightarrow \quad B = 3$$

Die Partialbruchzerlegung besitzt damit die folgende Gestalt:

$$\frac{5x^2 - 7x + 20}{x^3 - 3x^2 + 12x - 10} = \frac{2}{x - 1} + \frac{3x}{x^2 - 2x + 10}$$

Durchführung der Integration

Gliedweise Integration der Partialbrüche führt zu

$$I = \int \frac{5x^2 - 7x + 20}{x^3 - 3x^2 + 12x - 10}\, dx = 2 \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{x-1}}_{I_1} + 3 \cdot \underbrace{\int \frac{x}{x^2 - 2x + 10}\, dx}_{I_2} = 2I_1 + 3I_2$$

Das Teilintegral I_1 wird durch eine einfache *Substitution* gelöst:

$$u = x - 1\,, \quad \frac{du}{dx} = 1\,, \quad dx = du$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C_1 = \ln|x-1| + C_1$$

Das Teilintegral I_2 lässt sich nach einigen elementaren Umformungen im Nenner ebenfalls durch *Substitution* lösen. Wir haben dieses Integral bereits in der eigenständigen Aufgabe C16 ausführlich behandelt. Die Lösung lautete:

$$I_2 = \int \frac{x}{x^2 - 2x + 10}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 - 2x + 10) + \frac{1}{3} \cdot \arctan \frac{1}{3}(x-1) + C_2$$

Damit erhalten wir für das Integral I folgende Lösung:

$$I = 2I_1 + 3I_2 = 2 \cdot (\ln|x-1| + C_1) + 3\left[\frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 - 2x + 10) + \frac{1}{3} \cdot \arctan \frac{1}{3}(x-1) + C_2\right] =$$

$$= 2 \cdot \ln|x-1| + 2C_1 + \frac{3}{2} \cdot \ln(x^2 - 2x + 10) + \arctan \frac{1}{3}(x-1) + 3C_2 =$$

$$= 2 \cdot \ln|x-1| + \frac{3}{2} \cdot \ln(x^2 - 2x + 10) + \arctan \frac{1}{3}(x-1) + C^* \qquad (C^* = 2C_1 + 3C_2)$$

4 Numerische Integration

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel V.8.4
Formelsammlung: Kapitel V.3.5

C30 Bestimmen Sie mit der *Simpsonschen* Formel für $2n = 8$ *einfache* Streifen einen Näherungswert für den *Flächeninhalt* A zwischen der Kurve $y = \ln(1 + 5x^3)$, $0 \le x \le 1{,}6$ und der x-Achse (*Erst-* und *Zweitrechnung* mit halber Streifenzahl).

Die Flächenberechnung erfolgt durch das folgende Integral:

$$A = \int_0^{1{,}6} \ln(1 + 5x^3)\, dx$$

Bild C-1 zeigt die gesuchte Fläche und ihre Zerlegung in $2n = 8$ *einfache* Streifen *(Erstrechnung)*.

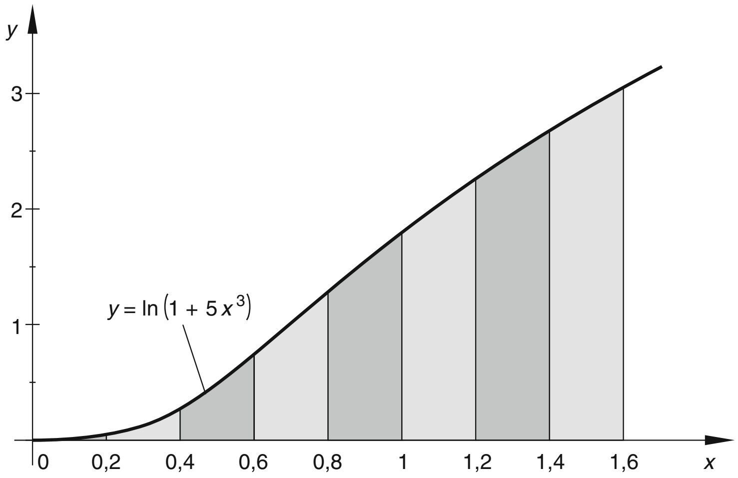


Bild C-1

Erstrechnung ($2n = 8$ einfache Streifen $\Rightarrow$ $n = 4$ Doppelstreifen)

Streifenbreite (Schrittweite): $h = \frac{1{,}6 - 0}{8} = 0{,}2$

Stützstellen: $x_k = 0 + k \cdot h = k \cdot 0{,}2 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 8)$

Stützwerte: $y_k = f(x_k) = \ln(1 + 5x_k^3)$ (mit dem Taschenrechner berechnen)

Zweitrechnung ($2n^* = 4$ einfache Streifen $\Rightarrow$ $n^* = 2$ Doppelstreifen)

Streifenbreite (Schrittweite): $h^* = 2h = \frac{1{,}6 - 0}{4} = 0{,}4$

Stützstellen: $x_k = 0 + k \cdot h^* = k \cdot 0{,}4 \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$

Stützwerte: $y_k = f(x_k) = \ln(1 + 5x_k^3)$ (liegen aus der *Erstrechnung* bereits vor)

		Erstrechnung ($h = 0{,}2$)			**Zweitrechnung ($h^* = 2h = 0{,}4$)**		
k	Stützstellen x_k	Stützwerte y_k			Stützwerte y_k		
0	0	0			0		
1	0,2		0,039 221				
2	0,4			0,277 632		0,277 632	
3	0,6		0,732 368				
4	0,8			1,269 761			1,269 761
5	1,0		1,791 759				
6	1,2			2,265 921		2,265 921	
7	1,4		2,689 207				
8	1,6	3,067 122			3,067 122		
		3,067 122	5,252 555	3,813 314	3,067 122	2,543 553	1,269 761
		Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_0^*	Σ_1^*	Σ_2^*

Hinweis zur Tabelle: Die *grau* unterlegten Stützstellen und Stützwerte der Erstrechnung *entfallen* bei der Zweitrechnung.

Erstrechnung: $2n = 8$ „einfache“ Streifen der Breite $h = 0{,}2$

$$I_h = (\Sigma_0 + 4 \cdot \Sigma_1 + 2 \cdot \Sigma_2)\,\frac{h}{3} = (3{,}067\,122 + 4 \cdot 5{,}252\,555 + 2 \cdot 3{,}813\,314) \cdot \frac{0{,}2}{3} = 2{,}113\,598$$

Zweitrechnung: $2n^{*} = 4$ „einfache“ Streifen der Breite $h^{*} = 2h = 0{,}4$

$$I_{h^*} = I_{2h} = (\Sigma_0^* + 4 \cdot \Sigma_1^* + 2 \cdot \Sigma_2^*)\,\frac{h^*}{3} = (3{,}067\,122 + 4 \cdot 2{,}543\,553 + 2 \cdot 1{,}269\,761) \cdot \frac{0{,}4}{3} = 2{,}104\,114$$

Fehler der Erstrechnung:

$$\Delta I = \frac{1}{15}\,(I_h - I_{h^*}) = \frac{1}{15}\,(I_h - I_{2h}) = \frac{1}{15}\,(2{,}113\,598 - 2{,}104\,114) = 0{,}000\,632$$

Verbesserter Näherungswert I_v (Flächeninhalt A):

$$A = I_v = \int\limits_0^{1,6} \ln\,(1 + 5x^3)\,dx \approx I_v = I_h + \Delta I = 2{,}113\,598 + 0{,}000\,632 = 2{,}114\,230$$

C31 Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^{\pi} \mathrm{e}^{\cos x}\,dx$ näherungsweise nach *Simpson* (Zerlegung in $2n = 12$ *„einfache“* Streifen; *Erst-* und *Zweitrechnung*).

Der Integralwert entspricht der in Bild C-2 skizzierten Fläche.

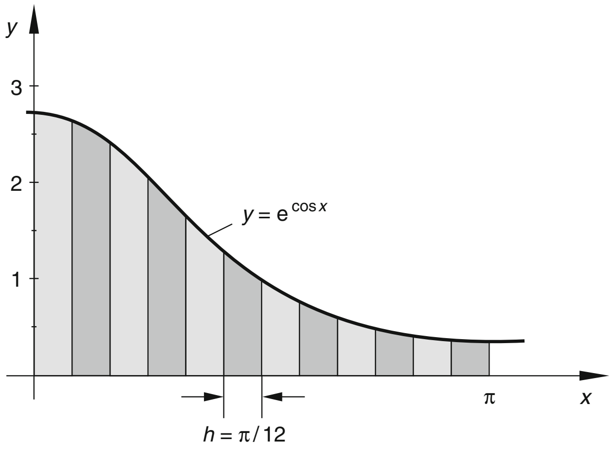


Bild C-2

Erstrechnung ($2n = 12$ „einfache“ Streifen $\Rightarrow$ $n = 6$ Doppelstreifen)

Streifenbreite (Schrittweite): $h = \pi/12$

Stützstellen: $x_k = 0 + k \cdot h = k \cdot \pi/12 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 12)$

Bei der Berechnung der *Stützwerte* $y_k = f(x_k) = \mathrm{e}^{\cos x_k}$ ist zu beachten, dass die Stützstellen x_k im *Bogenmaß* gegebene Winkel sind.

Zweitrechnung ($2n^* = 6$ „einfache“ Streifen $\Rightarrow$ $n^* = 3$ Doppelstreifen)

Streifenbreite (Schrittweite): $h^* = 2h = \pi/6$

Stützstellen: $x_k = 0 + k \cdot h = k \cdot \pi/6 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 6)$

Stützwerte: $y_k = f(x_k) = \mathrm{e}^{\cos x_k}$ (liegen aus der *Erstrechnung* bereits vor)

		Erstrechnung ($h = \pi/12$)			**Zweitrechnung ($h^* = 2h = \pi/6$)**		
k	Stützstellen x_k	Stützwerte y_k			Stützwerte y_k		
0	0	2,718 282			2,718 282		
1	$1 \cdot \pi/12 = \pi/12$		2,627 219				
2	$2 \cdot \pi/12 = \pi/6$			2,377 443		2,377 443	
3	$3 \cdot \pi/12 = \pi/4$		2,028 115				
4	$4 \cdot \pi/12 = \pi/3$			1,648 721			1,648 721
5	$5 \cdot \pi/12$		1,295 399				
6	$6 \cdot \pi/12 = \pi/2$			1		1	
7	$7 \cdot \pi/12$		0,771 963				
8	$8 \cdot \pi/12 = 2\pi/3$			0,606 531			0,606 531
9	$9 \cdot \pi/12 = 3\pi/4$		0,493 069				
10	$10 \cdot \pi/12 = 5\pi/6$			0,420 620		0,420 620	
11	$11 \cdot \pi/12$		0,380 631				
12	$12 \cdot \pi/12 = \pi$	0,367 879			0,367 879		
		3,086 161	7,596 396	6,053 315	3,086 161	3,798 063	2,255 252
		Σ_0	Σ_1	Σ_2	Σ_0^*	Σ_1^*	Σ_2^*

Hinweis zur Tabelle: Die *grau* unterlegten Stützstellen und Stützwerte der Erstrechnung *entfallen* bei der Zweitrechnung.

Erstrechnung: $2n = 12$ „einfache“ Streifen der Breite $h = \pi/12$

$$I_h = (\Sigma_0 + 4 \cdot \Sigma_1 + 2 \cdot \Sigma_2)\,\frac{h}{3} = (3{,}086\,161 + 4 \cdot 7{,}596\,396 + 2 \cdot 6{,}053\,315) \cdot \frac{\pi}{36} = 3{,}977\,464$$

Zweitrechnung: $2n^* = 6$ „einfache“ Streifen der Breite $h^* = 2h = \pi/6$

$$I_{h^*} = I_{2h} = (\Sigma_0^* + 4 \cdot \Sigma_1^* + 2 \cdot \Sigma_2^*)\,\frac{h^*}{3} = (3{,}086\,161 + 4 \cdot 3{,}798\,063 + 2 \cdot 2{,}255\,252) \cdot \frac{\pi}{18} = 3{,}977\,416$$

Fehler der Erstrechnung:

$$\Delta I = \frac{1}{15}\,(I_h - I_{h^*}) = \frac{1}{15}\,(I_h - I_{2h}) = \frac{1}{15}\,(3{,}977\,464 - 3{,}977\,416) = 0{,}000\,003$$

Verbesserter Näherungswert I_v:

$$I_v = \int\limits_0^{\pi} \mathrm{e}^{\cos x}\,dx \approx I_v = I_h + \Delta I = 3{,}977\,464 + 0{,}000\,003 = 3{,}977\,467$$

C32

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x}{\sin x}\, dx = \,?$$

Berechnen Sie dieses Integral näherungsweise nach der *Trapezformel* für $n = 6$ Streifen. Welches Ergebnis erhält man nach *Simpson* für $2n = 6$ „einfache" Streifen?

Der Integralwert entspricht der in Bild C-3 skizzierten Fläche.

Streifenbreite (Schrittweite):

$$h = \frac{\pi/2 - \pi/4}{6} = \frac{\pi/4}{6} = \frac{\pi}{24}$$

Stützstellen:

$$x_k = \frac{\pi}{4} + k \cdot h = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{24} = $$

$$= 6 \cdot \frac{\pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{24} = (6 + k) \cdot \frac{\pi}{24}$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots, 6)$

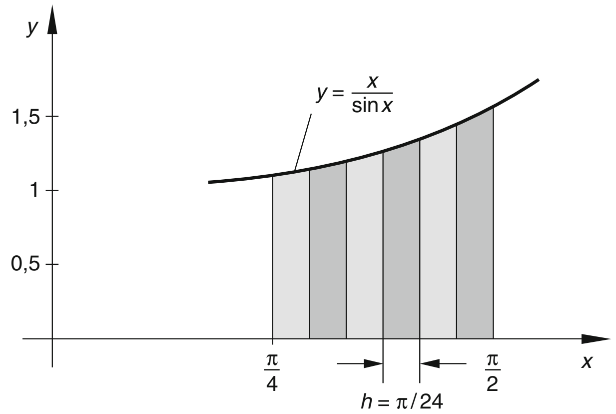


Bild C-3

Bei der Berechnung der zugehörigen *Stützwerte* $y_k = f(x_k) = x_k/\sin x_k$ ist zu beachten, dass die Stützstellen x_k im *Bogenmaß* dargestellte Winkel sind.

		Trapezformel		**Simpsonsche Formel**		
k	Stützstellen x_k	Stützwerte y_k		Stützwerte y_k		
0	$6 \cdot \pi/24 = \pi/4$	1,110 721		1,110 721		
1	$7 \cdot \pi/24$		1,154 968		1,154 968	
2	$8 \cdot \pi/24 = \pi/3$		1,209 200			1,209 200
3	$9 \cdot \pi/24 = 3\pi/8$		1,275 163		1,275 163	
4	$10 \cdot \pi/24 = 5\pi/12$		1,355 173			1,355 173
5	$11 \cdot \pi/24$		1,452 321		1,452 321	
6	$12 \cdot \pi/24 = \pi/2$	1,570 796		1,570 796		
		2,681 517	6,446 825	2,681 517	3,882 452	2,564 373
		Σ_1	Σ_2	Σ_0	Σ_1	Σ_2

Die beiden Formeln (Trapez- und Simpsonformel) unterscheiden sich bekanntlich in der *unterschiedlichen* Gewichtung der Stützstellen.

Trapezformel ($n = 6$ *Streifen der Breite* $h = \pi/24$):

$$I = \left(\frac{1}{2} \cdot \Sigma_1 + \Sigma_2\right) h = \left(\frac{1}{2} \cdot 2{,}681\,517 + 6{,}446\,825\right) \cdot \frac{\pi}{24} = 1{,}019\,392$$

Simpsonsche Formel ($2n = 6$ *einfache Streifen der Breite* $h = 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad n = 3$ *Doppelstreifen*):

$$I = (\Sigma_0 + 4 \cdot \Sigma_1 + 2 \cdot \Sigma_2)\,\frac{h}{3} = (2{,}681\,517 + 4 \cdot 3{,}882\,452 + 2 \cdot 2{,}564\,373) \cdot \frac{\pi}{72} = 1{,}018\,403$$

5 Anwendungen der Integralrechnung

In diesem Abschnitt finden Sie ausschließlich *anwendungsorientierte* Aufgaben zu folgenden Themen:

- Flächeninhalt, Flächenschwerpunkt, Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente)
- Rotationskörper (Volumen, Mantelfläche, Massenträgheitsmoment, Schwerpunkt)
- Bogenlänge, lineare und quadratische Mittelwerte
- Arbeitsgrößen, Bewegungen (Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung)

Hinweise

(1) Fertigen Sie zu jeder Aufgabe eine Skizze an, sie erleichtert Ihnen den Lösungsweg und führt zu einem besseren Verständnis.

(2) Alle anfallenden Integrale dürfen einer *Integraltafel* entnommen werden (wenn nicht ausdrücklich anders verlangt). Bei der Lösung der Integrale wird die jeweilige Integralnummer aus der Integraltafel der **Mathematischen Formelsammlung** mit den entsprechenden Parameterwerten angegeben („gelbe Seiten", z. B. Integral 313 mit $a = 2$). Selbstverständlich dürfen Sie die Integrale auch „per Hand" lösen (zusätzliche Übung).

5.1 Flächeninhalt, Flächenschwerpunkt, Flächenträgheitsmomente

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel V.10.2 und 10.8

Formelsammlung: Kapitel V.5.4 bis 5.6

C33 Welcher *Flächeninhalt* A wird von der Kurve $y^2 = 9x^2 - x^4$ eingeschlossen?
Das dabei anfallende Integral ist mit einer geeigneten Integrationsmethode zu lösen.

Wir lösen die Kurvengleichung nach y auf und erhalten zwei zur x-Achse *spiegelsymmetrische* Funktionen:

$$y^2 = 9x^2 - x^4 = x^2(9 - x^2) \quad \Rightarrow \quad y = \pm\, x \cdot \sqrt{9 - x^2}, \quad -3 \le x \le 3$$

Bild C-4 zeigt die eingeschlossene Fläche, die sowohl zur x- als auch zur y-Achse symmetrisch ist. Bei der Integration können wir uns daher auf den 1. Quadrant beschränken (*dunkelgrau* unterlegte Fläche):

$$A = \int_a^b y\, dx = 4 \cdot \int_0^3 x \cdot \sqrt{9 - x^2}\, dx$$

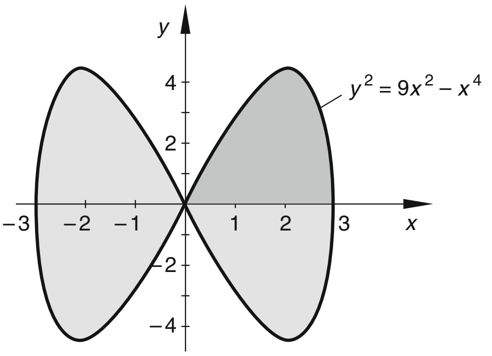


Bild C-4

Das Integral lösen wir mit Hilfe der folgenden *Substitution* (die Grenzen werden mitsubstituiert):

$$u = 9 - x^2, \quad \frac{du}{dx} = -2x, \quad dx = \frac{du}{-2x}, \qquad \text{Grenzen} \begin{cases} \text{unten: } x = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 9 - 0 = 9 \\ \text{oben: } x = 3 \quad \Rightarrow \quad u = 9 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$A = 4 \cdot \int_{0}^{3} x \cdot \sqrt{9 - x^2}\, dx = 4 \cdot \int_{9}^{0} x \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{du}{-2\,x} = -2 \cdot \int_{9}^{0} \sqrt{u}\, du = 2 \cdot \int_{0}^{9} u^{1/2}\, du =$$

$$= 2 \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_0^9 = \frac{4}{3} \left[\sqrt{u^3} \right]_0^9 = \frac{4}{3} \left[u \sqrt{u} \right]_0^9 = \frac{4}{3} (27 - 0) = 36$$

C34

Bestimmen Sie den *Flächeninhalt* A, den die Kurve $y = x^3 - 6x^2 - 4x + 24$ mit der x-Achse im Bereich der beiden am weitesten außen gelegenen Schnittstellen einschließt.

Wir benötigen die *Nullstellen* der Funktion:

$$x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 \quad \text{(durch Probieren)}$$

Abspalten des zugehörigen Linearfaktors $x - 2$ mit dem *Horner-Schema*, Berechnung der restlichen Nullstellen aus dem 1. reduzierten Polynom (→ FS, III. 4.5 und III. 4.6):

	1	-6	-4	24
$x_1 = 2$		2	-8	-24
	1	-4	-12	0

$$\Rightarrow \quad x^2 - 4x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 6, \quad x_3 = -2$$

Die Polynomfunktion besitzt den in Bild C-5 dargestellten Verlauf. Die gesuchte Fläche A ergibt sich dann als Summe der skizzierten Teilflächen A_1 und A_2:

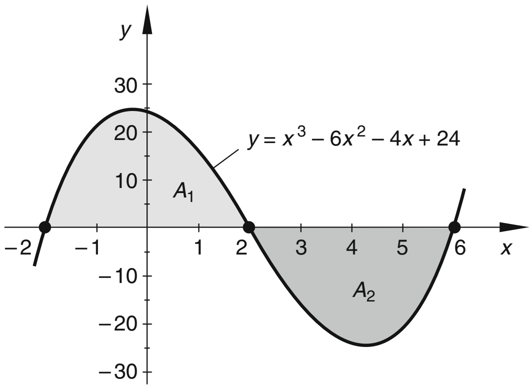


Bild C-5

Teilfläche A_1: Die Kurve liegt *oberhalb* der x-Achse. Daher gilt:

$$A_1 = \int_{a}^{b} y\, dx = \int_{-2}^{2} (x^3 - 6x^2 - 4x + 24)\, dx = \left[\frac{1}{4} x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 24x \right]_{-2}^{2} =$$

$$= (4 - 16 - 8 + 48) - (4 + 16 - 8 - 48) = 28 + 36 = 64$$

Teilfläche A_2: Die Kurve liegt *unterhalb* der x-Achse. Daher gilt jetzt:

$$A_2 = -\int_{b}^{c} y\, dx = -\int_{2}^{6} (x^3 - 6x^2 - 4x + 24)\, dx = -\left[\frac{1}{4} x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 24x \right]_{2}^{6} =$$

$$= -(324 - 432 - 72 + 144 - 4 + 16 + 8 - 48) = 64$$

Gesamtfläche A: $A = A_1 + A_2 = 64 + 64 = 128$

C35 Berechnen Sie für das von den Parabeln $y = x^2 - 4x$ und $y = -\frac{1}{5}x^2 + 2x$ eingeschlossene Flächenstück *Flächeninhalt* A und *Flächenschwerpunkt* S.

Wir berechnen zunächst die benötigten Schnittpunkte der beiden Parabeln:

$$x^2 - 4x = -\frac{1}{5}x^2 + 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{5}x^2 - 6x = 6x\left(\frac{1}{5}x - 1\right) = 0 \; < \begin{array}{l} 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \\ \frac{1}{5}x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 5 \end{array}$$

Aus Bild C-6 entnehmen wir die folgenden Randkurven:

obere Randkurve: $y_o = -\frac{1}{5}x^2 + 2x$

untere Randkurve: $y_u = x^2 - 4x$

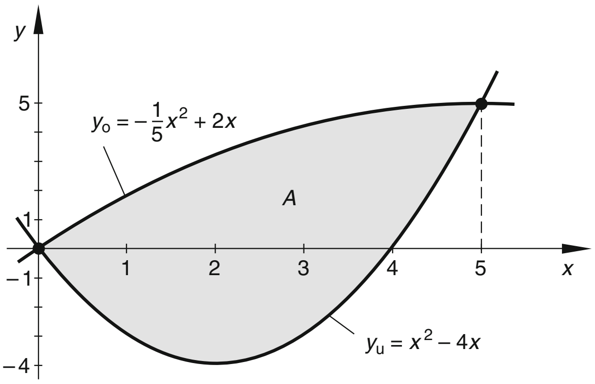


Bild C-6

Flächeninhalt A

$$A = \int_a^b (y_o - y_u)\,dx = \int_0^5 \left[\left(-\frac{1}{5}x^2 + 2x\right) - (x^2 - 4x)\right] dx = \int_0^5 \left(-\frac{6}{5}x^2 + 6x\right) dx =$$

$$= \left[-\frac{2}{5}x^3 + 3x^2\right]_0^5 = -50 + 75 - 0 - 0 = 25$$

Schwerpunkt $S = (x_S;\, y_S)$

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x\,(y_o - y_u)\,dx = \frac{1}{25} \cdot \int_0^5 x\left[\left(-\frac{1}{5}x^2 + 2x\right) - (x^2 - 4x)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{25} \cdot \int_0^5 x\left(-\frac{6}{5}x^2 + 6x\right) dx = \frac{1}{25} \cdot \int_0^5 \left(-\frac{6}{5}x^3 + 6x^2\right) dx = \frac{1}{25}\left[-\frac{3}{10}x^4 + 2x^3\right]_0^5 =$$

$$= \frac{1}{25}\left(-\frac{375}{2} + 250 - 0 - 0\right) = \frac{1}{25} \cdot \frac{125}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$$y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (y_o^2 - y_u^2)\,dx = \frac{1}{50} \cdot \int_0^5 \left[\left(-\frac{1}{5}x^2 + 2x\right)^2 - (x^2 - 4x)^2\right] dx =$$

$$= \frac{1}{50} \cdot \int_0^5 \left[\left(\frac{1}{25}x^4 - \frac{4}{5}x^3 + 4x^2\right) - (x^4 - 8x^3 + 16x^2)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{50} \cdot \int_0^5 \left(-\frac{24}{25}x^4 + \frac{36}{5}x^3 - 12x^2\right) dx = \frac{1}{50}\left[-\frac{24}{125}x^5 + \frac{9}{5}x^4 - 4x^3\right]_0^5 =$$

$$= \frac{1}{50}(-600 + 1125 - 500 - 0 - 0 - 0) = \frac{1}{50} \cdot 25 = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Schwerpunkt: $S = (2{,}5;\; 0{,}5)$

C36 Bestimmen Sie den *Flächeninhalt* A und den *Flächenschwerpunkt* S des Flächenstücks, das von der Kurve $y = x \cdot e^{-x}$ mit der positiven x-Achse eingeschlossen wird.

Wir berechnen zunächst den Flächeninhalt A des in Bild C-7 dargestellten Flächenstücks und anschließend die Lage des Flächenschwerpunktes S.

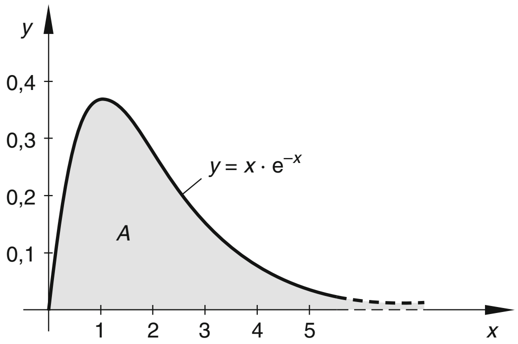


Bild C-7

Flächeninhalt A

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^\infty x \cdot e^{-x}\,dx = \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^\lambda x \cdot e^{-x}\,dx$$

Dieses *uneigentliche* Integral wird wie folgt berechnet: Zunächst wird von $x = 0$ bis $x = \lambda > 0$ integriert, anschließend der Grenzwert $\lambda \to \infty$ gebildet:

$$A(\lambda) = \underbrace{\int_0^\lambda x \cdot e^{-x}\,dx}_{\text{Integral 313 mit } a\, =\, -1} = \left[(-x-1) \cdot e^{-x}\right]_0^\lambda = (-\lambda - 1) \cdot e^{-\lambda} + 1$$

$$A = \lim_{\lambda \to \infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} \left[(-\lambda - 1) \cdot e^{-\lambda} + 1\right] = 0 + 1 = 1$$

Hinweis: Für ein beliebiges Polynom $P(\lambda)$ gilt: $\lim_{\lambda \to \infty} P(\lambda) \cdot e^{-\lambda} = 0 \qquad$ (für $\lambda > 0$)

Schwerpunkt $S = (x_S;\, y_S)$

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x y\,dx = \frac{1}{1} \cdot \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-x}\,dx = \lim_{\lambda \to \infty} \cdot \underbrace{\int_0^\lambda x^2 \cdot e^{-x}\,dx}_{\text{Integral 314 mit } a\, =\, -1} = \lim_{\lambda \to \infty} \left[\frac{x^2 + 2x + 2}{-1} \cdot e^{-x}\right]_0^\lambda =$$

$$= \lim_{\lambda \to \infty} \left[-(x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x}\right]_0^\lambda = \lim_{\lambda \to \infty} \left[-(\lambda^2 + 2\lambda + 2) \cdot e^{-\lambda} + 2\right] = 0 + 2 = 2$$

$$y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b y^2\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-2x}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \lim_{\lambda \to \infty} \cdot \underbrace{\int_0^\lambda x^2 \cdot e^{-2x}\,dx}_{\text{Integral 314 mit } a\, =\, -2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{\lambda \to \infty} \left[\frac{4x^2 + 4x + 2}{-8} \cdot e^{-2x}\right]_0^\lambda = -\frac{1}{16} \cdot \lim_{\lambda \to \infty} \left[(4x^2 + 4x + 2) \cdot e^{-2x}\right]_0^\lambda =$$

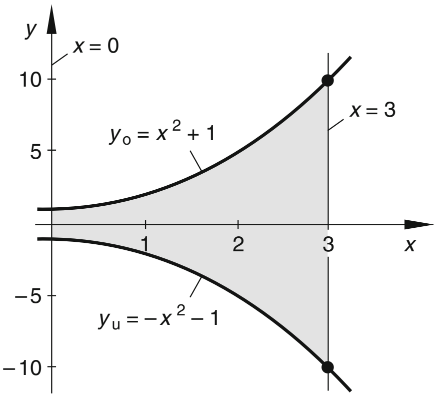
$$= -\frac{1}{16} \cdot \lim_{\lambda \to \infty} \left[(4\lambda^2 + 4\lambda + 2) \cdot e^{-2\lambda} - 2\right] = -\frac{1}{16}\,(0 - 2) = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Schwerpunkt: $S = (2;\, 0{,}125)$

C37

Ein Flächenstück wird berandet durch die folgenden Kurven: $y^2 = (x^2 + 1)^2$, $x = 0$, $x = 3$. Bestimmen Sie den *Flächeninhalt* A sowie die Lage des *Schwerpunktes* S.

Die Fläche verläuft *spiegelsymmetrisch* zur x-Achse (Bild C-8). Bei der Integration beschränken wir uns auf den im 1. Quadrant gelegenen Teil der Fläche.



Randkurven

obere Randkurve: $y_o = x^2 + 1$

untere Randkurve: $y_u = -x^2 - 1$

Bild C-8

Flächeninhalt A

$$A = \int_a^b (y_o - y_u)\, dx = 2 \cdot \int_a^b y_o\, dx = 2 \cdot \int_0^3 (x^2 + 1)\, dx = 2 \left[\frac{1}{3} x^3 + x \right]_0^3 = 2\,[9 + 3 - 0 - 0] = 24$$

Schwerpunkt $S = (x_S; y_S)$

Aus *Symmetriegründen* liegt der Schwerpunkt auf der x-Achse, d. h. $y_S = 0$. Für x_S erhalten wir:

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x\,(y_o - y_u)\, dx = 2 \cdot \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x y_o\, dx = 2 \cdot \frac{1}{24} \cdot \int_0^3 x\,(x^2 + 1)\, dx = \frac{1}{12} \cdot \int_0^3 (x^3 + x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{12} \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^3 = \frac{1}{12} \left(\frac{81}{4} + \frac{9}{2} - 0 - 0 \right) = \frac{1}{12} \cdot \frac{81 + 18}{4} = \frac{99}{48} = \frac{33}{16} = 2{,}0625$$

Schwerpunkt: $S = (2{,}0625;\ 0)$

C38

Bestimmen Sie den *Schwerpunkt* S der Fläche zwischen der Kurve $y = \dfrac{4}{4 + x^2}$ und der x-Achse im Intervall $-2 \le x \le 2$.

Die Fläche verläuft *spiegelsymmetrisch* zur y-Achse (Bild C-9). Wir beschränken daher die anfallenden Integrationen auf das Intervall von $x = 0$ bis $x = 2$ (Faktor 2). Zunächst berechnen wir den benötigten Flächeninhalt A.

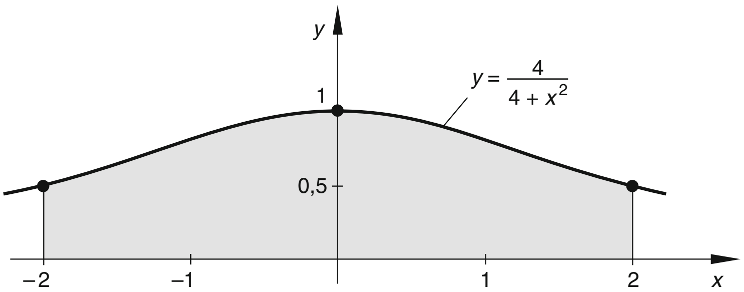


Bild C-9

Flächeninhalt A

$$A = \int_a^b y\,dx = 2 \cdot \int_0^2 \frac{4}{4+x^2}\,dx = 8 \cdot \underbrace{\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx}_{\text{Integral 29 mit } a\,=\,2} = 8\left[\frac{1}{2}\cdot \arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2 = 4\left[\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2 =$$

$$= 4\,(\arctan 1 - \arctan 0) = 4\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \pi \qquad \text{(Winkel im Bogenmaß!)}$$

Schwerpunkt $S = (x_S;\, y_S)$

Wegen der *Spiegelsymmetrie* liegt der Schwerpunkt auf der y-Achse, d. h. $x_S = 0$. Für y_S erhalten wir:

$$y_S = \frac{1}{2A}\cdot \int_a^b y^2\,dx = \frac{1}{2\,\pi}\cdot 2 \cdot \int_0^2 \frac{16}{(4+x^2)^2}\,dx = \frac{16}{\pi}\cdot \underbrace{\int_0^2 \frac{1}{(4+x^2)^2}\,dx}_{\text{Integral 30 mit } a\,=\,2} =$$

$$= \frac{16}{\pi}\left[\frac{x}{8\,(4+x^2)} + \frac{1}{16}\cdot \arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2 = \frac{16}{\pi}\left[\frac{1}{32} + \frac{1}{16}\cdot \underbrace{\arctan 1}_{\pi/4} - 0 - \frac{1}{16}\cdot \underbrace{\arctan 0}_{0}\right] =$$

$$= \frac{16}{\pi}\left(\frac{1}{32} + \frac{1}{16}\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \frac{16}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{32} + \frac{\pi}{64}\right) = \frac{16}{\pi}\cdot\frac{2+\pi}{64} = \frac{2+\pi}{4\pi} = 0{,}4092$$

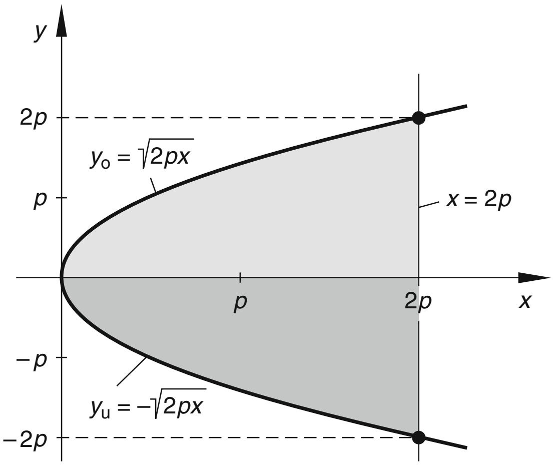
Schwerpunkt: $S = (0;\, 0{,}4092)$

C39

Die nach rechts geöffnete Parabel $y^2 = 2px$ schließt mit der Geraden $x = \text{const.} = 2p$ ein Flächenstück ein $(p > 0)$. Berechnen Sie die *Flächenträgheitsmomente* (Flächenmomente) I_x, I_y und I_p.

Durch Auflösen nach y erhalten wir die beiden zur x-Achse *spiegelsymmetrischen* Funktionen

$$y = \pm\sqrt{2px} = \pm(2px)^{1/2} \qquad \text{(obere und untere Halbparabel, siehe Bild C-10).}$$



Randkurven

oben: $y_o = (2px)^{1/2} = (2p)^{1/2}\cdot x^{1/2}$

unten: $y_u = -(2px)^{1/2} = -(2p)^{1/2}\cdot x^{1/2}$

Bild C-10

Wir beschränken uns bei den Integrationen auf den 1. Quadranten (hellgrau unterlegte Fläche).

Flächenmoment I_x

$$I_x = \frac{1}{3} \cdot \int_a^b (y_o^3 - y_u^3)\, dx = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \int_a^b y_o^3\, dx = \frac{2}{3} \cdot \int_0^{2p} (2p)^{3/2} \cdot x^{3/2}\, dx = \frac{2}{3} \cdot (2p)^{3/2} \cdot \int_0^{2p} x^{3/2}\, dx =$$

$$= \frac{2}{3}\, (2p)^{3/2} \cdot \left[\frac{x^{5/2}}{5/2} \right]_0^{2p} = \frac{4}{15}\, (2p)^{3/2} \left[x^{5/2} \right]_0^{2p} = \frac{4}{15}\, (2p)^{3/2} \cdot [(2p)^{5/2} - 0] = \frac{4}{15}\, (2p)^4 = \frac{64}{15}\, p^4$$

Flächenmoment I_y

$$I_y = \int_a^b x^2 (y_o - y_u)\, dx = 2 \cdot \int_a^b x^2 y_o\, dx = 2 \cdot \int_0^{2p} x^2 (2p)^{1/2} \cdot x^{1/2}\, dx = 2\,(2p)^{1/2} \cdot \int_0^{2p} x^{5/2}\, dx =$$

$$= 2\,(2p)^{1/2} \cdot \left[\frac{x^{7/2}}{7/2} \right]_0^{2p} = \frac{4}{7}\, (2p)^{1/2} \left[x^{7/2} \right]_0^{2p} = \frac{4}{7}\, (2p)^{1/2} [(2p)^{7/2} - 0] = \frac{4}{7}\, (2p)^4 = \frac{64}{7}\, p^4$$

Polares Flächenmoment I_p

Es gilt:

$$I_p = I_x + I_y = \frac{64}{15}\, p^4 + \frac{64}{7}\, p^4 = 64\, p^4 \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{7} \right) = 64\, p^4 \cdot \frac{7 + 15}{105} = 64\, p^4 \cdot \frac{22}{105} = \frac{1408}{105}\, p^4$$

5.2 Rotationskörper (Volumen, Mantelfläche, Massenträgheitsmoment, Schwerpunkt)

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel V.10.3, 10.5, 10.8.3 und 10.9

Formelsammlung: Kapitel V.5.8 bis 5.11

C40 Das zwischen dem Kreis $x^2 + y^2 = 16$ und der Parabel $y = \frac{1}{6}\, x^2$ gelegene Flächenstück erzeugt bei Drehung um die y-Achse einen Rotationskörper. Wie groß ist das *Rotationsvolumen* V_y?

Wir berechnen zunächst die benötigten Kurvenschnittpunkte P_1 und P_2:

$$y = \frac{1}{6}\, x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 6y \qquad \text{(in Kreisgleichung einsetzen)} \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = 6y + y^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad y^2 + 6y - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9 + 16} = -3 \pm 5 \quad \Rightarrow$$

$$y_1 = 2, \quad y_2 = -8 \qquad \text{(der zweite Wert ist eine Scheinlösung und scheidet somit aus)}$$

Zugehörige x-Werte: $x^2 = 6y = 6 \cdot 2 = 12 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm 2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad P_{1/2} = (\pm 2\sqrt{3};\, 2)$

Aus Bild C-11 entnehmen wir, dass der Rotationskörper aus zwei Teilen besteht. Diese Teilkörper entstehen durch Drehung der *hell-* bzw. *dunkelgrau* unterlegten Flächenstücke um die y-Achse:

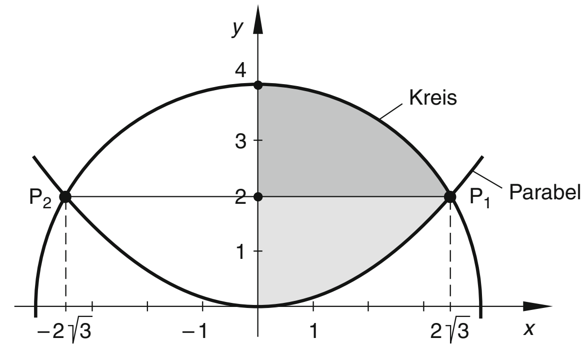


Bild C-11

V_1: Volumen des Rotationskörpers, der durch Drehung der Parabel $x^2 = 6y,\ 0 \le y \le 2$ um die y-Achse entsteht (*hellgraue* Unterlegung im Bild)

$$V_1 = \pi \cdot \int_c^d x^2\,dy = \pi \cdot \int_0^2 6y\,dy = \pi\left[3y^2\right]_0^2 = \pi(12 - 0) = 12\pi$$

V_2: Volumen des Rotationskörpers, der durch Drehung des Kreises $x^2 + y^2 = 16,\ 2 \le y \le 4$ um die y-Achse entsteht (*dunkelgraue* Unterlegung im Bild)

$$V_2 = \pi \cdot \int_c^d x^2\,dy = \pi \cdot \int_2^4 (16 - y^2)\,dy = \pi\left[16y - \frac{1}{3}y^3\right]_2^4 = \pi\left(64 - \frac{64}{3} - 32 + \frac{8}{3}\right) =$$

$$= \pi\left(32 - \frac{56}{3}\right) = \pi\,\frac{96 - 56}{3} = \frac{40}{3}\,\pi$$

Gesamtvolumen V_y: $V_y = V_1 + V_2 = 12\pi + \dfrac{40}{3}\,\pi = \dfrac{36\pi + 40\pi}{3} = \dfrac{76}{3}\,\pi$

C41

Bestimmen Sie das *Rotationsvolumen* V_x des Körpers, der durch Drehung der Kurve $y = \dfrac{\sqrt{x}}{1 + x^2}$, $x \ge 0$ um die x-Achse erzeugt wird.

Bild C-12 zeigt den Kurvenverlauf. Die Volumenberechnung führt auf ein *uneigentliches* Integral (unendlicher Integrationsbereich):

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2\,dx = \pi \cdot \int_0^\infty \frac{x}{(1 + x^2)^2}\,dx$$

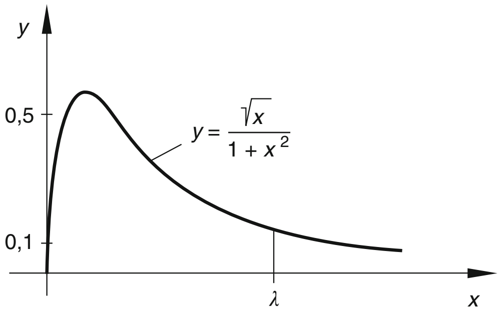


Bild C-12

Dieses Integral wird berechnet, in dem man zunächst von $x = 0$ bis $x = \lambda$ $(\lambda > 0)$ integriert und dann den Grenzwert für $\lambda \to \infty$ bildet (→ FS: Kap. V.4.1):

$$V_x = \pi \cdot \int_0^\infty \frac{x}{(1 + x^2)^2}\,dx = \pi \cdot \lim_{\lambda \to \infty} \underbrace{\int_0^\lambda \frac{x}{(1 + x^2)^2}\,dx}_{\text{Integral 33 mit } a^2 = 1} = \pi \cdot \lim_{\lambda \to \infty}\left[-\frac{1}{2(1 + x^2)}\right]_0^\lambda =$$

$$= \pi \cdot \lim_{\lambda \to \infty}\left[-\frac{1}{2(1 + \lambda^2)} + \frac{1}{2}\right] = \pi\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

C42

Welches *Volumen* V_x hat das Fass, das durch Drehung der in Bild C-13 dargestellten Parabel um die *x*-Achse entsteht?

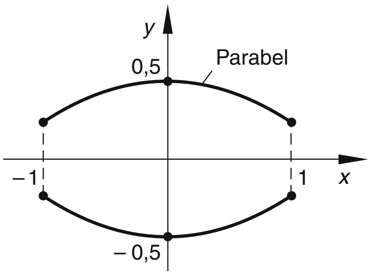


Bild C-13

Wir müssen zunächst die Gleichung der zur *y*-Achse *spiegelsymmetrischen* Parabel bestimmen.

Ansatz: $y = ax^2 + b = ax^2 + 0{,}5$

Den Öffnungsparameter a bestimmen wir aus den Koordinaten des Parabelpunktes $P_1 = (1;\, 0{,}25)$:

$$a \cdot 1^2 + 0{,}5 = 0{,}25 \quad \Rightarrow \quad a = -0{,}25 \quad \Rightarrow \quad y = -0{,}25\,x^2 + 0{,}5 = -0{,}25\,(x^2 - 2) = -\frac{1}{4}\,(x^2 - 2)$$

Bei der Berechnung des Rotationsvolumens beschränken wir die Integration wegen der Symmetrie der Parabel auf das Intervall von $x = 0$ bis $x = 1$ (Faktor 2):

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2\,dx = \pi \cdot \int_{-1}^{1} \frac{1}{16}\,(x^2 - 2)^2\,dx = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{16} \cdot \int_0^1 (x^4 - 4x^2 + 4)\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[\frac{1}{5}\,x^5 - \frac{4}{3}\,x^3 + 4x\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{5} - \frac{4}{3} + 4 - 0\right) = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{3 - 20 + 60}{15} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{43}{15} = \frac{43}{120}\,\pi$$

C43

Die in der Parameterform $x = a \cdot \cos t,\ y = b \cdot \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ vorliegende Ellipse erzeugt bei Drehung um die *y*-Achse ein sog. *Rotationsellipsoid*. Bestimmen Sie das *Volumen* V_y dieses Drehkörpers.

Da die rotierende Kurve in der Parameterform vorliegt, erfolgt die Volumenberechnung durch das Integral

$$V_y = \pi \cdot \int_{t_1}^{t_2} x^2\,\dot{y}\,dt$$

(→ FS: Kap. V.5.8). Wegen der *Spiegelsymmetrie* der Ellipse (bezüglich beider Achsen) beschränken wir uns bei der Rotation auf die im 1. Quadranten gelegene Viertelellipse (in Bild C-14 grau unterlegt; Faktor 2 im Integral). Mit

$$x = a \cdot \cos t\,, \quad \dot{y} = b \cdot \cos t\,, \quad 0 \le t \le \pi/2$$

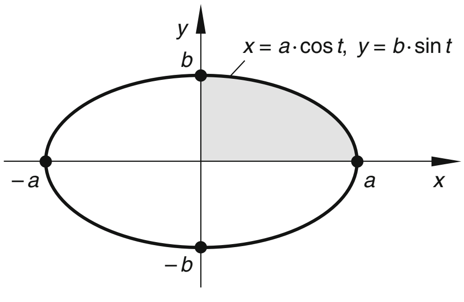


Bild C-14

erhalten wir das folgende Rotationsvolumen:

$$V_y = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{\pi/2} a^2 \cdot \cos^2 t \cdot b \cdot \cos t\,dt = 2\pi a^2 b \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^3 t\,dt}_{\text{Integral 230 mit } a\,=\,1} = 2\pi a^2 b\left[\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= 2\pi a^2 b\left(\sin(\pi/2) - \frac{\sin^3(\pi/2)}{3} - \sin 0 + \frac{\sin^3 0}{3}\right) = 2\pi a^2 b\left(1 - \frac{1}{3} - 0 + 0\right) = \frac{4}{3}\,\pi a^2 b$$

C44 Durch Drehung der Kurve $y = \sqrt{1 + x^2}$, $0 \le x \le 3$ um die x-Achse wird ein Rotationskörper erzeugt. Welche *Mantelfläche* M_x besitzt dieser Körper?

Die Berechnung der Mantelfläche, die die in Bild C-15 skizzierte Kurve bei Dehnung um die x-Achse erzeugt, erfolgt durch das Integral

$$M_x = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

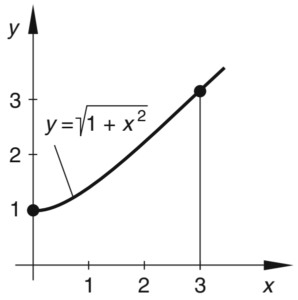


Bild C-15

Wir bilden zunächst die benötigte Ableitung y' und daraus den im Integral auftretenden Wurzelausdruck:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad (\textit{Kettenregel}, \text{ Substitution: } u = 1 + x^2)$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{(1 + x^2) + x^2}{1 + x^2} = \frac{1 + 2x^2}{1 + x^2}$$

Der Integrand unseres Integrals lautet damit:

$$y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + x^2} \cdot \sqrt{\frac{1 + 2x^2}{1 + x^2}} = \sqrt{1 + x^2} \cdot \frac{\sqrt{1 + 2x^2}}{\sqrt{1 + x^2}} = \sqrt{1 + 2x^2}$$

Wir formen den Integrand noch geringfügig um (der Wurzelausdruck wird auf den einfacheren Typ $\sqrt{a^2 + x^2}$ zurück geführt):

$$y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + 2x^2} = \sqrt{\frac{2}{2} + 2x^2} = \sqrt{2\left(\frac{1}{2} + x^2\right)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{0{,}5 + x^2}$$

Rechenregel: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Für die *Mantelfläche* (Rotationsfläche) M_x erhalten wir dann mit Hilfe der Integraltafel das folgende Ergebnis:

$$M_x = 2\pi \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 2\pi \cdot \int_0^3 \sqrt{1 + 2x^2}\, dx = 2\pi \cdot \sqrt{2} \cdot \underbrace{\int_0^3 \sqrt{0{,}5 + x^2}\, dx}_{\text{Integral 116 mit } a^2 = 0{,}5} =$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \pi \left[\frac{1}{2}\left(x \cdot \sqrt{0{,}5 + x^2} + 0{,}5 \cdot \ln\left(x + \sqrt{0{,}5 + x^2}\right)\right)\right]_0^3 =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \pi \left[x \cdot \sqrt{0{,}5 + x^2} + 0{,}5 \cdot \ln\left(x + \sqrt{0{,}5 + x^2}\right)\right]_0^3 =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \pi\,(9{,}2466 + 0{,}9027 - 0 + 0{,}1733) = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot 10{,}3226 = 14{,}5983\,\pi$$

C45 Bestimmen Sie die *Mantelfläche* M_x des Rotationskörpers, der durch Drehung der Kettenlinie $y = c \cdot \cosh(x/c), \; -c \le x \le c$ um die x-Achse entsteht.

Bild C-16 zeigt den Verlauf der *Kettenlinie*. Die bei der Rotation um die x-Achse erzeugte *Mantelfläche* wird dabei nach der folgenden Integralformel berechnet:

$$M_x = 2\pi \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

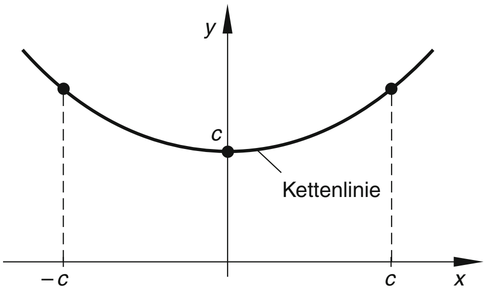


Bild C-16

Wir bilden zunächst die Ableitung y' und daraus den im Integral auftretenden Wurzelausdruck:

$$y' = c \cdot \sinh\left(\frac{x}{c}\right) \cdot \frac{1}{c} = \sinh\left(\frac{x}{c}\right) \qquad (\textit{Kettenregel}, \text{ Substitution: } u = x/c)$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \sinh^2\left(\frac{x}{c}\right) = \cosh^2\left(\frac{x}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

(unter Verwendung der Formel $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ mit $u = x/c$)

Der Integrand unseres Integrals lautet damit:

$$y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} = c \cdot \cosh\left(\frac{x}{c}\right) \cdot \cosh\left(\frac{x}{c}\right) = c \cdot \cosh^2\left(\frac{x}{c}\right)$$

Somit (unter Berücksichtigung der *Spiegelsymmetrie* der Kettenlinie):

$$M_x = 2\pi \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 2\pi c \cdot 2 \cdot \underbrace{\int_0^c \cosh^2\left(\frac{x}{c}\right) dx}_{\text{Integral 364 mit } a = c} = 4\pi c \left[\frac{x}{2} + \frac{\sinh\left(\frac{2x}{c}\right)}{4/c}\right]_0^c =$$

$$= 4\pi c \left[\frac{x}{2} + \frac{c}{4} \cdot \sinh\left(\frac{2x}{c}\right)\right]_0^c = 4\pi c \left(\frac{c}{2} + \frac{c}{4} \cdot \sinh 2 - 0 - \frac{c}{4} \cdot \underbrace{\sinh 0}_{0}\right) = 4\pi c \left(\frac{c}{2} + \frac{c}{4} \cdot \sinh 2\right) =$$

$$= 4\pi c \cdot \frac{c}{2}\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \sinh 2\right) = 2\pi c^2 \cdot 2{,}8134 = 5{,}6269\,\pi c^2 = 17{,}6774\, c^2$$

C46 Die Kurve $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \; -2 \le x \le 2$ erzeugt bei Drehung um die x-Achse einen Rotationskörper, dessen *Massenträgheitsmoment* (bezogen auf die x-Achse) zu bestimmen ist (Dichte $\varrho = \text{const.}$).

Kurvenverlauf: siehe Bild C-17

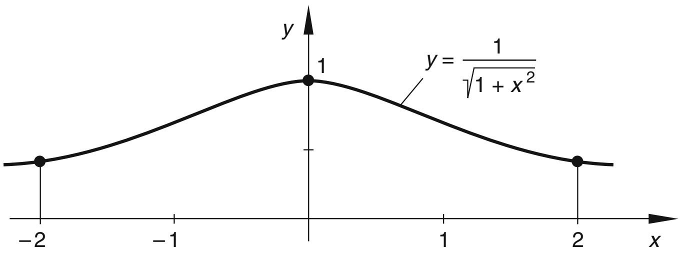


Bild C-17

Unter Berücksichtigung der *Spiegelsymmetrie* der Kurve gilt dann für das gesuchte Massenträgheitsmoment J_x bezüglich der x-Achse:

$$J_x = \frac{1}{2}\,\pi\varrho \cdot \int_a^b y^4\,dx = \underbrace{\int_0^2 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx}_{\text{Integral 30 mit } a\,=\,1} = \pi\varrho\left[\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\cdot\arctan x\right]_0^2 =$$

$$= \pi\varrho\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cdot\arctan 2 - 0 - \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\arctan 0}_{0}\right) = \pi\varrho\,(0{,}2 + 0{,}5536) = 0{,}7536\,\pi\varrho$$

C47

Durch Drehung der in Bild C-18 dargestellten Trapezfläche um die x-Achse entsteht ein Kegelstumpf. Bestimmen Sie das *Massenträgheitsmoment* J_x dieses Körpers bezüglich der Rotationsachse (das Füllmaterial hat die konstante Dichte $\varrho = 2$). Lösen Sie das Integral mit Hilfe einer Substitution.

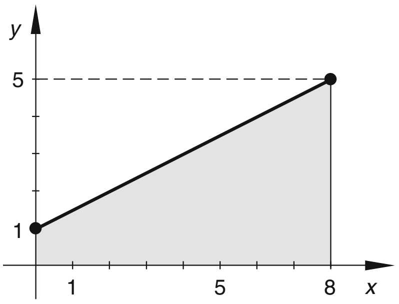


Bild C-18

Gleichung der *Geraden*, die durch Drehung um die x-Achse den *Kegelstumpf* erzeugt (Bild C-18):

$$y = mx + b \quad \text{mit} \quad m = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \quad \text{und} \quad b = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 0{,}5x + 1\,, \quad 0 \le x \le 8$$

Integralformel für das gesuchte *Massenträgheitsmoment*:

$$J_x = \frac{1}{2}\,\pi\varrho \cdot \int_a^b y^4\,dx = \frac{1}{2}\,\pi \cdot 2 \cdot \int_0^8 (0{,}5x+1)^4\,dx = \pi \cdot \int_0^8 (0{,}5x+1)^4\,dx$$

Wir lösen dieses Integral mit Hilfe der folgenden *Substitution*:

$$u = 0{,}5x + 1\,, \quad \frac{du}{dx} = 0{,}5\,, \quad dx = \frac{du}{0{,}5} = 2\,du\,, \qquad \text{Grenzen} \begin{cases} \text{unten: } x = 0 \;\Rightarrow\; u = 1 \\ \text{oben: } x = 8 \;\Rightarrow\; u = 5 \end{cases}$$

$$J_x = \pi \cdot \int_0^8 (0{,}5x+1)^4\,dx = \pi \cdot \int_1^5 u^4 \cdot 2\,du = 2\pi \cdot \int_1^5 u^4\,du = 2\pi\left[\frac{1}{5}\,u^5\right]_1^5 = 2\pi\left(5^4 - \frac{1}{5}\right) =$$

$$= 1249{,}6\,\pi = 3925{,}73$$

C48 Für den durch Drehung der Kurve $y = 2 \cdot \sqrt{1 + 3x^2}$, $0 \le x \le 1$ um die y-Achse entstandenen Rotationskörper sind (bei konstanter Dichte ϱ) folgende Größen zu ermitteln: *Volumen* V_y, *Schwerpunkt* S und *Massenträgheitsmoment* J_y (Bezugsachse ist die Rotationsachse).

Kurvenverlauf: siehe Bild C-19

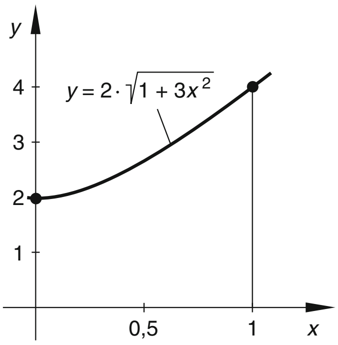


Bild C-19

Für die anfallenden Integrale benötigen wir die Auflösung der Kurvengleichung nach x bzw. x^2:

$$y = 2 \cdot \sqrt{1 + 3x^2} \;\Rightarrow\; y^2 = 4(1 + 3x^2) = 4 + 12x^2 \;\Rightarrow\; 12x^2 + 4 = y^2 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{1}{12}(y^2 - 4)$$

Die Integrationen werden zwischen $y = 2$ und $y = 4$ vorgenommen (siehe Bild C-19).

Rotationsvolumen V_y

$$V_y = \pi \cdot \int_c^d x^2\,dy = \pi \cdot \int_2^4 \frac{1}{12}(y^2 - 4)\,dy = \frac{\pi}{12} \cdot \int_2^4 (y^2 - 4)\,dy = \frac{\pi}{12}\left[\frac{1}{3}y^3 - 4y\right]_2^4 =$$

$$= \frac{\pi}{12}\left(\frac{64}{3} - 16 - \frac{8}{3} + 8\right) = \frac{\pi}{12}\left(\frac{56}{3} - 8\right) = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{56 - 24}{3} = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{32}{3} = \frac{8}{9}\pi$$

Schwerpunkt $S = (x_S; y_S; z_S)$

Der *Schwerpunkt* liegt auf der y-Achse (Rotationsachse). Somit gilt $x_S = 0$ und $z_S = 0$. Für y_S erhalten wir:

$$y_S = \frac{\pi}{V_y} \cdot \int_c^d y x^2\,dy = \frac{\pi}{\frac{8}{9}\pi} \cdot \int_2^4 y \cdot \frac{1}{12}(y^2 - 4)\,dy = \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{12} \cdot \int_2^4 (y^3 - 4y)\,dy =$$

$$= \frac{3}{32}\left[\frac{1}{4}y^4 - 2y^2\right]_2^4 = \frac{3}{32}(64 - 32 - 4 + 8) = \frac{3}{32} \cdot 36 = \frac{3}{8} \cdot 9 = \frac{27}{8} = 3{,}375$$

Schwerpunkt: $S = (0;\ 3{,}375;\ 0)$

Massenträgheitsmoment J_y

$$J_y = \frac{1}{2}\pi\varrho \cdot \int_c^d x^4\,dy = \frac{1}{2}\pi\varrho \cdot \int_2^4 \frac{1}{144}(y^2 - 4)^2\,dy = \frac{1}{288}\pi\varrho \cdot \int_2^4 (y^4 - 8y^2 + 16)\,dy =$$

$$= \frac{1}{288}\pi\varrho\left[\frac{1}{5}y^5 - \frac{8}{3}y^3 + 16y\right]_2^4 = \frac{1}{288}\pi\varrho\left(\frac{1024}{5} - \frac{512}{3} + 64 - \frac{32}{5} + \frac{64}{3} - 32\right) =$$

$$= \frac{1}{288}\pi\varrho\left(\frac{992}{5} - \frac{448}{3} + 32\right) = \frac{1}{288}\pi\varrho\,\frac{2976 - 2240 + 480}{15} = \frac{1}{288} \cdot \frac{1216}{15}\pi\varrho = \frac{38}{135}\pi\varrho$$

C49

Die Kurve $y = \sqrt{1 + \cos x}$, $0 \le x \le \pi$ erzeugt bei Drehung um die x-Achse einen Rotationskörper, dessen *Schwerpunkt* S und *Massenträgheitsmoment* J_x (bezüglich der Drehachse) zu berechnen sind (der Körper besteht aus einem Material mit der Dichte $\varrho = 4/3$).

Kurvenverlauf: siehe Bild C-20

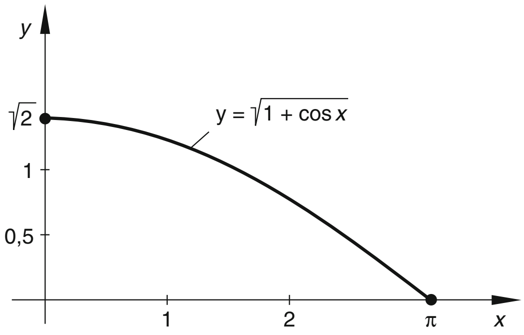


Bild C-20

Wir ermitteln zunächst das *Rotationsvolumen*, das für die Schwerpunktberechnung benötigt wird.

Rotationsvolumen V_x

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2\,dx = \pi \cdot \int_0^\pi (1 + \cos x)\,dx = \pi\,[x + \sin x]_0^\pi = \pi(\pi + \underbrace{\sin \pi}_{0} - 0 - \underbrace{\sin 0}_{0}) = \pi^2$$

Schwerpunkt $S = (x_S;\, y_S;\, z_S)$

Der *Schwerpunkt* S liegt auf der Rotationsachse (x-Achse): $y_S = z_S = 0$. Für x_S erhalten wir:

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \cdot \int_a^b x y^2 = \frac{\pi}{\pi^2} \cdot \int_0^\pi x(1 + \cos x)\,dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi (x + \underbrace{x \cdot \cos x}_{\text{Integral 232 mit } a\,=\,1})\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2 + \cos x + x \cdot \sin x\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\pi^2 + \underbrace{\cos \pi}_{-1} + \pi \cdot \underbrace{\sin \pi}_{0} - 0 - \underbrace{\cos 0}_{1} - 0\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}\pi^2 - 1 - 1\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}\pi^2 - 2\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2 - 4}{2} = \frac{\pi^2 - 4}{2\pi} = 0{,}9342$$

Schwerpunkt: $S = (0{,}9342;\, 0;\, 0)$

Massenträgheitsmoment J_x

$$J_x = \frac{1}{2}\pi\varrho \cdot \int_a^b y^4\,dx = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \int_0^\pi (1 + \cos x)^2\,dx = \frac{2}{3}\pi \cdot \int_0^\pi (1 + 2 \cdot \cos x + \underbrace{\cos^2 x}_{\text{Integral 229 mit } a\,=\,1})\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\left[x + 2 \cdot \sin x + \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^\pi = \frac{2}{3}\pi\left[\frac{3}{2}x + 2 \cdot \sin x + \frac{1}{4} \cdot \sin(2x)\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\left[\frac{3}{2}\pi + 2 \cdot \underbrace{\sin \pi}_{0} + \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\sin(2\pi)}_{0} - 0 - 2 \cdot \underbrace{\sin 0}_{0} - \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\sin 0}_{0}\right] = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{3}{2}\pi = \pi^2$$

C50 Wo liegt der *Schwerpunkt* S eines Körpers mit der konstanten Dichte ϱ, der durch Drehung der Kurve $y = \sqrt{x^4 + 1}$, $0 \le x \le 1$ um die x-Achse erzeugt wurde?

Kurvenverlauf: siehe Bild C-21

Wir berechnen zunächst das benötigte *Volumen* des Rotationskörpers:

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2\,dx = \pi \cdot \int_0^1 (x^4 + 1)\,dx =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}\,x^5 + x \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5} + 1 - 0 - 0 \right) = \frac{6}{5}\,\pi$$

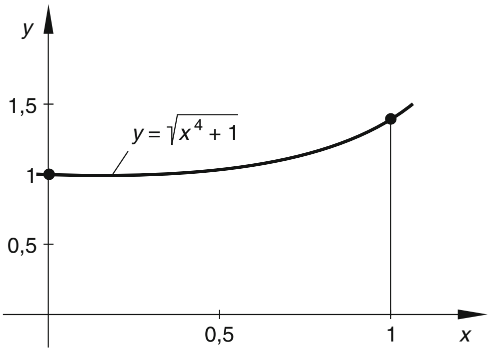


Bild C-21

Die Lage des *Schwerpunktes* $S = (x_S;\, y_S;\, z_S)$ auf der Drehachse (x-Achse) wird durch die Koordinate x_S eindeutig beschrieben. Es gilt:

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \cdot \int_a^b x y^2\,dx = \frac{\pi}{\frac{6}{5}\,\pi} \cdot \int_0^1 x(x^4 + 1)\,dx = \frac{5}{6} \cdot \int_0^1 (x^5 + x)\,dx = \frac{5}{6} \left[\frac{1}{6}\,x^6 + \frac{1}{2}\,x^2 \right]_0^1 =$$

$$= \frac{5}{6} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - 0 - 0 \right) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1 + 3}{6} = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$$

Schwerpunkt: $S = (5/9;\, 0;\, 0)$

C51 Wo liegt der *Schwerpunkt* des homogenen Rotationskörpers, der durch Drehung der Kurve $y = x \cdot \sqrt{4 - x}$, $0 \le x \le 4$ um die x-Achse entsteht?

Wir berechnen zunächst die Nullstellen der Kurve:

$$x \cdot \sqrt{4 - x} = 0 \quad \begin{cases} x = 0 & \Rightarrow \quad x_1 = 0 \\ \sqrt{4 - x} = 0 & \Rightarrow \quad x_2 = 4 \end{cases}$$

Bild C-22 zeigt den Kurvenverlauf zwischen den beiden Nullstellen.

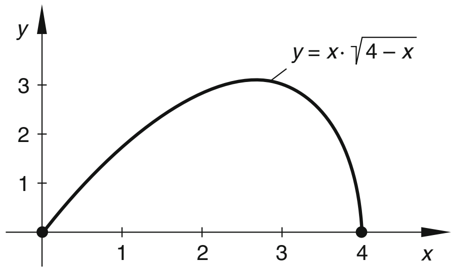


Bild C-22

Berechnung des benötigten *Rotationsvolumens*:

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2\,dx = \pi \cdot \int_0^4 x^2(4 - x)\,dx = \pi \cdot \int_0^4 (4x^2 - x^3)\,dx = \pi \left[\frac{4}{3}\,x^3 - \frac{1}{4}\,x^4 \right]_0^4 =$$

$$= \pi \left(\frac{256}{3} - 64 - 0 - 0 \right) = \pi\,\frac{256 - 192}{3} = \frac{64}{3}\,\pi$$

Schwerpunkt $S = (x_S;\, y_S;\, z_S)$

Der *Schwerpunkt* liegt auf der x-Achse (Rotationsachse): $y_S = z_S = 0$. Für x_S erhalten wir:

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \cdot \int_a^b x y^2 \, dx = \frac{\cancel{\pi}}{\frac{64}{3}\cancel{\pi}} \cdot \int_0^4 x \cdot x^2 (4 - x) \, dx = \frac{3}{64} \cdot \int_0^4 (4x^3 - x^4) \, dx = \frac{3}{64} \left[x^4 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^4 =$$

$$= \frac{3}{64} \left(256 - \frac{1024}{5} - 0 - 0 \right) = \frac{3}{64} \cdot \frac{1280 - 1024}{5} = \frac{3}{64} \cdot \frac{256}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

Schwerpunkt: $S = (2{,}4;\, 0;\, 0)$

C52

Durch Drehung der Kurve $y = \dfrac{x + 1}{2\sqrt{x}}$, $1 \le x \le 4$ um die x-Achse entsteht ein (homogener) Rotationskörper, dessen *Volumen* und *Schwerpunkt* zu bestimmen ist.

Kurvenverlauf: siehe Bild C-23

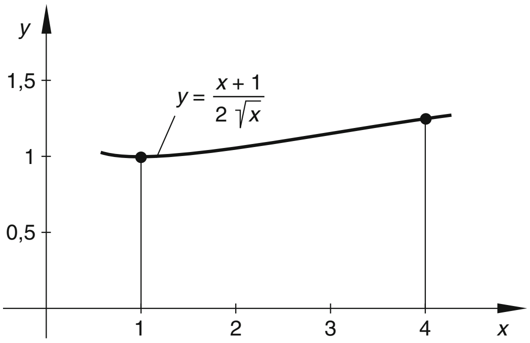


Bild C-23

Rotationsvolumen V_x

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2 \, dx = \pi \cdot \int_1^4 \frac{(x + 1)^2}{4x} \, dx = \frac{\pi}{4} \cdot \int_1^4 \frac{x^2 + 2x + 1}{x} \, dx = \frac{\pi}{4} \cdot \int_1^4 \left(x + 2 + \frac{1}{x} \right) dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{2} x^2 + 2x + \ln |x| \right]_1^4 = \frac{\pi}{4} \left(8 + 8 + \ln 4 - \frac{1}{2} - 2 - \underbrace{\ln 1}_{0} \right) = \frac{\pi}{4} (13{,}4 + \ln 4) = 3{,}7216\,\pi$$

Schwerpunkt $S = (x_S;\, y_S;\, z_S)$

Der *Schwerpunkt* liegt auf der Drehachse (x-Achse). Daher ist $y_S = z_S = 0$. Für die x-Koordinate erhalten wir:

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \cdot \int_a^b x y^2 \, dx = \frac{\cancel{\pi}}{3{,}7216\,\cancel{\pi}} \cdot \int_1^4 \cancel{x} \cdot \frac{(x + 1)^2}{4\cancel{x}} \, dx = \frac{1}{14{,}8864} \cdot \int_1^4 (x + 1)^2 \, dx =$$

$$= \frac{1}{14{,}8864} \cdot \int_1^4 (x^2 + 2x + 1) \, dx = \frac{1}{14{,}8864} \left[\frac{1}{3} x^3 + x^2 + x \right]_1^4 =$$

$$= \frac{1}{14{,}8864} \left(\frac{64}{3} + 16 + 4 - \frac{1}{3} - 1 - 1 \right) = \frac{1}{14{,}8864} \cdot 39 = 2{,}62$$

Schwerpunkt: $S = (2{,}62;\, 0;\, 0)$

5.3 Bogenlänge, lineare und quadratische Mittelwerte

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel V.10.4 und 10.7
Formelsammlung: Kapitel V.5.3 und 5.7

C53

Bestimmen Sie den *linearen Mittelwert* der Funktion $y = A \cdot \cos^2(\omega t)$ im Periodenintervall $0 \le t \le T$ mit $T = \pi/\omega$ $(A > 0,\ \omega > 0)$.

Linearer zeitlicher Mittelwert der in Bild C-24 dargestellten periodischen Funktion während einer Periode $T = \pi/\omega$:

$$\bar{y}_{\text{linear}} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{\pi/\omega} \cdot A \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/\omega} \cos^2(\omega t)\,dt}_{\text{Integral 229 mit } a = \omega} = \frac{A\omega}{\pi} \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_0^{\pi/\omega} =$$

$$= \frac{A\omega}{\pi} \left[\frac{\pi}{2\omega} + \frac{\sin(2\pi)}{4\omega} - 0 - \frac{\sin 0}{4\omega} \right] = \frac{A\omega}{\pi} \left(\frac{\pi}{2\omega} + 0 - 0 - 0 \right) = \frac{A\omega}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2\omega} = \frac{A}{2}$$

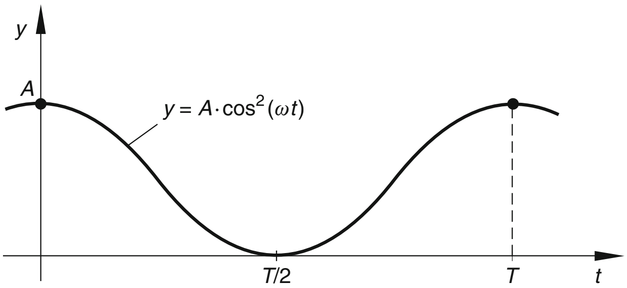


Bild C-24

C54

Welche *mittlere Ordinate* hat die Kurve $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ im Intervall $-1 \le x \le 1$?

Kurvenverlauf: siehe Bild C-25:

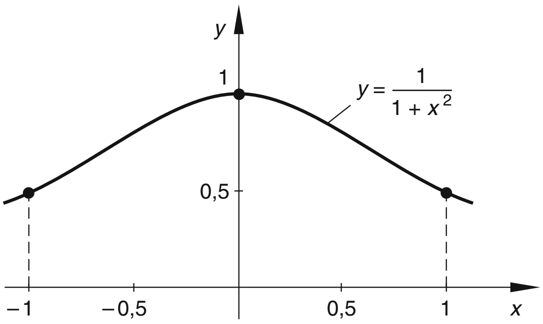


Bild C-25

Die *mittlere Ordinate* im Intervall $-1 \le x \le 1$ entspricht dem *linearen Mittelwert* der Funktion in diesem Intervall. Unter Berücksichtigung der Spiegelsymmetrie der Kurve gilt:

$$\bar{y}_{\text{linear}} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \big[\arctan x\big]_0^1 =$$

$$= \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854$$

(die Werte der Arkustangensfunktion sind Winkel und müssen hier im neutralen Bogenmaß angegeben werden).

C55

Die in Bild C-26 skizzierte Kurve (sog. Astroide) wird durch die folgenden Parametergleichungen beschrieben:

$$x = a \cdot \cos^3 t, \quad y = a \cdot \sin^3 t$$

$$(a > 0;\ 0 \le t \le 2\pi)$$

Wie groß ist der *Umfang* (*Bogenlänge*) dieser Kurve?

Hinweis: Die Berechnung der Bogenlänge erfolgt durch die Integralformel $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$.

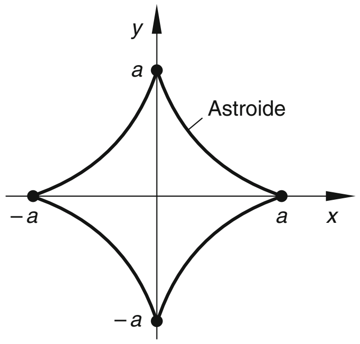


Bild C-26

Für den Wurzelausdruck im Integranden benötigen wir die Ableitungen $\dot{x}$ und $\dot{y}$ der beiden Parametergleichungen. Mit Hilfe der *Kettenregel* erhalten wir (Substitutionen: $u = \cos t$ bzw. $v = \sin t$):

$$\dot{x} = a \cdot 3 \cdot \cos^2 t \cdot (-\sin t) = -3a \cdot \sin t \cdot \cos^2 t$$

$$\dot{y} = a \cdot 3 \cdot \sin^2 t \cdot \cos t = 3a \cdot \sin^2 t \cdot \cos t$$

Somit ist:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 9a^2 \cdot \sin^2 t \cdot \cos^4 t + 9a^2 \cdot \sin^4 t \cdot \cos^2 t =$$

$$= 9a^2 \cdot \sin^2 t \cdot \cos^2 t\,\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1} = 9a^2 \cdot \sin^2 t \cdot \cos^2 t$$

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{9a^2 \cdot \sin^2 t \cdot \cos^2 t} = 3a \cdot \sin t \cdot \cos t$$

(unter Verwendung des „trigonometrischen Pythagoras“ $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$)

Wegen der *Spiegelsymmetrie* der Astroide sowohl zur *x*- als auch zur *y*-Achse beschränken wir uns bei der Integration auf den 1. Quadranten, d. h. auf das Intervall $0 \le t \le \pi/2$ ($\Rightarrow$ Faktor 4):

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = 4 \cdot \int_0^{\pi/2} 3a \cdot \sin t \cdot \cos t\,dt = 12a \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin t \cdot \cos t\,dt}_{\text{Integral 254 mit } a\,=\,1} = 12a \left[\frac{1}{2} \cdot \sin^2 t\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= 6a\big[\sin^2 t\big]_0^{\pi/2} = 6a\big[\sin^2(\pi/2) - \sin^2 0\big] = 6a(1-0) = 6a$$

C56

Die auf einen Körper einwirkende Kraft F hängt wie folgt von der Ortskoordinate s ab:

$$F(s) = F_0 [1 - \cos(\omega s)], \quad F_0 > 0, \ \omega > 0, \quad s \ge 0$$

Wie groß ist die *mittlere Kraft* im Wegintervall (Periodenintervall) $0 \le s \le p$ mit $p = 2\pi/\omega$?

Das Kraft-Weg-Diagramm zeigt den folgenden Verlauf (Bild C-27):

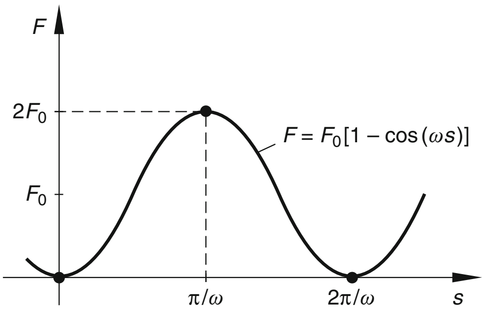


Bild C-27

Die *mittlere Kraft* ist der *lineare Mitttelwert* im Periodenintervall $0 \le s \le 2\pi/\omega$:

$$\bar{F}_{\text{linear}} = \frac{1}{p} \cdot \int_0^p F(s)\, ds = \frac{1}{2\pi/\omega} \cdot F_0 \cdot \int_0^{2\pi/\omega} [1 - \underbrace{\cos(\omega s)}_{\text{Integral 228 mit } a = \omega}]\, ds = \frac{\omega F_0}{2\pi} \left[s - \frac{\sin(\omega s)}{\omega} \right]_0^{2\pi/\omega} =$$

$$= \frac{\omega F_0}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{\omega} - \frac{\sin(2\pi)}{\omega} - 0 + \frac{\sin 0}{\omega} \right) = \frac{\omega F_0}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{\omega} - 0 - 0 + 0 \right) = \frac{\omega F_0}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = F_0$$

C57

Die Gleichung $v(t) = v_0 (1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$ mit $v_0 > 0, \ \tau > 0, \ t \ge 0$ beschreibt die Geschwindigkeit eines Körpers in Abhängigkeit von der Zeit. Bestimmen Sie die *durchschnittliche (mittlere) Geschwindigkeit* im Zeitintervall $0 \le t \le \tau$.

Bild C-28 zeigt den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit v („Sättigungsfunktion“).

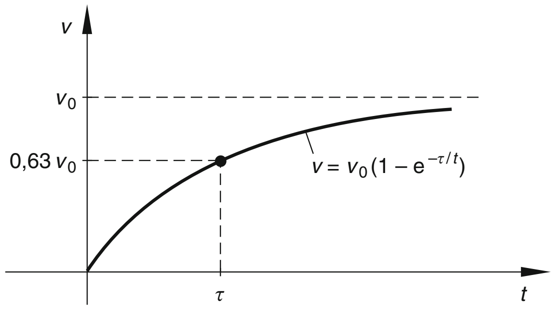


Bild C-28

Der gesuchte *Mittelwert* der Geschwindigkeit v im Zeitintervall $0 \le t \le \tau$ ist der wie folgt berechnete *lineare Mittelwert* der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion:

$$\bar{v}_{\text{linear}} = \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^\tau v(t)\, dt = \frac{1}{\tau} \cdot v_0 \cdot \int_0^\tau \left(1 - \underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{Integral 312 mit } a = -1/\tau}\right) dt = \frac{v_0}{\tau} \left[t - \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}{-1/\tau} \right]_0^\tau = \frac{v_0}{\tau} \left[t + \tau \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^\tau =$$

$$= \frac{v_0}{\tau} \left(\tau + \tau \cdot \mathrm{e}^{-1} - 0 - \tau \right) = \frac{v_0}{\tau} \cdot \tau \cdot \mathrm{e}^{-1} = v_0 \cdot \mathrm{e}^{-1} = 0{,}3679\, v_0$$

C58

Gegeben ist die *Kettenlinie* mit der Gleichung

$$y = c \cdot \cosh\left(\frac{x}{c}\right), \quad -c \le x \le c \quad (\text{mit } c > 0).$$

Bestimmen Sie die *Länge* dieser Kurve sowie die *mittlere Ordinate.*

Bild C-29 zeigt den Verlauf der *Kettenlinie*.

Bogenlänge s

Die Berechnung der Bogenlänge erfolgt durch das bestimmte Integral

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

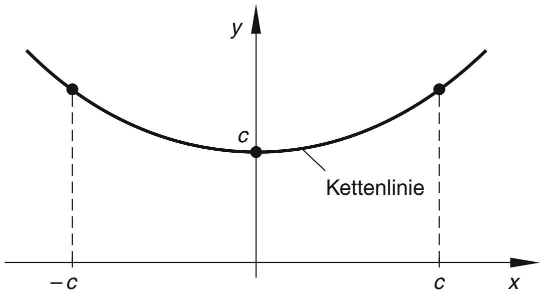


Bild C-29

Wir bilden zunächst die benötigte Ableitung y' und daraus den im Integral auftretenden Wurzelausdruck:

$$y' = c \cdot \sinh\left(\frac{x}{c}\right) \cdot \frac{1}{c} = \sinh\left(\frac{x}{c}\right) \qquad (\textit{Kettenregel}, \text{ Substitution: } u = x/c)$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \sinh^2\left(\frac{x}{c}\right) = \cosh^2\left(\frac{x}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

(unter Verwendung des „hyperbolischen Pythagoras“ $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ mit $u = x/c$). Für die *Bogenlänge* erhalten wir dann (wegen der *Spiegelsymmetrie* der Kettenlinie beschränken wir uns bei der Integration auf das Intervall von $x = 0$ bis $x = c \Rightarrow$ Faktor 2):

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_{-c}^{c} \cosh\left(\frac{x}{c}\right) dx = 2 \cdot \underbrace{\int_0^c \cosh\left(\frac{x}{c}\right) dx}_{\text{Integral 363 mit } a = 1/c} = 2\left[\frac{\sinh\left(\frac{x}{c}\right)}{1/c}\right]_0^c = 2c\left[\sinh\left(\frac{x}{c}\right)\right]_0^c =$$

$$= 2c\,(\sinh 1 - \sinh 0) = 2c\,(1{,}1752 - 0) = 2{,}3504 \cdot c$$

Mittlere Ordinate

Die *mittlere Ordinate* der Kettenlinie im Intervall $-c \le x \le c$ entspricht dem dortigen *linearen Mittelwert*:

$$\bar{y}_{\text{linear}} = \frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{2c} \cdot c \cdot \int_{-c}^{c} \cosh\left(\frac{x}{c}\right) dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^c \cosh\left(\frac{x}{c}\right) dx = \underbrace{\int_0^c \cosh\left(\frac{x}{c}\right) dx}_{\text{Integral 363 mit } a = 1/c} =$$

$$= \left[\frac{\sinh\left(\frac{x}{c}\right)}{1/c}\right]_0^c = c\left[\sinh\left(\frac{x}{c}\right)\right]_0^c = c\,(\sinh 1 - \sinh 0) = c\,(1{,}1752 - 0) = 1{,}1752 \cdot c$$

C59

Bestimmen Sie den *linearen* und den *quadratischen zeitlichen Mittelwert* der in Bild C-30 dargestellten parabelförmigen Spannungsimpulse mit der Periodendauer $T = \pi$ im Intervall $0 \le t \le \pi$.

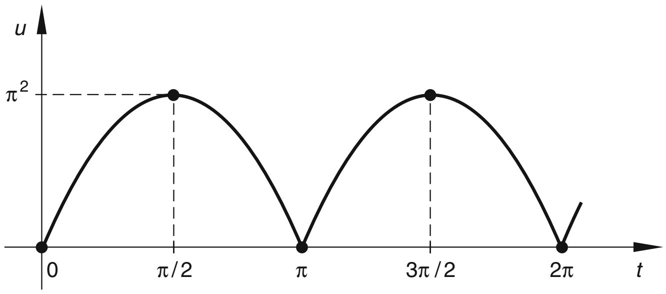


Bild C-30

Produktansatz für den parabelförmigen Impuls im Periodenintervall $0 \le t \le \pi$ (→ FS: Kap. III.4.3.2):

$$u = u(t) = a(t - 0)(t - \pi) = a(t^2 - \pi t)$$

$$u(t = \pi/2) = \pi^2 \quad \Rightarrow \quad a\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{2}\right) = \pi^2 \quad \Rightarrow \quad a\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{2\pi^2}{4}\right) = a\left(\frac{-\pi^2}{4}\right) = \pi^2$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{a \cdot \pi^2}{4} = \pi^2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{a}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -4$$

Somit gilt: $u(t) = -4(t^2 - \pi t), \quad 0 \le t \le \pi$

Linearer zeitlicher Mittelwert im Periodenintervall

$$\bar{u}_{\text{linear}} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u\,dt = \frac{1}{\pi} \cdot (-4) \cdot \int_0^\pi (t^2 - \pi t)\,dt = -\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}\pi t^2\right]_0^\pi =$$

$$= -\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3}\pi^3 - \frac{1}{2}\pi^3 - 0 - 0\right) = -\frac{4}{\pi} \cdot \pi^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -4\pi^2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}\pi^2$$

Quadratischer zeitlicher Mittelwert im Periodenintervall (Effektivwert)

$$\bar{u}_{\text{quadratisch}} = u_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T u^2\,dt} = \sqrt{\frac{16}{\pi} \cdot \underbrace{\int_0^\pi (t^2 - \pi t)^2\,dt}_{I}} = \sqrt{\frac{16}{\pi} \cdot I}$$

Wir berechnen zunächst das unter der Wurzel stehende Integral I:

$$I = \int_0^T (t^2 - \pi t)^2\,dt = \int_0^T (t^4 - 2\pi t^3 + \pi^2 t^2)\,dt = \left[\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{2}\pi t^4 + \frac{1}{3}\pi^2 t^3\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{5}\pi^5 - \frac{1}{2}\pi^5 + \frac{1}{3}\pi^5 - 0 - 0 - 0 = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\pi^5 = \frac{6 - 15 + 10}{30} \cdot \pi^5 = \frac{1}{30}\pi^5$$

Somit gilt:

$$\bar{u}_{\text{quadratisch}} = u_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{16}{\pi} \cdot I} = \sqrt{\frac{16}{\pi} \cdot \frac{1}{30}\pi^5} = \sqrt{\frac{8}{15}\pi^4} = 0{,}7303\,\pi^2 = 7{,}2077$$

C60

Berechnen Sie die *Bogenlänge* der Kurve $y = \frac{1}{2}\, x \sqrt{x} + 1$ im Intervall $0 \le x \le 4$. Lösen Sie das anfallende Integral mit einer geeigneten Methode.

Kurvenverlauf: siehe Bild C-31

Integralformel für die Bogenlänge:

$$s = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

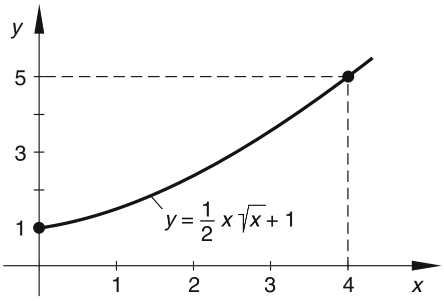


Bild C-31

Wir bilden zunächst die benötigte Ableitung y' und daraus den Wurzelausdruck im Integranden des Integrals:

$$y = \frac{1}{2}\, x \cdot \sqrt{x} + 1 = \frac{1}{2}\, x \cdot x^{1/2} + 1 = \frac{1}{2}\, x^{3/2} + 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\, x^{1/2} = \frac{3}{4} \sqrt{x}$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{9}{16}\, x = \frac{16 + 9x}{16} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{\frac{1}{16}\,(16 + 9x)} = \frac{1}{4} \sqrt{16 + 9x}$$

Einsetzen in die Integralformel liefert:

$$s = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \frac{1}{4} \cdot \int\limits_0^4 \sqrt{16 + 9x}\, dx$$

Dieses einfache Integral lösen wir mit der folgenden *Substitution*:

$$u = 16 + 9x, \quad \frac{du}{dx} = 9, \quad dx = \frac{du}{9}$$

$$\text{Grenzen} \begin{cases} \text{unten: } x = 0 & \Rightarrow \quad u = 16 + 0 = 16 \\ \text{oben: } x = 4 & \Rightarrow \quad u = 16 + 36 = 52 \end{cases}$$

$$s = \frac{1}{4} \cdot \int\limits_0^4 \sqrt{16 + 9x}\, dx = \frac{1}{4} \cdot \int\limits_{16}^{52} \sqrt{u} \cdot \frac{du}{9} = \frac{1}{36} \cdot \int\limits_{16}^{52} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{36} \cdot \int\limits_{16}^{52} u^{1/2}\, du = \frac{1}{36} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_{16}^{52} =$$

$$= \frac{1}{36} \cdot \frac{2}{3} \left[\sqrt{u^3} \right]_{16}^{52} = \frac{1}{54} \left[\sqrt{52^3} - \sqrt{16^3} \right] = \frac{1}{54}\,(374{,}9773 - 64) = 5{,}7588$$

C61

Bestimmen Sie die *mittlere Ordinate* der Parabel $y = -\frac{10}{9}\,(x^2 - 6x)$ im Bereich zwischen den beiden Nullstellen.

Wir berechnen zunächst die *Nullstellen* der Parabel:

$$-\frac{10}{9}\,(x^2 - 6x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 6x = x(x - 6) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 6$$

Kurvenverlauf: siehe Bild C-32

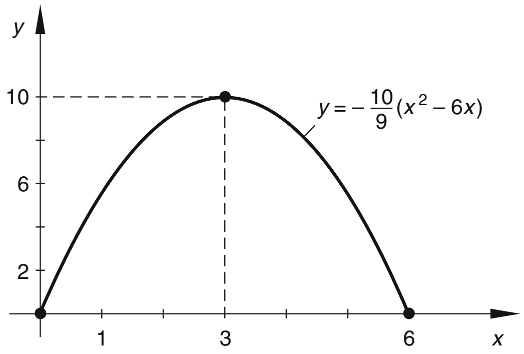


Bild C-32

Mittlere Ordinate (linearer Mittelwert) im Intervall $0 \le x \le 6$:

$$\bar{y}_{\text{linear}} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{10}{9}\right) \cdot \int_0^6 (x^2 - 6x)\,dx = -\frac{5}{27} \cdot \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2\right]_0^6 =$$

$$= -\frac{5}{27}(72 - 108 - 0 - 0) = -\frac{5}{27} \cdot (-36) = \frac{20}{3} = 6{,}6667$$

C62

Sinusimpuls (Einweggleichrichtung; Bild C-33)

$$i(t) = \begin{cases} i_0 \cdot \sin(\omega t) & 0 \le t \le T/2 \\ & \text{für} \\ 0 & T/2 \le t \le T \end{cases}$$

Berechnen Sie die *effektive* Stromstärke i_{eff} während einer Periode $T = 2\pi/\omega$ (*quadratischer zeitlicher Mittelwert* der Stromstärke i).

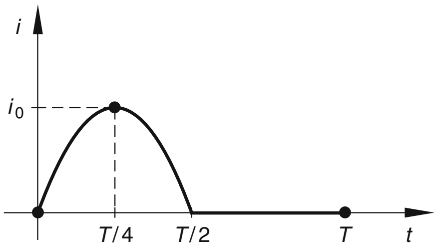


Bild C-33

Die Integration liefert nur im Intervall $0 \le t \le T/2$ einen Beitrag, da i im Intervall $T/2 \le t \le T$ verschwindet.

$$\bar{\imath}_{\text{eff}} = \bar{\imath}_{\text{quadratisch}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2\,dt} = \sqrt{\frac{i_0^2}{T} \cdot \underbrace{\int_0^{T/2} \sin^2(\omega t)\,dt}_{I}} = \sqrt{\frac{i_0^2}{T} \cdot I}$$

Berechnung des unter der Wurzel stehenden Integrals I (unter Berücksichtigung von $\omega T = 2\pi$ und $\sin 0 = = \sin\pi = 0$):

$$I = \underbrace{\int_0^{T/2} \sin^2(\omega t)\,dt}_{\text{Integral 205 mit } a = \omega} = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(\omega t)}{4\omega}\right]_0^{T/2} = \frac{T}{4} - \frac{\sin(\omega T/2)}{4\omega} - 0 + \frac{\sin 0}{4\omega} = \frac{T}{4} - \frac{\sin\pi}{4\omega} = \frac{T}{4}$$

Damit erhalten wir den folgenden *Effektivwert*:

$$i_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{i_0^2}{T} \cdot I} = \sqrt{\frac{i_0^2}{T} \cdot \frac{T}{4}} = \sqrt{\frac{i_0^2}{4}} = \frac{1}{2}\,i_0 \qquad \text{(halber Scheitelwert)}$$

5.4 Arbeitsgrößen, Bewegungen (Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung)

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel V.10.1.1 und 10.6
Formelsammlung: Kapitel V.5.1 und 5.2

C63 Die Beschleunigung eines Massenpunktes in Abhängigkeit von der Zeit genüge der Gleichung $a(t) = a_0 (1 - e^{-t})$ mit $a_0 > 0$, $t \geq 0$. Bestimmen Sie *Geschwindigkeit* v und *Weg* s als Funktionen der Zeit für die Anfangswerte $v(0) = 0$ und $s(0) = 0$.

Die Beschleunigung a wächst im Laufe der Zeit von Null auf den Endwert a_0 („Sättigungsfunktion“, siehe Bild C-34). Es gilt dann:

$$v(t) = \int a(t)\, dt$$

$$s(t) = \int v(t)\, dt$$

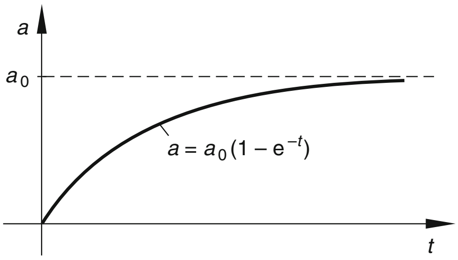


Bild C-34

Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz $v = v(t)$

$$v(t) = \int a(t)\, dt = a_0 \cdot \int (1 - \underbrace{e^{-t}}_{\text{Integral 312 mit } a = -1})\, dt = a_0 (t + e^{-t} + C_1)$$

Die Integrationskonstante C_1 ermitteln wir aus der bekannten *Anfangsgeschwindigkeit* $v(0) = 0$:

$$v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 (0 + 1 + C_1) = a_0 (1 + C_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1$$

Damit erhalten wir das folgende **Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz**:

$$v(t) = a_0 (t + e^{-t} - 1) = a_0 (t - 1 + e^{-t}), \quad t \geq 0$$

Weg-Zeit-Gesetz $s = s(t)$

$$s(t) = \int v(t)\, dt = a_0 \cdot \int (t - 1 + \underbrace{e^{-t}}_{\text{Integral 312 mit } a = -1})\, dt = a_0 \left(\frac{1}{2} t^2 - t - e^{-t} + C_2 \right)$$

Aus der *Anfangsposition* $s(0) = 0$ bestimmen wir die noch unbekannte Konstante C_2:

$$s(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 (0 - 0 - 1 + C_2) = a_0 (-1 + C_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1$$

Das **Weg-Zeit-Gesetz** lautet somit:

$$s(t) = a_0 \left(\frac{1}{2} t^2 - t - e^{-t} + 1 \right) = a_0 \left(\frac{1}{2} t^2 - t + 1 - e^{-t} \right), \quad t \geq 0$$

C64

Die Geschwindigkeit v eines Massenpunktes genüge dem Zeitgesetz $v(t) = v_0 \cdot \mathrm{e}^{-kt}$ mit $v_0 > 0$, $k > 0$ und $t \geq 0$. Wie lautet das *Weg-Zeit-Gesetz* $s(t)$ für die Anfangswegmarke $s(0) = s_0$? Welcher *Gesamtweg* wird bis zum Stillstand $(t \to \infty)$ zurückgelegt?
Bestimmen Sie ferner den zeitlichen Verlauf der *Beschleunigung* $a = a(t)$.

Die Geschwindigkeit v nimmt im Laufe der Zeit *exponentiell* ab („Abklingfunktion“, siehe Bild C-35).

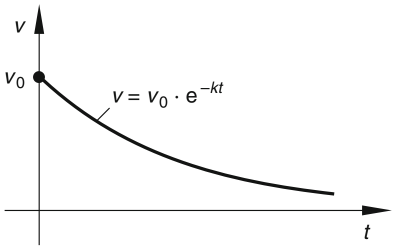


Bild C-35

Weg-Zeit-Gesetz $s = s(t)$

Durch *Integration* der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion erhalten wir das Weg-Zeit-Gesetz:

$$s(t) = \int v(t)\,dt = v_0 \cdot \underbrace{\int \mathrm{e}^{-kt}\,dt}_{\text{Integral 312 mit } a = -k} = v_0 \cdot \frac{\mathrm{e}^{-kt}}{-k} + C = -\frac{v_0}{k} \cdot \mathrm{e}^{-kt} + C$$

Die Integrationskonstante C bestimmen wir aus der bekannten *Anfangslage* $s(0) = s_0$:

$$s(0) = s_0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{v_0}{k} + C = s_0 \quad \Rightarrow \quad C = s_0 + \frac{v_0}{k}$$

Das *Weg-Zeit-Gesetz* lautet damit (siehe hierzu auch Bild C-36):

$$s(t) = -\frac{v_0}{k} \cdot \mathrm{e}^{-kt} + s_0 + \frac{v_0}{k} = \frac{v_0}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right) + s_0\,, \quad t \geq 0$$

Den bis zum Stillstand zurück gelegten Gesamtweg erhalten wir durch den Grenzübergang $t \to \infty$ (es dauert theoretisch unendlich lange, bis der Körper zur Ruhe kommt):

$$s(t = \infty) = \lim_{t \to \infty} s(t) = \lim_{t \to \infty} \left[\frac{v_0}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right) + s_0\right] = \frac{v_0}{k}(1 - 0) + s_0 = \frac{v_0}{k} + s_0$$

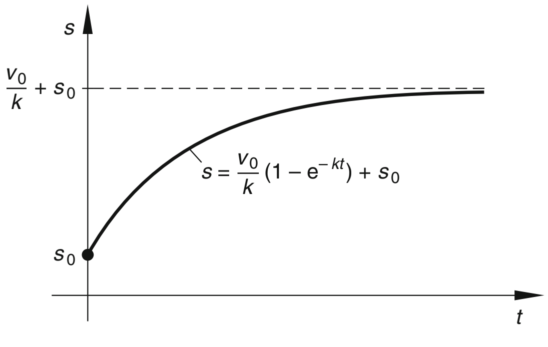


Bild C-36

Beschleunigung-Zeit-Gesetz $a = a(t)$

Die Beschleunigung a ist bekanntlich die 1. Ableitung der Geschwindigkeit v nach der Zeit t. Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir (Substitution $u = -kt$):

$$v(t) = v_0 \cdot \mathrm{e}^{-kt} = v_0 \cdot \mathrm{e}^{u} \quad \text{mit} \quad u = -kt \quad \Rightarrow \quad a(t) = \dot{v}(t) = v_0 \cdot \mathrm{e}^{u} \cdot (-k) = -k v_0 \cdot \mathrm{e}^{-kt}$$

C65

Welche *Arbeit* verrichtet die periodische ortsabhängige Kraft

$$F(s) = F_0\,[1 + \sin(\omega s)]$$

an einer Masse bei einer Verschiebung um eine Periodenlänge $p = 2\pi/\omega$?

Bild C-37 zeigt den Verlauf der Kraft in Abhängigkeit von der Ortskoordinate s.

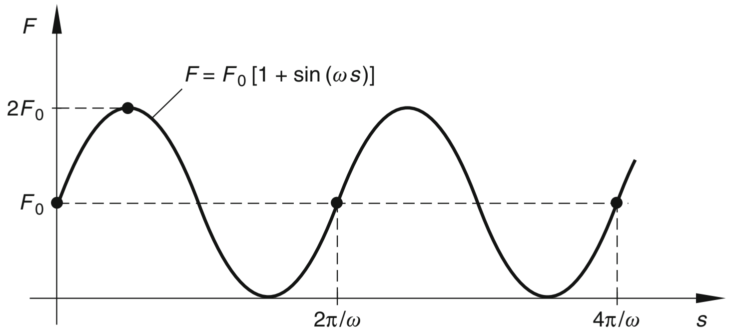


Bild C-37

Die Periode ist $p = 2\pi/\omega$. Für die Verschiebung wählen wir das Periodenintervall von $s = 0$ bis $s = p = 2\pi/\omega$. Die dabei verrichtete *Arbeit* beträgt dann:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\,ds = F_0 \cdot \int_0^{2\pi/\omega} [1 + \underbrace{\sin(\omega s)]\,ds}_{\text{Integral 204 mit } a = \omega} = F_0 \left[s - \frac{\cos(\omega s)}{\omega} \right]_0^{2\pi/\omega} =$$

$$= F_0 \left(\frac{2\pi}{\omega} - \frac{\cos(2\pi)}{\omega} - 0 + \frac{\cos 0}{\omega} \right) = F_0 \left(\frac{2\pi}{\omega} - \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega} \right) = F_0 \cdot \frac{2\pi}{\omega} = F_0 \cdot p$$

C66

Durch die Gleichung

$$v(t) = v_e \cdot \tanh\left(\frac{g}{v_e}\,t\right), \quad t \geq 0$$

wird die Zeitabhängigkeit der Fallgeschwindigkeit v beim freien Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes beschrieben. Wie lautet das *Weg-Zeit-Gesetz* $s(t)$ für die Anfangswegmarke $s(0) = 0$?
g: Erdbeschleunigung; v_e: Endgeschwindigkeit

Wegen $\dot{s} = v$ gilt (die Geschwindigkeit ist bekanntlich die 1. Ableitung des Weges nach der Zeit):

$$s(t) = \int v(t)\,dt = v_e \cdot \underbrace{\int \tanh\left(\frac{g}{v_e} \cdot t\right) dt}_{\text{Integral 387 mit } a = g/v_e} = v_e \cdot \frac{1}{g/v_e} \cdot \ln\left[\cosh\left(\frac{g}{v_e} \cdot t\right)\right] + C =$$

$$= \frac{v_e^2}{g} \cdot \ln\left[\cosh\left(\frac{g}{v_e} \cdot t\right)\right] + C$$

Die Integrationskonstante C bestimmen wir aus dem Anfangswert $s(0) = 0$:

$$s(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_e^2}{g} \cdot \ln \underbrace{(\cosh 0)}_{1} + C = \frac{v_e^2}{g} \cdot \underbrace{\ln 1}_{0} + C = 0 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

Der *Fallweg* s genügt somit dem folgenden Weg-Zeit-Gesetz:

$$s(t) = \frac{v_e^2}{g} \cdot \ln \left[\cosh \left(\frac{g}{v_e} \cdot t \right) \right], \quad t \geq 0$$

C67

Das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz einer Bewegung laute:

$$v(t) = \frac{30\,t^2}{100 + t^3}, \quad t \geq 0.$$

Bestimmen Sie das *Weg-Zeit-Gesetz* $s = s(t)$ für die Anfangswegmarke $s(0) = 0$.

Bild C-38 zeigt den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit $v = \dot{s}$.

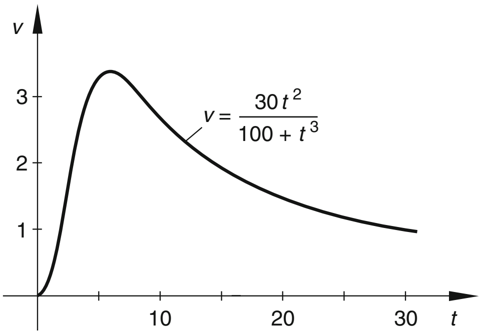


Bild C-38

Durch *Integration* erhalten wir das Weg-Zeit-Gesetz $s = s(t)$:

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int \dot{s}\,dt = 30 \cdot \int \frac{t^2}{100 + t^3}\,dt$$

Das Integral lässt sich leicht lösen mit Hilfe der folgenden *Substitution*:

$$u = 100 + t^3, \quad \frac{du}{dt} = 3\,t^2, \quad dt = \frac{du}{3\,t^2}$$

$$s(t) = 30 \cdot \int \frac{t^2}{100 + t^3}\,dt = 30 \cdot \int \frac{t^2}{u} \cdot \frac{du}{3\,t^2} =$$

$$= 30 \cdot \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{u}\,du = 10 \cdot \ln|u| + C = 10 \cdot \ln(100 + t^3) + C$$

Aus der *Anfangslage* berechnen wir die Integrationskonstante C:

$$s(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 10 \cdot \ln 100 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -10 \cdot \ln 100$$

Somit gilt:

$$s(t) = 10 \cdot \ln(100 + t^3) - 10 \cdot \ln 100 = 10\,[\ln(100 + t^3) - \ln 100\,] = 10 \cdot \ln \frac{100 + t^3}{100} =$$

$$= 10 \cdot \ln(1 + 0{,}01\,t^3), \quad t \geq 0$$

Rechenregel: $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$

C68

Ein Behälter in Form eines Rotationsparaboloids (Bild C-39) soll von einem Wasserreservoir $(y = 0)$ bis zur Höhe $y = H$ mit Wasser gefüllt werden. Welche *Arbeit* W ist dabei *mindestens* aufzuwenden?

Hinweis: Die *Mindestarbeit* entspricht der *Hubarbeit* $W = m\,g\,h$, die zu verrichten ist, um die Füllmenge m (als Massenpunkt betrachtet) in den Schwerpunkt S des (gefüllten) Behälters zu bringen.

g: Erdbeschleunigung; h: Höhe; ϱ: Dichte des Wassers

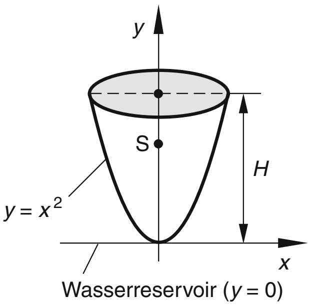


Bild C-39

Wir berechnen zunächst das *Volumen* $V = V_y$ und die *Masse* $m = \varrho V$ des gefüllten Behälters, dann die Lage des *Schwerpunktes* S (Schwerpunktskoordinate y_S) und schließlich die aufzuwendende *Mindestarbeit*.

Behältervolumen V und Füllmenge (Wassermenge) m

$$V = V_y = \pi \cdot \int_c^d x^2\,dy = \pi \cdot \int_0^H y\,dy = \pi \left[\frac{1}{2}\,y^2 \right]_0^H = \frac{1}{2}\,\pi H^2$$

Füllmenge (Wassermenge): $m = \varrho V = \dfrac{1}{2}\,\pi \varrho H^2$

Schwerpunktskoordinate y_S des Behälters

$$y_S = \frac{\pi}{V_y} \cdot \int_c^d y x^2\,dy = \frac{\pi}{\frac{1}{2}\,\pi H^2} \cdot \int_0^H y \cdot y\,dy = \frac{2}{H^2} \cdot \int_0^H y^2\,dy = \frac{2}{H^2} \cdot \left[\frac{1}{3}\,y^3 \right]_0^H = \frac{2}{H^2} \cdot \frac{1}{3}\,H^3 = \frac{2}{3}\,H$$

Schwerpunkt: $S = \left(0;\ \dfrac{2}{3}\,H;\ 0 \right)$

Mindestarbeit beim Füllen des Behälters

Die im Schwerpunkt des Behälters konzentrierte Füllmenge (Wassermenge) m wird vom Wasserreservoir aus um die Strecke $h = y_S$ angehoben (Bild C-40). Die dabei verrichtete Hubarbeit beträgt dann:

$$W = m\,g\,h = m\,g\,y_S = \frac{1}{2}\,\pi \varrho H^2 \cdot g \cdot \frac{2}{3}\,H = \frac{1}{3}\,\pi \varrho g H^3$$

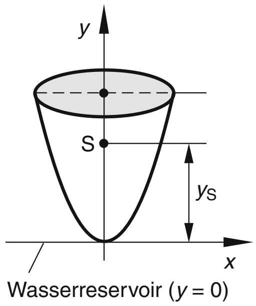


Bild C-40

D Taylor- und Fourier-Reihen

Hinweis für das gesamte Kapitel

Kürzen eines gemeinsamen Faktors wird durch *Grauunterlegung* gekennzeichnet.

1 Potenzreihenentwicklungen

1.1 Mac Laurinsche und Taylor-Reihen

Hinweise

(1) Alle Potenzreihen sollen mindestens bis zur 3. Potenz (einschließlich) entwickelt werden.

(2) Die Potenzreihe einer Funktion, die als Produkt zweier Funktionen darstellbar ist, lässt sich meist schneller durch *Multiplikation* der (als bekannt vorausgesetzten) Reihen der Faktorfunktionen gewinnen (sog. „Reihenmultiplikation"). Diese dürfen der **Formelsammlung** entnommen werden.

(3) **Lehrbuch:** Band 1, Kapitel VI.2 und 3
Formelsammlung: Kapitel VI.2 und 3

D1 $2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \ldots$
Welchen *Konvergenzbereich* besitzt diese Potenzreihe?

Das *Bildungsgesetz* für den Koeffizienten a_n der n-ten Potenz lautet: $a_n = n + 1$ (für $n = 1, 2, 3, \ldots$). Mit $a_n = n + 1$ und $a_{n+1} = n + 2$ erhalten wir für den *Konvergenzradius* r der Potenzreihe den folgenden Wert:

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{1} = 1$$

(alle Glieder im Zähler und Nenner des Bruches wurden dabei vor der Grenzwertberechnung durch n dividiert)

In den *Randpunkten* $x = -1$ und $x = 1$ ergeben sich folgende Zahlenreihen:

$\boxed{x = -1}$ $\quad - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + - \ldots$

$\boxed{x = 1}$ $\quad 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + - \ldots$

Die Glieder einer *konvergenten* Reihe müssen notwendigerweise eine *Nullfolge* bilden. Diese Bedingung ist in *beiden* Fällen *nicht* erfüllt, die Potenzreihe *divigiert* daher in *beiden* Randpunkten. *Konvergenzbereich* ist daher das *offene* Intervall $|x| < 1$.

L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Klausur- und Übungsaufgaben,*
DOI 10.1007/978-3-8348-9730-5_4,© Vieweg+Teubner Verlag |Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2010

D2 $$1 + \frac{x^1}{5 \cdot 2} + \frac{x^2}{5^2 \cdot 3} + \frac{x^3}{5^3 \cdot 4} + \frac{x^4}{5^4 \cdot 5} + \ldots$$

Bestimmen Sie den *Konvergenzbereich* dieser Potenzreihe.

Bildungsgesetz für die Koeffizienten: $a_n = \dfrac{1}{5^n (n+1)}$ (für $n = 0, 1, 2, \ldots$)

Mit $a_n = \dfrac{1}{5^n (n+1)}$ und $a_{n+1} = \dfrac{1}{5^{n+1} (n+2)}$ erhalten wir den folgenden *Konvergenzradius*:

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{1}{5^n (n+1)}}{\dfrac{1}{5^{n+1} (n+2)}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{5^n (n+1)} \cdot \frac{5^{n+1} (n+2)}{1} = \lim_{n \to \infty} \frac{5^{n+1} (n+2)}{5^n (n+1)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{5(n+2)}{n+1} = 5 \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{n+2}{n+1} = 5 \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \dfrac{2}{n}}{1 + \dfrac{1}{n}} = 5 \cdot \frac{1}{1} = 5 \cdot 1 = 5$$

Umformungen: Zähler mit dem *Kehrwert* des Nenners multiplizieren → Kürzen durch 5^n → Zähler und Nenner *gliedweise* durch n dividieren.

Wir untersuchen noch das Verhalten der Potenzreihe in den *Randpunkten* $x = -5$ und $x = 5$:

$\boxed{x = -5}$ $\quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots$ alternierende harmonische Reihe ⇒ *konvergent*

$\boxed{x = 5}$ $\quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ harmonische Reihe ⇒ *divergent*

Konvergenzbereich der Reihe: $-5 \le x < 5$

D3 Berechnen Sie den *Konvergenzradius* r der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2 - 1}}$.

Das *Bildungsgesetz* für den Koeffizienten a_n der n-ten Potenz lautet: $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}$ (für $n = 2, 3, 4, \ldots$)

Mit $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}$ und $a_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2 - 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}}$ erhalten wir für den *Konvergenzradius* r den folgenden Wert:

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{1} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{\sqrt{n^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{n^2 + 2n}{n^2 - 1}} = \sqrt{\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 2n}{n^2 - 1}} = \sqrt{\lim_{n \to \infty} \frac{1 + \dfrac{2}{n}}{1 - \dfrac{1}{n^2}}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = \sqrt{1} = 1$$

Umformungen: Zähler mit dem *Kehrwert* des Nenners multiplizieren → Rechenregel für Wurzeln: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ → Grenzwert darf *unter der Wurzel* gebildet werden → Vor der Grenzwertbildung Zähler und Nenner *gliedweise* durch n^2 dividieren.

D4

Welchen *Konvergenzbereich* besitzt die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$?

Das *Bildungsgesetz* für den Koeffizienten a_n der n-ten Potenz $(x-1)^n$ lautet: $a_n = \frac{1}{n!}$. Somit gilt $a_n = \frac{1}{n!}$ und $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$ und wir erhalten den folgenden Konvergenzradius:

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \to \infty} \frac{n!(n+1)}{n!} = \lim_{n \to \infty} (n+1) = \infty$$

Die Potenzreihe konvergiert daher *beständig*, d. h. für *jedes* reelle x.

Umformungen: Zunächst wird der Zähler mit dem *Kehrwert* des Nenners multipliziert, dann wird die *höhere* Fakultät $(n+1)!$ in das Produkt $(n+1)! = n!(n+1)$ zerlegt und schließlich der gemeinsame Faktor $n!$ *gekürzt* (siehe hierzu Bild D-1).

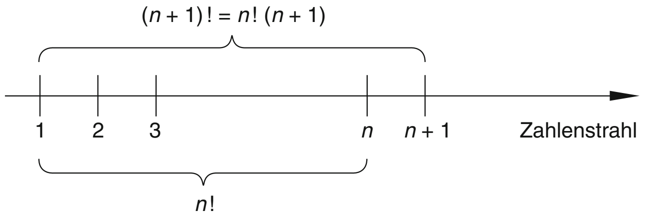


Bild D-1

D5

Entwickeln Sie durch *Reihenmultiplikation* die Funktion $f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x}}$ um die Stelle $x_0 = 0$ in eine *Potenzreihe* bis zum kubischen Glied.

Wir bringen die Funktion zunächst in die *Produktform* (Wurzel vorher in eine Potenz umwandeln):

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x}} = \frac{e^{-x}}{(1-x)^{1/2}} = e^{-x} \cdot (1-x)^{-1/2}$$

Aus der *Formelsammlung* entnehmen wir für die beiden Faktorfunktionen folgende Potenzreihenentwicklungen (*Mac Laurinsche Reihen* → FS: Kap. VI.3.4):

$$e^{-x} = 1 - \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + - \ldots = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + - \ldots \qquad (|x| < \infty)$$

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \ldots = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \ldots \qquad (|x| < 1)$$

Durch *gliedweises* Multiplizieren dieser Reihen erhalten wir die gewünschte Potenzreihenentwicklung der Ausgangsfunktion, wobei der Aufgabenstellung entsprechend nur Glieder bis zur 3. Potenz berücksichtigt werden. Die Potenzreihe beginnt wie folgt:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot (1 - x)^{-1/2} = \left(1 - x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 + - \ldots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} x^2 + \frac{5}{16} x^3 + \ldots\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} x^2 + \frac{5}{16} x^3 - x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{8} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^3 - \frac{1}{6} x^3 + \ldots =$$

$$= 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - 1\right)}_{-1/2} x + \underbrace{\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)}_{3/8} x^2 + \underbrace{\left(\frac{5}{16} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)}_{1/48} x^3 + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} x^2 + \frac{1}{48} x^3 + \ldots$$

Konvergenzbereich: $-1 < x < 1$

D6 Gesucht ist die *Mac Laurinsche Reihe* von $f(x) = (\mathrm{e}^{-x} - 1)^2$ bis zur 4. Potenz. Die Reihe soll

a) durch *Reihenmultiplikation*,

b) auf *direktem* Wege über die Ableitungen hergeleitet werden.

---

a) Die Funktion ist ein *Produkt* aus zwei *gleichen* Faktoren $\mathrm{e}^{-x} - 1$, deren Reihenentwicklung unter Verwendung der bekannten Reihe von e^{-x} (aus der *Formelsammlung* entnommen) wie folgt lautet:

$$\mathrm{e}^{-x} - 1 = \underbrace{\left(1 - \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots\right)}_{\text{Mac Laurinsche Reihe von } \mathrm{e}^{-x}} - 1 = -x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 - + \ldots$$

Durch *gliedweise* Multiplikation erhalten wir die gesuchte Reihenentwicklung um den Nullpunkt (es werden dabei nur Glieder bis einschließlich der 4. Potenz berücksichtigt):

$$f(x) = (\mathrm{e}^{-x} - 1)^2 = (\mathrm{e}^{-x} - 1) \cdot (\mathrm{e}^{-x} - 1) =$$

$$= \left(-x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 - + \ldots\right) \cdot \left(-x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 - + \ldots\right) =$$

$$= x^2 - \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{6} x^4 - \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{6} x^4 + \ldots =$$

$$= x^2 - x^3 + \underbrace{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)}_{7/12} x^4 + \ldots = x^2 - x^3 + \frac{7}{12} x^4 + \ldots$$

Konvergenzbereich: $|x| < \infty$

b) Wir benötigen die ersten vier Ableitungen, wobei wir jeweils in der angedeuteten Weise die *Kettenregel* verwenden:

$$f(x) = (\underbrace{\mathrm{e}^{-x} - 1}_{u})^2 = u^2 \quad \text{mit} \quad u = \mathrm{e}^{-x} - 1, \quad u' = -\mathrm{e}^{-x}$$

$$f'(x) = 2u \cdot u' = 2(\mathrm{e}^{-x} - 1)(-\mathrm{e}^{-x}) = 2(-\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x})$$

$$f''(x) = 2(2 \cdot \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x}), \quad f'''(x) = 2(-4 \cdot \mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x}), \quad f^{(4)}(x) = 2(8 \cdot \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x})$$

(Ableitungen der Summanden e^{-2x} und e^{-x} mit der *Kettenregel*, Substitutionen: $t = -2x$ bzw. $t = -x$)

An der Stelle $x_0 = 0$ gilt dann $(\mathrm{e}^0 = 1)$:

$$f(0) = (\mathrm{e}^0 - 1)^2 = 0, \quad f'(0) = 2(-\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0) = 0, \quad f''(0) = 2(2 \cdot \mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^0) = 2 \cdot 1 = 2,$$

$$f'''(0) = 2(-4 \cdot \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0) = 2 \cdot (-3) = -6, \quad f^{(4)}(0) = 2(8 \cdot \mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^0) = 2 \cdot 7 = 14$$

Damit erhalten wir die folgende *Mac Laurinsche Reihe* (in Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus a)):

$$f(x) = (\mathrm{e}^{-x} - 1)^2 = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \ldots =$$

$$= 0 + \frac{0}{1!}x^1 + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{-6}{3!}x^3 + \frac{14}{4!}x^4 + \ldots = x^2 - x^3 + \frac{7}{12}x^4 + \ldots \qquad (|x| < \infty)$$

D7

Leiten Sie durch *Reihenmultiplikation* die *Potenzreihenentwicklung* von $f(x) = \sqrt{1+x} \cdot \cos(2x)$ um den Nullpunkt her (bis zur 4. Potenz).

Aus der *Formelsammlung* entnehmen wir für die beiden Faktorfunktionen folgende Potenzreihenentwicklungen (die Reihe für $\cos(2x)$ erhalten wir dabei aus der Mac Laurinschen Reihe von $\cos u$ mit Hilfe der *Substitution* $u = 2x$):

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + - \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + - \ldots \qquad (|x| \le 1)$$

$$\cos(\underbrace{2x}_{u}) = \cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - + \ldots = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - + \ldots =$$

$$= 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - + \ldots \qquad (|x| < \infty)$$

Durch *gliedweise Multiplikation* der beiden Reihen erhält man die gesuchte Entwicklung:

$$f(x) = \sqrt{1+x} \cdot \cos(2x) = (1+x)^{1/2} \cdot \cos(2x) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + - \ldots\right) \cdot \left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - + \ldots\right) =$$

$$= 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{2}x - x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \underbrace{\left(-2 - \frac{1}{8}\right)}_{-17/8}x^2 + \underbrace{\left(-1 + \frac{1}{16}\right)}_{-15/16}x^3 + \underbrace{\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{5}{128}\right)}_{337/384}x^4 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{17}{8}x^2 - \frac{15}{16}x^3 + \frac{337}{384}x^4 + \ldots \qquad (|x| \le 1)$$

D8 Wie lautet die *Mac Laurinsche Reihe* von $f(x) = \ln(\cosh x)$ bis zum x^4-Glied?

Bildung aller benötigten Ableitungen

1. Ableitung *(Kettenregel):* $f(x) = \ln \underbrace{(\cosh x)}_{u} = \ln u \quad \text{mit} \quad u = \cosh x\,, \quad u' = \sinh x$

$$f'(x) = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{\cosh x} \cdot \sinh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x$$

2. Ableitung: $f''(x) = 1 - \tanh^2 x$

3. Ableitung *(Kettenregel):*

$$f''(x) = 1 - \tanh^2 x = 1 - \underbrace{(\tanh x)}_{u}{}^2 = 1 - u^2 \quad \text{mit} \quad u = \tanh x\,, \quad u' = 1 - \tanh^2 x$$

$$f'''(x) = 0 - 2u \cdot u' = -2 \cdot \tanh x \cdot (1 - \tanh^2 x) = -2 \cdot \tanh x + 2 \cdot \tanh^3 x$$

4. Ableitung *(Kettenregel):*

$$f'''(x) = -2 \cdot \tanh x + 2 \cdot \tanh^3 x = -2 \cdot \tanh x + 2\underbrace{(\tanh x)}_{u}{}^3 = -2 \cdot \tanh x + 2u^3 \quad \text{mit} \quad u = \tanh x$$

$$f^{(4)}(x) = -2(1 - \tanh^2 x) + 6u^2 \cdot u' = -2(1 - \tanh^2 x) + 6 \cdot \tanh^2 x \cdot (1 - \tanh^2 x) =$$

$$= (1 - \tanh^2 x)(-2 + 6 \cdot \tanh^2 x)$$

(der gemeinsame Faktor $1 - \tanh^2 x$ wurde ausgeklammert)

Ableitungswerte an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ (unter Berücksichtigung von $\tanh 0 = 0$):

$$f(0) = \ln(\cosh 0) = \ln 1 = 0\,, \quad f'(0) = \tanh 0 = 0\,, \quad f''(0) = 1 - \tanh^2 0 = 1\,,$$

$$f'''(0) = -2 \cdot \tanh 0 + 2 \cdot \tanh^3 0 = 0\,, \qquad f^{(4)}(0) = (1 - \tanh^2 0)(-2 + 6 \cdot \tanh^2 0) = 1 \cdot (-2) = -2$$

Mac Laurinsche Reihe von $f(x) = \ln(\cosh x)$

$$f(x) = \ln(\cosh x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \ldots =$$

$$= 0 + \frac{0}{1}x^1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{0}{6}x^3 + \frac{-2}{24}x^4 + \ldots = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \ldots \qquad (|x| < \infty)$$

D9 Bestimmen Sie die *Taylorsche-Reihe* von $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ um das Entwicklungszentrum $x_0 = 1$ bis zur 4. Potenz (einschließlich).

Wir bilden zunächst die benötigten *Ableitungen* bis zur 4. Ordnung:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}} = x^{-1/2}\,, \quad f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2}\,, \quad f''(x) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}x^{-5/2}\right) = \frac{3}{4} \cdot x^{-5/2}\,,$$

$$f'''(x) = \frac{3}{4}\left(-\frac{5}{2}\,x^{-7/2}\right) = -\frac{15}{8}\,x^{-7/2}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{15}{8}\left(-\frac{7}{2}\,x^{-9/2}\right) = \frac{105}{16}\,x^{-9/2}$$

Ableitungswerte an der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$:

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = -\frac{1}{2}, \quad f''(1) = \frac{3}{4}, \quad f'''(1) = -\frac{15}{8}, \quad f^{(4)}(1) = \frac{105}{16}$$

Taylor-Reihe um das Entwicklungszentrum $x_0 = 1$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{-1/2}{1}(x-1)^1 + \frac{3/4}{2}(x-1)^2 + \frac{-15/8}{6}(x-1)^3 + \frac{105/16}{24}(x-1)^4 + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(x-1)^1 + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{5}{16}(x-1)^3 + \frac{35}{128}(x-1)^4 + \ldots$$

Konvergenzbereich: $0 < x < 2$

D10

Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = 4^x$ um $x_0 = 2$ in eine *Taylorsche Reihe.*
Wie lautet das *Bildungsgesetz* für die Koeffizienten?

Ableitungen bis zur 3. Ordnung

$$f(x) = 4^x, \quad f'(x) = (\ln 4)\cdot 4^x, \quad f''(x) = (\ln 4)\cdot(\ln 4)\cdot 4^x = (\ln 4)^2\cdot 4^x,$$

$$f'''(x) = (\ln 4)^2\cdot(\ln 4)\cdot 4^x = (\ln 4)^3\cdot 4^x$$

Ableitungswerte an der Entwicklungsstelle $x_0 = 2$:

$$f(2) = 4^2 = 16, \quad f'(2) = (\ln 4)\cdot 4^2 = 16\,(\ln 4)^1, \quad f''(2) = (\ln 4)^2\cdot 4^2 = 16\,(\ln 4)^2,$$

$$f'''(2) = (\ln 4)^3\cdot 4^2 = 16\,(\ln 4)^3$$

Taylor-Reihe von $f(x) = 4^x$ um das Entwicklungszentrum $x_0 = 2$

$$f(x) = 4^x = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2)^1 + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \ldots =$$

$$= 16 + \frac{16\,(\ln 4)^1}{1!}(x-2)^1 + \frac{16\,(\ln 4)^2}{2!}(x-2)^2 + \frac{16\,(\ln 4)^3}{3!}(x-2)^3 + \ldots =$$

$$= 16\left(1 + \frac{(\ln 4)^1}{1!}(x-2)^1 + \frac{(\ln 4)^2}{2!}(x-2)^2 + \frac{(\ln 4)^3}{3!}(x-2)^3 + \ldots\right) \qquad (\,|x| < \infty)$$

Bildungsgesetz für die Koeffizienten:

$$a_n = 16\cdot\frac{(\ln 4)^n}{n!} \qquad (\text{für } n = 0, 1, 2, \ldots)$$

D11 Bestimmen Sie die *Taylor-Reihe* von $f(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)$ um die Stelle $x_0 = 1$.

Wir bringen die Funktion zunächst auf eine für das Differenzieren *günstigere* Form:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right) = \ln(1+x^2) - \ln x^2 = \ln(1+x^2) - 2\cdot\ln|x|$$

Rechenregeln: $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ und $\ln a^2 = 2\cdot\ln|a|$

1. Ableitung (der 1. Summand nach der *Kettenregel*):

$$f(x) = \ln\underbrace{(1+x^2)}_{u} - 2\cdot\ln|x| = \ln u - 2\cdot\ln|x| \quad \text{mit} \quad u = 1+x^2, \quad u' = 2x$$

$$f'(x) = \frac{1}{u}\cdot u' - 2\cdot\frac{1}{x} = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2}{x} = \frac{2x\cdot x - 2(1+x^2)}{(1+x^2)\,x} = \frac{2x^2 - 2 - 2x^2}{x+x^3} = \frac{-2}{x+x^3}$$

2. Ableitung (*Kettenregel*):

$$f'(x) = \frac{-2}{x+x^3} = -2\underbrace{(x+x^3)}_{u}{}^{-1} = -2u^{-1} \quad \text{mit} \quad u = x+x^3, \quad u' = 1+3x^2$$

$$f''(x) = -2(-u^{-2})\cdot u' = 2u^{-2}\cdot u' = \frac{2u'}{u^2} = \frac{2(1+3x^2)}{(x+x^3)^2} = \frac{2+6x^2}{(x+x^3)^2}$$

3. Ableitung (*Quotienten-* und *Kettenregel*):

$$f''(x) = \frac{2+6x^2}{(x+x^3)^2} = \frac{u}{v}$$

$$u = 2+6x^2, \quad v = \underbrace{(x+x^3)}_{t}{}^2 \quad \text{und} \quad u' = 12x, \quad v' = 2(x+x^3)(1+3x^2)$$

(Ableitung von v in der angedeuteten Weise mit der *Kettenregel*, Substitution $t = x+x^3$)

$$f'''(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{12x(x+x^3)^2 - 2(x+x^3)(1+3x^2)(2+6x^2)}{(x+x^3)^4} =$$

$$= \frac{(x+x^3)\,[12x(x+x^3) - 2(1+3x^2)\cdot 2(1+3x^2)]}{(x+x^3)\,(x+x^3)^3} = \frac{12x(x+x^3) - 4(1+3x^2)^2}{(x+x^3)^3}$$

Ableitungswerte an der Stelle $x_0 = 1$:

$$f(1) = \ln 2, \quad f'(1) = -1, \quad f''(1) = 2, \quad f'''(1) = -5$$

Die *Taylor-Reihe* um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ lautet damit:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1)^1 + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \ldots =$$

$$= \ln 2 + \frac{-1}{1}(x-1)^1 + \frac{2}{2}(x-1)^2 + \frac{-5}{6}(x-1)^3 + \ldots =$$

$$= \ln 2 - (x-1)^1 + (x-1)^2 - \frac{5}{6}(x-1)^3 + \ldots$$

Konvergenzbereich: $0 < x < 2$

D12 Die Funktion $f(x) = x \cdot \sin x$ ist um die Stelle $x_0 = \pi$ nach *Taylor* in eine *Potenzreihe* zu entwickeln.

Ableitungen bis zur 3. Ordnung

Wir verwenden jeweils in der angedeuteten Weise die *Produktregel.*

$$f(x) = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\sin x}_{v} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'v + v'u = 1 \cdot \sin x + (\cos x) \cdot x = \sin x + \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{v}$$

$$f''(x) = \cos x + u'v + v'u = \cos x + 1 \cdot \cos x + (-\sin x)x = 2 \cdot \cos x - \underbrace{x \cdot \sin x}_{f(x)}$$

$$f'''(x) = -2 \cdot \sin x - f'(x) = -2 \cdot \sin x - (\sin x + x \cdot \cos x) = -3 \cdot \sin x - x \cdot \cos x$$

Ableitungswerte an der Entwicklungsstelle $x_0 = \pi$:

$$f(\pi) = \pi \cdot \underbrace{\sin \pi}_{0} = 0, \quad f'(\pi) = \underbrace{\sin \pi}_{0} + \pi \cdot \underbrace{\cos \pi}_{-1} = -\pi, \quad f''(\pi) = 2 \cdot \underbrace{\cos \pi}_{-1} - \pi \cdot \underbrace{\sin \pi}_{0} = -2,$$

$$f'''(\pi) = -3 \cdot \underbrace{\sin \pi}_{0} - \pi \cdot \underbrace{\cos \pi}_{-1} = \pi$$

Taylor-Reihe von $f(x) = x \cdot \sin x$ um die Entwicklungsstelle $x_0 = \pi$

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot \sin x = f(\pi) + \frac{f'(\pi)}{1!}(x-\pi)^1 + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f'''(\pi)}{3!}(x-\pi)^3 + \ldots = \\ &= 0 + \frac{-\pi}{1}(x-\pi)^1 + \frac{-2}{2}(x-\pi)^2 + \frac{\pi}{6}(x-\pi)^3 + \ldots = \\ &= -\pi(x-\pi)^1 - (x-\pi)^2 + \frac{\pi}{6}(x-\pi)^3 + \ldots \end{aligned}$$

Konvergenzbereich: $|x| < \infty$

D13 Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ in eine *Mac Laurinsche Reihe* bis zur 5. Potenz.

Wir bringen die Funktion zunächst in eine für das Differenzieren *günstigere* Form:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) \qquad \left(\textit{Rechenregel:}\ \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b\right)$$

Ableitungen bis zur 5. Ordnung

Alle Ableitungen erhalten wir mit Hilfe der *Kettenregel* in der jeweils angedeuteten Weise:

$$f(x) = \ln\underbrace{(1+x)}_{u} - \ln\underbrace{(1-x)}_{v} = \ln u - \ln v \qquad (u = 1+x, \quad u' = 1, \quad v = 1-x, \quad v' = -1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{u} \cdot u' - \frac{1}{v} \cdot v' = \frac{1}{1+x} \cdot 1 - \frac{1}{1-x} \cdot (-1) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \underbrace{(1+x)}_{u}{}^{-1} + \underbrace{(1-x)}_{v}{}^{-1}$$

$$f''(x) = -u^{-2} \cdot u' - v^{-2} \cdot v' = -(1+x)^{-2} \cdot 1 - (1-x)^{-2} \cdot (-1) = -(\underbrace{1+x}_{u})^{-2} + (\underbrace{1-x}_{v})^{-2}$$

$$f'''(x) = 2u^{-3} \cdot u' - 2v^{-3} \cdot v' = 2(1+x)^{-3} \cdot 1 - 2(1-x)^{-3} \cdot (-1) = 2(\underbrace{1+x}_{u})^{-3} + 2(\underbrace{1-x}_{v})^{-3}$$

$$f^{(4)}(x) = -6u^{-4} \cdot u' - 6v^{-4} \cdot v' = -6(1+x)^{-4} \cdot 1 - 6(1-x)^{-4} \cdot (-1) =$$

$$= -6(\underbrace{1+x}_{u})^{-4} + 6(\underbrace{1-x}_{v})^{-4}$$

$$f^{(5)}(x) = 24u^{-5} \cdot u' - 24v^{-5} \cdot v' = 24(1+x)^{-5} \cdot 1 - 24(1-x)^{-5} \cdot (-1) =$$

$$= 24(1+x)^{-5} + 24(1-x)^{-5}$$

Ableitungswerte an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$:

$$f(0) = \ln 1 - \ln 1 = 0, \quad f'(0) = 1 + 1 = 2, \quad f''(0) = -1 + 1 = 0, \quad f'''(0) = 2 + 2 = 4,$$

$$f^{(4)}(0) = -6 + 6 = 0, \quad f^{(5)}(0) = 24 + 24 = 48$$

Mac Laurinsche Reihe von $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x^1 + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}\,x^5 + \ldots =$$

$$= 0 + \frac{2}{1}\,x^1 + \frac{0}{2}\,x^2 + \frac{4}{6}\,x^3 + \frac{0}{24}\,x^4 + \frac{48}{120}\,x^5 + \ldots =$$

$$= 2x + \frac{2}{3}\,x^3 + \frac{2}{5}\,x^5 + \ldots = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right)$$

Konvergenzbereich: $|x| < 1$

D14

Die Ableitung von $f(x) = \arctan x$ lautet bekanntlich $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Bestimmen Sie zunächst mit Hilfe der *Binomischen Reihe* (→ Formelsammlung) die Reihenentwicklung der Ableitung und daraus durch Integration die *Mac Laurinsche Reihe* von $\arctan x$ (Angabe der ersten vier Glieder).

Aus der *Formelsammlung* entnehmen wir die Mac Laurinsche Reihe von $\dfrac{1}{1+u} = (1+u)^{-1}$. Sie lautet:

$$\frac{1}{1+u} = (1+u)^{-1} = 1 - u + u^2 - u^3 + - \ldots \qquad (|u| < 1)$$

Mit der *Substitution* $u = x^2$ erhalten wir daraus die Potenzreihenentwicklung der Funktion $\dfrac{1}{1+x^2}$:

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \ldots \qquad (|x| < 1)$$

Diese Reihe ist zugleich die *1. Ableitung* von $\arctan x$. Durch *gliedweise Integration* der Potenzreihe erhalten wir daher die gesuchte Potenzreihenentwicklung der Arkustangensfunktion (wir ersetzen dabei die Variable x durch die Integrationsvariable t, um Missverständnisse zu vermeiden):

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + - \ldots)\,dt = \left[t - \frac{1}{3}\,t^3 + \frac{1}{5}\,t^5 - \frac{1}{7}\,t^7 + - \ldots\right]_0^x =$$

$$= \left(x - \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{5}\,x^5 - \frac{1}{7}\,x^7 + - \ldots\right) - (0) = x - \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{5}\,x^5 - \frac{1}{7}\,x^7 + - \ldots \qquad (|x| < 1)$$

D15 Wie lautet die *Mac Laurinsche Reihe* von $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^{ax})$ mit $a \in \mathbb{R}$?

Bildung aller Ableitungen bis zur 3. Ordnung

1. Ableitung (*Kettenregel* mit *zwei* Substitutionen)

$$f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^{ax}) = \ln v \quad \text{mit} \quad v = 1 + \mathrm{e}^{u} \quad \text{und} \quad u = ax$$

$$f'(x) = \frac{1}{v} \cdot \mathrm{e}^{u} \cdot a = \frac{a \cdot \mathrm{e}^{u}}{v} = \frac{a \cdot \mathrm{e}^{u}}{1 + \mathrm{e}^{u}} = \frac{a \cdot \mathrm{e}^{ax}}{1 + \mathrm{e}^{ax}}$$

(Zuerst $\ln v$ nach v, dann $v = 1 + \mathrm{e}^{u}$ nach u und schließlich $u = ax$ nach x differenzieren)

2. Ableitung (*Quotientenregel* in Verbindung mit der *Kettenregel*)

$$f'(x) = \frac{a \cdot \mathrm{e}^{ax}}{1 + \mathrm{e}^{ax}} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = a \cdot \mathrm{e}^{ax}, \quad v = 1 + \mathrm{e}^{ax} \quad \text{und} \quad u' = a^2 \cdot \mathrm{e}^{ax}, \quad v' = a \cdot \mathrm{e}^{ax}$$

(Ableitung von e^{ax} nach der *Kettenregel*, Substitution: $t = ax$)

$$f''(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{a^2 \cdot \mathrm{e}^{ax}(1 + \mathrm{e}^{ax}) - a \cdot \mathrm{e}^{ax} \cdot a \cdot \mathrm{e}^{ax}}{(1 + \mathrm{e}^{ax})^2} =$$

$$= \frac{a^2 \cdot \mathrm{e}^{ax} + a^2 \cdot \mathrm{e}^{2ax} - a^2 \cdot \mathrm{e}^{2ax}}{(1 + \mathrm{e}^{ax})^2} = \frac{a^2 \cdot \mathrm{e}^{ax}}{(1 + \mathrm{e}^{ax})^2}$$

3. Ableitung (*Quotienten-* und *Kettenregel*)

$$f''(x) = \frac{a^2 \cdot \mathrm{e}^{ax}}{(1 + \mathrm{e}^{ax})^2} = \frac{u}{v}$$

$$u = a^2 \cdot \mathrm{e}^{ax}, \quad v = (1 + \mathrm{e}^{ax})^2 \quad \text{und} \quad u' = a^3 \cdot \mathrm{e}^{ax}, \quad v' = 2(1 + \mathrm{e}^{ax}) \cdot a \cdot \mathrm{e}^{ax} = 2a(1 + \mathrm{e}^{ax}) \cdot \mathrm{e}^{ax}$$

(die Ableitung von $v = (1 + \mathrm{e}^{ax})^2$ erhält man nach der *Kettenregel*: $v = z^2$ mit $z = 1 + \mathrm{e}^{t}$, $t = ax$)

$$f'''(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{a^3 \cdot \mathrm{e}^{ax}(1 + \mathrm{e}^{ax})^2 - 2a(1 + \mathrm{e}^{ax}) \cdot \mathrm{e}^{ax} \cdot a^2 \cdot \mathrm{e}^{ax}}{(1 + \mathrm{e}^{ax})^4} =$$

$$= \frac{a^3 \cdot \mathrm{e}^{ax} \cdot (1 + \mathrm{e}^{ax})\,[(1 + \mathrm{e}^{ax}) - 2 \cdot \mathrm{e}^{ax}]}{(1 + \mathrm{e}^{ax})^3 \cdot (1 + \mathrm{e}^{ax})} = \frac{a^3 \cdot \mathrm{e}^{ax}(1 - \mathrm{e}^{ax})}{(1 + \mathrm{e}^{ax})^3}$$

Ableitungswerte an der Stelle $x_0 = 0$:

$$f(0) = \ln(1 + \mathrm{e}^{0}) = \ln(1 + 1) = \ln 2, \quad f'(0) = \frac{a \cdot \mathrm{e}^{0}}{1 + \mathrm{e}^{0}} = \frac{a \cdot 1}{1 + 1} = \frac{a}{2},$$

$$f''(0) = \frac{a^2 \cdot \mathrm{e}^{0}}{(1 + \mathrm{e}^{0})^2} = \frac{a^2 \cdot 1}{(1 + 1)^2} = \frac{a^2}{4}, \quad f'''(0) = \frac{a^3 \cdot \mathrm{e}^{0}(1 - \mathrm{e}^{0})}{(1 + \mathrm{e}^{0})^3} = \frac{a^3 \cdot 1(1 - 1)}{(1 + 1)^3} = 0$$

Mac Laurinsche Reihe von $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^{ax})$

$$f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^{ax}) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots =$$

$$= \ln 2 + \frac{a/2}{1}x^1 + \frac{a^2/4}{2}x^2 + \frac{0}{6}x^3 + \ldots = \ln 2 + \frac{a}{2}x + \frac{a^2}{8}x^2 + 0 \cdot x^3 + \ldots$$

Konvergenzbereich: $|x| < \infty$

D16

Leiten Sie aus der *geometrischen Reihe* $\frac{1}{1-x} = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \quad (|x| < 1)$ die *Mac Laurinsche Reihe* von $f(x) = (1-x)^{-3}$ her. Wie lautet das *Bildungsgesetz* für die Koeffizienten dieser Reihe?

Wir zeigen zunächst (mit Hilfe der *Kettenregel*), dass die Funktion $f(x) = (1-x)^{-3}$ bis auf einen *konstanten* Faktor genau die *2. Ableitung* von $y = \frac{1}{1-x}$ ist:

$$y = \frac{1}{1-x} = (\underbrace{1-x}_{u})^{-1} = u^{-1} \quad \text{mit} \quad u = 1-x, \quad u' = -1$$

$$y' = -u^{-2} \cdot u' = -(1-x)^{-2} \cdot (-1) = (\underbrace{1-x}_{u})^{-2} = u^{-2} \quad \text{mit} \quad u = 1-x, \quad u' = -1$$

$$y'' = -2u^{-3} \cdot u' = -2(1-x)^{-3} \cdot (-1) = 2\,\underbrace{(1-x)^{-3}}_{f(x)} = 2 \cdot f(x)$$

Daraus folgt (wie behauptet):

$$f(x) = (1-x)^{-3} = \frac{1}{2} \cdot y'' \quad \text{mit} \quad y = (1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x}$$

Die gesuchte Potenzreihe von $f(x) = (1-x)^{-3}$ erhalten wir daher, wenn wir die bekannte Potenzreihe von $y = (1-x)^{-1}$ 2-mal nacheinander *gliedweise* nach x differenzieren und den gefundenen Ausdruck dann in diese Gleichung einsetzen:

$$y = (1-x)^{-1} = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots$$

$$y' = 1 + 2x^1 + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} + (n+1)x^n + (n+2)x^{n+1} + \ldots$$

$$y'' = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x^1 + 4 \cdot 3x^2 + \ldots + n(n-1)x^{n-2} + (n+1)nx^{n-1} + (n+2)(n+1)x^n + \ldots$$

Somit gilt:

$$f(x) = (1-x)^{-3} = \frac{1}{2}\,y'' =$$

$$= \frac{1}{2}\,(\underbrace{2 \cdot 1}_{a_0} + \underbrace{3 \cdot 2}_{a_1}x^1 + \underbrace{4 \cdot 3}_{a_2}x^2 + \ldots + \underbrace{n(n-1)}_{a_{n-2}}x^{n-2} + \underbrace{(n+1)n}_{a_{n-1}}x^{n-1} + \underbrace{(n+2)(n+1)}_{a_n}x^n + \ldots)$$

Das **Bildungsgesetz** für die Koeffizienten lautet (bis auf den gemeinsamen Faktor 1/2):

$$a_n = (n+2)(n+1) \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Damit erhalten wir die folgende **Potenzreihenentwicklung** für $f(x) = (1-x)^{-3}$:

$$f(x) = (1-x)^{-3} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\,x^n$$

Die Reihe konvergiert wie die geometrische Reihe für $|x| < 1$.

1.2 Anwendungen

Dieser Abschnitt enthält ausschließlich *anwendungsorientierte* Aufgaben.

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel VI.3.3
Formelsammlung: Kapitel VI.3

D17

Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung eine *Näherungsparabel* der Funktion $f(x) = \ln \sqrt{\cos x}$ in der Umgebung der Stelle $x_0 = 0$.

Wir entwickeln die Funktion in eine *Mac Laurinsche Reihe*, brechen diese nach dem *quadratischen* Glied ab und erhalten eine Näherung in Form einer *Parabel*:

$$f(x) = \ln \sqrt{\cos x} \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x^1 + \frac{f''(0)}{2!} x^2$$

Ableitungen 1. und 2. Ordnung

Die 1. Ableitung erhalten wir mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$f(x) = \ln \sqrt{\cos x} = \ln (\cos x)^{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \ln (\underbrace{\cos x}_{u}) = \frac{1}{2} \cdot \ln u \quad \text{mit} \quad u = \cos x, \quad u' = -\sin x$$

Rechenregel: $\ln a^n = n \cdot \ln a$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{1}{2} \cdot \tan x$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} (1 + \tan^2 x)$$

Ableitungswerte an der Stelle $x_0 = 0$:

$$f(0) = \ln \sqrt{\cos 0} = \ln 1 = 0, \quad f'(0) = -\frac{1}{2} \cdot \tan 0 = 0, \quad f''(0) = -\frac{1}{2} (1 + \tan^2 0) = -\frac{1}{2}$$

Näherungsparabel (in der Umgebung von $x_0 = 0$)

$$f(x) = \ln \sqrt{\cos x} \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x^1 + \frac{f''(0)}{2!} x^2 = 0 + \frac{0}{1} x^1 + \frac{-1/2}{2} x^2 = -\frac{1}{4} x^2$$

Bild D-2 zeigt den Verlauf der Näherungsparabel.

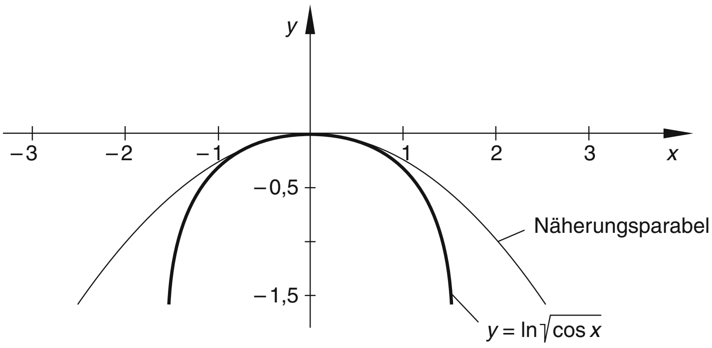


Bild D-2

D18

Die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1 - \sin x}$ soll in der Umgebung der Stelle $x_0 = 0$ durch eine *Parabel* ersetzt werden. Welchen *Näherungswert* liefert diese Parabel an der Stelle $x = 0{,}2$?

Lösungsweg: $f(x)$ wird nach *Mac Laurin* in eine Potenzreihe entwickelt, die Reihe dann nach dem *quadratischen* Glied abgebrochen.

Ableitungen 1. und 2. Ordnung

1. Ableitung (Kettenregel):

$$f(x) = \frac{1}{1 - \sin x} = (\underbrace{1 - \sin x}_{u})^{-1} = u^{-1} \quad \text{mit} \quad u = 1 - \sin x\,, \quad u' = -\cos x$$

$$f'(x) = -1\,u^{-2} \cdot u' = -(1 - \sin x)^{-2} \cdot (-\cos x) = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}$$

2. Ableitung (Quotienten- und Kettenregel):

$$f'(x) = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2} = \frac{u}{v}$$

$$u = \cos x\,, \quad v = (1 - \sin x)^2 \quad \text{und} \quad u' = -\sin x\,, \quad v' = -2\,(1 - \sin x) \cdot \cos x$$

(v wurde nach der *Kettenregel* differenziert, Substitution: $t = 1 - \sin x$)

$$f''(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{-\sin x \cdot (1 - \sin x)^2 + [2\,(1 - \sin x) \cdot \cos x] \cdot \cos x}{(1 - \sin x)^4} =$$

$$= \frac{(1 - \sin x)\,[-\sin x \cdot (1 - \sin x) + 2 \cdot \cos^2 x]}{(1 - \sin x)\,(1 - \sin x)^3} = \frac{-\sin x \cdot (1 - \sin x) + 2 \cdot \cos^2 x}{(1 - \sin x)^3}$$

Ableitungswerte an der Stelle $x_0 = 0$ (unter Berücksichtigung von $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$):

$$f(0) = \frac{1}{1 - \sin 0} = 1\,, \quad f'(0) = \frac{\cos 0}{(1 - \sin 0)^2} = 1\,, \quad f''(0) = \frac{-\sin 0 \cdot (1 - \sin 0) + 2 \cdot \cos^2 0}{(1 - \sin 0)^3} = 2$$

Näherungsparabel in der Umgebung von $x_0 = 0$ (siehe Bild D-3)

$$f(x) = \frac{1}{1 - \sin x} \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x^1 + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 = 1 + \frac{1}{1}\,x^1 + \frac{2}{2}\,x^2 = 1 + x + x^2$$

Exakter Wert an der Stelle $x = 0{,}2$: $\quad f(0{,}2) = \dfrac{1}{1 - \sin 0{,}2} = 1{,}2479$

Näherungswert an der Stelle $x = 0{,}2$: $\quad f(0{,}2) \approx 1 + 0{,}2 + 0{,}2^2 = 1{,}24$

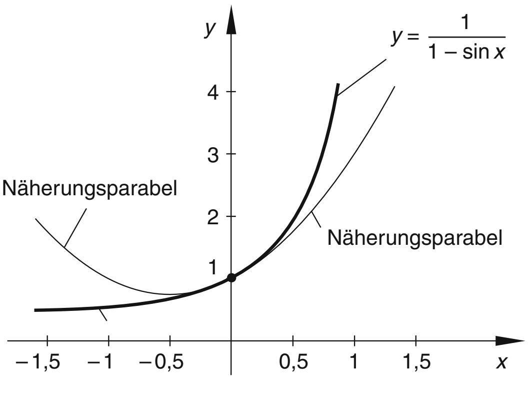


Bild D-3

D19

Bestimmen Sie durch Reihenentwicklung eine *Näherungsparabel* der Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{x} \cdot \cos(x/2)$ für die Stelle $x_0 = 0$. Die Reihenentwicklung soll

a) auf *direktem* Wege über die Ableitungen,

b) durch *Reihenmultiplikation* gewonnen werden.

---

a) Wir entwickeln $f(x)$ nach *Mac Laurin* in eine Potenzreihe und brechen diese nach dem *quadratischen* Glied ab. Zunächst aber bestimmen wir die dabei benötigten Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$.

1. Ableitung (Produkt- und Kettenregel)

$$f(x) = \underbrace{\mathrm{e}^{x}}_{u} \cdot \underbrace{\cos(x/2)}_{v} = u\,v \quad \text{mit} \quad u = \mathrm{e}^{x}, \quad v = \cos(x/2) \quad \text{und} \quad u' = \mathrm{e}^{x}, \quad v' = -\frac{1}{2} \cdot \sin(x/2)$$

(v wurde nach der *Kettenregel* differenziert, Substitution: $t = x/2$)

$$f'(x) = u'v + v'u = \mathrm{e}^{x} \cdot \cos(x/2) - \frac{1}{2} \cdot \sin(x/2) \cdot \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x} \left(\cos(x/2) - \frac{1}{2} \cdot \sin(x/2) \right)$$

2. Ableitung (Produkt- und Kettenregel)

$$f'(x) = \underbrace{\mathrm{e}^{x}}_{u} \underbrace{\left(\cos(x/2) - \frac{1}{2} \cdot \sin(x/2) \right)}_{v} = u\,v$$

$$u = \mathrm{e}^{x}, \quad v = \cos(x/2) - \frac{1}{2} \cdot \sin(x/2) \quad \text{und} \quad u' = \mathrm{e}^{x}, \quad v' = -\frac{1}{2} \cdot \sin(x/2) - \frac{1}{4} \cdot \cos(x/2)$$

(die beiden Summanden in v wurden nach der *Kettenregel* differenziert, Substitution: $t = x/2$)

$$f''(x) = u'v + v'u = \mathrm{e}^{x} \cdot \left(\cos(x/2) - \frac{1}{2} \cdot \sin(x/2) \right) + \left(-\frac{1}{2} \cdot \sin(x/2) - \frac{1}{4} \cdot \cos(x/2) \right) \cdot \mathrm{e}^{x} =$$

$$= \mathrm{e}^{x} \left(\cos(x/2) - \frac{1}{2} \cdot \sin(x/2) - \frac{1}{2} \cdot \sin(x/2) - \frac{1}{4} \cdot \cos(x/2) \right) = \mathrm{e}^{x} \left(\frac{3}{4} \cdot \cos(x/2) - \sin(x/2) \right)$$

Ableitungswerte an der Stelle $x_0 = 0$ (unter Berücksichtigung von $\mathrm{e}^{0} = 1$, $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$):

$$f(0) = \mathrm{e}^{0} \cdot \cos 0 = 1, \quad f'(0) = \mathrm{e}^{0} \left(\cos 0 - \frac{1}{2} \cdot \sin 0 \right) = 1, \quad f''(0) = \mathrm{e}^{0} \left(\frac{3}{4} \cdot \cos 0 - \sin 0 \right) = \frac{3}{4}$$

Näherungsparabel in der Umgebung von $x_0 = 0$

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \cdot \cos(x/2) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\, x^{1} + \frac{f''(0)}{2!}\, x^{2} = 1 + \frac{1}{1}\, x^{1} + \frac{3/4}{2}\, x^{2} = 1 + x + \frac{3}{8}\, x^{2}$$

b) Aus der *Formelsammlung* entnehmen wir die folgenden *Mac Laurinschen Reihen*:

$$\mathrm{e}^{x} = 1 + \frac{x^{1}}{1!} + \frac{x^{2}}{2!} + \ldots = 1 + x + \frac{1}{2}\, x^{2} + \ldots \qquad \text{und} \qquad \cos z = 1 - \frac{z^{2}}{2!} + - \ldots$$

Die Kosinusreihe geht durch die *Substitution* $z = x/2$ über in:

$$\cos(x/2) = 1 - \frac{(x/2)^{2}}{2!} + - \ldots = 1 - \frac{1}{8}\, x^{2} + - \ldots$$

Reihenmultiplikation liefert dann das gewünschte Ergebnis:

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \cdot \cos(x/2) = \left(1 + x + \frac{1}{2}\, x^{2} + \ldots \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\, x^{2} + - \ldots \right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{8}\, x^{2} + x + \frac{1}{2}\, x^{2} + \ldots = 1 + x + \frac{3}{8}\, x^{2} + \ldots \qquad (|x| < \infty)$$

Näherungsparabel: $f(x) = \mathrm{e}^{x} \cdot \cos(x/2) \approx 1 + x + \frac{3}{8}\, x^{2}$

D20

Die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^3}}$ soll in der Umgebung von $x_0 = 0$ durch ein *Polynom 6. Grades* ersetzt werden. Welchen *Näherungswert* liefert diese Näherungsfunktion an der Stelle $x = 0{,}2$? Wie lässt sich der *Fehler* (größenordnungsmäßig) abschätzen?

Hinweis: Die benötigte Potenzreihenentwicklung der Funktion lässt sich aus der *Binomischen Reihe* (→ Formelsammlung) leicht herleiten.

Wir benötigen für die Herleitung der Näherungsfunktion (Polynomfunktion 6. Grades) die *Mac Laurinsche Reihe* der vorgegebenen Funktion. Diese lässt sich mit Hilfe der *Substitution* $u = x^3$ aus der folgenden (als bekannt vorausgesetzten und der Formelsammlung entnommenen) *Binomischen Reihe* gewinnen:

$$\frac{1}{\sqrt{1-u}} = \frac{1}{(1-u)^{1/2}} = (1-u)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\,u + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,u^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,u^3 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\,u + \frac{3}{8}\,u^2 + \frac{5}{16}\,u^3 + \ldots \qquad (|u| < 1)$$

(das kubische Glied benötigen wir für die Fehlerabschätzung!)

Die Substitution $u = x^3$ führt zu der *Mac Laurinschen Reihe* der Ausgangsfunktion:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^3}} = 1 + \frac{1}{2}\,(x^3)^1 + \frac{3}{8}\,(x^3)^2 + \frac{5}{16}\,(x^3)^3 + \ldots = \underbrace{1 + \frac{1}{2}\,x^3 + \frac{3}{8}\,x^6}_{\text{Näherungsfunktion}} + \underbrace{\frac{5}{16}\,x^9}_{\text{Fehler}} + \ldots$$

Näherungsfunktion: $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\,x^3 + \dfrac{3}{8}\,x^6$ (in der Umgebung von $x_0 = 0$)

Das erste in der Reihenentwicklung weggelassene Glied bestimmt dabei die *Größenordnung* des Fehlers. An der Stelle $x = 0{,}2$ erhalten wir:

Näherungswert: $f(0{,}2) \approx 1 + \dfrac{1}{2}\cdot 0{,}2^3 + \dfrac{3}{8}\cdot 0{,}2^6 = 1{,}004\,024$

Fehler: $\approx \dfrac{5}{16}\cdot 0{,}2^9 = 1{,}6\cdot 10^{-7}$

Exakter Wert: $f(0{,}2) = \dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}2^3}} = 1{,}004\,024\,161$

Bild D-4 zeigt die grafische Lösung (Schnittpunkte der Kurven $y = \mathrm{e}^x$ und $y = \sinh x + 3$).

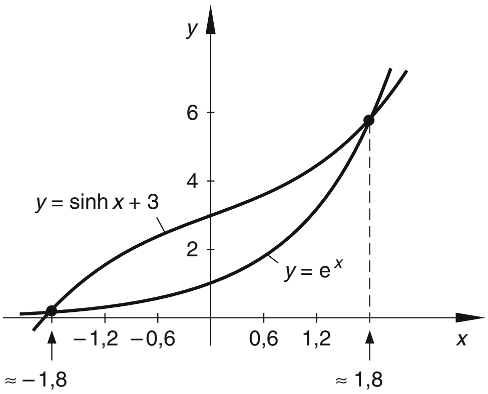


Bild D-4

D21

Die Funktion $f(x) = (1 + \mathrm{e}^{x})^{2}$ soll in der Umgebung von $x_0 = 0$ durch eine *Polynomfunktion 3. Grades* angenähert werden. Welchen *Näherungswert* erhält man an der Stelle $x = 0{,}1$ im Vergleich zum *exakten* Funktionswert?

Wir entwickeln die Funktion um die Stelle $x_0 = 0$ in eine Potenzreihe (*Mac Laurinsche Reihe*) und brechen diese nach dem *kubischen* Glied ab. Zunächst aber bilden wir die benötigten *Ableitungen* bis einschließlich 3. Ordnung:

$$f(x) = (\underbrace{1 + \mathrm{e}^{x}}_{u})^{2} = u^{2} \quad \text{mit} \quad u = 1 + \mathrm{e}^{x}, \quad u' = \mathrm{e}^{x}$$

$$f'(x) = 2u \cdot u' = 2(1 + \mathrm{e}^{x}) \cdot \mathrm{e}^{x} = 2(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{2x}) \qquad \text{(Kettenregel!)}$$

$$f''(x) = 2(\mathrm{e}^{x} + 2 \cdot \mathrm{e}^{2x}), \quad f'''(x) = 2(\mathrm{e}^{x} + 4 \cdot \mathrm{e}^{2x})$$

(die Ableitung von e^{2x} erfolgte nach der *Kettenregel*, Substitution: $t = 2x$)

Ableitungswerte an der Stelle $x_0 = 0$ (unter Berücksichtigung von $\mathrm{e}^{0} = 1$):

$$f(0) = (1 + 1)^{2} = 4, \quad f'(0) = 2(1 + 1) = 4, \quad f''(0) = 2(1 + 2) = 6, \quad f'''(0) = 2(1 + 4) = 10$$

Näherungspolynom 3. Grades in der Umgebung der Stelle $x_0 = 0$

$$f(x) = (1 + \mathrm{e}^{x})^{2} \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x^{1} + \frac{f''(0)}{2!}\,x^{2} + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^{3} =$$

$$= 4 + \frac{4}{1}\,x^{1} + \frac{6}{2}\,x^{2} + \frac{10}{6}\,x^{3} = 4 + 4x + 3x^{2} + \frac{5}{3}\,x^{3}$$

Exakter Wert an der Stelle $x = 0{,}1$: $f(0{,}1) = (1 + \mathrm{e}^{0{,}1})^{2} = 4{,}43174$

Näherungswert an der Stelle $x = 0{,}1$: $f(0{,}1) \approx 4 + 0{,}4 + 0{,}03 + 0{,}00166 = 4{,}43166$

D22

Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \dfrac{\cos(2x)}{(1 - x)^{2}}$ das *Mac Laurinsche Näherungspolynom 4. Grades.* Die Potenzreihenentwicklung soll dabei durch *Reihenmultiplikation* erfolgen.

Wir schreiben zunächst die Funktion als *Produkt*:

$$f(x) = \frac{\cos(2x)}{(1 - x)^{2}} = \cos(2x) \cdot (1 - x)^{-2}$$

Aus der *Formelsammlung* entnehmen wir die *Mac Laurinschen Reihen* von $\cos u$ und $(1 - x)^{-2}$, wobei wir in der Kosinusreihe u durch $2x$ *substituieren*:

$$\cos u = 1 - \frac{u^{2}}{2!} + \frac{u^{4}}{4!} - + \ldots = 1 - \frac{u^{2}}{2} + \frac{u^{4}}{24} - + \ldots \quad \Rightarrow \quad \text{(Substitution } u = 2x\text{)}$$

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^{2}}{2} + \frac{(2x)^{4}}{24} - + \ldots = 1 - 2x^{2} + \frac{2}{3}\,x^{4} - + \ldots \qquad (|x| < \infty)$$

$$(1 - x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^{2} + 4x^{3} + 5x^{4} + \ldots \qquad (|x| < 1)$$

Durch *Reihenmultiplikation* folgt dann (es werden nur Glieder bis einschließlich x^4 berücksichtigt):

$$f(x) = \frac{\cos(2x)}{(1-x)^2} = \cos(2x) \cdot (1-x)^{-2} =$$

$$= \left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - + \ldots\right) \cdot (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots) =$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 - 2x^2 - 4x^3 - 6x^4 + \frac{2}{3}x^4 + \ldots =$$

$$= 1 + 2x + x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \ldots \qquad (|x| < 1)$$

Näherungspolynom 4. Grades:

$$f(x) = \frac{\cos(2x)}{(1-x)^2} \approx 1 + 2x + x^2 - \frac{1}{3}x^4 \quad \text{(in der Umgebung von } x_0 = 0)$$

D23

Gegeben ist die Kurve mit der Gleichung

$$y = a\left[x - b\left(1 - \mathrm{e}^{-x/b}\right)\right] \qquad (a, b\text{: reelle Konstanten})$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung die *Näherungsparabel* dieser Kurve in der Umgebung von $x_0 = 0$.

Hinweis: Die Potenzreihenentwicklung lässt sich aus der bekannten Mac Laurinschen Reihe der e-Funktion gewinnen.

Wir gehen von der aus der *Formelsammlung* entnommenen *Mac Laurinschen Reihe* von e^u aus, ersetzen dort u durch $-x/b$, brechen dann die Entwicklung nach dem *quadratischen* Glied ab und setzen schließlich den gefundenen Ausdruck in die vorgegebene Funktion ein:

$$\mathrm{e}^u = 1 + \frac{u^1}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \ldots \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-x/b} = 1 - \frac{x}{b} + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{b}\right)^2 + \ldots = 1 - \frac{x}{b} + \frac{x^2}{2b^2} - + \ldots$$

$$y = a\left[x - b\left(1 - \mathrm{e}^{-x/b}\right)\right] = a\left[x - b\left(1 - 1 + \frac{x}{b} - \frac{x^2}{2b^2} + - \ldots\right)\right] = a\left[x - b\left(\frac{x}{b} - \frac{x^2}{2b^2} + - \ldots\right)\right] =$$

$$= a\left(x - x + \frac{x^2}{2b} - + \ldots\right) = a\left(\frac{x^2}{2b} - + \ldots\right) = \frac{a}{2b}x^2 - + \ldots \qquad (|x| < \infty)$$

Näherungsparabel: $y = \frac{a}{2b}x^2$ (in der Umgebung von $x = 0$; siehe Bild D-5)

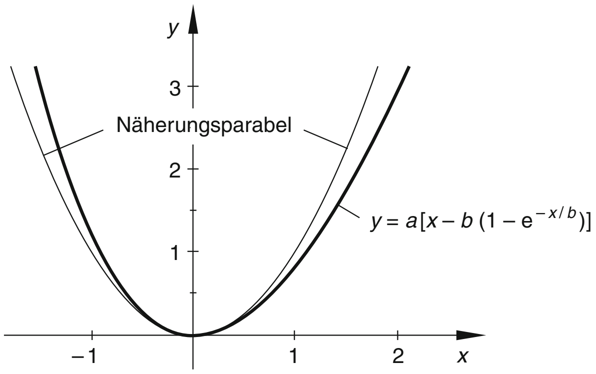


Bild D-5

D24

Durch die Gleichung

$$I(t) = \frac{U}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right), \quad t \geq 0$$

wird die zeitliche Abhängigkeit der Stromstärke I in einem *RL*-Stromkreis beschrieben. *Linearisieren* Sie diese Funktion für $t_0 = 0$.

(R: Ohmscher Widerstand; U: angelegte Spannung; L: Induktivität; t: Zeit)

In der als bekannt vorausgesetzten Mac Laurinschen Reihe von e^x (→ Formelsammlung) substitutieren wir $x = -\frac{R}{L}t$, brechen die Reihe nach dem *linearen* Glied ab und ersetzen die Exponentialfunktion durch diesen linearen Ausdruck:

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \ldots = 1 + x + \ldots \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} = 1 - \frac{R}{L}t + - \ldots \approx 1 - \frac{R}{L}t$$

$$I = \frac{U}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right) \approx \frac{U}{R}\left(1 - \left(1 - \frac{R}{L}t\right)\right) = \frac{U}{R}\left(1 - 1 + \frac{R}{L}t\right) = \frac{U}{R}\cdot\frac{R}{L}t = \frac{U}{L}\cdot t$$

Linearisierte Funktion: $I \approx \frac{U}{L}\cdot t$ (für *kleine* Zeitwerte $t \geq 0$)

Anmerkung: Die „Sättigungsfunktion" wurde durch die *Tangente* in $t = 0$ ersetzt (siehe Bild D-6):

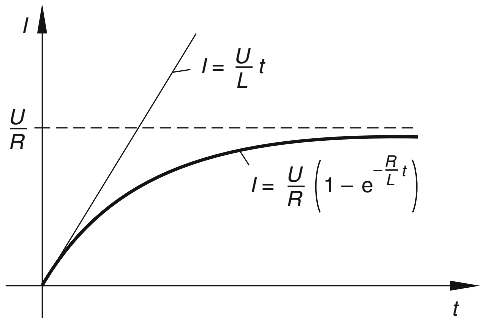


Bild D-6

D25

Bestimmen Sie mit Hilfe der *Potenzreihenentwicklung* eine *Näherungsparabel* für die Kosinusfunktion in der Umgebung der Stelle $x_0 = \pi$.

Die *Näherungsparabel* erhalten wir, indem wir die Kosinusfunktion zunächst um die Stelle $x_0 = \pi$ in eine *Taylor-Reihe* entwickeln und diese dann nach dem *quadratischen* Glied abbrechen. Mit

$$f(x) = \cos x, \quad f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x$$

und somit

$$f(\pi) = \cos\pi = -1, \quad f'(\pi) = -\sin\pi = 0, \quad f''(\pi) = -\cos\pi = 1$$

folgt dann:

$$f(x) = \cos x = f(\pi) + \frac{f'(\pi)}{1!}(x - \pi)^1 + \frac{f''(\pi)}{2!}(x - \pi)^2 + \ldots =$$

$$= -1 + \frac{0}{1}(x - \pi)^1 + \frac{1}{2}(x - \pi)^2 + \ldots = -1 + \frac{1}{2}(x - \pi)^2 + \ldots \qquad (|x| < \infty)$$

Näherungsparabel (siehe Bild D-7):

$$y = -1 + \frac{1}{2}\,(x - \pi)^2$$

(in der Umgebung von $x_0 = \pi$)

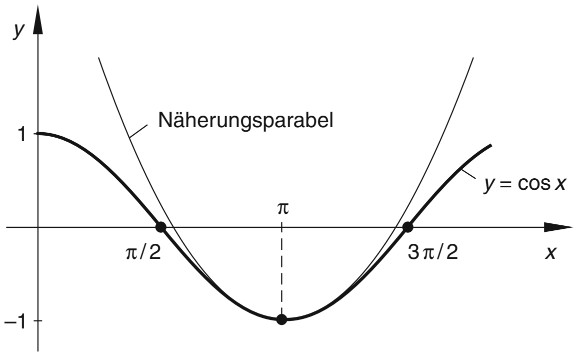


Bild D-7

D26

Lösen Sie die Gleichung $\mathrm{e}^x = \sinh x + 3$ näherungsweise mit Hilfe der *Potenzreihenentwicklung.*
Hinweis: Verwenden Sie die Mac Laurinschen Reihen von e^x und $\sinh x$ und brechen Sie diese nach der 5. Potenz ab.

Aus der *Formelsammlung* entnehmen wir die folgenden beständig konvergierenden Potenzreihen:

$$\sinh x = \frac{x^1}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = x + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5 + \ldots$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{24}\,x^4 + \frac{1}{120}\,x^5 + \ldots$$

Mit den nach der 5. Potenz abgebrochenen Reihen erhält man eine leicht lösbare *Näherungsgleichung*:

$$1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{24}\,x^4 + \frac{1}{120}\,x^5 = x + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5 + 3 \quad \Rightarrow$$

$$1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{24}\,x^4 + \frac{1}{2}\,x^2 - 2 = 0 \;\Big|\; \cdot 24 \quad \Rightarrow \quad x^4 + 12\,x^2 - 48 = 0$$

Diese *bi-quadratische* Gleichung wird durch die *Substitution* $u = x^2$ wie folgt gelöst:

$$u^2 + 12\,u - 48 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{1/2} = -6\,\sqrt{36 + 48} = -6\,\sqrt{84} = -6 \pm 9{,}16515 \quad \Rightarrow$$

$$u_1 = 3{,}16515\,, \quad u_2 = -15{,}16515 < 0 \qquad \text{(dieser Wert scheidet aus)}$$

Rücksubstitution liefert aus dem *positiven* Wert u_1 *zwei* Lösungen:

$$x^2 = u_1 = 3{,}16515 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm\sqrt{3{,}16515} = \pm\,1{,}779$$

Anmerkung: Die Gleichung lässt sich unter Verwendung der Definitionsformeln für die Hyperbelfunktionen $\sinh x$ und $\cosh x$ auch wie folgt *exakt* lösen (→ FS: Kap. III.11.1):

$$\mathrm{e}^x = \sinh x + 3 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^x = \frac{1}{2}\,(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) + 3 = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{-x} + 3 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^{-x} = 3 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{2}\,(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})}_{\cosh x} = 3 \quad \Rightarrow \quad \cosh x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arcosh} 3 = 1{,}763$$

D27

Welche *Näherungsformeln* erhält man für den Ausdruck $\dfrac{1}{\sqrt{1 \pm x^2}}$ für $|x| \ll 1$ durch Reihenentwicklung und Abbruch nach dem 1. bzw. 2. *nichtkonstanten* Glied?

Wir gehen von der bekannten *Binomischen Reihe* für $(1 \pm u)^{-1/2}$ aus (→ Formelsammlung):

$$(1 \pm u)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}\,u + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,u^2 \mp \ldots = 1 \mp \frac{1}{2}\,u + \frac{3}{8}\,u^2 \mp \ldots \qquad (|u| < 1)$$

Durch die *Substitution* $u = x^2$ erhalten wir hieraus die *Mac Laurinsche Reihe* unserer Ausgangsfunktion:

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x^2}} = \frac{1}{(1 \pm x^2)^{1/2}} = (1 \pm x^2)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}\,(x^2)^1 + \frac{3}{8}\,(x^2)^2 \mp \ldots =$$

$$= 1 \mp \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{3}{8}\,x^4 \mp \ldots \qquad (|x| < 1)$$

Durch Abbruch nach dem 1. bzw. 2. *nichtkonstanten* Glied erhalten wir die gesuchten Näherungsformeln. Sie lauten wie folgt $(\,|x| \ll 1)$:

1. Näherung: $(1 \pm x^2)^{-1/2} \approx 1 \mp \dfrac{1}{2}\,x^2$

2. Näherung: $(1 \pm x^2)^{-1/2} \approx 1 \mp \dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{3}{8}\,x^4$

D28

Die Masse m eines Elektrons nimmt nach der Relativitätstheorie mit der Geschwindigkeit v zu. Es gilt:

$$m = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

m_0: Ruhemasse des Elektrons
c: Lichtgeschwindigkeit

Entwickeln Sie mit Hilfe der *Potenzreihenentwicklung* eine *Näherungsformel* für die Abhängigkeit zwischen Masse und Geschwindigkeit unter der Annahme $v \ll c$.

Wir gehen von der Wurzelschreibweise zur Potenzschreibweise über:

$$m = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{m_0}{[1 - (v/c)^2]^{1/2}} = m_0\,[1 - (v/c)^2]^{-1/2}$$

Der Ausdruck $(1 - (v/c)^2)^{-1/2}$ entspricht der aus der *Formelsammlung* entnommenen *Binomischen Reihe*

$$(1 - x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\,x^1 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,x^2 + \ldots = 1 + \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{8}\,x^2 + \ldots \qquad (|x| < 1)$$

wenn wir dort x durch $(v/c)^2$ ersetzen (substituieren):

$$[1 - (v/c)^2]^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \ldots = 1 + \frac{1}{2c^2}\,v^2 + \frac{3}{8c^4}\,v^4 + \ldots \qquad \left(\frac{v}{c} < 1\right)$$

Diese Entwicklung brechen wir nach dem 1. *nichtkonstanten* Glied ab und erhalten für die Masse m in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v folgende *Näherungsformel*:

$$m = m_0\,[1 - (v/c)^2]^{-1/2} \approx m_0\left(1 + \frac{1}{2c^2}\,v^2\right) \qquad (v \ll c)$$

Begründung: Wegen $v \ll c$ sind die weggelassenen Glieder verschwindend klein und dürfen daher vernachlässigt werden.

D29

Lösen Sie *näherungsweise* die Gleichung $\cosh x + x^2 = 4$, in dem Sie die Hyperbelfunktion durch ihr *Mac Laurinsches Näherungspolynom 4. Grades* ersetzen. Sie erhalten eine leicht lösbare Näherungsgleichung.

Wir verschaffen uns zunächst einen Überblick über die zu erwartenden Lösungen, indem wir die Gleichung geringfügig umstellen: $\cosh x = 4 - x^2$. Die Lösungen dieser Gleichung sind die *Schnittstellen* der Kurven $y = \cosh x$ und $y = 4 - x^2$. Aus der Zeichnung (Bild D-8) ergeben sich genau *zwei* spiegelsymmetrisch zueinander liegende Werte in der Nähe von $x_{1/2} = \pm 1{,}4$.

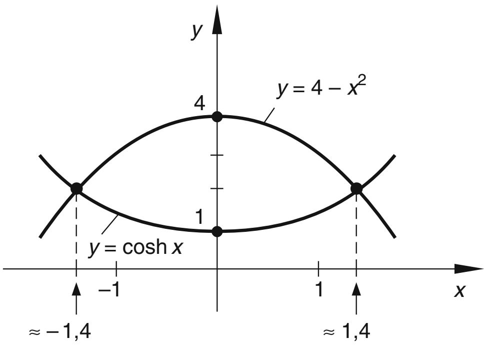


Bild D-8

Bei der *näherungsweisen* Lösung dieser Gleichung ersetzen wir die Hyperbelfunktion durch die zugehörige nach der 4. Potenz abgebrochene Mac Laurinsche Reihe (→ Formelsammlung) und lösen dann die erhaltene *bi-quadratische* Gleichung in der bekannten Weise mit Hilfe einer *Substitution*:

$$\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

$$\cosh x + x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \cosh x + x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{24}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 3 = 0 \;\Big|\; \cdot 24 \quad \Rightarrow \quad x^4 + 36x^2 - 72 = 0$$

Substitution: $u = x^2 \quad \Rightarrow \quad u^2 + 36u^2 - 72 = 0$

$$u_{1/2} = -18 \quad \sqrt{324 + 72} = -18 \quad \sqrt{396} = -18 \quad 19{,}8997 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 1{,}8997, \quad u_2 = -37{,}8997$$

Rücksubstitution führt zu folgenden *Näherungslösungen* ($u_2 < 0$ scheidet aus):

$$x^2 = u_1 = 1{,}8997 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \sqrt{1{,}8997} = 1{,}3783$$

D30

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - 1}{5x^2} = ?$$

Berechnen Sie diesen Grenzwert mit Hilfe der *Potenzreihenentwicklung*.

Mit Hilfe der aus der *Formelsammlung* entnommenen *Mac Laurinschen Reihe* von $\cosh x$ lässt sich der Zähler des Bruches wie folgt darstellen:

$$\cosh x - 1 = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) - 1 = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Wir dividieren beide Seiten noch *gliedweise* durch x^2 und erhalten:

$$\frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \ldots}{x^2} = \frac{1}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} + \ldots \qquad (x \neq 0)$$

Jetzt lässt sich der Grenzwert leicht bestimmen:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - 1}{5x^2} = \frac{1}{5} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{5} \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} + \ldots \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2!} = \frac{1}{10}$$

D31

Unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes besteht zwischen der Fallgeschwindigkeit v und dem Fallweg s der folgende (komplizierte) Zusammenhang:

$$v = v(s) = \sqrt{\frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{2ks}{m}}\right)}, \quad s \geq 0$$

m: Masse des Körpers
g: Erdbeschleunigung
k: Reibungskoeffizient $(k > 0)$

Wie lautet dieses Fallgesetz im *luftleeren* Raum?

Hinweis: Betrachten Sie v in Abhängigkeit vom *Reibungskoeffizienten* k und bestimmen Sie mit Hilfe der *Potenzreihenentwicklung* den Grenzwert für $k \to 0$.

Wir betrachten die Geschwindigkeit v als eine vom *Reibungskoeffizienten* k abhängige Funktion. Alle übrigen Größen (also auch der Fallweg s) werden als *Konstanten* (Parameter) angesehen. Wir müssen dann den folgenden *Grenzwert* bestimmen:

$$v(k = 0) = \lim_{k \to 0} v(k) = \lim_{k \to 0} \sqrt{\frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{2ks}{m}}\right)}$$

Nach den Rechenregeln für Grenzwerte dürfen wir die Grenzwertbildung *unter* dem Wurzelzeichen vornehmen, außerdem darf der konstante Faktor mg *vor* den Grenzwert gezogen werden (→ Bd. 1: Kap. III.4.2.3 und FS: Kap. III.3.3):

$$v(k = 0) = \sqrt{\lim_{k \to 0} \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{2ks}{m}}\right)} = \sqrt{mg \cdot \lim_{k \to 0} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{2ks}{m}}}{k}} = \sqrt{mg \cdot \lim_{k \to 0} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\alpha k}}{k}}$$

Der besseren Übersicht wegen haben wir (vorübergehend) $\alpha = \dfrac{2s}{m}$ gesetzt. Die direkte Berechnung des Grenzwertes unter der Wurzel führt zu dem *unbestimmten Ausdruck* „$\dfrac{0}{0}$“. Wir schlagen daher den in der Aufgabenstellung bereits vorgegebenen Lösungsweg ein. In der *Mac Laurinschen Reihe* von e^{-x} (der *Formelsammlung* entnommen) ersetzen wir x durch αk:

$$\mathrm{e}^{-x} = 1 - \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + - \ldots \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-\alpha k} = 1 - \frac{\alpha k}{1!} + \frac{\alpha^2 k^2}{2!} - \frac{\alpha^3 k^3}{3!} + - \ldots$$

Dann gilt (am Schluss wird noch gliedweise durch k dividiert):

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{-\alpha k}}{k} = \frac{1 - \left(1 - \dfrac{\alpha k}{1!} + \dfrac{\alpha^2 k^2}{2!} - \dfrac{\alpha^3 k^3}{3!} + - \ldots\right)}{k} = \frac{\dfrac{\alpha k}{1!} - \dfrac{\alpha^2 k^2}{2!} + \dfrac{\alpha^3 k^3}{3!} - + \ldots}{k} =$$

$$= \alpha - \frac{\alpha^2}{2}\,k + \frac{\alpha^3}{6}\,k^2 - + \ldots$$

Jetzt lässt sich der Grenzwert leicht bestimmen:

$$\lim_{k \to 0} \frac{1 - e^{-\alpha k}}{k} = \lim_{k \to 0} \left(\alpha - \frac{\alpha^2}{2} k + \frac{\alpha^3}{6} k^2 - + \ldots \right) = \alpha = \frac{2s}{m}$$

Im *luftleeren* Raum hängt die Fallgeschwindigkeit damit wie folgt vom Fallweg s ab:

$$v(k = 0) = \sqrt{mg \cdot \lim_{k \to 0} \frac{1 - e^{-\alpha k}}{k}} = \sqrt{m g \cdot \frac{2s}{m}} = \sqrt{2gs} \qquad (s \geq 0)$$

Dieses Gesetz kennen Sie sicher aus der Schulphysik. Bild D-9 zeigt den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit mit und ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes (Kurve a): luftleerer Raum; Kurve b): mit Luftwiderstand).

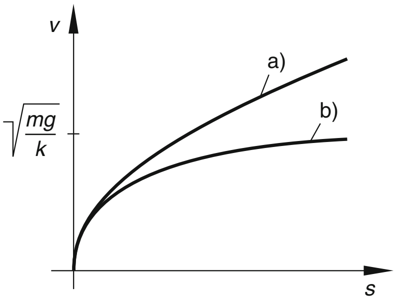


Bild D-9

D32

$$\int_0^{0,3} \sqrt{1 + x^2}\, dx = ?$$

a) Entwickeln Sie den Integranden zunächst in eine *Potenzreihe* (Abbruch nach dem 4. Glied) und integrieren Sie dann gliedweise.

b) Welchen *exakten* Integralwert erhält man mit der Integraltafel?

---

a) Der Integrand $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ lässt sich aus der *Binomischen Reihe* von $\sqrt{1 + u}$ (→ Formelsammlung) mit Hilfe der *Substitution* $u = x^2$ wie folgt als Potenzreihe darstellen:

$$\sqrt{1 + u} = (1 + u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} u - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} u^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} u^3 - + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} u - \frac{1}{8} u^2 + \frac{1}{16} u^3 - + \ldots \qquad (|u| \leq 1)$$

Substitution $u = x^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + x^2} = 1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 + \frac{1}{16} x^6 - + \ldots \qquad (|x| \leq 1)$

Gliedweise Integration führt zu dem folgenden Ergebnis (*Näherungswert*):

$$\int_0^{0,3} \sqrt{1 + x^2}\, dx = \int_0^{0,3} \left(1 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{8} x^4 + \frac{1}{16} x^6 - + \ldots \right) dx =$$

$$= \left[x + \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{40} x^5 + \frac{1}{112} x^7 - + \ldots \right]_0^{0,3} =$$

$$= \left(0{,}3 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}3^3 - \frac{1}{40} \cdot 0{,}3^5 + \frac{1}{112} \cdot 0{,}3^7 - + \ldots \right) - 0 =$$

$$= 0{,}3 + 0{,}0045 - 0{,}000\,061 + 0{,}000\,002 - + \ldots \approx 0{,}304\,441$$

b) Aus der *Integraltafel* der Formelsammlung entnehmen wir (Integral 116 mit $a = 1$):

$$\int_{0}^{0,3} \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x \cdot \sqrt{1+x^2} + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]_{0}^{0,3} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[0{,}3 \cdot \sqrt{1{,}09} + \ln\left(0{,}3 + \sqrt{1{,}09}\right) - 0 - \ln 1\right] = 0{,}304\,441$$

D33

Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_{0}^{0,1} \frac{e^{2x} - 1}{x}\,dx$$

mit Hilfe der *Potenzreihenentwicklung* (auf 4 Stellen nach dem Komma genau).

Da der Integrand an der unteren Integrationsgrenze $x = 0$ *nicht definiert* ist, müssen wir (definitionsgemäß) zunächst von $x = \lambda > 0$ bis $x = 0{,}1$ integrieren und dann den *Grenzwert* für $\lambda \to 0$ bilden:

$$\int_{0}^{0,1} \frac{e^{2x} - 1}{x}\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \int_{\lambda}^{0,1} \frac{e^{2x} - 1}{x}\,dx \qquad (\lambda > 0)$$

Wir greifen auf die *Mac Laurinsche Reihe* von e^u zurück und substituieren dort $u = 2x$ (→ Formelsammlung):

$$e^u = 1 + \frac{u^1}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \ldots = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 + \ldots \qquad (|u| < \infty)$$

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{6}(2x)^3 + \frac{1}{24}(2x)^4 + \ldots = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \ldots$$

Das Problem ist, dass wir an dieser Stelle noch nicht wissen, wie viele Glieder für die vorgegebene Genauigkeit benötigt werden (gegebenenfalls können wir weitere Glieder anschreiben). Die Potenzreihe für e^{2x} setzen wir in die Integrandfunktion ein und erhalten:

$$\frac{e^{2x} - 1}{x} = \frac{\left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \ldots\right) - 1}{x} = \frac{2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \ldots}{x} =$$

$$= 2 + 2x + \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \ldots \qquad (x \neq 0)$$

Die gliedweise Division durch x ist wegen $x > 0$ erlaubt. Wir integrieren jetzt diese Potenzreihe gliedweise in den Grenzen von $x = \lambda > 0$ bis $x = 0{,}1$:

$$\int_{\lambda}^{0,1} \frac{e^{2x} - 1}{x}\,dx = \int_{\lambda}^{0,1} \left(2 + 2x + \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \ldots\right) dx = \left[2x + x^2 + \frac{4}{9}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \ldots\right]_{\lambda}^{0,1} =$$

$$= \left(2 \cdot 0{,}1 + 0{,}1^2 + \frac{4}{9} \cdot 0{,}1^3 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}1^4 + \ldots\right) - \left(2\lambda + \lambda^2 + \frac{4}{9}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^4 + \ldots\right)$$

Der Grenzübergang $\lambda \to 0$ liefert dann den gesuchten Näherungswert unseres Integrals:

$$\int_{0}^{0,1} \frac{e^{2x} - 1}{x}\, dx = \lim_{\lambda \to 0} \int_{\lambda}^{0,1} \frac{e^{2x} - 1}{x}\, dx =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \left[\left(2 \cdot 0{,}1 + 0{,}1^2 + \frac{4}{9} \cdot 0{,}1^3 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}1^4 + \ldots \right) - \left(2\lambda + \lambda^2 + \frac{4}{9}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^4 + \ldots \right) \right] =$$

$$= 2 \cdot 0{,}1 + 0{,}1^2 + \frac{4}{9} \cdot 0{,}1^3 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}1^4 + \ldots - 0 = \underbrace{0{,}2 + 0{,}01 + 0{,}000\,444}_{0{,}210\,444} + \underbrace{0{,}000\,017}_{\text{Fehler}} + \ldots$$

Für die vorgegebene Genauigkeit von vier Nachkommastellen benötigen wir die ersten *drei* Glieder, das vierte Glied bewirkt in der vierten Nachkommastelle *keine* Veränderung mehr und bestimmt die Größenordnung des Fehlers. Somit gilt:

$$\int_{0}^{0,1} \frac{e^{2x} - 1}{x}\, dx = 0{,}2104 \qquad \text{(Abbruch nach der 4. Nachkommastelle)}$$

D34

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{0}^{0,5} \cosh\left(\sqrt{x}\right) dx$$

durch *Reihenentwicklung des Integranden* und Abbruch der Reihe nach dem 3. Glied.
Gehen Sie dabei von der als bekannt vorausgesetzten Reihe von $\cosh u$ aus (→ Formelsammlung).

Wir gehen von der *Mac Laurinschen Reihe*

$$\cosh u = 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^6}{6!} + \ldots = 1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{24}u^4 + \frac{1}{720}u^6 + \ldots \qquad (|u| < \infty)$$

aus (→ Formelsammlung), *substituieren* dann u durch $\sqrt{x}$:

$$\cosh\left(\sqrt{x}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\sqrt{x}\right)^4 + \frac{1}{720}\left(\sqrt{x}\right)^6 + \ldots = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{720}x^3 + \ldots$$

Gliedweise Integration in den Grenzen von $x = 0$ bis $x = 0{,}5$ führt zu dem folgenden Ergebnis:

$$\int_{0}^{0,5} \cosh\left(\sqrt{x}\right) dx = \int_{0}^{0,5} \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{720}x^3 + \ldots\right) dx = \left[x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{72}x^3 + \frac{1}{2880}x^4 + \ldots\right]_{0}^{0,5} =$$

$$= \left(0{,}5 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}5^2 + \frac{1}{72} \cdot 0{,}5^3 + \frac{1}{2880} \cdot 0{,}5^4 + \ldots\right) - 0 =$$

$$= \underbrace{0{,}5 + 0{,}0625 + 0{,}001\,736}_{\text{Näherungswert } 0{,}564\,236} + \underbrace{0{,}000\,022}_{\text{Fehler}} + \ldots \approx 0{,}5642$$

Der Wert ist auf 4 Stellen nach dem Komma genau.

D35

$$\int_{0}^{0,1} e^{x} \cdot \sinh x \, dx = ?$$

a) Berechnen Sie dieses Integral durch *Potenzreihenentwicklung des Integranden* (bis einschließlich x^3-Glied).

b) Welchen *(exakten)* Wert liefert die Integraltafel?

---

a) Wir entwickeln die Integrandfunktion $f(x) = e^{x} \cdot \sinh x$ auf *direktem* Wege in eine *Mac Laurinsche Reihe* bis zum *kubischen* Glied. Alle dabei benötigten Ableitungen erhalten wir mit der *Produktregel*:

$$f(x) = \underbrace{e^{x}}_{u} \cdot \underbrace{\sinh x}_{v} = u v \quad \text{mit} \quad u = e^{x}, \quad v = \sinh x \quad \text{und} \quad u' = e^{x}, \quad v' = \cosh x$$

$$f'(x) = u'v + v'u = e^{x} \cdot \sinh x + \cosh x \cdot e^{x} = \underbrace{e^{x}}_{u} \underbrace{(\sinh x + \cosh x)}_{v} = u v$$

$$u = e^{x}, \quad v = \sinh x + \cosh x \quad \text{und} \quad u' = e^{x}, \quad v' = \cosh x + \sinh x$$

$$f''(x) = u'v + v'u = e^{x}(\sinh x + \cosh x) + (\cosh x + \sinh x) \cdot e^{x} =$$

$$= e^{x}(\sinh x + \cosh x + \cosh x + \sinh x) = e^{x}(2 \cdot \sinh x + 2 \cdot \cosh x) =$$

$$= 2 \cdot \underbrace{e^{x}(\sinh x + \cosh x)}_{f'(x)} = 2 \cdot f'(x)$$

$$f'''(x) = 2 \cdot f''(x) = 2 \cdot 2 \cdot f'(x) = 4 \cdot f'(x)$$

Ableitungswerte an der Stelle $x_0 = 0$ (unter Berücksichtigung von $e^0 = 1$, $\sinh 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$):

$$f(0) = 1 \cdot 0 = 0, \quad f'(0) = 1(0 + 1) = 1, \quad f''(0) = 2 \cdot \underbrace{f'(0)}_{1} = 2, \quad f'''(0) = 4 \cdot \underbrace{f'(0)}_{1} = 4$$

Mac Laurinsche Reihe von $f(x) = e^{x} \cdot \sinh x$ bis zur 3. Potenz

$$f(x) = e^{x} \cdot \sinh x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x^1 + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \ldots =$$

$$= 0 + \frac{1}{1} x + \frac{2}{2} x^2 + \frac{4}{6} x^3 + \ldots = x + x^2 + \frac{2}{3} x^3 + \ldots \qquad (|x| < \infty)$$

Gliedweise Integration liefert den folgenden *Näherungswert* für das Integral:

$$\int_{0}^{0,1} e^{x} \cdot \sinh x \, dx = \int_{0}^{0,1} \left(x + x^2 + \frac{2}{3} x^3 + \ldots \right) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{6} x^4 + \ldots \right]_{0}^{0,1} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot 0{,}1^2 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}1^3 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}1^4 + \ldots \right) - 0 =$$

$$= 0{,}005 + 0{,}000\,333 + 0{,}000\,017 + \ldots \approx 0{,}005\,350$$

b) Aus der *Integraltafel* der Formelsammlung entnehmen wir (Integral 326 mit $a = 1$):

$$\int_{0}^{0,1} e^{x} \cdot \sinh x \, dx = \left[\frac{e^{2x}}{4} - \frac{x}{2} \right]_{0}^{0,1} = \left(\frac{e^{0,2}}{4} - \frac{0{,}1}{2} \right) - \left(\frac{e^{0}}{4} - 0 \right) = 0{,}255\,351 - 0{,}25 = 0{,}005\,351$$

2 Fourier-Reihen

Hinweise

Lehrbuch: Band 2, Kapitel II.1 und 2
Formelsammlung: Kapitel VI.4

D36

Die in Bild D-10 dargestellte Impulsfolge wird im Periodenintervall $0 \le t < T$ durch die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} A = \text{const.} & \text{für} \quad T/2 - c \le t \le T/2 + c \\ 0 & \phantom{\text{für}} \quad \text{alle übrigen } t \end{cases}$$

beschrieben. Wie lautet die *Fourier-Zerlegung* dieser Funktion?

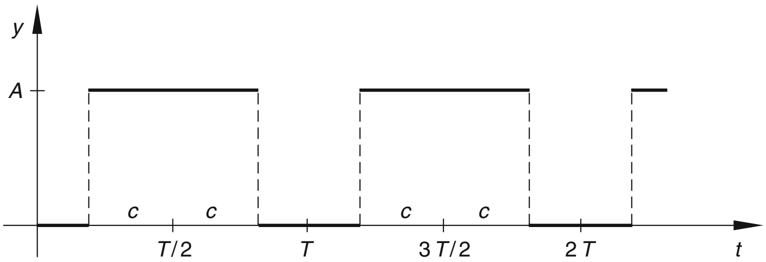


Bild D-10

Die Fourier-Reihe enthält *keine* Sinusglieder, da die Funktion *gerade* ist (*Spiegelsymmetrie* zur y-Achse). Daher gilt $b_n = 0$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und somit

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) \qquad (\text{mit } \omega_0 = 2\pi/T)$$

Berechnung des Fourier-Koeffizienten a_0

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int\limits_{(T)} f(t)\,dt = \frac{2}{T} \cdot A \cdot \int\limits_{T/2-c}^{T/2+c} 1\,dt = \frac{2A}{T}\big[t\big]_{T/2-c}^{T/2+c} = \frac{2A}{T}\left(\frac{T}{2} + c - \frac{T}{2} + c\right) = \frac{4Ac}{T}$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int\limits_{(T)} f(t) \cdot \cos(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2}{T} \cdot A \cdot \underbrace{\int\limits_{T/2-c}^{T/2+c} \cos(n\omega_0 t)\,dt}_{\text{Integral 228 mit } a = n\omega_0} = \frac{2A}{T}\left[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_{T/2-c}^{T/2+c} =$$

$$= \frac{2A}{n\omega_0 T}\big[\sin(n\omega_0 t)\big]_{T/2-c}^{T/2+c} = \frac{2A}{n\omega_0 T}\left[\sin\left(\frac{n\omega_0 T}{2} + n\omega_0 c\right) - \sin\left(\frac{n\omega_0 T}{2} - n\omega_0 c\right)\right]$$

Unter Berücksichtigung von $\omega_0 T = 2\pi$ erhalten wir:

$$a_n = \frac{2A}{n \cdot 2\pi}\left[\sin\left(\frac{n \cdot 2\pi}{2} + n\omega_0 c\right) - \sin\left(\frac{n \cdot 2\pi}{2} - n\omega_0 c\right)\right] =$$

$$= \frac{A}{n\pi}\left[\sin(n\pi + n\omega_0 c) - \sin(n\pi - n\omega_0 c)\right]$$

Unter Verwendung der trigonometrischen Formel

$$\sin(x_1 + x_2) - \sin(x_1 - x_2) = 2 \cdot \cos x_1 \cdot \sin x_2 \qquad (\rightarrow \text{Formelsammlung: Kap. III.7.6.5})$$

folgt dann mit $x_1 = n\pi$ und $x_2 = n\omega_0 c$:

$$a_n = \frac{A}{n\pi} \cdot 2 \cdot \cos(n\pi) \cdot \sin(n\omega_0 c) = \frac{2A}{\pi} \cdot \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} \cdot \frac{\sin(n\omega_0 c)}{n} = \frac{2A}{\pi} \cdot (-1)^n \cdot \frac{\sin(n\omega_0 c)}{n}$$

Denn es gilt:

$$\cos(n\pi) = \left\{ \begin{matrix} -1 & & n = 1, 3, 5, \ldots \\ & \text{für} & \\ 1 & & n = 2, 4, 6, \ldots \end{matrix} \right\} = (-1)^n \qquad (\text{für } n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Damit erhalten wir die folgende *Fourier-Zerlegung* (mit $\omega_0 = 2\pi/T$):

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) = \frac{2Ac}{T} + \frac{2A}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sin(n\omega_0 c)}{n} \cdot \cos(n\omega_0 t)$$

D37

Bestimmen Sie die *Fourier-Reihe* der in Bild D-11 dargestellten parabelförmigen Impulsfolge mit der Periodendauer $T = \pi$.

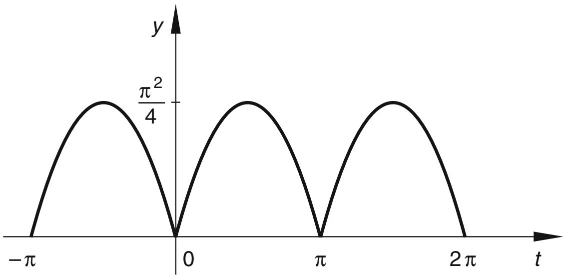


Bild D-11

Gleichung der Parabel im Periodenintervall $0 \le t \le \pi$ (Produktform):

$$f(t) = a(t - 0)(t - \pi) = a\,t(t - \pi) = a(t^2 - \pi t)$$

(Parabelnullstellen bei $t_1 = 0$ und $t_2 = \pi$). Im Scheitelpunkt gilt:

$$f(\pi/2) = \frac{\pi^2}{4} \quad \Rightarrow \quad a\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} \quad \Rightarrow \quad a\left(\frac{-\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4} \quad \Rightarrow \quad -a \cdot \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad -a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -1$$

Somit gilt:

$$f(t) = -(t^2 - \pi t) = -t^2 + \pi t, \quad 0 \le t \le \pi$$

Die aus *Parabelbögen* bestehende (periodische) Funktion ist *gerade* (spiegelsymmetrisch zur y-Achse), die Fourier-Reihe kann daher *keine* Sinusglieder enthalten. Somit ist $b_n = 0$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und es gilt:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(2nt) \qquad \left(\text{mit } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\right)$$

Berechnung des Fourier-Koeffizienten a_0

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int\limits_{(T)} f(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \int\limits_0^{\pi} (-t^2 + \pi t)\, dt = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{2} \pi t^2 \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{3} \pi^3 + \frac{1}{2} \pi^3 - 0 - 0 \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{6} \pi^3 = \frac{1}{3} \pi^2$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int\limits_{(T)} f(t) \cdot \cos(n \omega_0 t)\, dt = \frac{2}{\pi} \cdot \int\limits_0^{\pi} (-t^2 + \pi t) \cdot \cos(2nt)\, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \Bigg\{ \underbrace{-\int\limits_0^{\pi} t^2 \cdot \cos(2nt)\, dt}_{I_1} + \pi \cdot \underbrace{\int\limits_0^{\pi} t \cdot \cos(2nt)\, dt}_{I_2} \Bigg\} = \frac{2}{\pi} (-I_1 + \pi \cdot I_2)$$

Berechnung der Teilintegrale I_1 und I_2:

$$I_1 = \underbrace{\int\limits_0^{\pi} t^2 \cdot \cos(2nt)\, dt}_{\text{Integral 233 mit } a = 2n} = \left[\frac{2t \cdot \cos(2nt)}{4n^2} + \frac{(4n^2 t^2 - 2) \cdot \sin(2nt)}{8n^3} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2\pi \cdot \cos(2n\pi)}{4n^2} + \frac{(4n^2\pi^2 - 2) \cdot \sin(2n\pi)}{8n^3} - 0 + \frac{2 \cdot \sin 0}{8n^3} = \frac{2\pi}{4n^2} = \frac{\pi}{2n^2}$$

(unter Berücksichtigung von $\cos(2n\pi) = 1$ und $\sin(2n\pi) = \sin 0 = 0$)

$$I_2 = \underbrace{\int\limits_0^{\pi} t \cdot \cos(2nt)\, dt}_{\text{Integral 232 mit } a = 2n} = \left[\frac{\cos(2nt)}{4n^2} + \frac{t \cdot \sin(2nt)}{2n} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{\cos(2n\pi)}{4n^2} + \frac{\pi \cdot \sin(2n\pi)}{2n} - \frac{\cos 0}{4n^2} - 0 = \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{4n^2} = 0$$

(wegen $\cos(2n\pi) = \cos 0 = 1$ und $\sin(2n\pi) = 0$)

Damit erhalten wir für die Fourier-Koeffizienten a_n folgende Werte:

$$a_n = \frac{2}{\pi} (-I_1 + \pi \cdot I_2) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2n^2} + \pi \cdot 0 \right) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2n^2} \right) = -\frac{1}{n^2}$$

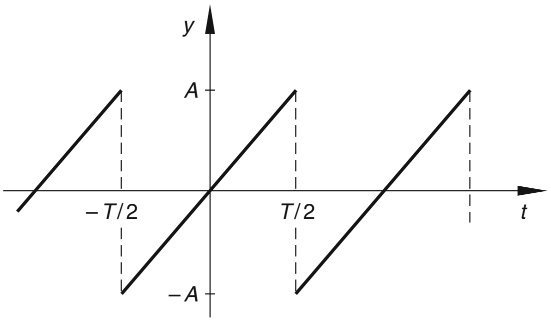
Die *Fourier-Reihe* der parabelförmigen Impulsfolge lautet daher wie folgt $(\omega_0 = 2)$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(2nt) = \frac{1}{6} \pi^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \cos(2nt) =$$

$$= \frac{1}{6} \pi^2 - \left(\frac{1}{1^2} \cdot \cos(2t) + \frac{1}{2^2} \cdot \cos(4t) + \frac{1}{3^2} \cdot \cos(6t) + \ldots \right)$$

D38

Zerlegen Sie die in Bild D-12 dargestellte „Sägezahnschwingung“ nach *Fourier* in ihre *harmonischen* Bestandteile (*Grund-* und *Oberschwingungen*).



Funktionsgleichung:

$$f(t) = \frac{2A}{T}\,t\,, \quad -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$$

Bild D-12

Die *ungerade* Funktion hat die Schwingungsdauer (Periodendauer) T, die Kreisfrequenz der Grundschwingung ist daher $\omega_0 = 2\pi/T$. Die gesuchte Fourier-Reihe kann wegen der *Punktsymmetrie* der Kurve *nur* Sinusglieder enthalten. Somit gilt $a_n = 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ und

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(\omega_0 t) \qquad (\text{mit } \omega_0 = 2\pi/T)$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten b_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$)

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int\limits_{(T)} f(t) \cdot \sin(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2}{T} \cdot \frac{2A}{T} \cdot \int\limits_{-T/2}^{T/2} t \cdot \sin(n\omega_0 t)\,dt = \frac{4A}{T^2} \cdot \int\limits_{-T/2}^{T/2} t \cdot \sin(n\omega_0 t)\,dt$$

Weil der Integrand $t \cdot \sin(n\omega_0 t)$ eine *gerade* Funktion ist, dürfen wir die Integration auf das Intervall $0 \le t \le T/2$ beschränken (⇒ Faktor 2 vor dem Integral):

$$b_n = 2 \cdot \frac{4A}{T^2} \cdot \underbrace{\int\limits_0^{T/2} t \cdot \sin(n\omega_0 t)\,dt}_{\text{Integral 208 mit } a = n\omega_0} = \frac{8A}{T^2}\left[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n^2\omega_0^2} - \frac{t \cdot \cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_0^{T/2} =$$

$$= \frac{8A}{T^2}\left(\frac{\sin(n\omega_0 T/2)}{n^2\omega_0^2} - \frac{T \cdot \cos(n\omega_0 T/2)}{2n\omega_0} - \frac{\sin 0}{n^2\omega_0^2} - 0\right)$$

Unter Berücksichtigung von

$$\omega_0 T = 2\pi, \quad \omega_0 T/2 = \pi, \quad \sin(n\pi) = \sin 0 = 0 \text{ und } \cos(n\pi) = (-1)^n$$

folgt weiter:

$$b_n = \frac{8A}{T^2}\left(\frac{\sin(n\pi)}{n^2\omega_0^2} - \frac{T \cdot \cos(n\pi)}{2n\omega_0}\right) = \frac{8A}{T^2}\left(-\frac{T \cdot (-1)^n}{2n\omega_0}\right) = -\frac{4A \cdot (-1)^n}{n\omega_0 T} = -\frac{4A \cdot (-1)^n}{n \cdot 2\pi} =$$

$$= \frac{(-1)^1 \cdot 2A \cdot (-1)^n}{n\pi} = \frac{2A}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Damit erhalten wir die folgende Zerlegung in eine *sinusförmige Grundschwingung* mit der Kreisfrequenz ω_0 und *sinusförmige Oberschwingungen* mit den Kreisfrequenzen $2\omega_0,\ 3\omega_0,\ 4\omega_0, \ldots$:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n\omega_0 t) = \frac{2A}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin(n\omega_0 t) = \frac{2A}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sin(n\omega_0 t}{n} =$$

$$= \frac{2A}{\pi}\left(\frac{\sin(\omega_0 t)}{1} - \frac{\sin(2\omega_0 t)}{2} + \frac{\sin(3\omega_0 t)}{3} - \frac{\sin(4\omega_0 t)}{4} + - \ldots\right)$$

D39

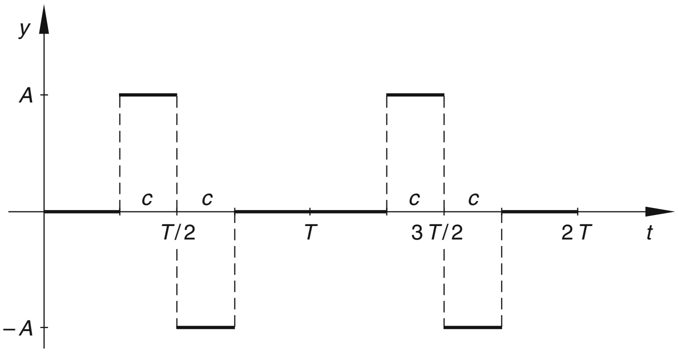


Bild D-13

Wie lautet die *Fourier-Reihe* dieser Rechteckkurve mit der Periodendauer T und der Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi/T$ (Bild D-13)?

Die Kurve lässt sich im Periodenintervall $0 \le t \le T$ *abschnittsweise* durch die folgenden Gleichungen beschreiben:

$$f(t) = \begin{cases} A & T/2 - c \le t < T/2 \\ -A \quad \text{für} & T/2 \le t < T/2 + c \\ 0 & \text{alle übrigen } t \end{cases}$$

Wegen der *Punktsymmetrie* der Kurve können in der Fourier-Zerlegung *nur* Sinusglieder auftreten. Somit gilt $a_n = 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ und

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n\omega_0 t) \qquad (\text{mit } \omega_0 = 2\pi/T)$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten b_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

Die Integration muss *abschnittsweise* durchgeführt werden (Integral 204 mit $a = n\omega_0$):

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{(T)} f(t) \cdot \sin(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2}{T}\left\{A \cdot \int_{T/2-c}^{T/2} \sin(n\omega_0 t)\,dt - A \cdot \int_{T/2}^{T/2+c} \sin(n\omega_0 t)\,dt\right\} =$$

$$= \frac{2A}{T}\left\{\left[-\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_{T/2-c}^{T/2} - \left[-\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_{T/2}^{T/2+c}\right\} =$$

$$= \frac{2A}{n\omega_0 T}\left\{\left[-\cos(n\omega_0 T)\right]_{T/2-c}^{T/2} + \left[\cos(n\omega_0 T)\right]_{T/2}^{T/2+c}\right\} =$$

$$= \frac{2A}{n\omega_0 T}\left[-\cos(n\omega_0 T/2) + \cos(n\omega_0 T/2 - n\omega_0 c) + \cos(n\omega_0 T/2 + n\omega_0 c) - \cos(n\omega_0 T/2)\right]$$

Wegen $\omega_0 T = 2\pi$ und somit $\omega_0 T/2 = \pi$ folgt weiter:

$$b_n = \frac{2A}{n \cdot 2\pi}\left[-\cos(n\pi) + \cos(n\pi - n\omega_0 c) + \cos(n\pi + n\omega_0 c) - \cos(n\pi)\right] =$$

$$= \frac{A}{n\pi}\left[-2 \cdot \cos(n\pi) + \cos(n\pi + n\omega_0 c) + \cos(n\pi - n\omega_0 c)\right]$$

Unter Verwendung der trigonometrischen Formel

$$\cos(x_1 + x_2) + \cos(x_1 - x_2) = 2 \cdot \cos x_1 \cdot \cos x_2 \qquad (\rightarrow \text{Formelsammlung: Kap. III.7.6.5})$$

mit $x_1 = n\pi$ und $x_2 = n\omega_0 c$ erhalten wir dann:

$$b_n = \frac{A}{n\pi}\left[-2 \cdot \cos(n\pi) + 2 \cdot \cos(n\pi) \cdot \cos(n\omega_0 c)\right] = \frac{2A}{n\pi} \cdot \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} \cdot \left[-1 + \cos(n\omega_0 c)\right] =$$

$$= \frac{2A}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n \cdot (\cos(n\omega_0 c) - 1)}{n}$$

Die *Fourier-Reihe* der Rechteckkurve lautet damit:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2A}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (\cos(n\omega_0 c) - 1)}{n} \cdot \sin(n\omega_0 t) \qquad (\omega_0 = 2\pi/T)$$

D40

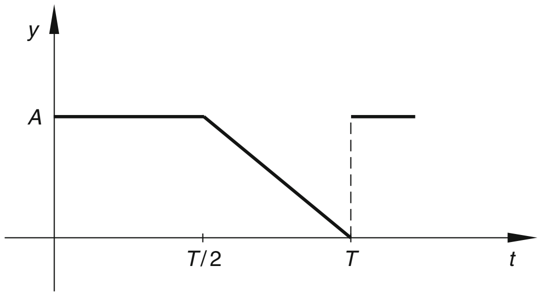


Bild D-14

Im Periodenintervall $0 \le t < T$ gilt:

$$f(t) = \begin{cases} A & \\ -\dfrac{2A}{T}\,t + 2A & \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} 0 \le t \le T/2 \\ T/2 \le t < T \end{array}$$

Bestimmen Sie die *Fourier-Reihe* dieser periodischen Funktion mit der Periodendauer T und der Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi/T$ (Bild D-14).

Alle Integrationen müssen *abschnittsweise* durchgeführt werden.

Berechnung des Fourier-Koeffizienten a_0

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_{(T)} f(t)\,dt = \frac{2}{T}\left\{A \cdot \int_0^{T/2} 1\,dt + \int_{T/2}^{T}\left(-\frac{2A}{T}\,t + 2A\right)dt\right\} =$$

$$= \frac{2}{T}\left\{A\Big[t\Big]_0^{T/2} + \left[-\frac{A}{T}\,t^2 + 2At\right]_{T/2}^{T}\right\} =$$

$$= \frac{2}{T}\left(\frac{1}{2}\,AT - 0 - AT + 2AT + \frac{1}{4}\,AT - AT\right) = \frac{2}{T} \cdot \frac{3}{4}\,AT = \frac{3}{2}\,A$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int\limits_{(T)} f(t) \cdot \cos(n\omega_0 t)\, dt = \frac{2}{T} \left\{ A \cdot \int\limits_{0}^{T/2} \cos(n\omega_0 t)\, dt + \int\limits_{T/2}^{T} \left(-\frac{2A}{T}\, t + 2A \right) \cdot \cos(n\omega_0 t)\, dt \right\} =$$

$$= \frac{2A}{T} \cdot \underbrace{\int\limits_{0}^{T/2} \cos(n\omega_0 t)\, dt}_{I_1} - \frac{4A}{T^2} \cdot \underbrace{\int\limits_{T/2}^{T} t \cdot \cos(n\omega_0 t)\, dt}_{I_2} + \frac{4A}{T} \cdot \underbrace{\int\limits_{T/2}^{T} \cos(n\omega_0 t)\, dt}_{I_3} =$$

$$= \frac{2A}{T} \cdot I_1 - \frac{4A}{T^2} \cdot I_2 + \frac{4A}{T} \cdot I_3$$

Auswertung der Teilintegrale $I_1,\ I_2,\ I_3$:

Bei der Auswertung der Integrale beachten wir folgende Beziehungen:

$$\omega_0 T = 2\pi; \quad \omega_0 T/2 = \pi; \quad \sin(2n\pi) = \sin(n\pi) = 0; \quad \cos(2n\pi) = 1; \quad \cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$I_1 = \underbrace{\int\limits_{0}^{T/2} \cos(n\omega_0 t)\, dt}_{\text{Integral 228 mit } a\, =\, n\omega_0} = \left[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_0^{T/2} = \frac{\sin(n\omega_0 T/2) - \sin 0}{n\omega_0} = \frac{\sin(n\pi) - \sin 0}{n\omega_0} = \frac{0 - 0}{n\omega_0} = 0$$

$$I_2 = \underbrace{\int\limits_{T/2}^{T} t \cdot \cos(n\omega_0 t)\, dt}_{\text{Integral 232 mit } a\, =\, n\omega_0} = \left[\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n^2\omega_0^2} + \frac{t \cdot \sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_{T/2}^{T} =$$

$$= \frac{\cos(n\omega_0 T)}{n^2\omega_0^2} + \frac{T \cdot \sin(n\omega_0 T)}{n\omega_0} - \frac{\cos(n\omega_0 T/2)}{n^2\omega_0^2} - \frac{T \cdot \sin(n\omega_0 T/2)}{2n\omega_0} =$$

$$= \frac{\cos(2n\pi)}{n^2\omega_0^2} + \frac{T \cdot \sin(2n\pi)}{n\omega_0} - \frac{\cos(n\pi)}{n^2\omega_0^2} - \frac{T \cdot \sin(n\pi)}{2n\omega_0} = \frac{1}{n^2\omega_0^2} - \frac{(-1)^n}{n^2\omega_0^2} = \frac{1 - (-1)^n}{n^2\omega_0^2}$$

$$I_3 = \underbrace{\int\limits_{T/2}^{T} \cos(n\omega_0 t)\, dt}_{\text{Integral 228 mit } a\, =\, n\omega_0} = \left[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0} \right]_{T/2}^{T} = \frac{\sin(n\omega_0 T) - \sin(n\omega_0 T/2)}{n\omega_0} = \frac{\sin(2n\pi) - \sin(n\pi)}{n\omega_0} = 0$$

Die Fourier-Koeffizienten der *Kosinusglieder* lauten damit (unter Berücksichtigung von $\omega_0 T = 2\pi$):

$$a_n = \frac{2A}{T} \cdot I_1 - \frac{4A}{T^2} \cdot I_2 + \frac{4A}{T} \cdot I_3 = \frac{2A}{T} \cdot 0 - \frac{4A}{T^2} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{n^2\omega_0^2} + \frac{4A}{T} \cdot 0 = -\frac{4A}{\omega_0^2 T^2} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{n^2} =$$

$$= -\frac{4A}{(\omega_0 T)^2} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{n^2} = -\frac{4A}{4\pi^2} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{n^2} = -\frac{A}{\pi^2} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{n^2}$$

Für *gerades* n, d. h. $n = 2, 4, 6, \ldots$ ist $(-1)^n = 1$ und damit $a_n = 0$. Für *ungerades* n, d. h. $n = 1, 3, 5, \ldots$ ist $(-1)^n = -1$ und man erhält folgende Fourier-Koeffizienten:

$$a_n = -\frac{A}{\pi^2} \cdot \frac{1 + 1}{n^2} = -\frac{2A}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2} \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots)$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten b_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int\limits_{(T)} f(t) \cdot \sin(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2}{T}\left\{A \cdot \int\limits_0^{T/2} \sin(n\omega_0 t)\,dt + \int\limits_{T/2}^{T}\left(-\frac{2A}{T}\,t + 2A\right) \cdot \sin(n\omega_0 t)\,dt\right\} =$$

$$= \frac{2A}{T} \cdot \underbrace{\int\limits_0^{T/2} \sin(n\omega_0 t)\,dt}_{I_1} - \frac{4A}{T^2} \cdot \underbrace{\int\limits_{T/2}^{T} t \cdot \sin(n\omega_0 t)\,dt}_{I_2} + \frac{4A}{T} \cdot \underbrace{\int\limits_{T/2}^{T} \sin(n\omega_0 t)\,dt}_{I_3} =$$

$$= \frac{2A}{T} \cdot I_1 - \frac{4A}{T^2} \cdot I_2 + \frac{4A}{T} \cdot I_3$$

Auswertung der Teilintegrale I_1, I_2 und I_3:

Bei der Auswertung der Integrale beachten wir folgende Beziehungen:

$$\omega_0 T = 2\pi; \quad \omega_0 T/2 = \pi; \quad \sin(n\pi) = \sin(2n\pi) = 0; \quad \cos(2n\pi) = 1$$

$$I_1 = \underbrace{\int\limits_0^{T/2} \sin(n\omega_0 t)\,dt}_{\text{Integral 204 mit } a = n\omega_0} = \left[-\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_0^{T/2} = -\frac{\cos(n\omega_0 T/2) - \cos 0}{n\omega_0} =$$

$$= -\frac{\cos(n\pi) - 1}{n\omega_0} = \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\omega_0}$$

$$I_2 = \underbrace{\int\limits_{T/2}^{T} t \cdot \sin(n\omega_0 t)\,dt}_{\text{Integral 208 mit } a = n\omega_0} = \left[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n^2\omega_0^2} - \frac{t \cdot \cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_{T/2}^{T} =$$

$$= \frac{\sin(n\omega_0 T)}{n^2\omega_0^2} - \frac{T \cdot \cos(n\omega_0 T)}{n\omega_0} - \frac{\sin(n\omega_0 T/2)}{n^2\omega_0^2} + \frac{T \cdot \cos(n\omega_0 T/2)}{2n\omega_0} =$$

$$= \frac{\sin(2n\pi)}{n^2\omega_0^2} - \frac{T \cdot \cos(2n\pi)}{n\omega_0} - \frac{\sin(n\pi)}{n^2\omega_0^2} + \frac{T \cdot \cos(n\pi)}{2n\omega_0} =$$

$$= -\frac{T}{n\omega_0} + \frac{T \cdot \cos(n\pi)}{2n\omega_0} = \frac{-2T + T \cdot \cos(n\pi)}{2n\omega_0} = \frac{T(\cos(n\pi) - 2)}{2n\omega_0}$$

$$I_3 = \underbrace{\int\limits_{T/2}^{T} \sin(n\omega_0 t)\,dt}_{\text{Integral 204 mit } a = \omega_0} = \left[-\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_{T/2}^{T} = -\frac{\cos(n\omega_0 T) - \cos(n\omega_0 T/2)}{n\omega_0} =$$

$$= -\frac{\cos(2n\pi) - \cos(n\pi)}{n\omega_0} = -\frac{1 - \cos(n\pi)}{n\omega_0} = \frac{\cos(n\pi) - 1}{n\omega_0}$$

Damit erhalten wir für die *Sinusglieder* folgende Fourier-Koeffizienten:

$$b_n = \frac{2A}{T} \cdot I_1 - \frac{4A}{T^2} \cdot I_2 + \frac{4A}{T} \cdot I_3 =$$

$$= \frac{2A}{T} \cdot \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\omega_0} - \frac{4A}{T^2} \cdot \frac{T(\cos(n\pi) - 2)}{2n\omega_0} + \frac{4A}{T} \cdot \frac{\cos(n\pi) - 1}{n\omega_0} =$$

$$= \frac{2A}{n\omega_0 T}(1 - \cos(n\pi)) - \frac{2A}{n\omega_0 T}(\cos(n\pi) - 2) + \frac{2A}{n\omega_0 T} \cdot 2(\cos(n\pi) - 1) =$$

$$= \frac{2A}{n\omega_0 T}(1 - \cos(n\pi) - \cos(n\pi) + 2 + 2 \cdot \cos(n\pi) - 2) = \frac{2A}{n \cdot 2\pi} \cdot 1 = \frac{A}{\pi} \cdot \frac{1}{n}$$

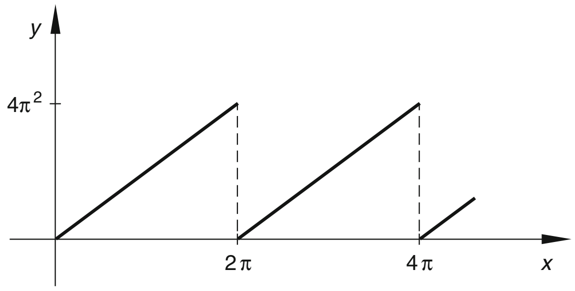
Fourier-Reihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)) =$$

$$= \frac{3}{4}A - \frac{2A}{\pi^2}\left(\frac{\cos(\omega_0 t)}{1^2} + \frac{\cos(3\omega_0 t)}{3^2} + \frac{\cos(5\omega_0 t)}{5^2} + \ldots\right) +$$

$$+ \frac{A}{\pi}\left(\frac{\sin(\omega_0 t)}{1} + \frac{\sin(2\omega_0 t)}{2} + \frac{\sin(3\omega_0 t)}{3} + \ldots\right)$$

D41



Funktionsgleichung:

$f(x) = 2\pi x, \quad 0 \le x < 2\pi$

Bild D-15

Bestimmen Sie die *Fourier-Reihe* der in Bild D-15 skizzierten „Sägezahn-Funktion“ mit der Periode $p = 2\pi$ und der Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi/p = 1$ in *komplexer* Form. Wie lautet die *reelle* Reihenentwicklung?

Berechnung der Fourier-Koeffizienten c_n (komplexe Darstellung; für $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$)

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}nx}\,dx = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot \int_0^{2\pi} x \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}nx}\,dx = \underbrace{\int_0^{2\pi} x \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}nx}\,dx}_{\text{Integral 313 mit } a = -\mathrm{j}n} =$$

$$= \left[\frac{-\mathrm{j}nx - 1}{\mathrm{j}^2 n^2} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}nx}\right]_0^{2\pi} = \left[\frac{-\mathrm{j}nx - 1}{-n^2} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}nx}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{n^2}\left[(\mathrm{j}nx + 1) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}nx}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[(\mathrm{j}2n\pi + 1) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2n\pi}}_{1} - 1 \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{0}}_{1}\right] = \frac{1}{n^2}(\mathrm{j}2n\pi + 1 - 1) = \frac{1}{n^2} \cdot \mathrm{j}2n\pi = \mathrm{j}\,\frac{2\pi}{n}$$

Hinweis: $e^{-j2n\pi}$ wurde nach der Eulerschen Formel berechnet:

$$e^{-j\varphi} = \cos\varphi - j\cdot\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad (\text{Substitution } \varphi = 2n\pi)$$

$$e^{-j2n\pi} = \underbrace{\cos(2n\pi)}_{1} - j\cdot\underbrace{\sin(2n\pi)}_{0} = 1 - j\cdot 0 = 1$$

Sonderfall $n = 0$:

$$c_0 = \int_0^{2\pi} x\cdot e^0\,dx = \int_0^{2\pi} x\cdot 1\,dx = \int_0^{2\pi} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2 - 0 = 2\pi^2$$

Somit gilt:

$$c_0 = 2\pi^2 \quad \text{und} \quad c_n = j\,\frac{2\pi}{n} = j2\pi\cdot\frac{1}{n} \quad \text{für} \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Fourier-Reihe in komplexer Form

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\cdot e^{jnx} = 2\pi^2 + j2\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot e^{jnx} - \frac{1}{n}\cdot e^{-jnx}\right)$$

Fourier-Reihe in reeller Form

$$a_0 = 2c_0 = 2\cdot 2\pi^2 = 4\pi^2, \quad a_n = c_n + c_{-n} = j\,\frac{2\pi}{n} + j\,\frac{2\pi}{-n} = j\,\frac{2\pi}{n} - j\,\frac{2\pi}{n} = 0$$

$$b_n = j(c_n - c_{-n}) = j\left(j\,\frac{2\pi}{n} - j\,\frac{2\pi}{-n}\right) = j\left(j\,\frac{2\pi}{n} + j\,\frac{2\pi}{n}\right) = j\cdot j\,\frac{4\pi}{n} =$$

$$= j^2\cdot\frac{4\pi}{n} = -\frac{4\pi}{n} = -4\pi\cdot\frac{1}{n} \qquad (j^2 = -1)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos(nx) + b_n\cdot\sin(nx)) = 2\pi^2 - 4\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(0\cdot\cos(nx) + \frac{1}{n}\cdot\sin(nx)\right) =$$

$$= 2\pi^2 - 4\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\sin(nx) = 2\pi^2 - 4\pi\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \ldots\right)$$

D42

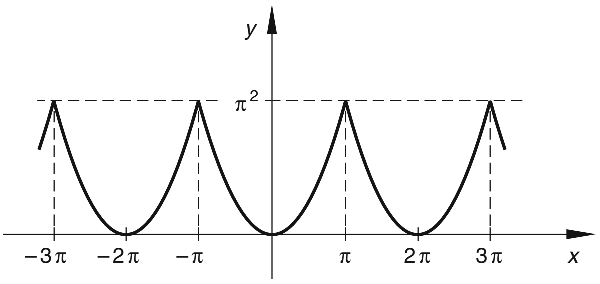


Bild D-16

Im Periodenintervall $-\pi \le x \le \pi$ gilt:

$$f(x) = x^2$$

Zerlegen Sie die in Bild D-16 dargestellte periodische Funktion in ihre *harmonischen* Bestandteile (*Fourier-Zerlegung*).

Die Fourier-Zerlegung dieser periodischen Funktion mit der Periode $p = 2\pi$ kann wegen der *Spiegelsymmetrie* zur y-Achse nur *gerade* Bestandteile enthalten. Somit ist $b_n = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Die Integrationen beschränken wir wegen der Spiegelsymmetrie der Funktion auf das Intervall $0 \le x \le \pi$ (⇒ Faktor 2 vor den Integralen).

Berechnung des Fourier-Koeffizienten a_0

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{0}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{3}\,x^3\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{3}\,\pi^3 - 0\right] = \frac{2}{3}\,\pi^2$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi} \cdot \underbrace{\int_{0}^{\pi} x^2 \cdot \cos(nx)\,dx}_{\text{Integral 233 mit } a \,=\, n} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{2x \cdot \cos(nx)}{n^2} + \frac{(n^2x^2 - 2) \cdot \sin(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{2\pi \cdot \cos(n\pi)}{n^2} + \frac{(n^2\pi^2 - 2) \cdot \sin(n\pi)}{n^3} - 0 - \frac{-2 \cdot \sin 0}{n^3}\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\pi \cdot \cos(n\pi)}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

(unter Berücksichtigung von $\sin(n\pi) = \sin 0 = 0$ und $\cos(n\pi) = (-1)^n$)

Fourier-Zerlegung

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) = \frac{1}{3}\,\pi^2 + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \cos(nx) =$$

$$= \frac{1}{3}\,\pi^2 + 4\left(-\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos(2x)}{2^2} - \frac{\cos(3x)}{3^2} + - \ldots\right)$$

Amplitudenspektrum: siehe Bild D-17

Die *Amplituden* lauten:

$$A_0 = \frac{1}{3}\,\pi^2, \quad A_n = |a_n| = \frac{4}{n^2}$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$

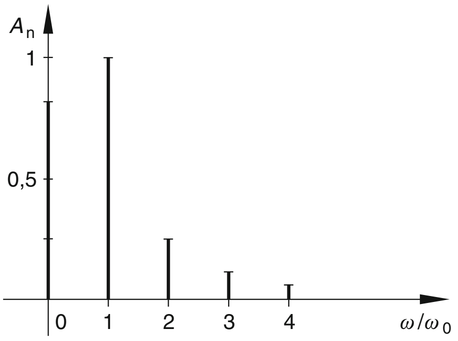


Bild D-17

D43

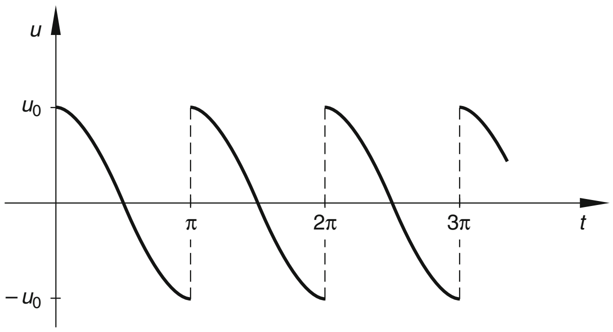


Bild D-18

Im Periodenintervall
$0 \le t < \pi$ gilt:

$$f(t) = u_0 \cdot \cos t$$

Zerlegen Sie den in Bild D-18 dargestellten periodischen Spannungsverlauf in seine *harmonischen* Bestandteile (*Grund-* und *Oberschwingungen*) und bestimmen Sie das *Amplitudenspektrum*.

Der Spannungsverlauf wird durch eine *ungerade* Funktion beschrieben, es können daher nur *Sinusglieder* auftreten. Somit gilt $a_n = 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$. Die Schwingungsdauer ist $T = \pi$, die Kreisfrequenz beträgt $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi/\pi = 2$.

Berechnung der Fourier-Koeffizienten b_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$)

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int\limits_{(T)} f(t) \cdot \sin(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2}{\pi} \cdot u_0 \cdot \underbrace{\int\limits_0^{\pi} \cos t \cdot \sin(2nt)\,dt}_{\text{Integral 285 mit } a = 2n,\; b = 1} =$$

$$= \frac{2u_0}{\pi}\left[-\frac{\cos[(2n+1)t]}{2(2n+1)} - \frac{\cos[(2n-1)t]}{2(2n-1)}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2u_0}{\pi}\left[-\frac{\cos[(2n+1)\pi]}{2(2n+1)} - \frac{\cos[(2n-1)\pi]}{2(2n-1)} + \frac{\cos 0}{2(2n+1)} + \frac{\cos 0}{2(2n-1)}\right]$$

Wegen $\cos[(2n+1)\pi] = \cos[(2n-1)\pi] = \cos\pi = -1$ und $\cos 0 = 1$ folgt dann:

$$b_n = \frac{2u_0}{\pi}\left(-\frac{-1}{2(2n+1)} - \frac{-1}{2(2n-1)} + \frac{1}{2(2n+1)} + \frac{1}{2(2n-1)}\right) =$$

$$= \frac{2u_0}{\pi}\left(\frac{2}{2(2n+1)} + \frac{2}{2(2n-1)}\right) = \frac{2u_0}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1}\right) =$$

$$= \frac{2u_0}{\pi} \cdot \frac{2n-1+2n+1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2u_0}{\pi} \cdot \frac{4n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{8u_0}{\pi} \cdot \frac{n}{(2n-1)(2n+1)}$$

Umformungen: Die Brüche wurden auf den Hauptnenner $(2n-1)(2n+1)$ gebracht, d. h. der Reihe nach mit $2n-1$ bzw. $2n+1$ erweitert.

Die *Fourier-Reihe* lautet somit (mit $\omega_0 = 2$):

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n\omega_0 t) = \frac{8u_0}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} \cdot \sin(2nt) =$$

$$= \frac{8u_0}{\pi}\left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cdot \sin(2t) + \frac{2}{3 \cdot 5} \cdot \sin(4t) + \frac{3}{5 \cdot 7} \cdot \sin(6t) + \ldots\right)$$

Amplitudenspektrum

Grund- und Oberschwingungen sind reine *Sinusschwingungen* mit den Kreisfrequenzen $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 4$, $\omega_3 = 6, \ldots, \omega_n = 2n, \ldots$ und den Phasenwinkeln $\varphi_n = 0$. Die *Amplituden* A_n stimmen hier mit den Fourier-Koeffizienten überein:

$$A_n = b_n = \frac{8u_0}{\pi} \cdot \frac{n}{(2n-1)(2n+1)}$$

(für $n = 1, 2, 3, \ldots$)

Bild D-19 zeigt das *Amplitudenspektrum* der Funktion.

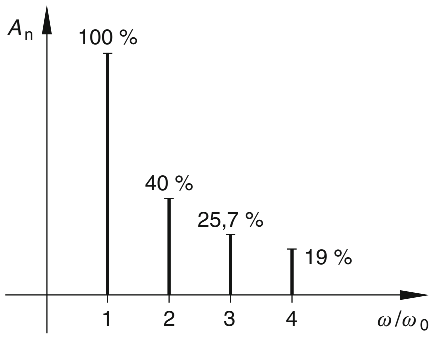


Bild D-19

E Partielle Differentiation

Hinweis für das gesamte Kapitel

Kürzen eines gemeinsamen Faktors wird durch *Grauunterlegung* gekennzeichnet.

1 Partielle Ableitungen

Alle Aufgaben in diesem Abschnitt lassen sich nur dann *erfolgreich* bearbeiten, wenn Sie die Ableitungsregeln (insbesondere Produkt-, Quotienten- und Kettenregel) *sicher* beherrschen.

Hinweise

(1) **Lehrbuch:** Band 2, Kapitel III.2.1 und 2.2
Formelsammlung: Kapitel IX.2.1 und 2.2

(2) Ein *Faktor*, der die Differentiationsvariable (das ist die Variable, nach der differenziert wird) *nicht* enthält, ist als *konstanter* Faktor zu betrachten und bleibt daher beim Differenzieren *erhalten*.

(3) Ein *Summand*, der die Differentiationsvariable *nicht* enthält, ist ein *konstanter* Summand und *verschwindet* daher beim Differenzieren.

E1 Bilden Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $z = (2x - 3y^2)^5$.

Differenziert wird mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$z = (\underbrace{2x - 3y^2}_{u})^5 = u^5 \quad \text{mit} \quad u = 2x - 3y^2$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 5u^4 \cdot 2 = 10u^4 = 10(2x - 3y^2)^4$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 5u^4 \cdot (-6y) = -30yu^4 = -30y(2x - 3y^2)^4$$

E2 Bilden Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $z = \sqrt{2xy - y^2}$.

Die gesuchten partiellen Ableitungen 1. Ordnung werden mit Hilfe der *Kettenregel* wie folgt gebildet:

$$z = \sqrt{\underbrace{2xy - y^2}_{u}} = \sqrt{u} \quad \text{mit} \quad u = 2xy - y^2$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\colorbox{lightgray}{2}\sqrt{u}} \cdot \colorbox{lightgray}{2}\,y = \frac{y}{\sqrt{u}} = \frac{y}{\sqrt{2xy - y^2}}$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (2x - 2y) = \frac{\colorbox{lightgray}{2}\,(x - y)}{\colorbox{lightgray}{2}\sqrt{u}} = \frac{x - y}{\sqrt{2xy - y^2}}$$

L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Klausur- und Übungsaufgaben,*
DOI 10.1007/978-3-8348-9730-5_5,© Vieweg+Teubner Verlag |Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2010

E3

Bilden Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $z = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-xy}$.

Die partielle Ableitung z_x erhalten wir mit der *Produktregel* (in Verbindung mit der *Kettenregel*):

$$z = \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-xy}}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = x^2, \quad v = \mathrm{e}^{-xy} \quad \text{und} \quad u_x = 2x, \quad v_x = -y \cdot \mathrm{e}^{-xy}$$

$$z_x = u_x v + v_x u = 2x \cdot \mathrm{e}^{-xy} - y \cdot \mathrm{e}^{-xy} \cdot x^2 = (2x - x^2 y) \cdot \mathrm{e}^{-xy}$$

Die Ableitung v_x wurde dabei wie folgt mit der *Kettenregel* gebildet:

$$v = \mathrm{e}^{-xy} = \mathrm{e}^t \quad \text{mit} \quad t = -xy \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \mathrm{e}^t \cdot (-y) = -y \cdot \mathrm{e}^{-xy}$$

z_y erhalten wir mit der *Kettenregel*:

$$z = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-xy} = x^2 \cdot \mathrm{e}^t \quad \text{mit} \quad t = -xy \quad \Rightarrow \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = x^2 \cdot \mathrm{e}^t \cdot (-x) = -x^3 \cdot \mathrm{e}^{-xy}$$

E4

Bilden Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $z = \dfrac{2t - x}{4x + t}$.

Beide Ableitungen erhalten wir mit Hilfe der *Quotientenregel*:

$$z = \frac{2t - x}{4x + t} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = 2t - x, \quad v = 4x + t$$

$$z_x = \frac{u_x v - v_x u}{v^2} = \frac{-1(4x + t) - 4(2t - x)}{(4x + t)^2} = \frac{-4x - t - 8t + 4x}{(4x + t)^2} = \frac{-9t}{(4x + t)^2}$$

$$z_t = \frac{u_t v - v_t u}{v^2} = \frac{2(4x + t) - 1(2t - x)}{(4x + t)^2} = \frac{8x + 2t - 2t + x}{(4x + t)^2} = \frac{9x}{(4x + t)^2}$$

E5

Bilden Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $z = (x^3 - y^2) \cdot \cosh(xy)$.

Differenziert wird jeweils nach der *Produktregel*, wobei die (partiellen) Ableitungen des Faktors $\cosh(xy)$ mit Hilfe der *Kettenregel* gebildet werden:

$$z = \underbrace{(x^3 - y^2)}_{u} \cdot \underbrace{\cosh(xy)}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = x^3 - y^2 \quad \text{und} \quad v = \cosh \underbrace{(xy)}_{t} \quad \text{mit} \quad t = xy$$

$$u_x = 3x^2, \quad u_y = -2y \quad \text{und} \quad v_x = (\sinh t) \cdot y = y \cdot \sinh(xy), \quad v_y = (\sinh t) \cdot x = x \cdot \sinh(xy)$$

$$z_x = u_x v + v_x u = 3x^2 \cdot \cosh(xy) + y \cdot \sinh(xy) \cdot (x^3 - y^2) =$$
$$= 3x^2 \cdot \cosh(xy) + (x^3 y - y^3) \cdot \sinh(xy)$$

$$z_y = u_y v + v_y u = -2y \cdot \cosh(xy) + x \cdot \sinh(xy) \cdot (x^3 - y^2) =$$
$$= -2y \cdot \cosh(xy) + (x^4 - xy^2) \cdot \sinh(xy)$$

E6

Bilden Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $z = \ln(2x + \mathrm{e}^{3y})$.

Wir benötigen jeweils die *Kettenregel*:

$$z = \ln \underbrace{(2x + \mathrm{e}^{3y})}_{u} = \ln u \quad \text{mit} \quad u = 2x + \mathrm{e}^{3y} \quad \text{und} \quad u_x = 2, \quad u_y = 3 \cdot \mathrm{e}^{3y}$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{u} \cdot 2 = \frac{2}{u} = \frac{2}{2x + \mathrm{e}^{3y}}$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{u} \cdot \mathrm{e}^{3y} \cdot 3 = \frac{3 \cdot \mathrm{e}^{3y}}{u} = \frac{3 \cdot \mathrm{e}^{3y}}{2x + \mathrm{e}^{3y}}$$

E7

Bilden Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $z = \arctan \dfrac{xy + 1}{x + y}$.

Für beide Ableitungen benötigen wir jeweils die *Ketten-* und *Quotientenregel*:

$$z = \arctan \underbrace{\left(\frac{xy + 1}{x + y}\right)}_{t} = \arctan t \quad \text{mit} \quad t = \frac{xy + 1}{x + y} = \frac{u}{v} \qquad (u = xy + 1, \; v = x + y)$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{1 + t^2} \cdot \frac{u_x v - v_x u}{v^2} = \frac{1}{1 + t^2} \cdot \frac{y(x + y) - 1(xy + 1)}{(x + y)^2} =$$

$$= \frac{xy + y^2 - xy - 1}{(1 + t^2)(x + y)^2} = \frac{y^2 - 1}{(1 + t^2)(x + y)^2}$$

Rücksubstitution und *Vereinfachen* des Terms $1 + t^2$ im Nenner:

$$1 + t^2 = 1 + \left(\frac{xy + 1}{x + y}\right)^2 = 1 + \frac{(xy + 1)^2}{(x + y)^2} = \frac{1(x + y)^2 + (xy + 1)^2}{(x + y)^2} = \frac{(x + y)^2 + (xy + 1)^2}{(x + y)^2}$$

Umformungen: Hauptnenner bilden, d. h. den 1. Summand mit $(x + y)^2$ erweitern.

Damit erhalten wir für z_x den folgenden Ausdruck:

$$z_x = \frac{y^2 - 1}{(1 + t^2)(x + y)^2} = \frac{y^2 - 1}{\dfrac{(x + y)^2 + (xy + 1)^2}{(x + y)^2} \cdot (x + y)^2} = \frac{y^2 - 1}{(x + y)^2 + (xy + 1)^2}$$

Die vorgegebene Funktion ist bezüglich der Variablen x und y *symmetrisch* aufgebaut, d. h. die Funktionsgleichung verändert sich *nicht* beim Vertauschen dieser Variablen. Daher erhalten wir aus der partiellen Ableitung z_x die (noch unbekannte) partielle Ableitung z_y, in dem wir x und y miteinander *vertauschen*:

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2 - 1}{(y + x)^2 + (yx + 1)^2} = \frac{x^2 - 1}{(x + y)^2 + (xy + 1)^2}$$

E8 Bilden Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $z = \ln[\cos(4x^3 - 2y^2 + 1)]$.

Wir benötigen *zwei* Substitutionen, um die Funktion in eine *elementare* Funktion überzuführen (hier substituieren wir von innen nach außen):

$$z = \ln[\cos\underbrace{(4x^3 - 2y^2 + 1)}_{u}] = \ln\underbrace{[\cos u]}_{v} = \ln v \quad \text{mit} \quad v = \cos u \quad \text{und} \quad u = 4x^3 - 2y^2 + 1$$

Mit Hilfe der *Kettenregel* erhalten wir die gewünschten Ableitungen:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{v} \cdot (-\sin u) \cdot 12x^2 = \frac{-12x^2 \cdot \sin u}{v}$$

Wir haben dabei zuerst z nach v, dann v nach u und schließlich u partiell nach x differenziert. *Rücksubstitution* liefert dann (in der Reihenfolge $v \to u \to x$):

$$z_x = \frac{-12x^2 \cdot \sin u}{v} = \frac{-12x^2 \cdot \sin u}{\cos u} = -12x^2 \cdot \tan u = -12x^2 \cdot \tan(4x^3 - 2y^2 + 1)$$

(unter Berücksichtigung von $\tan u = \sin u / \cos u$). Analog erhält man z_y:

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{v} \cdot (-\sin u) \cdot (-4y) = \frac{4y \cdot \sin u}{v} = \frac{4y \cdot \sin u}{\cos u} =$$

$$= 4y \cdot \tan u = 4y \cdot \tan(4x^3 - 2y^2 + 1)$$

E9 Bilden Sie für die Funktion $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ den Differentialausdruck $x z_x + y z_y$.

Die benötigten partiellen Ableitungen 1. Ordnung erhalten wir mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$z = \ln\underbrace{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}_{u} = \ln u \quad \text{mit} \quad u = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2u \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}$$

Analog (wegen der *Symmetrie* der Funktion bezüglich der Variablen x und y):

$$z_y = \frac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{y} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}$$

Einsetzen in den vorgegebenen Ausdruck liefert das folgende Ergebnis:

$$x z_x + y z_y = x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + y \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{x}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{y}{2\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} =$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{\sqrt{y}}{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{1}{2}$$

Umformungen: Die Brüche mit $\sqrt{x}$ bzw. $\sqrt{y}$ erweitern, dann durch x bzw. y kürzen.

E10

Bilden Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $z = 4 \cdot \sin^3 (x^2 + y^2)$.

Wir benötigen die *Kettenregel*, wobei zunächst *zwei* Substitutionen nacheinander durchzuführen sind (wir substituieren wieder von innen nach außen):

$$z = 4 \cdot \sin^3 (x^2 + y^2) = 4 \cdot [\sin \underbrace{(x^2 + y^2)}_{u}]^3 = 4 \cdot [\underbrace{\sin u}_{v}]^3 = 4v^3 \quad \text{mit} \quad v = \sin u \quad \text{und} \quad u = x^2 + y^2$$

Die *Kettenregel* liefert (erst z nach v, dann v nach u und schließlich u partiell nach x differenzieren):

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 12v^2 \cdot \cos u \cdot 2x = 24xv^2 \cdot \cos u$$

Rücksubstitution (in der Reihenfolge $v \to u \to x$):

$$z_x = 24xv^2 \cdot \cos u = 24x \cdot \sin^2 u \cdot \cos u = 24x \cdot \sin^2 (x^2 + y^2) \cdot \cos (x^2 + y^2)$$

Wegen der *Symmetrie* der Funktionsgleichung (die Variablen x und y sind miteinander *vertauschbar*, ohne dass sich dabei die Funktionsgleichung ändert) erhalten wir z_y, wenn wir in z_x die beiden Variablen x und y miteinander *vertauschen*:

$$z_y = 24y \cdot \sin^2 (y^2 + x^2) \cdot \cos (y^2 + x^2) = 24y \cdot \sin^2 (x^2 + y^2) \cdot \cos (x^2 + y^2)$$

E11

Bilden Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $z = \arcsin (x\sqrt{y})$.

Die gesuchten partiellen Ableitungen erhalten wir wie folgt mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$z = \arcsin \underbrace{(x\sqrt{y})}_{u} = \arcsin u \quad \text{mit} \quad u = x\sqrt{y}$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot 1 \cdot \sqrt{y} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1 - x^2 y}}$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot x \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{x}{2\sqrt{1 - u^2} \cdot \sqrt{y}} = \frac{x}{2\sqrt{1 - x^2 y} \cdot \sqrt{y}}$$

E12

Zeigen Sie: Die Funktion

$$z = xy + x \cdot \ln \left(\frac{y}{x}\right) \qquad (\text{mit } x > 0 \text{ und } y > 0)$$

erfüllt die Gleichung $xz_x + yz_y = xy + z$.

Die Funktion wird *vor* dem Differenzieren unter Verwendung der Rechenregel $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ in eine *günstigere* Gestalt gebracht:

$$z = xy + x \cdot \ln \left(\frac{y}{x}\right) = xy + x(\ln y - \ln x) = xy + x \cdot \ln y - x \cdot \ln x = x(y + \ln y) - x \cdot \ln x$$

Gliedweises partielles Differenzieren nach x unter Verwendung der *Produktregel* liefert dann:

$$z = x\,\underbrace{(y + \ln y)}_{\text{konst. Faktor}} - \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\ln x}_{v} = x(y + \ln y) - (uv) \quad \text{mit} \quad u = x\,, \quad v = \ln x \quad \text{und} \quad u_x = 1\,, \quad v_x = \frac{1}{x}$$

$$z_x = 1\,(y + \ln y) - (u_x v + v_x u) = y + \ln y - \left(1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x\right) = y + \ln y - \ln x - 1$$

Die partielle Ableitung nach y lässt sich besonders einfach bilden:

$$z = \underbrace{x}_{\text{konst. Faktor}}\,(y + \ln y) - \underbrace{x \cdot \ln x}_{\text{konst. Summand}} \quad \Rightarrow \quad z_y = x\left(1 + \frac{1}{y}\right) - 0 = x + \frac{x}{y}$$

Wir setzen die Ausdrücke für z, z_x und z_y seitenweise in die vorgegebene Gleichung ein:

Linke Seite

$$x z_x + y z_y = x(y + \ln y - \ln x - 1) + y\left(x + \frac{x}{y}\right) = xy + x \cdot \ln y - x \cdot \ln x - x + xy + x =$$

$$= 2xy + x \cdot \ln y - x \cdot \ln x = x(2y + \ln y - \ln x)$$

Rechte Seite

$$xy + z = xy + xy + x \cdot \ln y - x \cdot \ln x = 2xy + x \cdot \ln y - x \cdot \ln x = x(2y + \ln y - \ln x)$$

Ein Vergleich zeigt, dass beide Seiten übereinstimmen.

E13

Bilden Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung von $z = x \cdot e^y - y \cdot e^x$.
Wie lauten die *reinen* partiellen Ableitungen 3. Ordnung?

Alle Ableitungen erhält man durch *elementare* gliedweise (partielle) Differentiation.

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}\,[x \cdot e^y - y \cdot e^x] = 1 \cdot e^y - y \cdot e^x = e^y - y \cdot e^x$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}\,[x \cdot e^y - y \cdot e^x] = x \cdot e^y - 1 \cdot e^x = x \cdot e^y - e^x$$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung

$$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\,z_x = \frac{\partial}{\partial x}\,[e^y - y \cdot e^x] = 0 - y \cdot e^x = -y \cdot e^x$$

$$\left.\begin{aligned} z_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}\,z_x = \frac{\partial}{\partial y}\,[e^y - y \cdot e^x] = e^y - 1 \cdot e^x = e^y - e^x \\ z_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x}\,z_y = \frac{\partial}{\partial x}\,[x \cdot e^y - e^x] = 1 \cdot e^y - e^x = e^y - e^x \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad z_{xy} = z_{yx} \qquad \text{(Satz von Schwarz)}$$

$$z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\,z_y = \frac{\partial}{\partial y}\,[x \cdot e^y - e^x] = x \cdot e^y - 0 = x \cdot e^y$$

Reine partielle Ableitungen 3. Ordnung

Es wird drei Mal partiell nach x bzw. y differenziert:

$$z_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x}\,z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\,[-y \cdot e^x] = -y \cdot e^x\,; \quad z_{yyy} = \frac{\partial}{\partial y}\,z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\,[x \cdot e^y] = x \cdot e^y$$

E14 Bilden Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung von $z = \dfrac{x - y}{x^2 + y^2}$.

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

Beide Ableitungen erhalten wir mit Hilfe der *Quotientenregel*:

$$z = \frac{x - y}{x^2 + y^2} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = x - y, \quad v = x^2 + y^2$$

$$z_x = \frac{u_x v - v_x u}{v^2} = \frac{1(x^2 + y^2) - 2x(x - y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2 + 2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2 + 2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$z_y = \frac{u_y v - v_y u}{v^2} = \frac{-1(x^2 + y^2) - 2y(x - y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 - y^2 - 2xy + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung

Wir benötigen jeweils die *Quotientenregel* in Verbindung mit der *Kettenregel*:

z_{xx}: Wir differenzieren z_x partiell nach x.

$$z_x = \frac{-x^2 + y^2 + 2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{u}{v}$$

$$u = -x^2 + y^2 + 2xy, \quad v = (x^2 + y^2)^2 \quad \text{und} \quad u_x = -2x + 2y, \quad v_x = 4x(x^2 + y^2)$$

(v_x erhält man mit der *Kettenregel*, Substitution: $t = x^2 + y^2$)

$$z_{xx} = \frac{u_x v - v_x u}{v^2} = \frac{(-2x + 2y)(x^2 + y^2)^2 - 4x(x^2 + y^2)(-x^2 + y^2 + 2xy)}{(x^2 + y^2)^4} =$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)\,[(-2x + 2y)(x^2 + y^2) - 4x(-x^2 + y^2 + 2xy)}{(x^2 + y^2)\,(x^2 + y^2)^3} =$$

$$= \frac{-2x^3 - 2xy^2 + 2x^2y + 2y^3 + 4x^3 - 4xy^2 - 8x^2y}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{2x^3 - 6x^2y - 6xy^2 + 2y^3}{(x^2 + y^2)^3}$$

z_{xy}: Wir differenzieren z_x partiell nach y.

$$z_x = \frac{-x^2 + y^2 + 2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{u}{v}$$

$$u = -x^2 + y^2 + 2xy, \quad v = (x^2 + y^2)^2 \quad \text{und} \quad u_y = 2y + 2x, \quad v_y = 4y(x^2 + y^2) \qquad \text{(Kettenregel!)}$$

$$z_{xy} = \frac{u_y v - v_y u}{v^2} = \frac{(2y + 2x)(x^2 + y^2)^2 - 4y(x^2 + y^2)(-x^2 + y^2 + 2xy)}{(x^2 + y^2)^4} =$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)\,[(2y + 2x)(x^2 + y^2) - 4y(-x^2 + y^2 + 2xy)]}{(x^2 + y^2)\,(x^2 + y^2)^3} =$$

$$= \frac{2x^2y + 2y^3 + 2x^3 + 2xy^2 + 4x^2y - 4y^3 - 8xy^2}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{2x^3 + 6x^2y - 6xy^2 - 2y^3}{(x^2 + y^2)^3}$$

z_{yx}: Wir differenzieren z_y partiell nach x.

$$z_y = \frac{-x^2 + y^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{u}{v}$$

$$u = -x^2 + y^2 - 2xy, \quad v = (x^2 + y^2)^2 \quad \text{und} \quad u_x = -2x - 2y, \quad v_x = 4x(x^2 + y^2) \quad \text{(Kettenregel!)}$$

$$z_{yx} = \frac{u_x v - v_x u}{v^2} = \frac{(-2x - 2y)(x^2 + y^2)^2 - 4x(x^2 + y^2)(-x^2 + y^2 - 2xy)}{(x^2 + y^2)^4} =$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)\,[(-2x - 2y)(x^2 + y^2) - 4x(-x^2 + y^2 - 2xy)]}{(x^2 + y^2)\,(x^2 + y^2)^3} =$$

$$= \frac{-2x^3 - 2xy^2 - 2x^2y - 2y^3 + 4x^3 - 4xy^2 + 8x^2y}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{2x^3 + 6x^2y - 6xy^2 - 2y^3}{(x^2 + y^2)^3}$$

Es gilt: $z_{xy} = z_{yx}$ (Satz von Schwarz).

z_{yy}: Wir differenzieren z_y partiell nach y.

$$z_y = \frac{-x^2 + y^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{u}{v}$$

$$u = -x^2 + y^2 - 2xy, \quad v = (x^2 + y^2)^2 \quad \text{und} \quad u_y = 2y - 2x, \quad v_y = 4y(x^2 + y^2) \quad \text{(Kettenregel!)}$$

$$z_{yy} = \frac{u_y v - v_y u}{v^2} = \frac{(2y - 2x)(x^2 + y^2)^2 - 4y(x^2 + y^2)(-x^2 + y^2 - 2xy)}{(x^2 + y^2)^4} =$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)\,[(2y - 2x)(x^2 + y^2) - 4y(-x^2 + y^2 - 2xy)]}{(x^2 + y^2)\,(x^2 + y^2)^3} =$$

$$= \frac{2x^2y + 2y^3 - 2x^3 - 2xy^2 + 4x^2y - 4y^3 + 8xy^2}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{-2x^3 + 6x^2y + 6xy^2 - 2y^3}{(x^2 + y^2)^3}$$

E15

Bilden Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung von $z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ an der Stelle $x = -1$, $y = 2$.

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

Differenziert wird jeweils nach der *Kettenregel*:

$$z = \arctan\underbrace{\left(\frac{y}{x}\right)}_{u} = \arctan u \quad \text{mit} \quad u = \frac{y}{x} = y \cdot x^{-1}$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1 + u^2} \cdot y(-1 \cdot x^{-2}) = \frac{-yx^{-2}}{1 + u^2} = \frac{-y}{(1 + u^2)\,x^2}$$

Rücksubstitution liefert (wir berechnen zunächst den Nenner $1 + u^2$):

$$1 + u^2 = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad z_x = \frac{-y}{(1 + u^2)\,x^2} = \frac{-y}{\dfrac{x^2 + y^2}{x^2} \cdot x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

Analog erhalten wir z_y:

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1 + u^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{(1 + u^2)\,x} = \frac{1}{\dfrac{x^2 + y^2}{x^2} \cdot x} = \frac{1}{\dfrac{x^2 + y^2}{x}} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Partielle Ableitungen 1. Ordnung an der Stelle $x = -1,\ y = 2$

$$z_x\,(x = -1;\ y = 2) = \frac{-2}{(-1)^2 + 2^2} = -\frac{2}{5}\,; \quad z_y\,(x = -1;\ y = 2) = \frac{-1}{(-1)^2 + 2^2} = -\frac{1}{5}$$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung

z_{xx}: z_x wird mit Hilfe der *Kettenregel* partiell nach x differenziert

$$z_x = \frac{-y}{x^2 + y^2} = -y\,\underbrace{(x^2 + y^2)}_{u}{}^{-1} = -y \cdot u^{-1} \quad \text{mit} \quad u = x^2 + y^2$$

$$z_{xx} = \frac{\partial z_x}{\partial x} = \frac{\partial z_x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -y\,(-1 \cdot u^{-2}) \cdot 2x = 2xy \cdot u^{-2} = \frac{2xy}{u^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Alternative: Quotientenregel, wobei der Zähler eine *konstante*, d. h. von x *unabhängige* Funktion ist.

z_{xy}: z_x wird mit Hilfe der *Quotientenregel* partiell nach y differenziert.

$$z_x = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = -y, \quad v = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad u_y = -1, \quad v_y = 2y$$

$$z_{xy} = \frac{u_y v - v_y u}{v^2} = \frac{-1\,(x^2 + y^2) - 2y(-y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Analog wird z_{yx} gebildet:

$$z_y = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = x, \quad v = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad u_x = 1, \quad v_x = 2x$$

$$z_{yx} = \frac{u_x v - v_x u}{v^2} = \frac{1\,(x^2 + y^2) - 2x \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Es gilt: $z_{xy} = z_{yx}$ (Satz von Schwarz).

z_{yy}: z_y wird über die *Ketten-* oder *Quotientenregel* partiell nach y differenziert. Wir wählen hier die *Quotientenregel*.

$$z_y = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = x, \quad v = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad u_y = 0, \quad v_y = 2y$$

$$z_{yy} = \frac{u_y v - v_y u}{v^2} = \frac{0\,(x^2 + y^2) - 2y \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung an der Stelle $x = -1,\ y = 2$

$$z_{xx}\,(x = -1;\ y = 2) = \frac{2\,(-1) \cdot 2}{[(-1)^2 + 2^2]^2} = -\frac{4}{25}\,; \quad z_{yy}\,(x = -1;\ y = 2) = \frac{-2\,(-1) \cdot 2}{[(-1)^2 + 2^2]^2} = \frac{4}{25}$$

$$z_{xy}\,(x = -1;\ y = 2) = z_{yx}\,(x = -1;\ y = 2) = \frac{-(-1)^2 + 2^2}{[(-1)^2 + 2^2]^2} = \frac{3}{25}$$

E16 Bilden Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung von $z = \ln(2y - x^2)$.

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

Wir verwenden wie folgt die *Kettenregel*:

$$z = \ln \underbrace{(2y - x^2)}_{u} = \ln u \quad \text{mit} \quad u = 2y - x^2$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{u} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{u} = \frac{-2x}{2y - x^2}$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{u} \cdot 2 = \frac{2}{u} = \frac{2}{2y - x^2}$$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung

z_{xx} erhalten wir, wenn wir z_x mit Hilfe der *Quotientenregel* partiell nach x differenzieren:

$$z_x = \frac{-2x}{2y - x^2} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = -2x, \quad v = 2y - x^2 \quad \text{und} \quad u_x = -2, \quad v_x = -2x$$

$$z_{xx} = \frac{u_x v - v_x u}{v^2} = \frac{-2(2y - x^2) - (-2x)(-2x)}{(2y - x^2)^2} = \frac{-4y + 2x^2 - 4x^2}{(2y - x^2)^2} = \frac{-2x^2 - 4y}{(2y - x^2)^2}$$

z_{xy} erhält man aus z_x durch partielles Differenzieren nach y. Wir benötigen die *Kettenregel*:

$$z_x = \frac{-2x}{2y - x^2} = -2x \underbrace{(2y - x^2)}_{u}{}^{-1} = -2x \cdot u^{-1} \quad \text{mit} \quad u = 2y - x^2$$

$$z_{xy} = \frac{\partial z_x}{\partial y} = \frac{\partial z_x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -2x(-1 \cdot u^{-2}) \cdot 2 = 4x \cdot u^{-2} = \frac{4x}{u^2} = \frac{4x}{(2y - x^2)^2}$$

Alternative: Sie differenzieren nach der *Quotientenregel*, wobei der Zähler eine *konstante*, d. h. von der Variablen y *unabhängige* Funktion ist.

z_{yx} erhalten wir, wenn wir z_y mit Hilfe der *Quotienten-* oder *Kettenregel* partiell nach x differenzieren. Wir wollen an dieser Stelle die *Quotientenregel* verwenden:

$$z_y = \frac{2}{2y - x^2} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = 2, \quad v = 2y - x^2 \quad \text{und} \quad u_x = 0, \quad v_x = -2x$$

$$z_{yx} = \frac{u_x v - v_x u}{v^2} = \frac{0(2y - x^2) - (-2x) \cdot 2}{(2y - x^2)^2} = \frac{4x}{(2y - x^2)^2}$$

Es gilt: $z_{xy} = z_{yx}$ (Satz von Schwarz).

z_{yy} erhalten wir, wenn z_y mit Hilfe der *Ketten-* oder *Quotientenregel* partiell nach y differenziert wird. Wir verwenden hier die *Kettenregel*:

$$z_y = \frac{2}{2y - x^2} = 2 \underbrace{(2y - x^2)}_{u}{}^{-1} = 2u^{-1} \quad \text{mit} \quad u = 2y - x^2$$

$$z_{yy} = \frac{\partial z_y}{\partial y} = \frac{\partial z_y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 2(-1 \cdot u^{-2}) \cdot 2 = -4u^{-2} = \frac{-4}{u^2} = \frac{-4}{(2y - x^2)^2}$$

E17

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x;\, t) = \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin(\pi x)$$

eine Lösung der Gleichung $a^2 \cdot f_{xx} = f_t$ ist (a: Konstante).

Wir bilden zunächst die benötigten partiellen Ableitungen f_t und f_{xx}.

Partielle Ableitung f_t

$$f = \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin(\pi x) = \sin(\pi x) \cdot \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} = \sin(\pi x) \cdot \mathrm{e}^{u} \quad \text{mit} \quad u = -\pi^2 a^2 t$$

Mit der *Kettenregel* erhält man ($\sin(\pi x)$ ist ein *konstanter* Faktor):

$$f_t = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \sin(\pi x) \cdot \mathrm{e}^{u} \cdot (-\pi^2 a^2) = -\pi^2 a^2 \cdot \sin(\pi x) \cdot \mathrm{e}^{u} = -\pi^2 a^2 \cdot \sin(\pi x) \cdot \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t}$$

Partielle Ableitung f_{xx}

Wir differenzieren die Funktion $f(x;\, t)$ *zweimal* nacheinander partiell nach x, wobei wir jedes Mal die *Kettenregel* benutzen ($\mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t}$ ist dabei ein *konstanter* Faktor):

$$f = \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin\underbrace{(\pi x)}_{u} = \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin u \quad \text{mit} \quad u = \pi x$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot (\cos u) \cdot \pi = \pi \cdot \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \cos u \quad \text{mit} \quad u = \pi x$$

$$f_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \pi \cdot \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot (-\sin u) \cdot \pi = -\pi^2 \cdot \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin(\pi x)$$

Wir multiplizieren f_{xx} mit a^2 und erhalten:

$$a^2 \cdot f_{xx} = a^2 [-\pi^2 \cdot \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin(\pi x)] = \underbrace{-\pi^2 a^2 \cdot \sin(\pi x) \cdot \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t}}_{f_t} = f_t$$

Die gegebene Funktion erfüllt somit (wie behauptet) die Differentialgleichung $a^2 \cdot f_{xx} = f_t$.

E18

Bilden Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung von $z = 5 \cdot \mathrm{e}^{x^2 - y^2}$.

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

Differenziert wird unter Verwendung der *Kettenregel*:

$$z = 5 \cdot \mathrm{e}^{x^2 - y^2} = 5 \cdot \mathrm{e}^{t} \quad \text{mit} \quad t = x^2 - y^2$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = 5 \cdot \mathrm{e}^{t} \cdot 2x = 10x \cdot \mathrm{e}^{t} = 10x \cdot \mathrm{e}^{x^2 - y^2}$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = 5 \cdot \mathrm{e}^{t} \cdot (-2y) = -10y \cdot \mathrm{e}^{t} = -10y \cdot \mathrm{e}^{x^2 - y^2}$$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung

Bei der Bildung der partiellen Ableitungen 2. Ordnung benötigen wir immer wieder die partiellen Ableitungen *1. Ordnung* der Funktion $\mathrm{e}^{x^2-y^2}$. Diese aber sind (bis auf den Faktor 5) identisch mit den bereits bekannten Ableitungen z_x und z_y unserer Ausgangsfunktion. Somit gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{x^2-y^2}\right) = 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2-y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{e}^{x^2-y^2}\right) = -2y \cdot \mathrm{e}^{x^2-y^2}$$

z_{xx}: Die partielle Ableitung z_x wird mit Hilfe der *Produkt-* und *Kettenregel* partiell nach x differenziert.

$$z_x = \underbrace{10x}_{u} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{x^2-y^2}}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = 10x, \quad v = \mathrm{e}^{x^2-y^2} \quad \text{und} \quad u_x = 10, \quad v_x = 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2-y^2}$$

$$z_{xx} = u_x v + v_x u = 10 \cdot \mathrm{e}^{x^2-y^2} + 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2-y^2} \cdot 10x = (10 + 20x^2) \cdot \mathrm{e}^{x^2-y^2}$$

z_{xy}: Die partielle Ableitung z_x wird partiell nach y differenziert (*Kettenregel*).

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} z_x = \frac{\partial}{\partial y}\left(10x \cdot \mathrm{e}^{x^2-y^2}\right) = 10x \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{e}^{x^2-y^2}\right) = 10x \cdot (-2y \cdot \mathrm{e}^{x^2-y^2}) = -20xy \cdot \mathrm{e}^{x^2-y^2}$$

z_{yx}: Die partielle Ableitung z_y wird partiell nach x differenziert (*Kettenregel*).

$$z_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} z_y = \frac{\partial}{\partial x}\left(-10y \cdot \mathrm{e}^{x^2-y^2}\right) = -10y \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{e}^{x^2-y^2}\right) = -10y \cdot 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2-y^2} = -20xy \cdot \mathrm{e}^{x^2-y^2}$$

Erwartungsgemäß ist $z_{xy} = z_{yx}$ (Satz von Schwarz).

z_{yy}: Die partielle Ableitung z_y wird partiell nach y differenziert (*Produkt-* und *Kettenregel*).

$$z_y = \underbrace{-10y}_{u} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{x^2-y^2}}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = -10y, \quad v = \mathrm{e}^{x^2-y^2} \quad \text{und} \quad u_y = -10, \quad v_y = -2y \cdot \mathrm{e}^{x^2-y^2}$$

$$z_{yy} = u_y v + v_y u = -10 \cdot \mathrm{e}^{x^2-y^2} - 2y \cdot \mathrm{e}^{x^2-y^2} \cdot (-10y) = (-10 + 20y^2) \cdot \mathrm{e}^{x^2-y^2}$$

E19

Bilden Sie zunächst die partiellen Ableitungen 1. Ordnung von $w = \mathrm{e}^{y/x}$ und dann unter Verwendung der erzielten Ergebnisse die *gemischten* partiellen Ableitungen 2. Ordnung von $z = x \cdot w = x \cdot \mathrm{e}^{y/x}$.

Partielle Ableitungen 1. Ordnung von $w = \mathrm{e}^{y/x}$

Mit der *Kettenregel* erhalten wir wie folgt die gewünschten Ableitungen:

$$w = \mathrm{e}^{y/x} = \mathrm{e}^{t} \quad \text{mit} \quad t = \frac{y}{x} = y \cdot x^{-1}$$

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \mathrm{e}^{t} \cdot y \cdot (-1 \cdot x^{-2}) = -yx^{-2} \cdot \mathrm{e}^{t} = -yx^{-2} \cdot \mathrm{e}^{y/x}$$

$$w_y = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \mathrm{e}^{t} \cdot 1 \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot \mathrm{e}^{y/x}$$

Diese Ableitungen lassen sich wegen $\mathrm{e}^{y/x} = w$ auch wie folgt ausdrücken:

$$w_x = -yx^{-2} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{y/x}}_{w} = -yx^{-2} \cdot w, \qquad w_y = x^{-1} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{y/x}}_{w} = x^{-1} \cdot w$$

Gemischte partielle Ableitungen 2. Ordnung von $z = x \cdot w = x \cdot e^{y/x}$

Mit der *Produktregel* erhalten wir z_x:

$$z = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{w}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = x, \quad v = w \quad \text{und} \quad u_x = 1, \quad v_x = w_x = -yx^{-2} \cdot w$$

$$z_x = u_x v + v_x u = 1 \cdot w - yx^{-2} \cdot w \cdot x = w - yx^{-1} \cdot w = (1 - x^{-1} \cdot y) \cdot w$$

Wiederum mit Hilfe der *Produktregel* bilden wir die gemischte partielle Ableitung z_{xy}:

$$z_x = \underbrace{(1 - x^{-1} \cdot y)}_{u} \cdot \underbrace{w}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = 1 - x^{-1} \cdot y, \quad v = w \quad \text{und} \quad u_y = -x^{-1}, \quad v_y = w_y = x^{-1} \cdot w$$

$$z_{xy} = u_y v + v_y u = -x^{-1} \cdot w + x^{-1} \cdot w \cdot (1 - x^{-1} \cdot y) =$$

$$= -x^{-1} \cdot w + x^{-1} \cdot w - x^{-2} \cdot y \cdot w = -x^{-2} \cdot y \cdot w = -x^{-2} \cdot y \cdot e^{y/x}$$

Jetzt bilden wir die gemischte partielle Ableitung z_{yx}. Zunächst differenzieren wir die Funktion $z = x \cdot w$ partiell nach y (dabei bleibt x als *konstanter* Faktor erhalten):

$$z_y = x \cdot w_y = x \cdot x^{-1} \cdot w = w$$

Wir differenzieren weiter partiell nach x:

$$z_{yx} = w_x = -y \cdot x^{-2} \cdot w = -x^{-2} \cdot y \cdot e^{y/x}$$

Die gemischten partiellen Ableitungen 2. Ordnung stimmen also überein (Satz von Schwarz):

$$z_{xy} = z_{yx} = -x^{-2} \cdot y \cdot e^{y/x}$$

E20 Bilden Sie mit der Funktion $w = \ln(x^2 + y^2)$ den Differentialausdruck $w_{xx} + w_{yy}$.

Die Funktion ist *symmetrisch* bezüglich der Variablen x und y (Vertauschung dieser Variablen ändert *nichts* an der Funktionsgleichung). Daher genügt es, die partielle Ableitung w_{xx} zu bilden, aus der man dann durch *Vertauschen* der beiden Variablen die Ableitung w_{yy} erhält.

Zunächst differenzieren wir partiell nach x und verwenden dabei die *Kettenregel*:

$$w = \ln \underbrace{(x^2 + y^2)}_{t} = \ln t \quad \text{mit} \quad t = x^2 + y^2$$

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{t} \cdot 2x = \frac{2x}{t} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

Die partielle Ableitung 2. Ordnung w_{xx} bilden wir mit Hilfe der *Quotientenregel*:

$$w_x = \frac{2x}{x^2 + y^2} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = 2x, \quad v = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad u_x = 2, \quad v_x = 2x$$

$$w_{xx} = \frac{u_x v - v_x u}{v^2} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Durch *Vertauschen* von x und y folgt dann:

$$w_{yy} = \frac{-2y^2 + 2x^2}{(y^2 + x^2)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Somit gilt:

$$w_{xx} + w_{yy} = \frac{-2x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2 + 2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{0}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

E21 $z = \dfrac{x^2}{1 + y^2}$

Die gemischte partielle Ableitung 3. Ordnung z_{xyx} dieser Funktion soll mit möglichst wenig Rechenaufwand bestimmt werden *(Satz von Schwarz)*.

Günstigste Differentiationsreihenfolge: $x \to x \to y$. Wir bilden somit z_{xxy}:

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x^2}{1 + y^2}\right] = \frac{1}{1 + y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2\right] = \frac{1}{1 + y^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1 + y^2}$$

$$z_{xx} = \frac{\partial z_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2x}{1 + y^2}\right] = \frac{2}{1 + y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}[x] = \frac{2}{1 + y^2} \cdot 1 = \frac{2}{1 + y^2}$$

Diesen Ausdruck differenzieren partiell nach y unter Verwendung der *Kettenregel*:

$$z_{xx} = \frac{2}{1 + y^2} = 2\,\underbrace{(1 + y^2)}_{u}{}^{-1} = 2u^{-1} \quad \text{mit} \quad u = 1 + y^2$$

$$z_{xxy} = \frac{\partial z_{xx}}{\partial y} = \frac{\partial z_{xx}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 2(-1 \cdot u^{-2}) \cdot 2y = -4y \cdot u^{-2} = \frac{-4y}{u^2} = \frac{-4y}{(1 + y^2)^2}$$

E22 Bestimmen Sie von der Funktion $z = xy \cdot \arctan x$ alle partiellen Ableitungen 1. bis 3. Ordnung (auf der Basis des *Satzes von Schwarz*).

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

z_x erhalten wir mit Hilfe der *Produktregel*:

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}[\underset{\uparrow\,\text{konst. Faktor}}{y} \cdot \arctan x] = y \cdot \frac{\partial}{\partial x}[\underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\arctan x}_{v}] \quad \text{mit} \quad u = x, \quad v = \arctan x \quad \text{und} \quad u_x = 1, \quad v_x = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$z_x = y(u_x v + v_x u) = y\left(1 \cdot \arctan x + \frac{1}{1 + x^2} \cdot x\right) = y\left(\arctan x + \frac{x}{1 + x^2}\right)$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}[\underset{\uparrow}{x}\,y \cdot \underset{\uparrow}{\arctan x}] = x \cdot \arctan x \cdot \frac{\partial}{\partial y}[y] = x \cdot \arctan x \cdot 1 = x \cdot \arctan x$$

konstante Faktoren

Partielle Ableitungen 2. Ordnung

$$z_{xx} = \frac{\partial z_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\underset{\uparrow\,\text{konst. Faktor}}{y}\left(\arctan x + \frac{x}{1 + x^2}\right)\right] = y \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\arctan x + \frac{x}{1 + x^2}\right] = y \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\arctan x + \frac{u}{v}\right]$$

$$u = x, \quad v = 1 + x^2 \quad \text{und} \quad u_x = 1, \quad v_x = 2x$$

Es wird *gliedweise* differenziert, der 2. Summand dabei nach der *Quotientenregel*:

$$z_{xx} = y\left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{u_x v - v_x u}{v^2}\right) = y\left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1(1+x^2) - 2x \cdot x}{(1+x^2)^2}\right) =$$

$$= y\left(\frac{1(1+x^2) + 1 + x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2}\right) = y\left(\frac{1+x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2}\right) = y \cdot \frac{2}{(1+x^2)^2} = \frac{2y}{(1+x^2)^2}$$

$$z_{xy} = \frac{\partial z_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[y\underbrace{\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right)}_{\text{konst. Faktor}}\right] = \left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}[y] =$$

$$= \left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right) \cdot 1 = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$$

$$z_{yy} = \frac{\partial z_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{[x \cdot \arctan x]}_{\text{konst. Summand}} = 0$$

Partielle Ableitungen 3. Ordnung

Wir differenzieren zunächst z_{xx} wie folgt partiell nach x unter Verwendung der *Kettenregel*:

$$z_{xx} = \frac{2y}{(1+x^2)^2} = 2y\,\underbrace{(1+x^2)}_{u}{}^{-2} = 2y \cdot u^{-2} \quad \text{mit} \quad u = 1 + x^2$$

$$z_{xxx} = \frac{\partial z_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial z_{xx}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 2y \cdot (-2u^{-3}) \cdot 2x = -8xy \cdot u^{-3} = \frac{-8xy}{u^3} = \frac{-8xy}{(1+x^2)^3}$$

z_{xxy} erhalten wir, indem wir z_{xx} partiell nach y differenzieren:

$$z_{xxy} = \frac{\partial z_{xx}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2y}{(1+x^2)^2}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\underset{\uparrow\text{ konst. Faktor}}{\frac{2}{(1+x^2)^2}} \cdot y\right] = \frac{2}{(1+x^2)^2} \cdot 1 = \frac{2}{(1+x^2)^2}$$

Wegen $z_{yy} = 0$ gilt: $z_{xyx} = z_{yxy} = z_{xyy} = 0$ und $z_{yyy} = 0$.

E23 Zeigen Sie: Für die Funktion $z = \mathrm{e}^{xy}$ gilt $z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}$.

Wir bilden zunächst alle benötigten partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung. Dies sind: z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yx}

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

z_x erhalten wir mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$z = \mathrm{e}^{xy} = \mathrm{e}^{u} \quad \text{mit} \quad u = xy \quad \Rightarrow \quad z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^{u} \cdot y = y \cdot \mathrm{e}^{xy}$$

Analog (wegen der *Symmetrie* der Funktion bezüglich der Variablen x und y):

$$z_y = x \cdot \mathrm{e}^{xy}$$

Diese partiellen Ableitungen werden wir im Folgenden an verschiedenen Stellen benötigen. Wir merken uns daher:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{e}^{xy}\right] = y \cdot \mathrm{e}^{xy} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[\mathrm{e}^{xy}\right] = x \cdot \mathrm{e}^{xy}$$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung: z_{xx}, z_{xy}, z_{yx}

z_{xx}: Wir differenzieren z_x partiell nach x (*Kettenregel*).

$$z_{xx} = \frac{\partial z_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[y \cdot \mathrm{e}^{xy}\right] = y \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{e}^{xy}\right] = y \cdot y \cdot \mathrm{e}^{xy} = y^2 \cdot \mathrm{e}^{xy}$$

z_{xy}: Die Ableitung z_x wird partiell nach y differenziert (*Produkt-* und *Kettenregel*).

$$z_{xy} = \frac{\partial z_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\underbrace{y}_{u} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{xy}}_{v}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[uv\right] \quad \text{mit} \quad u = y, \quad v = \mathrm{e}^{xy} \quad \text{und} \quad u_y = 1, \quad v_y = x \cdot \mathrm{e}^{xy}$$

$$z_{xy} = u_y v + v_y u = 1 \cdot \mathrm{e}^{xy} + x \cdot \mathrm{e}^{xy} \cdot y = (1 + xy) \cdot \mathrm{e}^{xy}$$

z_{yx}: Wir differenzieren z_y partiell nach x (*Produkt-* und *Kettenregel*).

$$z_{yx} = \frac{\partial z_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{xy}}_{v}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[uv\right] \quad \text{mit} \quad u = x, \quad v = \mathrm{e}^{xy} \quad \text{und} \quad u_x = 1, \quad v_x = y \cdot \mathrm{e}^{xy}$$

$$z_{yx} = u_x v + v_x u = 1 \cdot \mathrm{e}^{xy} + y \cdot \mathrm{e}^{xy} \cdot x = (1 + xy) \cdot \mathrm{e}^{xy}$$

Partielle Ableitungen 3. Ordnung: z_{xxy}, z_{xyx}, z_{yxx}

z_{xxy} : Wir differenzieren z_{xx} partiell nach y (*Produkt-* und *Kettenregel*).

$$z_{xxy} = \frac{\partial z_{xx}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\underbrace{y^2}_{u} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{xy}}_{v}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[uv\right] \quad \text{mit} \quad u = y^2, \quad v = \mathrm{e}^{xy} \quad \text{und} \quad u_y = 2y, \quad v_y = x \cdot \mathrm{e}^{xy}$$

$$z_{xxy} = u_y v + v_y u = 2y \cdot \mathrm{e}^{xy} + x \cdot \mathrm{e}^{xy} \cdot y^2 = (2y + xy^2) \cdot \mathrm{e}^{xy}$$

z_{xyx}: Wir differenzieren z_{xy} partiell nach x (*Produkt-* und *Kettenregel*).

$$z_{xyx} = \frac{\partial z_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\underbrace{(1 + xy)}_{u} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{xy}}_{v}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[uv\right] \quad \text{mit} \quad u = 1 + xy, \quad v = \mathrm{e}^{xy}, \quad u_x = y, \quad v_x = y \cdot \mathrm{e}^{xy}$$

$$z_{xyx} = u_x v + v_x u = y \cdot \mathrm{e}^{xy} + y \cdot \mathrm{e}^{xy} \cdot (1 + xy) = y \cdot \mathrm{e}^{xy} + y \cdot \mathrm{e}^{xy} + xy^2 \cdot \mathrm{e}^{xy} =$$

$$= 2y \cdot \mathrm{e}^{xy} + xy^2 \cdot \mathrm{e}^{xy} = (2y + xy^2) \cdot \mathrm{e}^{xy}$$

z_{yxx}: Wir differenzieren z_{yx} partiell nach x (*Produkt-* und *Kettenregel*).

$$z_{yxx} = \frac{\partial z_{yx}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\underbrace{(1 + xy)}_{u} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{xy}}_{v}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[uv\right] \quad \text{mit} \quad u = 1 + xy, \quad v = \mathrm{e}^{xy}, \quad u_x = y, \quad v_x = y \cdot \mathrm{e}^{xy}$$

$$z_{yxx} = u_x v + v_x u = y \cdot \mathrm{e}^{xy} + y \cdot \mathrm{e}^{xy} \cdot (1 + xy) = y \cdot \mathrm{e}^{xy} + y \cdot \mathrm{e}^{xy} + xy^2 \cdot \mathrm{e}^{xy} =$$

$$= 2y \cdot \mathrm{e}^{xy} + xy^2 \cdot \mathrm{e}^{xy} = (2y + xy^2) \cdot \mathrm{e}^{xy}$$

Durch Vergleich stellen wir fest:

$$z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx} = (2y + xy^2) \cdot \mathrm{e}^{xy}$$

2 Differentiation nach einem Parameter (Kettenregel)

Hinweis

Lehrbuch: Band 2, Kapitel III.2.3
Formelsammlung: Kapitel IX.2.3

E24

$z = x^2 + 6xy + 2y^2 \quad \text{mit} \quad x(t) = \cos t, \; y(t) = \sin t$
Differenzieren Sie z nach dem Parameter t. Welchen Wert hat diese Ableitung an der Stelle $t = \pi/2$?

Wir bilden zunächst die benötigten Ableitungen z_x, z_y, $\dot{x}$ und $\dot{y}$ und drücken diese mit Hilfe der Parametergleichungen durch den Parameter t aus:

$$z_x = 2x + 6y = 2 \cdot \cos t + 6 \cdot \sin t, \quad z_y = 6x + 4y = 6 \cdot \cos t + 4 \cdot \sin t$$

$$\dot{x} = -\sin t, \quad \dot{y} = \cos t$$

Damit erhalten wir für die gesuchte Ableitung $\dot{z}$ den folgenden vom Parameter t abhängigen Ausdruck:

$$\dot{z} = z_x \dot{x} + z_y \dot{y} = (2 \cdot \cos t + 6 \cdot \sin t) \cdot (-\sin t) + (6 \cdot \cos t + 4 \cdot \sin t) \cdot \cos t =$$

$$= -2 \cdot \sin t \cdot \cos t - 6 \cdot \sin^2 t + 6 \cdot \cos^2 t + 4 \cdot \sin t \cdot \cos t =$$

$$= \underbrace{2 \cdot \sin t \cdot \cos t}_{\sin(2t)} + 6(\underbrace{\cos^2 t}_{1 - \sin^2 t} - \sin^2 t) = \sin(2t) + 6(1 - 2 \cdot \sin^2 t)$$

(unter Berücksichtigung der Beziehungen $\sin(2t) = 2 \cdot \sin t \cdot \cos t$ und $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$). Somit gilt:

$$\dot{z}(t = \pi/2) = \sin \pi + 6(1 - 2 \cdot \sin^2(\pi/2)) = 0 + 6(1 - 2 \cdot 1) = -6$$

E25

$z = \arctan(x - y) \quad \text{mit} \quad x(t) = e^{3t}, \; y(t) = 1 - e^{3t}$
Bestimmen Sie $\dot{z}(t)$ und $\dot{z}(t = 0)$.

Wir benötigen die Ableitungen z_x, z_y, $\dot{x}$ und $\dot{y}$. Die partiellen Ableitungen z_x und z_y erhalten wir mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$z = \arctan \underbrace{(x - y)}_{u} = \arctan u \quad \text{mit} \quad u = x - y$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1 + u^2} \cdot 1 = \frac{1}{1 + u^2} = \frac{1}{1 + (x - y)^2}$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1 + u^2} \cdot (-1) = -\frac{1}{1 + u^2} = -\frac{1}{1 + (x - y)^2}$$

Auch die Ableitungen $\dot{x}$ und $\dot{y}$ bilden wir mit der *Kettenregel*:

$$x = e^{3t} = e^u \quad \text{mit} \quad u = 3t \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} = e^u \cdot 3 = 3 \cdot e^{3t}$$

$$y = 1 - e^{3t} = 1 - e^u \quad \text{mit} \quad u = 3t \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = 0 - e^u \cdot 3 = -3 \cdot e^{3t}$$

Damit erhalten wir für die Ableitung der Funktion $z = \arctan(x - y)$ nach dem Parameter t den folgenden Ausdruck (für x und y werden die Parametergleichungen eingesetzt):

$$\dot{z} = z_x \dot{x} + z_y \dot{y} = \frac{1}{1 + (x - y)^2} \cdot 3 \cdot e^{3t} - \frac{1}{1 + (x - y)^2} \cdot (-3 \cdot e^{3t}) = \frac{3 \cdot e^{3t} + 3 \cdot e^{3t}}{1 + (x - y)^2} =$$

$$= \frac{6 \cdot e^{3t}}{1 + (x - y)^2} = \frac{6 \cdot e^{3t}}{1 + (e^{3t} - 1 + e^{3t})^2} = \frac{6 \cdot e^{3t}}{1 + (2 \cdot e^{3t} - 1)^2}$$

$$\dot{z}(t = 0) = \frac{6 \cdot e^0}{1 + (2 \cdot e^0 - 1)^2} = \frac{6 \cdot 1}{1 + (2 \cdot 1 - 1)^2} = \frac{6}{2} = 3$$

E26

$u = \frac{xz}{y}$ mit $x(p) = e^p, \quad y(p) = p, \quad z(p) = \ln p$

Wie lautet die Ableitung von u nach den Parameter p? Berechnen Sie ferner $\dot{u}(p = 1)$.

Da die Funktion von *drei* unabhängigen Variablen abhängt, benötigen wir folgende Ableitungen: u_x, u_y, u_z und $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Wir erhalten sie durch *elementare* Differentiation und drücken sie unter Verwendung der Parametergleichungen durch den Parameter p aus:

$$u_x = \frac{z}{y} = \frac{\ln p}{p}, \qquad u_y = xz(-y^{-2}) = -\frac{xz}{y^2} = -\frac{e^p \cdot \ln p}{p^2}, \qquad u_z = \frac{x}{y} = \frac{e^p}{p}$$

$$\dot{x} = e^p, \quad \dot{y} = 1, \quad \dot{z} = \frac{1}{p}$$

Dann gilt:

$$\dot{u} = u_x \dot{x} + u_y \dot{y} + u_z \dot{z} = \frac{\ln p}{p} \cdot e^p - \frac{e^p \cdot \ln p}{p^2} \cdot 1 + \frac{e^p}{p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{e^p \cdot \ln p}{p} - \frac{e^p \cdot \ln p}{p^2} + \frac{e^p}{p^2} =$$

$$= \frac{p \cdot e^p \cdot \ln p - e^p \cdot \ln p + e^p}{p^2} = \frac{(p \cdot \ln p - \ln p + 1) \cdot e^p}{p^2}$$

$$\dot{u}(p = 1) = \frac{(1 \cdot \ln 1 - \ln 1 + 1) \cdot e^1}{1} = \frac{(1 \cdot 0 - 0 + 1) \cdot e}{1} = e$$

E27

$z = \ln(x^2 + y^2)$ mit $x = x, \quad y = \cos x$

Bestimmen Sie die Ableitung von z nach dem Parameter x sowie $\dot{z}(x = \pi)$.

Hinweis: Die Koordinate x ist zuleich der Parameter.

Wir benötigen die Ableitungen $z_x, z_y, \dot{x}$ und $\dot{y}$ (Parameter ist die Variable x). Mit Hilfe der *Kettenregel* erhalten wir die partiellen Ableitungen z_x und z_y und beachten dabei die *Symmetrie* der Funktion bezüglich der Variablen x und y:

$$z = \ln \underbrace{(x^2 + y^2)}_{u} = \ln u \quad \text{mit} \quad u = x^2 + y^2$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{u} \cdot 2x = \frac{2x}{u} = \frac{2x}{x^2 + y^2}; \qquad \text{analog: } z_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

Ferner: $\dot{x} = 1, \ \dot{y} = -\sin x$

Die gesuchte Ableitung von z nach dem Parameter x lautet damit (unter Berücksichtigung der Parametergleichung $y = \cos x$):

$$\dot{z}(x) = z_x \dot{x} + z_y \dot{y} = \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot 1 + \frac{2y}{x^2 + y^2} \cdot (-\sin x) = \frac{2x - 2y \cdot \sin x}{x^2 + y^2} = \frac{2(x - \cos x \cdot \sin x)}{x^2 + \cos^2 x}$$

$$\dot{z}(x = \pi) = \frac{2(\pi - \cos \pi \cdot \sin \pi)}{\pi^2 + \cos^2 \pi} = \frac{2(\pi + 1 \cdot 0)}{\pi^2 + 1} = \frac{2\pi}{\pi^2 + 1} = 0{,}5781$$

E28

Gegeben ist die Funktion $z = z(x; y) = \sin(x^2 + y)$. Die unabhängigen Variablen x und y hängen dabei wie folgt von den *Parametern* u und v ab:

$$x(u; v) = u + v, \quad y(u; v) = u^2 - v^2$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial u}$ und $\frac{\partial z}{\partial v}$ für das Wertepaar $(u; v) = (2; 1)$.

Wir benötigen folgende partielle Ableitungen: $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$

Zunächst beschäftigen wir uns mit den beiden partiellen Ableitungen der Funktion $z = \sin(x^2 + y)$:

$$z = \sin \underbrace{(x^2 + y)}_{t} = \sin t \quad \text{mit} \quad t = x^2 + y$$

Die *Kettenregel* liefert die gewünschten Ableitungen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = (\cos t) \cdot 2x = 2x \cdot \cos t = 2x \cdot \cos(x^2 + y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = (\cos t) \cdot 1 = \cos t = \cos(x^2 + y)$$

Wir drücken diese Ableitungen noch durch die beiden Parameter u und v aus (Parametergleichungen für x und y einsetzen):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cdot \cos(x^2 + y) = 2(u + v) \cdot \cos[(u + v)^2 + u^2 - v^2] =$$

$$= 2(u + v) \cdot \cos(u^2 + 2uv + v^2 + u^2 - v^2) = 2(u + v) \cdot \cos(2u^2 + 2uv)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(x^2 + y) = \cos[(u + v)^2 + u^2 - v^2] = \cos(2u^2 + 2uv)$$

Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Parametergleichungen lauten:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 2u, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -2v$$

Jetzt lassen sich die gesuchten partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial u}$ und $\frac{\partial z}{\partial v}$ wie folgt bestimmen (*Kettenregel*):

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = 2(u + v) \cdot \cos(2u^2 + 2uv) \cdot 1 + \cos(2u^2 + 2uv) \cdot 2u =$$

$$= [2(u + v) + 2u] \cdot \cos(2u^2 + 2uv) = (2u + 2v + 2u) \cdot \cos(2u^2 + 2uv) =$$

$$= 2(2u + v) \cdot \cos(2u^2 + 2uv)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = 2(u+v) \cdot \cos(2u^2 + 2uv) \cdot 1 + \cos(2u^2 + 2uv) \cdot (-2v) =$$

$$= [2(u+v) - 2v] \cdot \cos(2u^2 + 2uv) = 2u \cdot \cos(2u^2 + 2uv)$$

Ableitungen an der Stelle $(u;\, v) = (2;\, 1)$

$$\frac{\partial z}{\partial u}(u = 2;\ v = 1) = 2(2 \cdot 2 + 1) \cdot \cos(2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1) = 2 \cdot 5 \cdot \cos(8 + 4) =$$

$$= 10 \cdot \cos 12 = 8{,}4385$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}(u = 2;\ v = 1) = 2 \cdot 2 \cdot \cos(2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1) = 4 \cdot \cos(8 + 4) = 4 \cdot \cos 12 = 3{,}3754$$

E29

$z = \mathrm{e}^{x-y}$ mit $x(u;\, v) = uv, \quad y(u;\, v) = u^2 - v^2$

Welchen Wert besitzen die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ und $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ an der Stelle $u = v = 1$?

Benötigt werden folgende partielle Ableitungen: $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y},\ \dfrac{\partial x}{\partial u},\ \dfrac{\partial x}{\partial v},\ \dfrac{\partial y}{\partial u},\ \dfrac{\partial y}{\partial v}$

Wir beginnen mit den partiellen Ableitungen von $z = \mathrm{e}^{x-y} = \mathrm{e}^{x} \cdot \mathrm{e}^{-y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[\mathrm{e}^{x} \cdot \mathrm{e}^{-y}] = \mathrm{e}^{-y} \cdot \frac{\partial}{\partial x}[\mathrm{e}^{x}] = \mathrm{e}^{-y} \cdot \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x-y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[\mathrm{e}^{x} \cdot \mathrm{e}^{-y}] = \mathrm{e}^{x} \cdot \frac{\partial}{\partial y}[\mathrm{e}^{-y}] = \mathrm{e}^{x} \cdot (\mathrm{e}^{-y}) \cdot (-1) = -\mathrm{e}^{x} \cdot \mathrm{e}^{-y} = -\mathrm{e}^{x-y}$$

(Ableitung von e^{-y} nach der *Kettenregel*, Substitution: $t = -y$)

Die partiellen Ableitungen der beiden Parametergleichungen lauten:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = u, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 2u, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -2v$$

Die gesuchten partiellen Ableitungen der Funktion $z = \mathrm{e}^{x-y}$ nach den Parametern u und v lassen sich jetzt wie folgt bilden (für x und y werden schließlich noch die Parametergleichungen eingesetzt):

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \mathrm{e}^{x-y} \cdot v - \mathrm{e}^{x-y} \cdot 2u = (v - 2u) \cdot \mathrm{e}^{x-y} = (v - 2u) \cdot \mathrm{e}^{uv - u^2 + v^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \mathrm{e}^{x-y} \cdot u - \mathrm{e}^{x-y} \cdot (-2v) = (u + 2v) \cdot \mathrm{e}^{x-y} = (u + 2v) \cdot \mathrm{e}^{uv - u^2 + v^2}$$

An der Stelle $u = v = 1$ erhalten wir:

$$\frac{\partial z}{\partial u}(u = 1;\ v = 1) = (1 - 2) \cdot \mathrm{e}^{1-1+1} = -\mathrm{e}^{1} = -e$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}(u = 1;\ v = 1) = (1 + 2) \cdot \mathrm{e}^{1-1+1} = 3 \cdot \mathrm{e}^{1} = 3 \cdot e$$

E30

$z = x^3 y + x y^3 \quad \text{mit} \quad x(r;\varphi) = r \cdot \cos\varphi\,, \quad y(r;\varphi) = r \cdot \sin\varphi$

Bilden Sie die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ und $\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}$.

Benötigt werden die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial x}{\partial r}, \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}, \dfrac{\partial y}{\partial r}$ und $\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}$. Sie lauten:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + y^3 = y(3x^2 + y^2)\,, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 3xy^2 = x(x^2 + 3y^2)$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi\,, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \cdot \sin\varphi\,, \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi\,, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cdot \cos\varphi$$

Damit lassen sich die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $z = xy(x^2 + y^2)$ mit Hilfe der *Kettenregel* wie folgt bilden:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = y(3x^2 + y^2) \cdot \cos\varphi + x(x^2 + 3y^2) \cdot \sin\varphi =$$

$$= r \cdot \sin\varphi(3r^2 \cdot \cos^2\varphi + r^2 \cdot \sin^2\varphi) \cdot \cos\varphi + r \cdot \cos\varphi(r^2 \cdot \cos^2\varphi + 3r^2 \cdot \sin^2\varphi) \cdot \sin\varphi =$$

$$= r^3(3 \cdot \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + r^3(\cos^2\varphi + 3 \cdot \sin^2\varphi) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi =$$

$$= r^3 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi(3 \cdot \cos^2\varphi + \sin^2\varphi + \cos^2\varphi + 3 \cdot \sin^2\varphi) =$$

$$= r^3 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi(4 \cdot \cos^2\varphi + 4 \cdot \sin^2\varphi) = 4r^3 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi\,\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} =$$

$$= 4r^3 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = 2r^3 \cdot \underbrace{2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}_{\sin(2\varphi)} = 2r^3 \cdot \sin(2\varphi)$$

(unter Verwendung der Beziehungen $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ und $\sin(2\varphi) = 2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$)

Analog erhalten wir:

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} = y(3x^2 + y^2) \cdot (-r \cdot \sin\varphi) + x(x^2 + 3y^2) \cdot r \cdot \cos\varphi =$$

$$= r \cdot \sin\varphi(3r^2 \cdot \cos^2\varphi + r^2 \cdot \sin^2\varphi) \cdot (-r \cdot \sin\varphi) +$$

$$+ r \cdot \cos\varphi(r^2 \cdot \cos^2\varphi + 3r^2 \cdot \sin^2\varphi) \cdot r \cdot \cos\varphi =$$

$$= -r^4 \cdot \sin^2\varphi(3 \cdot \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^4 \cdot \cos^2\varphi(\cos^2\varphi + 3 \cdot \sin^2\varphi) =$$

$$= r^4[-\sin^2\varphi(3 \cdot \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\varphi(\cos^2\varphi + 3 \cdot \sin^2\varphi)] =$$

$$= r^4(-3 \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi - \sin^4\varphi + \cos^4\varphi + 3 \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi) =$$

$$= r^4\underbrace{(\cos^4\varphi - \sin^4\varphi)}_{\text{3. Binom}} = r^4\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = r^4(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

Umformungen in der letzten Zeile: 3. Binom: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ mit $a = \cos^2\varphi$ und $b = \sin^2\varphi$; ferner: $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ (trigonometrischer Pythagoras).

3 Implizite Differentiation

Hinweise

(1) **Lehrbuch:** Band 2, Kapitel III.2.5.1
Formelsammlung: Kapitel IV.3.8

(2) Beachten Sie, dass die Gleichung der impliziten Funktion auf die Form $F(x;\, y) = 0$ gebracht werden muss.

(3) Die implizite Differentiation soll jeweils mit Hilfe der *partiellen Ableitungen* erfolgen.

E31 Bestimmen Sie die Gleichung der *Tangente* im Punkt $P = (1;\, 1)$ der Kurve $x \cdot \mathrm{e}^{2(x-y)} = 1$.

Wir benötigen die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der in impliziter Form gegebenen Funktion $F(x;\, y) = x \cdot \mathrm{e}^{2(x-y)} - 1 = 0$. F_x erhalten wir mit Hilfe der *Produkt-* und *Kettenregel*:

$$F(x;\, y) = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{2(x-y)}}_{v} - 1 = uv - 1 \quad \text{mit} \quad u = x, \quad v = \mathrm{e}^{2(x-y)} \quad \text{und} \quad u_x = 1, \quad v_x = 2 \cdot \mathrm{e}^{2(x-y)}$$

(v_x erhält man mit der *Kettenregel*, Substitution: $t = 2(x - y)$)

$$F_x = u_x v + v_x u - 0 = 1 \cdot \mathrm{e}^{2(x-y)} + 2 \cdot \mathrm{e}^{2(x-y)} \cdot x = (1 + 2x) \cdot \mathrm{e}^{2(x-y)}$$

Die *Kettenregel* liefert die partielle Ableitung F_y:

$$F(x;\, y) = x \cdot \mathrm{e}^{2(x-y)} - 1 = x \cdot \mathrm{e}^{t} - 1 \quad \text{mit} \quad t = 2(x - y)$$

$$F_y = x \cdot \mathrm{e}^{t} \cdot 2(-1) - 0 = -2x \cdot \mathrm{e}^{t} = -2x \cdot \mathrm{e}^{2(x-y)}$$

Kurvenanstieg in einem beliebigen Kurvenpunkt:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{(1 + 2x) \cdot \mathrm{e}^{2(x-y)}}{-2x \cdot \mathrm{e}^{2(x-y)}} = \frac{1 + 2x}{2x}$$

Tangentensteigung im Kurvenpunkt $P = (1;\, 1)$:

$$m = y'(P) = y'(x = 1;\, y = 1) = \frac{1 + 2}{2} = 1{,}5$$

Gleichung der Tangente in $P = (1;\, 1)$ (Ansatz in der Punkt-Steigungs-Form):

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \quad \Rightarrow \quad \frac{y - 1}{x - 1} = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad y - 1 = 1{,}5\,(x - 1) = 1{,}5\,x - 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad y = 1{,}5\,x - 0{,}5$$

E32 $\mathrm{e}^{y} + y + x^2 - x - 3 = 0$

Wie lauten die Gleichungen der *Tangenten* in den Nullstellen dieser (impliziten) Funktion?

Berechnung der Nullstellen: $y = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + x^2 - x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 2$

Nullstellen: $N_1 = (-1;\, 0)$, $N_2 = (2;\, 0)$

Anstieg der Kurve $F(x;\, y) = \mathrm{e}^{y} + y + x^2 - x - 3 = 0$:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x - 1}{\mathrm{e}^{y} + 1}$$

Gleichungen der Tangenten in den Nullstellen

Tangente in N_1 (Ansatz: Punkt-Steigungs-Form):

$$N_1 = (-1;\, 0)\,, \quad m_1 = y'(N_1) = y'(x = -1;\, y = 0) = -\frac{-2-1}{1+1} = 1{,}5$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y-0}{x+1} = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad y = 1{,}5\,(x+1) = 1{,}5\,x + 1{,}5$$

Tangente in N_2 (Ansatz: Punkt-Steigungs-Form):

$$N_2 = (2;\, 0)\,, \quad m_2 = y'(N_2) = y'(x = 2;\, y = 0) = -\frac{4-1}{1+1} = -1{,}5$$

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = m_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y-0}{x-2} = -1{,}5 \quad \Rightarrow \quad y = -1{,}5\,(x-2) = -1{,}5\,x + 3$$

E33

$x^2 - 10x + y^2 + 4y + 20 = 0$

An welchen Stellen besitzt diese in der impliziten Form gegebene Funktion *waagerechte* Tangenten?

Die Steigungsformel liefert für diese implizite Funktion den folgenden Ausdruck:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x-10}{2y+4} = -\frac{x-5}{y+2} = \frac{5-x}{y+2}$$

Aus der Bedingung $y' = 0$ erhalten wir die Stellen mit einer *waagerechten* Tangente:

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{5-x}{y+2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 5 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5$$

Diesen Wert setzen wir in die Funktionsgleichung ein und berechnen die zugehörigen *Ordinatenwerte*:

$$25 - 50 + y^2 + 4y + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 + 4y - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 1\,, \quad y_2 = -5$$

Es gibt somit *zwei* Kurvenpunkte mit *waagerechter* Tangente: $P_1 = (5;\, 1)$ und $P_2 = (5;\, -5)$.

E34

$e^y \cdot \sin x + e^x \cdot \cos y = 0$

Gesucht ist die Gleichung der *Tangente* im Kurvenpunkt $P_1 = (0;\, \pi/2)$.

Steigung der Kurventangente im *beliebigen* Kurvenpunkt $P = (x;\, y)$:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{e^y \cdot \cos x + e^x \cdot \cos y}{e^y \cdot \sin x - e^x \cdot \sin y}$$

Steigung der Tangente in $P_1 = (0;\, \pi/2)$:

$$m_1 = y'(P_1) = y'(x_1 = 0;\, y_1 = \pi/2) = -\frac{e^{\pi/2} \cdot \cos 0 + e^0 \cdot \cos(\pi/2)}{e^{\pi/2} \cdot \sin 0 - e^0 \cdot \sin(\pi/2)} = -\frac{e^{\pi/2} \cdot 1 + 1 \cdot 0}{e^{\pi/2} \cdot 0 - 1 \cdot 1} = e^{\pi/2}$$

Gleichung der Tangente in $P_1 = (0;\, \pi/2)$ (Ansatz in der Punkt-Steigungs-Form):

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y - \frac{\pi}{2}}{x - 0} = e^{\pi/2} \quad \Rightarrow \quad y - \frac{\pi}{2} = e^{\pi/2} \cdot x \quad \Rightarrow \quad y = e^{\pi/2} \cdot x + \frac{\pi}{2}$$

Tangente: $y = e^{\pi/2} \cdot x + \dfrac{\pi}{2} = 4{,}8105\,x + 1{,}5708$

E35

$x^4 - 3x^2y + y^3 - 3 = 0$

Bestimmen Sie die Gleichung der *Tangente* im Kurvenpunkt $P_0 = (1;\, 2)$.

Wir berechnen zunächst die *Steigung der Tangente* in P_0:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{4x^3 - 6xy}{-3x^2 + 3y^2} = \frac{6xy - 4x^3}{3y^2 - 3x^2} \quad\Rightarrow\quad m = y'(P_0) = y'(x = 1;\, y = 2) = \frac{12 - 4}{12 - 3} = \frac{8}{9}$$

Mit der Punkt-Steigungs-Form erhalten wir die *Gleichung* der gesuchten Tangente:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \quad\Rightarrow\quad \frac{y - 2}{x - 1} = \frac{8}{9} \quad\Rightarrow\quad y - 2 = \frac{8}{9}(x - 1) = \frac{8}{9}x - \frac{8}{9} \quad\Rightarrow\quad y = \frac{8}{9}x + \frac{10}{9}$$

E36

$\mathrm{e}^{\sqrt{y}} \cdot \tan x + \frac{x}{y} - 3(y^2 - 1) - \pi = 0$

Bestimmen Sie die *Steigung* dieser Kurve im Punkt $P_1 = (\pi;\, 1)$.

Für die *Steigungsformel* benötigen wir die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion

$$F(x;\, y) = \mathrm{e}^{\sqrt{y}} \cdot \tan x + \frac{x}{y} - 3(y^2 - 1) - \pi$$

Die Ableitung $F_x(x;\, y)$ erhalten wir durch gliedweise *elementare* Differentiation nach der Variablen x:

$$F_x(x;\, y) = \mathrm{e}^{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{y} = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{\cos^2 x} + \frac{1}{y}$$

Die Ableitung $F_y(x;\, y)$ wird auf ähnliche Weise gebildet, wobei wir die Funktion vorher noch geringfügig umformen:

$$F(x;\, y) = (\tan x) \cdot \mathrm{e}^{\sqrt{y}} + x \cdot y^{-1} - 3y^2 + 3 - \pi$$

Der 1. Summand muss dabei nach der *Kettenregel* differenziert werden (*Substitution*: $u = \sqrt{y} \;\Rightarrow\; (\tan x) \cdot \mathrm{e}^u$ mit $u = \sqrt{y}$):

$$F_y(x;\, y) = (\tan x) \cdot \mathrm{e}^{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + x(-1 \cdot y^{-2}) - 6y = \frac{(\tan x) \cdot \mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} - \frac{x}{y^2} - 6y$$

Die *Steigungsformel* lautet damit:

$$y' = -\frac{F_x(x;\, y)}{F_y(x;\, y)} = -\frac{\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{y}}{\dfrac{(\tan x) \cdot \mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} - \dfrac{x}{y^2} - 6y}$$

Steigung in $P_1 = (\pi;\, 1)$:

$$y'(P_1) = y'(x_1 = \pi;\, y_1 = 1) = -\frac{\dfrac{\mathrm{e}^1}{\cos^2 \pi} + 1}{\dfrac{(\tan \pi) \cdot \mathrm{e}^1}{2} - \pi - 6} = -\frac{\mathrm{e} + 1}{0 - \pi - 6} = \frac{\mathrm{e} + 1}{\pi + 6} = 0{,}4067$$

E37

$F(x; y) = 2y^3 + 6x^3 - 24x + 6y = 0$

Bestimmen Sie den *Steigungswinkel* der Kurventangente in den Schnittpunkten dieser Kurve mit der x-Achse. Wie lautet die *Tangentengleichung* in der *positiven* Nullstelle?

Wir berechnen zunächst die *Schnittpunkte* mit der x-Achse (*Nullstellen*):

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x^3 - 24x = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_{2/3} = \pm 2$$

Nullstellen: $N_1 = (0; 0)$, $N_2 = (2; 0)$, $N_3 = (-2; 0)$

Für die *Steigung* der Kurventangente in einem beliebigen Kurvenpunkt P erhalten wir:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{18x^2 - 24}{6y^2 + 6} = -\frac{3x^2 - 4}{y^2 + 1} = \frac{4 - 3x^2}{y^2 + 1}$$

In den drei Nullstellen ergeben sich folgende Werte für *Steigung* m und *Steigungswinkel* α:

$$m_1 = y'(N_1) = y'(x_1 = 0; y_1 = 0) = 4 \quad \Rightarrow \quad \tan \alpha_1 = m_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \arctan 4 = 75{,}96^\circ$$

$$m_{2/3} = y'(N_{2/3}) = y'(x_{2/3} = \pm 2; y_{2/3} = 0) = \frac{4 - 12}{1} = -8$$

$$\tan \alpha_{2/3} = m_{2/3} = -8 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{2/3} = 180^\circ + \arctan(-8) = 180^\circ - 82{,}87^\circ = 97{,}13^\circ$$

Tangente in der Nullstelle $N_2 = (2; 0)$

$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = m_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y - 0}{x - 2} = -8 \quad \Rightarrow \quad y = -8(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = -8x + 16$$

E38

Wo besitzt die Funktion $x^3 - y^3 + 3y = 0$ *waagerechte* Tangenten?

Wir bestimmen zunächst den *Kurvenanstieg* (Tangentensteigung) in Abhängigkeit von den Koordinaten x und y eines *beliebigen* Kurvenpunktes P:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2}{-3y^2 + 3} = -\frac{x^2}{-y^2 + 1} = \frac{x^2}{y^2 - 1}$$

Berechnung der Kurvenpunkte mit *waagerechter* Tangente aus der Bedingung $y' = 0$:

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{y^2 - 1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Die zugehörigen *Ordinaten* erhalten wir aus der Kurvengleichung für $x = 0$:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad -y^3 + 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad y^3 - 3y = y(y^2 - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0, \quad y_{2/3} = \pm\sqrt{3}$$

Es gibt somit genau *drei* Kurvenpunkte mit einer *waagerechten* Tangente:

$$P_1 = (0; 0), \quad P_2 = (0; \sqrt{3}), \quad P_3 = (0; -\sqrt{3})$$

4 Totales oder vollständiges Differential einer Funktion (mit einfachen Anwendungen)

Hinweise

Lehrbuch: Band 2, Kapitel III.2.4
Formelsammlung: Kapitel IX.2.4

E39 Bestimmen Sie das *totale Differential* der Funktion $z = \frac{x^2 + y^2}{y - x}$.

Die benötigten partiellen Ableitungen 1. Ordnung erhalten wir jeweils mit der *Quotientenregel*:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{y - x} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad v = y - x$$

$$z_x = \frac{u_x v - v_x u}{v^2} = \frac{2x(y - x) - (-1)(x^2 + y^2)}{(y - x)^2} = \frac{2xy - 2x^2 + x^2 + y^2}{(y - x)^2} = \frac{2xy - x^2 + y^2}{(y - x)^2}$$

$$z_y = \frac{u_y v - v_y u}{v^2} = \frac{2y(y - x) - 1(x^2 + y^2)}{(y - x)^2} = \frac{2y^2 - 2xy - x^2 - y^2}{(y - x)^2} = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{(y - x)^2}$$

Totales Differential:

$$dz = z_x\,dx + z_y\,dy = \frac{-x^2 + y^2 + 2xy}{(y - x)^2}\,dx + \frac{-x^2 + y^2 - 2xy}{(y - x)^2}\,dy =$$

$$= \frac{(-x^2 + y^2 + 2xy)\,dx + (-x^2 + y^2 - 2xy)\,dy}{(y - x)^2}$$

E40 Bestimmen Sie das *totale Differential* der Funktion $w = \arctan(uv)$.

Die benötigten partiellen Ableitungen 1. Ordnung erhalten wir mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$w = \arctan \underbrace{(uv)}_{t} = \arctan t \quad \text{mit} \quad t = uv \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial u} = \frac{1}{1 + t^2} \cdot v = \frac{v}{1 + t^2} = \frac{v}{1 + u^2 v^2}$$

Wegen der *Symmetrie* der Funktion (u und v sind miteinander *vertauschbar*) gilt dann:

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{u}{1 + u^2 v^2}$$

Somit lautet das *totale Differential* wie folgt:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}\,du + \frac{\partial w}{\partial v}\,dv = \frac{v}{1 + u^2 v^2}\,du + \frac{u}{1 + u^2 v^2}\,dv = \frac{v\,du + u\,dv}{1 + u^2 v^2}$$

E41 Bestimmen Sie das *totale Differential* der Funktion $z = x^2 y^2 \cdot \sin(x^3 - y^3)$.

Die benötigten partiellen Ableitungen 1. Ordnung erhält man mit Hilfe der *Produkt-* und *Kettenregel.* Zunächst bilden wir z_x:

$$z = \underbrace{x^2 y^2}_{u} \cdot \underbrace{\sin(x^3 - y^3)}_{v} = u v$$

$$u = x^2 y^2, \quad v = \sin \underbrace{(x^3 - y^3)}_{t} \quad \text{und} \quad u_x = 2 x y^2, \quad v_x = 3 x^2 \cdot \cos(x^3 - y^3)$$

(v wurde dabei in der angedeuteten Weise mit der *Kettenregel* partiell nach x differenziert)

$$z_x = u_x v + v_x u = 2 x y^2 \cdot \sin(x^3 - y^3) + 3 x^2 \cdot \cos(x^3 - y^3) \cdot x^2 y^2 =$$

$$= 2 x y^2 \cdot \sin(x^3 - y^3) + 3 x^4 y^2 \cdot \cos(x^3 - y^3)$$

Analog erhält man:

$$z_y = u_y v + v_y u = 2 x^2 y \cdot \sin(x^3 - y^3) - 3 x^2 y^4 \cdot \cos(x^3 - y^3)$$

Das *totale Differential* lautet damit:

$$dz = z_x \, dx + z_y \, dy = [2 x y^2 \cdot \sin(x^3 - y^3) + 3 x^4 y^2 \cdot \cos(x^3 - y^3)] \, dx +$$

$$+ [2 x^2 y \cdot \sin(x^3 - y^3) - 3 x^2 y^4 \cdot \cos(x^3 - y^3)] \, dy$$

E42 Bestimmen Sie das *totale Differential* der Funktion $u = u(x; y; z) = \ln \sqrt{(2x^2 + 2y^2 + 2z^2)^3}$.
Wie lautet das totale Differential an der Stelle $x = -1, \ y = 2, \ z = -2$?
Welchen *Näherungswert* für die abhängige Variable u liefert das totale Differential für die Änderungen $dx = 0{,}1, \ dy = -0{,}2$ und $dz = -0{,}1$?

Wir bringen die Funktion zunächst in eine für das Differenzieren *günstigere* Form:

$$u = \ln \sqrt{(2x^2 + 2y^2 + 2z^2)^3} = \ln (2x^2 + 2y^2 + 2z^2)^{3/2} = \frac{3}{2} \cdot \ln(2x^2 + 2y^2 + 2z^2)$$

Rechenregel: $\ln a^n = n \cdot \ln a$

Es genügt, die partielle Ableitung u_x zu bilden, denn die Funktion ist *symmetrisch* in den drei unabhängigen Variablen x, y und z. Die Ableitung u_x erhalten wir wie folgt mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$u = \frac{3}{2} \cdot \ln \underbrace{(2x^2 + 2y^2 + 2z^2)}_{t} = \frac{3}{2} \cdot \ln t \quad \text{mit} \quad t = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} \cdot 4x = \frac{3}{2} \cdot \frac{4x}{2x^2 + 2y^2 + 2z^2} = \frac{3 \cdot 4 x}{2 \cdot 2 (x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{3x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Wegen der erwähnten *Symmetrie* gilt:

$$u_y = \frac{3y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad u_z = \frac{3z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Das *totale Differential* besitzt dann die folgende Gestalt:

$$du = u_x\,dx + u_y\,dy + u_z\,dz = \frac{3x}{x^2 + y^2 + z^2}\,dx + \frac{3y}{x^2 + y^2 + z^2}\,dy + \frac{3z}{x^2 + y^2 + z^2}\,dz =$$

$$= \frac{3x\,dx + 3y\,dy + 3z\,dz}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{3(x\,dx + y\,dy + z\,dz)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

An der Stelle $x = -1$, $y = 2$, $z = -2$ lautet das *totale Differential* wie folgt:

$$du = \frac{3(-1\,dx + 2\,dy - 2\,dz)}{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \frac{3}{9}(-dx + 2\,dy - 2\,dz) = \frac{1}{3}(-dx + 2\,dy - 2\,dz)$$

Näherungswert für $dx = 0{,}1$, $dy = -0{,}2$ und $dz = -0{,}1$

$$u(x = -1;\ y = 2;\ z = -2) = \frac{3}{2} \cdot \ln\left[2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot (-2)^2\right] =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \ln(2 + 8 + 8) = \frac{3}{2} \cdot \ln 18 = 4{,}3356$$

Totales Differential für $dx = 0{,}1$, $dy = -0{,}2$ und $dz = -0{,}1$:

$$du = \frac{1}{3}\left[-0{,}1 + 2 \cdot (-0{,}2) - 2 \cdot (-0{,}1)\right] = \frac{1}{3}(-0{,}1 - 0{,}4 + 0{,}2) = \frac{1}{3} \cdot (-0{,}3) = -0{,}1$$

Näherungswert: $u + du = 4{,}3356 - 0{,}1 = 4{,}2356$

E43

Gegeben ist die Funktion $z = \frac{xy}{x - y}$. Berechnen Sie mit Hilfe des *totalen Differentials* die Änderung des Funktionswertes beim Übergang von der Stelle $(x;\, y) = (2;\, 1)$ zur Stelle $(x;\, y) = (2{,}1;\, 0{,}8)$. Wie groß ist die *exakte* Änderung?

Näherungsrechnung mit dem totalen Differential

Wir bilden zunächst die benötigten partiellen Ableitungen 1. Ordnung unter Verwendung der *Quotientenregel*:

$$z = \frac{xy}{x - y} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = xy, \quad v = x - y$$

$$z_x = \frac{u_x v - v_x u}{v^2} = \frac{y(x - y) - 1 \cdot xy}{(x - y)^2} = \frac{xy - y^2 - xy}{(x - y)^2} = \frac{-y^2}{(x - y)^2}$$

$$z_y = \frac{u_y v - v_y u}{v^2} = \frac{x(x - y) - (-1)\,xy}{(x - y)^2} = \frac{x^2 - xy + xy}{(x - y)^2} = \frac{x^2}{(x - y)^2}$$

Das *totale Differential* lautet damit:

$$dz = z_x\,dx + z_y\,dy = \frac{-y^2}{(x - y)^2}\,dx + \frac{x^2}{(x - y)^2}\,dy = \frac{-y^2\,dx + x^2\,dy}{(x - y)^2}$$

An der Stelle $x = 2$, $y = 1$ bewirken die Koordinatenänderungen $dx = +0{,}1$ und $dy = -0{,}2$ die folgende Änderung des Funktionswertes (Näherungswert):

$$dz = \frac{-1^2 \cdot 0{,}1 + 2^2 \cdot (-0{,}2)}{(2 - 1)^2} = \frac{-0{,}1 - 0{,}8}{1} = -0{,}9$$

Exakte Rechnung

Wir bilden die Differenz der Funktionswerte an den Stellen $x = 2{,}1$, $y = 0{,}8$ und $x = 2$, $y = 1$:

$$\Delta z = z(2{,}1;\ 0{,}8) - z(2;\ 1) = \frac{2{,}1 \cdot 0{,}8}{2{,}1 - 0{,}8} - \frac{2 \cdot 1}{2 - 1} = 1{,}2923 - 2 = -0{,}7077$$

E44 Bestimmen Sie die *Tangentialebene* im Punkt $P = (1;\, 0;\, 1)$ der Fläche $z = (x^2 + y^2) \cdot \mathrm{e}^{-y}$.

Wir bilden zunächst die partiellen Ableitungen f_x und f_y der Funktion $z = f(x;\, y) = (x^2 + y^2) \cdot \mathrm{e}^{-y}$:

$$f_x(x;\, y) = 2x \cdot \mathrm{e}^{-y} \qquad (\mathrm{e}^{-y} \text{ bleibt als konstanter Faktor erhalten})$$

$$f = \underbrace{(x^2 + y^2)}_{u} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-y}}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = x^2 + y^2, \quad v = \mathrm{e}^{-y} \quad \text{und} \quad u_y = 2y, \quad v_y = -\mathrm{e}^{-y}$$

(partielle Ableitung von v nach y mit der *Kettenregel*, Substitution: $t = -y$)

Die *Produktregel* liefert dann die partielle Ableitung f_y:

$$f_y(x;\, y) = u_y v + v_y u = 2y \cdot \mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-y}(x^2 + y^2) = [2y - (x^2 + y^2)] \cdot \mathrm{e}^{-y} = (2y - x^2 - y^2) \cdot \mathrm{e}^{-y}$$

Steigungswerte in $P = (1;\, 0;\, 1)$:

$$f_x(1;\, 0) = 2 \cdot 1 = 2, \quad f_y(1;\, 0) = (0 - 1 - 0)\, 1 = -1$$

Gleichung der Tangentialebene in $P = (1;\, 0;\, 1)$:

$$z - z_0 = f_x(x_0;\, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0;\, y_0) \cdot (y - y_0)$$

$$z - 1 = 2(x - 1) - 1(y - 0) = 2x - 2 - y \quad \Rightarrow \quad z = 2x - y - 1$$

E45 Wie lautet die Gleichung der *Tangentialebene* an die Fläche $z = \ln(x^3 + y^2)$ im Flächenpunkt $P = (2;\, 1;\, z_0 = ?)$?

Zugehörige Höhenkoordinate: $z_0 = f(2;\, 1) = \ln 9 \quad \Rightarrow \quad P = (2;\, 1;\, \ln 9)$

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

$$z = f(x;\, y) = \ln \underbrace{(x^3 + y^2)}_{u} = \ln u \quad \text{mit} \quad u = x^3 + y^2$$

Die *Kettenregel* liefert:

$$f_x(x;\, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{u} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{x^3 + y^2}$$

$$f_y(x;\, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{u} \cdot 2y = \frac{2y}{x^3 + y^2}$$

Somit besitzt die Fläche im Punkt $P = (2;\, 1;\, \ln 9)$ folgende Steigungswerte:

$$f_x(2;\, 1) = \frac{3 \cdot 4}{8 + 1} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}, \quad f_y(2;\, 1) = \frac{2 \cdot 1}{8 + 1} = \frac{2}{9}$$

Gleichung der Tangentialebene in $P = (2; 1; \ln 9)$

$$z - z_0 = f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

$$z - \ln 9 = \frac{4}{3}(x - 2) + \frac{2}{9}(y - 1) = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} + \frac{2}{9}y - \frac{2}{9}$$

$$z = \frac{4}{3}x + \frac{2}{9}y - \frac{26}{9} + \ln 9 = \frac{4}{3}x + \frac{2}{9}y - 0{,}6917$$

E46 In welchem Punkt $P_0 = (x_0; y_0; z_0)$ der Fläche $z = x^2 + y^2 - 7$ ist die *Tangentialebene* parallel zur Ebene $z = 8x + 2y$? Wie lautet die Gleichung dieser Tangentialebene?

Die gesuchte Tangentialebene muss in der x- bzw. y-Richtung den *gleichen* Anstieg haben wie die Ebene $z = 8x + 2y$, d. h. im (noch unbekannten) Flächenpunkt P_0 müssen die partiellen Ableitungen 1. Ordnung die Werte $f_x(x_0; y_0) = 8$ und $f_y(x_0; y_0) = 2$ haben. Mit $f_x(x; y) = 2x$ und $f_y(x; y) = 2y$ folgt also:

$$\left.\begin{aligned} f_x(x_0; y_0) &= 2x_0 = 8 \\ f_y(x_0; y_0) &= 2y_0 = 2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_0 = 4, \quad y_0 = 1$$

Die zugehörige Höhenkoordinate ist $z_0 = f(4; 1) = 16 + 1 - 7 = 10$.

Flächenpunkt: $P_0 = (4; 1; 10)$

Gleichung der Tangentialebene in $P_0 = (4; 1; 10)$

$$z - z_0 = f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

$$z - 10 = 8(x - 4) + 2(y - 1) = 8x - 32 + 2y - 2 = 8x + 2y - 34 \quad \Rightarrow \quad z = 8x + 2y - 24$$

E47 Gegeben ist die Fläche $z = 89x^2 - 96xy + 61y^2 - 260x + 70y + C$. Bestimmen Sie die noch unbekannte Konstante C so, dass die Fläche die x, y-Ebene berührt. Wie lautet der Berührungspunkt?

Die Fläche soll also im (noch unbekannten) Flächenpunkt $P_0 = (x_0; y_0; z_0)$ die x, y-Ebene berühren. Wir folgern daraus: die x, y-Ebene ist demnach die *Tangentialebene* in P_0. Daraus lassen sich folgende Eigenschaften ableiten:

1. P_0 liegt als Berührungspunkt *in* der x, y-Ebene, die Höhenkoordinate hat daher den Wert $z_0 = 0$.
2. Die Tangentialebene in P_0 (x, y-Ebene) hat in *beiden* Koordinatenrichtungen (x- und y-Richtung) den Anstieg *Null*, die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Fläche müssen daher in P_0 *verschwinden*:

$$z_x(x_0; y_0) = 0 \quad \text{und} \quad z_y(x_0; y_0) = 0$$

Diese Bedingungen führen zu zwei Gleichungen für die noch unbekannten Koordinaten x_0 und y_0. Sie lauten wegen

$$z_x(x; y) = 178x - 96y - 260 \quad \text{und} \quad z_y(x; y) = -96x + 122y + 70$$

wie folgt:

$$z_x(x_0; y_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(I)} \quad 178x_0 - 96y_0 - 260 = 0$$

$$z_y(x_0; y_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(II)} \quad -96x_0 + 122y_0 + 70 = 0$$

Wir teilen zunächst beide Gleichungen durch 2, multiplizieren dann die erste Gleichung mit 61 und die zweite mit 48 und addieren schließlich die erhaltenen Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 89x_0 - 48y_0 - 130 = 0 \quad |\cdot 61 \\ \text{(II)} & -48x_0 + 61y_0 + 35 = 0 \quad |\cdot 48 \\ \hline \text{(I}^*) & 5429x_0 - 2928y_0 - 7930 = 0 \\ \text{(II}^*) & -2304x_0 + 2928y_0 + 1680 = 0 \\ \hline & 3125x_0 - 6250 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 2 \end{array} \quad \left.\right\} +$$

$$\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad 89 \cdot 2 - 48y_0 - 130 = 0 \quad \Rightarrow \quad 48 - 48y_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 1$$

Der *Berührungspunkt* P_0 besitzt daher die folgenden Koordinaten: $P_0 = (2;\,1;\,0)$.

Einsetzen dieser Werte in die Gleichung der Fläche liefert eine Bestimmungsgleichung für die noch unbekannte Konstante C:

$$89 \cdot 2^2 - 96 \cdot 2 \cdot 1 + 61 \cdot 1^2 - 260 \cdot 2 + 70 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad -225 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 225$$

Die gesuchte Fläche wird somit durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$z = 89x^2 - 96xy + 61y^2 - 260x + 70y + 225$$

E48

Das in Bild E-1 skizzierte Dreieck hat die Seiten $b = 5\text{ cm}$, $c = 8\text{ cm}$ und den Winkel $\alpha = 30°$. Der Flächeninhalt des Dreiecks wird nach der Formel

$$A = 0{,}5 \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$$

berechnet. Berechnen Sie die *exakte* Flächenänderung, wenn b, c und α wie folgt verändert werden:

$$\Delta b = +2\,\%, \quad \Delta c = -3\,\%, \quad \Delta\alpha = -1°.$$

Welchen *Näherungswert* erhält man mit dem *totalen Differential*?

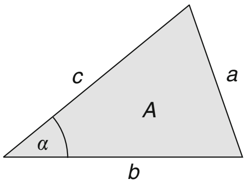


Bild E-1

Exakte Flächenänderung

Ausgangswerte: $b = 5\text{ cm},\ c = 8\text{ cm},\ \alpha = 30°$

$$A_1 = 0{,}5 \cdot (5\text{ cm}) \cdot (8\text{ cm}) \cdot \sin 30° = 10\text{ cm}^2$$

Neue Werte: $b = 5{,}1\text{ cm},\ c = 7{,}76\text{ cm},\ \alpha = 29°$

$$A_2 = 0{,}5 \cdot (5{,}1\text{ cm}) \cdot (7{,}76\text{ cm}) \cdot \sin 29° = 9{,}593\text{ cm}^2$$

Flächenänderung: $\Delta A_{\text{exakt}} = A_2 - A_1 = (9{,}593 - 10)\text{ cm}^2 = -0{,}407\text{ cm}^2$ (Abnahme!)

Näherungsrechnung mit dem totalen Differential

$$A = f(b;\,c;\,\alpha) = 0{,}5 \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$$

$$dA = \frac{\partial A}{\partial b}\,db + \frac{\partial A}{\partial c}\,dc + \frac{\partial A}{\partial \alpha}\,d\alpha = 0{,}5 \cdot c \cdot \sin\alpha \cdot db + 0{,}5 \cdot b \cdot \sin\alpha \cdot dc + 0{,}5 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha$$

In der Praxis übliche Schreibweise:

$$\Delta A = 0{,}5 \cdot c \cdot \sin\alpha \cdot \Delta b + 0{,}5 \cdot b \cdot \sin\alpha \cdot \Delta c + 0{,}5 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \cdot \Delta\alpha$$

Für b, c und α sind die *Ausgangswerte* einzusetzen, für die Änderungen dieser Größen die Werte $\Delta b = +0{,}1$ cm, $\Delta c = -0{,}24$ cm und $\Delta\alpha = -1° = -\pi/180$ (aus Dimensionsgründen im *Bogenmaß*). Wir erhalten den folgenden *Näherungswert* für die Flächenänderung:

$$\Delta A = 0{,}5 \cdot (8\text{ cm}) \cdot \sin 30° \cdot (0{,}1\text{ cm}) + 0{,}5 \cdot (5\text{ cm}) \cdot \sin 30° \cdot (-0{,}24\text{ cm}) +$$

$$+ 0{,}5 \cdot (5\text{ cm}) \cdot (8\text{ cm}) \cdot \cos 30° \cdot (-\pi/180) = (0{,}2 - 0{,}3 - 0{,}302)\text{ cm}^2 = -0{,}402\text{ cm}^2$$

Dieser Wert ist in guter Übereinstimmung mit dem *exakten* Wert.

E49

Das Massenträgheitsmoment einer Zylinderwalze (Masse m; Radius R) wird nach der Formel $J = 0{,}5\,m R^2$ berechnet. Wie ändert sich das Massenträgheitsmoment, wenn man von einer Walze mit $m = 100$ kg und $R = 0{,}2$ m ausgeht und dann die Masse um 2 kg *verkleinert* und gleichzeitig den Radius um 2% *vergrößert*? Welchen *Näherungswert* liefert das *totale Differential*?

Exakte Änderung des Massenträgheitsmomentes

Ausgangswerte: $m = 100\text{ kg},\ R = 0{,}2\text{ m}$

$$J_1 = 0{,}5 \cdot (100\text{ kg}) \cdot (0{,}2\text{ m})^2 = 2\text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Neue Werte: $m = 98\text{ kg},\ R = 0{,}204\text{ m}$

$$J_2 = 0{,}5\,(98\text{ kg}) \cdot (0{,}204\text{ m})^2 = 2{,}0392\text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Änderung: $\Delta J = J_2 - J_1 = (2{,}0392 - 2)\text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 0{,}0392\text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Näherungsrechnung mit dem totalen Differential

$$J = f(m;\,R) = 0{,}5\,m R^2 \quad \Rightarrow \quad dJ = \frac{\partial J}{\partial m}\,dm + \frac{\partial J}{\partial R}\,dR = 0{,}5\,R^2\,dm + mR\,dR$$

Wir verwenden die in der Praxis übliche Schreibweise:

$$\Delta J = 0{,}5\,R^2\,\Delta m + mR\,\Delta R$$

Mit $m = 100\text{ kg}$, $R = 0{,}2\text{ m}$, $\Delta m = -2\text{ kg}$ und $\Delta R = 0{,}004\text{ m}$ erhalten wir folgenden *Näherungswert* für die Änderung des Massenträgheitsmomentes (in guter Übereinstimmung mit dem *exakten* Wert):

$$\Delta J = 0{,}5\,(0{,}2\text{ m})^2 \cdot (-2\text{ kg}) + (100\text{ kg}) \cdot (0{,}2\text{ m}) \cdot (0{,}004\text{ m}) = (-0{,}04 + 0{,}08)\text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 0{,}04\text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

E50

Die Gleichung $T = 2\pi\sqrt{LC}$ beschreibt die Abhängigkeit der Schwingungsdauer T einer elektromagnetischen Schwingung in einem LC-Kreis von der Induktivität L und der Kapazität C. Mit Hilfe des *totalen Differentials* soll die *absolute* und die *prozentuale Änderung* der Schwingungsdauer T bestimmt werden, wenn man die Induktivität von $L = 1$ H um $\Delta L = 0{,}01$ H und gleichzeitig die Kapazität von $C = 1\,\mu$F um $\Delta C = 0{,}02\,\mu$F *erhöht.*

Die Schwingungsdauer T ist eine Funktion von L und C:

$$T = f(L;\,C) = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{L}\,\sqrt{C}$$

Das *totale Differential* von T liefert dann einen *Näherungswert* für die Änderung der Schwingungsdauer T bei *geringfügigen* Änderungen von Induktivität L und Kapazität C:

$$d\,T = \frac{\partial T}{\partial L}\,d\,L + \frac{\partial T}{\partial C}\,d\,C = 2\,\pi\,\sqrt{C} \cdot \frac{1}{2\,\sqrt{L}}\,d\,L + 2\,\pi\,\sqrt{L} \cdot \frac{1}{2\,\sqrt{C}}\,d\,C =$$

$$= \pi \left(\frac{\sqrt{C}\;d\,L}{\sqrt{L}} + \frac{\sqrt{L}\;d\,C}{\sqrt{C}} \right) = \pi\,\frac{C\,d\,L + L\,d\,C}{\sqrt{L}\,\sqrt{C}} = \frac{\pi\,(C\,d\,L + L\,d\,C)}{\sqrt{L\,C}}$$

Umformungen: Hauptnenner $\sqrt{L}\,\sqrt{C} = \sqrt{L\,C}$ bilden, d. h. die in der großen Klammer stehenden Brüche mit $\sqrt{C}$ bzw. $\sqrt{L}$ erweitern.

Wir gehen zu der in der Technik üblichen Schreibweise über:

$$\Delta\,T = \frac{\pi\,(C\,\Delta\,L + L\,\Delta\,C)}{\sqrt{L\,C}}$$

Die Schwingungsdauer für die Ausgangswerte $L = 1\,\text{H}$ und $C = 1\,\mu\text{F} = 10^{-6}\,\text{F}$ beträgt:

$$T = f(L = 1\,\text{H};\, C = 10^{-6}\,\text{F}) = 2\,\pi \cdot \sqrt{1 \cdot 10^{-6}}\;\text{s} = 2\,\pi \cdot 10^{-3}\;\text{s} = 2\,\pi\;\text{ms} = 6{,}283\;\text{ms}$$

Die *absolute Änderung* der Schwingungsdauer für $\Delta\,L = 0{,}01\,\text{H}$ und $\Delta\,C = 0{,}02\,\mu\text{F} = 2 \cdot 10^{-8}\,F$ erhalten wir mit dem *totalen Differential*:

$$\Delta\,T = \frac{\pi\,(10^{-6} \cdot 0{,}01 + 1 \cdot 2 \cdot 10^{-8})}{\sqrt{1 \cdot 10^{-6}}}\;\text{s} = \frac{\pi \cdot 3 \cdot 10^{-8}}{10^{-3}}\;\text{s} = 3\,\pi \cdot 10^{-5}\;\text{s} =$$

$$= 3\,\pi \cdot 10^{-2} \cdot \underbrace{10^{-3}\;\text{s}}_{1\;\text{ms}} = 0{,}094\;\text{ms}$$

Prozentuale Änderung der Schwingungsdauer: $\dfrac{\Delta\,T}{T} \cdot 100\,\% = \dfrac{0{,}094\;\text{ms}}{6{,}283\;\text{ms}} \cdot 100\,\% = 1{,}5\,\%$

E51

Flächenträgheitsmoment eines Kreisringes (Bild E-2):

$$I = \frac{\pi}{64}\,(R^4 - r^4) \quad \text{mit} \quad R = 30\,\text{cm},\;\; r = 20\,\text{cm}$$

Welchen *Näherungswert* für die Änderung des Flächenträgheitsmomentes erhält man mit Hilfe des *totalen Differentials*, wenn man den Innen- und Außenradius jeweils um 2 % *vergrößert*?

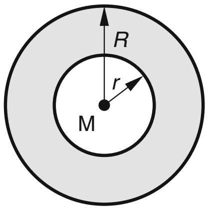


Bild E-2

I ist eine Funktion der beiden Variablen R und r:

$$I = f(R;\, r) = \frac{\pi}{64}\,(R^4 - r^4)$$

Wir bilden das *totale Differential* von I:

$$d\,I = \frac{\partial I}{\partial R}\,d\,R + \frac{\partial I}{\partial r}\,d\,r = \frac{\pi}{64} \cdot 4\,R^3\,d\,R - \frac{\pi}{64} \cdot 4\,r^3\,d\,r = \frac{\pi}{16}\,R^3\,d\,R - \frac{\pi}{16}\,r^3\,d\,r = \frac{\pi}{16}\,(R^3\,d\,R - r^3\,d\,r)$$

Die Differentiale $d\,R$, $d\,r$ und $d\,I$ fassen wir als (kleine) Änderungen der drei Größen R, r und I auf und schreiben dafür (wie allgemein in der Praxis üblich) $\Delta\,R$, $\Delta\,r$ und $\Delta\,I$. Es gilt dann:

$$\Delta\,I = \frac{\pi}{16}\,(R^3\,\Delta\,R - r^3\,\Delta\,r)$$

Mit den *Ausgangswerten* $R = 30\,\text{cm}$ und $r = 20\,\text{cm}$ und den vorgegebenen *Änderungen* $\Delta\,R = +0{,}6\,\text{cm}$ und $\Delta\,r = +0{,}4\,\text{cm}$ erhalten wir den folgenden *Näherungswert* für die *absolute Änderung* des Flächenträgheitsmomentes I:

$$\Delta I = \frac{\pi}{16}\,(30^3 \cdot 0{,}6 - 20^3 \cdot 0{,}4)\ \text{cm}^4 = \frac{\pi}{16}\,(16\,200 - 3\,200)\ \text{cm}^4 = \frac{\pi}{16} \cdot 13\,000\ \text{cm}^4 = 2\,552{,}5\ \text{cm}^4$$

Im *Ausgangszustand* beträgt das Flächenträgheitsmoment:

$$I = \frac{\pi}{64}\,(30^4 - 20^4)\ \text{cm}^4 = \frac{\pi}{64}\,(810\,000 - 160\,000)\ \text{cm}^4 = \frac{\pi}{64} \cdot 650\,000\ \text{cm}^4 = 31\,906{,}8\ \text{cm}^4$$

Prozentuale Änderung des Flächenträgheitsmomentes: $\dfrac{\Delta I}{I} \cdot 100\,\% = \dfrac{2\,552{,}5\ \text{cm}^4}{31\,906{,}8\ \text{cm}^4} \cdot 100\,\% = 8\,\%$

E52

Das Volumen einer Tonne (Bild E-3) wird nach der Formel

$$V = \frac{1}{3}\,\pi h\,(2R^2 + r^2)$$

berechnet. Es liegen folgende Werte vor:

$$R = 1\ \text{m}, \quad r = 0{,}8\ \text{m} \quad \text{und} \quad h = 1{,}50\ \text{m}.$$

Wie ändert sich das Volumen V, wenn man bei *unveränderter* Höhe h den Radius R um 2 % *vergrößert* und gleichzeitig den Radius r um 2,5 % *verkleinert*?
(*Exakte* und *näherungsweise* Berechnung mit dem *totalen Differential*).

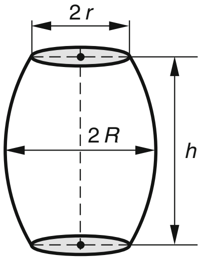


Bild E-3

Exakte Volumenänderung

Ausgangswerte: $R = 1\ \text{m},\ r = 0{,}8\ \text{m},\ h = 1{,}50\ \text{m}$

$$V_1 = \frac{1}{3}\,\pi \cdot 1{,}50\,(2 \cdot 1^2 + 0{,}8^2)\ \text{m}^3 = 4{,}1469\ \text{m}^3$$

Neue Werte: $R = 1{,}02\ \text{m},\ r = 0{,}78\ \text{m},\ h = 1{,}50\ \text{m}$

$$V_2 = \frac{1}{3}\,\pi \cdot 1{,}50\,(2 \cdot 1{,}02^2 + 0{,}78^2)\ \text{m}^3 = 4{,}2242\ \text{m}^3$$

Exakte Volumenänderung: $\Delta V = V_2 - V_1 = (4{,}2242 - 4{,}1469)\ \text{m}^3 = 0{,}0773\ \text{m}^3$

Prozentuale Änderung des Volumens: $\dfrac{\Delta V}{V_1} \cdot 100\,\% = \dfrac{0{,}0773\ \text{m}^3}{4{,}1469\ \text{m}^3} \cdot 100\,\% = 1{,}86\,\%$

Näherungsrechnung mit dem totalen Differential

Es ändern sich die Radien R und r, nicht aber die Höhe h der Tonne. Daher können wir in diesem Zusammenhang das Volumen V als eine nur von R und r abhängige Funktion betrachten (*Alternative:* V als eine von R, r und h abhängige Funktion ansehen und im totalen Differential $dh = 0$ setzen):

$$V = f(R;\, r) = \frac{1}{3}\,\pi h\,(2R^2 + r^2)$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial R}\,dR + \frac{\partial V}{\partial r}\,dr = \frac{1}{3}\,\pi h \cdot 4R\,dR + \frac{1}{3}\,\pi h \cdot 2r\,dr = \frac{2}{3}\,\pi h\,(2R\,dR + r\,dr)$$

Wir verwenden noch die in der Praxis übliche Schreibweise $(dV,\ dR,\ dr \rightarrow \Delta V,\ \Delta R,\ \Delta r)$:

$$\Delta V = \frac{2}{3}\,\pi h\,(2R\,\Delta R + r\,\Delta r)$$

Mit $R = 1\ \text{m},\ r = 0{,}8\ \text{m},\ h = 1{,}50\ \text{m},\ \Delta R = +0{,}02\ \text{m}$ und $\Delta r = -0{,}02\ \text{m}$ erhalten wir den folgenden *Näherungswert* für die Volumenänderung (in guter Übereinstimmung mit der *exakten* Änderung):

$$\Delta V = \frac{2}{3}\,\pi \cdot 1{,}50\,[2 \cdot 1 \cdot 0{,}02 + 0{,}8 \cdot (-0{,}02)]\ \text{m}^3 = \pi\,(0{,}04 - 0{,}016)\ \text{m}^3 = 0{,}0754\ \text{m}^3$$

Prozentuale Änderung des Volumens: $\dfrac{\Delta V}{V_1} \cdot 100\,\% = \dfrac{0{,}0754\ \text{m}^3}{4{,}1469\ \text{m}^3} \cdot 100\,\% = 1{,}82\,\%$

5 Anwendungen

5.1 Linearisierung einer Funktion

Hinweise

Lehrbuch: Band 2, Kapitel III.2.5.2
Formelsammlung: Kapitel IX.2.5.1

E53

Linearisieren Sie die Funktion $z = 5\left[\ln\left(\frac{x-y}{y^2}\right) - \frac{1}{5}\right]$ mit $x > y > 0$ in der Umgebung der Stelle $x_0 = 2,\ y_0 = 1$. Berechnen Sie mit dieser Näherungsfunktion den Wert an der Stelle $x = 2{,}1$, $y = 0{,}95$. Wie groß ist die Abweichung zum *exakten* Funktionswert?

Die Funktion lässt sich mit elementaren Rechenregeln für Logarithmen wie folgt *vereinfachen*:

$$z = f(x;\,y) = 5\left[\ln\left(\frac{x-y}{y^2}\right) - \frac{1}{5}\right] = 5\left[\ln(x-y) - \ln y^2 - \frac{1}{5}\right] = 5\left[\ln(x-y) - 2\cdot\ln y - \frac{1}{5}\right] =$$

$$= 5\cdot\ln(x-y) - 10\cdot\ln y - 1$$

Rechenregeln: $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ und $\ln a^n = n\cdot\ln a$

Linearisierung der Funktion

Höhenkoordinate z_0 des „Arbeitspunktes“ $P = (2;\,1;\,z_0)$:

$$z_0 = f(2;\,1) = 5\cdot\underbrace{\ln(2-1)}_{\ln 1 = 0} - 10\cdot\underbrace{\ln 1}_{0} - 1 = -1 \quad\Rightarrow\quad P = (2;\,1;\,-1)$$

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

$$z = f(x;\,y) = 5\cdot\ln\underbrace{(x-y)}_{u} - 10\cdot\ln y - 1 = 5\cdot\ln u - 10\cdot\ln y - 1 \quad \text{mit} \quad u = x - y$$

Es wird gliedweise differenziert, der erste Summand dabei in der angedeuteten Weise nach der *Kettenregel*:

$$z_x = f_x(x;\,y) = 5\cdot\frac{1}{u}\cdot 1 - 0 - 0 = \frac{5}{u} = \frac{5}{x-y}$$

$$z_y = f_y(x;\,y) = 5\cdot\frac{1}{u}\cdot(-1) - 10\cdot\frac{1}{y} - 0 = \frac{-5}{u} - \frac{10}{y} = \frac{-5}{x-y} - \frac{10}{y}$$

Ableitungswerte in $P = (2;\,1;\,-1)$: $f_x(2;\,1) = \frac{5}{2-1} = 5,\ f_y(2;\,1) = \frac{-5}{2-1} - 10 = -15$

Gleichung der Tangentialebene in $P = (2;\,1;\,-1)$

$$z - z_0 = f_x(x_0;\,y_0)\cdot(x - x_0) + f_y(x_0;\,y_0)\cdot(y - y_0)$$

$$z + 1 = f_x(2;\,1)\cdot(x-2) + f_y(2;\,1)\cdot(y-1)$$

$$z + 1 = 5(x-2) - 15(y-1) = 5x - 10 - 15y + 15 = 5x - 15y + 5$$

$$z = 5x - 15y + 4$$

Linearisierte Funktion in der Umgebung des Arbeitspunktes $P = (2;\ 1;\ -1)$:

$$z = 5\left[\ln\left(\frac{x-y}{y^2}\right) - \frac{1}{5}\right] \approx 5x - 15y + 4$$

Näherungswert an der Stelle $x = 2{,}1$, $y = 0{,}95$ (Einsetzen dieser Werte in die *linearisierte* Funktion):

$$z \approx 5 \cdot 2{,}1 - 15 \cdot 0{,}95 + 4 = 0{,}25$$

Exakter Wert (berechnet mit der Funktionsgleichung):

$$z = 5\left[\ln\left(\frac{2{,}1 - 0{,}95}{0{,}95^2}\right) - \frac{1}{5}\right] = 0{,}2117$$

Der Näherungswert fällt um $\Delta z = 0{,}25 - 0{,}2117 = 0{,}0383$ zu *groß* aus.

E54

Der *elektrische Widerstand* zwischen zwei koaxialen Zylinderelektroden (Hohlzylinder) wird nach der Formel

$$R = \frac{1}{2\pi\kappa l} \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right), \quad r_a > r_i > 0$$

berechnet (siehe hierzu Bild E-4; r_a, r_i: Außen- bzw. Innenradius; l: Länge des Hohlzylinders; κ: Leitfähigkeit des Materials zwischen den Elektroden).

Linearisieren Sie diese Funktion für geringfügige Änderungen der Radien r_a bzw. r_i um Δr_a bzw. Δr_i bei *fester* Länge l.

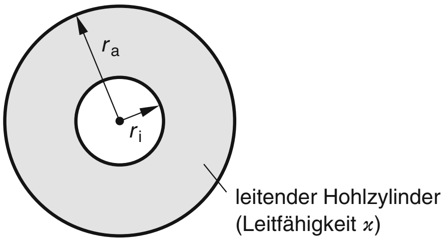


Bild E-4

Bei *konstanter* Länge l ist der Widerstand R eine nur von r_a und r_i abhängige Funktion:

$$R = f(r_a;\ r_i) = \frac{1}{2\pi\kappa l} \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) = \frac{1}{2\pi\kappa l}\,(\ln r_a - \ln r_i)$$

Rechenregel: $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Bei *kleinen* Änderungen der beiden Radien ändert sich auch der Widerstand R nur geringfügig und wir können diese Widerstandsänderung *näherungsweise* mit Hilfe des *totalen Differentials* von R bestimmen:

$$dR = \frac{\partial R}{\partial r_a}\,dr_a + \frac{\partial R}{\partial r_i}\,dr_i = \frac{1}{2\pi\kappa l} \cdot \frac{1}{r_a}\,dr_a - \frac{1}{2\pi\kappa l} \cdot \frac{1}{r_i}\,dr_i =$$

$$= \frac{1}{2\pi\kappa l}\left(\frac{dr_a}{r_a} - \frac{dr_i}{r_i}\right) = \frac{1}{2\pi\kappa l} \cdot \frac{r_i\,dr_a - r_a\,dr_i}{r_a r_i} = \frac{r_i\,dr_a - r_a\,dr_i}{2\pi\kappa l r_a r_i}$$

Die in der Praxis verwendete Schreibweise lautet (wir ersetzen dr_a, dr_i, dR durch $\Delta r_a, \Delta r_i, \Delta R$):

$$\Delta R = \frac{r_i\,\Delta r_a - r_a\,\Delta r_i}{2\pi\kappa l r_a r_i} = \frac{1}{2\pi\kappa l r_a r_i}\,(r_i\,\Delta r_a - r_a\,\Delta r_i)$$

Mit dieser *linearen* Beziehung lässt sich die Widerstandsänderung ΔR aus den vorgegebenen Änderungen Δr_a und Δr_i der beiden Radien leicht berechnen (bei fest vorgegebenen Werten für l, r_a und r_i).

Reihenschaltung zweier Kapazitäten C_1 und C_2 (Bild E-5):

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

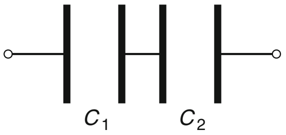


Bild E-5

E55

a) Lösen Sie zunächst diese Gleichung nach der Gesamtkapazität C auf und *linearisieren* Sie dann die erhaltene Funktion in der Umgebung des „Arbeitspunktes“ $C_1 = 6\,\mu\text{F}$, $C_2 = 4\,\mu\text{F}$.

b) Wie groß ist die Kapazitätsänderung, wenn die 1. Kapazität um 0,1 µF *vergrößert* und gleichzeitig die 2. Kapazität um den gleichen Betrag *verkleinert* wird?
(*Exakter* Wert und *Näherungswert.*)

c) Beide Kapazitäten werden um jeweils 1 % *verkleinert*. Wie ändert sich dann die Gesamtkapazität?

---

a) Wir lösen die Gleichung nach C auf:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_2 + C_1}{C_1 C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

(zuerst den Hauptnenner $C_1 C_2$, dann den Kehrwert bilden). Für die *Linearisierung* benötigen wir die partiellen Ableitungen 1. Ordnung. Die *Quotientenregel* liefert das gewünschte Ergebnis:

$$C = f(C_1; C_2) = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = C_1 C_2 , \quad v = C_1 + C_2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial C_1} = C_2 , \quad \frac{\partial v}{\partial C_1} = 1$$

$$\frac{\partial C}{\partial C_1} = \frac{\frac{\partial u}{\partial C_1} \cdot v - \frac{\partial v}{\partial C_1} \cdot u}{v^2} = \frac{C_2 (C_1 + C_2) - 1 \cdot C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{C_1 C_2 + C_2^2 - C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2} = \frac{C_2^2}{(C_1 + C_2)^2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial C_2} = \frac{C_1^2}{(C_1 + C_2)^2} \qquad \text{(aus Symmetriegründen, } C_1 \text{ und } C_2 \text{ sind vertauschbar)}$$

Die *linearisierte Funktion* lautet damit (*totales Differential* von $C = f(C_1; C_2)$):

$$\Delta C = \left(\frac{\partial C}{\partial C_1}\right) \Delta C_1 + \left(\frac{\partial C}{\partial C_2}\right) \Delta C_2 = \frac{C_2^2}{(C_1 + C_2)^2}\, \Delta C_1 + \frac{C_1^2}{(C_1 + C_2)^2}\, \Delta C_2 = \frac{C_2^2\, \Delta C_1 + C_1^2\, \Delta C_2}{(C_1 + C_2)^2}$$

Dabei sind ΔC_1, ΔC_2 und ΔC *Relativkoordinaten*, d. h. die *Änderungen* der Kapazitäten gegenüber dem „Arbeitspunkt“ (Ausgangsgrößen). Für C_1 und C_2 werden die *Ausgangswerte* 6 µF bzw. 4 µF eingesetzt:

$$\Delta C = \frac{(4\,\mu\text{F})^2\, \Delta C_1 + (6\,\mu\text{F})^2\, \Delta C_2}{(6\,\mu\text{F} + 4\,\mu\text{F})^2} = \frac{16\, \Delta C_1 + 36\, \Delta C_2}{100} = 0{,}16\, \Delta C_1 + 0{,}36\, \Delta C_2$$

b) Wir berechnen jetzt die *Kapazitätsänderung* ΔC für $\Delta C_1 = +0{,}1\,\mu\text{F}$ und $\Delta C_2 = -0{,}1\,\mu\text{F}$:

$$\Delta C = [0{,}16 \cdot 0{,}1 + 0{,}36 \cdot (-0{,}1)]\,\mu\text{F} = (0{,}016 - 0{,}036)\,\mu\text{F} = -0{,}020\,\mu\text{F}$$

Die *exakte* Änderung ist (betragsmäßig) geringfügig größer:

$$\Delta C_{\text{exakt}} = f(6{,}1;\, 3{,}9) - f(6;\, 4) = \frac{6{,}1 \cdot 3{,}9}{6{,}1 + 3{,}9} - \frac{6 \cdot 4}{6 + 4} = 2{,}379 - 2{,}4 = -0{,}021 \quad (\text{in } \mu\text{F}) .$$

c) Kapazitätsänderung ΔC für $\Delta C_1 = -0{,}06\,\mu\text{F}$ und $\Delta C_2 = -0{,}04\,\mu\text{F}$ (*Näherungswert*):

$$\Delta C = [0{,}16 \cdot (-0{,}06) + 0{,}36 \cdot (-0{,}04)]\,\mu\text{F} = (-0{,}0096 - 0{,}0144)\,\mu\text{F} = -0{,}0240\,\mu\text{F}$$

Exakte Änderung der Kapazität C:

$$\Delta C_{\text{exakt}} = f(5{,}94;\, 3{,}96) = \frac{5{,}94 \cdot 3{,}96}{5{,}94 + 3{,}96} - \frac{6 \cdot 4}{6 + 4} = 2{,}3760 - 2{,}4 = -0{,}0240 \qquad (\text{in } \mu\text{F})$$

E56

Linearisieren Sie die Funktion $u = f(x;\, y;\, z) = 2x^2 y + xy \cdot \sin z$ an der Stelle $x_0 = y_0 = 1$, $z_0 = \pi/2$. Wie ändert sich der Funktionswert *näherungsweise*, wenn man die unabhängigen Koordinaten

a) um jeweils 2% *vergrößert*,

b) der Reihe nach um $dx = 0{,}1$, $dy = -0{,}08$ und $dz = 0{,}2$ verändert?

Berechnung des zugehörigen Funktionswertes u_0:

$$u_0 = f(1;\, 1;\, \pi/2) = 2 \cdot 1^2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot \sin(\pi/2) = 2 + 1 = 3$$

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

$$\left.\begin{aligned} u_x &= f_x(x;\, y;\, z) = 4xy + y \cdot \sin z \\ u_y &= f_y(x;\, y;\, z) = 2x^2 + x \cdot \sin z \\ u_z &= f_z(x;\, y;\, z) = 0 + xy \cdot \cos z = xy \cdot \cos z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} f_x(1;\, 1;\, \pi/2) &= 4 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot \sin(\pi/2) = 5 \\ f_y(1;\, 1;\, \pi/2) &= 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot \sin(\pi/2) = 3 \\ f_z(1;\, 1;\, \pi/2) &= 1 \cdot 1 \cdot \cos(\pi/2) = 0 \end{aligned}$$

Linearisierte Funktion

$$u - u_0 = f_x(x_0;\, y_0;\, z_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0;\, y_0;\, z_0) \cdot (y - y_0) + f_z(x_0;\, y_0;\, z_0) \cdot (z - z_0)$$

$$u - 3 = f_x(1;\, 1;\, \pi/2) \cdot (x - 1) + f_y(1;\, 1;\, \pi/2) \cdot (y - 1) + f_z(1;\, 1;\, \pi/2) \cdot (z - \pi/2)$$

$$u - 3 = 5(x - 1) + 3(y - 1) + 0\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 5x - 5 + 3y - 3 = 5x + 3y - 8$$

$$u = 5x + 3y - 5 \qquad \text{(in der Umgebung von } x_0 = y_0 = 1,\ z_0 = \pi/2\text{)}.$$

Man beachte, dass die linearisierte Funktion *nicht* von der Koordinate z abhängt.

a) Änderung des Funktionswertes (mit Hilfe des totalen Differentials berechnet)

Wir berechnen zunächst die benötigten *absoluten* Änderungen der drei unabhängigen Koordinaten:

$$dx = 2\% \text{ von } x_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad dx = 0{,}02$$

$$dy = 2\% \text{ von } y_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad dy = 0{,}02$$

$$dz = 2\% \text{ von } z_0 = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad dz = 0{,}0314$$

Mit dem totalen Differential

$$du = f_x(1;\, 1;\, \pi/2)\, dx + f_y(1;\, 1;\, \pi/2)\, dy + f_z(1;\, 1;\, \pi/2)\, dz = 5\, dx + 3\, dy + 0\, dz = 5\, dx + 3\, dy$$

erhalten wir dann den folgenden *Näherungswert* für die Änderung des Funktionswertes:

$$du = 5 \cdot 0{,}02 + 3 \cdot 0{,}02 = 0{,}1 + 0{,}06 = 0{,}16$$

b) Mit $dx = 0{,}1$, $dy = -0{,}08$ und $dz = 0{,}2$ erhalten wir mit dem unter a) bestimmten totalen Differential die folgende Änderung des Funktionswertes:

$$du = 5dx + 3dy + 0dz = 5dx + 3dy = 5 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot (-0{,}08) = 0{,}5 - 0{,}24 = 0{,}26$$

Neuer Funktionswert:

$$u = u_0 + du = 3 + 0{,}26 = 3{,}26$$

5.2 Lineare Fehlerfortpflanzung

Hinweise

(1) Die *unabhängigen* Messgrößen x und y müssen in der Form

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \quad \text{und} \quad y = \bar{y} \pm \Delta y$$

vorliegen ($\bar{x}$, $\bar{y}$ sind die *Mittelwerte*, Δx, Δy die *Messunsicherheiten*, d. h. die *Standardabweichungen der Mittelwerte*). Die lineare Fehlerfortpflanzung liefert dann die *maximale Messunsicherheit* (auch *maximaler* oder *größtmöglicher Fehler* genannt) der „indirekten" Messgröße $z = f(x;\, y)$ auf der Basis des *totalen* oder *vollständigen Differentials* der Funktion $z = f(x;\, y)$.

(2) **Lehrbuch:** Band 2, Kapitel III.2.5.5
Formelsammlung: Kapitel XI.4

E57

Der *Flächeninhalt* eines Kreissegments wird nach der Formel

$$A = 0{,}5\, r^2 (\varphi - \sin \varphi)$$

berechnet (Bild E-6). Radius r und Zentriwinkel φ wurden wie folgt gemessen:

$$r = 10{,}0 \pm 0{,}1 \text{ cm}, \quad \varphi = 60^\circ \pm 1^\circ$$

Wie lautet das *Messergebnis* für die „indirekte" Messgröße A?

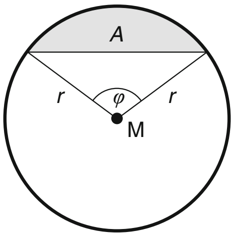


Bild E-6

„Indirekter Messwert" (Mittelwert) für A:

Für r und φ sind die *Messwerte (Mittelwerte)* $\bar{r} = 10{,}0$ cm und $\bar{\varphi} = 60^\circ$ bzw. $\bar{\varphi} = \pi/3$ einzusetzen:

$$\bar{A} = 0{,}5\, \bar{r}^2 (\bar{\varphi} - \sin \bar{\varphi}) = 0{,}5 \cdot 10{,}0^2 \left(\frac{\pi}{3} - \sin 60^\circ\right) \text{cm}^2 = 9{,}0586 \text{ cm}^2 \approx 9{,}06 \text{ cm}^2$$

(der Summand $\bar{\varphi}$ muss im *Bogenmaß* angegeben werden!)

Lineare Fehlerfortpflanzung mit Hilfe des totalen Differentials

$$A = f(r;\, \varphi) = 0{,}5\, r^2 (\varphi - \sin \varphi)$$

$$dA = \frac{\partial A}{\partial r}\, dr + \frac{\partial A}{\partial \varphi}\, d\varphi = r(\varphi - \sin \varphi)\, dr + 0{,}5\, r^2 (1 - \cos \varphi)\, d\varphi$$

Daraus erhalten wir den Formelausdruck für den *maximalen Fehler* in der praxisüblichen Schreibweise:

$$\Delta A_{\max} = |\, r(\varphi - \sin \varphi)\, \Delta r\,| + |\, 0{,}5\, r^2 (1 - \cos \varphi)\, \Delta \varphi\,|$$

Mit $r = 10{,}0$ cm, $\Delta r = 0{,}1$ cm, $\varphi = 60^\circ$ bzw. $\varphi = \pi/3$ und $\Delta \varphi = \pi/180$ (entspricht 1°) folgt:

$$\Delta A_{\max} = 10{,}0 \left(\frac{\pi}{3} - \sin 60^\circ\right) \cdot 0{,}1 \text{ cm}^2 + 0{,}5 \cdot 10{,}0^2 (1 - \cos 60^\circ) \cdot \frac{\pi}{180} \text{ cm}^2 =$$

$$= 0{,}1812 \text{ cm}^2 + 0{,}4363 \text{ cm}^2 = 0{,}6175 \text{ cm}^2 \approx 0{,}62 \text{ cm}^2$$

Messergebnis: $A = \bar{A} \pm \Delta A_{\max} = (9{,}06 \pm 0{,}62)\, \text{cm}^2$

Prozentualer Maximalfehler: $\dfrac{\Delta A_{\max}}{\bar{A}} \cdot 100\,\% = \dfrac{0{,}62 \text{ cm}^2}{9{,}06 \text{ cm}^2} \cdot 100\,\% \approx 6{,}8\,\%$

E58

Das *Massenträgheitsmoment* J eines dünnen homogenen Stabes (bezogen auf die Schwerpunktsachse senkrecht zur Stabachse) lässt sich aus der Stabmasse m und der Stablänge l wie folgt berechnen:

$$J = J(m;\, l) = \frac{1}{12}\, m\, l^2$$

In einem Experiment wurden für m und l folgende Messwerte ermittelt:

i	1	2	3	4	5
m_i (in g)	119,5	121,0	120,3	119,2	120,0
l_i (in cm)	19,9	19,7	20,2	20,3	19,9

a) Werten Sie die beiden Messreihen in der üblichen Weise aus (Angabe des jeweiligen Mittelwertes und der zugehörigen Standardabweichung des Mittelwertes).

b) Welcher Mittelwert ergibt sich daraus für das Massenträgheitsmoment J?
Welchen *maximalen Fehler* (Messunsicherheit) liefert die *lineare Fehlerfortpflanzung* unter Verwendung des totalen Differentials?
Wie lautet das („indirekte") Messergebnis für die Größe J?

a) Auswertung der beiden Messreihen

Für jede der beiden Größen bilden wir der Reihe nach den *Mittelwert*, die *Abweichung* der einzelnen Messwerte vom Mittelwert, die *Abweichungsquadrate* und mit der Summe der Abweichungsquadrate dann die *Standardabweichung des Mittelwertes* (wird für die Fehlerfortpflanzung benötigt). Die Anordnung der Werte erfolgt zweckmäßigerweise in Form einer Tabelle:

i	$\frac{m_i}{g}$	$\frac{m_i - \bar{m}}{g}$	$\frac{(m_i - \bar{m})^2}{g^2}$	$\frac{l_i}{\text{cm}}$	$\frac{l_i - \bar{l}}{\text{cm}}$	$\frac{(l_i - \bar{l})^2}{\text{cm}^2}$
1	119,5	– 0,5	0,25	19,9	– 0,1	0,01
2	121,0	1,0	1	19,7	– 0,3	0,09
3	120,3	0,3	0,09	20,2	0,2	0,04
4	119,2	– 0,8	0,64	20,3	0,3	0,09
5	120,0	0	0	19,9	– 0,1	0,01
$\sum$	600,0	0	1,98	100,0	0	0,24

Messergebnis für die Größe m (Spalte 2, 3 und 4)

$$\bar{m} = \frac{\sum m_i}{n} = \frac{600{,}0\ \text{g}}{5} = 120{,}0\ \text{g} \qquad \textit{Kontrolle:}\ \sum (m_i - \bar{m}) = 0\ \ (\text{Spalte } 3)$$

$$\Delta m = \sqrt{\frac{\sum (m_i - \bar{m})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{1{,}98\ \text{g}^2}{5 \cdot 4}} = 0{,}32\ \text{g} \approx 0{,}3\ \text{g}$$

Messergebnis: $m = \bar{m} \pm \Delta m = (120{,}0 \pm 0{,}3)\ \text{g}$

Messergebnis für die Größe l (Spalte 5, 6 und 7)

$$\bar{l} = \frac{\sum l_i}{n} = \frac{100\ \text{cm}}{5} = 20\ \text{cm} \qquad \textit{Kontrolle:}\ \sum (l_i - \bar{l}) = 0\ \ (\text{Spalte } 6)$$

$$\Delta l = \sqrt{\frac{\sum (l_i - \bar{l})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{0{,}24\ \text{cm}^2}{5 \cdot 4}} = 0{,}11\ \text{cm} \approx 0{,}1\ \text{cm}$$

Messergebnis: $l = \bar{l} \pm \Delta l = (20{,}0 \pm 0{,}1)\ \text{cm}$

b) Mittelwert und maximaler Fehler der „indirekten" Messgröße *J*

Mittelwert: $\bar{J} = \frac{1}{12}\,\bar{m}\,\bar{l}^{\,2} = \frac{1}{12}\,(120\,\text{g}) \cdot (20\,\text{cm})^2 = 4000\,\text{g} \cdot \text{cm}^2$

Lineare Fehlerfortpflanzung mit Hilfe des totalen Differentials

$$J = f(m;\,l) = \frac{1}{12}\,m\,l^2 \quad \Rightarrow \quad dJ = \frac{\partial J}{\partial m}\,dm + \frac{\partial J}{\partial l}\,dl = \frac{1}{12}\,l^2\,dm + \frac{1}{6}\,m\,l\,dl$$

Maximaler Fehler (in praxisüblicher Schreibweise):

$$\Delta J_{\max} = \left|\frac{\partial J}{\partial m}\,\Delta m\right| + \left|\frac{\partial J}{\partial l}\,\Delta l\right| = \left|\frac{1}{12}\,l^2\,\Delta m\right| + \left|\frac{1}{6}\,m\,l\,\Delta l\right|$$

Mit $m = 120\,\text{g}$, $l = 20\,\text{cm}$, $\Delta m = 0{,}32\,\text{g}$ und $\Delta l = 0{,}11\,\text{cm}$ erhalten wir:

$$\Delta J_{\max} = \frac{1}{12}\,(20\,\text{cm})^2 \cdot 0{,}32\,\text{g} + \frac{1}{6}\,(120\,\text{g}) \cdot (20\,\text{cm}) \cdot 0{,}11\,\text{cm} =$$

$$= (10{,}67 + 44)\,\text{g} \cdot \text{cm}^2 = 54{,}67\,\text{g} \cdot \text{cm}^2 \approx 55\,\text{g} \cdot \text{cm}^2$$

Messergebnis: $J = \bar{J} \pm \Delta J_{\max} = (4000 \pm 55)\,\text{g} \cdot \text{cm}^2$

Prozentualer Maximalfehler: $\frac{\Delta J_{\max}}{\bar{J}} \cdot 100\,\% = \frac{55\,\text{g} \cdot \text{cm}^2}{4000\,\text{g} \cdot \text{cm}^2} \cdot 100\,\% \approx 1{,}4\,\%$

E59

Die Leistung eines Gleichstroms wird nach der Formel $P = RI^2$ berechnet. Widerstand R und Stromstärke I wurden in einem Praktikumsversuch wie folgt gemessen:

$$R = (80{,}1 \pm 1{,}0)\,\Omega\,, \quad I = (6{,}2 \pm 0{,}1)\,\text{A}$$

Geben Sie das *Messergebnis* für P in der Form $P = \bar{P} \pm \Delta P_{\max}$ an.

„Indirekter Messwert" (Mittelwert) für *P*

$$\bar{P} = \bar{R} \cdot \bar{I}^{\,2} = (80\,\Omega) \cdot (6{,}2\,\text{A})^2 = 3075{,}2\,\text{W} \approx 3075\,\text{W}$$

Lineare Fehlerfortpflanzung mit dem totalen Differential

$$P = f(R;\,I) = RI^2 \quad \Rightarrow \quad dP = \frac{\partial P}{\partial R}\,dR + \frac{\partial P}{\partial I}\,dI = I^2\,dR + 2RI\,dI$$

Maximaler Fehler (in praxisüblicher Schreibweise):

$$\Delta P_{\max} = \left|\frac{\partial P}{\partial R}\,\Delta R\right| + \left|\frac{\partial P}{\partial I}\,\Delta I\right| = |I^2\,\Delta R| + |2RI\,\Delta I|$$

Einsetzen der Werte $R = 80\,\Omega$, $I = 6{,}2\,\text{A}$, $\Delta R = 1\,\Omega$ und $\Delta I = 0{,}1\,\text{A}$ liefert:

$$\Delta P_{\max} = (6{,}2\,\text{A})^2 \cdot 1\,\Omega + 2\,(80\,\Omega) \cdot (6{,}2\,\text{A}) \cdot 0{,}1\,\text{A} = (38{,}44 + 99{,}20)\,\text{W} = 137{,}64\,\text{W} \approx 138\,\text{W}$$

Messergebnis: $P = \bar{P} \pm \Delta P_{\max} = (3075 \pm 138)\,\text{W}$

Prozentualer Maximalfehler: $\frac{\Delta P_{\max}}{\bar{P}} \cdot 100\,\% = \frac{138\,\text{W}}{3075\,\text{W}} \cdot 100\,\% \approx 4{,}5\,\%$

E60

Torsionsflächenmoment eines Kreisrings (Bild E-7):

$$W = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R} \qquad (R > r > 0)$$

Innen- und Außenradius wurden wie folgt gemessen:

$$r = (2{,}00 \pm 0{,}01 \text{ cm}), \quad R = (4{,}00 \pm 0{,}02) \text{ cm}$$

Wie lautet das *Messergebnis* für die „indirekte" Messgröße W?

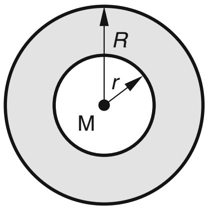


Bild E-7

„Indirekter Messwert" (Mittelwert) für W

$$\overline{W} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\bar{R}^4 - \bar{r}^4}{\bar{R}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4^4 - 2^4}{4} \text{ cm}^3 = 30\,\pi \text{ cm}^3 \approx 94{,}25 \text{ cm}^3$$

Lineare Fehlerfortpflanzung mit Hilfe des totalen Differentials

Wir bilden zunächst die für das *totale Differential* benötigten partiellen Ableitungen 1. Ordnung der von R und r abhängigen Funktion

$$W = f(R;\, r) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R}$$

Für die partielle Ableitung nach R verwenden wir die *Quotientenregel*:

$$W = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = R^4 - r^4, \quad v = R \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial R} = 4R^3, \quad \frac{\partial v}{\partial R} = 1$$

$$\frac{\partial W}{\partial R} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\frac{\partial u}{\partial R} \cdot v - \frac{\partial v}{\partial R} \cdot u}{v^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4R^3 \cdot R - 1\,(R^4 - r^4)}{R^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4R^4 - R^4 + r^4}{R^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3R^4 + r^4}{R^2}$$

Die partielle Ableitung nach r lässt sich nach einer kleinen Umformung der Funktion *elementar* bilden:

$$W = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R} = \frac{\pi}{2}\left(R^3 - \frac{r^4}{R}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\pi}{2}\left(0 - \frac{4r^3}{R}\right) = \frac{-2\pi r^3}{R}$$

Totales Differential von W:

$$dW = \frac{\partial W}{\partial R}\, dR + \frac{\partial W}{\partial r}\, dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3R^4 + r^4}{R^2}\, dR + \frac{-2\pi r^3}{R}\, dr$$

Maximaler Fehler (in praxisüblicher Schreibweise):

$$\Delta W_{\text{max}} = \left|\frac{\partial W}{\partial R}\,\Delta R\right| + \left|\frac{\partial W}{\partial r}\,\Delta r\right| = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3R^4 + r^4}{R^2}\,\Delta R + \frac{2\pi r^3}{R}\,\Delta r$$

Zur Erinnerung: Alle Beiträge sind *positiv* infolge der Betragsbildung!. Wir setzen die Werte $R = 4$ cm, $r = 2$ cm, $\Delta R = 0{,}02$ cm und $\Delta r = 0{,}01$ cm ein und erhalten den folgenden *absoluten Maximalfehler*:

$$\Delta W_{\text{max}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3 \cdot 4^4 + 2^4}{4^2} \cdot 0{,}02 \text{ cm}^3 + \frac{2\pi \cdot 2^3}{4} \cdot 0{,}01 \text{ cm}^3 =$$

$$= (1{,}5394 + 0{,}1257) \text{ cm}^2 = 1{,}6651 \text{ cm}^2 \approx 1{,}67 \text{ cm}^2$$

Messergebnis: $W = \overline{W} \pm \Delta W_{\text{max}} = (94{,}25 \pm 1{,}67) \text{ cm}^3$

Prozentualer Maximalfehler: $\dfrac{\Delta W_{\text{max}}}{\overline{W}} \cdot 100\,\% = \dfrac{1{,}67 \text{ cm}^3}{94{,}25 \text{ cm}^3} \cdot 100\,\% \approx 1{,}8\,\%$

E61

Die Reihenschaltung zweier elastischer Federn mit den Federkonstanten c_1 und c_2 lässt sich durch eine *resultierende Feder* mit der Federkonstanten

$$c = f(c_1; c_2) = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$$

ersetzen (Bild E-8).

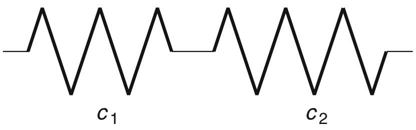


Bild E-8

Für c_1 und c_2 wurden folgende Messwerte ermittelt:

$$c_1 = (150{,}0 \pm 3{,}0)\,\text{N/m}\,,$$

$$c_2 = (100{,}0 \pm 2{,}0)\,\text{N/m}$$

Wie lautet das *Messergebnis* für die „indirekte“ Messgröße c auf der Basis der *linearen Fehlerfortpflanzung*?

„Indirekter Messwert“ (Mittelwert) für c

$$\bar{c} = \frac{150 \cdot 100}{(150 + 100)^2}\,\frac{\text{N}}{\text{m}} = 60\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Lineare Fehlerfortpflanzung mit dem totalen Differential

Die benötigten partiellen Ableitungen 1. Ordnung erhalten wir mit der *Quotientenregel*:

$$c = f(c_1; c_2) = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = c_1 c_2\,, \quad v = c_1 + c_2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial c_1} = c_2\,, \quad \frac{\partial v}{\partial c_1} = 1$$

$$\frac{\partial c}{\partial c_1} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial c_1} \cdot v - \dfrac{\partial v}{\partial c_1} \cdot u}{v^2} = \frac{c_2 (c_1 + c_2) - 1 \cdot c_1 c_2}{(c_1 + c_2)^2} = \frac{c_1 c_2 + c_2^2 - c_1 c_2}{(c_1 + c_2)^2} = \frac{c_2^2}{(c_1 + c_2)^2}$$

$$\frac{\partial c}{\partial c_2} = \frac{c_1^2}{(c_1 + c_2)^2} \quad \text{(wegen der } \textit{Symmetrie} \text{ der Funktion bezüglich der Variablen } c_1 \text{ und } c_2\text{)}$$

Damit lautet das *totale Differential* von c wie folgt:

$$dc = \frac{\partial c}{\partial c_1}\,dc_1 + \frac{\partial c}{\partial c_2}\,dc_2 = \frac{c_2^2}{(c_1 + c_2)^2}\,dc_1 + \frac{c_1^2}{(c_1 + c_2)^2}\,dc_2$$

Bei der (linearen) Fehlerfortpflanzung werden die *Beträge* der einzelnen Summanden addiert (*ungünstigster* Fall) und wir erhalten definitionsgemäß den *Maximalfehler* (in praxisüblicher Schreibweise):

$$\Delta c_{\max} = \left| \frac{\partial c}{\partial c_1}\,\Delta c_1 \right| + \left| \frac{\partial c}{\partial c_2}\,\Delta c_2 \right| = \left| \frac{c_2^2}{(c_1 + c_2)^2}\,\Delta c_1 \right| + \left| \frac{c_1^2}{(c_1 + c_2)^2}\,\Delta c_2 \right| = \frac{c_2^2\,\Delta c_1 + c_1^2\,\Delta c_2}{(c_1 + c_2)^2}$$

Mit $c_1 = 150$, $c_2 = 100$, $\Delta c_1 = 3$ und $\Delta c_2 = 2$ (alle Werte in N/m) folgt:

$$\Delta c_{\max} = \frac{100^2 \cdot 3 + 150^2 \cdot 2}{(150 + 100)^2}\,\frac{\text{N}}{\text{m}} = 1{,}2\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Messergebnis: $c = \bar{c} \pm \Delta c_{\max} = (60{,}0 \pm 1{,}2)\,\text{N/m}$

Prozentualer Maximalfehler: $\dfrac{\Delta c_{\max}}{\bar{c}} \cdot 100\,\% = \dfrac{1{,}2\,\text{N/m}}{60{,}0\,\text{N/m}} \cdot 100\,\% = 2\,\%$

5.3 Relative Extremwerte

Hinweise

Lehrbuch: Band 2, Kapitel III.2.5.3
Formelsammlung: Kapitel IX.2.5.2

E62

Bestimmen Sie die *relativen Extremwerte* der Funktion $z = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad (x \neq 0, \; y \neq 0)$.

Partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung:

$$z = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = xy + x^{-1} + y^{-1}$$

$$z_x = y - x^{-2}, \quad z_y = x - y^{-2}, \quad z_{xx} = -(-2x^{-3}) = \frac{2}{x^3}, \quad z_{yy} = -(-2y^{-3}) = \frac{2}{y^3}, \quad z_{xy} = 1$$

Notwendige Bedingungen für einen relativen Extremwert: $z_x = 0, \; z_y = 0$

$$z_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(I)} \quad y - x^{-2} = y - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x^2}$$

$$z_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(II)} \quad x - y^{-2} = x - \frac{1}{y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad xy^2 = 1$$

Gleichung (I) wird nach y aufgelöst, der gefundene Ausdruck in Gleichung (II) eingesetzt:

$$\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad xy^2 = x \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = x \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{1}{x^3} = 1 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$$

(Kürzen durch x ist wegen $x \neq 0$ erlaubt). Zugehöriger y-Wert: $y_1 = 1$.
Wir prüfen jetzt, ob an der Stelle $(x_1; y_1) = (1; 1)$ ein *relativer Extremwert* vorliegt:

$$z_{xx}(1; 1) = 2, \qquad z_{yy}(1; 1) = 2, \qquad z_{xy}(1; 1) = 1$$

$$\Delta = z_{xx}(1; 1) \cdot z_{yy}(1; 1) - z_{xy}^2(1; 1) = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{relativer Extremwert}$$

Wegen $z_{xx}(1; 1) = 2 > 0$ handelt es sich hierbei um ein *relatives Minimum*: Min $= (1; 1; 3)$.

E63

Wo liegen die *relativen Extremwerte* der Funktion $z = f(x; y) = 3x^2 - 2x \cdot \sqrt{y} - 8x + y + 8$?

Die benötigten partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung lauten:

$$z_x = 6x - 2\sqrt{y} - 8, \qquad z_y = -2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + 1 = -\frac{x}{\sqrt{y}} + 1 = -xy^{-1/2} + 1$$

$$z_{xx} = 6, \quad z_{yy} = -x\left(-\frac{1}{2} \cdot y^{-3/2}\right) = \frac{x}{2y^{3/2}} = \frac{x}{2\sqrt{y^3}}, \quad z_{xy} = -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = -\frac{1}{\sqrt{y}}$$

In einem relativen Extremum müssen *notwendigerweise* die partiellen Ableitungen 1. Ordnung *verschwinden*:

$$z_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(I)} \quad 6x - 2\sqrt{y} - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2\sqrt{y} = -6x + 8 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{y} = 3x - 4$$

$$z_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(II)} \quad -\frac{x}{\sqrt{y}} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -x = -\sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{y} = x$$

Beide Gleichungen haben wir nach $\sqrt{y}$ aufgelöst. Durch Gleichsetzen folgt:

$$3x - 4 = x \quad \Rightarrow \quad 2x = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2$$

Zugehöriger y-Wert (aus Gleichung (II) berechnet): $\sqrt{y_1} = x_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 4$

Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung entscheiden nun, ob ein *relativer Extremwert* vorliegt:

$$z_{xx}(2;4) = 6, \quad z_{yy}(2;4) = \frac{2}{2\sqrt{4^3}} = \frac{1}{8}, \quad z_{xy}(2;4) = -\frac{1}{\sqrt{4}} = -\frac{1}{2}$$

$$\Delta = z_{xx}(2;4) \cdot z_{yy}(2;4) - z_{xy}^2(2;4) = 6 \cdot \frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} > 0$$

Damit ist das *hinreichende* Kriterium für einen relativen Extremwert *erfüllt*. Wegen $z_{xx}(2;4) = 6 > 0$ liegt ein *relatives Minimum* vor: $\text{Min} = (2;\, 4;\, 0)$.

E64 Untersuchen Sie die Funktion $z = f(x;y) = x^2 + y^3 - 3xy$ auf *relative Extremwerte*.

Die benötigten partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung lauten:

$$z_x = 2x - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x, \quad z_{xx} = 2, \quad z_{yy} = 6y, \quad z_{xy} = -3$$

Wir setzen $z_x = 0$ und $z_y = 0$ (*notwendige* Bedingungen für einen *relativen Extremwert*):

$$z_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(I)} \quad 2x - 3y = 0$$

$$z_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(II)} \quad 3y^2 - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y^2$$

Die untere Gleichung lösen wir nach x auf, erhalten $x = y^2$ und setzen diesen Ausdruck in Gleichung (I) ein:

$$\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad 2x - 3y = 2y^2 - 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad y(2y - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{3}{2}$$

Aus $x = y^2$ berechnen wir die zugehörigen x-Werte: $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{9}{4}$.

Folgerung: An den Stellen $(x_1; y_1) = (0; 0)$ und $(x_2; y_2) = (9/4; 3/2)$ verläuft die Tangentialebene jeweils *parallel* zur x, y-Ebene. Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung entscheiden darüber, ob es sich bei diesen Stellen um *relative Extremwerte* handelt:

$$\boxed{(x_1; y_1) = (0; 0)} \qquad z_{xx}(0;0) = 2, \quad z_{yy}(0;0) = 0, \quad z_{xy}(0;0) = -3$$

$$\Delta_1 = z_{xx}(0;0) \cdot z_{yy}(0;0) - z_{xy}^2(0;0) = 2 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 \quad \Rightarrow \quad \text{kein Extremwert (Sattelpunkt!)}$$

$$\boxed{(x_2; y_2) = \left(\frac{9}{4}; \frac{3}{2}\right)} \qquad z_{xx}\left(\frac{9}{4}; \frac{3}{2}\right) = 2, \quad z_{yy}\left(\frac{9}{4}; \frac{3}{2}\right) = 6 \cdot \frac{3}{2} = 9, \quad z_{xy}\left(\frac{9}{4}; \frac{3}{2}\right) = -3$$

$$\Delta_2 = z_{xx}\left(\frac{9}{4}\,;\,\frac{3}{2}\right)\cdot z_{yy}\left(\frac{9}{4}\,;\,\frac{3}{2}\right) - z_{xy}^2\left(\frac{9}{4}\,;\,\frac{3}{2}\right) = 2\cdot 9 - (-3)^2 = 9 > 0 \quad\Rightarrow\quad \text{relativer Extremwert}$$

Da $z_{xx}\left(\frac{9}{4}\,;\,\frac{3}{2}\right) = 2 > 0$ ist, handelt es sich um ein *relatives Minimum*: Min $= \left(\frac{9}{4}\,;\,\frac{3}{2}\,;\,-\frac{27}{16}\right)$

E65

Ermitteln Sie die *relativen Extremwerte* der Funktion $z = f(x;\,y) = (y - x^2)\cdot \mathrm{e}^{-2y}$.

Mit Hilfe der *Produkt-* und *Kettenregel* erhalten wir die benötigten partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung:

$$z_x = -2x\cdot \mathrm{e}^{-2y}, \quad z_{xx} = -2\cdot \mathrm{e}^{-2y}, \quad z_{xy} = -2x\cdot \mathrm{e}^{-2y}\cdot(-2) = 4x\cdot \mathrm{e}^{-2y}$$

(Ableitung von z_x nach y mit der *Kettenregel*, Substitution: $t = -2y$)

$$z = \underbrace{(y - x^2)}_{u}\cdot\underbrace{\mathrm{e}^{-2y}}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = y - x^2, \quad v = \mathrm{e}^{-2y} \quad \text{und} \quad u_y = 1, \quad v_y = -2\cdot \mathrm{e}^{-2y}$$

$$z_y = u_y v + v_y u = 1\cdot \mathrm{e}^{-2y} - 2\cdot \mathrm{e}^{-2y}\cdot(y - x^2) = (1 + 2x^2 - 2y)\cdot \mathrm{e}^{-2y}$$

$$z_y = \underbrace{(1 + 2x^2 - 2y)}_{u}\cdot\underbrace{\mathrm{e}^{-2y}}_{v} = uv, \quad u = 1 + 2x^2 - 2y, \quad v = \mathrm{e}^{-2y} \quad \text{und} \quad u_y = -2, \quad v_y = -2\cdot \mathrm{e}^{-2y}$$

$$z_{yy} = u_y v + v_y u = -2\cdot \mathrm{e}^{-2y} - 2\cdot \mathrm{e}^{-2y}\cdot(1 + 2x^2 - 2y) = [-2 - 2(1 + 2x^2 - 2y)]\cdot \mathrm{e}^{-2y} =$$

$$= (-2 - 2 - 4x^2 + 4y)\cdot \mathrm{e}^{-2y} = (-4 - 4x^2 + 4y)\cdot \mathrm{e}^{-2y} = -4(1 + x^2 - y)\cdot \mathrm{e}^{-2y}$$

Notwendige Bedingungen für einen relativen Extremwert: $z_x = 0,\; z_y = 0$

$$z_x = 0 \quad\Rightarrow\quad \text{(I)} \quad -2x\cdot\underbrace{\mathrm{e}^{-2y}}_{\neq 0} = 0 \quad\Rightarrow\quad -2x = 0$$

$$z_y = 0 \quad\Rightarrow\quad \text{(II)} \quad (1 + 2x^2 - 2y)\cdot\underbrace{\mathrm{e}^{-2y}}_{\neq 0} = 0 \quad\Rightarrow\quad 1 + 2x^2 - 2y = 0$$

Wir lösen dieses einfache Gleichungssystem wie folgt:

$$\text{(I)} \quad -2x = 0 \quad\Rightarrow\quad x_1 = 0$$

$$\text{(II)} \quad 1 - 2y + 2x^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad 1 - 2y + 0 = 0 \quad\Rightarrow\quad y_1 = 0{,}5$$

Wir prüfen jetzt anhand der partiellen Ableitungen 2. Ordnung, ob an der Stelle $(x_1;\,y_1) = (0;\,0{,}5)$ die *hinreichende* Bedingung für einen relativen Extremwert erfüllt ist:

$$z_{xx}(0;\,0{,}5) = -2\cdot \mathrm{e}^{-1}, \quad z_{yy}(0;\,0{,}5) = -4(1 - 0{,}5)\cdot \mathrm{e}^{-1} = -2\cdot \mathrm{e}^{-1}, \quad z_{xy}(0;\,0{,}5) = 0$$

$$\Delta = z_{xx}(0;\,0{,}5)\cdot z_{yy}(0;\,0{,}5) - z_{xy}^2(0;\,0{,}5) = (-2\cdot \mathrm{e}^{-1})\cdot(-2\cdot \mathrm{e}^{-1}) - 0^2 = 4\cdot \mathrm{e}^{-2} > 0$$

Es liegt demnach ein *Extremwert* vor, und zwar wegen $z_{xx}(0;\,0{,}5) = -2\cdot \mathrm{e}^{-1} < 0$ ein *relatives Maximum*: Max $= (0;\,0{,}5;\,0{,}184)$

E66

$z = f(x; y) = x^2 - 3xy + xy^3 + 1$

Bestimmen Sie alle *relativen Extremwerte* und *Sattelpunkte* dieser Funktion.

Partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung:

$$z_x = 2x - 3y + y^3, \quad z_y = -3x + 3xy^2, \quad z_{xx} = 2, \qquad z_{yy} = 6xy, \quad z_{xy} = -3 + 3y^2 = 3(y^2 - 1)$$

Notwendige Bedingungen für einen *relativen Extremwert*: $z_x = 0, \; z_y = 0$

$$z_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(I)} \quad 2x - 3y + y^3 = 0$$

$$z_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(II)} \quad -3x + 3xy^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x(1 - y^2) = 0$$

Gleichung (I) nach x auflösen, den gefundenen Ausdruck in Gleichung (II) einsetzen:

$$\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad 2x = 3y - y^3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}(3y - y^3) = \frac{1}{2}\,y(3 - y^2)$$

$$\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad -3x(1 - y^2) = -3 \cdot \frac{1}{2}\,y(3 - y^2)(1 - y^2) = 0 \quad \begin{array}{c} \diagup \\ — \\ \diagdown \end{array} \quad \begin{array}{l} y = 0 \\ 3 - y^2 = 0 \\ 1 - y^2 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = 0, \quad y_{2/3} = \pm\sqrt{3}, \qquad y_{4/5} = \pm 1$$

Zugehörige x-Werte (aus Gleichung (I) berechnet): $x_1 = 0, \; x_{2/3} = 0, \; x_{4/5} = \pm 1$

Als *relative Extremwerte* kommen daher die folgenden fünf Stellen in Frage:

$$(x_1; y_1) = (0; 0); \quad (x_2; y_2) = (0; \sqrt{3}); \quad (x_3; y_3) = (0; -\sqrt{3});$$

$$(x_4; y_4) = (1; 1); \quad (x_5; y_5) = (-1; -1)$$

Wir prüfen jetzt mit Hilfe der partiellen Ableitungen 2. Ordnung, für welche Stellen die *hinreichende* Bedingung für einen relativen Extremwert erfüllt ist:

$$\boxed{(x_1; y_1) = (0; 0)} \qquad z_{xx}(0; 0) = 2, \quad z_{yy}(0; 0) = 0, \quad z_{xy}(0; 0) = -3$$

$$\Delta_1 = z_{xx}(0; 0) \cdot z_{yy}(0; 0) - z_{xy}^2(0; 0) = 2 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$$

$\Rightarrow$ *kein* Extremwert (sondern ein *Sattelpunkt*)

$$\boxed{(x_2; y_2) = (0; \sqrt{3})} \qquad z_{xx}(0; \sqrt{3}) = 2, \quad z_{yy}(0; \sqrt{3}) = 0, \quad z_{xy}(0; \sqrt{3}) = 6$$

$$\Delta_2 = z_{xx}(0; \sqrt{3}) \cdot z_{yy}(0; \sqrt{3}) - z_{xy}^2(0; \sqrt{3}) = 2 \cdot 0 - 6^2 = -36 < 0$$

$\Rightarrow$ *kein* Extremwert (sondern ein *Sattelpunkt*)

Ebenso: $(x_3; y_3) = (0; -\sqrt{3})$ ist ein *Sattelpunkt*.

$$\boxed{(x_4; y_4) = (1; 1)} \qquad z_{xx}(1; 1) = 2, \quad z_{yy}(1; 1) = 6, \quad z_{xy}(1; 1) = 0$$

$$\Delta_4 = z_{xx}(1; 1) \cdot z_{yy}(1; 1) - z_{xy}^2(1; 1) = 2 \cdot 6 - 0^2 = 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{relativer Extremwert}$$

Wegen $z_{xx}(1; 1) = 2 > 0$ liegt ein *relatives Minimum* vor.

Ebenso: $(x_5; y_5) = (-1; -1)$ ist ein *relatives Minimum*.

Ergebnis: Minima in $(\pm 1; \pm 1; 0)$; Sattelpunkte in $(0; 0; 1)$ und $(0; \pm\sqrt{3}; 1)$

5.4 Extremwertaufgaben mit und ohne Nebenbedingungen

Hinweise

(1) **Lehrbuch:** Band 2, Kapitel III.2.5.3 und 2.5.4
Formelsammlung: Kapitel IX.2.5.3

(2) Verwenden Sie zur Lösung von Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen das *Multiplikatorverfahren von Lagrange*.

E67

Gegeben sind vier Messpunkte, die nahezu auf einer Geraden liegen:

x	0	1	2	3
y	2,90	5,10	7,10	8,80

Bestimmen Sie mit der Gauß'schen *Methode der kleinsten Quadrate* die zugehörige *Ausgleichsgerade* $y = mx + b$, d. h. diejenige Gerade, die sich diesen Messpunkten optimal anpasst.

Hinweis: Eine ausführliche Beschreibung dieses Verfahrens finden Sie in Band 3, Kapitel IV.5.1 bis 5.3 (siehe auch: Formelsammlung, Kapitel XI.5.1 und 5.2).

Wir bestimmen für jeden Messpunkt die *Abweichung* u von der Ausgleichsgeraden in *vertikaler* Richtung (Abweichung der *Ordinatenwerte*, siehe Bild E-9).

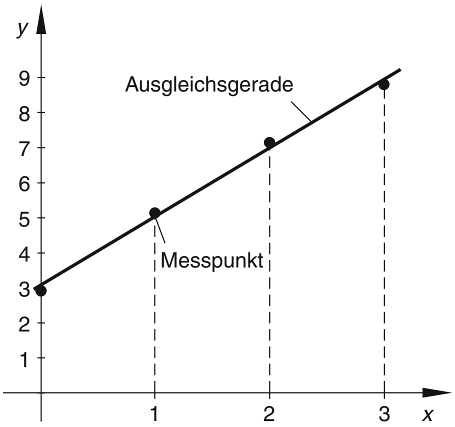


Bild E-9

Diese Werte sind mal positiv, mal negativ, da die Messpunkte teils oberhalb, teils unterhalb der gesuchten Geraden liegen werden. Daher werden diese Abweichungen quadratiert und dann aufaddiert. Wir stellen diesen Vorgang übersichtlich in einer Tabelle zusammen:

i	x	y	$mx + b$	$u = y - (mx + b)$
1	0	2,90	b	$2{,}90 - b$
2	1	5,10	$m + b$	$5{,}10 - m - b$
3	2	7,10	$2m + b$	$7{,}10 - 2m - b$
4	3	8,80	$3m + b$	$8{,}80 - 3m - b$

Die Summe der Abweichungsquadrate lautet damit:

$$S(m; b) = (2{,}90 - b)^2 + (5{,}10 - m - b)^2 + (7{,}10 - 2m - b)^2 + (8{,}80 - 3m - b)^2$$

Sie hängt noch von m und b ab. Diese Parameter müssen nun so bestimmt werden, dass diese Summe *möglichst klein* wird. Wir bilden daher zunächst die für die Lösung dieser Aufgabe benötigten partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung:

$$S_m = \frac{\partial S}{\partial m} = 0 + 2(5{,}10 - m - b)(-1) + 2(7{,}10 - 2m - b)(-2) + 2(8{,}80 - 3m - b)(-3) =$$

$$= -2(5{,}10 - m - b) - 4(7{,}10 - 2m - b) - 6(8{,}80 - 3m - b) =$$

$$= -10{,}20 + 2m + 2b - 28{,}40 + 8m + 4b - 52{,}80 + 18m + 6b = 28m + 12b - 91{,}4$$

$$S_b = \frac{\partial S}{\partial b} = 2(2{,}90 - b)(-1) + 2(5{,}10 - m - b)(-1) + 2(7{,}10 - 2m - b)(-1) +$$

$$+ 2(8{,}80 - 3m - b)(-1) = -2[2{,}90 - b + 5{,}10 - m - b + 7{,}10 - 2m - b +$$

$$+ 8{,}80 - 3m - b] = -2(-6m - 4b + 23{,}9) = 12m + 8b - 47{,}8$$

$$S_{mm} = \frac{\partial S_m}{\partial m} = 28, \quad S_{bb} = \frac{\partial S_b}{\partial b} = 8, \quad S_{mb} = \frac{\partial S_m}{\partial b} = 12$$

Aus den für einen Extremwert *notwendigen* Bedingungen $S_m = 0$ und $S_b = 0$ erhalten wir das folgende lineare Gleichungssystem:

$$S_m = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathrm{I}) \quad 28m + 12b - 91{,}4 = 0$$

$$S_b = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathrm{II}) \quad 12m + 8b - 47{,}8 = 0$$

Lösungsweg: Die 1. Gleichung mit 2, die 2. mit 3 multiplizieren, dann die Gleichungen voneinander *subtrahieren*:

$$\left.\begin{array}{ll} (\mathrm{I}^*) & 56m + 24b - 182{,}8 = 0 \\ (\mathrm{II}^*) & 36m + 24b - 143{,}4 = 0 \end{array}\right\} -$$

$$20m \qquad - 39{,}4 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 1{,}97$$

$$(\mathrm{II}) \quad \Rightarrow \quad 12 \cdot 1{,}97 + 8b - 47{,}8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 8b - 24{,}16 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 3{,}02$$

Die Gleichung der *Ausgleichsgeraden* lautet somit:

$$y = 1{,}97x + 3{,}02$$

Bild E-10 zeigt diese Gerade mit den vier Messpunkten.

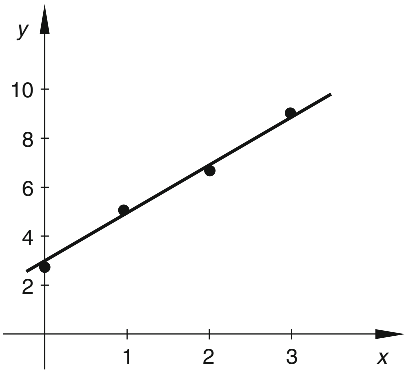


Bild E-10

E68 Einer Ellipse mit den Halbachsen a und b ist ein (achsenparalleles) Rechteck *größter* Fläche einzubeschreiben. Wie müssen die Seitenlängen des Rechtecks gewählt werden?

Bild E-11 zeigt ein (beliebiges) einbeschriebenes Rechteck, dessen Flächeninhalt A wir wie folgt durch die Koordinaten x und y des im 1. Quadranten gelegenen Ellipsenpunktes P ausdrücken können:

$$A = 4xy \quad (x > 0,\ y > 0)$$

Da P ein Punkt der Ellipse ist, gilt die folgende *Nebenbedingung*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

(Mittelpunktsgleichung einer Ellipse).

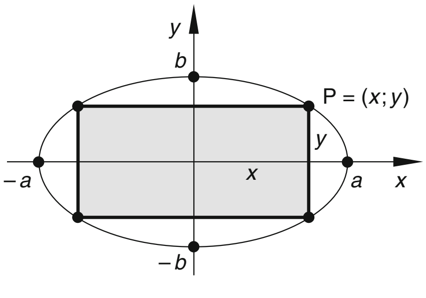


Bild E-11

Für die Lösung unserer Aufgabe verwenden wir das *Lagrangesche Multiplikatorverfahren*. Wir bilden aus der Flächenfunktion $A = 4xy$ und der Nebenbedingung $\varphi(x; y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ (Ellipsengleichung in *impliziter* Form) die von x, y und dem *Lagrangeschen Multiplikator* λ abhängige *Hilfsfunktion*

$$F(x; y; \lambda) = A(x; y) + \lambda \cdot \varphi(x; y) = 4xy + \lambda(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)$$

Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung dieser Funktion werden jeweils gleich Null gesetzt und liefern das folgende Gleichungssystem für die Unbekannten x, y und λ (wobei uns nur die Werte für x und y interessieren):

$$F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(I)} \quad 4y + 2b^2\lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{2y}{b^2x}$$

$$F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(II)} \quad 4x + 2a^2\lambda y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{2x}{a^2y}$$

$$F_\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(III)} \quad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

Wir eliminieren den Multiplikator λ, indem wir die ersten beiden Gleichungen nach λ auflösen und die Ausdrücke gleichsetzen:

$$-\frac{2y}{b^2x} = -\frac{2x}{a^2y} \quad \Rightarrow \quad a^2y^2 = b^2x^2 \qquad (*)$$

Die gefundene Beziehung $(*)$ setzen wir in die 3. Gleichung ein und berechnen daraus x und danach y (es kommen nur *positive* Werte in Frage):

$$\text{(III)} \quad \Rightarrow \quad b^2x^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2b^2x^2 - a^2b^2 = b^2(2x^2 - a^2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 - a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2}a^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,a$$

$$(*) \quad \Rightarrow \quad a^2y^2 = b^2x^2 = b^2 \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}a^2b^2 \;\Big|\; : a^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{1}{2}b^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,b$$

Die gesuchte **Lösung** lautet damit wie folgt:

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,a, \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,b, \quad A_{\min} = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\,a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\,b = 2ab$$

Sonderfall *a = b*

Aus der Ellipse wird ein *Kreis* mit dem Radius $r = a$. Das einbeschriebene Rechteck mit *größtmöglichem* Flächeninhalt ist dann ein *Quadrat* mit der Seitenlänge $x = y = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,a$ und dem Flächeninhalt $A = 2a^2$.

E69 Wie muss man einen geraden Kreiszylinder mit aufgesetzter Halbkugel dimensionieren, damit er bei einem vorgegebenen Volumen von $V = 5000\,\text{cm}^3$ eine *möglichst kleine* Gesamtoberfläche A hat?

Die Gesamtoberfläche A setzt sich aus der Grundkreisfläche des Zylinders (πr^2), dem Zylindermantel $(2\pi rh)$ und der Oberfläche der Halbkugel $(2\pi r^2)$ zusammen (siehe Bild E-12):

$$A = A(r; h) = \pi r^2 + 2\pi rh + 2\pi r^2 = 3\pi r^2 + 2\pi rh$$

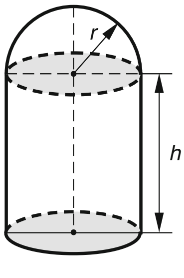


Bild E-12

Das vorgegebene Volumen von $5000\,\text{cm}^3$ liefert die noch benötigte *Nebenbedingung* für die Variablen r und h. Es gilt:

$$V = V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{Halbkugel}} = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 = 5000$$

oder (in impliziter Form, die wir für das *Lagrangesche Multiplikatorverfahren* benötigen)

$$\varphi(r;\, h) = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 - 5000 = 0$$

Wir bilden jetzt die *Lagrangesche „Hilfsfunktion"*:

$$F(r;\, h;\, \lambda) = A(r;\, h) + \lambda \cdot \varphi(r;\, h) = 3\pi r^2 + 2\pi r h + \lambda\left(\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 - 5000\right)$$

Dabei ist λ der sog. *Lagrangesche Multiplikator*, dessen Wert uns nicht weiter interessiert. Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Hilfsfunktion werden jeweils gleich Null gesetzt und liefern ein Gleichungssystem für die unbekannten Größen r, h und λ:

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(I)} \quad 6\pi r + 2\pi h + \lambda(2\pi r h + 2\pi r^2) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial h} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(II)} \quad 2\pi r + \lambda \pi r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{2}{r}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(III)} \quad \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 - 5000 = 0$$

Gleichung (II) lösen wir nach λ auf, erhalten $\lambda = -2/r$ und setzen dann diesen Ausdruck in die 1. Gleichung ein:

$$\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad 6\pi r + 2\pi h - \frac{2}{r}(2\pi r h + 2\pi r^2) = 6\pi r + 2\pi h - 4\pi h - 4\pi r = 2\pi r - 2\pi h = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi(r - h) = 0 \quad \Rightarrow \quad r - h = 0 \quad \Rightarrow \quad r = h$$

Damit haben wir die Aufgabe bereits gelöst: die *Gesamtoberfläche* nimmt den *kleinsten* Wert an, wenn Radius und Höhe des Zylinders übereinstimmen. Der zahlenmäßige Wert von r und h lässt sich aus der Gleichung (III) ermitteln (unter Beachtung von $r = h$):

$$\text{(III)} \quad \Rightarrow \quad \pi r^2 \cdot r + \frac{2}{3}\pi r^3 - 5000 = \pi r^3 + \frac{2}{3}\pi r^3 - 5000 = \frac{5}{3}\pi r^3 - 5000 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{3}\pi r^3 = 5000 \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{3000}{\pi} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{3000}{\pi}} = 9{,}8475$$

Lösung der Aufgabe:

$$r = h = 9{,}8475\ \text{cm} \approx 9{,}85\ \text{cm}$$

$$A_{\min} = 3\pi r^2 + 2\pi r \cdot r = 3\pi r^2 + 2\pi r^2 = 5\pi r^2 = 5\pi \cdot (9{,}8475\ \text{cm})^2 = 1523{,}24\ \text{cm}^2$$

E70

Welcher Punkt $P = (x;\, y)$ der Hyperbel $x^2 - y^2 = 12$ hat vom Punkt $A = (0;\, 4)$ den *kleinsten* Abstand d?

Anhand der Skizze (Bild E-13) erwarten wir *zwei* zur y-Achse *spiegelsymmetrische* Lösungen. Aus der allgemeinen Abstandsformel für zwei Punkte $P_1 = (x_1;\, y_1)$ und $P_2 = (x_2;\, y_2)$ erhalten wir unseren Fall:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{x^2 + (y - 4)^2}$$

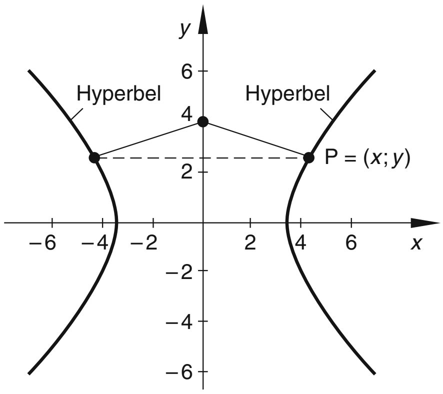


Bild E-13

Diese Wurzelfunktion wird *minimal*, wenn der *Radikand* (d. h. der Ausdruck unter der Wurzel) seinen *kleinsten* Wert annimmt. Es genügt also, die sog. „Zielfunktion“

$$Z(x;\, y) = d^2 = x^2 + (y-4)^2$$

zu untersuchen. Die Koordinaten x und y genügen dabei der *Hyperbelgleichung*, die somit eine *Neben-* oder *Kopplungsbedingung* liefert (in impliziter Form):

$$\varphi(x;\, y) = x^2 - y^2 - 12 = 0 \qquad \text{(Nebenbedingung)}$$

Nach dem *Multiplikatorverfahren* von *Lagrange* bilden wir nun die „Hilfsfunktion“

$$F(x;\, y;\, \lambda) = Z(x;\, y) + \lambda \cdot \varphi(x;\, y) = x^2 + (y-4)^2 + \lambda(x^2 - y^2 - 12)$$

λ ist dabei der *Lagrangesche Multiplikator*, dessen Wert uns nicht zu interessieren braucht. Wir setzen die partiellen Ableitungen 1. Ordnung dieser *Hilfsfunktion* jeweils gleich Null und erhalten das folgende Gleichungssystem für die drei Unbekannten x, y und λ:

$$F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(I)} \quad 2x + 2\lambda x = 0$$

$$F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(II)} \quad 2(y-4) \cdot 1 - 2\lambda y = 2(y-4) - 2\lambda y = 0$$

$$F_\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(III)} \quad x^2 - y^2 - 12 = 0$$

Aus Gleichung (I) erhalten wir wegen $x \neq 0$:

$$2x + 2\lambda x = 2x(1+\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1$$

Dann folgt aus Gleichung (II):

$$2(y-4) - 2 \cdot (-1)\, y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(y-4) + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y - 4 + y = 2y - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

Die zugehörigen *Abszissenwerte* erhalten wir aus der 3. Gleichung (für $y = 2$):

$$\text{(III)} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm 4$$

Die beiden Lösungen $P_{1/2} = (\pm 4;\, 2)$ liegen unserer Erwartung entsprechend *spiegelsymmetrisch* zur y-Achse.

E71

Ein quaderförmiges Schwimmbecken mit einem Fassungsvermögen (Volumen) von $V = 108\,\text{m}^3$ soll so gebaut werden, dass die Oberfläche (Boden und Seitenwände) *möglichst klein* wird. Wie sind die Abmessungen des Beckens zu wählen?

Die Kanten des quaderförmigen Beckens bezeichnen wir mit x, y und z (Bild E-14). Die Berechnung der *Oberfläche* (Boden plus Seitenwände) erfolgt dann nach der Formel

$$A = A(x;\, y;\, z) = xy + 2xz + 2yz$$

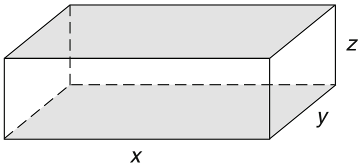


Bild E-14

Die drei Variablen x, y und z sind jedoch nicht unabhängig voneinander, sondern durch die *Nebenbedingung* $V = \text{const.} = 108\ \text{m}^3$ miteinander verknüpft (es kommen nach der Aufgabenstellung nur Quader mit diesem Volumen in Frage):

$$V = xyz = 108 \quad \text{oder} \quad \varphi(x;\, y;\, z) = xyz - 108 = 0$$

Zur Lösung der Aufgabe verwenden wir das *Multiplikatorverfahren* von *Lagrange*.

Zunächst bilden wir die „Hilfsfunktion"

$$F(x;\, y;\, z;\, \lambda) = A(x;\, y;\, z) + \lambda \cdot \varphi(x;\, y;\, z) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - 108)$$

(λ: *Lagrangescher Multiplikator*; $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$)

Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung dieser Funktion müssen sämtlich *verschwinden*. Dies führt zu dem folgenden Gleichungssystem mit den vier Unbekannten x, y, z und λ:

$$F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(I)} \quad y + 2z + \lambda yz = 0$$

$$F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(II)} \quad x + 2z + \lambda xz = 0$$

$$F_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(III)} \quad 2x + 2y + \lambda xy = 0$$

$$F_\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(IV)} \quad xyz - 108 = 0$$

Wir lösen die Gleichungen (I) und (II) jeweils nach λz auf und setzen die Ausdrücke gleich:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(I)} & \Rightarrow & \lambda z = -\dfrac{y + 2z}{y} \\[2ex] \text{(II)} & \Rightarrow & \lambda z = -\dfrac{x + 2z}{x} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -\frac{y + 2z}{y} = -\frac{x + 2z}{x} \quad \text{oder} \quad \frac{y + 2z}{y} = \frac{x + 2z}{x}$$

Daraus ergibt sich die folgende Gleichung (die linke Seite wird mit x, die rechte mit y multipliziert):

$$x(y + 2z) = y(x + 2z) \quad \Rightarrow \quad xy + 2xz = xy + 2yz \quad \Rightarrow \quad 2xz = 2yz \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Aus Gleichung (III) folgt dann (mit $y = x$):

$$\text{(III)} \quad \Rightarrow \quad 2x + 2x + \lambda x \cdot x = 4x + \lambda x^2 = \underbrace{x}_{\neq\, 0}(4 + \lambda x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4 + \lambda x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda x = -4$$

Diesen Ausdruck setzen wir in Gleichung (II) ein:

$$\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad x + 2z + (\lambda x)z = x + 2z + (-4)z = x + 2z - 4z = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 2z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2z$$

„Zwischenstand": $x = y = 2z$

Unter Berücksichtigung dieser Beziehungen lässt sich aus Gleichung (IV) die Unbekannte z (und daraus dann x und y) berechnen:

$$\text{(IV)} \quad \Rightarrow \quad xyz - 108 = (2z)(2z)z - 108 = 4z^3 - 108 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^3 = 27 \quad \Rightarrow \quad z = 3$$

Die **Lösung** dieser Aufgabe lautet damit:

$$x = y = 2z = 6, \quad z = 3 \qquad \text{(jeweils in m)}$$

$$A_{\min} = xy + 2xz + 2yz = 6 \cdot 6 + 2 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 3 = 36 + 36 + 36 = 108 \qquad (\text{in m}^3)$$

E72 Einem Kreis vom Radius R soll ein Rechteck so einbeschrieben werden, dass das Flächenmoment $I = \frac{1}{12}\,x\,y^3$ einen *möglichst großen* Wert annimmt. Wie sind die Rechtecksseiten x und y zu wählen?

Die unbekannten Seiten x und y sind über den *Satz des Pythagoras* miteinander verknüpft (siehe Bild E-15):

$$x^2 + y^2 = 4R^2 \quad \text{oder} \quad \varphi(x;\,y) = x^2 + y^2 - 4R^2 = 0$$

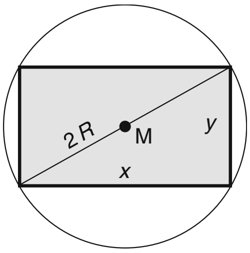


Bild E-15

Nach *Lagrange* bilden wir die folgende *„Hilfsfunktion“:*

$$F(x;\,y;\,\lambda) = I(x;\,y) + \lambda \cdot \varphi(x;\,y) = \frac{1}{12}\,x\,y^3 + \lambda\,(x^2 + y^2 - 4R^2)$$

$$(0 < x < 2R;\ 0 < y < 2R)$$

Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung dieser Funktion werden jeweils gleich Null gesetzt und liefern drei Gleichungen für die drei Unbekannten x, y und λ:

$$F_x = \frac{1}{12}\,y^3 + 2\lambda x, \qquad F_y = \frac{1}{4}\,x\,y^2 + 2\lambda y, \qquad F_\lambda = x^2 + y^2 - 4R^2$$

$$F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(I)} \quad \frac{1}{12}\,y^3 + 2\lambda x = 0$$

$$F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(II)} \quad \frac{1}{4}\,x\,y^2 + 2\lambda y = 0$$

$$F_\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(III)} \quad x^2 + y^2 - 4R^2 = 0$$

Die ersten beiden Gleichungen werden nach λ aufgelöst, die gefundenen Ausdrücke dann gleichgesetzt:

$$\left.\begin{array}{l} \text{(I)} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\dfrac{y^3}{24x} \\[2ex] \text{(II)} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\dfrac{x\,y^2}{8y} = -\dfrac{x\,y}{8} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -\frac{y^3}{24x} = -\frac{x\,y}{8} \quad \Rightarrow \quad 8y^3 = 24x^2 y \mid :8y$$

$$\Rightarrow \quad \text{(I}^*\text{)} \quad y^2 = 3x^2$$

(Kürzen durch y ist wegen $y > 0$ erlaubt.)

Diese Beziehung zwischen den beiden Seiten setzen wir in Gleichung (III) ein und berechnen x und daraus dann y:

$$\text{(III)} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4R^2 = x^2 + 3x^2 - 4R^2 = 4x^2 - 4R^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad x = R$$

$$\text{(I}^*\text{)} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 3x^2 = 3R^2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{3}\,R$$

Lösung: $x = R, \quad y = \sqrt{3}\,R,$

$$I_{\min} = \frac{1}{12}\,x\,y^3 = \frac{1}{12}\,R\,(\sqrt{3}\,R)^3 = \frac{1}{12}\,3\sqrt{3}\,R^4 = \frac{1}{4}\,\sqrt{3}\,R^4$$

F Mehrfachintegrale

Hinweise für das gesamte Kapitel

(1) Fertigen Sie zu jeder Aufgabe eine Skizze an, sie erleichtert Ihnen den Lösungsweg und führt zu einem besseren Verständnis.

(2) Alle anfallenden (gewöhnlichen) Integrale dürfen einer *Integraltafel* entnommen werden (wenn nicht ausdrücklich anders verlangt). Bei der Lösung der Integrale wird die jeweilige Integralnummer aus der Integraltafel der **Mathematischen Formelsammlung** mit den entsprechenden Parameterwerten angegeben (gelbe Seiten, z. B. Integral 313 mit $a = 2$). Selbstverständlich dürfen Sie die Integrale auch „per Hand" lösen (zusätzliche Übung).

1 Doppelintegrale

In diesem Abschnitt finden Sie (fast) ausschließlich *anwendungsorientierte* Aufgaben zu folgenden Themen:

- Stromstärke, Flächenladung, magnetischer Fluss durch einen Leiter
- Flächeninhalt, Flächenschwerpunkt, Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente)
- Volumen „zylindrischer" Körper

Verwendet werden sowohl kartesische Koordinaten (Abschnitt 1.1) als auch Polarkoordinaten (Abschnitt 1.2).

Hinweise

Lehrbuch: Band 2, Kapitel III.3.1
Formelsammlung: Kapitel IX.3.1

1.1 Doppelintegrale in kartesischen Koordinaten

Alle Aufgaben in diesem Abschnitt sollen mit Hilfe von *Doppelintegralen* unter Verwendung *kartesischer Koordinaten* gelöst werden.

Hinweise

Lehrbuch: Band 2, Kapitel III.3.1.2.1 und 3.1.3
Formelsammlung: Kapitel IX.3.1.2 und 3.1.4

F1

$$I = \int_{x=1}^{3} \int_{y=0}^{\pi x/2} \cos\left(\frac{y}{x}\right) dy\, dx = ?$$

Wir führen zunächst die *innere Integration* (nach y), dann die *äußere Integration* (nach x) durch.

Innere Integration (nach der Variablen y)

$$\underbrace{\int_{y=0}^{\pi x/2} \cos\left(\frac{y}{x}\right) dy}_{\text{Integral 228 mit } a = 1/x} = \left[x \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]_{y=0}^{\pi x/2} = x\left[\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]_{y=0}^{\pi x/2} = x\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0\right] = x(1-0) = x$$

L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Klausur- und Übungsaufgaben,*
DOI 10.1007/978-3-8348-9730-5_6,© Vieweg+Teubner Verlag |Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2010

Äußere Integration (nach der Variablen x)

$$I = \int_{x=1}^{3} x\,dx = \left[\frac{1}{2}\,x^2\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left[x^2\right]_1^3 = \frac{1}{2}\,(9-1) = 4$$

Ergebnis: $I = 4$

F2 $$I = \int_{u=1}^{\infty}\int_{v=-1}^{1} (u-v)\cdot \mathrm{e}^{-u}\,dv\,du = ?$$

Innere Integration (nach der Variablen v)

$$\int_{v=-1}^{1} (u-v)\cdot \mathrm{e}^{-u}\,dv = \mathrm{e}^{-u}\cdot \int_{v=-1}^{1} (u-v)\,dv = \mathrm{e}^{-u}\left[uv - \frac{1}{2}\,v^2\right]_{v=-1}^{1} =$$

$$= \mathrm{e}^{-u}\left(u - \frac{1}{2} + u + \frac{1}{2}\right) = 2u\cdot \mathrm{e}^{-u}$$

Äußere Integration (nach der Variablen u)

$$I = \int_{u=1}^{\infty} 2u\cdot \mathrm{e}^{-u}\,du = 2\cdot \int_{u=1}^{\infty} u\cdot \mathrm{e}^{-u}\,du$$

Dieses *uneigentliche* Integral wird wie folgt berechnet (→ Band 1, Kapitel V.9): Zunächst integrieren wir von $u = 1$ bis $u = \lambda$ $(\lambda > 1)$ und bilden dann den *Grenzwert* für $\lambda \rightarrow \infty$.

$$I = 2\cdot \int_{u=1}^{\infty} u\cdot \mathrm{e}^{-u}\,du = 2\cdot \lim_{\lambda\to\infty} \underbrace{\int_{1}^{\lambda} u\cdot \mathrm{e}^{-u}\,du}_{\text{Integral 313 mit } a\,=\,-1} = 2\cdot \lim_{\lambda\to\infty} \left[(-u-1)\cdot \mathrm{e}^{-u}\right]_1^{\lambda} =$$

$$= 2\cdot \lim_{\lambda\to\infty} \left[(-\lambda-1)\cdot \mathrm{e}^{-\lambda} + 2\cdot \mathrm{e}^{-1}\right] = 2\,(0 + 2\cdot \mathrm{e}^{-1}) = 4\cdot \mathrm{e}^{-1}$$

Anmerkung: Für jedes Polynom $P(\lambda)$ gilt $\lim\limits_{\lambda\to\infty} P(\lambda)\cdot \mathrm{e}^{-\lambda} = 0 \quad (\lambda > 0)$

Ergebnis: $I = 4\cdot \mathrm{e}^{-1} = 1{,}4715$

F3 $$I = \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y^2} \mathrm{e}^{x/y}\,dx\,dy = ?$$

Bild F-1 zeigt den Integrationsbereich. Er wird in der x-Richtung durch die Kurven $x = 0$ (y-Achse) und $x = y^2$ (nach *rechts* geöffnete Parabel) und in der y-Richtung durch die Parallelen $y = 0$ (x-Achse) und $y = 1$ berandet.

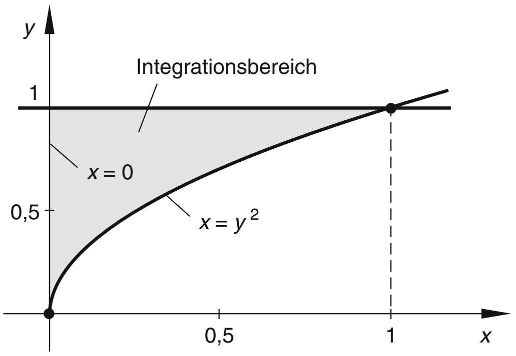


Bild F-1

Innere Integration (nach der Variablen x)

$$\underbrace{\int\limits_{x=0}^{y^2} e^{x/y}\,dx}_{\text{Integral 312 mit } a\,=\,1/y} = \left[y \cdot e^{x/y}\right]_{x=0}^{y^2} = y\left[e^{x/y}\right]_{x=0}^{y^2} = y\,(e^y - e^0) = y\,(e^y - 1) = y \cdot e^y - y$$

Äußere Integration (nach der Variablen y)

$$I = \int\limits_{y=0}^{1} (\underbrace{y \cdot e^y}_{\text{Integral 313 mit } a\,=\,1} - y)\,dy = \left[(y-1)\cdot e^y - \frac{1}{2}\,y^2\right]_0^1 = 0 - \frac{1}{2} + e^0 - 0 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Ergebnis: $I = 1/2$

F4

Bild F-2 zeigt den Querschnitt eines elektrischen Leiters, der senkrecht von der *ortsabhängigen* Stromdichte $S(x;\,y) = k \cdot x^2 y^2$ durchflossen wird. Berechnen Sie den durch den Leiterquerschnitt A fließenden *Strom* I, wenn definitionsgemäß gilt:

$$I = \iint\limits_{(A)} S(x;\,y)\,dA$$

(k: positive Konstante)

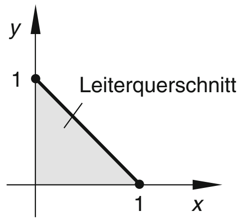


Bild F-2

Wir verwenden *kartesische* Koordinaten. Der Leiterquerschnitt wird *unten* von der x-Achse $(y = 0)$ und *oben* von der Geraden mit der Gleichung $y = -x + 1$ berandet, die x-Werte liegen dabei zwischen $x = 0$ und $x = 1$ (siehe Bild F-2). Damit ergeben sich folgende *Integrationsgrenzen*:

y-Integration: von $y = 0$ bis $y = -x + 1$

x-Integration: von $x = 0$ bis $x = 1$

Die Berechnung der Stromstärke I erfolgt somit durch das folgende *Doppelintegral*:

$$I = \iint\limits_{(A)} S(x;\,y)\,dA = k \cdot \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{-x+1} x^2 y^2\,dy\,dx \qquad \text{(Flächenelement } dA = dy\,dx)$$

Innere Integration (nach der Variablen y)

$$\int_{y=0}^{-x+1} x^2 y^2 \, dy = x^2 \cdot \int_{y=0}^{-x+1} y^2 \, dy = x^2 \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{-x+1} = x^2 \left[\frac{1}{3} (-x+1)^3 - 0 \right] = \frac{1}{3} x^2 (-x+1)^3 =$$

$$= \frac{1}{3} x^2 (-x^3 + 3x^2 - 3x + 1) = \frac{1}{3} (-x^5 + 3x^4 - 3x^3 + x^2)$$

Äußere Integration (nach der Variablen x)

$$I = k \cdot \frac{1}{3} \cdot \int_{x=0}^{1} (-x^5 + 3x^4 - 3x^3 + x^2) \, dx = \frac{1}{3} k \left[-\frac{1}{6} x^6 + \frac{3}{5} x^5 - \frac{3}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} k \left(-\frac{1}{6} + \frac{3}{5} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} k \cdot \frac{-10 + 36 - 45 + 20}{60} = \frac{1}{3} k \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{180} k$$

Ergebnis: Gesamtstrom $I = \frac{1}{180} k$

F5

Die in Bild F-3 skizzierte trapezförmige Grenzfläche A zweier dielektrischer Medien enthält die *ortsabhängige* Oberflächenladung $\sigma(x; y) = k \cdot x^2 y$ mit $k = 1{,}5 \cdot 10^{-10}$ As/cm^5. Berechnen Sie die *Gesamtladung* Q auf der Grenzfläche nach der Formel

$$Q = \iint_{(A)} \sigma(x; y) \, dA$$

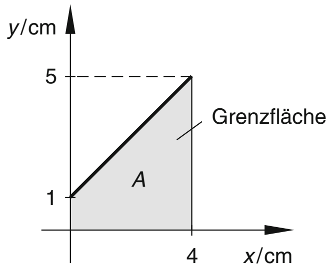


Bild F-3

Die Grenzfläche wird *unten* von der x-Achse $y = 0$ und *oben* von der Geraden $y = x + 1$ berandet $(0 \le x \le 4)$. Das Doppelintegral für die *Gesamtladung* Q auf der Grenzfläche lautet damit (wir rechnen ohne Einheiten):

$$Q = \iint_{(A)} \sigma(x; y) \, dA = k \cdot \int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{x+1} x^2 y \, dy \, dx \qquad \text{(Flächenelement } dA = dy \, dx\text{)}$$

Innere Integration (nach der Variablen y)

$$\int_{y=0}^{x+1} x^2 y \, dy = x^2 \cdot \int_{y=0}^{x+1} y \, dy = x^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{x+1} = x^2 \left[\frac{1}{2} (x+1)^2 - 0 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 (x^2 + 2x + 1) = \frac{1}{2} (x^4 + 2x^3 + x^2)$$

Äußere Integration (nach der Variablen x)

$$Q = k \cdot \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{x=0}^{4} (x^4 + 2x^3 + x^2)\, dx = \frac{1}{2}\, k \left[\frac{1}{5}\, x^5 + \frac{1}{2}\, x^4 + \frac{1}{3}\, x^3 \right]_0^4 =$$

$$= \frac{1}{2}\, k \left(\frac{1024}{5} + 128 + \frac{64}{3} - 0 \right) = \frac{1}{2}\, k \cdot \frac{3072 + 1920 + 320}{15} = \frac{1}{2}\, k \cdot \frac{5312}{15} = \frac{2656}{15}\, k$$

Gesamtladung: $Q = \frac{2656}{15}\, k = \frac{2656}{15} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-10} = 2{,}656 \cdot 10^{-8}$ (in As)

F6 Ein Flächenstück wird durch die Kurven $x = 0$, $y = 2x$ und $y = \frac{1}{a}\, x^2 + a$ berandet $(a > 0)$. Berechnen Sie den *Flächeninhalt* A.

Wir bestimmen zunächst die *Schnittpunkte* der Parabel mit der Geraden $y = 2x$:

$$\frac{1}{a}\, x^2 + a = 2x \quad \Rightarrow \quad x^2 + a^2 = 2ax \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2 - 2ax + a^2}_{\text{2. Binom}} = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - a)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = a$$

Die Kurven *berühren* sich somit im Punkt $P = (a;\, 2a)$ (*doppelte* Schnittstelle, siehe Bild F-4).

Integrationsgrenzen

y-Integration: von $y = 2x$ bis $y = \frac{1}{a}\, x^2 + a$

x-Integration: von $x = 0$ bis $x = a$

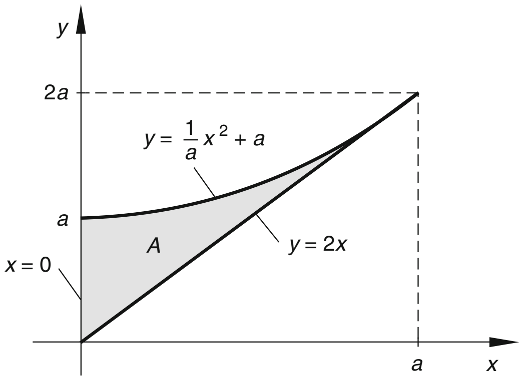


Bild F-4

Berechnung des Flächeninhaltes A

$$A = \iint\limits_{(A)} dA = \int\limits_{x=0}^{a} \int\limits_{y=2x}^{\frac{1}{a}x^2+a} 1\, dy\, dx$$

(Flächenelement $dA = dy\, dx$)

Innere Integration (nach der Variablen y)

$$\int\limits_{y=2x}^{\frac{1}{a}x^2+a} 1\, dy = \big[y \big]_{y=2x}^{\frac{1}{a}x^2+a} = \frac{1}{a}\, x^2 + a - 2x$$

Äußere Integration (nach der Variablen x)

$$A = \int\limits_{x=0}^{a} \left(\frac{1}{a}\, x^2 + a - 2x \right) dx = \left[\frac{1}{3a}\, x^3 + ax - x^2 \right]_0^a = \frac{1}{3}\, a^2 + a^2 - a^2 - 0 = \frac{1}{3}\, a^2$$

Flächeninhalt: $A = a^2/3$

F7 Berechnen Sie die von den Kurven $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$ und $x = 10$ eingeschlossene *Fläche* A.

Schnittpunkt der Kurven $y = x$ und $y = \frac{1}{x}$ im Intervall $0 \le x \le 10$: $x = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$

Bild F-5 zeigt das Flächenstück, dessen Flächeninhalt berechnet werden soll. Es besteht aus *zwei* Teilflächen A_1 und A_2, die beide *unten* durch die x-Achse ($y = 0$) und *oben* durch die Gerade $y = x$ bzw. die Hyperbel $y = 1/x$ berandet werden. Die x-Werte bewegen sich dabei zunächst von $x = 0$ bis zur Schnittstelle $x = 1$ (Teilfläche A_1) und dann von dort aus weiter bis zur Stelle $x = 10$ (Teilfläche A_2). Somit gilt (Flächenelement $dA = dy\,dx$):

$$A_1 = \iint\limits_{(A_1)} dA = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{x} 1\,dy\,dx \qquad A_2 = \iint\limits_{(A_2)} dA = \int\limits_{x=1}^{10} \int\limits_{y=0}^{1/x} 1\,dy\,dx$$

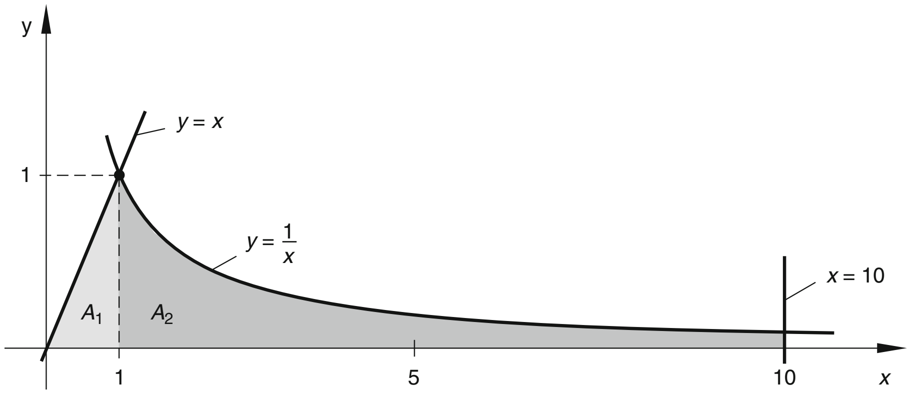


Bild F-5

Berechnung der Teilfläche A_1 (im Bild hellgrau unterlegt)

Innere Integration (nach der Variablen y)

$$\int\limits_{y=0}^{x} 1\,dy = \big[\,y\,\big]_{y=0}^{x} = x - 0 = x$$

Äußere Integration (nach der Variablen x)

$$A_1 = \int\limits_{x=0}^{1} x\,dx = \left[\frac{1}{2}\,x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Berechnung der Teilfläche A_2 (im Bild dunkelgrau unterlegt)

Innere Integration (nach der Variablen y)

$$\int\limits_{y=0}^{1/x} 1\,dy = \big[\,y\,\big]_{y=0}^{1/x} = \frac{1}{x} - 0 = \frac{1}{x}$$

Äußere Integration (nach der Variablen x)

$$A_2 = \int\limits_{x=1}^{10} \frac{1}{x}\,dx = \big[\ln|x|\big]_1^{10} = \ln 10 - \ln 1 = \ln 10 - 0 = \ln 10 = 2{,}3026$$

Gesamtfläche: $A = A_1 + A_2 = 0{,}5 + 2{,}3026 = 2{,}8026$

F8 Bestimmen Sie den Schwerpunkt S der zwischen der Parabel $y = -x^2 - 2x$ und der x-Achse gelegenen *Fläche*.

Nullstellen der Parabel: $-x^2 - 2x = -x(x+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -2$

Bild F-6 zeigt das durch Parabel (*oben*) und x-Achse (*unten*) begrenzte Flächenstück. Der Schwerpunkt $S = (x_S;\, y_S)$ liegt auf der *Symmetrieachse* der Parabel, daher ist $x_S = -1$.

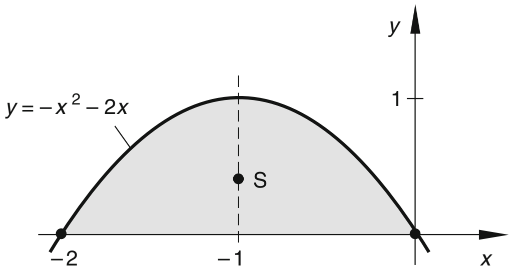


Bild F-6

Berechnung des Flächeninhaltes A

Für die Berechnung der *Ordinate* y_S benötigen wir noch den *Flächeninhalt* A (Flächenelement $dA = dy\,dx$):

$$A = \iint\limits_{(A)} dA = \int\limits_{x=-2}^{0} \int\limits_{y=0}^{-x^2-2x} 1\,dy\,dx$$

Innere Integration (nach der Variablen y)

$$\int\limits_{y=0}^{-x^2-2x} 1\,dy = \big[y\big]_{y=0}^{-x^2-2x} = -x^2 - 2x - 0 = -x^2 - 2x$$

Äußere Integration (nach der Variablen x)

$$A = \int\limits_{x=-2}^{0} (-x^2 - 2x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-2}^{0} = 0 - 0 - \frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}$$

Berechnung der Schwerpunktordinate y_S

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \iint\limits_{(A)} y\,dA = \frac{1}{4/3} \cdot \int\limits_{x=-2}^{0} \int\limits_{y=0}^{-x^2-2x} y\,dy\,dx = \frac{3}{4} \cdot \int\limits_{x=-2}^{0} \int\limits_{y=0}^{-x^2-2x} y\,dy\,dx$$

Innere Integration (nach der Variablen y)

$$\int\limits_{y=0}^{-x^2-2x} y\,dy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{-x^2-2x} = \frac{1}{2}(-x^2 - 2x)^2 - 0 = \frac{1}{2}(x^4 + 4x^3 + 4x^2)$$

Äußere Integration (nach der Variablen x)

$$y_S = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{x=-2}^{0} (x^4 + 4x^3 + 4x^2)\,dx = \frac{3}{8}\left[\frac{1}{5}x^5 + x^4 + \frac{4}{3}x^3\right]_{-2}^{0} =$$

$$= \frac{3}{8}\left(0 + 0 + 0 + \frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{3}\right) = \frac{3}{8}\left(\frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{3}\right) =$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{96 - 240 + 160}{15} = \frac{3}{8} \cdot \frac{16}{15} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

Schwerpunkt: $S = (-1;\, 0{,}4)$

F9 Ein Flächenstück wird berandet durch die nach rechts geöffnete Parabel $y^2 = 2px$ und die Gerade $x = \text{const.} = p \; (p > 0)$. Bestimmen Sie die *Fläche* A und den *Flächenschwerpunkt* S.

Die nach *rechts* geöffnete Parabel verläuft *spiegelsymmetrisch* zur x-Achse (Bild F-7). Wir beschränken uns daher bei den Integrationen auf den *1. Quadranten* (⇒ Faktor 2 in den Integralen):

y-Integration: von $y = 0$ bis $y = \sqrt{2px}$

x-Integration: von $x = 0$ bis $x = p$

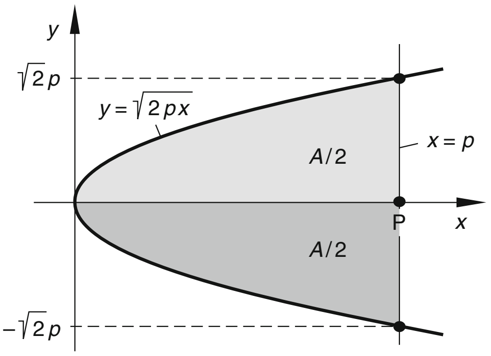


Bild F-7

Berechnung des Flächeninhaltes A

$$A = \iint\limits_{(A)} dA = 2 \cdot \int\limits_{x=0}^{p} \int\limits_{y=0}^{\sqrt{2px}} 1 \, dy \, dx$$

(Flächenelement $dA = dy \, dx$)

Innere Integration (nach der Variablen y)

$$\int\limits_{y=0}^{\sqrt{2px}} 1 \, dy = \big[y \big]_{y=0}^{\sqrt{2px}} = \sqrt{2px} - 0 = \sqrt{2px}$$

Äußere Integration (nach der Variablen x)

$$A = 2 \cdot \int\limits_{x=0}^{p} \sqrt{2p} \cdot \sqrt{x} \, dx = 2\sqrt{2p} \cdot \int\limits_{0}^{p} \sqrt{x} \, dx = 2\sqrt{2p} \cdot \int\limits_{0}^{p} x^{1/2} \, dx = 2\sqrt{2p} \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^p =$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt{2p} \left[x^{3/2} \right]_0^p = \frac{4}{3} \sqrt{2p} \, (p^{3/2} - 0) = \frac{4}{3} \sqrt{2p} \cdot \sqrt{p^3} = \frac{4}{3} \sqrt{2p^4} = \frac{4}{3} \sqrt{2} \, p^2$$

Berechnung des Flächenschwerpunktes $S = (x_S; y_S)$

Der Schwerpunkt S liegt auf der *Symmetrieachse* der Parabel (x-Achse), d. h. $y_S = 0$. Für die Koordinate x_S gilt:

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \iint\limits_{(A)} x \, dA = \frac{1}{\frac{4}{3}\sqrt{2}\,p^2} \cdot 2 \cdot \int\limits_{x=0}^{p} \int\limits_{y=0}^{\sqrt{2px}} x \, dy \, dx = \frac{3}{2\sqrt{2}\,p^2} \cdot \int\limits_{x=0}^{p} \int\limits_{y=0}^{\sqrt{2px}} x \, dy \, dx$$

Innere Integration (nach der Variablen y)

$$\int\limits_{y=0}^{\sqrt{2px}} x \, dy = x \cdot \int\limits_{y=0}^{\sqrt{2px}} dy = x \big[y \big]_{y=0}^{\sqrt{2px}} = x(\sqrt{2px} - 0) = x\sqrt{2px} = x\sqrt{2p} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{2p} \cdot x^{3/2}$$

Äußere Integration (nach der Variablen x)

$$x_S = \frac{3}{2\sqrt{2}\,p^2} \cdot \sqrt{2p} \cdot \int\limits_{x=0}^{p} x^{3/2} \, dx = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{p}}{2\sqrt{2}\,p^2} \left[\frac{x^{5/2}}{5/2} \right]_0^p = \frac{3p^{1/2}}{2p^2} \cdot \frac{2}{5} \left[x^{5/2} \right]_0^p =$$

$$= \frac{3}{5p^{3/2}} \, (p^{5/2} - 0) = \frac{3p^{5/2}}{5p^{3/2}} = \frac{3}{5} \, p = 0{,}6p$$

Schwerpunkt: $S = (0{,}6p;\, 0)$

F10 Die Kurven $y = \sin(\pi x)$ und $y = a(x^2 - x)$ schließen ein Flächenstück ein, dessen *Schwerpunkt* S auf der x-Achse liegen soll $(a > 0)$. Wie muss der Kurvenparameter a gewählt werden?

Die erste der beiden *Schnittstellen* liegt bei $x_1 = 0$ (beide Kurven gehen durch den Nullpunkt). Die Funktion $y = \sin(\pi x)$ hat die Periode $p = 2\pi/\pi = 2$ und schneidet somit die *positive* x-Achse bei 1, 2, 3, …. Die Parabel $y = a(x^2 - x)$ besitzt neben $x = 0$ noch eine weitere Nullstelle bei $x = 1$. Beide Kurven haben also *gemeinsame* Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ (Bild F-8). Dies sind zugleich die beiden *Schnittstellen*. Die *Integrationsgrenzen* lauten damit wie folgt:

y-Integration: von $y = a(x^2 - x)$ bis $y = \sin(\pi x)$

x-Integration: von $x = 0$ bis $x = 1$

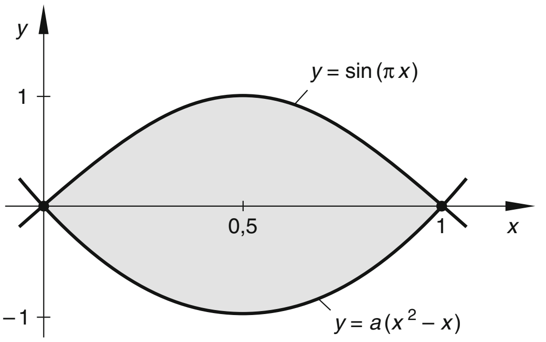


Bild F-8

Der *Schwerpunkt* $S = (x_S; y_S)$ soll auf der x-Achse liegen, also muss $y_S = 0$ sein (wegen der Spiegelsymmetrie der beiden Randkurven bezüglich der Geraden $x = 0{,}5$ ist $x_S = 0{,}5$):

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \iint_{(A)} y\,dA = \frac{1}{A} \cdot \underbrace{\int_{x=0}^{1} \int_{y=a(x^2-x)}^{\sin(\pi x)} y\,dy\,dx}_{0} = 0 \qquad (\text{Flächenelement } dA = dy\,dx)$$

Wegen $A > 0$ muss das Doppelintegral *verschwinden*, die Bedingung für den Parameter a lautet also:

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=a(x^2-x)}^{\sin(\pi x)} y\,dy\,dx = 0$$

Wir berechnen jetzt das Doppelintegral in der üblichen Weise (der Wert des Integrals wird noch vom Parameter a abhängen) und erhalten schließlich eine *Bestimmungsgleichung* für den noch unbekannten Parameter a.

Innere Integration (nach der Variablen y)

$$\int_{y=a(x^2-x)}^{\sin(\pi x)} y\,dy = \left[\frac{1}{2}\,y^2\right]_{y=a(x^2-x)}^{\sin(\pi x)} = \frac{1}{2}\left[y^2\right]_{y=a(x^2-x)}^{\sin(\pi x)} = \frac{1}{2}\left[\sin^2(\pi x) - a^2(x^2 - x)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin^2(\pi x) - a^2(x^4 - 2x^3 + x^2)\right]$$

Äußere Integration (nach der Variablen x)

$$\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{x=0}^{1}[\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Integral 205 mit } a\,=\,\pi}}{\sin^2(\pi x)} - a^2(x^4-2x^3+x^2)]\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin(2\pi x)}{4\pi}-a^2\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3\right)\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\underbrace{\frac{\sin(2\pi)}{4\pi}}_{0}-a^2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-0-\underbrace{\frac{\sin 0}{4\pi}}_{0}+a^2(0-0+0)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-a^2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-a^2\cdot\frac{6-15+10}{30}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{30}a^2\right)$$

Somit gilt:

$$\int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=a(x^2-x)}^{\sin(\pi x)} y\,dy\,dx = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{30}a^2\right)}_{0} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}-\frac{1}{30}a^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad a^2 = 15 \quad\Rightarrow\quad a = \sqrt{15}$$

Lösung: $a = \sqrt{15} = 3{,}8730$

F11

Die in Bild F-9 skizzierte trapezförmige Fläche wird *unten* von der Geraden $y = mx$ berandet.

a) Wie muss man die Steigung m wählen, damit der *Flächenschwerpunkt* S auf der y-Achse liegt?

b) Bestimmen Sie die genaue Position des Schwerpunktes.

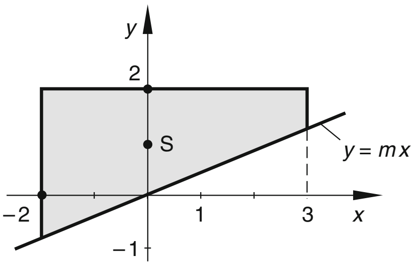


Bild F-9

---

a) Der *Schwerpunkt* $S = (x_S; y_S)$ soll auf der y-Achse liegen, also muss die x-Koordinate *verschwinden*: $x_S = 0$. Die *Integrationsgrenzen* entnehmen wir aus Bild F-9:

y-Integration: von $y = mx$ bis $y = 2$

x-Integration: von $x = -2$ bis $x = 3$

Dann gilt (Flächenelement $dA = dy\,dx$):

$$x_S = \frac{1}{A}\cdot\iint\limits_{(A)} x\,dA = \frac{1}{A}\cdot\underbrace{\int\limits_{x=-2}^{3}\int\limits_{y=mx}^{2} x\,dy\,dx}_{0} = 0 \quad\Rightarrow\quad \int\limits_{x=-2}^{3}\int\limits_{y=mx}^{2} x\,dy\,dx = 0$$

Das Doppelintegral muss also *verschwinden* (da $A > 0$). Wir berechnen das Doppelintegral in der bekannten Weise (der Wert wird noch vom Parameter m abhängen) und erhalten schließlich eine *Bestimmungsgleichung* für den noch unbekannten Parameter m.

Innere Integration (nach der Variablen y)

$$\int_{y=mx}^{2} x\,dy = x \cdot \int_{y=mx}^{2} 1\,dy = x\big[y\big]_{y=mx}^{2} = x(2 - mx) = 2x - mx^2$$

Äußere Integration (nach der Variablen x)

$$\int_{x=-2}^{3} (2x - mx^2)\,dx = \left[x^2 - \frac{1}{3}\,mx^3\right]_{-2}^{3} = \left[9 - 9m - 4 - \frac{8}{3}\,m\right] = 5 - 9m - \frac{8}{3}\,m = 5 - \frac{35}{3}\,m$$

Somit gilt:

$$\int_{x=-2}^{3} \int_{y=mx}^{2} x\,dy\,dx = 5 - \frac{35}{3}\,m = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{3}{7}$$

Lösung: $m = 3/7$

b) Es ist $m = 3/7$ und somit $x_S = 0$. Für die Berechnung der *Schwerpunktordinate* y_S benötigen wir noch den Flächeninhalt der *Trapezfläche*.

Berechnung des Flächeninhaltes A

$$A = \iint_{(A)} 1\,dA = \int_{x=-2}^{3} \int_{y=\frac{3}{7}x}^{2} 1\,dy\,dx$$

Innere Integration (nach der Variablen y)

$$\int_{y=\frac{3}{7}x}^{2} 1\,dy = \big[y\big]_{y=\frac{3}{7}x}^{2} = 2 - \frac{3}{7}\,x$$

Äußere Integration (nach der Variablen x)

$$A = \int_{x=-2}^{3} \left(2 - \frac{3}{7}\,x\right) dx = \left[2x - \frac{3}{14}\,x^2\right]_{-2}^{3} = 6 - \frac{27}{14} + 4 + \frac{12}{14} = 10 - \frac{15}{14} = \frac{140 - 15}{14} = \frac{125}{14}$$

Berechnung der Schwerpunktkoordinaten y_S

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \iint_{(A)} y\,dA = \frac{1}{125/14} \int_{x=-2}^{3} \int_{y=\frac{3}{7}x}^{2} y\,dy\,dx = \frac{14}{125} \cdot \int_{x=-2}^{3} \int_{y=\frac{3}{7}x}^{2} y\,dy\,dx$$

Innere Integration (nach der Variablen y)

$$\int_{y=\frac{3}{7}x}^{2} y\,dy = \left[\frac{1}{2}\,y^2\right]_{y=\frac{3}{7}x}^{2} = \frac{1}{2}\,\big[y^2\big]_{y=\frac{3}{7}x}^{2} = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{9}{49}\,x^2\right)$$

Äußere Integration (nach der Variablen x)

$$y_S = \frac{14}{125} \cdot \int\limits_{x=-2}^{3} \frac{1}{2}\left(4 - \frac{9}{49}x^2\right) dx = \frac{7}{125}\left[4x - \frac{3}{49}x^3\right]_{-2}^{3} = \frac{7}{125}\left(12 - \frac{81}{49} + 8 - \frac{24}{49}\right) =$$

$$= \frac{7}{125}\left(20 - \frac{105}{49}\right) = \frac{7}{125}\left(20 - \frac{15}{7}\right) = \frac{7}{125} \cdot \frac{140 - 15}{7} = \frac{7}{125} \cdot \frac{125}{7} = 1$$

Schwerpunkt: $S = (0;\ 1)$

F12 Bestimmen Sie *Flächeninhalt* A und *Flächenschwerpunkt* S der von den Kurven $y = \frac{1}{4}x^2$ und $y = \frac{8}{x^2 + 4}$ eingeschlossenen Fläche.

Wir berechnen zunächst die benötigten *Kurvenschnittpunkte*:

$$\frac{1}{4}x^2 = \frac{8}{x^2 + 4} \quad \Rightarrow \quad x^4 + 4x^2 = 32 \quad \Rightarrow \quad x^4 + 4x^2 - 32 = 0$$

Diese *bi-quadratische* Gleichung wird durch die *Substitution* $u = x^2$ in eine quadratische Gleichung übergeführt:

$$u^2 + 4u - 32 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 + 32} = -2 \pm 6 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 4, \quad u_2 = -8$$

Rücksubstitution ($u_2 = -8$ scheidet aus): $x^2 = u_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm 2$

Bild F-10 zeigt das von beiden Kurven eingeschlossene Flächenstück (*spiegelsymmetrisch* zur y-Achse), aus dem wir die folgenden *Integrationsgrenzen* entnehmen (Beschränkung auf den 1. Quadranten ⇒ Faktor 2 in den Integralen):

y-Integration: von $y = \frac{1}{4}x^2$ bis $y = \frac{8}{x^2 + 4}$

x-Integration: von $x = 0$ bis $x = 2$

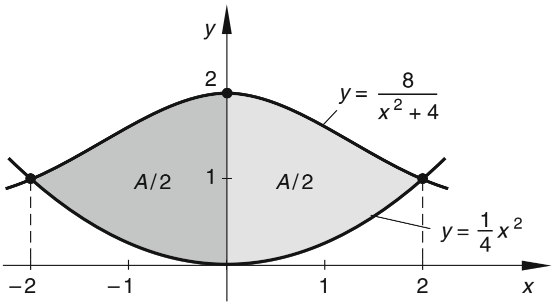


Bild F-10

Berechnung des Flächeninhaltes A

$$A = \iint\limits_{(A)} dA = 2 \cdot \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=x^2/4}^{8/(x^2+4)} 1\, dy\, dx$$

(Flächenelement $dA = dy\, dx$)

Innere Integration (nach der Variablen y)

$$\int\limits_{y=x^2/4}^{8/(x^2+4)} 1\, dy = \left[y\right]_{y=x^2/4}^{8/(x^2+4)} = \frac{8}{x^2 + 4} - \frac{1}{4}x^2 = 8 \cdot \frac{1}{x^2 + 4} - \frac{1}{4}x^2$$

Äußere Integration (nach der Variablen x)

$$A = 2 \cdot \int\limits_{x=0}^{2} \left(8 \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2 + 4}}_{\text{Integral 29 mit } a = 2} - \frac{1}{4}x^2\right) dx = 2\left[8 \cdot \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{12}x^3\right]_0^2 =$$

$$= 2\left[4 \cdot \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{12}x^3\right]_0^2 = 2\left(4 \cdot \underbrace{\arctan 1}_{\pi/4} - \frac{2}{3} - 4 \cdot \underbrace{\arctan 0}_{0} - 0\right) = 2\left(\pi - \frac{2}{3}\right) = 4{,}9499$$

Berechnung der Schwerpunktkoordinaten x_S und y_S

$x_S = 0$ (wegen der *Spiegelsymmetrie* zur y-Achse)

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \iint\limits_{(A)} y\,dA = \frac{1}{4{,}9499} \cdot 2 \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=x^2/4}^{8/(x^2+4)} y\,dy\,dx = 0{,}4040 \cdot \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=x^2/4}^{8/(x^2+4)} y\,dy\,dx$$

Innere Integration (nach der Variablen y)

$$\int\limits_{y=x^2/4}^{8/(x^2+4)} y\,dy = \left[\frac{1}{2}\,y^2\right]_{y=x^2/4}^{8/(x^2+4)} = \frac{1}{2}\,\left[y^2\right]_{y=x^2/4}^{8/(x^2+4)} = \frac{1}{2}\left(\frac{64}{(x^2+4)^2} - \frac{1}{16}\,x^4\right)$$

Äußere Integration (nach der Variablen x)

$$y_S = 0{,}4040 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{x=0}^{2} \left(\frac{64}{(x^2+4)^2} - \frac{1}{16}\,x^4\right) dx = 0{,}2020 \cdot \int\limits_{x=0}^{2} \left(64 \cdot \underbrace{\frac{1}{(x^2+4)^2}}_{\text{Integral 30 mit } a\,=\,2} - \frac{1}{16}\,x^4\right) dx =$$

$$= 0{,}2020 \left[64\left(\frac{x}{2 \cdot 4\,(x^2+4)} + \frac{1}{2 \cdot 8} \cdot \arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \frac{1}{16} \cdot \frac{x^5}{5}\right]_0^2 =$$

$$= 0{,}2020 \left[\frac{8\,x}{x^2+4} + 4 \cdot \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{80}\,x^5\right]_0^2 =$$

$$= 0{,}2020\left(2 + 4 \cdot \underbrace{\arctan 1}_{\pi/4} - \frac{32}{80} - 0 - 4 \cdot \underbrace{\arctan 0}_{0} - 0\right) = 0{,}2020\left(2 + \pi - \frac{2}{5}\right) = 0{,}9578$$

Schwerpunkt: $S = (0;\ 0{,}9578)$

F13

Berechnen Sie den *Flächeninhalt A* und den *Schwerpunkt S* des in Bild F-11 skizzierten Kreissegments.

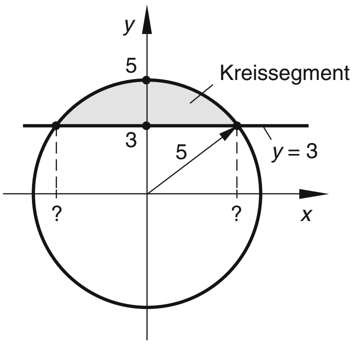


Bild F-11

Wir berechnen zunächst die *Schnittpunkte* des Kreises $x^2 + y^2 = 25$ mit der Geraden $y = 3$:

$$x^2 + y^2 = x^2 + 3^2 = x^2 + 9 = 25 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm 4$$

Schnittpunkte: (4; 3) und (– 4; 3)

Wegen der *Spiegelsymmetrie* des Flächenstücks beschränken wir uns bei den Integrationen auf den 1. Quadranten (⇒ Faktor 2 in den Integralen). Die *Integrationsgrenzen* sind somit:

y-Integration: von $y = 3$ bis $y = \sqrt{25 - x^2}$

x-Integration: von $x = 0$ bis $x = 4$

Berechnung des Flächeninhaltes A

$$A = \iint\limits_{(A)} dA = 2 \cdot \int\limits_{x=0}^{4} \int\limits_{y=3}^{\sqrt{25-x^2}} 1 \, dy \, dx \qquad \text{(Flächenelement } dA = dy \, dx\text{)}$$

Innere Integration (nach der Variablen y)

$$\int\limits_{y=3}^{\sqrt{25-x^2}} 1 \, dy = \left[y \right]_{y=3}^{\sqrt{25-x^2}} = \sqrt{25 - x^2} - 3$$

Äußere Integration (nach der Variablen x)

$$A = 2 \cdot \int\limits_{x=0}^{4} (\underbrace{\sqrt{25 - x^2}}_{\text{Integral 141 mit } a = 5} - 3) \, dx = 2 \left[\frac{1}{2} \left(x \cdot \sqrt{25 - x^2} + 25 \cdot \arcsin \left(\frac{x}{5} \right) \right) - 3x \right]_0^4 =$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2} (4 \cdot 3 + 25 \cdot \arcsin 0{,}8) - 12 - \frac{1}{2} (0 + 25 \cdot \underbrace{\arcsin 0}_{0}) - 0 \right] =$$

$$= 2 (6 + 12{,}5 \cdot \underbrace{\arcsin 0{,}8}_{0{,}9273 \text{ (Bogenmaß!)}} - 12) = 11{,}1824$$

Berechnung des Flächenschwerpunktes $S = (x_S; y_S)$

$x_S = 0$ (wegen der *Spiegelsymmetrie* der Fläche)

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \iint\limits_{(A)} y \, dA = \frac{1}{11{,}1824} \cdot 2 \cdot \int\limits_{x=0}^{4} \int\limits_{y=3}^{\sqrt{25-x^2}} y \, dy \, dx = 0{,}1789 \cdot \int\limits_{x=0}^{4} \int\limits_{y=3}^{\sqrt{25-x^2}} y \, dy \, dx$$

Innere Integration (nach der Variablen y)

$$\int\limits_{y=3}^{\sqrt{25-x^2}} y \, dy = \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=3}^{\sqrt{25-x^2}} = \frac{1}{2} \left[y^2 \right]_{y=3}^{\sqrt{25-x^2}} = \frac{1}{2} (25 - x^2 - 9) = \frac{1}{2} (16 - x^2)$$

Äußere Integration (nach der Variablen x)

$$y_S = 0{,}1789 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{x=0}^{4} (16 - x^2) \, dx = 0{,}0895 \left[16x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^4 = 0{,}0895 \left(64 - \frac{64}{3} - 0 - 0 \right) = 3{,}8187$$

Schwerpunkt: $S = (0; 3{,}8187)$

F14 Wie groß sind die *Flächenträgheitsmomente (Flächenmomente)* I_x, I_y und I_p einer Fläche, die durch die Parabel $y = 4 - x^2$ und die x-Achse begrenzt wird?

Nullstellen der Parabel: $4 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm 2$

Die *Integrationsgrenzen* entnehmen wir aus Bild F-12:

y-Integration: von $y = 0$ bis $y = 4 - x^2$

x-Integration: von $x = -2$ bis $x = 2$

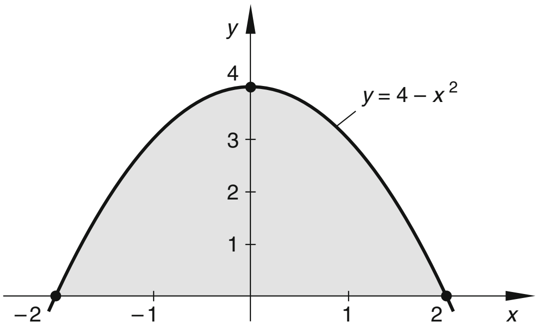


Bild F-12

Berechnung des Flächenträgheitsmomentes I_x

Unter Beachtung der *Spiegelsymmetrie* gilt $(dA = dy\,dx)$:

$$I_x = \iint_{(A)} y^2\,dA = 2 \cdot \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{4-x^2} y^2\,dy\,dx$$

Innere Integration (nach der Variablen y)

$$\int_{y=0}^{4-x^2} y^2\,dy = \left[\frac{1}{3}\,y^3\right]_{y=0}^{4-x^2} = \frac{1}{3}\left[y^3\right]_{y=0}^{4-x^2} = \frac{1}{3}\left[(4-x^2)^3 - 0\right] = \frac{1}{3}\,(64 - 48x^2 + 12x^4 - x^6)$$

(Binomische Formel: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ mit $a = 4,\ b = x^2$)

Äußere Integration (nach der Variablen x)

$$I_x = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \int_{x=0}^{2} (64 - 48x^2 + 12x^4 - x^6)\,dx = \frac{2}{3}\left[64x - 16x^3 + \frac{12}{5}\,x^5 - \frac{1}{7}\,x^7\right]_0^2 =$$

$$= \frac{2}{3}\left(128 - 128 + \frac{384}{5} - \frac{128}{7} - 0 - 0 - 0 - 0\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{384}{5} - \frac{128}{7}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2048}{35} = 39{,}01$$

Berechnung des Flächenträgheitsmomentes I_y

$$I_y = \iint_{(A)} x^2\,dA = 2 \cdot \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{4-x^2} x^2\,dy\,dx$$

Innere Integration (nach der Variablen y)

$$\int_{y=0}^{4-x^2} x^2\,dy = x^2 \cdot \int_{y=0}^{4-x^2} 1\,dy = x^2\left[y\right]_{y=0}^{4-x^2} = x^2\,(4 - x^2 - 0) = 4x^2 - x^4$$

Äußere Integration (nach der Variablen x)

$$I_y = 2 \cdot \int_{x=0}^{2} (4x^2 - x^4)\,dx = 2\left[\frac{4}{3}\,x^3 - \frac{1}{5}\,x^5\right]_0^2 = 2\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} - 0 - 0\right) = 2 \cdot \frac{160 - 96}{15} = \frac{128}{15} = 8{,}53$$

Berechnung des Flächenträgheitsmomentes I_p

$$I_p = I_x + I_y = 39{,}01 + 8{,}53 = 47{,}54$$

F15

Welchen Wert besitzt das *axiale Flächenmoment* I_y der in Bild F-13 skizzierten Fläche?

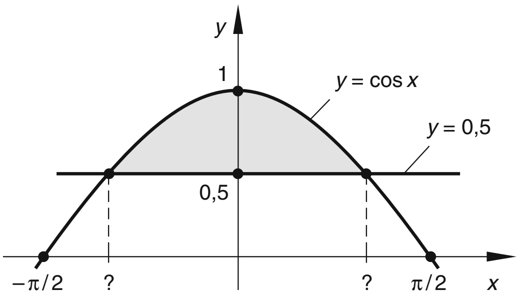


Bild F-13

Wir berechnen zunächst die für die Integration benötigten *Schnittstellen* der beiden Randkurven:

$$\cos x = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad x = \arccos 0{,}5 = \pi/3 \qquad (1.\ \text{Schnittstelle im Intervall } x > 0)$$

Wegen der *Spiegelsymmetrie* zur y-Achse liegen die beiden Schnittpunkte bei $x_{1/2} = \pm\pi/3$. Die *Integrationsgrenzen* entnehmen wir Bild E-14:

y-Integration: von $y = 0{,}5$ bis $y = \cos x$

x-Integration: von $x = -\pi/3$ bis $x = \pi/3$

Unter Beachtung der *Symmetrie* gilt dann (Flächenelement $dA = dy\,dx$):

$$I_y = \iint\limits_{(A)} x^2\,dA = \int\limits_{x=-\pi/3}^{\pi/3} \int\limits_{y=0{,}5}^{\cos x} x^2\,dy\,dx = 2 \cdot \int\limits_{x=0}^{\pi/3} \int\limits_{y=0{,}5}^{\cos x} x^2\,dy\,dx$$

Innere Integration (nach der Variablen y)

$$\int\limits_{y=0{,}5}^{\cos x} x^2\,dy = x^2 \cdot \int\limits_{y=0{,}5}^{\cos x} 1\,dy = x^2\,\big[y\big]_{y=0{,}5}^{\cos x} = x^2(\cos x - 0{,}5) = x^2 \cdot \cos x - 0{,}5x^2$$

Äußere Integration (nach der Variablen x)

$$I_y = 2 \cdot \int\limits_{x=0}^{\pi/3} (\underbrace{x^2 \cdot \cos x}_{\text{Integral 233 mit } a = 1} - 0{,}5x^2)\,dx = 2\left[2x \cdot \cos x + (x^2 - 2) \cdot \sin x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^{\pi/3} =$$

$$= 2\left[\frac{2}{3}\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi^2}{9} - 2\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi^3}{27} - 0 - 0 - 0\right] =$$

$$= 2\,(1{,}0472 - 0{,}7823 - 0{,}1914) = 0{,}147$$

Flächenmoment: $I_y = 0{,}147$

F16

Bild F-14 zeigt den halbkreisförmigen „Boden“ eines Zylinders, dessen „Deckel“ oberhalb der x, y-Ebene liegt und Teil der Fläche $z = xy$ ist. Berechnen Sie das *Zylindervolumen* V mit Hilfe eines Doppelintegrals.

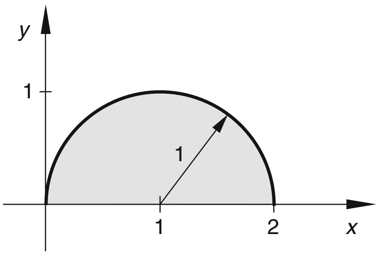


Bild F-14

Wir bestimmen zunächst die Gleichung des skizzierten *Halbkreises* (Mittelpunkt $M = (1; 0)$, Radius $R = 1$):

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 1 - (x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad y = +\sqrt{1-(x-1)^2}$$

Integrationsbereich in kartesischen Koordinaten (aus Bild F-14 entnommen):

y-Integration: von $y = 0$ bis $y = \sqrt{1-(x-1)^2}$

x-Integration: von $x = 0$ bis $x = 2$

Das Doppelintegral für das *Volumen* V lautet damit (Flächenelement $dA = dy\,dx$):

$$V = \iint_{(A)} z\,dA = \iint_{(A)} xy\,dA = \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} xy\,dy\,dx$$

Die Berechnung erfolgt durch zwei *nacheinander* durchzuführende *gewöhnliche* Integrationen.

Innere Integration (nach der Variablen y)

$$\int_{y=0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} xy\,dy = x \cdot \int_{y=0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} y\,dy = x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} = x\left[\frac{1}{2}\left(1-(x-1)^2\right) - 0\right] =$$

$$= \frac{1}{2}x\left[1-(x-1)^2\right] = \frac{1}{2}x(1-x^2+2x-1) = \frac{1}{2}x(2x-x^2) = \frac{1}{2}(2x^2-x^3)$$

Äußere Integration (nach der Variablen x)

$$V = \frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^{2} (2x^2 - x^3)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{16}{3} - 4 - 0 - 0\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Volumen: $V = 2/3$

1.2 Doppelintegrale in Polarkoordinaten

Alle Aufgaben in diesem Abschnitt sollen mit Hilfe von *Doppelintegralen* unter Verwendung von *Polarkoordinaten* gelöst werden.

Hinweise

Lehrbuch: Band 2, Kapitel III.3.1.2.2 und 3.1.3

Formelsammlung: Kapitel IX.3.1.3 und 3.1.4

F17

$$I = \iint\limits_{(A)} (1 + x + y)\, dA = \,?$$

Integrationsbereich (A):
Einheitskreis nach Bild F-15

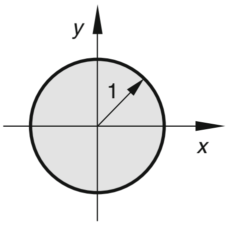


Bild F-15

Unter Verwendung von *Polarkoordinaten* transformiert sich der *Integrand* wie folgt ($x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$):

$$z = f(x;\, y) = 1 + x + y = 1 + r \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi$$

Das *Flächenelement* dA lautet in Polarkoordinaten $dA = r\, dr\, d\varphi$, die *Integrationsgrenzen* sind (siehe Bild F-15):

r-Integration: von $r = 0$ bis $r = 1$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$

Damit gilt:

$$I = \iint\limits_{(A)} (1 + x + y)\, dA = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} (1 + r \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} (r + r^2 \cdot \cos\varphi + r^2 \cdot \sin\varphi)\, dr\, d\varphi$$

Wir integrieren zunächst nach r, dann nach φ.

Innere Integration (nach der Variablen *r*)

$$\int\limits_{r=0}^{1} (r + r^2 \cdot \cos\varphi + r^2 \cdot \sin\varphi)\, dr = \left[\frac{1}{2}\, r^2 + \frac{1}{3}\, r^3 \cdot \cos\varphi + \frac{1}{3}\, r^3 \cdot \sin\varphi \right]_{r=0}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \cos\varphi + \frac{1}{3} \cdot \sin\varphi - 0 - 0 - 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \cos\varphi + \frac{1}{3} \cdot \sin\varphi$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$I = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \cos\varphi + \frac{1}{3} \cdot \sin\varphi \right) d\varphi = \left[\frac{1}{2}\,\varphi + \frac{1}{3} \cdot \sin\varphi - \frac{1}{3} \cdot \cos\varphi \right]_0^{2\pi} =$$

$$= \pi + \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\sin(2\pi)}_{0} - \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\cos(2\pi)}_{1} - 0 - \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\sin 0}_{0} + \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\cos 0}_{1} = \pi - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \pi$$

Ergebnis: $I = \pi$

F18

$$I = \iint\limits_{(A)} (3 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + 4)\, dA = ?$$

Integrationsbereich (A):
Kreisring nach Bild F-16

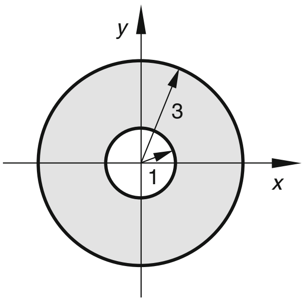


Bild F-16

Die *Transformationsgleichungen* für den Übergang von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten lauten:

$$x = r \cdot \cos\varphi\,, \quad y = r \cdot \sin\varphi\,, \quad dA = r\,dr\,d\varphi$$

Die *Integrationsgrenzen* des kreisringförmigen Integrationsbereiches sind (siehe Bild F-16):

r-Integration: von $r = 1$ bis $r = 3$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$

Unter Berücksichtigung von

$$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \cos^2\varphi + r^2 \cdot \sin^2\varphi = r^2 \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} = r^2$$

transformiert sich der *Integrand* des Doppelintegrals wie folgt:

$$z = f(x; y) = 3 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + 4 = 3 \cdot \sqrt{r^2} + 4 = 3r + 4$$

Das Doppelintegral I lautet damit in Polarkoordinaten:

$$I = \iint\limits_{(A)} (3 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + 4)\, dA = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=1}^{3} (3r + 4)\, r\, dr\, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=1}^{3} (3r^2 + 4r)\, dr\, d\varphi$$

Die Auswertung erfolgt in der üblichen Weise (erst nach r, dann nach φ integrieren).

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\int_{r=1}^{3} (3r^2 + 4r)\, dr = \left[r^3 + 2r^2 \right]_{r=1}^{3} = 27 + 18 - 1 - 2 = 42$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$I = \int_{\varphi=0}^{2\pi} 42\,d\varphi = 42 \cdot \int_{0}^{2\pi} 1\,d\varphi = 42\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = 42\,(2\pi - 0) = 84\,\pi$$

Ergebnis: $I = 84\,\pi$

F19

Eine *kreisförmig* gebogene Leiterschleife vom Radius R wird *senkrecht* von einem Magnetfeld durchflutet, dessen *magnetische Flussdichte* B nach der Gleichung

$$B(r) = \frac{B_0}{1 + r^2}\,, \quad r \geq 0 \qquad (B_0\text{: Konstante})$$

in radialer Richtung nach außen hin abnimmt. Bestimmen Sie den *magnetischen Fluss* Φ durch die Leiterschleife.

Hinweis: Definitionsgemäß gilt $\Phi = \iint\limits_{(A)} B\,dA$.

Wir verwenden wegen der Kreissymmetrie *Polarkoordinaten*. Aus Bild F-17 entnehmen wir die *Integrationsgrenzen*:

r-Integration: von $r = 0$ bis $r = R$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$

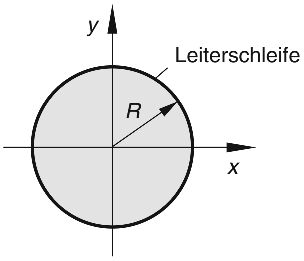


Bild F-17

Damit gilt (Flächenelement $dA = r\,dr\,d\varphi$):

$$\Phi = \iint\limits_{(A)} B\,dA = B_0 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \frac{1}{1 + r^2} \cdot r\,dr\,d\varphi =$$

$$= B_0 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \frac{r}{1 + r^2}\,dr\,d\varphi$$

Wir integrieren zunächst in radialer Richtung, dann in der Winkelrichtung:

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\underbrace{\int_{r=0}^{R} \frac{r}{1 + r^2}\,dr}_{\text{Integral 32 mit } a = 1} = \left[\frac{1}{2} \cdot \ln(1 + r^2)\right]_{r=0}^{R} = \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + R^2) - \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\ln 1}_{0} = \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + R^2)$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$\Phi = B_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + R^2) \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1\,d\varphi = \frac{1}{2}\,B_0 \cdot \ln(1 + R^2) \cdot \left[\varphi\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\,B_0 \cdot [\ln(1 + R^2)] \cdot (2\pi - 0) = B_0\,\pi \cdot \ln(1 + R^2)$$

Magnetischer Fluss durch die Schleife: $\Phi = B_0\,\pi \cdot \ln(1 + R^2)$

F20

Der in Bild F-18 skizzierte elektrische Leiter besitzt einen *kreisringförmigen* Querschnitt mit dem Innenradius a und dem Außenradius $2a$. Er wird in seiner Längsrichtung von einem Strom mit der *Stromdichte*

$$S(r) = S_0 \cdot \frac{e^{-r}}{r}, \quad a \le r \le 2a$$

durchflossen (S_0: Konstante). Berechnen Sie die *Stromstärke* I durch das Doppelintegral

$$I = \iint_{(A)} S\,dA$$

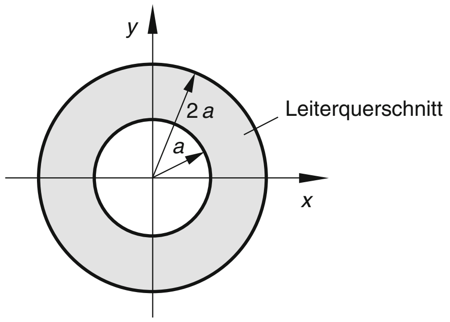


Bild F-18

Wir verwenden *Polarkoordinaten*. Der *Integrationsbereich* (Kreisring nach Bild F-18), wird dabei durch die Ungleichungen $a \le r \le 2a$ und $0 \le \varphi \le 2\pi$ beschrieben. Damit erhalten wir für die *Stromstärke* I das folgende Doppelintegral (Flächenelement $dA = r\,dr\,d\varphi$):

$$I = \iint_{(A)} S(r)\,dA = S_0 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=a}^{2a} \frac{e^{-r}}{r} \cdot r\,dr\,d\varphi = S_0 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=a}^{2a} e^{-r}\,dr\,d\varphi$$

Wir integrieren zunächst nach r, dann nach φ:

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\int_{r=a}^{2a} e^{-r}\,dr = \left[-e^{-r}\right]_{r=a}^{2a} = -e^{-2a} + e^{-a} = e^{-a} - e^{-2a}$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$I = S_0 (e^{-a} - e^{-2a}) \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1\,d\varphi = S_0 (e^{-a} - e^{-2a}) \cdot \left[\varphi\right]_0^{2\pi} =$$

$$= S_0 (e^{-a} - e^{-2a})(2\pi - 0) = 2\pi S_0 (e^{-a} - e^{-2a})$$

Stromstärke: $I = 2\pi S_0 (e^{-a} - e^{-2a})$

F21

Die Randkurve der in Bild F-19 skizzierten Fläche wird durch die Gleichung

$$r = 2(\cos\varphi + \sin\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \pi/2$$

beschrieben (r, φ: Polarkoordinaten).
Wie groß ist der *Flächeninhalt* A?

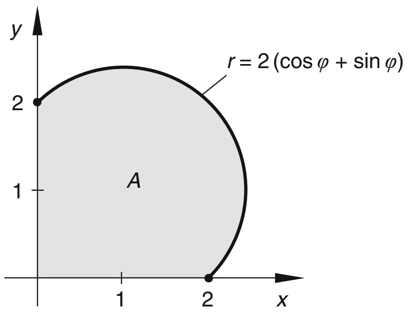


Bild F-19

Wir verwenden *Polarkoordinaten*. Die *Integrationsgrenzen* lauten dann:

r-Integration: $r = 0$ bis $r = 2(\cos\varphi + \sin\varphi)$

φ-Integration: $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi/2$

Doppelintegral für den Flächeninhalt A

$$A = \iint_{(A)} dA = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{2(\cos\varphi+\sin\varphi)} r\,dr\,d\varphi \qquad (\text{Flächenelement } dA = r\,dr\,d\varphi)\,.$$

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\int_{r=0}^{2(\cos\varphi+\sin\varphi)} r\,dr = \left[\frac{1}{2}\,r^2\right]_{r=0}^{2(\cos\varphi+\sin\varphi)} = \frac{1}{2}\cdot 4(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 - 0 = 2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2 =$$

$$= 2(\cos^2\varphi + 2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi + \sin^2\varphi) = 2\,[\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} + \underbrace{2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi}_{\sin(2\varphi)}] =$$

$$= 2(1 + \sin(2\varphi))$$

(unter Verwendung der trigonometrischen Beziehungen $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ und $\sin(2\varphi) = 2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi$)

Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$A = 2\cdot\int_{\varphi=0}^{\pi/2}(1 + \underbrace{\sin(2\varphi)}_{\text{Integral 204 mit } a\,=\,2})\,d\varphi = 2\left[\varphi - \frac{\cos(2\varphi)}{2}\right]_0^{\pi/2} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \underbrace{\frac{\cos\pi}{2}}_{-1/2} - 0 + \underbrace{\frac{\cos 0}{2}}_{1/2}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) = \pi + 2$$

Flächeninhalt: $A = \pi + 2 = 5{,}1416$

F22

Berechnen Sie den *Flächeninhalt* A des im 1. Quadranten gelegenen Flächenstücks, das durch die Kurve $r = 1 + \sin^2\varphi$ und den Einheitskreis berandet wird (r, φ: Polarkoordinaten).

Es handelt sich um das in Bild F-20 skizzierte Flächenstück.

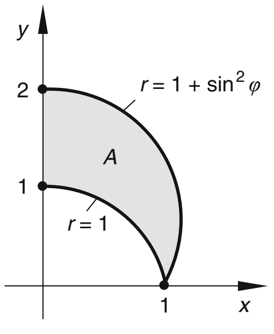


Bild F-20

Randkurven

Untere Berandung: $r = 1$ (Einheitskreis)

Obere Berandung: $r = 1 + \sin^2\varphi$

Der *Integrationsbereich* lautet in Polarkoordinaten:

r-Integration: von $r = 1$ bis $1 + \sin^2\varphi$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\pi/2$

Doppelintegral für den Flächeninhalt A

$$A = \iint\limits_{(A)} dA = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi/2} \int\limits_{r=1}^{1+\sin^2\varphi} r\,dr\,d\varphi \qquad (\text{Flächenelement } dA = r\,dr\,d\varphi)$$

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\int\limits_{r=1}^{1+\sin^2\varphi} r\,dr = \left[\frac{1}{2}\,r^2\right]_{r=1}^{1+\sin^2\varphi} = \frac{1}{2}\left[r^2\right]_{r=1}^{1+\sin^2\varphi} = \frac{1}{2}\left[(1+\sin^2\varphi)^2 - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,(1 + 2\cdot\sin^2\varphi + \sin^4\varphi - 1) = \frac{1}{2}\,(2\cdot\sin^2\varphi + \sin^4\varphi)$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$A = \frac{1}{2}\cdot\int\limits_{\varphi=0}^{\pi/2} (2\cdot\underset{\uparrow}{\sin^2\varphi} + \underset{\uparrow}{\sin^4\varphi})\,d\varphi =$$

Integral 207 mit $n = 4,\ a = 1$

Integral 205 mit $a = 1$

$$= \frac{1}{2}\left[2\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4}\right) - \frac{\sin^3\varphi\cdot\cos\varphi}{4} + \frac{3}{4}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4}\right)\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\varphi - \frac{1}{2}\cdot\sin(2\varphi) - \frac{1}{4}\cdot\sin^3\varphi\cdot\cos\varphi + \frac{3}{8}\,\varphi - \frac{3}{16}\cdot\sin(2\varphi)\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{11}{8}\,\varphi - \frac{11}{16}\cdot\sin(2\varphi) - \frac{1}{4}\cdot\sin^3\varphi\cdot\cos\varphi\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{11}{16}\,\pi - \frac{11}{16}\cdot\underbrace{\sin\pi}_{0} - \frac{1}{4}\cdot\underbrace{\sin^3(\pi/2)}_{1}\cdot\underbrace{\cos(\pi/2)}_{0} - 0 + \frac{11}{16}\cdot\underbrace{\sin 0}_{0} + \frac{1}{4}\cdot\underbrace{\sin^3 0}_{0}\cdot\underbrace{\cos 0}_{1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{11}{16}\,\pi\right) = \frac{11}{32}\,\pi$$

Flächeninhalt: $A = \dfrac{11}{32}\,\pi$

F23

Bestimmen Sie den *Flächenschwerpunkt* S des in Bild F-21 skizzierten Kreisringausschnitts:

Innenradius: $r_1 = 2$
Außenradius: $r_2 = 6$
Winkelbereich: $0 \le \varphi \le \pi$

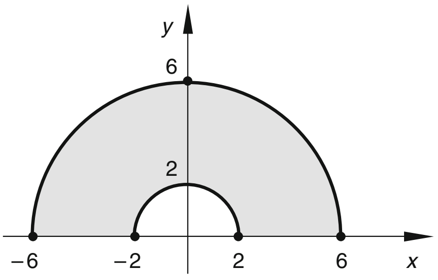


Bild F-21

Der *Integrationsbereich* für die Berechnung des *Flächenschwerpunktes* $S = (x_S;\, y_S)$ lautet:

r-Integration: von $r = 2$ bis $r = 6$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$

Der benötigte *Flächeninhalt* A lässt sich *elementar* berechnen (als Differenz zweier Halbkreisflächen):

$$A = \frac{1}{2}\,(\pi r_2^2 - \pi r_1^2) = \frac{1}{2}\,\pi\,(r_2^2 - r_1^2) = \frac{1}{2}\,\pi\,(36 - 4) = 16\pi = 50{,}2655$$

Wegen der *Spiegelsymmetrie* der Fläche liegt der Schwerpunkt auf der y-Achse. Somit ist $x_S = 0$. Die *Ordinate* y_S berechnen wir mit dem folgenden Doppelintegral:

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \iint\limits_{(A)} y\, dA = \frac{1}{16\pi} \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \int\limits_{r=2}^{6} r^2 \cdot \sin\varphi\, dr\, d\varphi$$

(Transformationsgleichungen: $y = r \cdot \sin\varphi$, Flächenelement $dA = r\, dr\, d\varphi$)

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\int\limits_{r=2}^{6} r^2 \cdot \sin\varphi\, dr = \sin\varphi \cdot \int\limits_{r=2}^{6} r^2\, dr = \sin\varphi \left[\frac{1}{3}\, r^3\right]_{r=2}^{6} = \frac{1}{3} \cdot \sin\varphi \left[r^3\right]_{r=2}^{6} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \sin\varphi\,(216 - 8) = \frac{208}{3} \cdot \sin\varphi$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$y_S = \frac{1}{16\pi} \cdot \frac{208}{3} \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi = \frac{13}{3\pi}\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} = \frac{13}{3\pi}\,(-\underbrace{\cos\pi}_{-1} + \underbrace{\cos 0}_{1}) = \frac{13}{3\pi}\,(1+1) = \frac{26}{3\pi} = 2{,}7587$$

Schwerpunkt: $S = (0;\, 2{,}7587)$

F24

Gegeben ist die Kurve $r = \mathrm{e}^{0{,}2\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi/2$.

a) Welche *Fläche* A bildet die Kurve mit der positiven x- und y-Achse?

b) Welchen Wert muss die Steigung der Geraden $y = mx$ haben, damit diese die unter a) genannte Fläche *halbiert*?

---

a) Der Verlauf der Kurve ist in Bild F-22 dargestellt. Für die Berechnung des *Flächeninhaltes* A benötigen wir noch die *Integrationsgrenzen* (in *Polarkoordinaten* ausgedrückt). Sie lauten:

r-Integration: von $r = 0$ bis $r = \mathrm{e}^{0{,}2\varphi}$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi/2$

Berechnung des Flächeninhaltes A

$$A = \iint\limits_{(A)} dA = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi/2} \int\limits_{r=0}^{\mathrm{e}^{0{,}2\varphi}} r\, dr\, d\varphi$$

(Flächenelement $dA = r\, dr\, d\varphi$)

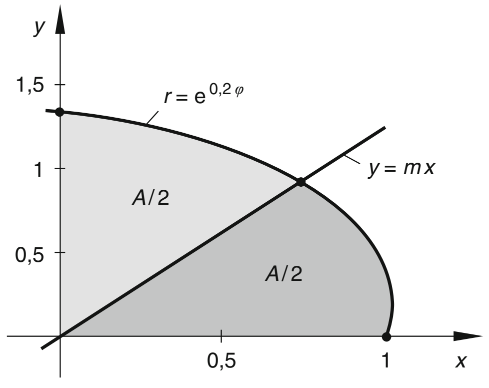


Bild F-22

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\int_{r=0}^{e^{0,2\varphi}} r\,dr = \left[\frac{1}{2}\,r^2\right]_{r=0}^{e^{0,2\varphi}} = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{0,2\varphi}\right)^2 - 0 = \frac{1}{2}\cdot e^{0,4\varphi} \qquad (\textit{Rechenregel:}\ (e^a)^n = e^{na})$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$A = \frac{1}{2}\cdot\int_{\varphi=0}^{\pi/2} e^{0,4\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{0,4\varphi}}{0,4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2\cdot 0,4}\left[e^{0,4\varphi}\right]_0^{\pi/2} = 1,25\,(e^{0,2\pi} - \underbrace{e^0}_{1}) = 1,0931$$

Flächeninhalt: $A = 1,0931$

b) *Ansatz* für die gesuchte Gerade, die das Flächenstück vom Flächeninhalt $A = 1,0931$ halbiert (in Polarkoordinaten): $\varphi = \text{const.} = \alpha$ (siehe Bild F-22, *hellgraues* Raster). Das Doppelintegral für diese Fläche A^* lautet dann:

$$A^* = \iint\limits_{(A^*)} dA = \int_{\varphi=0}^{\alpha}\int_{r=0}^{e^{0,2\varphi}} r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2}\,A$$

(Änderung gegenüber der Gesamtfläche A: Die Integration im Winkelbereich läuft jetzt von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \alpha$). Die Auswertung erfolgt wie im Teil a):

Innere Integration (nach der Variablen *r*)

$$\int_{r=0}^{e^{0,2\varphi}} r\,dr = \left[\frac{1}{2}\,r^2\right]_{r=0}^{e^{0,2\varphi}} = \frac{1}{2}\cdot e^{0,4\varphi} \qquad \text{(siehe a))}$$

Äußere Integration (nach der Variablen *φ*)

$$A^* = \frac{1}{2}\cdot\int_{\varphi=0}^{\alpha} e^{0,4\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{0,4\varphi}}{0,4}\right]_0^{\alpha} = \frac{1}{2\cdot 0,4}\left[e^{0,4\varphi}\right]_0^{\alpha} = 1,25\,(e^{0,4\alpha} - e^0) = 1,25\,(e^{0,4\alpha} - 1)$$

Der Steigungswinkel α der gesuchten Geraden wird aus der Bedingung

$$A^* = \frac{1}{2}\,A \quad\Rightarrow\quad 1,25\,(e^{0,4\alpha} - 1) = \frac{1}{2}\cdot 1,0931$$

wie folgt berechnet:

$$e^{0,4\alpha} - 1 = \frac{1,0931}{2\cdot 1,25} = 0,43724 \quad\Rightarrow\quad e^{0,4\alpha} = 1,43724$$

Beide Seiten werden logarithmiert (*Rechenregel:* $\ln a^n = n\cdot\ln a$):

$$\ln e^{0,4\alpha} = \ln 1,43724 \quad\Rightarrow\quad 0,4\,\alpha\cdot\underbrace{\ln e}_{1} = 0,3627 \quad\Rightarrow\quad 0,4\,\alpha = 0,3627 \quad\Rightarrow\quad \alpha = 0,9068 \qquad \text{(Bogenmaß)}$$

Dieser Wert entspricht im Gradmaß einem Winkel von rund 51,96°.

Ergebnis: Der Strahl unter dem Winkel von 51,96° teilt die Ausgangsfläche A in *zwei gleiche* Teile. Die Gleichung der Geraden lautet in kartesischen Koordinaten wie folgt:

$$y = mx = (\tan\alpha)\cdot x = (\tan 51,96^\circ)\cdot x = 1,2781\,x$$

F25

$r = 1 + \sin\varphi\,, \; 0 \le \varphi \le \pi$

Welchen *Flächeninhalt* A begrenzt die in Polarkoordinaten dargestellte Kurve mit der x-Achse?

Die zur y-Achse *spiegelsymmetrische* Kurve ist in Bild F-23 dargestellt.
Integrationsbereich (aus Bild F-23 entnommen):

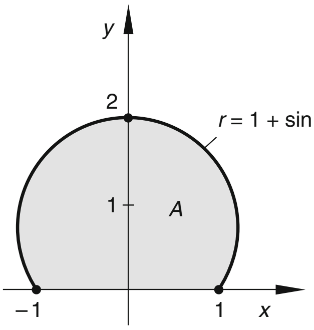


Bild F-23

r-Integration: von $r = 0$ bis $r = 1 + \sin\varphi$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$

Berechnung des Flächeninhaltes A

$$A = \iint\limits_{(A)} dA = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \int\limits_{r=0}^{1+\sin\varphi} r\,dr\,d\varphi \qquad (\text{Flächenelement } dA = r\,dr\,d\varphi)$$

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\int\limits_{r=0}^{1+\sin\varphi} r\,dr = \left[\frac{1}{2}\,r^2\right]_{r=0}^{1+\sin\varphi} = \frac{1}{2}\,(1+\sin\varphi)^2 - 0 = \frac{1}{2}\,(1+\sin\varphi)^2 = \frac{1}{2}\,(1 + 2\cdot\sin\varphi + \sin^2\varphi)$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$A = \frac{1}{2}\cdot\int\limits_{\varphi=0}^{\pi} (1 + 2\cdot\sin\varphi + \underbrace{\sin^2\varphi)}_{\text{Integral 205 mit } a\,=\,1}\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\varphi - 2\cdot\cos\varphi + \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\,\varphi - 2\cdot\cos\varphi - \frac{1}{4}\cdot\sin(2\varphi)\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\,\pi - 2\cdot\underbrace{\cos\pi}_{-1} - \frac{1}{4}\cdot\underbrace{\sin(2\pi)}_{0} - 0 + 2\cdot\underbrace{\cos 0}_{1} + \frac{1}{4}\cdot\underbrace{\sin 0}_{0}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\,\pi + 2 + 2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\,\pi + 4\right) = \frac{3}{4}\,\pi + 2 = 4{,}3562$$

Flächeninhalt: $A = \dfrac{3}{4}\,\pi + 2 = 4{,}3562$

F26

$r = \sqrt{2 - \cos\varphi}\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

Berechnen Sie die von dieser Kurve eingeschlossene *Fläche* A (r und φ sind Polarkoordinaten).

Bild F-24 zeigt den Verlauf der *geschlossenen* und zur x-Achse *symmetrischen* Kurve. Wir beschränken uns daher bei der Integration auf das *oberhalb* der x-Achse gelegene Flächenstück:

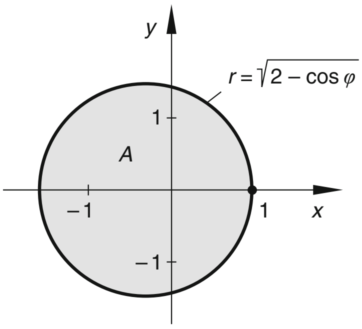


Bild F-24

Integrationsbereich:

r-Integration: von $r = 0$ bis $r = \sqrt{2 - \cos\varphi}$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$

Doppelintegral für den Flächeninhalt A

$$A = \iint_{(A)} dA = 2 \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{2-\cos\varphi}} r\,dr\,d\varphi \qquad (\text{Flächenelement } dA = r\,dr\,d\varphi)$$

Innere Integration (nach der Variablen r*)*

$$\int_{r=0}^{\sqrt{2-\cos\varphi}} r\,dr = \left[\frac{1}{2}\,r^2\right]_{r=0}^{\sqrt{2-\cos\varphi}} = \frac{1}{2}\,(2 - \cos\varphi) - 0 = \frac{1}{2}\,(2 - \cos\varphi)$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ*)*

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi} (2 - \cos\varphi)\,d\varphi = \left[2\varphi - \sin\varphi\right]_0^{\pi} = 2\pi - \underbrace{\sin\pi}_{0} - 0 + \underbrace{\sin 0}_{0} = 2\pi$$

Flächeninhalt: $A = 2\pi$

F27

Berechnen Sie das *Flächenträgheitsmoment* I_x der in Bild F-25 dargestellten Kreissektorfläche bezüglich der Symmetrieachse. Welches Ergebnis erhält man für einen *Vollkreis*?

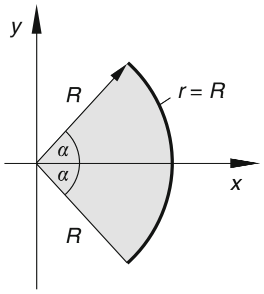


Bild F-25

Die *Integrationsgrenzen* lauten (bei Beschränkung auf den 1. Quadranten wegen der *Spiegelsymmetrie* zur x-Achse):

r-Integration: von $r = 0$ bis $r = R$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \alpha$

Doppelintegral für das Flächenträgheitsmoment I_x

$$I_x = \iint_{(A)} y^2 \, dA = 2 \cdot \int_{\varphi=0}^{\alpha} \int_{r=0}^{R} r^3 \cdot \sin^2 \varphi \, dr \, d\varphi \qquad (y = r \cdot \sin \varphi, \; dA = r \, dr \, d\varphi)$$

(Transformationsgleichungen: $y = r \cdot \sin \varphi$, Flächenelement $dA = r \, dr \, d\varphi$)

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\int_{r=0}^{R} r^3 \cdot \sin^2 \varphi \, dr = \sin^2 \varphi \cdot \int_{r=0}^{R} r^3 \, dr = \sin^2 \varphi \cdot \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_{r=0}^{R} = \sin^2 \varphi \left(\frac{1}{4} R^4 - 0 \right) = \frac{1}{4} R^4 \cdot \sin^2 \varphi$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$I_x = 2 \cdot \frac{1}{4} R^4 \cdot \underbrace{\int_{\varphi=0}^{\alpha} \sin^2 \varphi \, d\varphi}_{\text{Integral 205 mit } a = 1} = \frac{1}{2} R^4 \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right]_0^{\alpha} = \frac{1}{2} R^4 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin(2\alpha)}{4} - 0 + \underbrace{\frac{\sin 0}{4}}_{0} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} R^4 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin(2\alpha)}{4} \right) = \frac{1}{8} R^4 (2\alpha - \sin(2\alpha))$$

Flächenträgheitsmoment I_x *des Kreissektors:* $I_x = \dfrac{1}{8} R^4 (2\alpha - \sin(2\alpha))$

Sonderfall: $2\alpha = 2\pi$ (Vollkreis)

$$I_x = \frac{1}{8} R^4 (2\pi - \sin(2\pi)) = \frac{1}{8} R^4 (2\pi - 0) = \frac{\pi}{4} R^4$$

F28

Der kreisförmige „Boden“ eines zylindrischen Körpers liegt in der x, y-Ebene und wird durch die Ungleichung $x^2 + y^2 \le 1$ beschrieben. Der „Deckel“ ist Teil der Fläche $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$. Berechnen Sie (mittels Doppelintegral) das *Zylindervolumen* V.

Die Fläche ist *rotationssymmetrisch* zur z-Achse, der „Boden“ des Zylinders *kreisförmig*. Wir verwenden daher zweckmäßigerweise *Polarkoordinaten*.

Integrationsbereich (Bild F-26):

$$0 \le r \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

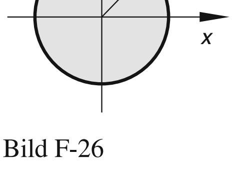


Bild F-26

Gleichung der Rotationsfläche in *Polarkoordinaten* ($x = r \cdot \cos \varphi$, $y = r \cdot \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = r^2$):

$$z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} = \frac{1}{\sqrt{4 - \underbrace{(x^2 + y^2)}_{r^2}}} = \frac{1}{\sqrt{4 - r^2}}$$

Doppelintegral für das Volumen V (in Polarkoordinaten)

$$V = \iint\limits_{(A)} z\,dA = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} \frac{1}{\sqrt{4-r^2}} \cdot r\,dr\,d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} \frac{r}{\sqrt{4-r^2}}\,dr\,d\varphi \qquad (dA = r\,dr\,d\varphi)$$

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\underbrace{\int\limits_{r=0}^{1} \frac{r}{\sqrt{4-r^2}}\,dr}_{\text{Integral 149 mit } a\,=\,2} = \left[-\sqrt{4-r^2}\right]_{r=0}^{1} = -\sqrt{3}+2 = 2-\sqrt{3}$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$V = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} (2-\sqrt{3})\,d\varphi = (2-\sqrt{3})\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = (2-\sqrt{3})\,(2\pi-0) = 2\,(2-\sqrt{3})\,\pi$$

Volumen: $V = 2\,(2-\sqrt{3})\,\pi = 1{,}6836$

F29 Die in Polarkoordinaten definierte Kurve $r = 2\sqrt{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$ bildet mit der x-Achse ein Flächenstück, dessen *Flächeninhalt* A und *Flächenträgheitsmoment* I_p bestimmt werden sollen.

Bild F-27 zeigt den Verlauf der Kurve im Intervall $0 \le \varphi \le \pi$. Für die Berechnung von *Flächeninhalt* A und *Flächenträgheitsmoment* I_p benötigen wir noch die *Integrationsgrenzen*. Sie lauten:

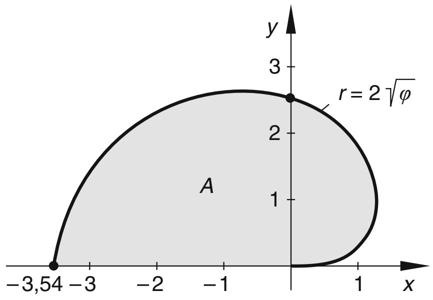


Bild F-27

r-Integration: $r = 0$ bis $r = 2\sqrt{\varphi}$

φ-Integration: $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$

Berechnung des Flächeninhaltes A

$$A = \iint\limits_{(A)} dA = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \int\limits_{r=0}^{2\sqrt{\varphi}} r\,dr\,d\varphi \qquad (\text{Flächenelement } dA = r\,dr\,d\varphi)$$

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\int\limits_{r=0}^{2\sqrt{\varphi}} r\,dr = \left[\frac{1}{2}\,r^2\right]_{r=0}^{2\sqrt{\varphi}} = 2\varphi - 0 = 2\varphi$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$A = \int_{\varphi=0}^{\pi} 2\varphi \, d\varphi = \left[\varphi^2\right]_0^{\pi} = \pi^2 - 0 = \pi^2$$

Flächeninhalt: $A = \pi^2$

Berechnung des Flächenträgheitsmomentes I_p

$$I_p = \iint\limits_{(A)} r^2 \, dA = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{2\sqrt{\varphi}} r^3 \, dr \, d\varphi \qquad (\text{Flächenelement } dA = r \, dr \, d\varphi)$$

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\int_{r=0}^{2\sqrt{\varphi}} r^3 \, dr = \left[\frac{1}{4} r^4\right]_{r=0}^{2\sqrt{\varphi}} = 4\varphi^2 - 0 = 4\varphi^2$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$I_p = 4 \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi} \varphi^2 \, d\varphi = 4\left[\frac{1}{3}\varphi^3\right]_0^{\pi} = 4\left(\frac{1}{3}\pi^3 - 0\right) = \frac{4}{3}\pi^3$$

Flächenträgheitsmoment: $I_p = \dfrac{4}{3}\pi^3$

F30

Wie groß ist das *polare Flächenträgheitsmoment* I_p einer Fläche, die von der Kurve $r = \sqrt{1 + \sin\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$ und der x-Achse berandet wird?

Das Flächenstück liegt *spiegelsymmetrisch* zur y-Achse (Bild F-28):

Integrationsbereich

r-Integration: von $r = 0$ bis $r = \sqrt{1 + \sin\varphi}$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$

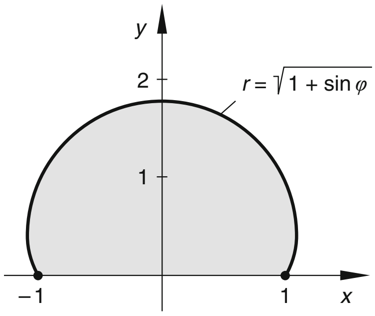


Bild F-28

Doppelintegral für das polare Flächenträgheitsmoment I_p (in Polarkoordinaten):

$$I_p = \iint\limits_{(A)} r^2 \, dA = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{1+\sin\varphi}} r^3 \, dr \, d\varphi \qquad (\text{Flächenelement } dA = r \, dr \, d\varphi)$$

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\int_{r=0}^{\sqrt{1+\sin\varphi}} r^3\,dr = \left[\frac{1}{4}\,r^4\right]_{r=0}^{\sqrt{1+\sin\varphi}} = \frac{1}{4}\,(1+\sin\varphi)^2 - 0 = \frac{1}{4}\,(1 + 2\cdot\sin\varphi + \sin^2\varphi)$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$I_p = \frac{1}{4}\cdot\int_{\varphi=0}^{\pi} (1 + 2\cdot\sin\varphi + \underbrace{\sin^2\varphi}_{\text{Integral 205 mit } a\,=\,1})\,d\varphi = \frac{1}{4}\left[\varphi - 2\cdot\cos\varphi + \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}\,\varphi - 2\cdot\cos\varphi - \frac{1}{4}\cdot\sin(2\varphi)\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}\,\pi - 2\cdot\underbrace{\cos\pi}_{-1} - \frac{1}{4}\cdot\underbrace{\sin(2\pi)}_{0} - 0 + 2\cdot\underbrace{\cos 0}_{1} + \frac{1}{4}\cdot\underbrace{\sin 0}_{0}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\,\pi + 2 + 2\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\,\pi + 4\right) = \frac{3}{8}\,\pi + 1 = 2{,}1781$$

Polares Flächenträgheitsmoment: $I_p = 2{,}1781$

F31

Welches *polare Flächenträgheitsmoment* I_p liefert die von der Kurve $r = 2\cdot\sqrt{\cos(3\varphi)}$, $-\pi/6 \le \varphi \le \pi/6$ umschlossene Fläche (Bild F-29)?

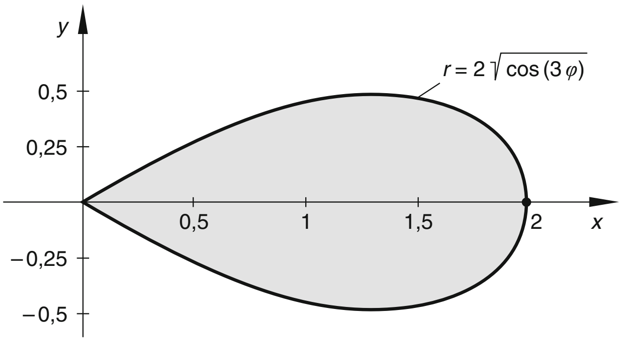


Bild F-29

Integrationsbereich (wir beschränken uns wegen der Spiegelsymmetrie zur x-Achse auf den 1. Quadranten):

r-Integration: von $r = 0$ bis $r = 2\cdot\sqrt{\cos(3\varphi)}$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi/6$

Doppelintegral für das polare Flächenträgheitsmoment I_p

$$I_p = \iint_{(A)} r^2\,dA = 2\cdot\int_{\varphi=0}^{\pi/6}\int_{r=0}^{2\cdot\sqrt{\cos(3\varphi)}} r^3\,dr\,d\varphi \qquad (\text{Flächenelement } dA = r\,dr\,d\varphi)$$

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\int_{r=0}^{2\cdot\sqrt{\cos(3\varphi)}} r^3\,dr = \left[\frac{1}{4}\,r^4\right]_{r=0}^{2\cdot\sqrt{\cos(3\varphi)}} = \frac{1}{4}\cdot 16\cdot\cos^2(3\varphi) - 0 = 4\cdot\cos^2(3\varphi)$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$I_p = 2\cdot 4\cdot\underbrace{\int_{\varphi=0}^{\pi/6}\cos^2(3\varphi)\,d\varphi}_{\text{Integral 229 mit } a\,=\,3} = 8\left[\frac{\varphi}{2}+\frac{\sin(6\varphi)}{12}\right]_0^{\pi/6} = 8\left(\frac{\pi}{12}+\underbrace{\frac{\sin\pi}{12}}_{0} - 0 - \underbrace{\frac{\sin 0}{12}}_{0}\right) = 8\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2}{3}\,\pi$$

Polares Flächenträgheitsmoment: $I_p = \frac{2}{3}\,\pi$

F32

Oberhalb des in Polarkoordinaten dargestellten Kreises $r = 2\cdot\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi$ der x, y-Ebene liegt die Fläche $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Berechnen Sie das *Volumen* V des „Zylinders", der von diesen Flächen unten und oben begrenzt wird.

Der „Boden" entspricht der in Bild F-30 dargestellten Kreisfläche (Integrationsbereich). Die *Integrationsgrenzen* sind:

r-Integration: von $r = 0$ bis $r = 2\cdot\sin\varphi$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$

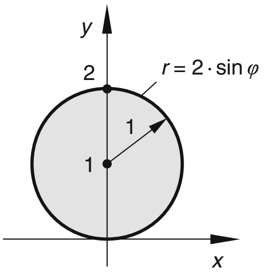


Bild F-30

Die Fläche („Deckel" des Zylinders) besitzt in *Polarkoordinaten* die folgende Gleichung (Transformationsgleichungen: $x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$):

$$z = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2\cdot\cos^2\varphi + r^2\cdot\sin^2\varphi} =$$

$$= \sqrt{r^2\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{1}} = r$$

(unter Verwendung des „trigonometrischen Pythagoras" $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$)

Doppelintegral für das Volumen V in Polarkoordinaten

$$V = \iint_{(A)} z\,dA = \int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{r=0}^{2\cdot\sin\varphi} r\cdot r\,dr\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{r=0}^{2\cdot\sin\varphi} r^2\,dr\,d\varphi \qquad (\text{Flächenelement } dA = r\,dr\,d\varphi)$$

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\int_{r=0}^{2\cdot\sin\varphi} r^2\,dr = \left[\frac{1}{3}\,r^3\right]_{r=0}^{2\cdot\sin\varphi} = \frac{8}{3}\cdot\sin^3\varphi - 0 = \frac{8}{3}\cdot\sin^3\varphi$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$V = \frac{8}{3} \cdot \underbrace{\int\limits_{\varphi = 0}^{\pi} \sin^3 \varphi \, d\varphi}_{\text{Integral 206 mit } a = 1} = \frac{8}{3} \left[- \cos \varphi + \frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{8}{3} \left[- \cos \pi + \frac{\cos^3 \pi}{3} + \cos 0 - \frac{\cos^3 0}{3} \right] =$$

$$= \frac{8}{3} \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{32}{9}$$

Volumen: $V = 32/9$

F33

Bild F-31 zeigt den in der x, y-Ebene gelegenen „Boden“ eines Zylinders, dessen „Deckel“ Teil der Fläche $z = \mathrm{e}^{x^2 + y^2}$ ist.
Wie groß ist das *Zylindervolumen* V?

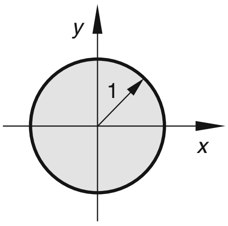


Bild F-31

Wir verwenden *Polarkoordinaten* (wegen der *Kreis-* bzw. *Rotationssymmetrie*). Der kreisförmige „Boden“ liefert den *Integrationsbereich* (siehe Bild F-30): $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Die Rotationsfläche bildet den „Deckel“ des zylindrischen Körpers, ihre Gleichung in *Polarkoordinaten* erhalten wir wie folgt (Transformationsgleichungen: $x = r \cdot \cos \varphi$, $y = r \cdot \sin \varphi$):

$$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \cos^2 \varphi + r^2 \cdot \sin^2 \varphi = r^2 \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{1} = r^2 \quad \Rightarrow \quad z = \mathrm{e}^{x^2 + y^2} = \mathrm{e}^{r^2}$$

(unter Verwendung des „trigonometrischen Pythagroas“ $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$)

Damit gilt für das gesuchte Volumen:

$$V = \iint\limits_{(A)} z \, dA = \int\limits_{\varphi = 0}^{2\pi} \int\limits_{r = 0}^{1} \mathrm{e}^{r^2} \cdot r \, dr \, d\varphi \qquad (\text{Flächenelement } dA = r \, dr \, d\varphi)$$

Innere Integration (nach der Variablen *r*)

Wir lösen das innere Integral mit Hilfe der folgenden *Substitution*:

$$u = r^2, \quad \frac{du}{dr} = 2r, \quad dr = \frac{du}{2r}, \qquad \text{Grenzen} \begin{cases} \text{unten: } r = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0 \\ \text{oben: } r = 1 \quad \Rightarrow \quad u = 1 \end{cases}$$

$$\int\limits_{r = 0}^{1} \mathrm{e}^{r^2} \cdot r \, dr = \int\limits_{u = 0}^{1} \mathrm{e}^{u} \cdot r \cdot \frac{du}{2r} = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{u = 0}^{1} \mathrm{e}^{u} \, du = \frac{1}{2} \left[\mathrm{e}^{u} \right]_{u = 0}^{1} = \frac{1}{2} (\mathrm{e}^{1} - \mathrm{e}^{0}) = \frac{1}{2} (\mathrm{e} - 1)$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$V = \frac{1}{2} (\mathrm{e} - 1) \cdot \int\limits_{\varphi = 0}^{2\pi} 1 \, d\varphi = \frac{1}{2} (\mathrm{e} - 1) \left[\varphi \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} (\mathrm{e} - 1) (2\pi - 0) = (\mathrm{e} - 1) \pi$$

Volumen: $V = (\mathrm{e} - 1) \pi = 5{,}398$

2 Dreifachintegrale

In diesem Abschnitt finden Sie (fast) ausschließlich *anwendungsorientierte* Aufgaben zu folgenden Themen:

- Volumen und Masse „zylindrischer" Körper
- Schwerpunkt eines homogenen Körpers
- Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers

Verwendet werden sowohl kartesische Koordinaten (Abschnitt 2.1) als auch Zylinderkoordinaten (Abschnitt 2.2).

Hinweise

Lehrbuch: Band 2, Kapitel III.3.2

Formelsammlung: Kapitel IX.3.2

2.1 Dreifachintegrale in kartesischen Koordinaten

Alle Aufgaben in diesem Abschnitt sollen mit Hilfe von *Dreifachintegralen* unter Verwendung *kartesischer Koordinaten* gelöst werden.

Hinweise

Lehrbuch: Band 2, Kapitel III.3.2.2.1 und 3.2.3

Formelsammlung: Kapitel IX.3.2.2 und 3.2.5

F34

$$I = \int_{x=0}^{\pi} \int_{y=0}^{\pi/2} \int_{z=0}^{1} \cos(x+y) \cdot e^{3z} \, dz \, dy \, dx = ?$$

Dieses Dreifachintegral wird durch drei *nacheinander* auszuführende *gewöhnliche* Integrationen gelöst. Wir integrieren in der Reihenfolge z, y und x (wegen der *konstanten* Integrationsgrenzen darf hier sogar in *beliebiger* Reihenfolge integriert werden).

1. Integrationsschritt (Integration nach z)

$$\int_{z=0}^{1} \cos(x+y) \cdot e^{3z} \, dz = \cos(x+y) \cdot \underbrace{\int_{z=0}^{1} e^{3z} \, dz}_{\text{Integral 312 mit } a\,=\,3} = \cos(x+y) \cdot \left[\frac{e^{3z}}{3} \right]_{z=0}^{1} =$$

$$= \cos(x+y) \cdot \frac{1}{3} \left[e^{3z} \right]_{z=0}^{1} = \cos(x+y) \cdot \frac{1}{3} (e^3 - e^0) = \frac{1}{3} (e^3 - 1) \cdot \cos(x+y)$$

2. Integrationsschritt (Integration nach y)

Dieser Integrationsschritt gelingt mit der folgenden *Substitution*:

$$u = x + y, \quad \frac{du}{dy} = 1, \quad dy = du, \qquad \text{Grenzen} \begin{cases} \text{unten: } y = 0 & \Rightarrow \quad u = x \\ \text{oben: } y = \pi/2 & \Rightarrow \quad u = x + \pi/2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{3}(e^3-1)\cdot\int\limits_{y=0}^{\pi/2}\cos(x+y)\,dy=\frac{1}{3}(e^3-1)\cdot\int\limits_{u=x}^{x+\pi/2}\cos u\,du=\frac{1}{3}(e^3-1)\left[\sin u\right]_{u=x}^{x+\pi/2}=$$

$$=\frac{1}{3}(e^3-1)\,[\underbrace{\sin(x+\pi/2)}_{\cos x}-\sin x]=\frac{1}{3}(e^3-1)(\cos x-\sin x)$$

3. Integrationsschritt (Integration nach x)

$$I=\frac{1}{3}(e^3-1)\cdot\int\limits_{x=0}^{\pi}(\cos x-\sin x)\,dx=\frac{1}{3}(e^3-1)\left[\sin x+\cos x\right]_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{3}(e^3-1)(\underbrace{\sin\pi}_{0}+\underbrace{\cos\pi}_{-1}-\underbrace{\sin 0}_{0}-\underbrace{\cos 0}_{1})=\frac{1}{3}(e^3-1)(-2)=\frac{2}{3}(1-e^3)$$

Ergebnis: $I=\frac{2}{3}(1-e^3)=-12{,}7237$

F35

Welches *Volumen* V hat ein Zylinder mit der in Bild F-32 skizzierten „Bodenfläche“, der oben durch die Ebene $z=5-x-y$ begrenzt wird?

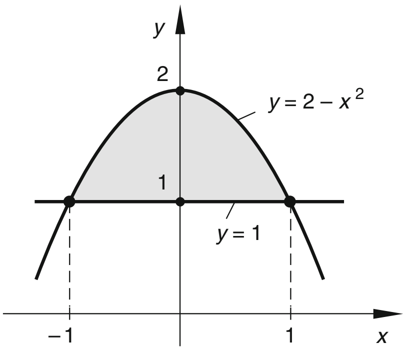


Bild F-32

Der „Boden“ des Zylinders (*grau* unterlegte Fläche im Bild) ist Teil der x, y-Ebene $z=0$, der „Deckel“ Teil der Ebene $z=5-x-y$. Der Integrationsbereich in der x, y-Ebene wird *unten* durch die Gerade $y=1$ und *oben* durch die Parabel $y=2-x^2$ berandet, wobei sich die x-Werte zwischen $x=-1$ und $x=1$ bewegen (*Schnittstellen* der beiden Kurven, berechnet aus der Gleichung $2-x^2=1$). Damit ergeben sich folgende *Integrationsgrenzen*:

z-Integration: von $z=0$ bis $z=5-x-y$

y-Integration: von $y=1$ bis $y=2-x^2$

x-Integration: von $x=-1$ bis $x=1$

Das *Volumenintegral* lautet dann:

$$V=\iiint\limits_{(V)}dV=\int\limits_{x=-1}^{1}\int\limits_{y=1}^{2-x^2}\int\limits_{z=0}^{5-x-y}1\,dz\,dy\,dx\qquad(\text{Volumenelement } dV=dz\,dy\,dx)$$

Wir integrieren also in der Reihenfolge z, y und x.

1. Integrationsschritt (Integration nach z)

$$\int\limits_{z=0}^{5-x-y}1\,dz=\left[z\right]_{z=0}^{5-x-y}=(5-x-y)-0=5-x-y$$

2. Integrationsschritt (Integration nach y)

$$\int_{y=1}^{2-x^2} (5 - x - y)\,dy = \left[5y - xy - \frac{1}{2}\,y^2\right]_{y=1}^{2-x^2} =$$

$$= 5(2 - x^2) - x(2 - x^2) - \frac{1}{2}\,(2 - x^2)^2 - 5 + x + \frac{1}{2} =$$

$$= 10 - 5x^2 - 2x + x^3 - 2 + 2x^2 - \frac{1}{2}\,x^4 - 5 + x + \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,x^4 + x^3 - 3x^2 - x + \frac{7}{2}$$

3. Integrationsschritt (Integration nach x)

$$V = \int_{x=-1}^{1} \left(-\frac{1}{2}\,x^4 + x^3 - 3x^2 - x + \frac{7}{2}\right) dx = \left[-\frac{1}{10}\,x^5 + \frac{1}{4}\,x^4 - x^3 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{7}{2}\,x\right]_{-1}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{10} + \frac{1}{4} - 1 \underbrace{- \frac{1}{2} + \frac{7}{2}}_{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{4} - 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{7}{2}}_{4} = -\frac{1}{5} + 5 = \frac{24}{5}$$

Volumen: $V = 24/5 = 4{,}8$

F36

Die Projektion eines „zylindrischen“ Körpers in die x, y-Ebene führt auf den in Bild F-33 skizzierten Bereich. Der „Boden“ des Zylinders liegt in der Ebene $z = 1$, der „Deckel“ ist Teil der Fläche $z = x^2 + y + 2$.
Bestimmen Sie das *Zylindervolumen* V.

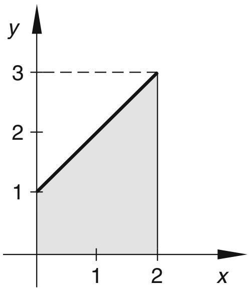


Bild F-33

Der *trapezförmige* „Boden“ liegt in der zur x, y-Ebene parallelen Ebene $z = 1$, der „Deckel“ ist Teil der Fläche $z = x^2 + y + 2$. Der *Integrationsbereich* in der x, y-Ebene (siehe Bild F-33) wird in der y-Richtung von der x-Achse $y = 0$ (unten) und der Geraden $y = x + 1$ (oben) begrenzt, seitlich durch die y-Achse $x = 0$ und die dazu Parallele $x = 2$. Damit ergeben sich folgende *Integrationsgrenzen* für das *Volumenintegral*:

z-Integration: von $z = 1$ bis $z = x^2 + y + 2$

y-Integration: von $y = 0$ bis $y = x + 1$

x-Integration: von $x = 0$ bis $x = 2$

Das *Volumenintegral* lautet damit:

$$V = \iiint_{(V)} dV = \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{x+1} \int_{z=1}^{x^2+y+2} 1\,dz\,dy\,dx \qquad (\text{Volumenelement } dV = dz\,dy\,dx)$$

Die Integration wird in der bekannten Weise schrittweise von innen nach außen durchgeführt:

1. Integrationsschritt (Integration nach z)

$$\int_{z=1}^{x^2+y+2} 1\,dz = \left[z\right]_{z=1}^{x^2+y+2} = (x^2+y+2)-1 = x^2+y+1$$

2. Integrationsschritt (Integration nach y)

$$\int_{y=0}^{x+1} (x^2+y+1)\,dy = \left[x^2 y + \frac{1}{2}\,y^2 + y\right]_{y=0}^{x+1} = x^2(x+1) + \frac{1}{2}\,(x+1)^2 + x + 1 - 0 - 0 - 0 =$$

$$= x^3 + x^2 + \frac{1}{2}\,x^2 + x + \frac{1}{2} + x + 1 = x^3 + \frac{3}{2}\,x^2 + 2x + \frac{3}{2}$$

3. Integrationsschritt (Integration nach x)

$$V = \int_{x=0}^{2} \left(x^3 + \frac{3}{2}\,x^2 + 2x + \frac{3}{2}\right) dx = \left[\frac{1}{4}\,x^4 + \frac{1}{2}\,x^3 + x^2 + \frac{3}{2}\,x\right]_0^2 =$$

$$= 4 + 4 + 4 + 3 - 0 - 0 - 0 - 0 = 15$$

Volumen: $V = 15$

F37 Die Ebene $x + y + z = 6$ bzw. $z = 6 - x - y$ bildet mit den drei Koordinatenebenen eine gleichseitige Pyramide. Bestimmen Sie das *Volumen* V und den *Schwerpunkt* S dieser Pyramide.

Der „Boden“ der in Bild F-34 skizzierten Pyramide ist Teil der x, y-Ebene $z = 0$, der „Deckel“ liegt in der Ebene $z = 6 - x - y$. Die Bodenfläche (*grau* unterlegt) wird in der y-Richtung durch die x-Achse $y = 0$ und die Gerade $y = 6 - x$ begrenzt. Diese Gerade ist die *Schnittlinie* der Ebene $z = 6 - x - y$ mit der x, y-Ebene $z = 0$:

$$z = 6 - x - y = 0 \quad\Rightarrow\quad y = 6 - x$$

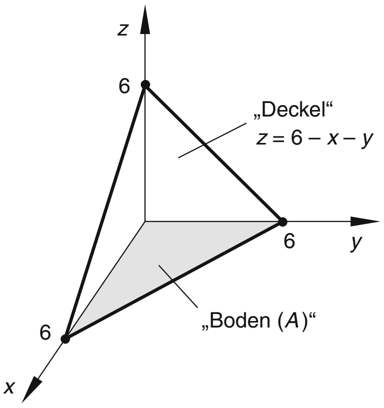


Bild F-34

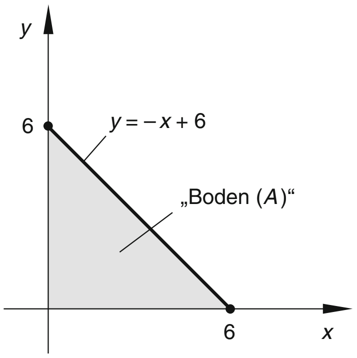


Bild F-35

Die x-Werte bewegen sich dabei zwischen $x = 0$ und $x = 6$ (Bild F-35). Damit liegen die *Integrationsgrenzen* für die Dreifachintegrale eindeutig fest:

z-Integration: von $z = 0$ bis $z = 6 - x - y$

y-Integration: von $y = 0$ bis $y = 6 - x$

x-Integration: von $x = 0$ bis $x = 6$

Berechnung des Volumens V

$$V = \iiint\limits_{(V)} dV = \int\limits_{x=0}^{6} \int\limits_{y=0}^{6-x} \int\limits_{z=0}^{6-x-y} 1 \, dz \, dy \, dx \qquad \text{(Volumenelement } dV = dz \, dy \, dx)$$

1. Integrationsschritt (Integration nach z)

$$\int\limits_{z=0}^{6-x-y} 1 \, dz = \left[z \right]_{z=0}^{6-x-y} = (6 - x - y) - 0 = 6 - x - y$$

2. Integrationsschritt (Integration nach y)

$$\int\limits_{y=0}^{6-x} (6 - x - y) \, dy = \left[6y - xy - \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{6-x} = 6(6 - x) - x(6 - x) - \frac{1}{2} (6 - x)^2 - 0 - 0 - 0 =$$

$$= 36 - 6x - 6x + x^2 - 18 + 6x - \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{2} x^2 - 6x + 18$$

3. Integrationsschritt (Integration nach x)

$$V = \int\limits_{x=0}^{6} \left(\frac{1}{2} x^2 - 6x + 18 \right) dx = \left[\frac{1}{6} x^3 - 3x^2 + 18x \right]_0^6 = 36 - 108 + 108 - 0 - 0 - 0 = 36$$

Volumen: $V = 36$

Berechnung des Schwerpunktes $S = (x_S;\, y_S;\, z_S)$

Da die Pyramide *gleichseitig* ist, gilt $x_S = y_S = z_S$. Wir berechnen x_S mit dem folgenden Dreifachintegral:

$$x_S = \frac{1}{V} \cdot \iiint\limits_{(V)} dV = \frac{1}{36} \cdot \int\limits_{x=0}^{6} \int\limits_{y=0}^{6-x} \int\limits_{z=0}^{6-x-y} x \, dz \, dy \, dx \qquad \text{(Volumenelement } dV = dz \, dy \, dx)$$

1. Integrationsschritt (Integration nach z)

$$\int\limits_{z=0}^{6-x-y} x \, dz = x \cdot \int\limits_{z=0}^{6-x-y} 1 \, dz = x \left[z \right]_{z=0}^{6-x-y} = x \left[(6 - x - y) - 0 \right] = 6x - x^2 - xy$$

2. Integrationsschritt (Integration nach y)

$$\int\limits_{y=0}^{6-x} (6x - x^2 - xy) \, dy = \left[6xy - x^2 y - \frac{1}{2} xy^2 \right]_{y=0}^{6-x} =$$

$$= 6x(6 - x) - x^2 (6 - x) - \frac{1}{2} x (6 - x)^2 - 0 - 0 - 0 =$$

$$= 36x - 6x^2 - 6x^2 + x^3 - 18x + 6x^2 - \frac{1}{2} x^3 = \frac{1}{2} x^3 - 6x^2 + 18x$$

3. Integrationsschritt (Integration nach x)

$$x_S = \frac{1}{36} \cdot \int\limits_{x=0}^{6} \left(\frac{1}{2} x^3 - 6x^2 + 18x \right) dx = \frac{1}{36} \left[\frac{1}{8} x^4 - 2x^3 + 9x^2 \right]_0^6 =$$

$$= \frac{1}{36} (162 - 432 + 324 - 0 - 0 - 0) = \frac{1}{36} \cdot 54 = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Schwerpunkt: $S = (1{,}5;\; 1{,}5;\; 1{,}5)$

F38

Der „Boden“ eines Zylinders besitzt die in Bild F-36 dargestellte dreieckige Form, der „Deckel“ ist Teil der Fläche $z = x^2 y$. Berechnen Sie das *Volumen* V des zylindrischen Körpers.

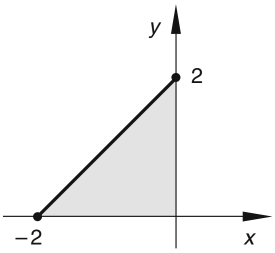


Bild F-36

Der „zylindrische“ Körper wird *oben* durch die Fläche $z = x^2 y$ („Deckel“) und *unten* durch die in der x, y-Ebene $z = 0$ liegende Dreiecksfläche („Boden“) begrenzt. Den *Integrationsbereich* in der x, y-Ebene entnehmen wir Bild F-36: Die *untere* Berandung ist die x-Achse $(y = 0)$, die *obere* Randkurve die Gerade $y = x + 2$, die x-Werte bewegen sich dabei zwischen $x = -2$ und $x = 0$. Damit ergeben sich die folgenden *Integrationsgrenzen* für das *Volumenintegral*:

z-Integration: von $z = 0$ bis $z = x^2 y$

y-Integration: von $y = 0$ bis $y = x + 2$

x-Integration: von $x = -2$ bis $x = 0$

Das *Volumenintegral* lautet dann:

$$V = \iiint\limits_{(V)} dV = \int\limits_{x=-2}^{0} \int\limits_{y=0}^{x+2} \int\limits_{z=0}^{x^2 y} 1 \, dz \, dy \, dx \qquad (\text{Volumenelement } dV = dz \, dy \, dx)$$

Wir berechnen dieses Dreifachintegral *schrittweise* wie folgt (Integrationsreihenfolge: $z \rightarrow y \rightarrow x$):

1. Integrationsschritt (Integration nach z)

$$\int\limits_{z=0}^{x^2 y} 1 \, dz = \left[z \right]_{z=0}^{x^2 y} = x^2 y - 0 = x^2 y$$

2. Integrationsschritt (Integration nach y)

$$\int\limits_{y=0}^{x+2} x^2 y \, dy = x^2 \cdot \int\limits_{y=0}^{x+2} y \, dy = x^2 \left[\frac{1}{2} \, y^2 \right]_{y=0}^{x+2} = x^2 \left[\frac{1}{2} \, (x+2)^2 - 0 \right] = \frac{1}{2} \, x^2 (x+2)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \, x^2 (x^2 + 4x + 4) = \frac{1}{2} \, (x^4 + 4x^3 + 4x^2)$$

3. Integrationsschritt (Integration nach x)

$$V = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{x=-2}^{0} (x^4 + 4x^3 + 4x^2) \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5} \, x^5 + x^4 + \frac{4}{3} \, x^3 \right]_{-2}^{0} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(0 + 0 + 0 + \frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{96 - 240 + 160}{5 \cdot 3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{15} = \frac{8}{15}$$

Volumen: $V = 8/15$

F39

Berechnen Sie das *Massenträgheitsmoment* J des in Bild F-37 skizzierten keilförmigen Körpers aus einem homogenen Material mit der Dichte $\varrho = 3$. Bezugsachse ist die z-Achse.

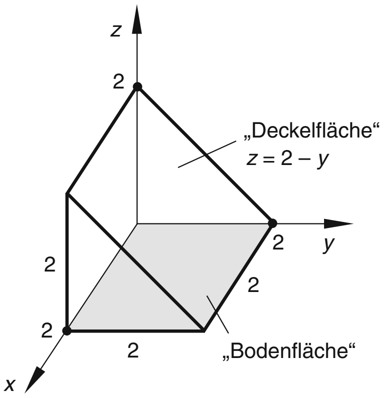


Bild F-37

Der quadratische „Boden“ ist Teil der x, y-Ebene $z = 0$, die *obere* Begrenzung („Deckel“) Teil der Ebene $z = 2 - y$. Der Integrationsbereich in der x, y-Ebene („Bodenfläche“ des Keils) ist das achsenparallele Quadrat $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$ (Bild F-38). Damit haben wir folgende *Integrationsgrenzen*:

z-Integration: von $z = 0$ bis $z = 2 - y$

y-Integration: von $y = 0$ bis $y = 2$

x-Integration: von $x = 0$ bis $x = 2$

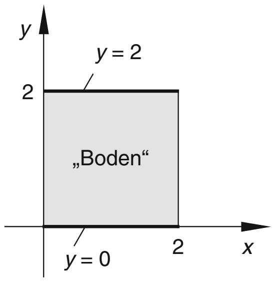


Bild F-38

Das Dreifachintegral für das *Massenträgheitsmoment* J_z des keilförmigen Körpers bezüglich der z-Achse lautet damit (Volumenelement $dV = dz\,dy\,dx$):

$$J_z = \varrho \cdot \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2)\,dV = 3 \cdot \int\limits_{x=0}^{2} \int\limits_{y=0}^{2} \int\limits_{z=0}^{2-y} (x^2 + y^2)\,dz\,dy\,dx$$

1. Integrationsschritt (Integration nach z)

$$\int\limits_{z=0}^{2-y} (x^2 + y^2)\,dz = (x^2 + y^2) \cdot \int\limits_{z=0}^{2-y} 1\,dz = (x^2 + y^2)\,\big[z\big]_{z=0}^{2-y} = (x^2 + y^2)\,[(2 - y) - 0] =$$

$$= (x^2 + y^2)(2 - y) = 2x^2 - x^2 y + 2y^2 - y^3$$

2. Integrationsschritt (Integration nach y)

$$\int\limits_{y=0}^{2} (2x^2 - x^2 y + 2y^2 - y^3)\,dy = \left[2x^2 y - \frac{1}{2}\,x^2 y^2 + \frac{2}{3}\,y^3 - \frac{1}{4}\,y^4\right]_{y=0}^{2} =$$

$$= 4x^2 - 2x^2 + \frac{16}{3} - 4 - 0 - 0 - 0 - 0 = 2x^2 + \frac{4}{3}$$

3. Integrationsschritt (Integration nach x)

$$J_z = 3 \cdot \int\limits_{x=0}^{2} \left(2x^2 + \frac{4}{3}\right) dx = 3\left[\frac{2}{3}\,x^3 + \frac{4}{3}\,x\right]_0^2 = 3\left(\frac{16}{3} + \frac{8}{3} - 0 - 0\right) = 3 \cdot \frac{24}{3} = 24$$

Massenträgheitsmoment: $J_z = 24$

2.2 Dreifachintegrale in Zylinderkoordinaten

Alle Aufgaben in diesem Abschnitt sollen mit Hilfe von *Dreifachintegralen* unter Verwendung von *Zylinderkoordinaten* gelöst werden.

Hinweise

Lehrbuch: Band 2, Kapitel III.3.2.2.2 und 3.2.3
Formelsammlung: Kapitel IX.3.2.3 und 3.2.5

F40

$$I = \int_{\varphi=\pi}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=r}^{r^2} rz \cdot \sin\varphi \, dz \, dr \, d\varphi = ?$$

Wir integrieren in der vorgegebenen Reihenfolge ($z \rightarrow r \rightarrow \varphi$):

1. Integrationsschritt (Integration nach z)

$$\int_{z=r}^{r^2} rz \cdot \sin\varphi \, dz = r \cdot \sin\varphi \cdot \int_{z=r}^{r^2} z \, dz = r \cdot \sin\varphi \left[\frac{1}{2} z^2\right]_{z=r}^{r^2} = \frac{1}{2} r \cdot \sin\varphi \left[z^2\right]_{z=r}^{r^2} =$$

$$= \frac{1}{2} r \cdot \sin\varphi \, (r^4 - r^2) = \frac{1}{2} \cdot \sin\varphi \, (r^5 - r^3)$$

2. Integrationsschritt (Integration nach r)

$$\frac{1}{2} \cdot \sin\varphi \cdot \int_{r=0}^{1} (r^5 - r^3) \, dr = \frac{1}{2} \cdot \sin\varphi \left[\frac{1}{6} r^6 - \frac{1}{4} r^4\right]_{r=0}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sin\varphi \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} - 0 + 0\right) = -\frac{1}{24} \cdot \sin\varphi$$

3. Integrationsschritt (Integration nach φ)

$$I = -\frac{1}{24} \cdot \int_{\varphi=\pi}^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi = -\frac{1}{24} \left[-\cos\varphi\right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{24} \left[\cos\varphi\right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{24} [\underbrace{\cos(2\pi)}_{1} - \underbrace{\cos\pi}_{-1}] = \frac{1}{12}$$

Ergebnis: $I = 1/12$

F41

Welches *Volumen* V hat ein Körper, der durch Drehung der Kurve $z = 1 + \cos x, \; 0 \le x \le \pi$ um die z-Achse entsteht?

Der Verlauf der rotierenden Kurve ist in Bild F-39 dargestellt, es entsteht der in Bild F-40 skizzierte *Rotationskörper*. Der kreisförmige „Boden“ des Körpers liegt in der x, y-Ebene $z = 0$ und lässt sich durch die Ungleichungen $0 \le r \le \pi$ und $0 \le \varphi \le 2\pi$ beschreiben. Der „Deckel“ dagegen ist Teil der Rotationsfläche $z = 1 + \cos r$ (die Kurve $z = 1 + \cos x$ erzeugt bei Drehung um die z-Achse die Rotationsfläche $z = 1 + \cos r$, in Zylinderkoordinaten ausgedrückt → Band 2, Kap. IV.3.2.2.2).

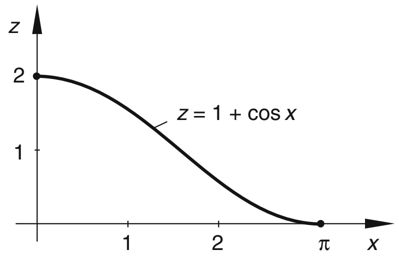


Bild F-39

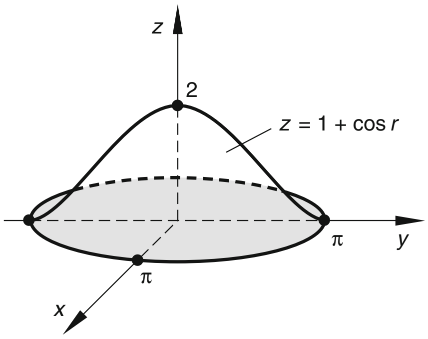


Bild F-40

Damit ergeben sich folgende *Integrationsgrenzen*:

z-Integration: von $z = 0$ bis $z = 1 + \cos r$

r-Integration: von $r = 0$ bis $r = \pi$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$

Das *Volumenintegral* lautet:

$$V = \iiint\limits_{(V)} dV = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{\pi} \int\limits_{z=0}^{1+\cos r} r\, dz\, dr\, d\varphi \qquad (\text{Volumenelement } dV = r\, dz\, dr\, d\varphi)$$

Wir integrieren der Reihe nach über z, r und φ.

1. Integrationsschritt (Integration nach z)

$$\int\limits_{z=0}^{1+\cos r} r\, dz = r \cdot \int\limits_{z=0}^{1+\cos r} 1\, dz = r\left[z\right]_{z=0}^{1+\cos r} = r\left[(1+\cos r) - 0\right] = r(1+\cos r) = r + r \cdot \cos r$$

2. Integrationsschritt (Integration nach r)

$$\int\limits_{r=0}^{\pi} (r + \underbrace{r \cdot \cos r}_{\text{Integral 232 mit } a = 1})\, dr = \left[\frac{1}{2}\, r^2 + \cos r + r \cdot \sin r\right]_{r=0}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\pi^2 + \underbrace{\cos\pi}_{-1} + \pi \cdot \underbrace{\sin\pi}_{0} - 0 - \underbrace{\cos 0}_{1} - 0 = \frac{1}{2}\,\pi^2 - 2$$

3. Integrationsschritt (Integration nach φ)

$$V = \left(\frac{1}{2}\,\pi^2 - 2\right) \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} 1\, d\varphi = \left(\frac{1}{2}\,\pi^2 - 2\right)\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \left(\frac{1}{2}\,\pi^2 - 2\right)(2\pi - 0) = \pi(\pi^2 - 4)$$

Volumen: $V = \pi(\pi^2 - 4) = 18{,}4399$

F42

Die durch den Kreis $x^2 + z^2 = 2$ und die Parabel $z = x^2$ begrenzte Fläche erzeugt bei Drehung um die z-Achse einen Rotationskörper, dessen *Volumen* V zu bestimmen ist. Welche *Masse* m hat dieser Körper, wenn er mit einem homogenen Material der Dichte $\varrho = 2$ gefüllt wird?

Wir berechnen zunächst die *Kurvenschnittpunkte* (Bild F-41):

$$x^2 + z^2 = z + z^2 = 2 \quad \Rightarrow$$

$$z^2 + z - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 1$$

(die *negative* Lösung scheidet aus)

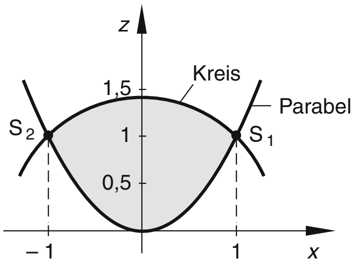


Bild F-41

Zugehörige x-Werte: $x^2 = z_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm 1$

Schnittpunkte: $S_{1/2} = (\pm 1;\, 1)$

Bei Drehung um die z-Achse erzeugen Normalparabel und Halbkreis folgende *Rotationsflächen* $(x \rightarrow r)$:

$$z = x^2 \quad \rightarrow \quad z = r^2 \qquad \text{(Mantelfläche des Rotationsparaboloids)}$$

$$x^2 + z^2 = 2 \quad \rightarrow \quad r^2 + z^2 = 2 \quad \text{oder} \quad z = \sqrt{2 - r^2} \qquad \text{(Oberfläche der } \textit{oberen} \text{ Halbkugel)}$$

Diese Flächen begrenzen den Rotationskörper *unten* bzw. *oben*. Sie schneiden sich in der zur x, y-Ebene parallelen Ebene $z = 1$ längs eines *Kreises* mit dem Radius $R = 1$ (siehe auch Bild F-41). Damit ergeben sich die folgenden *Integrationsgrenzen* für das *Volumenintegral*:

z-Integration: von $z = r^2$ bis $z = \sqrt{2 - r^2}$

r-Integration: von $r = 0$ bis $r = 1$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$

(die Projektion der beiden Rotationsflächen in die x, y-Ebene ergibt die *Kreisfläche* $0 \le r \le 1$ und $0 \le \varphi \le 2\pi$).

Das *Volumenintegral* lautet:

$$V = \iiint\limits_{(V)} dV = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} \int\limits_{z=r^2}^{\sqrt{2-r^2}} r\, dz\, dr\, d\varphi \qquad \text{(Volumenelement } dV = r\, dz\, dr\, d\varphi)$$

Wir integrieren *nacheinander* über z, r und φ.

1. Integrationsschritt (Integration nach z)

$$\int\limits_{z=r^2}^{\sqrt{2-r^2}} r\, dz = r \cdot \int\limits_{z=r^2}^{\sqrt{2-r^2}} 1\, dz = r \big[z \big]_{z=r^2}^{\sqrt{2-r^2}} = r(\sqrt{2 - r^2} - r^2) = r \cdot \sqrt{2 - r^2} - r^3$$

2. Integrationsschritt (Integration nach r)

$$\int\limits_{r=0}^{1} (\underbrace{r \cdot \sqrt{2 - r^2}}_{\text{Integral 142 mit } a^2 = 2} - r^3)\, dr = \left[-\frac{1}{3} \sqrt{(2 - r^2)^3} - \frac{1}{4} r^4 \right]_{r=0}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{2} - 0 = \frac{-4 - 3 + 8\sqrt{2}}{3 \cdot 4} = \frac{8\sqrt{2} - 7}{12}$$

3. Integrationsschritt (Integration nach φ)

$$V = \frac{8\sqrt{2} - 7}{12} \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} 1\, d\varphi = \frac{8\sqrt{2} - 7}{12} \big[\varphi \big]_0^{2\pi} = \frac{8\sqrt{2} - 7}{12} (2\pi - 0) = \frac{(8\sqrt{2} - 7)\pi}{6}$$

Rotationsvolumen: $V = \dfrac{(8\sqrt{2} - 7)\pi}{6} = 2{,}2587$

Masse: $m = \varrho V = 2 \cdot 2{,}2587 = 4{,}5174$

F43 Skizzieren Sie das im 1. Quadranten gelegene Flächenstück, das durch die Kurven $z = 0{,}75\,x^2$, $z = 0{,}5\,x^2 + 1$ und $x = 0$ berandet wird. Welches *Rotationsvolumen* V entsteht bei Drehung dieser Fläche um die z-Achse?

Kurvenschnittpunkte:

$$0{,}75\,x^2 = 0{,}5\,x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad 0{,}25\,x^2 = 1 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 \qquad (\text{wegen } x > 0)$$

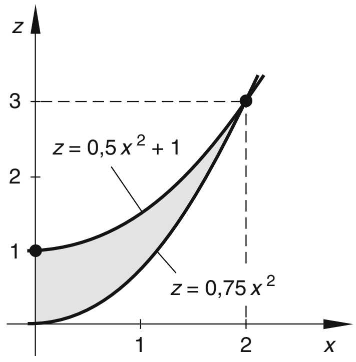


Bild F-42

Die in Bild F-42 skizzierte Fläche erzeugt bei Drehung um die z-Achse einen *Rotationskörper*, der unten und oben von den folgenden Rotationsflächen begrenzt wird $(x \rightarrow r)$:

untere Begrenzung („Boden“): $z = 0{,}75\,r^2$

obere Begrenzung („Deckel“): $z = 0{,}5\,r^2 + 1$

Projiziert man diese Flächen in die x, y-Ebene, so erhält man die *Kreisfläche* $0 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$. Damit sind die *Integrationsgrenzen* für das *Volumenintegral* festgelegt:

z-Integration: von $z = 0{,}75\,r^2$ bis $z = 0{,}5\,r^2 + 1$

r-Integration: von $r = 0$ bis $r = 2$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$

Volumenintegral

$$V = \iiint\limits_{(V)} dV = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{2} \int\limits_{z=0{,}75\,r^2}^{0{,}5\,r^2+1} r\,dz\,dr\,d\varphi \qquad (\text{Volumenelement } dV = r\,dz\,dr\,d\varphi)$$

1. Integrationsschritt (Integration nach z)

$$\int\limits_{z=0{,}75\,r^2}^{0{,}5\,r^2+1} r\,dz = r \cdot \int\limits_{z=0{,}75\,r^2}^{0{,}5\,r^2+1} 1\,dz = r\big[z\big]_{z=0{,}75\,r^2}^{0{,}5\,r^2+1} = r\,[(0{,}5\,r^2 + 1) - 0{,}75\,r^2] =$$

$$= r\,(1 - 0{,}25\,r^2) = r - 0{,}25\,r^3$$

2. Integrationsschritt (Integration nach r)

$$\int\limits_{r=0}^{2} (r - 0{,}25\,r^3)\,dr = \int\limits_{r=0}^{2} \left(r - \frac{1}{4}\,r^3\right) dr = \left[\frac{1}{2}\,r^2 - \frac{1}{16}\,r^4\right]_{r=0}^{2} = 2 - 1 - 0 - 0 = 1$$

3. Integrationsschritt (Integration nach φ)

$$V = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} 1\,d\varphi = \big[\varphi\big]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$$

Rotationsvolumen: $V = 2\pi$

F44

Die durch Rotation der Gauß-Kurve $z = \mathrm{e}^{-x^2}$ um die z-Achse entstandene Rotationsfläche bildet mit der Ebene $z = \text{const.} = \mathrm{e}^{-1}$ einen Rotationskörper, dessen *Volumen* V und *Schwerpunkt* S zu berechnen sind.

Die in Bild F-43 *grau* unterlegte Fläche zwischen der Gauß-Kurve $z = \mathrm{e}^{-x^2}$ und der zur x-Achse parallelen Geraden $z = \mathrm{e}^{-1}$ erzeugt bei Rotation um die z-Achse den *Rotationskörper.*

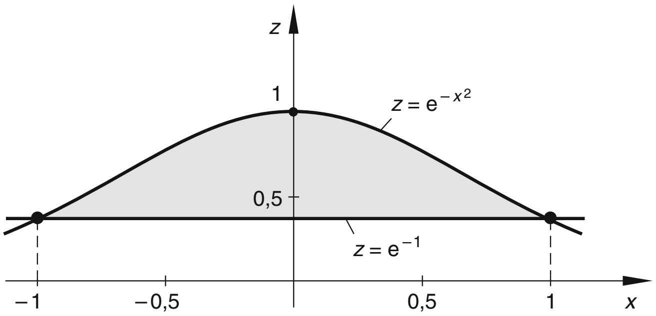


Bild F-43

Kurvenschnittpunkte: $\mathrm{e}^{-x^2} = \mathrm{e}^{-1} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm 1$

Der Rotationskörper wird *unten* bzw. *oben* durch die folgenden Flächen begrenzt:

untere Begrenzung („Boden“): $z = \mathrm{e}^{-1}$ (Ebene)

obere Begrenzung („Deckel“): $z = \mathrm{e}^{-r^2}$ (Rotationsfläche der Gauß-Kurve)

Beide Flächen liegen über dem *kreisförmigen* Integrationsbereich der x, y-Ebene, der durch die Ungleichungen $0 \le r \le 1, \; 0 \le \varphi \le 2\pi$ beschrieben wird. Die für die Dreifachintegration benötigten *Integrationsgrenzen* lauten damit:

z-Integration: von $z = \mathrm{e}^{-1}$ bis $z = \mathrm{e}^{-r^2}$

r-Integration: von $r = 0$ bis $r = 1$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$

Berechnung des Rotationsvolumens V

$$V = \iiint\limits_{(V)} dV = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} \int\limits_{z=\mathrm{e}^{-1}}^{\mathrm{e}^{-r^2}} r\,dz\,dr\,d\varphi \qquad (\text{Volumenelement } dV = r\,dz\,dr\,d\varphi)$$

1. Integrationsschritt (Integration nach z)

$$\int\limits_{z=\mathrm{e}^{-1}}^{\mathrm{e}^{-r^2}} r\,dz = r \cdot \int\limits_{z=\mathrm{e}^{-1}}^{\mathrm{e}^{-r^2}} 1\,dz = r\big[z\big]_{z=\mathrm{e}^{-1}}^{\mathrm{e}^{-r^2}} = r(\mathrm{e}^{-r^2} - \mathrm{e}^{-1}) = r \cdot \mathrm{e}^{-r^2} - \mathrm{e}^{-1} \cdot r$$

2. Integrationsschritt (Integration nach r)

$$\int\limits_{r=0}^{1} (r \cdot \mathrm{e}^{-r^2} - \mathrm{e}^{-1} \cdot r)\,dr = \underbrace{\int\limits_{r=0}^{1} (r \cdot \mathrm{e}^{-r^2}\,dr}_{I_1} - \mathrm{e}^{-1} \cdot \int\limits_{r=0}^{1} r\,dr =$$

$$= I_1 - \mathrm{e}^{-1}\left[\frac{1}{2}\,r^2\right]_{r=0}^{1} = I_1 - \mathrm{e}^{-1}\left(\frac{1}{2} - 0\right) = I_1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1}$$

Das Teilintegral I_1 lösen wir wie folgt durch *Substitution*:

$$u = -r^2, \quad \frac{du}{dr} = -2r, \quad dr = \frac{du}{-2r}, \qquad \text{Grenzen} \begin{cases} \text{unten: } r = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0 \\ \text{oben: } r = 1 \quad \Rightarrow \quad u = -1 \end{cases}$$

$$I_1 = \int\limits_{r=0}^{1} r \cdot e^{-r^2}\, dr = \int\limits_{u=0}^{-1} r \cdot e^{u} \cdot \frac{du}{-2r} = -\frac{1}{2} \cdot \int\limits_{0}^{-1} e^{u}\, du = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{-1}^{0} e^{u}\, du =$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^{u} \right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2} \left(e^{0} - e^{-1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-1} \right)$$

Somit gilt:

$$\int\limits_{r=0}^{1} \left(r \cdot e^{-r^2} - e^{-1} \cdot r \right) dr = I_1 - \frac{1}{2}\, e^{-1} = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-1} \right) - \frac{1}{2}\, e^{-1} = \frac{1}{2} \left(1 - 2e^{-1} \right)$$

3. Integrationsschritt (Integration nach φ)

$$V = \frac{1}{2} \left(1 - 2e^{-1} \right) \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} 1\, d\varphi = \frac{1}{2} \left(1 - 2e^{-1} \right) \left[\varphi \right]_{0}^{2\pi} = \frac{1}{2} \left(1 - 2e^{-1} \right) (2\pi - 0) = \left(1 - 2e^{-1} \right) \pi$$

Rotationsvolumen: $V = \left(1 - 2e^{-1} \right) \pi = 0{,}8301$

Berechnung des Schwerpunktes $S = (x_S;\ y_S;\ z_S)$

Wegen der *Rotationssymmetrie* liegt der Schwerpunkt S auf der *Rotationsachse* (z-Achse). Somit gilt $x_S = y_S = 0$. Die Höhenkoordinate z_S berechnen wir mit dem folgenden Dreifachintegral:

$$z_S = \frac{1}{V} \cdot \iiint\limits_{(V)} z\, dV = \frac{1}{\left(1 - 2e^{-1} \right) \pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} \int\limits_{z=e^{-1}}^{e^{-r^2}} z\, r\, dz\, dr\, d\varphi \qquad (dV = r\, dz\, dr\, d\varphi)$$

1. Integrationsschritt (nach der Variablen z)

$$\int\limits_{z=e^{-1}}^{e^{-r^2}} z\, r\, dz = r \cdot \int\limits_{z=e^{-1}}^{e^{-r^2}} z\, dz = r \left[\frac{1}{2}\, z^2 \right]_{z=e^{-1}}^{e^{-r^2}} = \frac{1}{2}\, r \left[z^2 \right]_{z=e^{-1}}^{e^{-r^2}} = \frac{1}{2}\, r \left(e^{-2r^2} - e^{-2} \right)$$

2. Integrationsschritt (Integration nach r)

$$\frac{1}{2} \cdot \int\limits_{r=0}^{1} r \left(e^{-2r^2} - e^{-2} \right) dr = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\int\limits_{r=0}^{1} r \cdot e^{-2r^2}\, dr}_{I_2} - \frac{1}{2}\, e^{-2} \cdot \int\limits_{r=0}^{1} r\, dr =$$

$$= \frac{1}{2}\, I_2 - \frac{1}{2}\, e^{-2} \left[\frac{1}{2}\, r^2 \right]_{r=0}^{1} = \frac{1}{2}\, I_2 - \frac{1}{2}\, e^{-2} \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2}\, I_2 - \frac{1}{4}\, e^{-2}$$

Das Teilintegral I_2 lösen wir (ähnlich wie vorher I_1) mit einer *Substitution* wie folgt:

$$u = -2r^2, \quad \frac{du}{dr} = -4r, \quad dr = \frac{du}{-4r}, \quad \text{Grenzen} \begin{cases} \text{unten: } r = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0 \\ \text{oben: } r = 1 \quad \Rightarrow \quad u = -2 \end{cases}$$

$$I_2 = \int\limits_{r=0}^{1} r \cdot \mathrm{e}^{-2r^2}\, dr = \int\limits_{u=0}^{-2} r \cdot \mathrm{e}^{u} \cdot \frac{du}{-4r} = -\frac{1}{4} \cdot \int\limits_{0}^{-2} \mathrm{e}^{u}\, du = \frac{1}{4} \cdot \int\limits_{-2}^{0} \mathrm{e}^{u}\, du =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{u}\right]_{-2}^{0} = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{0} - \mathrm{e}^{-2}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right)$$

Somit ergibt der 2. Integrationsschritt:

$$\frac{1}{2} \cdot \int\limits_{r=0}^{1} r\left(\mathrm{e}^{-2r^2} - \mathrm{e}^{-2}\right) dr = \frac{1}{2}\, I_2 - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2} = \frac{1}{8}\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right) - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2} = \frac{1}{8}\left(1 - 3\,\mathrm{e}^{-2}\right)$$

3. Integrationsschritt (Integration nach φ)

$$z_S = \frac{1}{\left(1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}\right)\pi} \cdot \frac{1}{8}\left(1 - 3\,\mathrm{e}^{-2}\right) \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} 1\, d\varphi = \frac{1 - 3\,\mathrm{e}^{-2}}{8\pi\left(1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}\right)}\left[\varphi\right]_{0}^{2\pi} =$$

$$= \frac{1 - 3\,\mathrm{e}^{-2}}{8\pi\left(1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}\right)}\left(2\pi - 0\right) = \frac{1 - 3\,\mathrm{e}^{-2}}{4\left(1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}\right)} = 0{,}5620$$

Schwerpunkt: $S = (0;\ 0;\ 0{,}5620)$

F45

Dreht man die in Bild F-44 skizzierte Fläche um die z-Achse, so entsteht ein (homogener) Zylinder mit einem kegelförmigen Einschnitt. Welches *Volumen* V besitzt dieser Rotationskörper, wo liegt der *Schwerpunkt* S?

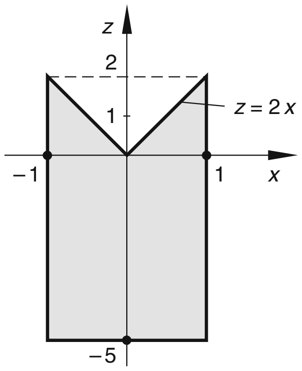


Bild F-44

Der „zylindrische“ Rotationskörper wird *unten* bzw. *oben* durch folgende Flächen begrenzt ($x \rightarrow r$):

untere Begrenzung („Boden“): Kreisfläche vom Radius 1 in der Ebene $z = -5$

obere Begrenzung („Deckel“): $z = 2r$ (Mantelfläche eines Kegels)

Integrationsbereich in der x, y-Ebene ist die Kreisfläche $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Damit haben wir folgende *Integrationsgrenzen*:

z-Integration: von $z = -5$ bis $z = 2r$

r-Integration: von $r = 0$ bis $r = 1$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$

Berechnung des Rotationsvolumens V

$$V = \iiint\limits_{(V)} dV = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} \int\limits_{z=-5}^{2r} r \, dz \, dr \, d\varphi \qquad (\text{Volumenelement } dV = r \, dz \, dr \, d\varphi)$$

1. Integrationsschritt (Integration nach z)

$$\int\limits_{z=-5}^{2r} r \, dz = r \cdot \int\limits_{z=-5}^{2r} 1 \, dz = r \big[z \big]_{z=-5}^{2r} = r(2r+5) = 2r^2 + 5r$$

2. Integrationsschritt (Integration nach r)

$$\int\limits_{r=0}^{1} (2r^2 + 5r) \, dr = \left[\frac{2}{3} r^3 + \frac{5}{2} r^2 \right]_{r=0}^{1} = \frac{2}{3} + \frac{5}{2} - 0 - 0 = \frac{2}{3} + \frac{5}{2} = \frac{4+15}{6} = \frac{19}{6}$$

3. Integrationsschritt (Integration nach φ)

$$V = \frac{19}{6} \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} 1 \, d\varphi = \frac{19}{6} \big[\varphi \big]_0^{2\pi} = \frac{19}{6} (2\pi - 0) = \frac{19}{3} \pi$$

Rotationsvolumen: $V = \frac{19}{3} \pi = 19{,}8968$

Berechnung des Schwerpunktes $S = (x_S;\ y_S;\ z_S)$

Der Schwerpunkt S liegt wegen der *Rotationssymmetrie* auf der z-Achse, daher sind $x_S = 0$ und $y_S = 0$. Die dritte Koordinate z_S berechnen wir mit dem Dreifachintegral

$$z_S = \frac{1}{V} \cdot \iiint\limits_{(V)} z \, dV = \frac{1}{19\pi/3} \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} \int\limits_{z=-5}^{2r} z r \, dz \, dr \, d\varphi = \frac{3}{19\pi} \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} \int\limits_{z=-5}^{2r} z r \, dz \, dr \, d\varphi$$

1. Integrationsschritt (Integration nach z)

$$\int\limits_{z=-5}^{2r} z r \, dz = r \cdot \int\limits_{z=-5}^{2r} z \, dz = r \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=-5}^{2r} = \frac{1}{2} r \big[z^2 \big]_{z=-5}^{2r} = \frac{1}{2} r (4r^2 - 25) = \frac{1}{2} (4r^3 - 25r)$$

2. Integrationsschritt (Integration nach r)

$$\frac{1}{2} \cdot \int\limits_{r=0}^{1} (4r^3 - 25r) \, dr = \frac{1}{2} \left[r^4 - \frac{25}{2} r^2 \right]_{r=0}^{1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{25}{2} - 0 - 0 \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{23}{2} \right) = -\frac{23}{4}$$

3. Integrationsschritt (Integration nach φ)

$$z_S = \frac{3}{19\pi} \cdot \left(-\frac{23}{4} \right) \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} 1 \, d\varphi = -\frac{69}{76\pi} \cdot \big[\varphi \big]_0^{2\pi} = -\frac{69}{76\pi} (2\pi - 0) = -\frac{69}{38} = -1{,}8158$$

Schwerpunkt: $S = (0;\ 0;\ -1{,}8158)$

F46 Ein rotationssymmetrischer Körper aus einem homogenen Material wird durch die Flächen $z = 3$ (unten) und $z = 4 - r^2$ (Mantelfläche eines Rotationsparaboloids; oben) begrenzt. Bestimmen Sie *Volumen* V und *Schwerpunkt* S.

Die Flächen $z = 4 - r^2$ und $z = 3$ schneiden sich in der Ebene $z = 3$ längs eines *Kreises* vom Radius 1:

$$4 - r^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad r = 1$$

Bild F-45 zeigt die Gestalt des Rotationskörpers. Der *Integrationsbereich* in der x, y-Ebene ist die durch die Ungleichungen $0 \le r \le 1$ und $0 \le \varphi \le 2\pi$ beschriebene Kreisfläche.

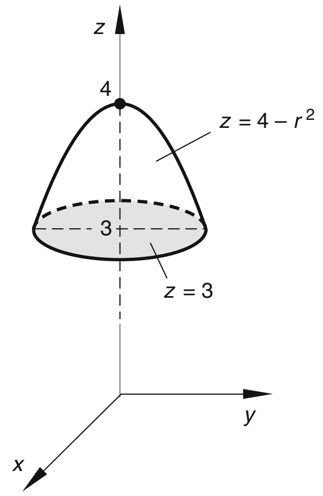


Bild F-45

Die *Integrationsgrenzen* lauten damit:

z-Integration: von $z = 3$ bis $z = 4 - r^2$

r-Integration: von $r = 0$ bis $r = 1$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$

Berechnung des Rotationsvolumens V

$$V = \iiint\limits_{(V)} dV = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} \int\limits_{z=3}^{4-r^2} r \, dz \, dr \, d\varphi$$

(Volumenelement $dV = r \, dz \, dr \, d\varphi$)

1. Integrationsschritt (Integration nach z)

$$\int\limits_{z=3}^{4-r^2} r \, dz = r \cdot \int\limits_{z=3}^{4-r^2} 1 \, dz = r \big[z \big]_{z=3}^{4-r^2} =$$

$$= r[(4 - r^2) - 3] = r(1 - r^2) = r - r^3$$

2. Integrationsschritt (Integration nach r)

$$\int\limits_{r=0}^{1} (r - r^3) \, dr = \left[\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_{r=0}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 0 - 0 = \frac{1}{4}$$

3. Integrationsschritt (Integration nach φ)

$$V = \frac{1}{4} \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} 1 \, d\varphi = \frac{1}{4} \big[\varphi \big]_0^{2\pi} = \frac{1}{4} (2\pi - 0) = \frac{\pi}{2}$$

Rotationsvolumen: $V = \pi/2$

Berechnung des Schwerpunktes $S = (x_S; \, y_S; \, z_S)$

Wegen der *Rotationssymmetrie* liegt der Schwerpunkt S auf der z-Achse, also gilt $x_S = y_S = 0$. Die z-Koordinate berechnen wir mit dem Dreifachintegral

$$z_S = \frac{1}{V} \cdot \iiint\limits_{(V)} z \, dV = \frac{1}{\pi/2} \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} \int\limits_{z=0}^{4-r^2} z r \, dz \, dr \, d\varphi = \frac{2}{\pi} \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} \int\limits_{z=3}^{4-r^2} z r \, dz \, dr \, d\varphi$$

1. Integrationsschritt (Integration nach z)

$$\int_{z=3}^{4-r^2} z\,r\,dz = r \cdot \int_{z=3}^{4-r^2} z\,dz = r\left[\frac{1}{2}\,z^2\right]_{z=3}^{4-r^2} = \frac{1}{2}\,r\left[z^2\right]_{z=3}^{4-r^2} = \frac{1}{2}\,r\left[(4-r^2)^2 - 9\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,r(16 - 8r^2 + r^4 - 9) = \frac{1}{2}\,r(7 - 8r^2 + r^4) = \frac{1}{2}\,(7r - 8r^3 + r^5)$$

2. Integrationsschritt (Integration nach r)

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{r=0}^{1} (7r - 8r^3 + r^5)\,dr = \frac{1}{2}\left[\frac{7}{2}\,r^2 - 2r^4 + \frac{1}{6}\,r^6\right]_{r=0}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2} - 2 + \frac{1}{6} - 0 - 0 - 0\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{21 - 12 + 1}{6} = \frac{5}{6}$$

3. Integrationsschritt (Integration nach φ)

$$z_S = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{5}{6} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1\,d\varphi = \frac{5}{3\pi}\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{5}{3\pi}\,(2\pi - 0) = \frac{10}{3}$$

Schwerpunkt: $S = (0;\ 0;\ 10/3)$

F47 Ein aus einem homogenen Material gefertigter Körper wird durch die Rotationsfläche $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ und die x, y-Ebene berandet. Bestimmen Sie das *Volumen* V und den *Schwerpunkt* S des Körpers.

Gleichung der *Rotationsfläche* in Zylinderkoordinaten:

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = r^2 \cdot \cos^2\varphi + r^2 \cdot \sin^2\varphi = r^2\,\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} = r^2$$

$$z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2} = 2 - \sqrt{r^2} = 2 - r$$

Die in *Zylinderkoordinaten* ausgedrückte Rotationsfläche $z = 2 - r$ schneidet die x, y-Ebene $z = 0$ längs eines *Mittelpunktskreises* mit dem Radius 2:

$$2 - r = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 2 \qquad \text{Kreisfläche: } 0 \le r \le 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

Der *Rotationskörper* hat damit das in Bild F-46 skizzierte Aussehen. Er wird *oben* von der Rotationsfläche $z = 2 - r$, *unten* von der x, y-Ebene $z = 0$ berandet.

Damit liegen die *Integrationsgrenzen* wie folgt fest:

z-Integration: von $z = 0$ bis $z = 2 - r$

r-Integration: von $r = 0$ bis $r = 2$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$

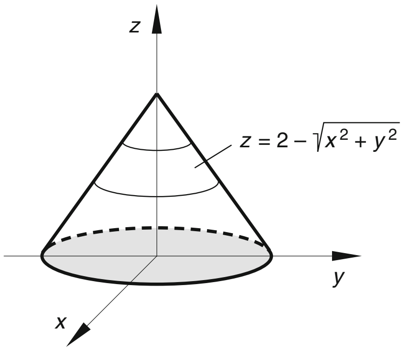


Bild F-46

Berechnung des Rotationsvolumens V

$$V = \iiint\limits_{(V)} dV = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{2} \int\limits_{z=0}^{2-r} r\,dz\,dr\,d\varphi \qquad (\text{Volumenelement } dV = r\,dz\,dr\,d\varphi)$$

1. Integrationsschritt (Integration nach z)

$$\int\limits_{z=0}^{2-r} r\,dz = r \cdot \int\limits_{z=0}^{2-r} 1\,dz = r\big[z\big]_{z=0}^{2-r} = r(2 - r - 0) = 2r - r^2$$

2. Integrationsschritt (Integration nach r)

$$\int\limits_{r=0}^{2} (2r - r^2)\,dr = \left[r^2 - \frac{1}{3}\,r^3\right]_{r=0}^{2} = 4 - \frac{8}{3} - 0 - 0 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

3. Integrationsschritt (Integration nach φ)

$$V = \frac{4}{3} \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} 1\,d\varphi = \frac{4}{3}\,\big[\varphi\big]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\,(2\pi - 0) = \frac{8}{3}\,\pi$$

Rotationsvolumen: $V = 8\pi/3 = 8{,}3776$

Berechnung des Schwerpunktes $S = (x_S; y_S; z_S)$

Der Schwerpunkt S liegt wegen der *Rotationssymmetrie* auf der z-Achse: $x_S = y_S = 0$. Die Höhenkoordinate z_S berechnen wir mit dem folgenden Dreifachintegral:

$$z_S = \frac{1}{V} \cdot \iiint\limits_{(V)} z\,dV = \frac{1}{8\pi/3} \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{2} \int\limits_{z=0}^{2-r} z\,r\,dz\,dr\,d\varphi = \frac{3}{8\pi} \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{2} \int\limits_{z=0}^{2-r} z\,r\,dz\,dr\,d\varphi$$

1. Integrationsschritt (Integration nach z)

$$\int\limits_{z=0}^{2-r} z\,r\,dz = r \cdot \int\limits_{z=0}^{2-r} z\,dz = r\left[\frac{1}{2}\,z^2\right]_{z=0}^{2-r} = r\left[\frac{1}{2}\,(2 - r)^2 - 0\right] = \frac{1}{2}\,(4r - 4r^2 + r^3)$$

2. Integrationsschritt (Integration nach r)

$$\frac{1}{2} \cdot \int\limits_{r=0}^{2} (4r - 4r^2 + r^3)\,dr = \frac{1}{2}\left[2r^2 - \frac{4}{3}\,r^3 + \frac{1}{4}\,r^4\right]_{r=0}^{2} = \frac{1}{2}\left(8 - \frac{32}{3} + 4 - 0 - 0 - 0\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(12 - \frac{32}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{36 - 32}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

3. Integrationsschritt (Integration nach φ)

$$z_S = \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{2}{3} \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} 1\,d\varphi = \frac{1}{4\pi} \cdot \big[\varphi\big]_0^{2\pi} = \frac{1}{4\pi}\,(2\pi - 0) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Schwerpunkt: $S = (0;\ 0;\ 0{,}5)$

F48 Der kreisförmige „Boden“ eines zylindrischen Körpers liegt in der x, y-Ebene und wird durch die Ungleichung $(x - 3)^2 + y^2 \le 9$ beschrieben. Der „Deckel“ (obere Randfläche) ist Teil der Rotationsfläche $z = x^2 + y^2$. Welches *Volumen* V besitzt dieser Körper?

Wir verwenden wegen der *Kreissymmetrie* der Bodenfläche und der rotationssymmetrischen oberen Randfläche *Zylinderkoordinaten* (Bild F-47).

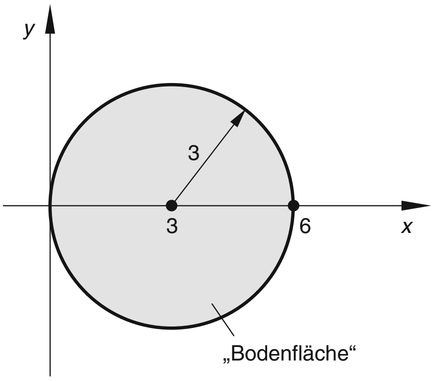


Bild F-47

Kreisgleichung in Polarkoordinaten (Zylinderkoordinaten):

$$x = r \cdot \cos \varphi, \quad y = r \cdot \sin \varphi$$

$$(x - 3)^2 + y^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad (r \cdot \cos \varphi - 3)^2 + r^2 \cdot \sin^2 \varphi = 9$$

$$\Rightarrow \quad r^2 \cdot \cos^2 \varphi - 6r \cdot \cos \varphi + 9 + r^2 \cdot \sin^2 \varphi = 9$$

$$\Rightarrow \quad r^2 \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{1} - 6r \cdot \cos \varphi = 0$$

$$\Rightarrow \quad r^2 - 6r \cdot \cos \varphi = r(r - 6 \cdot \cos \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad r - 6 \cos \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 6 \cdot \cos \varphi$$

Die Lösung $r = 0$ kommt *nicht* infrage. Damit ist $r = 6 \cdot \cos \varphi$ die Gleichung des Kreises $(-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2)$.

Die *Kreisfläche* lässt sich durch die Ungleichungen $0 \le r \le 6 \cdot \cos \varphi$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$ beschreiben.

Der kreisförmige „Boden“ des Körpers liegt in der x, y-Ebene $z = 0$, der „Deckel“ ist Teil der Fläche $z = x^2 + y^2$, die in Zylinderkoordinaten durch die Gleichung $z = r^2$ beschrieben wird (Transformationsgleichungen: $x = r \cdot \cos \varphi$, $y = r \cdot \sin \varphi$). Insgesamt erhalten wir damit die folgenden *Integrationsgrenzen*:

z-Integration: von $z = 0$ bis $z = r^2$

r-Integration: von $r = 0$ bis $r = 6 \cdot \cos \varphi$

φ-Integration: von $\varphi = -\pi/2$ bis $\varphi = \pi/2$

Das *Volumenintegral* lautet:

$$V = \iiint\limits_{(V)} dV = \int\limits_{\varphi = -\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_{r=0}^{6 \cdot \cos \varphi} \int\limits_{z=0}^{r^2} r \, dz \, dr \, d\varphi \qquad (\text{Volumenelement } dV = r \, dz \, dr \, d\varphi)$$

1. Integrationsschritt (Integration nach z)

$$\int\limits_{z=0}^{r^2} r \, dz = r \cdot \int\limits_{z=0}^{r^2} 1 \, dz = r \big[z \big]_{z=0}^{r^2} = r(r^2 - 0) = r^3$$

2. Integrationsschritt (Integration nach r)

$$\int\limits_{r=0}^{6 \cdot \cos \varphi} r^3 \, dr = \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_{r=0}^{6 \cdot \cos \varphi} = \frac{1}{4} (6 \cdot \cos \varphi)^4 - 0 = 324 \cdot \cos^4 \varphi$$

3. Integrationsschritt (Integration nach φ)

$$V = 324 \cdot \int\limits_{\varphi = -\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \varphi \, d\varphi = 324 \cdot 2 \cdot \int\limits_{\varphi = 0}^{\pi/2} \cos^4 \varphi \, d\varphi = 648 \cdot \underbrace{\int\limits_{\varphi = 0}^{\pi/2} \cos^4 \varphi \, d\varphi}_{I} = 648 \cdot I$$

Wir können dieses Integral der *Integraltafel* der Formelsammlung entnehmen (Integral 231 mit $n = 4$, $a = 1$ in Verbindung mit Integral 229 mit $a = 1$) oder mit Hilfe einer geeigneten *trigonometrischen Umformung* in einfache Integrale zerlegen. Wir gehen hier den letzteren Weg. Aus der *Formelsammlung* entnehmen wir die Beziehung

$$\cos^4 \varphi = \frac{1}{8} \left[\cos(4\varphi) + 4 \cdot \cos(2\varphi) + 3 \right]$$

Das Integral I geht dann über in:

$$I = \int_{\varphi = 0}^{\pi/2} \cos^4 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{8} \cdot \int_{0}^{\pi/2} [\cos(\underbrace{4\varphi}_{u}) + 4 \cdot \cos(\underbrace{2\varphi}_{v}) + 3] \, d\varphi$$

Mit den *Substitutionen*

$$u = 4\varphi, \quad \frac{du}{d\varphi} = 4, \quad d\varphi = \frac{du}{4}, \qquad \text{Grenzen} \begin{cases} \text{unten: } \varphi = 0 & \Rightarrow \quad u = 0 \\ \text{oben: } \varphi = \pi/2 & \Rightarrow \quad u = 2\pi \end{cases}$$

$$v = 2\varphi, \quad \frac{dv}{d\varphi} = 2, \quad d\varphi = \frac{dv}{2}, \qquad \text{Grenzen} \begin{cases} \text{unten: } \varphi = 0 & \Rightarrow \quad v = 0 \\ \text{oben: } \varphi = \pi/2 & \Rightarrow \quad v = \pi \end{cases}$$

erhalten wir schließlich:

$$I = \frac{1}{8} \cdot \int_{0}^{\pi/2} \cos(4\varphi) \, d\varphi + \frac{1}{2} \cdot \int_{0}^{\pi/2} \cos(2\varphi) \, d\varphi + \frac{3}{8} \cdot \int_{0}^{\pi/2} 1 \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \int_{0}^{2\pi} \cos u \cdot \frac{du}{4} + \frac{1}{2} \cdot \int_{0}^{\pi} \cos v \cdot \frac{dv}{2} + \frac{3}{8} \cdot \int_{0}^{\pi/2} 1 \, d\varphi = \frac{1}{32} \left[\sin u \right]_{0}^{2\pi} + \frac{1}{4} \left[\sin v \right]_{0}^{\pi} + \frac{3}{8} \left[\varphi \right]_{0}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{32} (\underbrace{\sin(2\pi)}_{0} - \underbrace{\sin 0}_{0}) + \frac{1}{4} (\underbrace{\sin \pi}_{0} - \underbrace{\sin 0}_{0}) + \frac{3}{8} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{3}{16} \pi$$

Somit liefert der 3. Integrationsschritt das folgende **Volumen:**

$$V = 648 \cdot I = 648 \cdot \frac{3}{16} \pi = \frac{243}{2} \pi = 381{,}7035$$

F49

Bestimmen Sie das *Massenträgheitsmoment* J einer homogenen Kugel mit zylindrischer Bohrung bezüglich der Symmetrieachse (Bild F-48).

Untersuchen Sie den Sonderfall $a = 0$.

R: Radius der Kugel
a: Radius der zylindrischen Bohrung

$(0 < a < R)$

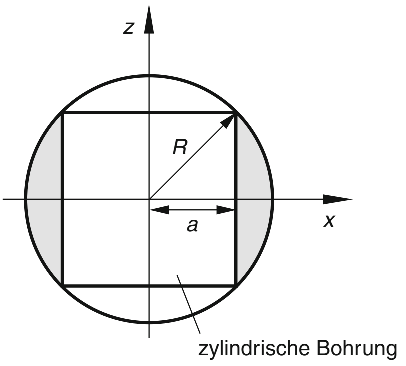


Bild F-48

Die Gleichung der *Rotationsfläche* (Kugeloberfläche) lautet für $z \geq 0$:

$$r^2 + z^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad z^2 = R^2 - r^2 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{R^2 - r^2}$$

Wegen der *Spiegelsymmetrie* des Rotationskörpers bezüglich der x, y-Ebene beschränken wir uns auf den *oberhalb* der x, y-Ebene gelegenen Teil (Halbkugel mit Bohrung). Der „Boden" dieses Körpers ist eine *Kreisringfläche* mit dem Innenradius a und dem Außenradius R, beschrieben durch die Ungleichungen $a \leq r \leq R$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (Bild F-49). Er liegt in der x, y-Ebene $z = 0$. Der „Deckel" wird gebildet durch die über diesem Kreisring liegende Rotationsfläche $z = \sqrt{R^2 - r^2}$ (Oberfläche der Halbkugel).

Damit ergeben sich folgende *Integrationsgrenzen*:

z-Integration: von $z = 0$ bis $z = \sqrt{R^2 - r^2}$

r-Integration: von $r = a$ bis $r = R$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$

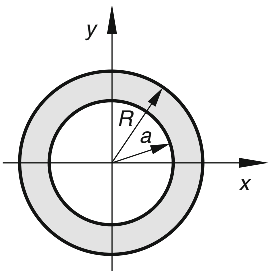


Bild F-49

Das Dreifachintegral für das *Massenträgheitsmoment* J_z lautet:

$$J_z = \varrho \cdot \iiint\limits_{(V)} r^2 \, dV = 2\varrho \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=a}^{R} \int\limits_{z=0}^{\sqrt{R^2 - r^2}} r^3 \, dz \, dr \, d\varphi \qquad (\text{Volumenelement } dV = r \, dz \, dr \, d\varphi)$$

(Faktor 2, da wir die Integration auf die *oberhalb* der x, y-Ebene gelegene Körperhälfte beschränkt haben.)

1. Integrationsschritt (Integration nach z)

$$\int\limits_{z=0}^{\sqrt{R^2 - r^2}} r^3 \, dz = r^3 \cdot \int\limits_{z=0}^{\sqrt{R^2 - r^2}} 1 \, dz = r^3 \left[z \right]_{z=0}^{\sqrt{R^2 - r^2}} = r^3 \left(\sqrt{R^2 - r^2} - 0 \right) = r^3 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}$$

2. Integrationsschritt (Integration nach r)

$$\underbrace{\int\limits_{r=a}^{R} r^3 \cdot \sqrt{R^2 - r^2} \, dr}_{\text{Integral 144 mit } a = R} = \left[\frac{1}{5} \sqrt{(R^2 - r^2)^5} - \frac{R^2}{3} \sqrt{(R^2 - r^2)^3} \right]_{r=a}^{R} =$$

$$= 0 - 0 - \frac{1}{5} \sqrt{(R^2 - a^2)^5} + \frac{R^2}{3} \sqrt{(R^2 - a^2)^3} =$$

$$= \frac{1}{3} R^2 (R^2 - a^2)^{3/2} - \frac{1}{5} (R^2 - a^2)^{5/2} =$$

$$= \frac{1}{3} R^2 (R^2 - a^2)^{3/2} - \frac{1}{5} (R^2 - a^2)^{3/2} \cdot (R^2 - a^2)^1 =$$

$$= (R^2 - a^2)^{3/2} \cdot \left[\frac{1}{3} R^2 - \frac{1}{5} (R^2 - a^2) \right] =$$

$$= (R^2 - a^2)^{3/2} \cdot \left(\frac{1}{3} R^2 - \frac{1}{5} R^2 + \frac{1}{5} a^2 \right) =$$

$$= (R^2 - a^2)^{3/2} \cdot \left(\frac{2}{15} R^2 + \frac{1}{5} a^2 \right) = \frac{1}{15} (2R^2 + 3a^2) \cdot (R^2 - a^2)^{3/2}$$

3. Integrationsschritt (Integration nach φ)

$$J_z = 2\varrho \cdot \frac{1}{15}\,(2R^2 + 3a^2)\,(R^2 - a^2)^{3/2} \cdot \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} 1\,d\varphi}_{2\pi} = \frac{2}{15}\,\varrho\,(2R^2 + 3a^2)\,(R^2 - a^2)^{3/2} \cdot 2\pi =$$

$$= \frac{4}{15}\,\pi\varrho\,(2R^2 + 3a^2)\,(R^2 - a^2)^{3/2}$$

Massenträgheitsmoment: $J_z = \frac{4}{15}\,\pi\varrho\,(2R^2 + 3a^2)\,(R^2 - a^2)^{3/2}$

Sonderfall: $a = 0$ (Kugel vom Radius R)

$$J_{\text{Kugel}} = \frac{4}{15}\,\pi\varrho \cdot 2R^2 \cdot R^3 = \frac{8}{15}\,\pi\varrho R^5$$

F50

Welches *Massenträgheitsmoment* J hat das in Bild F-50 skizzierte Speichenrad bezüglich der Symmetrieachse (z-Achse)?

Untersuchen Sie den Sonderfall $R_1 = R_2$.

Dicke des Speichenrades: H
Dichte des homogenen Materials: ϱ

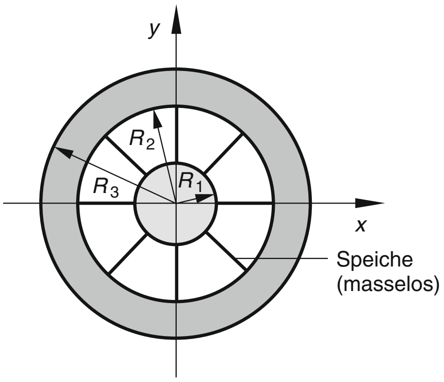


Bild F-50

Das Speichenrad liegt auf der x, y-Ebene $z = 0$ („Bodenfläche“), die *obere* Begrenzung ist die Parallelebene $z = H$ („Deckel“). Die z-Integration verläuft daher von $z = 0$ bis $z = H$. Der Integrationsbereich in der x, y-Ebene besteht aus *zwei* Teilbereichen:

innere Scheibe: $0 \le r \le R_1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$ *äußerer* Ring: $R_2 \le r \le R_3, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

Das *Massenträgheitsmoment* J_z des Speichenrades ist die Summe der Massenträgheitsmomente von Scheibe und Ring (Volumenelement $dV = r\,dz\,dr\,d\varphi$):

$$J_z = \varrho \cdot \iiint_{(V)} r^2\,dV = \underbrace{\varrho \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_1} \int_{z=0}^{H} r^3\,dz\,dr\,d\varphi}_{J_1} + \underbrace{\varrho \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=R_2}^{R_3} \int_{z=0}^{H} r^3\,dz\,dr\,d\varphi}_{J_2} = J_1 + J_2$$

Die Dreifachintegrale unterscheiden sich lediglich in der r-Integration. Wir berechnen zunächst J_1.

Massenträgheitsmoment J_1 der inneren Scheibe (in Bild F-50 hellgrau unterlegt)

$$J_1 = \varrho \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_1} \int_{z=0}^{H} r^3\,dz\,dr\,d\varphi$$

1. Integrationsschritt (Integration nach z)

$$\int_{z=0}^{H} r^3\,dz = r^3 \cdot \int_{z=0}^{H} 1\,dz = r^3\,\big[z\big]_{z=0}^{H} = r^3(H - 0) = Hr^3$$

2. Integrationsschritt (Integration nach r*)*

$$H \cdot \int_{r=0}^{R_1} r^3 \, dr = H \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_{r=0}^{R_1} = H \left(\frac{1}{4} R_1^4 - 0 \right) = \frac{1}{4} H R_1^4$$

3. Integrationsschritt (Integration nach φ*)*

$$J_1 = \varrho \cdot \frac{1}{4} H R_1^4 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 \, d\varphi = \frac{1}{4} \varrho H R_1^4 \left[\varphi \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{4} \varrho H R_1^4 (2\pi - 0) = \frac{1}{2} \pi \varrho H R_1^4$$

Massenträgheitsmoment der Scheibe: $J_1 = \frac{1}{2} \pi \varrho H R_1^4$

Massenträgheitsmoment J_2 des äußeren Rings (in Bild F-50 dunkelgrau unterlegt)

$$J_2 = \varrho \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=R_2}^{R_3} \int_{z=0}^{H} r^3 \, dz \, dr \, d\varphi$$

1. Integrationsschritt (Integration nach z*, wie bei* J_1*)*

$$\int_{z=0}^{H} r^3 \, dz = H r^3$$

2. Integrationsschritt (Integration nach r*)*

$$H \cdot \int_{r=R_2}^{R_3} r^3 \, dr = H \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_{R_2}^{R_3} = \frac{1}{4} H \left[r^4 \right]_{r=R_2}^{R_3} = \frac{1}{4} H (R_3^4 - R_2^4)$$

3. Integrationsschritt (Integration nach φ*)*

$$J_2 = \varrho \cdot \frac{1}{4} H (R_3^4 - R_2^4) \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 \, d\varphi = \frac{1}{4} \varrho H (R_3^4 - R_2^4) \left[\varphi \right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{4} \varrho H (R_3^4 - R_2^4) \cdot (2\pi - 0) = \frac{1}{2} \pi \varrho H (R_3^4 - R_2^4)$$

Massenträgheitsmoment des Ringes: $J_2 = \frac{1}{2} \pi \varrho H (R_3^4 - R_2^4)$

Massenträgheitsmoment J des Speichenrades

$$J_z = J_1 + J_2 = \frac{1}{2} \pi \varrho H R_1^4 + \frac{1}{2} \pi \varrho H (R_3^4 - R_2^4) = \frac{1}{2} \pi \varrho H (R_1^4 + R_3^4 - R_2^4)$$

Sonderfall (Zylinderscheibe vom Radius R): $R_1 = R_2$, $R_3 = R$

$$J_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{2} \pi \varrho H (R_1^4 + R^4 - R_1^4) = \frac{1}{2} \pi \varrho H R^4$$

Das Massenträgheitsmoment lässt sich auch wie folgt durch Masse m und Radius R ausdrücken:

$$J_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{2} \pi \varrho H R^4 = \frac{1}{2} (\varrho \cdot \underbrace{\pi R^2 H}_{V}) R^2 = \frac{1}{2} \underbrace{(\varrho \cdot V)}_{m} R^2 = \frac{1}{2} m R^2$$

G Gewöhnliche Differentialgleichungen

Hinweise für das gesamte Kapitel

(1) Verwendete Abkürzung für *Differentialgleichung*: Dgl

(2) Kürzen eines gemeinsamen Faktors wird durch *Grauunterlegung* gekennzeichnet.

(3) Treten *mehrere* Integrationskonstanten auf, so werden diese (zusammen mit eventuell vorhandenen *konstanten* Gliedern) zu *einer* Integrationskonstanten zusammengefasst (im Regelfall auf der rechten Seite der Gleichung).

(4) Häufig erhält man bei der Integration einer Dgl „logarithmische“ Terme wie beispielsweise $\ln|x|$ oder $\ln|2x^2 - x + 1|$. Es ist dann zweckmäßiger, die Integrationskonstante *nicht* in der üblichen Form, sondern in der „logarithmischen“ Form $\ln|C|$ anzusetzen. Sie können dann mit Hilfe der elementaren Rechenregeln für Logarithmen den Arbeitsaufwand erheblich *reduzieren* (Rechenregeln → Hinweis (5)).

(5) Beim Lösen einer Dgl werden Sie immer wieder die folgenden *Rechenregeln* benötigen:

$\boxed{\text{R1}}$: $\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$ $\boxed{\text{R2}}$: $\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

$\boxed{\text{R3}}$: $n \cdot \ln a = \ln a^n; \quad \ln e^n = n$ $\boxed{\text{R4}}$: $e^{\ln a} = a$

$\boxed{\text{R5}}$: *Entlogarithmierung* $\ln a = b \quad \Rightarrow \quad a = e^b; \quad \ln a = \ln b \quad \Rightarrow \quad a = b$

$\boxed{\text{R6}}$: $|x| = a > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm a; \quad |x| = |a| \quad \Rightarrow \quad x = \pm a$

(6) Alle anfallenden Integrale dürfen einer *Integraltafel* entnommen werden (wenn nicht ausdrücklich anders verlangt). Bei der Lösung der Integrale wird die jeweilige Integralnummer aus der Integraltafel der **Mathematischen Formelsammlung** mit den entsprechenden Parameterwerten angegeben („gelbe Seiten“, z. B. Integral 313 mit $a = 2$). Selbstverständlich dürfen Sie die Integrale auch „per Hand“ lösen (zusätzliche Übung).

1 Differentialgleichungen 1. Ordnung

1.1 Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

Hinweise

Lehrbuch: Band 2, Kapitel IV.2.2

Formelsammlung: Kapitel X.2.1

G1 $y' = e^{x-y}$ Anfangswert: $y(0) = 1$

Trennen der beiden Variablen führt zu:

$$y' = \frac{dy}{dx} = e^{x-y} = e^x \cdot e^{-y} \quad \Rightarrow \quad e^y\, dy = e^x\, dx$$

Integration auf beiden Seiten, anschließend wird die Gleichung nach y aufgelöst (*Rechenregel:* R3):

$$\int e^y\, dy = \int e^x\, dx \quad \Rightarrow \quad e^y = e^x + C \quad \Rightarrow \quad \ln e^y = \ln(e^x + C) \quad \Rightarrow \quad y = \ln(e^x + C)$$

L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Klausur- und Übungsaufgaben,*
DOI 10.1007/978-3-8348-9730-5_7,© Vieweg+Teubner Verlag |Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2010

Spezielle Lösung für den *Anfangswert* $y(0) = 1$:

$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \ln(\mathrm{e}^0 + C) = \ln(1 + C) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + C = \mathrm{e}^1 \quad \Rightarrow \quad C = \mathrm{e} - 1$$

Rechenregel: R5

Lösung: $y = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e} - 1)$

G2 $y' = (y + 1) \cdot \sin x$ Anfangswert: $y(\pi/2) = 4$

Trennung der beiden Variablen, dann Integration auf beiden Seiten:

$$y' = \frac{dy}{dx} = (y + 1) \cdot \sin x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y + 1} = \sin x \, dx \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\int \frac{dy}{y + 1}}_{\text{Integral 2 mit } a = 1, \ b = 1} = \int \sin x \, dx \quad \Rightarrow$$

$$\ln|y + 1| = -\cos x + \ln|C|$$

Auflösung der Gleichung nach y (entlogarithmieren):

$$\ln|y + 1| - \ln|C| = \ln\left|\frac{y + 1}{C}\right| = -\cos x \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{y + 1}{C}\right| = \mathrm{e}^{-\cos x} \quad \Rightarrow \quad \frac{y + 1}{C} = \pm\,\mathrm{e}^{-\cos x} \quad \Rightarrow$$

$$y + 1 = \pm C \cdot \mathrm{e}^{-\cos x} = K \cdot \mathrm{e}^{-\cos x} \quad \Rightarrow \quad y = K \cdot \mathrm{e}^{-\cos x} - 1 \qquad (\text{mit } K = \pm C)$$

Rechenregeln: R2, R5 und R6

Bestimmung der Konstanten K aus dem *Anfangswert* $y(\pi/2) = 4$:

$$K \cdot \mathrm{e}^{-\cos(\pi/2)} - 1 = K \cdot \mathrm{e}^0 - 1 = K \cdot 1 - 1 = K - 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad K = 5$$

Spezielle Lösung: $y = 5 \cdot \mathrm{e}^{-\cos x} - 1$

G3

Aufladung eines Kondensators mit der Kapazität C über einen ohmschen Widerstand R (Bild G-1)

Die *Kondensatorspannung* $u = u(t)$ genügt der Dgl

$$RC\dot{u} + u = u_0 = \text{const.}$$

(u_0: angelegte Gleichspannung; Anfangsspannung: $u(0) = 0$).

Bestimmen Sie den *zeitlichen Verlauf* der *Spannung* u.

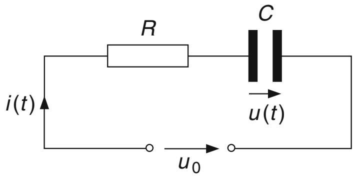


Bild G-1

Wir *trennen* zunächst die Variablen:

$$RC\dot{u} + u = u_0 \quad \Rightarrow \quad RC\,\frac{du}{dt} = u_0 - u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u_0 - u} = \frac{dt}{RC} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u - u_0} = -\frac{dt}{RC} = -\frac{1}{RC}\,dt$$

Beide Seiten werden jetzt *integriert*:

$$\underbrace{\int \frac{du}{u - u_0}}_{\text{Integral 2 mit } a = 1, \ b = -u_0} = -\frac{1}{RC} \cdot \int 1 \, dt \quad \Rightarrow \quad \ln|u - u_0| = -\frac{1}{RC}\,t + \ln|K| = -\frac{t}{RC} + \ln|K| \quad \Rightarrow$$

$$\ln|u - u_0| - \ln|K| = -\frac{t}{RC} \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{u - u_0}{K}\right| = -\frac{t}{RC}$$

Rechenregel: R2

Durch *Entlogarithmierung* folgt (*Rechenregeln:* R5 und R6):

$$\left| \frac{u - u_0}{K} \right| = \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad \Rightarrow \quad \frac{u - u_0}{K} = \pm \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad \Rightarrow \quad u - u_0 = \pm K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = K^* \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad \Rightarrow$$

$$u = u_0 + K^* \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \qquad (\text{mit } K^* = \pm K)$$

Beim Einschalten (d. h. zur Zeit $t = 0$) ist $u = 0$, d. h. $u(0) = 0$. Aus diesem *Anfangswert* bestimmen wir die Konstante K^* wie folgt:

$$u(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_0 + K^* \cdot \mathrm{e}^0 = u_0 + K^* \cdot 1 = u_0 + K^* = 0 \quad \Rightarrow \quad K^* = -u_0$$

Lösung: $u = u_0 - u_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = u_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \right), \; t \geq 0$

Bild G-2 zeigt den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung („*Sättigungsfunktion*“).

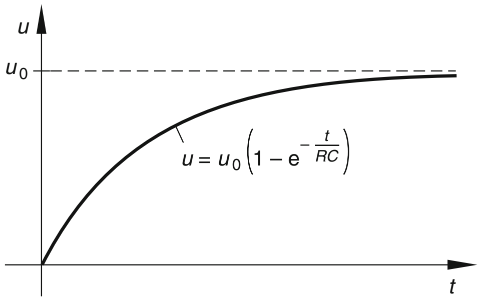


Bild G-2

G4 $y' = -(y + 1) \cdot \cot x$ Anfangswert: $y(\pi/2) = 0$

Trennung der beiden Variablen, dann *Integration* auf beiden Seiten:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -(y + 1) \cdot \cot x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y + 1} = -\cot x \, dx$$

$$\underbrace{\int \frac{dy}{y + 1}}_{\substack{\text{Integral 2 mit} \\ a = b = 1}} = - \underbrace{\int \cot x \, dx}_{\substack{\text{Integral 293} \\ \text{mit } a = 1}} \quad \Rightarrow \quad \ln |y + 1| = -\ln |\sin x| + \ln |C| = \ln \left| \frac{C}{\sin x} \right|$$

(*Rechenregel:* R2). *Entlogarithmierung* der Gleichung führt dann zur *allgemeinen Lösung* (*Rechenregeln:* R5 und R6):

$$|y + 1| = \left| \frac{C}{\sin x} \right| \quad \Rightarrow \quad y + 1 = \pm \frac{C}{\sin x} = \frac{K}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{K}{\sin x} - 1 \qquad (\text{mit } K = \pm C)$$

Spezielle Lösung für den *Anfangswert* $y(\pi/2) = 0$:

$$y(\pi/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{K}{\sin(\pi/2)} - 1 = \frac{K}{1} - 1 = K - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad K = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{\sin x} - 1$$

G5

Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz einer beschleunigten Masse unter Berücksichtigung der Reibung

Die *Bewegung* einer Masse, die durch eine konstante Kraft beschleunigt wird und einer der Geschwindigkeit v proportionalen Reibungskraft unterliegt, genüge der folgenden Dgl:

$$10 \cdot \frac{dv}{dt} + v = 40 \quad \text{mit} \quad v(0) = 10$$

Wie lautet das *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz* $v = v(t)$?
Welche *Endgeschwindigkeit* v_E erreicht die Masse?

Zunächst *trennen* wir die Variablen, dann werden beide Seiten *integriert*:

$$10 \cdot \frac{dv}{dt} = 40 - v = -(v - 40) \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v - 40} = -\frac{dt}{10} = -0{,}1\,dt \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\int \frac{dv}{v - 40}}_{\text{Integral 2 mit } a = 1,\ b = -40} = -0{,}1 \cdot \int 1\,dt$$

$$\Rightarrow \quad \ln|v - 40| = -0{,}1\,t + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln|v - 40| - \ln|C| = -0{,}1\,t \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{v - 40}{C}\right| = -0{,}1\,t$$

(*Rechenregel:* R2). Durch *Entlogarithmierung* folgt (*Rechenregeln:* R5 und R6):

$$\left|\frac{v - 40}{C}\right| = \mathrm{e}^{-0{,}1\,t} \quad \Rightarrow \quad \frac{v - 40}{C} = \pm\,\mathrm{e}^{-0{,}1\,t} \quad \Rightarrow \quad v - 40 = \pm\,C \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1\,t} = K \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1\,t} \quad \Rightarrow$$

$$v = 40 + K \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1\,t} \qquad (\text{mit } K = \pm\,C)$$

Zu Beginn der Bewegung (d. h. zur Zeit $t = 0$) beträgt die Geschwindigkeit $v(0) = 10$. Aus dieser *Anfangsgeschwindigkeit* lässt sich die Integrationskonstante K wie folgt berechnen:

$$v(0) = 10 \quad \Rightarrow \quad 40 + K \cdot \mathrm{e}^{0} = 40 + K \cdot 1 = 40 + K = 10 \quad \Rightarrow \quad K = -30$$

Das gesuchte *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz* lautet damit (siehe Bild G-3):

$$v = 40 - 30 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1\,t}, \quad t \geq 0$$

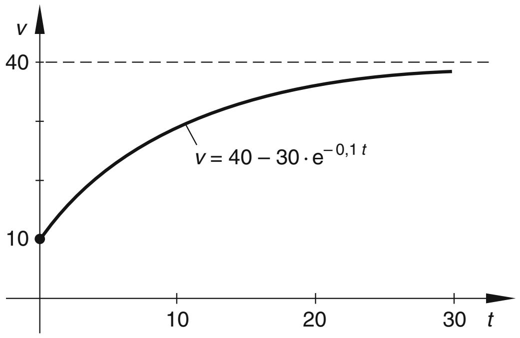


Bild G-3

Die Endgeschwindigkeit v_E erhält man für $t \to \infty$, d. h. nach (theoretisch) unendlich langer Zeit:

$$v_E = \lim_{t \to \infty} v(t) = \lim_{t \to \infty} (40 - 30 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1\,t}) = 40$$

G6 $y' = 1 - y^2$ Anfangswert: $y(0) = 0$

Zunächst *trennen* wir die Variablen, dann werden beide Seiten *integriert*:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 1 - y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{1 - y^2} = dx \quad \Rightarrow$$

$$\underbrace{\int \frac{dy}{1 - y^2}}_{\text{Integral 46 mit } a^2 = 1} = \int 1\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{1 + y}{1 - y}\right| = x + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{1 + y}{1 - y}\right| = 2x + 2 \cdot \ln|C| \quad \Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{1 + y}{1 - y}\right| = 2x + \ln|C|^2 = 2x + \ln C^2 \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{1 + y}{1 - y}\right| - \ln C^2 = \ln\left|\frac{1 + y}{C^2(1 - y)}\right| = 2x \quad \Rightarrow$$

$$\left|\frac{1 + y}{C^2(1 - y)}\right| = \mathrm{e}^{2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1 + y}{C^2(1 - y)} = \pm\,\mathrm{e}^{2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1 + y}{1 - y} = \pm\,C^2 \cdot \mathrm{e}^{2x} = K \cdot \mathrm{e}^{2x}$$

(mit $K = \pm\,C^2$). *Rechenregeln:* R3, R2, R5 und R6

Wir lösen diese *implizite* Funktionsgleichung noch nach y auf:

$$1 + y = K \cdot e^{2x}(1 - y) = K \cdot e^{2x} - K \cdot e^{2x} \cdot y \quad \Rightarrow \quad y + K \cdot e^{2x} \cdot y = K \cdot e^{2x} - 1 \quad \Rightarrow$$

$$y(1 + K \cdot e^{2x}) = K \cdot e^{2x} - 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{K \cdot e^{2x} - 1}{K \cdot e^{2x} + 1}$$

Die *Integrationskonstante* K berechnen wir aus dem *Anfangswert* $y(0) = 0$:

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{K \cdot e^{0} - 1}{K \cdot e^{0} + 1} = \frac{K \cdot 1 - 1}{K \cdot 1 + 1} = \frac{K - 1}{K + 1} = 0 \quad \Rightarrow \quad K - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad K = 1$$

Die **spezielle Lösung** lautet damit:

$$y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \tanh x \qquad \left(\tanh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \cdot \frac{e^{x}}{e^{x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right)$$

G7 $\quad 2xy + (1 + x^2)\,y' = 0 \qquad$ Anfangswert: $y(1) = 10$

Wir *trennen* zunächst die Variablen und *integrieren* dann beide Seiten:

$$2xy + (1 + x^2)\,y' = 2xy + (1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1 + x^2)\frac{dy}{dx} = -2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{-2x}{1 + x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -2 \cdot \underbrace{\int \frac{x}{1 + x^2}\,dx}_{\text{Integral 32 mit } a^2 = 1} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln|1 + x^2| + \ln|C| =$$

$$= -\ln|1 + x^2| + \ln|C| = \ln\left|\frac{C}{1 + x^2}\right|$$

(*Rechenregel:* R2). Durch *Entlogarithmieren* finden wir die *allgemeine Lösung* der Dgl (*Rechenregeln:* R5 und R6):

$$|y| = \left|\frac{C}{1 + x^2}\right| \quad \Rightarrow \quad y = \pm\frac{C}{1 + x^2} = \frac{K}{1 + x^2} \qquad (\text{mit } K = \pm C)$$

Aus dem *Anfangswert* $y(1) = 10$ bestimmen wir K und damit die **spezielle Lösung**:

$$y(1) = 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{K}{1 + 1} = \frac{K}{2} = 10 \quad \Rightarrow \quad K = 20 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{20}{1 + x^2}$$

G8

Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Auslenkung bei einem Feder-Masse-Schwinger

Beschreiben Sie die Bewegung des in Bild G-4 dargestellten *Feder-Masse-Schwingers* durch eine *Dgl 1. Ordnung* und bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen der *Geschwindigkeit* v und der *Auslenkung* x, wenn die Masse m bei *entspannter* Feder $(x = 0)$ die Geschwindigkeit v_0 besitzt.

Anleitung: Nach *Newton* ist das Produkt aus Masse m und Beschleunigung a gleich der Summe der einwirkenden Kräfte. Reibungskräfte sollen hier *unberücksichtigt* bleiben. Für die elastische Feder gilt das *Hooke'sche Gesetz* (Federkonstante: c).

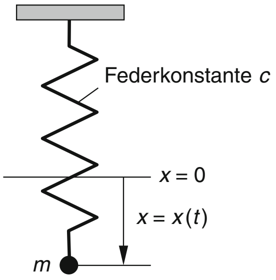


Bild G-4

Die auf die Masse m einwirkende beschleunigende Kraft ist die Differenz aus dem Gewicht mg und der Rückstellkraft cx der elastischen Feder (Hooke'sches Gesetz). Nach Newton gilt dann:

$$(*) \qquad ma = mg - cx \quad \text{oder} \quad m\,\frac{dv}{dt} = mg - cx \qquad \left(\text{mit } a = \dot{v} = \frac{dv}{dt}\right)$$

(die Beschleunigung a ist die *1. Ableitung* der Geschwindigkeit v nach der Zeit t). Wir suchen die Abhängigkeit der Geschwindigkeit v von der *Auslenkung* x. Dabei ist zu beachten, dass x selbst von der Zeit t abhängt. Die Geschwindigkeit v ist daher eine *mittelbare* Funktion der Zeit t und nach der *Kettenregel* gilt:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v = v \cdot \frac{dv}{dx} \qquad \left(\text{mit } v = \frac{dx}{dt}\right)$$

(die Geschwindigkeit v ist bekanntlich die *1. Ableitung* des Weges x nach der Zeit t). Einsetzen in Gleichung $(*)$ liefert eine einfache Dgl 1. Ordnung für die gesuchte Funktion $v = v(x)$, die sich leicht durch *„Trennung der Variablen"* lösen lässt:

$$mv \cdot \frac{dv}{dx} = mg - cx \quad \Rightarrow \quad mv\,dv = (mg - cx)\,dx \quad \Rightarrow$$

$$m \cdot \int v\,dv = \int (mg - cx)\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\,mv^2 = mgx - \frac{1}{2}\,cx^2 + K$$

Bei entspannter Feder $(x = 0)$ bewegt sich die Masse mit der Geschwindigkeit v_0. Aus diesem *Anfangswert* bestimmen wir die Integrationskonstante K:

$$v(x = 0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\,mv_0^2 = mg \cdot 0 - \frac{1}{2}\,c \cdot 0^2 + K = K \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}\,mv_0^2$$

Damit hängt die Geschwindigkeit v wie folgt von der Auslenkung x ab:

$$\frac{1}{2}\,mv^2 = mgx - \frac{1}{2}\,cx^2 + \frac{1}{2}\,mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gx - \frac{c}{m}\,x^2 + v_0^2 \quad \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{2gx - \frac{c}{m}\,x^2 + v_0^2} = \sqrt{2gx - \omega_0^2 x^2 + v_0^2} \qquad (\text{mit } \omega_0^2 = c/m)$$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ ist dabei die Kreisfrequenz der periodischen Bewegung (Schwingung).

G9 $\quad y' \cdot \sqrt{a^2 + x^2} = y$

Zunächst *trennen* wir die Variablen, dann werden beide Seiten *integriert*:

$$y' \cdot \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{dy}{dx} \cdot \sqrt{a^2 + x^2} = y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}}_{\text{Integral } 123} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + \ln|C| = \ln\left|C\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)\right|$$

(*Rechenregel:* R1). Wir *entlogarithmieren* und erhalten die *allgemeine Lösung* der Dgl:

$$|y| = \left|C\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)\right| \quad \Rightarrow \quad y = \pm C\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) = K\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$$

(*Rechenregeln:* R5 und R6; $K = \pm C$)

G10

Bimolekulare chemische Reaktion 2. Ordnung vom Typ $A + B \rightarrow AB$

Ein Molekül A vereinigt sich mit einem Molekül B zu einem neuen Molekül AB. Zu Beginn der Reaktion $(t = 0)$ sind von *beiden* Bindungspartnern jeweils c Moleküle vorhanden. Die *Umsatzvariable* $x = x(t)$ beschreibt dann die *Anzahl* der zur Zeit t „verbrauchten" Moleküle vom Typ A bzw. B und damit die *Anzahl* der in dieser Zeit entstandenen *neuen* Moleküle AB. Sie genügt der Dgl

$$\frac{dx}{dt} = k(c - x)^2 \qquad (k > 0\text{: Geschwindigkeitskonstante})$$

Bestimmen Sie den *zeitlichen Verlauf* der *Umsatzvariablen* x. Wann kommt die chemische Reaktion zum *Stillstand*?

Wir *trennen* zunächst die Variablen und *integrieren* anschließend beide Seiten:

$$\frac{dx}{dt} = k(c - x)^2 = k(x - c)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{(x - c)^2} = k\,dt \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{(x - c)^2} = \underbrace{\int (x - c)^{-2}\,dx}_{\text{Integral 1 mit } a = 1,\ b = -c,\ n = -2} = k \cdot \int 1\,dt \quad \Rightarrow \quad \frac{(x - c)^{-1}}{-1 \cdot 1} = kt + K \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{x - c} = kt + K \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x - c} = -kt - K$$

Aus dem *Anfangswert* $x(0) = 0$ bestimmen wir die Integrationskonstante K (zu Beginn der chemischen Reaktion gibt es noch keine „neuen" Moleküle vom Typ AB, d. h. $x(0) = 0$):

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{0 - c} = 0 - K \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{c} = -K \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{c}$$

Somit gilt:

$$\frac{1}{x - c} = -kt - \frac{1}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x - c} = \frac{-ckt - 1}{c} \quad \Rightarrow \quad x - c = \frac{c}{-ckt - 1}$$

(letzter Rechenschritt: *Kehrwertbildung* auf beiden Seiten). Wir lösen diese Gleichung nach der *Umsatzvariablen* x auf und erhalten:

$$x = \frac{c}{-ckt - 1} + c = \frac{c + c(-ckt - 1)}{-ckt - 1} = \frac{c - c^2kt - c}{-ckt - 1} = \frac{-c^2kt}{-ckt - 1} = \frac{c^2kt}{ckt + 1}, \quad t \geq 0$$

Umformungen: Hauptnenner bilden, d. h. den Summand c mit $(-ckt - 1)$ erweitern.

Die chemische Reaktion kommt (theoretisch!) nach unendlich langer Reaktionszeit zum Stillstand (siehe Bild G-5):

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{c^2kt}{ckt + 1} = \lim_{t \to \infty} \frac{c^2k}{ck + \frac{1}{t}} =$$

$$= \frac{c^2k}{ck} = c$$

Dann sind sämtliche Moleküle beider Sorten A und B „verbraucht" und es sind genau $x = c$ Moleküle vom Typ AB entstanden.

Umformungen: Vor der Grenzwertbildung Zähler und Nenner gliedweise durch t dividieren.

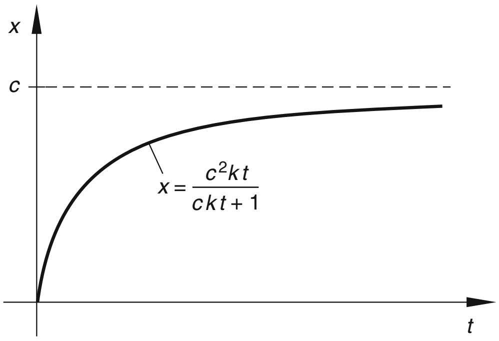


Bild G-5

G11 $x(x+1)\,y' + (x-2)\,y^2 = 0$

Das anfallende Integral soll dabei mit Hilfe der *Partialbruchzerlegung* gelöst werden.

Wir *trennen* zunächst die beiden Variablen:

$$x(x+1)\,y' + (x-2)\,y^2 = x(x+1)\,\frac{dy}{dx} + (x-2)\,y^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x(x+1)\,\frac{dy}{dx} = -(x-2)\,y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y^2} = -\frac{x-2}{x(x+1)}\,dx$$

Integration beider Seiten:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int y^{-2}\,dy = \frac{y^{-1}}{-1} = -\frac{1}{y} = -\int \frac{x-2}{x(x+1)}\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} = \int \frac{x-2}{x(x+1)}\,dx$$

Das Integral der *rechten* Seite lösen wir mittels *Partialbruchzerlegung* des Integranden wie folgt:

$$\frac{x-2}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + Bx}{x(x+1)} \quad \Rightarrow \quad A(x+1) + Bx = x - 2$$

(die Partialbrüche werden der Reihe nach mit $x+1$ bzw. x erweitert und auf den Hauptnenner $x(x+1)$ gebracht). Wir setzen für x der Reihe nach die Werte 0 und -1 ein und erhalten für die Konstanten A und B folgende Werte:

$$\left.\begin{array}{lll} \boxed{x = 0} & \Rightarrow & A = -2 \\ \boxed{x = -1} & \Rightarrow & -B = -3 \quad \Rightarrow \quad B = 3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-2}{x(x+1)} = -\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1}$$

Die *Integration* lässt sich jetzt leicht durchführen (das zweite Integral lösen wir durch die *Substitution* $u = x + 1$, $dx = du$):

$$\int \frac{x-2}{x(x+1)}\,dx = \int \left(-\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1}\right) dx = -2 \cdot \int \frac{dx}{x} + 3 \cdot \int \frac{dx}{\underbrace{x+1}_{u}} = -2 \cdot \int \frac{dx}{x} + 3 \cdot \int \frac{du}{u} =$$

$$= -2 \cdot \ln|x| + 3 \cdot \ln|u| + \ln|C| = -2 \cdot \ln|x| + 3 \cdot \ln|x+1| + \ln|C| =$$

$$= \ln|x|^{-2} + \ln|x+1|^3 + \ln|C| = \ln|x^{-2}| + \ln|(x+1)^3| + \ln|C| =$$

$$= \ln|C(x+1)^3 \cdot x^{-2}| = \ln\left|\frac{C(x+1)^3}{x^2}\right|$$

(Rechenregeln: R3 und R1). Damit erhalten wir die folgende *allgemeine Lösung*:

$$\frac{1}{y} = \int \frac{x-2}{x(x+1)}\,dx = \ln\left|\frac{C(x+1)^3}{x^2}\right| \quad \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{\ln\left|\dfrac{C(x+1)^3}{x^2}\right|}$$

1.2 Integration einer Differentialgleichung durch Substitution

Alle Differentialgleichungen in diesem Abschnitt lassen sich mit Hilfe einer geeigneten *Substitution* auf einfache Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückführen, die meist durch „*Trennung der Variablen*“ oder „*Variation der Konstanten*“ lösbar sind. Wir unterscheiden dabei folgende Substitutionstypen:

Typ *A* $y' = f(ax + by + c)\,, \quad$ Substitution: $u = ax + by + c$

Typ *B* $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)\,, \quad$ Substitution: $u = \frac{y}{x}$ (homogene Dgl)

Typ *C* $y' + g(x) \cdot y = h(x) \cdot y^n \quad (n \neq 1)\,, \quad$ Substitution: $u = y^{1-n}$ (Bernoullische Dgl)

Hinweise

(1) **Lehrbuch:** Band 2, Kapitel IV.2.3
Formelsammlung: Kapitel X.2.2

(2) Beachten Sie, dass die Substitutionsvariable u eine Funktion der Variablen x ist.

G12

$$2xyy' - x^2 = y^2$$

Die vollständige *Substitution* dieser Dgl vom Typ B lautet:

$$u = \frac{y}{x}\,, \quad y = xu\,, \quad y' = 1 \cdot u + u'x = u + xu' \qquad \text{(Ableitung von } y = xu \text{ nach der \textit{Produktregel})}$$

Sie führt auf die folgende Dgl für u:

$$2xyy' - x^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad 2x(xu)(u + xu') - x^2 = x^2u^2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2u(u + xu') = x^2 + x^2u^2 \;\Big|\, : x^2$$

$$\Rightarrow \quad 2u(u + xu') = 1 + u^2 \quad \Rightarrow \quad 2u^2 + 2xuu' = 1 + u^2 \quad \Rightarrow 2xuu' = 1 - u^2$$

Lösung durch „*Trennung der Variablen*“:

$$2xuu' = 2xu \cdot \frac{du}{dx} = 1 - u^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{u\,du}{1 - u^2} = \frac{dx}{2x} \quad \Rightarrow$$

$$\underbrace{\int \frac{u\,du}{1 - u^2}}_{\text{Integral 49 mit } a^2 = 1} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} \cdot \ln|1 - u^2| = \frac{1}{2} \cdot \ln|x| + \ln|C| \;\Bigg|\, \cdot (-2) \quad \Rightarrow$$

$$\ln|1 - u^2| = -\ln|x| - 2 \cdot \ln|C| = -\ln|x| - \ln|C|^2 = -\ln|x| - \ln C^2 = -(\ln|x| + \ln C^2) =$$

$$= -\ln|C^2x| = -1 \cdot \ln|C^2x| = \ln|C^2x|^{-1}$$

(*Rechenregeln:* R3, R1 und nochmals R3). Durch *Entlogarithmierung* folgt (*Rechenregeln:* R5 und R6):

$$|1 - u^2| = |C^2x|^{-1} = \frac{1}{|C^2x|} \quad \Rightarrow \quad 1 - u^2 = \pm\frac{1}{C^2x} = \frac{K}{x} \quad \Rightarrow \quad -u^2 = \frac{K}{x} - 1 \;\Bigg|\, \cdot (-1) \quad \Rightarrow$$

$$u^2 = -\frac{K}{x} + 1 = 1 - \frac{K}{x} = \frac{x - K}{x} \qquad \left(\text{mit } K = \pm\frac{1}{C^2}\right)$$

Rücksubstitution ($u = y/x$) liefert die gesuchte *Lösung*:

$$u^2 = \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2} = \frac{x - K}{x} \quad \Rightarrow \quad y^2 = x(x - K) = x^2 - Kx \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{x^2 - Kx}$$

G13

$y' = (1 + x + y)^2$ Anfangswert: $y(0) = 2$

Diese Dgl ist vom Typ A und wird durch die *Substitution* $u = 1 + x + y$ wie folgt gelöst:

$$u = 1 + x + y, \quad u' = 1 + y' \quad \Rightarrow \quad y' = u' - 1 \quad \Rightarrow$$

$$y' = (1 + x + y)^2 \quad \Rightarrow \quad u' - 1 = u^2 \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{du}{dx} = 1 + u^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{1 + u^2} = dx$$

Nach der bereits vorgenommenen *Trennung der Variablen* werden beide Seiten *integriert*:

$$\int \frac{du}{1 + u^2} = \int 1\,dx \quad \Rightarrow \quad \arctan u = x + C \quad \Rightarrow \quad u = \tan(x + C)$$

Durch *Rücksubstitution* erhalten wir die gesuchte *allgemeine Lösung*:

$$u = 1 + x + y = \tan(x + C) \quad \Rightarrow \quad y = \tan(x + C) - x - 1$$

Aus dem *Anfangswert* $y(0) = 2$ bestimmen wir die *spezielle Lösung*:

$$y(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad \tan C - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \tan C = 3 \quad \Rightarrow \quad C = \arctan 3 = 1{,}2490 \qquad \text{(Bogenmaß!)}$$

$$y = \tan(x + 1{,}2490) - x - 1$$

G14

$2yy' + x - y^2 = 0$

Wir bringen diese Dgl zunächst auf eine andere Form, um zu erkennen, mit welcher Substitution sie gelöst werden kann:

$$2yy' + x - y^2 = 0 \,|: 2y \quad \Rightarrow \quad y' + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y} - \frac{1}{2}y = 0 \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{y} = -\frac{1}{2}xy^{-1}$$

Die Dgl ist also eine Bernoulli-Dgl $\left(\text{Typ } C \text{ mit } g(x) = -\frac{1}{2},\ h(x) = -\frac{1}{2}x \text{ und } n = -1\right)$. Mit der *Substitution* $u = y^{1-n} = y^{1-(-1)} = y^2$ erreichen wir unser Ziel:

$$u = y^2, \quad u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 2yy'$$

(u hängt von y, y wiederum von x ab → Kettenregel anwenden). Wir setzen diese Ausdrücke in die ursprüngliche Form der *Bernoulli-Dgl* ein und erhalten eine *lineare* Dgl 1. Ordnung:

$$2yy' + x - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u' + x - u = 0 \quad \Rightarrow \quad u' - u = -x$$

Diese Dgl lösen wir durch „*Variation der Konstanten*“. Zunächst wird die zugehörige *homogene* Dgl durch „*Trennung der Variablen*“ gelöst:

$$u' - u = 0 \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{du}{dx} = u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = dx \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{du}{u} = \int 1\,dx \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = x + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln|u| - \ln|C| = \ln\left|\frac{u}{C}\right| = x$$

(*Rechenregel:* R2). *Entlogarithmierung* liefert dann (*Rechenregeln:* R5 und R6):

$$\left|\frac{u}{C}\right| = e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{C} = \pm e^x \quad \Rightarrow \quad u = \pm C \cdot e^x = K \cdot e^x \qquad (\text{mit } K = \pm C)$$

Die *inhomogene* lineare Dgl lösen wir durch *„Variation der Konstanten“* $(K \to K(x))$. Lösungsansatz (mit der benötigten Ableitung):

$$u = K(x) \cdot \mathrm{e}^{x}, \quad u' = K'(x) \cdot \mathrm{e}^{x} + K(x) \cdot \mathrm{e}^{x} \qquad (\textit{Produktregel})$$

Einsetzen dieser Ausdrücke in die *inhomogene* Dgl führt zu:

$$u' - u = -x \quad \Rightarrow \quad K'(x) \cdot \mathrm{e}^{x} + \underbrace{K(x) \cdot \mathrm{e}^{x} - K(x) \cdot \mathrm{e}^{x}}_{0} = K'(x) \cdot \mathrm{e}^{x} = -x \quad \Rightarrow \quad K'(x) = -x \cdot \mathrm{e}^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad K(x) = \int K'(x)\,dx = -\underbrace{\int x \cdot \mathrm{e}^{-x}\,dx}_{\text{Integral 313 mit } a = -1} = -(-x-1) \cdot \mathrm{e}^{-x} + K_1 = (x+1) \cdot \mathrm{e}^{-x} + K_1$$

Damit gilt:

$$u = K(x) \cdot \mathrm{e}^{x} = [(x+1) \cdot \mathrm{e}^{-x} + K_1] \cdot \mathrm{e}^{x} = x + 1 + K_1 \cdot \mathrm{e}^{x}$$

Durch *Rücksubstitution* finden wir für die vorgegebene *Bernoulli-Dgl* die folgende *allgemeine* Lösung:

$$y^2 = u = x + 1 + K_1 \cdot \mathrm{e}^{x} \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{x + 1 + K_1 \cdot \mathrm{e}^{x}}$$

G15 $\quad xy' = y(\ln x - \ln y + 1)$

Diese Dgl ist vom Typ B, denn sie kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$xy' = y(\ln x - \ln y + 1) = y[1 - (\ln y - \ln x)] = y\left[1 - \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right] \quad \Rightarrow \quad y' = \left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left[1 - \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

(*Rechenregel:* R2). Mit der *Substitution*

$$u = \frac{y}{x}, \quad y = xu \quad \Rightarrow \quad y' = 1 \cdot u + u'x = xu' + u \qquad (\text{Ableitung mit der } \textit{Produktregel})$$

erhalten wir eine Dgl für u, die sich durch *„Trennung der Variablen“* lösen lässt:

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left[1 - \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right] \quad \Rightarrow \quad xu' + u = u(1 - \ln u) = u - u \cdot \ln u \quad \Rightarrow$$

$$xu' = -u \cdot \ln u \quad \Rightarrow \quad x\,\frac{du}{dx} = -u \cdot \ln u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u \cdot \ln u} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\underbrace{\int \frac{du}{u \cdot \ln u}}_{\text{Integral 343}} = -\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|\ln u| = -\ln|x| + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln|\ln u| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

(*Rechenregel:* R2). Wir *entlogarithmieren* und erhalten (*Rechenregeln:* R5, R6 und nochmals R5):

$$|\ln u| = \left|\frac{C}{x}\right| \quad \Rightarrow \quad \ln u = \pm\frac{C}{x} = \frac{K}{x} \quad \Rightarrow \quad u = \mathrm{e}^{K/x} \qquad (\text{mit } K = \pm C)$$

Rücksubstitution führt schließlich zur gesuchten *Lösung*:

$$y = xu = x \cdot \mathrm{e}^{K/x} \qquad (K \in \mathbb{R})$$

G16

$$x^2 y' = y(x - y)$$

Durch eine geringfügige Umstellung erkennt man, dass diese Dgl vom Typ B ist:

$$x^2 y' = y(x - y) = xy - y^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{xy - y^2}{x^2} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Sie lässt sich also durch die folgende *Substitution* in eine durch *„Trennung der Variablen"* lösbare Dgl überführen:

$$u = \frac{y}{x}, \quad y = xu \quad \Rightarrow \quad y' = 1 \cdot u + u'x = u + xu' \qquad \text{(Ableitung mit der } \textit{Produktregel}\text{)}$$

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad u + xu' = u - u^2 \quad \Rightarrow \quad xu' = x \cdot \frac{du}{dx} = -u^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u^2} = -\frac{dx}{x}$$

Integration beider Seiten führt zur Lösung für u:

$$\int \frac{du}{u^2} = -\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int u^{-2}\, du = -\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u} = -\ln|x| + C \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{u} = \ln|x| - C \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{\ln|x| - C} \qquad \text{(nach Kehrwertbildung)}$$

Durch *Rücksubstitution* erhalten wir die gesuchte *Lösung*:

$$y = xu = x \cdot \frac{1}{\ln|x| - C} = \frac{x}{\ln|x| - C}$$

G17

$$xy' + y = -xy^2 \quad \text{oder} \quad y' + \frac{1}{x}\, y = -y^2 \qquad \text{Anfangswert: } y(1) = 0{,}2$$

Mit Hilfe der Substitution $u = y^{1-2} = y^{-1}$ lässt sich diese *Bernoulli-Dgl* (Typ C mit $g(x) = 1/x$, $h(x) = -1$ und $n = 2$) auf eine *lineare* Dgl zurückführen:

$$u = y^{-1} = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{u} = u^{-1} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -u^{-2} \cdot u' = \frac{-u'}{u^2}$$

(differenziert wurde nach der *Kettenregel*, da y von u und u wiederum von x abhängt)

Vollständige Substitution: $y = u^{-1} = \dfrac{1}{u}$, $y' = \dfrac{-u'}{u^2}$

$$xy' + y = -xy^2 \quad \Rightarrow \quad x \cdot \frac{-u'}{u^2} + \frac{1}{u} = -x \cdot \frac{1}{u^2} \,\Big|\, \cdot u^2 \quad \Rightarrow \quad -xu' + u = -x\,.$$

Diese *lineare* Dgl 1. Ordnung lösen wir durch *„Variation der Konstanten"*. Zunächst wird die zugehörige *homogene* Dgl durch *„Trennung der Variablen"* gelöst:

$$-xu' + u = 0 \quad \Rightarrow \quad -xu' = -x \cdot \frac{du}{dx} = -u \quad \Rightarrow \quad x \cdot \frac{du}{dx} = u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = \ln|x| + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = \ln|Cx| \quad \Rightarrow \quad |u| = |Cx| \quad \Rightarrow$$

$$u = \pm Cx = Kx \qquad (\text{mit } K = \pm C)$$

Rechenregeln: R1, R5 und R6

„Variation der Konstanten" $(K \to K(x))$ führt zu dem folgenden *Lösungsansatz* für die *inhomogene* Dgl (Ableitung nach der *Produktregel*):

$$u = K(x) \cdot x, \quad u' = K'(x) \cdot x + 1 \cdot K(x) = K'(x) \cdot x + K(x)$$

Einsetzen in die *inhomogene* Dgl, Bestimmen der noch unbekannten *Faktorfunktion* $K(x)$:

$$-xu' + u = -x \quad \Rightarrow \quad -x(K'(x) \cdot x + K(x)) + K(x) \cdot x = -x \quad \Rightarrow$$

$$-x^2 \cdot K'(x) \underbrace{-x \cdot K(x) + x \cdot K(x)}_{0} = -x \quad \Rightarrow \quad -x^2 \cdot K'(x) = -x \quad \Rightarrow \quad K'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow$$

$$K(x) = \int K'(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + K^*$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl: $u = K(x) \cdot x = (\ln|x| + K^*)\,x$

Durch *Rücksubstitution* erhalten wir schließlich die *Lösung* der *Bernoulli-Dgl*. Sie lautet:

$$y = \frac{1}{u} = \frac{1}{(\ln|x| + K^*)\,x} = \frac{1}{x \cdot \ln|x| + K^* \cdot x}$$

Spezielle (partikuläre) Lösung für den Anfangswert $y(1) = 0{,}2$:

$$y(1) = 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(\ln 1 + K^*) \cdot 1} = \frac{1}{0 + K^*} = \frac{1}{K^*} = 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad K^* = 5$$

$$y = \frac{1}{(\ln|x| + 5)\,x} = \frac{1}{x \cdot \ln|x| + 5x}$$

G18 $\quad y' + y = (\cos x - \sin x)\,y^2$

Durch die *Substitution* $u = y^{1-2} = y^{-1}$ lässt sich diese *Bernoulli-Dgl* (Typ C mit $g(x) = 1$, $h(x) = \cos x - \sin x$ und $n = 2$) in eine *lineare* Dgl verwandeln:

$$u = y^{-1}, \quad y = u^{-1}, \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -u^{-2} \cdot u' = \frac{-u'}{u^2}$$

(differenziert wurde mit Hilfe der *Kettenregel*, da y von u und u wiederum von x abhängt)

Vollständige Substitution: $y = u^{-1} = \dfrac{1}{u}$, $y' = \dfrac{-u'}{u^2}$

$$y' + y = (\cos x - \sin x)\,y^2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{u} = (\cos x - \sin x) \cdot \frac{1}{u^2} \quad \Big| \cdot u^2 \quad \Rightarrow$$

$$-u' + u = \cos x - \sin x \quad \Rightarrow \quad u' - u = -\cos x + \sin x \quad \Rightarrow \quad u' - u = \sin x - \cos x$$

Diese *lineare* Dgl mit konstanten Koeffizienten lösen wir nach der Methode *„Aufsuchen einer partikulären Lösung"*. Zunächst wird die *homogene* Dgl $u' - u = 0$ durch den *Exponentialansatz* $u_0 = C \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$ gelöst:

$$u_0 = C \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad u_0' = \lambda C \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad u_0' - u_0 = \lambda C \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} - C \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = \underbrace{C \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}}_{\neq 0}(\lambda - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$$

Damit ist $u_0 = C \cdot \mathrm{e}^{x}$ die *allgemeine* Lösung der *homogenen* Dgl.

Partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl

Aus der Tabelle (FS: Kapitel X.2.4.4 bzw. Bd. 2: Kapitel V.2.5) entnehmen wir den folgenden *Lösungsansatz* für eine *partikuläre* Lösung u_P:

$$\text{Störglied } g(x) = \sin x - \cos x \quad \xrightarrow{\omega = 1} \quad u_P = C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x$$

Mit diesem Ansatz gehen wir in die *inhomogene* Dgl ein:

$$u_P = C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x, \quad u'_P = C_1 \cdot \cos x - C_2 \cdot \sin x$$

$$u' - u = C_1 \cdot \cos x - C_2 \cdot \sin x - C_1 \cdot \sin x - C_2 \cdot \cos x = \sin x - \cos x$$

Wir ordnen die Glieder und vergleichen dann die Sinus- bzw. Kosinusterme beider Seiten. Dieser *Koeffizientenvergleich* liefert zwei leicht lösbare Gleichungen für die beiden Unbekannten C_1 und C_2:

$$(-C_1 - C_2) \cdot \sin x + (C_1 - C_2) \cdot \cos x = 1 \cdot \sin x - 1 \cdot \cos x$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & -C_1 - C_2 = 1 \\ \text{(II)} & C_1 - C_2 = -1 \end{array}\right\} +$$

$$-2C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0; \qquad \text{(II)} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1 + C_2 = -1 + 0 = -1$$

Somit gilt: $u_P = -1 \cdot \sin x + 0 \cdot \cos x = -\sin x$

Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* linearen Dgl lautet damit: $u = u_0 + u_P = C \cdot e^x - \sin x$

Durch *Rücksubstitution* erhalten wir schließlich die gesuchte Lösung der *Bernoulli-Dgl*:

$$y = \frac{1}{u} = \frac{1}{C \cdot e^x - \sin x}$$

G19 $\quad xyy' = 4x^2 + y^2$

Diese Dgl ist vom Typ B, denn sie lässt sich in der Form

$$y' = \frac{4x^2 + y^2}{xy} = \frac{4x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{4x}{y} + \frac{y}{x} = 4\left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{y}{x}\right) = 4\left(\frac{y}{x}\right)^{-1} + \left(\frac{y}{x}\right)$$

darstellen (x/y ist der *Kehrwert* von y/x). Die *Substitution*

$$u = \frac{y}{x}, \quad y = xu \quad \Rightarrow \quad y' = 1 \cdot u + u'x = u + xu' \qquad \text{(Ableitung mit der } \textit{Produktregel}\text{)}$$

führt dann zu einer Dgl, die sich durch *„Trennung der Variablen"* lösen lässt:

$$y' = 4\left(\frac{y}{x}\right)^{-1} + \left(\frac{y}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad u + xu' = 4u^{-1} + u = \frac{4}{u} + u \quad \Rightarrow \quad xu' = \frac{4}{u} \quad \Rightarrow$$

$$xu' = x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{4}{u} \quad \Rightarrow \quad u\,du = \frac{4}{x}\,dx \quad \Rightarrow \quad \int u\,du = 4 \cdot \int \frac{1}{x}\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}u^2 = 4(\ln|x| + \ln|C|) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}u^2 = 4 \cdot \ln|Cx| \quad \Rightarrow \quad u^2 = 8 \cdot \ln|Cx| \quad \Rightarrow$$

$$u = \pm\sqrt{8 \cdot \ln|Cx|} = \pm 2 \cdot \sqrt{2 \cdot \ln|Cx|}$$

Rechenregel: R1

Durch *Rücksubstitution* erhalten wir schließlich die *allgemeine* Lösung der Dgl:

$$y = xu = \pm 2x \cdot \sqrt{2 \cdot \ln |Cx|}$$

G20 $\quad y' = 2(2x + y + 1)^{-1}$

Diese Dgl ist vom Typ A. Mit der *Substitution*

$$u = 2x + y + 1, \quad u' = 2 + y' \quad \Rightarrow \quad y' = u' - 2$$

erhalten wir eine Dgl für die Variable u, die durch *„Trennung der Variablen"* lösbar ist:

$$y' = 2(2x + y + 1)^{-1} \quad \Rightarrow \quad u' - 2 = 2u^{-1} = \frac{2}{u} \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{2}{u} + 2 = \frac{2 + 2u}{u} \quad \Rightarrow$$

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{2 + 2u}{u} = \frac{2(u + 1)}{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{u\,du}{u + 1} = 2\,dx \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\int \frac{u\,du}{u + 1}}_{\text{Integral } 4 \text{ mit } a = b = 1} = \int 2\,dx \quad \Rightarrow$$

$$u - \ln |u + 1| = 2x + C$$

Durch *Rücksubstitution* erhalten wir die *allgemeine* Lösung in *impliziter* Form:

$$2x + y + 1 - \ln |2x + y + 2| = 2x + C \quad \Rightarrow \quad y - \ln |2x + y + 2| = C - 1 = K \qquad (K = C - 1)$$

G21 $\quad x^2 y' = y^2 - xy \qquad$ Anfangswert: $y(-1) = 1$

Dividiert man die Dgl gliedweise durch x^2, so erhält man:

$$y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right)$$

Diese Dgl ist also vom Typ B. Wir lösen sie durch die *Substitution*

$$u = \frac{y}{x}, \quad y = xu, \quad y' = 1 \cdot u + u'x = u + xu' \qquad \text{(Ableitung mit der \textit{Produktregel})}$$

schrittweise wie folgt (*„Trennung der Variablen"*):

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad u + xu' = u^2 - u \quad \Rightarrow \quad xu' = x \cdot \frac{du}{dx} = u^2 - 2u \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{u^2 - 2u} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\int \frac{du}{u^2 - 2u}}_{\text{Integral } 63 \text{ mit } a = 1,\ b = -2,\ c = 0} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \ln \left|\frac{u - 2}{u}\right| = \ln |x| + \ln |C| = \ln |Cx| \quad \Big| \cdot 2 \quad \Rightarrow$$

$$\ln \left|\frac{u - 2}{u}\right| = 2 \cdot \ln |Cx| = \ln |Cx|^2 = \ln (Cx)^2$$

(*Rechenregeln:* R1 und R3). *Entlogarithmierung* liefert (*Rechenregeln:* R5 und R6):

$$\left| \frac{u-2}{u} \right| = (Cx)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{u-2}{u} = \pm (Cx)^2 = \pm C^2 x^2 = K x^2 \qquad (\text{mit } K = \pm C^2) \quad \Rightarrow$$

$$u - 2 = K x^2 u \quad \Rightarrow \quad u - K x^2 u = 2 \quad \Rightarrow \quad (1 - K x^2)\, u = 2 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{2}{1 - K x^2}$$

Durch *Rücksubstitution* erhalten wir schließlich die *allgemeine Lösung*:

$$y = x u = x \cdot \frac{2}{1 - K x^2} = \frac{2x}{1 - K x^2}$$

Spezielle Lösung für den *Anfangswert* $y(-1) = 1$:

$$\frac{-2}{1-K} = 1 \quad \Rightarrow \quad -2 = 1 - K \quad \Rightarrow \quad K = 3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2x}{1 - 3x^2}$$

G22 $(1 + x^2)\, y y' = x (1 + y^2)$ Anfangswert: $y(1) = -3$

Lösen Sie diese Dgl mit Hilfe der *Substitution* $u = 1 + y^2$.

Mit der vorgeschlagenen Substitution gelingt die Integration der Dgl durch *„Trennung der Variablen"*:

$$u = 1 + y^2, \quad u' = 2 y y' \qquad (\textit{Kettenregel}, \text{ denn } y \text{ ist eine Funktion von } x) \quad \Rightarrow \quad y y' = \frac{1}{2}\, u'$$

$$(1 + x^2)\, y y' = x (1 + y^2) \quad \Rightarrow \quad (1 + x^2) \cdot \frac{1}{2}\, u' = x u \quad \Rightarrow \quad (1 + x^2)\, u' = 2 x u \quad \Rightarrow$$

$$(1 + x^2) \cdot \frac{du}{dx} = 2 x u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = \frac{2x\,dx}{1 + x^2} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u} = 2 \cdot \underbrace{\int \frac{x\,dx}{1 + x^2}}_{\text{Integral } 32 \text{ mit } a^2 = 1} \quad \Rightarrow$$

$$\ln|u| = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + x^2) + \ln|C| = \ln(1 + x^2) + \ln|C| = \ln|C(1 + x^2)|$$

(*Rechenregel:* R1). *Entlogarithmierung* liefert (*Rechenregeln:* R5 und R6):

$$|u| = |C(1 + x^2)| \quad \Rightarrow \quad u = \pm C (1 + x^2) = K (1 + x^2) \qquad (\text{mit } K = \pm C)$$

Rücksubstitution führt schließlich zur *allgemeinen Lösung*:

$$u = K(1 + x^2) = 1 + y^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = K(1 + x^2) - 1 \quad \Rightarrow \quad y = \pm \sqrt{K(1 + x^2) - 1}$$

Spezielle Lösung für den Anfangswert $y(1) = -3$:

$$y(1) = -3 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{K(1 + 1) - 1} = -3 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2K - 1} = 3 \quad \Rightarrow \quad 2K - 1 = 9 \quad \Rightarrow \quad K = 5$$

$$y = -\sqrt{5(1 + x^2) - 1} = -\sqrt{5 + 5x^2 - 1} = -\sqrt{4 + 5x^2} = -\sqrt{5x^2 + 4}$$

Anmerkung: Wegen $y(1) = -3 < 0$ ist das *negative* Vorzeichen in der allgemeinen Lösung zu nehmen.

G23 $y' + 4y = 2\sqrt{y}$ oder $y' + 4y = 2y^{1/2}$

Mit der *Substitution* $u = y^{1-1/2} = y^{1/2} = \sqrt{y}$ überführen wir diese *Bernoulli-Dgl* (Typ C mit $g(x) = 4$, $h(x) = 2$ und $n = 1/2$) in eine *lineare* Dgl:

$$u = \sqrt{y}, \quad y = u^2, \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot u'$$

Die Ableitung wurde mit der *Kettenregel* gebildet, da y von u und u wiederum von x abhängt. Die *vollständige Substitution* lautet also:

$$y = u^2, \quad \sqrt{y} = u, \quad y' = 2uu'$$

Wir erhalten folgende *lineare* Dgl:

$$y' + 4y = 2\sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad 2uu' + 4u^2 = 2u \,|: 2u \quad \Rightarrow \quad u' + 2u = 1\,.$$

Diese Dgl lösen wir durch *„Variation der Konstanten“*. Die benötigte Lösung der *homogenen* Dgl $u' + 2u = 0$ erhalten wir am einfachsten mit einem *Exponentialansatz*:

$$u = K \cdot e^{\lambda x}, \quad u' = \lambda K \cdot e^{\lambda x}$$

$$u' + 2u = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda K \cdot e^{\lambda x} + 2K \cdot e^{\lambda x} = \underbrace{K \cdot e^{\lambda x}}_{\neq 0} \cdot (\lambda + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2$$

Somit ist $u = K \cdot e^{-2x}$ die Lösung der *homogenen* linearen Dgl.

„Variation der Konstanten“ führt dann zu dem folgenden *Lösungsansatz* für die *inhomogene* lineare Dgl $(K \rightarrow K(x))$:

$$u = K(x) \cdot e^{-2x}, \quad u' = K'(x) \cdot e^{-2x} - 2K(x) \cdot e^{-2x} \qquad (\textit{Produkt- und Kettenregel})$$

Diese Ausdrücke werden in die *inhomogene* Dgl eingesetzt und daraus die unbekannte *Faktorfunktion* $K(x)$ bestimmt:

$$u' + 2u = 1 \quad \Rightarrow \quad K'(x) \cdot e^{-2x} \underbrace{- 2K(x) \cdot e^{-2x} + 2K(x) \cdot e^{-2x}}_{0} = 1 \quad \Rightarrow \quad K'(x) \cdot e^{-2x} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$K'(x) = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad K(x) = \int K'(x)\,dx = \underbrace{\int e^{2x}\,dx}_{\text{Integral 312 mit } a = 2} = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C$$

Somit gilt:

$$u = K(x) \cdot e^{-2x} = \left(\frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C\right) \cdot e^{-2x} = \frac{1}{2} + C \cdot e^{-2x} = C \cdot e^{-2x} + \frac{1}{2}$$

Rücksubstitution liefert dann die gesuchte Lösung der *Bernoulli-Dgl*:

$$y = u^2 = \left(C \cdot e^{-2x} + \frac{1}{2}\right)^2$$

G24 $y' - \frac{2}{x}\,y = \frac{x}{y}$ Anfangswert: $y(-1) = 2$

Es handelt sich um eine Bernoulli-Dgl:

$$y' - \frac{2}{x}\,y = \frac{x}{y} = x\,y^{-1} \qquad \left(\text{mit } g(x) = -\frac{2}{x}\,,\quad h(x) = x \text{ und } n = -1\right)$$

Durch die *Substitution* $u = y^{1-n} = y^{1-(-1)} = y^2$ lässt sich diese Dgl in eine *lineare* Dgl überführen:

$$u = y^2\,,\quad u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = 2\,y\,y'$$

(da u eine Funktion von y ist und y wiederum eine Funktion von x, muss die Ableitung von u nach x mit der *Kettenregel* gebildet werden). Wir multiplizieren die *Bernoulli-Dgl* beidseitig mit $2\,y$ und führen dann die Substitution wie folgt durch $(2\,y\,y' = u',\ y^2 = u)$:

$$2\,y\,y' - \frac{4}{x}\,y^2 = 2\,x \quad\Rightarrow\quad u' - \frac{4}{x}\,u = 2\,x$$

Diese *lineare* Dgl soll durch „*Variation der Konstanten*" gelöst werden. Dafür benötigen wir zunächst die Lösung der zugehörigen *homogenen* Dgl, die wir durch „*Trennung der Variablen*" erhalten:

$$u' - \frac{4}{x}\,u = 0 \quad\Rightarrow\quad u' = \frac{du}{dx} = \frac{4}{x}\,u \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{u} = \frac{4}{x}\,dx = 4\cdot\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow$$

$$\int\frac{du}{u} = 4\cdot\int\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \ln|u| = 4\cdot\ln|x| + \ln|C| = \ln|x|^4 + \ln|C| = \ln x^4 + \ln|C| = \ln|C\,x^4|$$

(*Rechenregeln:* R3 und R1). *Entlogarithmieren* liefert dann (*Rechenregeln:* R5 und R6):

$$|u| = |C\,x^4| \quad\Rightarrow\quad u = \pm C\,x^4 = K\,x^4 \qquad (\text{mit } K = \pm C)$$

Hieraus erhalten wir durch „*Variation der Konstanten*" den folgenden Lösungsansatz für die *inhomogene* lineare Dgl $(K \rightarrow K(x))$:

$$u = K(x)\cdot x^4\,,\quad u' = K'(x)\cdot x^4 + 4\,x^3\cdot K(x) \qquad (\text{Ableitung mit der } \textit{Produktregel})$$

Einsetzen dieser Ausdrücke in die *inhomogene* Dgl führt zu einer leicht lösbaren Dgl 1. Ordnung für die noch unbekannte Faktorfunktion $K(x)$:

$$u' - \frac{4}{x}\,u = 2\,x \quad\Rightarrow\quad K'(x)\cdot x^4 + 4\,x^3\cdot K(x) - \frac{4}{x}\cdot K(x)\cdot x^4 = 2\,x \quad\Rightarrow$$

$$K'(x)\cdot x^4 + \underbrace{4\,x^3\cdot K(x) - 4\,x^3\cdot K(x)}_{0} = 2\,x \quad\Rightarrow\quad K'(x)\cdot x^4 = 2\,x \quad\Rightarrow\quad K'(x) = 2\,x^{-3} \quad\Rightarrow$$

$$K(x) = \int K'(x)\,dx = 2\cdot\int x^{-3}\,dx = 2\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + K_1 = -x^{-2} + K_1$$

Damit gilt:

$$u = K(x)\cdot x^4 = (-x^{-2} + K_1)\cdot x^4 = -x^2 + K_1\cdot x^4 = K_1\cdot x^4 - x^2$$

Rücksubstitution liefert dann die gesuchte Lösung der *Bernoulli-Dgl* (zunächst in der *impliziten* Form):

$$y^2 = u = K_1\cdot x^4 - x^2 \quad\Rightarrow\quad y = \pm\sqrt{K_1\cdot x^4 - x^2}$$

Lösung für den Anfangswert $y(-1) = 2$ (Einsetzen in die implizite Lösung):

$$K_1\cdot 1 - 1 = K_1 - 1 = 4 \quad\Rightarrow\quad K = 5$$

$$y = +\sqrt{5\,x^4 - x^2}$$

Anmerkung: Wegen $y(-1) = 2 > 0$ ist das *positive* Vorzeichen der allgemeinen Lösung zu nehmen.

1.3 Lineare Differentialgleichungen

Alle Differentialgleichungen in diesem Abschnitt lassen sich nach der Methode „*Variation einer Konstanten*" lösen.

Hinweise

Lehrbuch: Band 2, Kapitel IV.2.5
Formelsammlung: Kapitel X.2.4.3.1

G25

$$y' + \frac{y}{x+1} = \mathrm{e}^{-x}$$

Homogene Dgl (Lösung durch „Trennung der Variablen")

$$y' + \frac{y}{x+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x+1} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\underbrace{\int \frac{dx}{x+1}}_{\text{Integral 2 mit } a\,=\,b\,=\,1} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\ln|x+1| + \ln|C| = \ln\left|\frac{C}{x+1}\right|$$

(*Rechenregel:* R2). Wir *entlogarithmieren* (*Rechenregeln:* R5 und R6):

$$|y| = \left|\frac{C}{x+1}\right| \quad \Rightarrow \quad y = \pm\frac{C}{x+1} = \frac{K}{x+1} \qquad (\text{mit } K = \pm C)$$

Variation der Konstanten: $K \rightarrow K(x)$

Der *Lösungsansatz* $y = \frac{K(x)}{x+1}$ wird mit der zugehörigen Ableitung (*Quotientenregel* anwenden)

$$y' = \frac{K'(x) \cdot (x+1) - 1 \cdot K(x)}{(x+1)^2} = \frac{K'(x)}{x+1} - \frac{K(x)}{(x+1)^2}$$

in die *inhomogene* Dgl eingesetzt und die (noch unbekannte) Funktion $K(x)$ bestimmt:

$$y' + \frac{y}{x+1} = \frac{K'(x)}{x+1} \underbrace{-\frac{K(x)}{(x+1)^2} + \frac{K(x)}{(x+1)^2}}_{0} = \frac{K'(x)}{x+1} = \mathrm{e}^{-x} \quad \Rightarrow \quad K'(x) = (x+1) \cdot \mathrm{e}^{-x} \quad \Rightarrow$$

$$K(x) = \int K'(x)\,dx = \int (x+1) \cdot \mathrm{e}^{-x}\,dx = \underbrace{\int x \cdot \mathrm{e}^{-x}\,dx}_{\text{Integral 313 mit } a\,=\,-1} + \underbrace{\int \mathrm{e}^{-x}\,dx}_{\text{Integral 312 mit } a\,=\,-1} =$$

$$= (-x-1) \cdot \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + C = (-x-1-1) \cdot \mathrm{e}^{-x} + C = -(x+2) \cdot \mathrm{e}^{-x} + C$$

Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Dgl lautet somit:

$$y = \frac{K(x)}{x+1} = \frac{-(x+2) \cdot \mathrm{e}^{-x} + C}{x+1}$$

G26

$$y' + 4xy = 4x \cdot e^{-2x^2}$$

Wir lösen zunächst die zugehörige *homogene* Dgl $y' + 4xy = 0$ durch *„Trennung der Variablen"*:

$$y' + 4xy = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -4xy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -4xy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -4x\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (-4x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -2x^2 + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln|y| - \ln|C| = \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -2x^2 \quad \Rightarrow$$

$$\left|\frac{y}{C}\right| = e^{-2x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{C} = \pm e^{-2x^2} \quad \Rightarrow \quad y = \pm C \cdot e^{-2x^2} = K \cdot e^{-2x^2} \qquad (\text{mit } K = \pm C^2)$$

Rechenregeln: R2, R5 und R6

Variation der Konstanten

Wir ersetzen die Konstante K durch die (noch unbekannte) *Funktion* $K(x)$ und gehen mit dem *Lösungsansatz* $y = K(x) \cdot e^{-2x^2}$ in die *inhomogene* Dgl, wobei wir noch die Ableitung des Lösungsansatzes benötigen (*Produktregel*, Ableitung des rechten Faktors mit der *Kettenregel*):

$$y = \underbrace{K(x)}_{u} \cdot \underbrace{e^{-2x^2}}_{v} \quad \Rightarrow \quad y' = u'v + v'u = K'(x) \cdot e^{-2x^2} - 4x \cdot e^{-2x^2} \cdot K(x)$$

$$y' + 4xy = K'(x) \cdot e^{-2x^2} \underbrace{-4x \cdot K(x) \cdot e^{-2x^2} + 4x \cdot K(x) \cdot e^{-2x^2}}_{0} = 4x \cdot e^{-2x^2} \quad \Rightarrow$$

$$K'(x) \cdot e^{-2x^2} = 4x \cdot e^{-2x^2} \quad \Rightarrow \quad K'(x) = 4x \quad \Rightarrow \quad K(x) = \int K'(x)\,dx = \int 4x\,dx = 2x^2 + C$$

Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* linearen Dgl lautet somit:

$$y = K(x) \cdot e^{-2x^2} = (2x^2 + C) \cdot e^{-2x^2}$$

G27

$$y' - \frac{1}{x}\,y = \frac{x^2 + x + 1}{x} \qquad \text{Anfangswert: } y(1) = -3$$

Homogene Dgl (Lösung durch „Trennung der Variablen")

$$y' - \frac{1}{x}\,y = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\,y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C| = \ln|Cx|$$

(*Rechenregel:* R1). Durch Entlogarithmierung gewinnen wir die Lösung der *homogenen* Dgl (*Rechenregeln:* R5 und R6):

$$|y| = |Cx| \quad \Rightarrow \quad y = \pm Cx = Kx \qquad (\text{mit } K = \pm C)$$

Variation der Konstanten: $K \rightarrow K(x)$

Mit dem *Lösungsansatz* $y = K(x) \cdot x$ und der mit Hilfe der *Produktregel* gewonnenen Ableitung

$$y' = K'(x) \cdot x + 1 \cdot K(x) = K'(x) \cdot x + K(x)$$

gehen wir in die *inhomogene* Dgl ein und bestimmen die noch unbekannte *Faktorfunktion* $K(x)$:

$$y' - \frac{1}{x}\,y = K'(x) \cdot x + K(x) - \frac{1}{\cancel{x}} \cdot K(x) \cdot \cancel{x} = K'(x) \cdot x + \underbrace{K(x) - K(x)}_{0} =$$

$$= K'(x) \cdot x = \frac{x^2 + x + 1}{x} \quad \Rightarrow \quad K'(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow$$

$$K(x) = \int K'(x)\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = x + \ln|x| - \frac{1}{x} + C$$

Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Dgl lautet somit:

$$y = K(x) \cdot x = \left(x + \ln|x| - \frac{1}{x} + C\right) x = x^2 + x \cdot \ln|x| - 1 + Cx = x^2 + Cx + x \cdot \ln|x| - 1$$

Spezielle Lösung für den Anfangswert $y(1) = -3$:

$$y(1) = -3 \quad \Rightarrow \quad 1 + C + 1 \cdot \underbrace{\ln 1}_{0} - 1 = -3 \quad \Rightarrow \quad C = -3 \quad \Rightarrow \quad y = x^2 - 3x + x \cdot \ln|x| - 1$$

G28

$$y' \cdot \sin x - y \cdot \cos x = 4 \cdot \sin^4 x$$

Die Lösung der zugehörigen *homogenen* Dgl erhalten wir durch *„Trennung der Variablen"*:

$$y' \cdot \sin x - y \cdot \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad y' \cdot \sin x = \frac{dy}{dx} \cdot \sin x = y \cdot \cos x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \cot x\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \underbrace{\int \cot x\,dx}_{\text{Integral } 293 \text{ mit } a = 1} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|\sin x| + \ln|C| = \ln|C \cdot \sin x|$$

(*Rechenregel:* R1). *Entlogarithmierung* liefert (*Rechenregeln:* R5 und R6):

$$|y| = |C \cdot \sin x| \quad \Rightarrow \quad y = \pm C \cdot \sin x = K \cdot \sin x \qquad (\text{mit } K = \pm C)$$

Variation der Konstanten: $K \rightarrow K(x)$

Wir setzen den *Lösungsansatz* $y = K(x) \cdot \sin x$ und die mit Hilfe der *Produktregel* bestimmte Ableitung

$$y' = K'(x) \cdot \sin x + \cos x \cdot K(x)$$

in die *inhomogene* Dgl ein und bestimmen die noch unbekannte *Faktorfunktion* $K(x)$:

$$y' \cdot \sin x - y \cdot \cos x = [K'(x) \cdot \sin x + \cos x \cdot K(x)] \cdot \sin x - K(x) \cdot \sin x \cdot \cos x = 4 \cdot \sin^4 x \quad \Rightarrow$$

$$K'(x) \cdot \sin^2 x + \underbrace{K(x) \cdot \sin x \cdot \cos x - K(x) \cdot \sin x \cdot \cos x}_{0} = 4 \cdot \sin^4 x \quad \Rightarrow$$

$$K'(x) \cdot \sin^2 x = 4 \cdot \sin^4 x \,\big|\, : \sin^2 x \quad \Rightarrow \quad K'(x) = 4 \cdot \sin^2 x \quad \Rightarrow$$

$$K(x) = \int K'(x)\,dx = 4 \cdot \underbrace{\int \sin^2 x\,dx}_{\text{Integral } 205 \text{ mit } a\,=\,1} = 4\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right] + C = 2x - \sin(2x) + C$$

Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Dgl lautet somit:

$$y = K(x) \cdot \sin x = (2x - \sin(2x) + C) \cdot \sin x$$

G29

Stromkreis mit einem zeitabhängigen ohmschen Widerstand

$$\frac{di}{dt} + (\cos t) \cdot i = 2 \cdot \cos t \qquad \text{Anfangswert: } i(0) = 0$$

Bestimmen Sie den *zeitlichen Verlauf* der *Stromstärke* $i = i(t)$.

Wir lösen zunächst die zugehörige *homogene* Dgl durch *„Trennung der Variablen"*:

$$\frac{di}{dt} + (\cos t) \cdot i = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt} = -(\cos t) \cdot i \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{i} = -\cos t\,dt \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{di}{i} = -\int \cos t\,dt \quad \Rightarrow \quad \ln|i| = -\sin t + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln|i| - \ln|C| = \ln\left|\frac{i}{C}\right| = -\sin t \quad \Rightarrow$$

$$\left|\frac{i}{C}\right| = \mathrm{e}^{-\sin t} \quad \Rightarrow \quad \frac{i}{C} = \pm\,\mathrm{e}^{-\sin t} \quad \Rightarrow \quad i = \pm C \cdot \mathrm{e}^{-\sin t} = K \cdot \mathrm{e}^{-\sin t} \qquad (\text{mit } K = \pm C)$$

Rechenregeln: R2, R5 und R6

Variation der Konstanten: $K \rightarrow K(t)$

Wir ersetzen die Konstante K durch die noch unbekannte *Funktion* $K(t)$ und gehen mit dem *Lösungsansatz* $i = K(t) \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}$ und deren Ableitung in die *inhomogene* Dgl ein (die Ableitung erhält man mit Hilfe von *Produkt-* und *Kettenregel*):

$$i = K(t) \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}, \quad \frac{di}{dt} = \dot{K}(t) \cdot \mathrm{e}^{-\sin t} - \cos t \cdot \mathrm{e}^{-\sin t} \cdot K(t)$$

$$\frac{di}{dt} + (\cos t) \cdot i = \dot{K}(t) \cdot \mathrm{e}^{-\sin t} \underbrace{- \cos t \cdot \mathrm{e}^{-\sin t} \cdot K(t) + \cos t \cdot K(t) \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}}_{0} = 2 \cdot \cos t \quad \Rightarrow$$

$$\dot{K}(t) \cdot \mathrm{e}^{-\sin t} = 2 \cdot \cos t \;\big|\; \cdot \mathrm{e}^{\sin t} \quad \Rightarrow \quad \dot{K}(t) = 2 \cdot \cos t \cdot \mathrm{e}^{\sin t} \quad \Rightarrow$$

$$K(t) = \int \dot{K}(t)\,dt = 2 \cdot \int \cos t \cdot \mathrm{e}^{\sin t}\,dt$$

Dieses Integral lösen wir mit der Substitution $u = \sin t, \ \dfrac{du}{dt} = \cos t, \ dt = \dfrac{du}{\cos t}$ wie folgt:

$$K(t) = 2 \cdot \int \cos t \cdot \mathrm{e}^{\sin t}\,dt = 2 \cdot \int \cos t \cdot \mathrm{e}^{u} \cdot \frac{du}{\cos t} = 2 \cdot \int \mathrm{e}^{u}\,du = 2 \cdot \mathrm{e}^{u} + K^{*} = 2 \cdot \mathrm{e}^{\sin t} + K^{*}$$

Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Dgl lautet damit:

$$i = K(t) \cdot \mathrm{e}^{-\sin t} = (2 \cdot \mathrm{e}^{\sin t} + K^{*}) \cdot \mathrm{e}^{-\sin t} = 2 + K^{*} \cdot \mathrm{e}^{-\sin t}, \quad t \geq 0$$

Der Stromkreis ist zu Beginn $(t = 0)$ stromlos. Aus diesem *Anfangswert* bestimmen wir die Integrationskonstante K^*:

$$i(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 + K^* \cdot \mathrm{e}^{-\sin 0} = 2 + K^* \cdot \mathrm{e}^0 = 2 + K^* \cdot 1 = 2 + K^* = 0 \quad \Rightarrow \quad K^* = -2$$

Damit erhalten wir den folgenden zeitlichen Verlauf für die Stromstärke i (siehe Bild G-6):

$$i = i(t) = 2 - 2 \cdot \mathrm{e}^{-\sin t} = 2(1 - \mathrm{e}^{-\sin t}), \quad t \geq 0$$

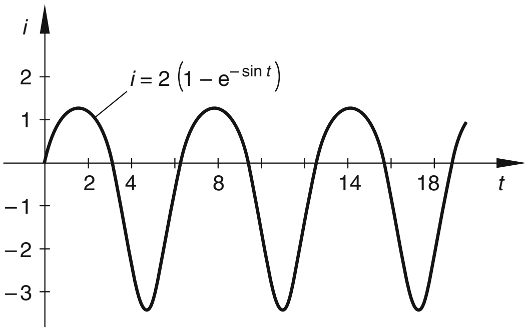


Bild G-6

G30 $\quad y' - (\tanh x) \cdot y = 2 \cdot \cosh^2 x \qquad$ Anfangswert: $y(0) = 10$

Wir lösen zunächst die zugehörige *homogene* Dgl durch *„Trennung der Variablen"*:

$$y' - (\tanh x) \cdot y = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = (\tanh x) \cdot y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \tanh x \, dx \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = \underbrace{\int \tanh x \, dx}_{\text{Integral 387 mit } a = 1} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln(\cosh x) + \ln|C| = \ln|C \cdot \cosh x|$$

(*Rechenregel:* R1). Wir *entlogarithmieren* und erhalten (*Rechenregeln:* R5 und R6):

$$|y| = |C \cdot \cosh x| \quad \Rightarrow \quad y = \pm C \cdot \cosh x = K \cdot \cosh x \qquad (\text{mit } K = \pm C)$$

Variation der Konstanten: $K \rightarrow K(x)$

Den *Lösungsansatz* $y = K(x) \cdot \cosh x$ und die mit der *Produktregel* gewonnene Ableitung

$$y' = K'(x) \cdot \cosh x + \sinh x \cdot K(x) = K'(x) \cdot \cosh x + K(x) \cdot \sinh x$$

setzen wir in die *inhomogene* Dgl ein und bestimmen die noch unbekannte *Faktorfunktion* $K(x)$ wie folgt (unter Verwendung der Beziehung $\tanh x = \sinh x / \cosh x$):

$$y' - (\tanh x) \cdot y = K'(x) \cdot \cosh x + K(x) \cdot \sinh x - \tanh x \cdot K(x) \cdot \cosh x = 2 \cdot \cosh^2 x \quad \Rightarrow$$

$$K'(x) \cdot \cosh x + K(x) \cdot \sinh x - K(x) \cdot \frac{\sinh x}{\cosh x} \cdot \cosh x = 2 \cdot \cosh^2 x \quad \Rightarrow$$

$$K'(x) \cdot \cosh x + \underbrace{K(x) \cdot \sinh x - K(x) \cdot \sinh x}_{0} = K'(x) \cdot \cosh x = 2 \cdot \cosh^2 x \quad \Rightarrow \quad K'(x) = 2 \cdot \cosh x \quad \Rightarrow$$

$$K(x) = \int K'(x) \, dx = 2 \cdot \int \cosh x \, dx = 2 \cdot \sinh x + C$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl

$$y = K(x) \cdot \cosh x = (2 \cdot \sinh x + C) \cdot \cosh x = \underbrace{2 \cdot \sinh x \cdot \cosh x}_{\sinh(2x)} + C \cdot \cosh x = \sinh(2x) + C \cdot \cosh x$$

(unter Verwendung der Formel $2 \cdot \sinh x \cdot \cosh = \sinh(2x)$ → FS: Kapitel III.11.3.3)

Spezielle Lösung für den Anfangswert $y(0) = 10$:

$$y(0) = 10 \quad \Rightarrow \quad \sinh 0 + C \cdot \cosh 0 = 0 + C \cdot 1 = C = 10 \quad \Rightarrow \quad C = 10$$

$$y = \sinh(2x) + 10 \cdot \cosh x$$

G31

$$y' + \frac{2x}{1 + x^2} \cdot y = \frac{1 - 6x^2}{1 + x^2}$$

Lösung der zugehörigen *homogenen* Dgl durch *„Trennung der Variablen“*:

$$y' + \frac{2x}{1 + x^2} \cdot y = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{1 + x^2} \cdot y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{2x}{1 + x^2}\, dx \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \cdot \underbrace{\int \frac{x}{1 + x^2}\, dx}_{\text{Integral 32 mit } a^2 = 1} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + x^2) + \ln|C| \quad \Rightarrow$$

$$\ln|y| = -\ln(1 + x^2) + \ln|C| = \ln\left|\frac{C}{1 + x^2}\right|$$

(*Rechenregel:* R2). *Entlogarithmierung* führt dann zur Lösung der homogenen Dgl (*Rechenregeln:* R5 und R6):

$$|y| = \left|\frac{C}{1 + x^2}\right| \quad \Rightarrow \quad y = \pm \frac{C}{1 + x^2} = \frac{K}{1 + x^2} \qquad (\text{mit } K = \pm C)$$

Variation der Konstanten: $K \rightarrow K(x)$

Den *Lösungsansatz* $y = \frac{K(x)}{1 + x^2}$ und die mit Hilfe der *Quotientenregel* erhaltene zugehörige Ableitung

$$y' = \frac{K'(x) \cdot (1 + x^2) - 2x \cdot K(x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{K'(x)}{1 + x^2} - \frac{2x \cdot K(x)}{(1 + x^2)^2}$$

setzen wir in die *inhomogene* Dgl ein und bestimmen daraus die noch unbekannte Funktion $K(x)$:

$$y' + \frac{2x}{1 + x^2} \cdot y = \frac{K'(x)}{1 + x^2} - \frac{2x \cdot K(x)}{(1 + x^2)^2} + \frac{2x}{1 + x^2} \cdot \frac{K(x)}{1 + x^2} =$$

$$= \frac{K'(x)}{1 + x^2} \underbrace{- \frac{2x \cdot K(x)}{(1 + x^2)^2} + \frac{2x \cdot K(x)}{(1 + x^2)^2}}_{0} = \frac{K'(x)}{1 + x^2} = \frac{1 - 6x^2}{1 + x^2} \quad \Rightarrow$$

$$K'(x) = 1 - 6x^2 \quad \Rightarrow \quad K(x) = \int K'(x)\, dx = \int (1 - 6x^2)\, dx = x - 2x^3 + C$$

Damit erhalten wir die folgende *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Dgl:

$$y = \frac{K(x)}{1 + x^2} = \frac{x - 2x^3 + C}{1 + x^2}$$

1.4 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Die *homogene* lineare Differentialgleichung wird durch einen *Exponentialansatz* gelöst, die *inhomogene* lineare Differentialgleichung entweder durch *„Variation der Konstanten“* oder durch *„Aufsuchen einer partikulären Lösung“*.

Hinweise

(1) **Lehrbuch:** Band 2, Kapitel IV.2.6
Formelsammlung: Kapitel X.2.4.4

(2) **Tabelle** mit Lösungsansätzen für eine partikuläre Lösung → Band 2: Kapitel IV.2.6 (Tabelle 1) und Formelsammlung: Kapitel X.2.4.4

G32 $y' + y = \dfrac{e^{-x}}{1 + x^2}$ Anfangswert: $y(0) = 2$

Lösen Sie dieses Anfangswertproblem durch *„Variation der Konstanten“*.

Allgemeine Lösung der zugehörigen *homogenen* Dgl $y' + y = 0$: $y = K \cdot e^{-x}$

Variation der Konstanten: $K \rightarrow K(x)$

Lösungsansatz für die *inhomogene* Dgl:

$$y = K(x) \cdot e^{-x}, \quad y' = K'(x) \cdot e^{-x} - K(x) \cdot e^{-x} \qquad (\textit{Produkt- } \text{und } \textit{Kettenregel})$$

$$y' + y = K'(x) \cdot e^{-x} \underbrace{- K(x) \cdot e^{-x} + K(x) \cdot e^{-x}}_{0} = K'(x) \cdot e^{-x} = \frac{e^{-x}}{1 + x^2} \quad \Rightarrow \quad K'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad \Rightarrow$$

$$K(x) = \int K'(x)\, dx = \int \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \arctan x + C$$

Allgemeine Lösung der *inhomogenen* Dgl:

$$y = K(x) \cdot e^{-x} = (\arctan x + C) \cdot e^{-x}$$

Partikuläre Lösung für den Anfangswert $y(0) = 2$:

$$y(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad (\arctan 0 + C) \cdot e^0 = (0 + C) \cdot 1 = C = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 2$$

$$y = (\arctan x + 2) \cdot e^{-x}$$

G33 $y' + 3y = e^x + 2 \cdot \cos(2x)$

Lösen Sie diese Dgl durch *„Variation der Konstanten“*.

Allgemeine Lösung der zugehörigen *homogenen* Dgl $y' + 3y = 0$: $y = K \cdot e^{-3x}$

Variation der Konstanten: $K \rightarrow K(x)$

Lösungsansatz mit 1. Ableitung:

$$y = K(x) \cdot e^{-3x}, \quad y' = K'(x) \cdot e^{-3x} - 3K(x) \cdot e^{-3x} \qquad (\textit{Produkt- } \text{und } \textit{Kettenregel})$$

Einsetzen in die *inhomogene* Dgl, unbekannte *Faktorfunktion* $K(x)$ bestimmen:

$$y' + 3y = K'(x) \cdot e^{-3x} \underbrace{- 3K(x) \cdot e^{-3x} + 3K(x) \cdot e^{-3x}}_{0} = K'(x) \cdot e^{-3x} = e^{x} + 2 \cdot \cos(2x) \quad \Rightarrow$$

$$K'(x) = e^{4x} + 2 \cdot e^{3x} \cdot \cos(2x) \quad \Rightarrow$$

$$K(x) = \int K'(x)\,dx = \int \left[e^{4x} + 2 \cdot e^{3x} \cdot \cos(2x)\right] dx = \underbrace{\int e^{4x}\,dx}_{\text{Integral 312 mit } a = 4} + 2 \cdot \underbrace{\int e^{3x} \cdot \cos(2x)\,dx}_{\text{Integral 324 mit } a = 3,\ b = 2} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot e^{4x} + \frac{2}{13} \cdot e^{3x}\left[3 \cdot \cos(2x) + 2 \cdot \sin(2x)\right] + C$$

Allgemeine Lösung der *inhomogenen* Dgl:

$$y = K(x) \cdot e^{-3x} = \left[\frac{1}{4} \cdot e^{4x} + \frac{2}{13} \cdot e^{3x}\left[3 \cdot \cos(2x) + 2 \cdot \sin(2x)\right] + C\right] \cdot e^{-3x} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot e^{x} + \frac{2}{13}\left[3 \cdot \cos(2x) + 2 \cdot \sin(2x)\right] + C \cdot e^{-3x}$$

G34

$y' + 5y = \cos x \cdot e^{-5x}$ Anfangswert: $y(\pi/2) = 0$

Lösen Sie diese Anfangswertaufgabe durch *„Variation der Konstanten“*.

Allgemeine Lösung der zugehörigen *homogenen* Dgl $y' + 5y = 0$: $y = K \cdot e^{-5x}$

Variation der Konstanten: $K \rightarrow K(x)$

Lösungsansatz mit Ableitung:

$$y = K(x) \cdot e^{-5x}, \quad y' = K'(x) \cdot e^{-5x} - 5K(x) \cdot e^{-5x} \qquad (\textit{Produkt- und Kettenregel})$$

Einsetzen in die *inhomogene* Dgl, unbekannte *Faktorfunktion* $K(x)$ bestimmen:

$$y' + 5y = K'(x) \cdot e^{-5x} \underbrace{- 5K(x) \cdot e^{-5x} + 5K(x) \cdot e^{-5x}}_{0} = K'(x) \cdot e^{-5x} = \cos x \cdot e^{-5x} \quad \Rightarrow$$

$$K'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad K(x) = \int K'(x)\,dx = \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

Allgemeine Lösung der *inhomogenen* Dgl:

$$y = K(x) \cdot e^{-5x} = (\sin x + C) \cdot e^{-5x}$$

Spezielle Lösung für den Anfangswert $y(\pi/2) = 0$:

$$y(\pi/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\sin(\pi/2) + C) \cdot e^{-5\pi/2} = (1 + C) \cdot \underbrace{e^{-5\pi/2}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -1$$

$$y = (\sin x - 1) \cdot e^{-5x}$$

G35

$y' - 4y = e^{4x} + \cos(2x)$

Bestimmen Sie die *allgemeine* Lösung dieser Dgl durch *„Aufsuchen einer partikulären Lösung“*.

Die *allgemeine* Lösung y der *inhomogenen* Dgl wird aus der Lösung y_0 der zugehörigen *homogenen* Dgl und einer *partikulären* Lösung y_P der *inhomogenen* Dgl aufgebaut: $y = y_0 + y_P$

Lösung der zugehörigen *homogenen* Dgl $y' - 4y = 0$: $y_0 = K \cdot e^{4x}$

Partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl

Aus der Tabelle entnehmen wir für die beiden Störglieder e^{4x} und $\cos(2x)$ die folgenden *Lösungsansätze* für eine *partikuläre* Lösung y_P:

$$\text{Störglied } g_1(x) = e^{4x} \xrightarrow[b \,=\, -a \,=\, 4]{a \,=\, -4,\; b \,=\, 4} y_{P1} = C_1 x \cdot e^{4x}$$

$$\text{Störglied } g_2(x) = \cos(2x) \xrightarrow{\omega \,=\, 2} y_{P2} = C_2 \cdot \sin(2x) + C_3 \cdot \cos(2x)$$

Damit erhalten wir den folgenden *Lösungsansatz* (= *Summe* der Einzelansätze):

$$y_P = y_{P1} + y_{P2} = C_1 x \cdot e^{4x} + C_2 \cdot \sin(2x) + C_3 \cdot \cos(2x)$$

Wenn dieser Ansatz stimmt (davon gehen wir natürlich aus), dann müssen sich die noch unbekannten Konstanten C_1, C_2 und C_3 *eindeutig* bestimmen lassen. Wir gehen daher mit diesem Ansatz und der zugehörigen Ableitung

$$y'_P = C_1 \cdot e^{4x} + 4C_1 x \cdot e^{4x} + 2C_2 \cdot \cos(2x) - 2C_3 \cdot \sin(2x)$$

(*Produkt-* und *Kettenregel*) in die *inhomogene* Dgl ein, ordnen die Glieder und fassen zusammen:

$$\begin{aligned} y' - 4y &= C_1 \cdot e^{4x} + 4C_1 x \cdot e^{4x} + 2C_2 \cdot \cos(2x) - 2C_3 \cdot \sin(2x) - \\ &\qquad - 4\left[C_1 x \cdot e^{4x} + C_2 \cdot \sin(2x) + C_3 \cdot \cos(2x)\right] = \\ &= C_1 \cdot e^{4x} + 4C_1 x \cdot e^{4x} + 2C_2 \cdot \cos(2x) - 2C_3 \cdot \sin(2x) - \\ &\qquad - 4C_1 x \cdot e^{4x} - 4C_2 \cdot \sin(2x) - 4C_3 \cdot \cos(2x) = \\ &= C_1 \cdot e^{4x} + (2C_2 - 4C_3) \cdot \cos(2x) + (-4C_2 - 2C_3) \cdot \sin(2x) = e^{4x} + \cos(2x) \end{aligned}$$

Aus der verbliebenen Gleichung

$$C_1 \cdot e^{4x} + (2C_2 - 4C_3) \cdot \cos(2x) + (-4C_2 - 2C_3) \cdot \sin(2x) = 1 \cdot e^{4x} + 1 \cdot \cos(2x) + 0 \cdot \sin(2x)$$

(wir haben auf der rechten Seite den identisch verschwindenden Summand $0 \cdot \sin(2x) \equiv 0$ addiert) erhalten wir durch *Koeffizientenvergleich* 3 Gleichungen für die 3 Unbekannten (wir vergleichen der Reihe nach die Koeffizienten von e^{4x}, $\cos(2x)$ und $\sin(2x)$ auf beiden Seiten):

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & C_1 = 1 \\ \text{(II)} & 2C_2 - 4C_3 = 1 \\ \text{(III)} & -4C_2 - 2C_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2C_3 = 4C_2 \quad \Rightarrow \quad C_3 = -2C_2 \qquad \text{(Einsetzen in (II))} \\ \hline \text{(II)} & \Rightarrow \quad 2C_2 - 4C_3 = 2C_2 - 4 \cdot (-2C_2) = 2C_2 + 8C_2 = 10C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0{,}1 \\ \text{(III)} & \Rightarrow \quad C_3 = -2C_2 = -2 \cdot 0{,}1 = -0{,}2 \end{array}$$

Die Konstanten besitzen somit folgende Werte: $C_1 = 1$, $C_2 = 0{,}1$ und $C_3 = -0{,}2$. Die *partikuläre* Lösung y_P lautet also:

$$y_P = x \cdot e^{4x} + 0{,}1 \cdot \sin(2x) - 0{,}2 \cdot \cos(2x)$$

Gesamtlösung (*allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Dgl):

$$\begin{aligned} y &= y_0 + y_P = K \cdot e^{4x} + x \cdot e^{4x} + 0{,}1 \cdot \sin(2x) - 0{,}2 \cdot \cos(2x) = \\ &= (x + K) \cdot e^{4x} + 0{,}1 \cdot \sin(2x) - 0{,}2 \cdot \cos(2x) \end{aligned}$$

G36

Sinkgeschwindigkeit eines Körpers in einer zähen Flüssigkeit

Die *Sinkgeschwindigkeit* v einer Stahlkugel in einer zähen Flüssigkeit genügt der folgenden Dgl (*ohne* Auftrieb, siehe Bild G-7):

$$m\dot{v} + kv = mg$$

m: Masse der Kugel
k: Reibungsfaktor
g: Erdbeschleunigung

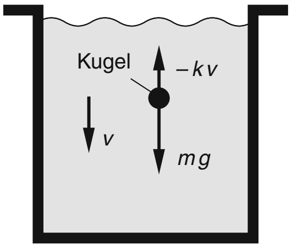


Bild G-7

Bestimmen Sie das *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz* $v = v(t)$ für die Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = 0$ durch *„Variation der Konstanten"*. Welche *Endgeschwindigkeit* v_E wird erreicht?

Wir dividieren die Dgl zunächst durch die Masse und führen die Abkürzung $\alpha = k/m$ ein:

$$m\dot{v} + kv = mg \quad \Rightarrow \quad \dot{v} + \alpha v = g \qquad (\alpha = k/m)$$

Die zugehörige *homogene* Dgl $\dot{v} + \alpha v = 0$ besitzt die Lösung $v = K \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t}$ (dies ist das Ergebnis aus dem *Exponentialansatz* $v = K \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$).

Variation der Konstanten: *K* → *K*(*t*)

Lösungsansatz für die *inhomogene* Dgl mitsamt der Ableitung (*Produkt-* und *Kettenregel*):

$$v = K(t) \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t}, \quad \dot{v} = \dot{K}(t) \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} - \alpha \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} \cdot K(t) = \dot{K}(t) \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} - \alpha \cdot K(t) \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t}$$

Einsetzen in die inhomogene Dgl führt zu einer einfachen Dgl für $K(t)$, die wir durch direkte (unbestimmte) Integration leicht lösen können:

$$\dot{v} + \alpha v = g \quad \Rightarrow \quad \dot{K}(t) \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} \underbrace{- \alpha \cdot K(t) \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} + \alpha \cdot K(t) \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t}}_{0} = \dot{K}(t) \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} = g \quad \Rightarrow$$

$$\dot{K}(t) = g \cdot \mathrm{e}^{\alpha t} \quad \Rightarrow \quad K(t) = \int \dot{K}(t)\,dt = g \cdot \underbrace{\int \mathrm{e}^{\alpha t}\,dt}_{\text{Integral 312 mit } a = \alpha} = g \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \mathrm{e}^{\alpha t} + C = \frac{g}{\alpha} \cdot \mathrm{e}^{\alpha t} + C$$

Allgemeine Lösung der *inhomogenen* Dgl:

$$v = K(t) \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} = \left(\frac{g}{\alpha} \cdot \mathrm{e}^{\alpha t} + C\right) \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} = \frac{g}{\alpha} + C \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t}, \quad t \geq 0$$

Die Bewegung der Kugel beginnt aus der Ruhe heraus. Aus diesem *Anfangswert* bestimmen wir die noch unbekannte Konstante C:

$$v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{g}{\alpha} + C \cdot \mathrm{e}^{0} = \frac{g}{\alpha} + C \cdot 1 = \frac{g}{\alpha} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{g}{\alpha}$$

Damit ergibt sich der folgende zeitliche Verlauf der Sinkgeschwindigkeit (unter Berücksichtigung von $\alpha = k/m$):

$$v = v(t) = \frac{g}{\alpha} - \frac{g}{\alpha} \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} = \frac{g}{\alpha}\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}\right) = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right), \quad t \geq 0$$

Im Laufe der Zeit (d. h. für $t \to \infty$) nähert sich die Geschwindigkeit ihrem (konstanten) Endwert:

$$v_E = \lim_{t \to \infty} v(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right) = \frac{mg}{k} \cdot \lim_{t \to \infty}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right) = \frac{mg}{k} \cdot 1 = \frac{mg}{k}$$

(die streng monoton fallende Exponentialfunktion strebt für $t \to \infty$ asymptotisch gegen Null).

Bild G-8 zeigt den zeitlichen Verlauf der Sinkgeschwindigkeit v („Sättigungsfunktion“).

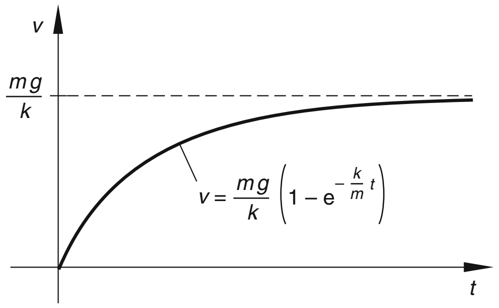


Bild G-8

G37

Abkühlungsgesetz nach Newton

Ein Körper mit der Anfangstemperatur $T(t = 0) = T_0$ wird durch vorbei strömende Luft der Temperatur $T_L < T_0$ *gekühlt.* Die *Temperatur* $T = T(t)$ des Körpers genügt dabei der Dgl

$$\frac{dT}{dt} + aT = aT_L \qquad (a > 0\text{: Konstante})$$

Bestimmen Sie den *Temperaturverlauf* $T = T(t)$ durch *„Variation der Konstanten“*.
Welche *Endtemperatur* T_E erreicht der Körper?

Die zugehörige *homogene* Dgl $\dot{T} + aT = 0$ wird durch den *Exponentialansatz* $T = C \cdot e^{\lambda t}$ gelöst:

$$T = C \cdot e^{\lambda t}, \quad \dot{T} = C\lambda \cdot e^{\lambda t}$$

$$\dot{T} + aT = 0 \quad \Rightarrow \quad C\lambda \cdot e^{\lambda t} + aC \cdot e^{\lambda t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{C \cdot e^{\lambda t}}_{\neq 0}(\lambda + a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda + a = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -a$$

Somit ist $T = C \cdot e^{-at}$ die *allgemeine* Lösung der *homogenen* Dgl.

Variation der Konstanten: $C \rightarrow C(t)$

Lösungsansatz für die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Dgl mit der aus *Produkt-* und *Kettenregel* gewonnenen Ableitung:

$$T = C(t) \cdot e^{-at}, \quad \dot{T} = \dot{C}(t) \cdot e^{-at} - a \cdot e^{-at} \cdot C(t) = \dot{C}(t) \cdot e^{-at} - aC(t) \cdot e^{-at}$$

Einsetzen in die inhomogene Dgl, Faktorfunktion $C(t)$ durch direkte Integration bestimmen:

$$\dot{T} + aT = aT_L \quad \Rightarrow \quad \dot{C}(t) \cdot e^{-at} \underbrace{- aC(t) \cdot e^{-at} + aC(t) \cdot e^{-at}}_{0} = \dot{C}(t) \cdot e^{-at} = aT_L \quad \Rightarrow$$

$$\dot{C}(t) = aT_L \cdot e^{at} \quad \Rightarrow \quad C(t) = \int \dot{C}(t)\,dt = aT_L \cdot \underbrace{\int e^{at}\,dt}_{\text{Integral } 312} = aT_L \cdot \frac{1}{a} \cdot e^{at} + K = T_L \cdot e^{at} + K$$

Somit gilt:

$$T = C(t) \cdot e^{-at} = (T_L \cdot e^{at} + K) \cdot e^{-at} = T_L + K \cdot e^{-at}, \quad t \geq 0$$

Den Wert der Integrationskonstanten K ermitteln wir aus der *Anfangstemperatur* $T(0) = T_0$:

$$T(0) = T_0 \quad \Rightarrow \quad T_L + K \cdot \mathrm{e}^0 = T_L + K \cdot 1 = T_L + K = T_0 \quad \Rightarrow \quad K = T_0 - T_L$$

Die Temperatur des Körpers klingt mit der Zeit exponentiell ab:

$$T = T(t) = T_L + (T_0 - T_L) \cdot \mathrm{e}^{-at}, \quad t \geq 0$$

Die *Endtemperatur*, auf die der Körper im Laufe der Zeit abkühlt, erhalten wir für $t \to \infty$:

$$T_E = \lim_{t \to \infty} T(t) = \lim_{t \to \infty} (T_L + (T_0 - T_L) \cdot \mathrm{e}^{-at}) = T_L$$

(e^{-at} strebt für $t \to \infty$ gegen Null). Der Abkühlungsprozess ist also beendet, wenn der Körper die Lufttemperatur T_L erreicht hat.

Bild G-9 zeigt den zeitlichen Verlauf der Temperatur („*Abklingfunktion*“).

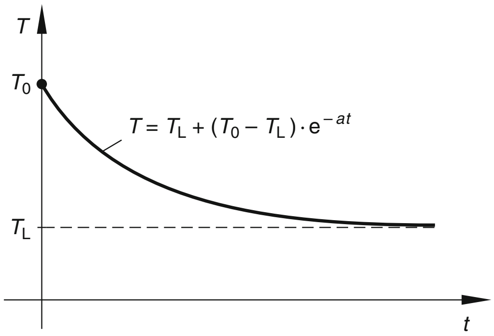


Bild G-9

G38 $y' + y = 4 \cdot \mathrm{e}^x \cdot \sin(2x)$

Lösen Sie diese Dgl nach der Methode „*Aufsuchen einer partikulären Lösung*“.

Die gesuchte *allgemeine* Lösung y lässt sich darstellen als *Summe* aus der Lösung y_0 der zugehörigen *homogenen* Dgl und einer *partikulären* Lösung y_P der *inhomogenen* Dgl: $y = y_0 + y_P$

Die Lösung der zugehörigen *homogenen* Dgl $y' + y = 0$ lautet: $y_0 = K \cdot \mathrm{e}^{-x}$.

Partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl

Wir versuchen einen *Lösungsansatz* in Form eines *Produktes* aus zwei Faktoren, die sich aus den Ansätzen der beiden „Störfaktoren“ e^x und $\sin(2x)$ ergeben (der konstante Faktor 4 im Störglied hat *keinen* Einfluss auf den Lösungsansatz). Aus der Tabelle entnehmen wir folgende *Ansätze*:

$$\text{Störfaktor } g_1(x) = \mathrm{e}^x \xrightarrow[b = 1]{a = 1} y_{P1} = C_1 \cdot \mathrm{e}^x$$

$$\text{Störfaktor } g_2(x) = \sin(2x) \xrightarrow{\omega = 2} y_{P2} = C_2 \cdot \sin(2x) + C_3 \cdot \cos(2x)$$

Damit erhalten wir für die *partikuläre* Lösung y_P den *Lösungsansatz*

$$y_P = y_{P1} \cdot y_{P2} = C_1 \cdot \mathrm{e}^x (C_2 \cdot \sin(2x) + C_3 \cdot \cos(2x))$$

den wir noch wie folgt vereinfachen können (nur noch 2 statt 3 Parameter):

$$y_P = \mathrm{e}^x (\underbrace{C_1 C_2}_{A} \cdot \sin(2x) + \underbrace{C_1 C_3}_{B} \cdot \cos(2x)) = \mathrm{e}^x (A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x))$$

Mit diesem Ansatz und der mit Hilfe der *Produkt-* und *Kettenregel* erhaltenen Ableitung:

$$y_P' = \mathrm{e}^x\,(A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x)) + (2A \cdot \cos(2x) - 2B \cdot \sin(2x)) \cdot \mathrm{e}^x =$$

$$= \mathrm{e}^x\,(A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x) + 2A \cdot \cos(2x) - 2B \cdot \sin(2x))$$

gehen wir in die *inhomogene* Dgl ein, kürzen den gemeinsamen Faktor $2 \cdot \mathrm{e}^x$ heraus und ordnen die Glieder:

$$y' + y = \mathrm{e}^x\,(A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x) + 2A \cdot \cos(2x) - 2B \cdot \sin(2x)) +$$

$$+ \mathrm{e}^x\,(A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x)) =$$

$$= \mathrm{e}^x\,\big(A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x) + 2A \cdot \cos(2x) - 2B \cdot \sin(2x) + A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x)\big) =$$

$$= \mathrm{e}^x\,(2A \cdot \sin(2x) + 2B \cdot \cos(2x) + 2A \cdot \cos(2x) - 2B \cdot \sin(2x)) =$$

$$= 2 \cdot \mathrm{e}^x\,(A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x) + A \cdot \cos(2x) - B \cdot \sin(2x)) = 4 \cdot \mathrm{e}^x \cdot \sin(2x) \quad \Rightarrow$$

$$A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x) + A \cdot \cos(2x) - B \cdot \sin(2x) = 2 \cdot \sin(2x) \quad \Rightarrow$$

$$(A - B) \cdot \sin(2x) + (A + B) \cdot \cos(2x) = 2 \cdot \sin(2x) + 0 \cdot \cos(2x)$$

(„Trick“: wir addieren auf der rechten Seite $0 \cdot \cos(2x) \equiv 0$). Der *Koeffizientenvergleich* für die Sinus- bzw. Kosinusterme auf beiden Seiten führt zu 2 Gleichungen für die Unbekannten A und B:

$$\left.\begin{array}{l} \text{(I)}\;\; A - B = 2 \\ \text{(II)}\; A + B = 0 \end{array}\right\} + \quad \Rightarrow \quad 2A = 2 \quad \Rightarrow \quad A = 1; \quad \text{(II)} \;\Rightarrow\; A + B = 1 + B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -1$$

Die *partikuläre* Lösung lautet damit:

$$y_P = \mathrm{e}^x\,(\sin(2x) - \cos(2x))$$

Die *inhomogene* Dgl besitzt demnach die folgende *allgemeine* Lösung:

$$y = y_0 + y_P = K \cdot \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x\,(\sin(2x) - \cos(2x))$$

G39

Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz einer konstant beschleunigten Masse bei geschwindigkeitsproportionaler Reibung

Bestimmen Sie das *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz* $v = v(t)$ einer Bewegung, die durch die Dgl $\dot{v} + av = b$ beschrieben wird ($a > 0$, $b > 0$: Konstanten). Wie lautet die *spezielle* Lösung, wenn die Bewegung zur Zeit $t = 0$ aus der *Ruhe* heraus beginnt?
Verwenden Sie die Lösungsmethode „*Variation der Konstanten*“.

Allgemeine Lösung der zugehörigen *homogenen* Dgl $\dot{v} + av = 0$: $v_0 = K \cdot \mathrm{e}^{-at}$

Variation der Konstanten: $K \rightarrow K(t)$

Lösungsansatz mit Ableitung (*Produkt-* und *Kettenregel*):

$$v = K(t) \cdot \mathrm{e}^{-at}, \quad \dot{v} = \dot{K}(t) \cdot \mathrm{e}^{-at} - aK(t) \cdot \mathrm{e}^{-at}$$

Einsetzen in die *inhomogene* Dgl, *Faktorfunktion* $K(t)$ bestimmen:

$$\dot{v} + av = \dot{K}(t) \cdot \mathrm{e}^{-at} \underbrace{- aK(t) \cdot \mathrm{e}^{-at} + aK(t) \cdot \mathrm{e}^{-at}}_{0} = \dot{K}(t) \cdot \mathrm{e}^{-at} = b \quad \Rightarrow \quad \dot{K}(t) = b \cdot \mathrm{e}^{at} \quad \Rightarrow$$

$$K(t) = \int \dot{K}(t)\,dt = b \cdot \underbrace{\int \mathrm{e}^{at}\,dt}_{\text{Integral 312}} = b \cdot \frac{1}{a} \cdot \mathrm{e}^{at} + C = \frac{b}{a} \cdot \mathrm{e}^{at} + C$$

Damit erhalten wir die folgende *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Dgl:

$$v = K(t) \cdot \mathrm{e}^{-at} = \left(\frac{b}{a} \cdot \mathrm{e}^{at} + C\right) \cdot \mathrm{e}^{-at} = \frac{b}{a} + C \cdot \mathrm{e}^{-at}$$

Zu Beginn, d. h. zur Zeit $t = 0$ ist $v = 0$. Daraus lässt sich die Integrationskonstante C berechnen:

$$v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{a} + C \cdot \mathrm{e}^{0} = \frac{b}{a} + C \cdot 1 = \frac{b}{a} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{b}{a}$$

Das *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz* lautet damit wie folgt (siehe Bild G-10):

$$v = \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \cdot \mathrm{e}^{-at} = \frac{b}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-at}\right)$$

(für $t \geq 0$)

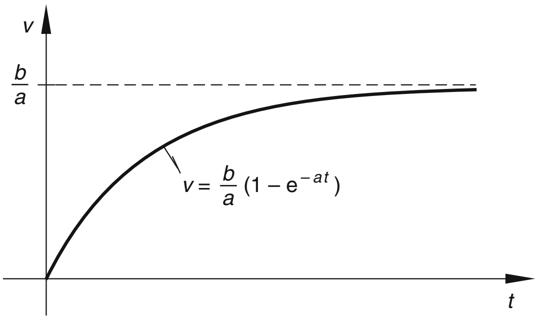


Bild G-10

G40

Wechselstromkreis mit einem ohmschen Widerstand und einer Induktivität (RL-Kreis)

Ein *Stromkreis* enthält den ohmschen Widerstand $R = 6\,\Omega$ und die Induktivität $L = 2\,\mathrm{H}$. Durch die angelegte Wechselspannung $u(t) = 20\,\mathrm{V} \cdot \sin(1\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t)$ wird ein *zeitabhängiger Strom* $i = i(t)$ erzeugt, der der folgenden Dgl genügt:

$$L \cdot \frac{di}{dt} + Ri = u(t) \qquad \text{Anfangswert: } i(0) = 0$$

Bestimmen Sie den *zeitlichen Verlauf* der *Stromstärke* i nach der Methode *„Aufsuchen einer partikulären Lösung“*. Wie lautet die sog. *„stationäre“* Lösung nach Ablauf einer gewissen *„Einschwingphase“*?

Die *Stromstärke* i genügt der folgenden *inhomogenen* linearen Dgl 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten (ohne Einheiten):

$$2 \cdot \frac{di}{dt} + 6i = 20 \cdot \sin t \qquad \text{oder} \qquad \frac{di}{dt} + 3i = 10 \cdot \sin t$$

Wir lösen sie nach der Methode *„Aufsuchen einer partikulären Lösung“*.

Zugehörige *homogene* Dgl: $\dfrac{di}{dt} + 3i = 0 \quad \Rightarrow \quad i_0 = K \cdot \mathrm{e}^{-3t}$

Partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl

Aus der Tabelle entnehmen wir für das *sinusförmige* Störglied den folgenden *Lösungsansatz* ($\omega = 1$):

$$i_P = C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t$$

Mit diesem Ansatz und der Ableitung

$$\frac{di_P}{dt} = C_1 \cdot \cos t - C_2 \cdot \sin t$$

gehen wir in die *inhomogene* Dgl ein und erhalten:

$$\frac{di}{dt} + 3i = C_1 \cdot \cos t - C_2 \cdot \sin t + 3(C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t) =$$

$$= C_1 \cdot \cos t - C_2 \cdot \sin t + 3C_1 \cdot \sin t + 3C_2 \cdot \cos t = 10 \cdot \sin t$$

Diese Gleichung ordnen wir wie folgt, wobei wir auf der rechten Seite $0 \cdot \cos t \equiv 0$ addieren:

$$(3C_1 - C_2) \cdot \sin t + (C_1 + 3C_2) \cdot \cos t = 10 \cdot \sin t + 0 \cdot \cos t$$

Durch *Koeffizientenvergleich* (wir vergleichen auf beiden Seiten jeweils die Sinus- und Kosinusglieder) erhalten wir zwei Gleichungen mit den Unbekannten C_1 und C_2:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 3C_1 - \ C_2 = 10 \\ \text{(II)} & \ C_1 + 3C_2 = \ 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -3C_2 \qquad \text{(Einsetzen in (I))} \\ \hline \text{(I)} & \Rightarrow \quad 3C_1 - C_2 = 3(-3C_2) - C_2 = -9C_2 - C_2 = -10C_2 = 10 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -1 \\ \text{(II)} & \Rightarrow \quad C_1 = -3C_2 = -3 \cdot (-1) = 3 \end{array}$$

Partikuläre Lösung: $i_P = 3 \cdot \sin t - \cos t$

Im RL-Kreis fließt also der folgende (zeitabhängige) *Strom*:

$$i = i_0 + i_P = K \cdot \mathrm{e}^{-3t} + 3 \cdot \sin t - \cos t, \quad t \ge 0$$

Aus dem *Anfangswert* $i(0) = 0$ berechnen wir noch die Integrationskonstante K:

$$i(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad K \cdot \mathrm{e}^0 + 3 \cdot \sin 0 - \cos 0 = K \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 1 = K - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad K = 1$$

$$i = \mathrm{e}^{-3t} + 3 \cdot \sin t - \cos t, \quad t \ge 0$$

Im Laufe der Zeit *verschwindet* die streng monoton fallende Exponentialfunktion und wir erhalten die *„stationäre“* Lösung (Bild G-11):

$$i_{\text{stationär}} = 3 \cdot \sin t - \cos t$$

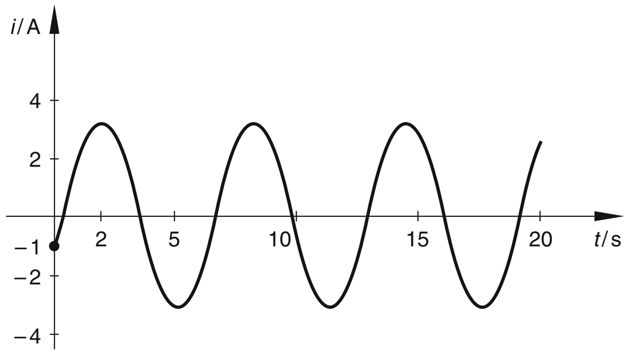


Bild G-11

G41

$y' + 2y = x^3 \cdot \mathrm{e}^{2x} + x$

Bestimmen Sie die *allgemeine* Lösung *„durch Variation der Konstanten“*.

Allgemeine Lösung der zugehörigen *homogenen* Dgl $y' + 2y = 0$: $y = K \cdot \mathrm{e}^{-2x}$

Variation der Konstanten: $K \to K(x)$

Lösungsansatz mit Ableitung:

$$y = K(x) \cdot \mathrm{e}^{-2x}, \quad y' = K'(x) \cdot \mathrm{e}^{-2x} - 2K(x) \cdot \mathrm{e}^{-2x} \qquad (\textit{Produkt-} \text{ und } \textit{Kettenregel})$$

Einsetzen in die *inhomogene* Dgl, unbekannte *Faktorfunktion* $K(x)$ bestimmen:

$$y' + 2y = K'(x) \cdot \mathrm{e}^{-2x} \underbrace{- 2K(x) \cdot \mathrm{e}^{-2x} + 2K(x) \cdot \mathrm{e}^{-2x}}_{0} = K'(x) \cdot \mathrm{e}^{-2x} = x^3 \cdot \mathrm{e}^{2x} + x \quad \Rightarrow$$

$$K'(x) = (x^3 \cdot \mathrm{e}^{2x} + x) \cdot \mathrm{e}^{2x} = x^3 \cdot \mathrm{e}^{4x} + x \cdot \mathrm{e}^{2x} \quad \Rightarrow$$

$$K(x) = \int K'(x)\,dx = \int (x^3 \cdot \mathrm{e}^{4x} + x \cdot \mathrm{e}^{2x})\,dx = \underbrace{\int x^3 \cdot \mathrm{e}^{4x}\,dx}_{\text{Integral 315 mit } n = 3,\ a = 4} + \underbrace{\int x \cdot \mathrm{e}^{2x}\,dx}_{\text{Integral 313 mit } a = 2} =$$

$$= \frac{x^3 \cdot \mathrm{e}^{4x}}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{16x^2 - 8x + 2}{64} \cdot \mathrm{e}^{4x} + \frac{2x - 1}{4} \cdot \mathrm{e}^{2x} + C =$$

$$= \left[\frac{1}{4}\,x^3 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\,x^2 - \frac{1}{8}\,x + \frac{1}{32}\right)\right] \cdot \mathrm{e}^{4x} + \frac{1}{4}\,(2x - 1) \cdot \mathrm{e}^{2x} + C =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\,x^3 - \frac{3}{16}\,x^2 + \frac{3}{32}\,x - \frac{3}{128}\right) \cdot \mathrm{e}^{4x} + \frac{1}{4}\,(2x - 1) \cdot \mathrm{e}^{2x} + C$$

Allgemeine Lösung der *inhomogenen* Dgl:

$$y = K(x) \cdot \mathrm{e}^{-2x} = \left[\left(\frac{1}{4}\,x^3 - \frac{3}{16}\,x^2 + \frac{3}{32}\,x - \frac{3}{128}\right) \cdot \mathrm{e}^{4x} + \frac{1}{4}\,(2x - 1) \cdot \mathrm{e}^{2x} + C\right] \cdot \mathrm{e}^{-2x} =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\,x^3 - \frac{3}{16}\,x^2 + \frac{3}{32}\,x - \frac{3}{128}\right) \cdot \mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{4}\,(2x - 1) + C \cdot \mathrm{e}^{-2x}$$

G42

Bewegung einer Masse unter dem Einfluss einer periodischen Kraft und einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft

Die *Bewegung* einer Masse wird durch die Dgl $\dot{v} + 2v = \sin(2t)$ beschrieben.

a) Wie lautet das *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz* $v = v(t)$, wenn der Körper zur Zeit $t = 0$ aus der *Ruhe* heraus startet?

b) Bestimmen Sie ferner das *Weg-Zeit-Gesetz* $s = s(t)$ für die Anfangswegmarke $s(0) = 3/4$.

Verwenden Sie die Lösungsmethode „*Variation der Konstanten*“.

---

a) *Allgemeine* Lösung der zugehörigen *homogenen* Dgl $\dot{v} + 2v = 0$: $v = K \cdot \mathrm{e}^{-2t}$

Variation der Konstanten: $K \rightarrow K(t)$

Lösungsansatz mit Ableitung:

$$v = K(t) \cdot \mathrm{e}^{-2t}, \quad \dot{v} = \dot{K}(t) \cdot \mathrm{e}^{-2t} - 2K(t) \cdot \mathrm{e}^{-2t} \qquad (\textit{Produkt- und Kettenregel})$$

Einsetzen in die *inhomogene* Dgl, unbekannte *Faktorfunktion* $K(t)$ bestimmen:

$$\dot{v} + 2v = \dot{K}(t) \cdot \mathrm{e}^{-2t} \underbrace{- 2K(t) \cdot \mathrm{e}^{-2t} + 2K(t) \cdot \mathrm{e}^{-2t}}_{0} = \dot{K}(t) \cdot \mathrm{e}^{-2t} = \sin(2t) \quad \Rightarrow$$

$$\dot{K}(t) = \sin(2t) \cdot \mathrm{e}^{2t} \quad \Rightarrow$$

$$K(t) = \int \dot{K}(t)\,dt = \underbrace{\int \sin(2t) \cdot \mathrm{e}^{2t}\,dt}_{\text{Integral 322 mit } a = b = 2} = \frac{\mathrm{e}^{2t}}{8}\left[2 \cdot \sin(2t) - 2 \cdot \cos(2t)\right] + C =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \mathrm{e}^{2t}\left[\sin(2t) - \cos(2t)\right] + C$$

Allgemeine Lösung der *inhomogenen* Dgl:

$$v = K(t) \cdot \mathrm{e}^{-2t} = \left[\frac{1}{4} \cdot \mathrm{e}^{2t} \left[\sin(2t) - \cos(2t) \right] + C \right] \cdot \mathrm{e}^{-2t} = \frac{1}{4} \left[\sin(2t) - \cos(2t) \right] + C \cdot \mathrm{e}^{-2t}$$

Aus der *Anfangsgeschwindigkeit* $v(0) = 0$ bestimmen wir die Integrationskonstante C:

$$v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} (\sin 0 - \cos 0) + C \cdot \mathrm{e}^0 = \frac{1}{4} (0 - 1) + C \cdot 1 = -\frac{1}{4} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{4}$$

Das **Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz** lautet demnach wie folgt (Bild G-12):

$$v = \frac{1}{4} \left[\sin(2t) - \cos(2t) \right] + \frac{1}{4} \cdot \mathrm{e}^{-2t} = \frac{1}{4} \left[\sin(2t) - \cos(2t) + \mathrm{e}^{-2t} \right], \quad t \geq 0$$

b) Die Geschwindigkeit v ist die *Ableitung* des Weges s nach der Zeit t, d. h. $v = \dot{s}$. Daher gilt:

$$s = \int \dot{s} \, dt = \int v \, dt = \frac{1}{4} \cdot \int \left[\sin(2t) - \cos(2t) + \mathrm{e}^{-2t} \right] dt =$$

$$= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \cdot \cos(2t) - \frac{1}{2} \cdot \sin(2t) - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{-2t} \right) + C = -\frac{1}{8} \left[\cos(2t) + \sin(2t) + \mathrm{e}^{-2t} \right] + C$$

(Integrale der Reihe nach: 204 mit $a = 2$, 228 mit $a = 2$ und 312 mit $a = -2$)

Aus der *Anfangswegmarke* $s(0) = \frac{3}{4}$ bestimmen wir die Integrationskonstante C:

$$-\frac{1}{8} (\cos 0 + \sin 0 + \mathrm{e}^0) + C = -\frac{1}{8} (1 + 0 + 1) + C = -\frac{1}{4} + C = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

Damit erhalten wir das folgende **Weg-Zeit-Gesetz** (Bild G-13):

$$s = -\frac{1}{8} \left[\cos(2t) + \sin(2t) + \mathrm{e}^{-2t} \right] + 1, \quad t \geq 0$$

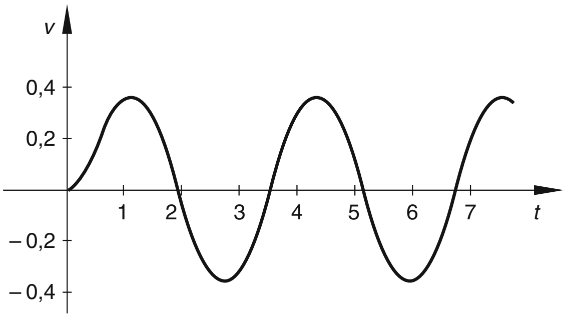


Bild G-12

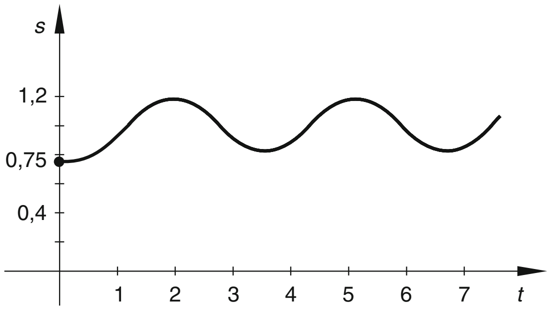


Bild G-13

G43

$$y' + 4y = \frac{x + 6}{x - 2} \cdot \mathrm{e}^{-4x}$$

Bestimmen Sie die *allgemeine* Lösung durch *„Variation der Konstanten“*.

Allgemeine Lösung der zugehörigen *homogenen* Dgl $y' + 4y = 0$: $y = K \cdot \mathrm{e}^{-4x}$

Variation der Konstanten: $\boldsymbol{K \rightarrow K(x)}$

Lösungsansatz mit Ableitung:

$$y = K(x) \cdot \mathrm{e}^{-4x}, \quad y' = K'(x) \cdot \mathrm{e}^{-4x} - 4K(x) \cdot \mathrm{e}^{-4x} \qquad (\textit{Produkt- und Kettenregel})$$

Wir setzen diese Ausdrücke in die *inhomogene* Dgl ein und erhalten eine einfache Dgl 1. Ordnung für die noch unbekannte *Faktorfunktion* $K(x)$, die durch *unbestimmte Integration* lösbar ist:

$$y' + 4y = K'(x) \cdot \mathrm{e}^{-4x} \underbrace{- 4K(x) \cdot \mathrm{e}^{-4x} + 4K(x) \cdot \mathrm{e}^{-4x}}_{0} = K'(x) \cdot \mathrm{e}^{-4x} = \frac{x+6}{x-2} \cdot \mathrm{e}^{-4x} \quad \Rightarrow$$

$$K'(x) = \frac{x+6}{x-2} \quad \Rightarrow \quad K(x) = \int K'(x)\,dx = \underbrace{\int \frac{x+6}{x-2}\,dx}_{\text{Integral 20 mit } a = 1,\ b = 6,\ p = 1,\ q = -2} = x + 8 \cdot \ln|x-2| + C$$

Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Dgl lautet damit wie folgt:

$$y = K(x) \cdot \mathrm{e}^{-4x} = (x + 8 \cdot \ln|x-2| + C) \cdot \mathrm{e}^{-4x}$$

G44

Ausgangssignal eines DT_1-Regelkreisgliedes

Das zeitabhängige *Ausgangssignal* $v = v(t)$ eines DT_1-*Regelkreisgliedes* genüge der folgenden Dgl:

$$0{,}2\,\dot{v} + v = \cos t - 1{,}24 \cdot \sin t, \quad t \geq 0$$

Lösen Sie diese Dgl durch *„Variation der Konstanten"* und bestimmen Sie die sog. *„stationäre"* Lösung, die sich nach einer gewissen „Einschwingphase" einstellt.

Die zugehörige *homogene* Dgl $0{,}2\,\dot{v} + v = 0$ oder $\dot{v} + 5v = 0$ hat die Lösung $v_0 = K \cdot \mathrm{e}^{-5t}$. Durch *„Variation der Konstanten"* bestimmen wir die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Dgl. Der *Lösungsansatz* $v = K(t) \cdot \mathrm{e}^{-5t}$ enthält die noch unbekannte Faktorfunktion $K(t)$, die wir so bestimmen müssen, dass der Lösungsansatz mitsamt seiner Ableitung

$$\dot{v} = \dot{K}(t) \cdot \mathrm{e}^{-5t} - 5K(t) \cdot \mathrm{e}^{-5t} \qquad (\textit{Produkt- } \text{und } \textit{Kettenregel})$$

die *inhomogene* Dgl erfüllt. Dies führt zu der folgenden einfachen Dgl für $K(t)$, die durch unbestimmte Integration leicht lösbar ist:

$$0{,}2\,\dot{v} + v = 0{,}2\,(\dot{K}(t) \cdot \mathrm{e}^{-5t} - 5K(t) \cdot \mathrm{e}^{-5t}) + K(t) \cdot \mathrm{e}^{-5t} =$$

$$= 0{,}2\,\dot{K}(t) \cdot \mathrm{e}^{-5t} \underbrace{- K(t) \cdot \mathrm{e}^{-5t} + K(t) \cdot \mathrm{e}^{-5t}}_{0} = 0{,}2\,\dot{K}(t) \cdot \mathrm{e}^{-5t} = \cos t - 1{,}24 \cdot \sin t \quad \Rightarrow$$

$$\dot{K}(t) = 5(\cos t - 1{,}24 \cdot \sin t) \cdot \mathrm{e}^{5t} \quad \Rightarrow$$

$$K(t) = \int \dot{K}(t)\,dt = 5 \cdot \int (\cos t - 1{,}24 \cdot \sin t) \cdot \mathrm{e}^{5t}\,dt = 5 \cdot \underbrace{\int \cos t \cdot \mathrm{e}^{5t}\,dt}_{\substack{\text{Integral } 324 \\ \text{mit } a = 5,\ b = 1}} - 6{,}2 \cdot \underbrace{\int \sin t \cdot \mathrm{e}^{5t}\,dt}_{\substack{\text{Integral } 322 \\ \text{mit } a = 5,\ b = 1}} =$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{26} \cdot \mathrm{e}^{5t}(5 \cdot \cos t + \sin t) - 6{,}2 \cdot \frac{1}{26} \cdot \mathrm{e}^{5t}(5 \cdot \sin t - \cos t) + C =$$

$$= \frac{1}{26} \cdot \mathrm{e}^{5t}(25 \cdot \cos t + 5 \cdot \sin t - 31 \cdot \sin t + 6{,}2 \cdot \cos t) + C =$$

$$= \frac{1}{26} \cdot \mathrm{e}^{5t}(31{,}2 \cdot \cos t - 26 \cdot \sin t) + C = \mathrm{e}^{5t}(1{,}2 \cdot \cos t - \sin t) + C$$

Damit erhalten wir das folgende *Ausgangssignal* (*allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Dgl):

$$v = K(t) \cdot \mathrm{e}^{-5t} = [\mathrm{e}^{5t}(1{,}2 \cdot \cos t - \sin t) + C] \cdot \mathrm{e}^{-5t} = 1{,}2 \cdot \cos t - \sin t + C \cdot \mathrm{e}^{-5t}, \quad t \geq 0$$

Der *exponentielle* Anteil im Ausgangssignal *verschwindet* im Laufe der Zeit (es handelt sich um eine streng monoton *fallende* Funktion) und es verbleibt die sog. *„stationäre"* Lösung (Bild G-14):

$$v_{\text{stationär}} = 1{,}2 \cdot \cos t - \sin t$$

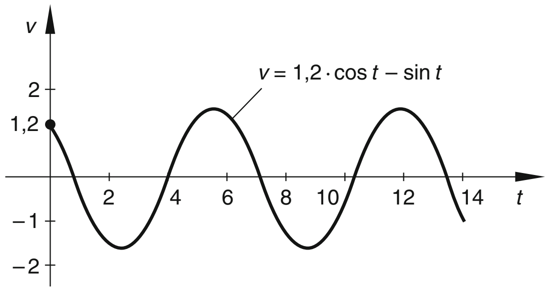


Bild G-14

1.5 Exakte Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$g(x;\, y)\, dx + h(x;\, y)\, dy = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x} \qquad \text{(sog. „Integrabilitätsbedingung")}$$

heißt *exakt* oder *vollständig*. Die linke Seite dieser Gleichung ist dann das *totale* oder *vollständige Differential* einer Funktion $u = u(x;\, y)$. Somit ist $u_x = g(x;\, y)$ und $u_y = h(x;\, y)$. Die *Lösung* der exakten Differentialgleichung lautet in *impliziter* Form:

$$\int g(x;\, y)\, dx + \int \left[h(x;\, y) - \int \frac{\partial g}{\partial y}\, dx \right] dy = \text{const.} = C \qquad \text{(„Lösungsformel")}$$

Die Lösung lässt sich auch aus den Gleichungen $u_x = g(x;\, y)$ und $u_y = h(x;\, y)$ durch unbestimmte *Integration* bestimmen.

Hinweise

(1) **Lehrbuch:** Band 2, Kapitel IV.2.4
Formelsammlung: Kapitel X.2.3

(2) *Faktoren*, die die Differentiations- bzw. Integrationsvariable *nicht* enthalten, sind *konstante* Faktoren und bleiben somit *erhalten*. Sie sind in diesem Abschnitt durch *Grauunterlegung* gekennzeichnet.

G45

$$(1 - x^2 \cdot e^y)\, y' = 2x \cdot e^y$$

Zeigen Sie, dass diese Dgl *exakt* ist und bestimmen Sie mit der „Lösungsformel" die *allgemeine* Lösung.

Wir bringen die Dgl zunächst auf die spezielle Form $g(x;\, y)\, dx + h(x;\, y)\, dy = 0$:

$$(1 - x^2 \cdot e^y)\, \frac{dy}{dx} - 2x \cdot e^y = 0 \quad \Big| \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \underbrace{-2x \cdot e^y}_{g(x;\, y)}\, dx + \underbrace{(1 - x^2 \cdot e^y)}_{h(x;\, y)}\, dy = 0$$

Sie ist *exakt*, da die *Integrabilitätsbedingung* erfüllt ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\,(-2x \cdot e^y) = -2x \cdot e^y \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\,(1 - x^2 \cdot e^y) = -2x \cdot e^y \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x} = -2x \cdot e^y$$

Lösung der exakten Dgl in *impliziter* Form (→ FS: Kapitel X.2.3):

$$\int g\,(x;\,y)\,dx + \int \left[h\,(x;\,y) - \int \frac{\partial g}{\partial y}\,dx \right] dy = \text{const.} = C$$

$$\int (-2x \cdot \mathrm{e}^{y})\,dx + \int \Bigg[(1 - x^2 \cdot \mathrm{e}^{y}) + \underbrace{\int 2x \cdot \mathrm{e}^{y}\,dx}_{x^2 \cdot \mathrm{e}^{y}} \Bigg] dy =$$

$$= -\mathrm{e}^{y} \cdot \int 2x\,dx + \int (1 \underbrace{- x^2 \cdot \mathrm{e}^{y} + x^2 \cdot \mathrm{e}^{y}}_{0})\,dy = -\mathrm{e}^{y} \cdot x^2 + \int 1\,dy = -x^2 \cdot \mathrm{e}^{y} + y = \text{const.} = C$$

Lösung: $-x^2 \cdot \mathrm{e}^{y} + y = C$

Kontrolle: Das *totale Differential* der impliziten Lösung $u\,(x;\,y) = -x^2 \cdot \mathrm{e}^{y} + y = C$ führt auf die vorliegende Dgl:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = -2x \cdot \mathrm{e}^{y}\,dx + (-x^2 \cdot \mathrm{e}^{y} + 1)\,dy = -2x \cdot \mathrm{e}^{y}\,dx + (1 - x^2 \cdot \mathrm{e}^{y})\,dy = 0$$

G46

$(3x^2 \cdot \sin y - y^2 \cdot \sin x)\,dx + (x^3 \cdot \cos y + 2y \cdot \cos x + 3y^2)\,dy = 0$

Welche *allgemeine* Lösung besitzt diese *exakte* Dgl („Lösungsformel“ verwenden)?

Die vorliegende Dgl ist *exakt*, da die Faktoren

$$g\,(x;\,y) = 3x^2 \cdot \sin y - y^2 \cdot \sin x \quad \text{und} \quad h\,(x;\,y) = x^3 \cdot \cos y + 2y \cdot \cos x + 3y^2$$

die *Integrabilitätsbedingung* erfüllen:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\,(3x^2 \cdot \sin y - y^2 \cdot \sin x) = 3x^2 \cdot \cos y - 2y \cdot \sin x \\[2ex] \dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\,(x^3 \cdot \cos y + 2y \cdot \cos x + 3y^2) = 3x^2 \cdot \cos y - 2y \cdot \sin x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$$

Wir bestimmen die *allgemeine* Lösung dieser Dgl in *impliziter* Form:

$$\int g\,(x;\,y)\,dx + \int \Bigg[h\,(x;\,y) - \underbrace{\int \frac{\partial g}{\partial y}\,dx}_{I} \Bigg] dy = \int g\,(x;\,y)\,dx + \int (h\,(x;\,y) - I)\,dy = \text{const.} = C$$

Mit

$$I = \int \frac{\partial g}{\partial y}\,dx = \int (3x^2 \cdot \cos y - 2y \cdot \sin x)\,dx = x^3 \cdot \cos y + 2y \cdot \cos x$$

folgt (die Integrationskonstante darf hier weggelassen werden):

$$\int g\,(x;\,y)\,dx + \int (h\,(x;\,y) - I)\,dy =$$

$$= \int (3x^2 \cdot \sin y - y^2 \cdot \sin x)\,dx + \int (x^3 \cdot \cos y + 2y \cdot \cos x + 3y^2 - x^3 \cdot \cos y - 2y \cdot \cos x)\,dy =$$

$$= \int (3x^2 \cdot \sin y - y^2 \cdot \sin x)\,dx + \int 3y^2\,dy = x^3 \cdot \sin y + y^2 \cdot \cos x + y^3 = \text{const.} = C$$

Lösung: $x^3 \cdot \sin y + y^2 \cdot \cos x + y^3 = C$

G47

$$(2x - \mathrm{e}^{-y})\,dx + (4y + 1 + x \cdot \mathrm{e}^{-y})\,dy = 0$$

Zeigen Sie zunächst, dass diese Dgl *exakt* ist. Durch *Integration* der bereits bekannten partiellen Ableitungen u_x und u_y bestimmen Sie dann die Lösung $u(x;\,y) = \text{const.}$ der Dgl.

Die Dgl ist *exakt*, da die *Integrabilitätsbedingung* erfüllt ist. Denn mit

$$g(x;\,y) = 2x - \mathrm{e}^{-y} \quad \text{und} \quad h(x;\,y) = 4y + 1 + x \cdot \mathrm{e}^{-y}$$

folgt (unter Verwendung der *Kettenregel*):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\,(2x - \mathrm{e}^{-y}) = \mathrm{e}^{-y} \\[2ex] \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\,(4y + 1 + x \cdot \mathrm{e}^{-y}) = 1 \cdot \mathrm{e}^{-y} = \mathrm{e}^{-y} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x} = \mathrm{e}^{-y}$$

Der Ausdruck auf der linken Seite der Dgl ist daher das *totale* oder *vollständige Differential* einer (noch unbekannten) Funktion $u(x;\,y)$ und die Lösung der Dgl ist dann (in *impliziter* Form) $u(x;\,y) = \text{const.} = C$. Wir könnten bei der Lösung wie bei den bisherigen Aufgaben verfahren, wollen hier aber auf die sog. „Lösungsformel" verzichten und einen anderen Lösungsweg einschlagen. Da wir das totale Differential von $u(x;\,y)$ bereits kennen, sind die partiellen Ableitungen 1. Ordnung dieser Funktion bekannt. Es gilt nämlich:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = g(x;\,y) = 2x - \mathrm{e}^{-y} \quad \text{und} \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = h(x;\,y) = 4y + 1 + x \cdot \mathrm{e}^{-y}$$

Mit Hilfe dieser Ableitungen lässt sich die Funktion $u(x;\,y)$ wie folgt bestimmen:

$$u_x = 2x - \mathrm{e}^{-y} \quad \Rightarrow \quad u = \int u_x\,dx = \int (2x - \mathrm{e}^{-y})\,dx = x^2 - x \cdot \mathrm{e}^{-y} + K(y)$$

Die bei der unbestimmten Integration auftretende Integrationskonstante *kann* dabei noch von der *zweiten* Variablen y abhängen, da dieser Term beim partiellen Differenzieren nach x bekanntlich *verschwindet* (er enthält ja nur y, *nicht* aber x). Damit ist die Funktion $u(x;\,y)$ bis auf den Summand $K(y)$ bestimmt.

Jetzt differenzieren wir diese Funktion unter Verwendung der *Kettenregel* partiell nach y und vergleichen das Ergebnis mit der bereits bekannten partiellen Ableitung $u_y = h(x;\,y)$:

$$u_y = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 - x \cdot \mathrm{e}^{-y} + K(y)\right] = x \cdot \mathrm{e}^{-y} + K'(y) = 4y + 1 + x \cdot \mathrm{e}^{-y} \quad \Rightarrow \quad K'(y) = 4y + 1$$

Durch Integration (nach y) erhalten wir schließlich:

$$K(y) = \int K'(y)\,dy = \int (4y + 1)\,dy = 2y^2 + y + K_1 \qquad (\text{mit } K_1 \in \mathbb{R})$$

Die gesuchte Funktion lautet somit:

$$u = u(x;\,y) = x^2 - x \cdot \mathrm{e}^{-y} + K(y) = x^2 - x \cdot \mathrm{e}^{-y} + 2y^2 + y + K_1$$

Ihr *totales Differential* entspricht (wie man leicht nachrechnet) genau der *linken* Seite der vorliegenden Dgl. Damit erhalten wir die folgende *allgemeine* Lösung (in *impliziter* Form):

$$x^2 - x \cdot \mathrm{e}^{-y} + 2y^2 + y = \text{const.} = C$$

(die Konstante K_1 ist in C aufgegangen).

G48

$$(3x^2 + y^2 + 2ax)\,dx + 2(x - a)\,y\,dy = 0 \qquad (\text{mit } a > 0)$$

Lösen Sie diese *exakte* Dgl durch *Integration* der bereits bekannten partiellen Ableitungen u_x und u_y der (noch unbekannten) Lösungsfunktion $u(x;\,y) = \text{const.}$ der Dgl.

Mit $g(x;\,y) = 3x^2 + y^2 + 2ax$ und $h(x;\,y) = 2(x - a)\,y$ folgt:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y\,, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 2 \cdot 1 \cdot y = 2y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x} = 2y$$

Die Dgl ist also *exakt*. Wir lösen sie nach der selben Methode wie in der vorherigen Aufgabe. Die *linke* Seite der Dgl ist das *totale Differential* einer (noch unbekannten) Funktion $u(x;\,y)$, deren partielle Ableitungen 1. Ordnung aber *bekannt* sind. Es gilt:

$$u_x = g(x;\,y) = 3x^2 + y^2 + 2ax \quad \text{und} \quad u_y = h(x;\,y) = 2(x - a)\,y$$

Wenn wir u_y nach y integrieren und dabei beachten, dass die Integrationskonstante noch von der *anderen* Variablen (hier also x) abhängen *kann*, erhalten wir die gesuchte Funktion $u = u(x;\,y)$:

$$u = \int u_y\,dy = \int 2(x - a)\,y\,dy = (x - a) \cdot \int 2y\,dy = (x - a)\,y^2 + K(x)$$

Differenzieren wir jetzt u partiell nach x, so erhalten wir die bereits bekannte Ableitung $u_x = g(x;\,y)$. Dies führt zu einer einfachen Dgl für den noch unbekannten Summand $K(x)$, die sich leicht lösen lässt:

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x - a)\,y^2 + K(x)\right] = 1 \cdot y^2 + K'(x) = y^2 + K'(x) = g(x;\,y) = 3x^2 + y^2 + 2ax \quad \Rightarrow$$

$$K'(x) = 3x^2 + 2ax \quad \Rightarrow \quad K(x) = \int K'(x)\,dx = \int (3x^2 + 2ax)\,dx = x^3 + ax^2 + K_1$$

Damit gilt: $u = u(x;\,y) = (x - a)\,y^2 + K(x) = (x - a)\,y^2 + x^3 + ax^2 + K_1$

Die *allgemeine* Lösung der *exakten* Dgl lautet also:

$$u(x;\,y) = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad x^3 + ax^2 + (x - a)\,y^2 = \text{const.} = C$$

(die Konstante K_1 ist in C aufgegangen)

G49

$$(x^2y^2 + x^3)\,dx + \left(\frac{2}{3}\,x^3y + y^3\right)dy = 0 \qquad \text{Anfangswert: } y(1) = -2$$

Lösen Sie diese *exakte* Dgl (Nachweis führen) durch *Integration* der bekannten partiellen Ableitungen der (noch unbekannten) allgemeinen Lösung.

Wir zeigen zunächst, dass diese Dgl *exakt* ist. Mit

$$g(x;\,y) = x^2y^2 + x^3 \quad \text{und} \quad h(x;\,y) = \frac{2}{3}\,x^3y + y^3$$

folgt nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\,(x^2y^2 + x^3) = x^2 \cdot 2y = 2x^2y \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}\,x^3\,y + y^3\right) = \frac{2}{3} \cdot 3x^2y = 2x^2y \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x} = 2x^2y$$

Die *Integrabilitätsbedingung* ist also erfüllt, die *linke* Seite der exakten Dgl ist somit das *totale Differential* einer (noch unbekannten) Funktion $u = u(x;\, y)$, deren partielle Ableitungen 1. Ordnung jedoch bereits bekannt sind. Es gilt:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = g(x;\, y) = x^2 y^2 + x^3 \quad \text{und} \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = h(x;\, y) = \frac{2}{3}\, x^3 y + y^3$$

Wir integrieren u_x nach x, beachten dabei, dass die auftretende Integrationskonstante noch von der *anderen* Variablen (hier also y) abhängen *kann* und erhalten:

$$u = \int u_x\, dx = \int (x^2 y^2 + x^3)\, dx = \frac{1}{3}\, x^3 y^2 + \frac{1}{4}\, x^4 + K(y)$$

Um $K(y)$ zu bestimmen, differenzieren wir die Funktion u partiell nach y und erhalten die bereits bekannte partielle Ableitung $u_y = h(x;\, y)$. Durch *Vergleich* folgt dann:

$$u_y = \frac{1}{3}\, x^3 \cdot 2y + K'(y) = \frac{2}{3}\, x^3 y + K'(y) = h(x;\, y) = \frac{2}{3}\, x^3 y + y^3 \quad \Rightarrow \quad K'(y) = y^3 \quad \Rightarrow$$

$$K(y) = \int K'(y)\, dy = \int y^3\, dy = \frac{1}{4}\, y^4$$

(die Integrationskonstante dürfen wir an dieser Stelle weglassen). Damit gilt:

$$u = u(x;\, y) = \frac{1}{3}\, x^3 y^2 + \frac{1}{4}\, x^4 + K(y) = \frac{1}{3}\, x^3 y^2 + \frac{1}{4}\, x^4 + \frac{1}{4}\, y^4 = \frac{1}{4}\, x^4 + \frac{1}{4}\, y^4 + \frac{1}{3}\, x^3 y^2$$

Allgemeine Lösung der *exakten* Dgl in *impliziter* Form:

$$u(x;\, y) = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}\, x^4 + \frac{1}{4}\, y^4 + \frac{1}{3}\, x^3 y^2 = \text{const.} \quad \text{oder} \quad 3x^4 + 3y^4 + 4x^3 y^2 = \text{const.} = C$$

Spezielle Lösung für den Anfangswert $y(1) = -2$ (in impliziter Form):

$$y(1) = -2 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot 1 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 1 \cdot 4 = 3 + 48 + 16 = 67 = C \quad \Rightarrow \quad C = 67$$

$$3x^4 + 3y^4 + 4x^3 y^2 = 67$$

G50

$$\frac{4x^2 - y^2}{x^2}\, dx + \frac{2y}{x}\, dy = 0$$

Zeigen Sie, dass diese Dgl *exakt* ist und bestimmen Sie anschließend mit der „Lösungsformel“ die *allgemeine* Lösung der Dgl. Wie lautet die Lösungskurve durch den Punkt $P = (2;\, 2)$?

Wir formen die Dgl zunächst wie folgt um:

$$\left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + 2yx^{-1}\, dy = \underbrace{(4 - y^2 x^{-2})}_{g(x;\, y)}\, dx + \underbrace{2yx^{-1}}_{h(x;\, y)}\, dy = 0$$

Sie ist *exakt*, da die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\,(4 - y^2 x^{-2}) = -2yx^{-2} \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\,(2yx^{-1}) = 2y(-x^{-2}) = -2yx^{-2} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x} = -2yx^{-2}$$

Wir ermitteln jetzt die *allgemeine* Lösung der Dgl in der *impliziten* Form (→ „Lösungsformel“):

$$\int g(x;y)\,dx + \int \left[h(x;y) - \int \frac{\partial g}{\partial y}\,dx \right] dy = \text{const.} = C$$

$$\int (4 - y^2 x^{-2})\,dx + \int \left[2yx^{-1} - \underbrace{\int (-2yx^{-2})\,dx}_{2yx^{-1}} \right] dy = \int (4 - y^2 x^{-2})\,dx + \int \underbrace{(2yx^{-1} - 2yx^{-1})}_{0}\,dy =$$

$$= \int (4 - y^2 x^{-2})\,dx + \int 0\,dy = 4x + y^2 x^{-1} + K = 4x + \frac{y^2}{x} + K = \frac{4x^2 + y^2}{x} + K = C \quad \Rightarrow$$

$$\frac{4x^2 + y^2}{x} = C^* \quad \Rightarrow \quad 4x^2 + y^2 = C^* x \quad \text{oder} \quad y^2 + 4x^2 - C^* x = 0 \qquad (\text{mit } C^* = C - K)$$

Allgemeine Lösung der Dgl: $y^2 + 4x^2 - C^* x = 0$

Es handelt sich um längs der x-Achse verschobene *Ellipsen*. Durch *quadratische Ergänzung* erhält man:

$$y^2 + 4x^2 - C^* x = 4x^2 - C^* x + y^2 = 4\left(x^2 - \underbrace{\frac{1}{4}\,C^*}_{2C_1} x\right) + y^2 = 4(x^2 - 2C_1 x) + y^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$4\underbrace{(x^2 - 2C_1 x + C_1^2)}_{(x - C_1)^2} + y^2 = 4C_1^2 \quad \Rightarrow \quad 4(x - C_1)^2 + y^2 = 4C_1^2 \;\; | : 4C_1^2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{(x - C_1)^2}{C_1^2} + \frac{y^2}{4C_1^2} = 1$$

Mittelpunkt: $M = (C_1; 0)$; Halbachsen: $a = |C_1|$, $b = 2|C_1|$

Spezielle Lösung durch den Punkt $P = (2; 2)$:

$$y(2) = 2 \quad \Rightarrow \quad 4 + 4 \cdot 4 - 2C^* = 20 - 2C^* = 0 \quad \Rightarrow \quad -2C^* = -20 \quad \Rightarrow \quad C^* = 10$$

$$y^2 + 4x^2 - 10x = 0 \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{10x - 4x^2}$$

G51

Die *nicht-exakte* Dgl $(x^2 - y)\,dx + x\,dy = 0$ lässt sich durch einen *integrierenden Faktor* $\lambda = \lambda(x)$ in eine *exakte* Dgl überführen. Bestimmen Sie diesen Faktor und *integrieren* Sie anschließend die (dann exakte) Dgl mit Hilfe der „Lösungsformel“.

Nach der (gliedweisen) Multiplikation der Dgl mit dem noch unbekannten *integrierenden Faktor* $\lambda = \lambda(x)$ soll die dann vorliegende Dgl

$$\underbrace{\lambda(x^2 - y)}_{g(x;y)}\,dx + \underbrace{\lambda x}_{h(x;y)}\,dy = 0 \quad \text{mit} \quad g(x;y) = \lambda(x^2 - y) \quad \text{und} \quad h(x;y) = \lambda x$$

exakt sein. Die Koeffizientenfunktionen $g(x;y)$ und $h(x;y)$ müssen also die *Integrabilitätsbedingung* erfüllen:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\,[\lambda(x^2 - y)] = \lambda(-1) = -\lambda, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\,(\lambda x) = \lambda' x + 1 \cdot \lambda = x\lambda' + \lambda \qquad (\textit{Produktregel})$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad -\lambda = x\lambda' + \lambda \quad \Rightarrow \quad x\lambda' = -2\lambda$$

Diese Dgl 1. Ordnung für den integrierenden Faktor $\lambda = \lambda(x)$ lässt sich leicht durch *„Trennung der Variablen"* wie folgt lösen:

$$x\lambda' = x\,\frac{d\lambda}{dx} = -2\lambda \quad\Rightarrow\quad \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{-2\,dx}{x} = -2\cdot\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow$$

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda} = -2\cdot\int\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \ln|\lambda| = -2\cdot\ln|x| + \ln|C| = -\ln x^2 + \ln C = \ln\left|\frac{C}{x^2}\right|$$

(*Rechenregeln:* R3 und R2). Durch *Entlogarithmierung* folgt (*Rechenregeln:* R5 und R6):

$$|\lambda| = \left|\frac{C}{x^2}\right| \quad\Rightarrow\quad \lambda = \pm\frac{C}{x^2} = \frac{K}{x^2} = K\cdot x^{-2} \qquad (\text{mit } K = \pm C)$$

Über die Konstante K können wir frei verfügen. Wir wählen zweckmäßigerweise $K = 1$. Der *integrierende Faktor* lautet also $\lambda = x^{-2}$. Die vorgegebene Dgl geht damit über in die exakte Dgl

$$x^{-2}(x^2 - y)\,dx + x^{-2}x\,dy = 0 \qquad \text{oder} \qquad (1 - x^{-2}y)\,dx + x^{-1}\,dy = 0$$

Wir bestimmen jetzt ihre *allgemeine* Lösung nach der bekannten „Lösungsformel"

$$\int g(x;y)\,dx + \int\left[h(x;y) - \int\frac{\partial g}{\partial y}\,dx\right]dy = \text{const.} = C$$

Mit

$$g(x;y) = 1 - x^{-2}y = 1 - yx^{-2}, \quad h(x;y) = x^{-1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(1 - yx^{-2}) = -x^{-2}$$

folgt daraus:

$$\int(1 - yx^{-2})\,dx + \int\Bigg[x^{-1} + \underbrace{\int x^{-2}\,dx}_{-x^{-1}}\Bigg]dy = \int(1 - yx^{-2})\,dx + \int\underbrace{(x^{-1} - x^{-1})}_{0}\,dy =$$

$$= \int(1 - yx^{-2})\,dx + \int 0\,dy = x - y(-x^{-1}) + K_1 = x + yx^{-1} + K_1 = \text{const.} = C$$

Die gesuchte *Lösung* lautet somit:

$$x + yx^{-1} = C - K_1 = C^* \quad\Rightarrow\quad x + \frac{y}{x} = C^* \quad\Rightarrow\quad x^2 + y = C^*x \quad\Rightarrow\quad y = C^*x - x^2$$

(mit $C^* = C - K_1$)

In Bild G-15 sind einige Lösungskurven dargestellt (nach unten geöffnete Parabeln gleicher Öffnung, gezeichnet für die Parameterwerte $C^* = 1, 3, 5$ und 7).

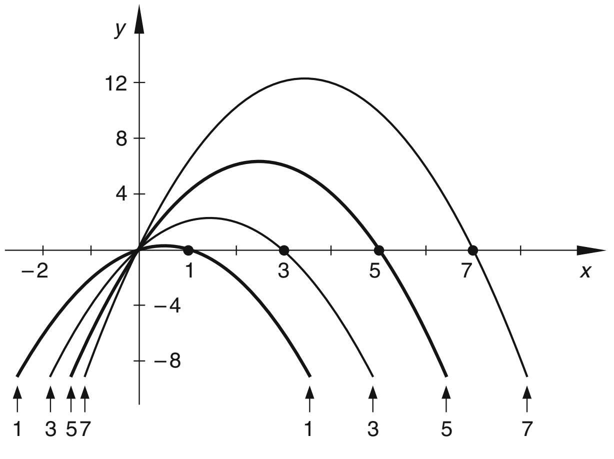


Bild G-15

G52

$4x\,dx + (2x^2 - \mathrm{e}^{-y})\,dy = 0$

Die vorliegende Dgl ist *nicht* exakt, lässt sich jedoch durch einen nur von y abhängigen *integrierenden Faktor* $\lambda = \lambda(y)$ in eine *exakte* Dgl verwandeln. Bestimmen Sie diesen Faktor und *integrieren* Sie anschließend die (dann exakte) Dgl.

Durch Multiplikation mit dem noch unbekannten *integrierenden Faktor* $\lambda = \lambda(y)$ wird die Dgl *exakt*, d. h. die Koeffizientenfunktionen $g(x;y)$ und $h(x;y)$ der „neuen“ (exakten) Dgl

$$\underbrace{4x\lambda}_{g(x;\,y)}\,dx + \underbrace{(2x^2 - \mathrm{e}^{-y})\,\lambda}_{h(x;\,y)}\,dy = 0 \quad \text{mit} \quad g(x;y) = 4x\lambda \quad \text{und} \quad h(x;y) = (2x^2 - \mathrm{e}^{-y})\,\lambda$$

müssen die *Integrabilitätsbedingung* $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial h}{\partial x}$ erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\,(4x\,\lambda) = 4x\lambda' \\ \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\,(2x^2 - \mathrm{e}^{-y})\lambda = 4x\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 4x\lambda' = 4x\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda' = \lambda \qquad \left(\text{mit } \lambda' = \frac{d\lambda}{dy}\right)$$

Diese einfache Dgl 1. Ordnung für $\lambda = \lambda(y)$ lösen wir durch *„Trennung der Variablen“*:

$$\lambda' = \frac{d\lambda}{dy} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{d\lambda}{\lambda} = 1\,dy \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{d\lambda}{\lambda} = \int 1\,dy \quad \Rightarrow \quad \ln|\lambda| = y + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln|\lambda| - \ln|C| = y \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{\lambda}{C}\right| = y$$

(*Rechenregel:* R2). *Entlogarithmieren* liefert dann (*Rechenregeln:* R5 und R6):

$$\left|\frac{\lambda}{C}\right| = \mathrm{e}^{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{C} = \pm\mathrm{e}^{y} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm C \cdot \mathrm{e}^{y} = K \cdot \mathrm{e}^{y} \qquad (\text{mit } K = \pm C)$$

Wir dürfen über die Konstante K frei verfügen und setzen $K = 1$. *Integrierender Faktor* ist also $\lambda = \mathrm{e}^{y}$, die Dgl

$$4x \cdot \mathrm{e}^{y}\,dx + (2x^2 - \mathrm{e}^{-y})\,\mathrm{e}^{y}\,dy = 4x \cdot \mathrm{e}^{y}\,dx + (2x^2 \cdot \mathrm{e}^{y} - 1)\,dy = 0$$

ist *exakt*. Wir lösen sie mit der bekannten „Lösungsformel“:

$$\int g(x;y)\,dx + \int \left[h(x;y) - \int \frac{\partial g}{\partial y}\,dx\right] dy = \text{const.} = C$$

Mit

$$g(x;y) = 4x \cdot \mathrm{e}^{y}, \quad h(x;y) = 2x^2 \cdot \mathrm{e}^{y} - 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\,(4x \cdot \mathrm{e}^{y}) = 4x \cdot \mathrm{e}^{y}$$

wird daraus:

$$\int 4x \cdot \mathrm{e}^{y}\,dx + \int \Bigg[2x^2 \cdot \mathrm{e}^{y} - 1 - \underbrace{\int 4x \cdot \mathrm{e}^{y}\,dx}_{2x^2 \cdot \mathrm{e}^{y}}\Bigg] dy = \int 4x \cdot \mathrm{e}^{y}\,dx + \int \underbrace{(2x^2 \cdot \mathrm{e}^{y} - 1 - 2x^2 \cdot \mathrm{e}^{y})}_{-1}\,dy =$$

$$= \int 4x \cdot \mathrm{e}^{y}\,dx + \int (-1)\,dy = 2x^2 \cdot \mathrm{e}^{y} - y + K_1 = \text{const.} = C$$

Lösung der exakten Dgl (in *impliziter* Form):

$$2x^2 \cdot \mathrm{e}^{y} - y = C - K_1 = C^{*} \quad (\text{mit } C^{*} = C - K_1)$$

2 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die *homogene* lineare Dgl wird durch einen *Exponentialansatz* gelöst, die *inhomogene* lineare Dgl durch *„Aufsuchen einer partikulären Lösung"*.

Hinweise

(1) **Lehrbuch:** Band 2, Kapitel IV.3 und IV.4
Formelsammlung: Kapitel X.3.2 und X.4

(2) **Tabelle** mit Lösungsansätzen für eine partikuläre Lösung → Band 2, Kapitel IV.3.4 (Tabelle 2) und Formelsammlung, Kapitel X.3.23

2.1 Homogene lineare Differentialgleichungen

G53 Lösen Sie die folgende *Randwertaufgabe:* $y'' + \pi^2 \cdot y = 0$ Randwerte: $y(0) = 1, \quad y(3/2) = -5$

Mit dem Ansatz $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y' = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$ gehen wir in die Dgl ein und lösen die *charakteristische Gleichung*:

$$y'' + \pi^2 \cdot y = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + \pi^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = (\lambda^2 + \pi^2) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \pi^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm \pi \mathrm{j}$$

Allgemeine Lösung der Dgl: $y = C_1 \cdot \sin(\pi x) + C_2 \cdot \cos(\pi x)$

Bestimmung der Integrationskonstanten aus den beiden *Randbedingungen*:

$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1$$

$$y(3/2) = -5 \quad \Rightarrow \quad C_1 \cdot \sin(3\pi/2) + C_2 \cdot \cos(3\pi/2) = C_1 \cdot (-1) + C_2 \cdot 0 = -C_1 = -5$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = 5$$

Lösung der Randwertaufgabe: $y = 5 \cdot \sin(\pi x) + 1 \cdot \cos(\pi x) = 5 \cdot \sin(\pi x) + \cos(\pi x)$

G54 $y'' + 16y' + 100y = 0$ Anfangswerte: $y(0) = 2, \quad y'(0) = 8$

Mit dem Lösungsansatz $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ und den zugehörigen Ableitungen $y' = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$ und $y'' = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$ erhalten wir die folgende *charakteristische Gleichung* mit konjugiert komplexen Lösungen:

$$y'' + 16y' + 100y = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + 16\lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + 100 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = (\lambda^2 + 16\lambda + 100) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + 16\lambda + 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -8 \pm \sqrt{64 - 100} = -8 \pm \sqrt{-36} = -8 \pm 6\mathrm{j}$$

Die *allgemeine* Lösung der Dgl lautet damit:

$$y = \mathrm{e}^{-8x}[C_1 \cdot \sin(6x) + C_2 \cdot \cos(6x)]$$

Die Parameter (Integrationskonstanten) C_1 und C_2 werden aus den *Anfangswerten* bestimmt:

$$y(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^0[\mathrm{C}_1 \cdot \sin 0 + \mathrm{C}_2 \cdot \cos 0] = 1[C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1] = C_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 2$$

$$y' = -8 \cdot \mathrm{e}^{-x}[C_1 \cdot \sin(6x) + C_2 \cdot \cos(6x)] + [6C_1 \cdot \cos(6x) - 6C_2 \cdot \sin(6x)] \cdot \mathrm{e}^{-8x} =$$

$$= \mathrm{e}^{-8x}[-8C_1 \cdot \sin(6x) - 8C_2 \cdot \cos(6x) + 6C_1 \cdot \cos(6x) - 6C_2 \cdot \sin(6x)]$$

(unter Verwendung der *Produktregel* in Verbindung mit der *Kettenregel*)

$$y'(0) = 8 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^0[-8C_1 \cdot \sin 0 - 8C_2 \cdot \cos 0 + 6C_1 \cdot \cos 0 - 6C_2 \cdot \sin 0] = 8$$

$$\Rightarrow \quad 1[-8C_1 \cdot 0 - 8C_2 \cdot 1 + 6C_1 \cdot 1 - 6C_2 \cdot 0] = -8C_2 + 6C_1 = 8$$

$$\Rightarrow \quad -8 \cdot 2 + 6C_1 = 8 \quad \Rightarrow \quad -16 + 6C_1 = 8 \quad \Rightarrow \quad 6C_1 = 24 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 4$$

Spezielle Lösung: $y = \mathrm{e}^{-8x}[4 \cdot \sin(6x) + 2 \cdot \cos(6x)]$

G55

Aperiodischer Grenzfall

Die Lösungen der *Schwingungsgleichung*

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + 0{,}25x = 0 \quad \text{mit} \quad a > 0$$

hängen noch vom Parameter a ab.

a) Wie muss a gewählt werden, damit der *aperiodische Grenzfall* eintritt?

b) Wie lautet die Lösung der Schwingungsgleichung im *aperiodischen Grenzfall* für die Anfangswerte $x(0) = 2$ und $v(0) = \dot{x}(0) = -2$?

$x = x(t)$: Weg-Zeit-Gesetz; $v = \dot{x}(t)$: Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz

---

a) Der *aperiodische Grenzfall* tritt (definitionsgemäß) genau dann ein, wenn die *charakteristische Gleichung* der Dgl eine *doppelte* reelle Lösung besitzt. Mit dem *Exponentialansatz* $x = \mathrm{e}^{\lambda t}$, $\dot{x} = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$ und $\ddot{x} = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$ erhält man (unter Berücksichtigung von $a > 0$):

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + 0{,}25x = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} + 2a\lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} + 0{,}25 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} = (\lambda^2 + 2a\lambda + 0{,}25) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda t}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + 2a\lambda + 0{,}25 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -a \pm \sqrt{\underbrace{a^2 - 0{,}25}_{0}} \quad \Rightarrow \quad a^2 - 0{,}25 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}5$$

Der aperiodische Grenzfall tritt also für den Parameterwert $a = 0{,}5$ ein, die charakteristische Gleichung hat dann die Doppellösung $\lambda_{1/2} = -a = -0{,}5$.

b) Die *allgemeine* Lösung der Dgl $\ddot{x} + \dot{x} + 0{,}25x = 0$ lautet also im *aperiodischen Grenzfall*:

$$x = (C_1 t + C_2) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t}$$

Für die Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2 aus den *Anfangswerten* benötigen wir noch die 1. Ableitung. Die *Produktregel* in Verbindung mit der *Kettenregel* liefert:

$$\dot{x} = C_1 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t} - 0{,}5 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t}(C_1 t + C_2) = (C_1 - 0{,}5C_1 t - 0{,}5C_2) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t}$$

Aus den *Anfangswerten* erhalten wir wie folgt die Parameter C_1 und C_2:

$$x(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad (C_1 \cdot 0 + C_2) \cdot \mathrm{e}^0 = C_2 \cdot 1 = C_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 2$$

$$v(0) = \dot{x}(0) = -2 \quad \Rightarrow \quad (C_1 - 0{,}5\,C_1 \cdot 0 - 0{,}5\,C_2) \cdot \mathrm{e}^0 = (C_1 - 0{,}5\,C_2) \cdot 1 = C_1 - 0{,}5\,C_2 = -2$$

$$\Rightarrow \quad C_1 - 0{,}5 \cdot 2 = C_1 - 1 = -2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1$$

Spezielle Lösung der Schwingungsgleichung

$$x = (-t + 2) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\,t}, \quad t \ge 0$$

Bild G-16 zeigt den zeitlichen Verlauf der aperiodischen Bewegung.

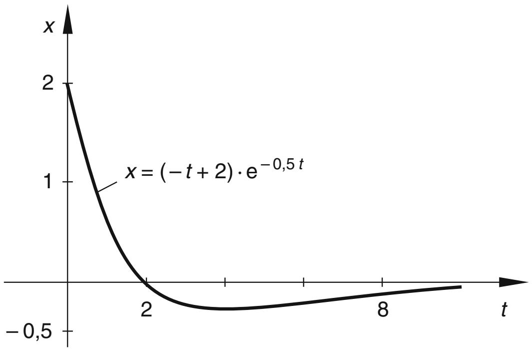


Bild G-16

G56

Knickung eines Stabes nach Euler

Stäbe, die in *axialer* Richtung durch Druckkräfte belastet werden, zeigen bereits vor Überschreiten der Materialfestigkeit ein *seitliches* Ausbiegen (sog. Knickung). Das Verhalten eines beidseitig gelenkig gelagerten Stabes der Länge l, der durch eine Druckkraft F *axial* belastet wird, lässt sich durch die sog. *Biegegleichung*

$$y'' + \frac{F}{EI} \cdot y = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = y(\ell) = 0$$

beschreiben (EI: konstante Biegesteifigkeit; $y = y(x)$: Biegelinie; Bild G-17).
Bestimmen Sie die sog. *Eulerschen Knickkräfte*, bei der die Zerstörung des Stabes infolge seitlichen Ausknickens einsetzt.

Hinweis: Untersuchen Sie, unter welcher Voraussetzung die Biegegleichung *nicht-triviale* Lösungen besitzt.

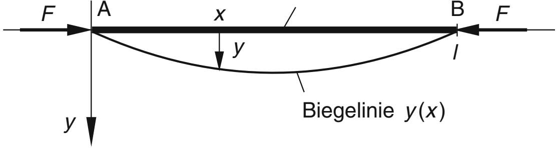


Bild G-17

Wir bringen die Dgl zunächst in die folgende Gestalt:

$$y'' + \frac{F}{EI} \cdot y = 0 \quad \Rightarrow \quad y'' + \omega^2 \cdot y = 0 \qquad \left(\text{mit } \omega^2 = \frac{F}{EI}\right)$$

Mit dem bekannten *Lösungsansatz* $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y' = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$ und $y'' = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$ folgt dann:

$$y'' + \omega^2 \cdot y = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + \omega^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = (\lambda^2 + \omega^2) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm\,\mathrm{j}\,\omega$$

Die *allgemeine* Lösung der Dgl lautet damit:

$$y = C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)$$

Die beiden *Randbedingungen* führen zu den folgenden Gleichungen für die noch unbekannten Integrationskonstanten C_1 und C_2:

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$y(\ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 \cdot \sin(\omega \ell) + C_2 \cdot \cos(\omega \ell) = C_1 \cdot \sin(\omega \ell) + 0 \cdot \cos(\omega \ell) = C_1 \cdot \sin(\omega \ell) = 0$$

C_1 muss von Null *verschieden* sein, andernfalls wäre $y \equiv 0$ (*kein* Knicken des Stabes). Wegen $C_1 \neq 0$ muss demnach der Faktor $\sin(\omega \ell)$ *verschwinden*. Diese Bedingung liefert uns die gesuchten *Eigenwerte* und *Knickkräfte*:

$$\sin(\omega \ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega \ell = k \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad \omega = k \cdot \frac{\pi}{\ell} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

(wegen $\omega > 0$ kommen für k nur *positive* Werte in Frage)

$$\omega^2 = \frac{F}{EI} = k^2 \cdot \frac{\pi^2}{\ell^2} \quad \Rightarrow \quad F = k^2 \cdot \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Für $k = 1$ erhalten wir den *kleinsten* Eigenwert $\omega = \pi / \ell$. Die zugehörige *Eigenfunktion*

$$y = C_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\ell} x\right), \quad 0 \leq x \leq \ell$$

ist in Bild G-18 dargestellt (die Konstante $C_1 \neq 0$ bleibt unbestimmt).

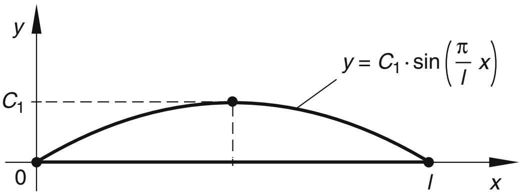


Bild G-18

G57

Radialbewegung einer Masse auf einer rotierenden Scheibe

Bild G-19 zeigt eine mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω rotierende Zylinderscheibe vom Radius R, auf der sich eine Masse m *reibungsfrei* nach außen bewegt. Das *Weg-Zeit-Gesetz* $r = r(t)$ genügt dabei der Dgl

$$\ddot{r} - \omega^2 \cdot r = 0$$

Wie lautet die Lösung dieser Dgl für die *Anfangswerte*

$$r(0) = 1 \quad \text{und} \quad v(0) = \dot{r}(0) = 0?$$

$v = v(t) = \dot{r}(t)$: Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz

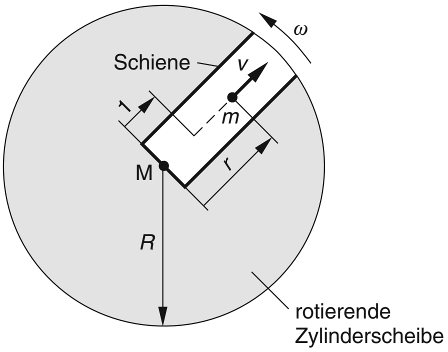


Bild G-19

Wir lösen diese *homogene* Dgl mit dem *Exponentialansatz* $r = e^{\lambda t}$, $\dot{r} = \lambda \cdot e^{\lambda t}$, $\ddot{r} = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$:

$$\ddot{r} - \omega^2 \cdot r = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} - \omega^2 \cdot e^{\lambda t} = (\lambda^2 - \omega^2) \cdot \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm \omega$$

Die *allgemeine* Lösung und ihre 1. Ableitung lauten damit:

$$r = C_1 \cdot e^{\omega t} + C_2 \cdot e^{-\omega t}, \quad \dot{r} = \omega C_1 \cdot e^{\omega t} - \omega C_2 \cdot e^{-\omega t} \qquad (\textit{Kettenregel})$$

Aus den beiden *Anfangsbedingungen* lassen sich die Integrationskonstanten C_1 und C_2 wie folgt berechnen:

$$r(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{(I)} \quad C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 = C_1 + C_2 = 1$$

$$\dot{r}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(II)} \quad \omega C_1 \cdot e^0 - \omega C_2 \cdot e^0 = \omega C_1 \cdot 1 - \omega C_2 \cdot 1 = \underbrace{\omega}_{\neq 0}(C_1 - C_2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$C_1 - C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2$$

$$\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = C_1 + C_1 = 2C_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad C_2 = C_1 = \frac{1}{2}$$

Weg-Zeit-Gesetz der Masse m in der Führungsschiene (Bild G-20):

$$r = \frac{1}{2} \cdot e^{\omega t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\omega t} = \frac{1}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right) = \cosh(\omega t)$$

Zur Erinnerung: $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$ → FS: Kapitel III.11.1.

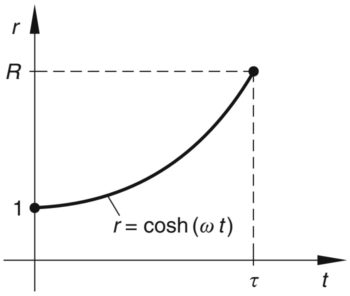


Bild G-20

2.2 Inhomogene lineare Differentialgleichungen

G58 $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$

1. Schritt: Wir lösen die zugehörige *homogene* Dgl $y'' + 4y' + 5y = 0$ durch den *Exponentialansatz* $y = e^{\lambda x}$ mit $y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}$ und $y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$:

$$y'' + 4y' + 5y = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + 4\lambda \cdot e^{\lambda x} + 5 \cdot e^{\lambda x} = (\lambda^2 + 4\lambda + 5) \cdot \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 - 5} = -2 \pm \sqrt{-1} = -2 \pm j$$

Die *allgemeine* Lösung der *homogenen* Dgl lautet damit:

$$y_0 = e^{-2x} \cdot (C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x)$$

2. Schritt: Aus der Tabelle entnehmen wir für das Störglied $g(x) = 5x^2 - 32x + 5$ wegen $b = 4 \neq 0$ den folgenden *Ansatz* für eine *partikuläre* Lösung der *inhomogenen* Dgl:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C \quad \text{mit den Ableitungen} \quad y_p' = 2Ax + B \quad \text{und} \quad y_p'' = 2A$$

Einsetzen in die *inhomogene* Dgl, ordnen nach fallenden Potenzen und ein *Koeffizientenvergleich* führen zu einem gestaffelten linearen Gleichungssystem für die noch unbekannten Parameter A, B und C im Lösungsansatz, das sich schrittweise von oben nach unten lösen lässt:

$$y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5 \quad \Rightarrow$$

$$2A + 4(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C) = 5x^2 - 32x + 5 \quad \Rightarrow$$

$$2A + 8Ax + 4B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C = 5Ax^2 + (8A + 5B)x + (2A + 4B + 5C) = 5x^2 - 32x + 5$$

$$\text{(I)} \quad 5A = 5 \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

$$\text{(II)} \quad 8A + 5B = -32 \quad \Rightarrow \quad 8 \cdot 1 + 5B = 8 + 5B = -32 \quad \Rightarrow \quad 5B = -40 \quad \Rightarrow \quad B = -8$$

$$\text{(III)} \quad 2A + 4B + 5C = 5 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-8) + 5C = 2 - 32 + 5C = -30 + 5C = 5$$

$$\Rightarrow \quad 5C = 35 \quad \Rightarrow \quad C = 7$$

Partikuläre Lösung: $y_p = x^2 - 8x + 7$

3. Schritt: Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* linearen Dgl lautet damit:

$$y = y_0 + y_p = \mathrm{e}^{-2x}(C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x) + x^2 - 8x + 7$$

G59

$$y'' + a^2 y = 2a \cdot \sin(ax) \qquad (a > 0)$$

---

1. Schritt: Wir lösen zunächst die zugehörige *homogene* Dgl $y'' + a^2 y = 0$ mit dem *Exponentialansatz* $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y' = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$:

$$y'' + a^2 y = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + a^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = (\lambda^2 + a^2) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm \mathrm{j} a$$

Die *allgemeine* Lösung der *homogenen* Dgl lautet demnach:

$$y_0 = C_1 \cdot \sin(ax) + C_2 \cdot \cos(ax)$$

2. Schritt: Störfunktion $g(x) = 2a \cdot \sin(ax)$ mit $\beta = a$

Da $\mathrm{j}\beta = \mathrm{j}a$ eine *Lösung* der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + a^2 = 0$ ist (siehe 1. Schritt), entnehmen wir der Tabelle den folgenden *Ansatz* für eine *partikuläre* Lösung der *inhomogenen* Dgl:

$$y_p = x[A \cdot \sin(ax) + B \cdot \cos(ax)]$$

Die benötigten Ableitungen y_p' und y_p'' erhalten wir jeweils mit der *Produktregel* in Verbindung mit der *Kettenregel*:

$$y_p' = 1 \cdot [A \cdot \sin(ax) + B \cdot \cos(ax)] + [aA \cdot \cos(ax) - aB \cdot \sin(ax)] \cdot x =$$

$$= A \cdot \sin(ax) + B \cdot \cos(ax) + ax[A \cdot \cos(ax) - B \cdot \sin(ax)]$$

$$y_p'' = aA \cdot \cos(ax) - aB \cdot \sin(ax) + a[A \cdot \cos(ax) - B \cdot \sin(ax)] +$$

$$+ [-aA \cdot \sin(ax) - aB \cdot \cos(ax)] \cdot ax =$$

$$= a[A \cdot \cos(ax) - B \cdot \sin(ax)] + a[A \cdot \cos(ax) - B \cdot \sin(ax)] -$$

$$- a^2 x[A \cdot \sin(ax) + B \cdot \cos(ax)] =$$

$$= 2a[A \cdot \cos(ax) - B \cdot \sin(ax)] - a^2 x[A \cdot \sin(ax) + B \cdot \cos(ax)]$$

Einsetzen in die *inhomogene* Dgl und ordnen der Glieder führt zu:

$$y'' + a^2 y = 2a \cdot \sin(ax) \quad \Rightarrow$$

$$2a[A \cdot \cos(ax) - B \cdot \sin(ax)] - a^2 x[A \cdot \sin(ax) + B \cdot \cos(ax)] +$$

$$+ a^2 x[A \cdot \sin(ax) + B \cdot \cos(ax)] = 2a \cdot \sin(ax) \quad \Rightarrow$$

$$2a[A \cdot \cos(ax) - B \cdot \sin(ax)] = 2a \cdot \sin(ax) \quad | : 2a \quad \Rightarrow$$

$$A \cdot \cos(ax) - B \cdot \sin(ax) = \sin(ax) = 0 \cdot \cos(ax) + 1 \cdot \sin(ax)$$

Wir haben noch auf der rechten Seite die fehlende Kosinusfunktion mit dem Faktor 0 ergänzt $(0 \cdot \cos(ax) \equiv 0)$. Durch *Koeffizientenvergleich* erhalten wir zwei Gleichungen für die unbekannten Koeffizienten A und B (verglichen werden jeweils die *Kosinus*- bzw. *Sinusglieder* der beiden Seiten):

$$\text{(I)}\quad A = 0; \quad \text{(II)} \quad -B = 1 \quad \Rightarrow \quad B = -1$$

Partikuläre Lösung der *inhomogenen* Dgl:

$$y_P = x[0 \cdot \sin(ax) - 1 \cdot \cos(ax)] = -x \cdot \cos(ax)$$

3. Schritt: Damit besitzt die *inhomogene* lineare Dgl folgende *allgemeine* Lösung:

$$y = y_0 + y_P = C_1 \cdot \sin(ax) + C_2 \cdot \cos(ax) - x \cdot \cos(ax) = C_1 \cdot \sin(ax) + (C_2 - x) \cdot \cos(ax)$$

G60 $\quad y'' + 2y' - 3y = 4 \cdot e^x + 6x - 10$

---

1. Schritt: Wir lösen die zugehörige *homogene* Dgl $y'' + 2y' - 3y = 0$ mit dem *Exponentialansatz* $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$:

$$y'' + 2y' - 3y = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + 2\lambda \cdot e^{\lambda x} - 3 \cdot e^{\lambda x} = (\lambda^2 + 2\lambda - 3) \cdot \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1 + 3} = -1 \pm \sqrt{4} = -1 \pm 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -3$$

Die *allgemeine* Lösung der *homogenen* Dgl lautet somit:

$$y_0 = C_1 \cdot e^{1x} + C_2 \cdot e^{-3x} = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-3x}$$

2. Schritt: Für die beiden Summanden der *Störfunktion* $g(x) = 4 \cdot e^x + 6x - 10$ entnehmen wir aus der Tabelle folgende *Ansätze* für eine *partikuläre* Lösung y_P:

$$\textit{Störglied} \quad g_1(x) = 4 \cdot e^x \quad \xrightarrow{c\,=\,1} \quad y_{P1} = Ax \cdot e^x$$

Begründung: $c = 1$ ist eine *einfache* Lösung der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$, siehe 1. Schritt.

$$\textit{Störglied} \quad g_2(x) = 6x - 10 \quad \xrightarrow{b\,=\,-3\,\neq\,0} \quad y_{P2} = Bx + C$$

Der *Lösungsansatz* y_P ist dann die *Summe* der beiden *Teilansätze* y_{P1} und y_{P2}:

$$y_P = y_{P1} + y_{P2} = Ax \cdot e^x + Bx + C$$

Mit diesem Ansatz und den durch *gliedweises* Differenzieren unter Verwendung der *Produktregel* (1. Summand) gewonnenen Ableitungen

$$y'_P = A \cdot e^x + e^x \cdot Ax + B = A \cdot e^x + Ax \cdot e^x + B$$

$$y''_P = A \cdot e^x + A \cdot e^x + e^x \cdot Ax = 2A \cdot e^x + Ax \cdot e^x$$

gehen wir in die *inhomogene* Dgl ein, ordnen die Glieder und erhalten:

$$y'' + 2y' - 3y = 4 \cdot e^x + 6x - 10 \quad \Rightarrow$$

$$2A \cdot e^x + Ax \cdot e^x + 2(A \cdot e^x + Ax \cdot e^x + B) - 3(Ax \cdot e^x + Bx + C) = 4 \cdot e^x + 6x - 10 \quad \Rightarrow$$

$$2A \cdot e^x + Ax \cdot e^x + 2A \cdot e^x + 2Ax \cdot e^x + 2B - 3Ax \cdot e^x - 3Bx - 3C = 4 \cdot e^x + 6x - 10 \quad \Rightarrow$$

$$4A \cdot e^x - 3Bx + 2B - 3C = 4 \cdot e^x + 6x - 10$$

Durch *Koeffizientenvergleich* folgt (wir vergleichen dabei auf beiden Seiten die Koeffizienten von e^x, x und die absoluten Glieder):

$$\text{(I)} \quad 4A = 4 \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

$$\text{(II)} \quad -3B = 6 \quad \Rightarrow \quad B = -2$$

$$\text{(III)} \quad 2B - 3C = -10 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot (-2) - 3C = -4 - 3C = -10 \quad \Rightarrow \quad -3C = -6 \quad \Rightarrow \quad C = 2$$

Partikuläre Lösung: $y_P = x \cdot \mathrm{e}^x - 2x + 2$

3. Schritt: Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Dgl lautet damit:

$$y = y_0 + y_P = C_1 \cdot \mathrm{e}^x + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-3x} + x \cdot \mathrm{e}^x - 2x + 2 = (x + C_1) \cdot \mathrm{e}^x + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-3x} - 2x + 2$$

G61

$$y'' - y' - 6y = 12 \cdot \cosh(3x)$$

---

1. Schritt: Wir lösen zunächst die zugehörige *homogene* Dgl in der bekannten Weise mit dem *Exponentialansatz* $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y' = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$ und $y'' = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$:

$$y'' - y' - 6y = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} - \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} - 6 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = (\lambda^2 - \lambda - 6) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -2$$

Allgemeine Lösung der *homogenen* Dgl: $y_0 = C_1 \cdot \mathrm{e}^{3x} + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-2x}$

2. Schritt: Störglied $g(x) = 12 \cdot \cosh(3x)$

In unserer Tabelle suchen wir vergebens ein Störglied von diesem Typ. Da die Hyperbelfunktionen jedoch eine gewisse Verwandtschaft mit den trigonometrischen Funktionen zeigen, könnten wir für die partikuläre Lösung einen ähnlichen Lösungsansatz versuchen wie für die entsprechende trigonometrische Funktion (hier also: $\cos(3x)$). *Oder* – und diesen Weg wollen wir hier einschlagen – wir führen die Hyperbelfunktion mit Hilfe der Definitionsformel auf die *Exponentialfunktionen* zurück:

$$g(x) = 12 \cdot \cosh(3x) = 12 \cdot \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-3x}) = 6 \cdot \mathrm{e}^{3x} + 6 \cdot \mathrm{e}^{-3x}$$

Zur Erinnerung: $\cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ → FS: Kapitel III.11.1.

Für die *Einzelstörglieder* entnehmen wir der Tabelle die folgenden *Ansätze* für eine *partikuläre* Lösung:

$$\text{Störglied} \quad g_1(x) = 6 \cdot \mathrm{e}^{3x} \quad \xrightarrow{c\,=\,3} \quad y_{P1} = Ax \cdot \mathrm{e}^{3x}$$

$$\text{Störglied} \quad g_2(x) = 6 \cdot \mathrm{e}^{-3x} \quad \xrightarrow{c\,=\,-3} \quad y_{P2} = B \cdot \mathrm{e}^{-3x}$$

Begründung: $c = 3$ ist eine *einfache* Lösung, $c = -3$ dagegen *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$, siehe 1. Schritt.

Damit erhalten wir folgenden *Lösungsansatz* für die *partikuläre* Lösung y_P (Summe der beiden Einzelansätze):

$$y_P = y_{P1} + y_{P2} = Ax \cdot \mathrm{e}^{3x} + B \cdot \mathrm{e}^{-3x}$$

Mit Hilfe der *Produkt-* und *Kettenregel* bilden wir noch die benötigten Ableitungen:

$$y'_P = A \cdot \mathrm{e}^{3x} + 3 \cdot \mathrm{e}^{3x} \cdot Ax - 3B \cdot \mathrm{e}^{-3x} = A \cdot \mathrm{e}^{3x} + 3Ax \cdot \mathrm{e}^{3x} - 3B \cdot \mathrm{e}^{-3x}$$

$$y''_P = 3A \cdot \mathrm{e}^{3x} + 3A \cdot \mathrm{e}^{3x} + 3 \cdot \mathrm{e}^{3x} \cdot 3Ax + 9B \cdot \mathrm{e}^{-3x} = 6A \cdot \mathrm{e}^{3x} + 9Ax \cdot \mathrm{e}^{3x} + 9B \cdot \mathrm{e}^{-3x}$$

Die *inhomogene* Dgl geht dann über in:

$$y'' - y' - 6y = 6 \cdot \mathrm{e}^{3x} + 6 \cdot \mathrm{e}^{-3x} \quad \Rightarrow$$

$$6A \cdot \mathrm{e}^{3x} + 9Ax \cdot \mathrm{e}^{3x} + 9B \cdot \mathrm{e}^{-3x} - (A \cdot \mathrm{e}^{3x} + 3Ax \cdot \mathrm{e}^{3x} - 3B \cdot \mathrm{e}^{-3x}) - 6(Ax \cdot \mathrm{e}^{3x} + B \cdot \mathrm{e}^{-3x}) =$$

$$= 6 \cdot \mathrm{e}^{3x} + 6 \cdot \mathrm{e}^{-3x} \quad \Rightarrow$$

$$6A \cdot \mathrm{e}^{3x} + 9Ax \cdot \mathrm{e}^{3x} + 9B \cdot \mathrm{e}^{-3x} - A \cdot \mathrm{e}^{3x} - 3Ax \cdot \mathrm{e}^{3x} + 3B \cdot \mathrm{e}^{-3x} - 6Ax \cdot \mathrm{e}^{3x} - 6B \cdot \mathrm{e}^{-3x} =$$

$$= 6 \cdot \mathrm{e}^{3x} + 6 \cdot \mathrm{e}^{-3x} \quad \Rightarrow$$

$$5A \cdot \mathrm{e}^{3x} + 6B \cdot \mathrm{e}^{-3x} = 6 \cdot \mathrm{e}^{3x} + 6 \cdot \mathrm{e}^{-3x}$$

Koeffizientenvergleich (Vergleich der Glieder e^{3x} bzw. e^{-3x} auf beiden Seiten):

$$\text{(I)} \quad 5A = 6 \quad \Rightarrow \quad A = 1{,}2 \qquad \text{(II)} \quad 6B = 6 \quad \Rightarrow \quad B = 1$$

Partikuläre Lösung der *inhomogenen* Dgl: $y_P = 1{,}2x \cdot \mathrm{e}^{3x} + 1 \cdot \mathrm{e}^{-3x} = 1{,}2x \cdot \mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-3x}$

3. Schritt: Die *inhomogene* Dgl besitzt damit die folgende *allgemeine* Lösung:

$$y = y_0 + y_P = C_1 \cdot \mathrm{e}^{3x} + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-2x} + 1{,}2x \cdot \mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-3x} = (C_1 + 1{,}2x) \cdot \mathrm{e}^{3x} + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-3x}$$

G62

$y'' + 2y' + 2y = 2$ Randbedingungen: $y(0) + y'(\pi) = 0, \quad y(\pi) = 1$

Lösen Sie diese *Randwertaufgabe*.

---

1. Schritt: Integration der zugehörigen *homogenen* Dgl $y'' + 2y' + 2y = 0$

Der *Exponentialansatz* $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ mit $y' = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$ und $y'' = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$ führt zu der folgenden charakteristischen Gleichung:

$$y'' + 2y' + 2y = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + 2\lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + 2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = (\lambda^2 + 2\lambda + 2) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1 - 2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm \mathrm{j}$$

Die *allgemeine* Lösung der *homogenen* Dgl lautet daher:

$$y_0 = \mathrm{e}^{-x}(C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x)$$

2. Schritt: Aus der Tabelle entnehmen wir für das konstante Störglied $g(x) = 2$ den *Ansatz* $y_P = \text{const.} = A$ für eine *partikuläre* Lösung.

Mit den Ableitungen $y'_P = 0$ und $y''_P = 0$ erhalten wir dann beim Einsetzen in die *inhomogene* Dgl eine Bestimmungsgleichung für die noch unbekannte Konstante A:

$$y'' + 2y' + 2y = 2 \quad \Rightarrow \quad 0 + 2 \cdot 0 + 2A = 2A = 2 \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

Somit ist $y_P = 1$ die gesuchte *partikuläre* Lösung der *inhomogenen* Dgl.

3. Schritt: Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Dgl lautet somit:

$$y = y_0 + y_P = \mathrm{e}^{-x}(C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x) + 1$$

4. Schritt: Aus den beiden *Randbedingungen* bestimmen wir die Konstanten C_1 und C_2. Dabei benötigen wir noch die Ableitung der allgemeinen Lösung (*Produktregel* in Verbindung mit der *Kettenregel*):

$$y' = -\mathrm{e}^{-x}(C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x) + (C_1 \cdot \cos x - C_2 \cdot \sin x) \cdot \mathrm{e}^{-x} =$$

$$= -\mathrm{e}^{-x}(C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x - C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x)$$

Wir berechnen zunächst die in den *Randbedingungen* auftretenden Werte $y(0)$, $y(\pi)$ und $y'(\pi)$:

$$y(0) = \mathrm{e}^0(\mathrm{C}_1 \cdot \sin 0 + \mathrm{C}_2 \cdot \cos 0) + 1 = 1 \cdot (C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1) + 1 = C_2 + 1$$

$$y(\pi) = \mathrm{e}^{-\pi}(C_1 \cdot \sin \pi + C_2 \cdot \cos \pi) + 1 = \mathrm{e}^{-\pi}(C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot (-1)) + 1 = -\mathrm{e}^{-\pi} \cdot C_2 + 1$$

$$y'(\pi) = -\mathrm{e}^{-\pi}(C_1 \cdot \sin \pi + C_2 \cdot \cos \pi - C_1 \cdot \cos \pi + C_2 \cdot \sin \pi) =$$

$$= -\mathrm{e}^{-\pi}(C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot (-1) - C_1 \cdot (-1) + C_2 \cdot 0) = -\mathrm{e}^{-\pi}(-C_2 + C_1) = \mathrm{e}^{-\pi}(C_2 - C_1)$$

Aus den *Randbedingungen* folgt dann:

$$y(0) + y'(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathrm{I}) \quad C_2 + 1 + \mathrm{e}^{-\pi}(C_2 - C_1) = 0$$

$$y(\pi) = 1 \quad \Rightarrow \quad (\mathrm{II}) \quad -\mathrm{e}^{-\pi} \cdot C_2 + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad -\mathrm{e}^{-\pi} \cdot C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$(\mathrm{I}) \quad \Rightarrow \quad 0 + 1 + \mathrm{e}^{-\pi}(0 - C_1) = 1 - \mathrm{e}^{-\pi} \cdot C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -\mathrm{e}^{-\pi} \cdot C_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \mathrm{e}^{\pi}$$

Damit erhalten wir die folgende Lösung für diese *Randwertaufgabe*:

$$y = \mathrm{e}^{-x}[\mathrm{e}^{\pi} \cdot \sin x + 0 \cdot \cos x] + 1 = \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{e}^{\pi} \cdot \sin x + 1 = \mathrm{e}^{\pi - x} \cdot \sin x + 1$$

G63

Lösen Sie die folgende *Anfangswertaufgabe*:

$$y'' + y = 2 \cdot \cos x + x \quad \text{mit} \quad y(\pi) = 2\pi \quad \text{und} \quad y'(\pi) = \pi$$

---

1. Schritt: Die zugehörige *homogene* Dgl $y'' + y = 0$ führt mit dem bekannten *Exponentialansatz* $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ auf die folgende *charakteristische Gleichung* $(y' = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x},\ y'' = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x})$:

$$y'' + y = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + \mathrm{e}^{\lambda x} = (\lambda^2 + 1) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm 1\mathrm{j} = \pm \mathrm{j}$$

Allgemeine Lösung der *homogenen* Dgl: $y_0 = C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x$

2. Schritt: Störglied $g(x) = 2 \cdot \cos x + x = g_1(x) + g_2(x)$ mit $g_1(x) = 2 \cdot \cos x$ und $g_2(x) = x$

Aus der Tabelle entnehmen wir die folgenden *Ansätze* für die *partikulären* Lösungen der einzelnen Störglieder:

$$\text{Störglied} \quad g_1(x) = 2 \cdot \cos x \quad \xrightarrow{\beta = 1} \quad y_{P1} = x(A \cdot \sin x + B \cdot \cos x)$$

Begründung: $\mathrm{j}\beta = \mathrm{j}\,1 = \mathrm{j}$ ist eine *Lösung* der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + 1 = 0$, siehe 1. Schritt.

$$\text{Störglied} \quad g_2(x) = x \quad \xrightarrow{b = 1 \neq 0} \quad y_{P2} = Cx + D$$

Ansatz y_P für das Störglied $g(x) = g_1(x) + g_2(x) = 2 \cdot \cos x + x$:

$$y_P = y_{P1} + y_{P2} = x(A \cdot \sin x + B \cdot \cos x) + Cx + D \qquad \text{(Summe der Einzelansätze)}$$

Mit diesem Ansatz und den mit Hilfe der *Produktregel* erhaltenen Ableitungen

$$y'_p = 1(A \cdot \sin x + B \cdot \cos x) + (A \cdot \cos x - B \cdot \sin x) \cdot x + C =$$

$$= A \cdot \sin x + B \cdot \cos x + x(A \cdot \cos x - B \cdot \sin x) + C$$

$$y''_p = A \cdot \cos x - B \cdot \sin x + 1(A \cdot \cos x - B \cdot \sin x) + (-A \cdot \sin x - B \cdot \cos x) \cdot x =$$

$$= A \cdot \cos x - B \cdot \sin x + A \cdot \cos x - B \cdot \sin x - x(A \cdot \sin x + B \cdot \cos x) =$$

$$= 2A \cdot \cos x - 2B \cdot \sin x - x(A \cdot \sin x + B \cdot \cos x)$$

gehen wir in die *inhomogene* Dgl, ordnen die Glieder und erhalten durch einen *Koeffizientenvergleich* vier einfache Gleichungen für die vier Unbekannten A, B, C und D:

$$y'' + y = 2 \cdot \cos x + x \quad \Rightarrow$$

$$2A \cdot \cos x - 2B \cdot \sin x \underbrace{- x(A \cdot \sin x + B \cdot \cos x) + x(A \cdot \sin x + B \cdot \cos x)}_{0} + Cx + D = 2 \cdot \cos x + x$$

$$2A \cdot \cos x - 2B \cdot \sin x + Cx + D = 2 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x + x + 0$$

Vor dem *Koeffizientenvergleich* haben wir auf der rechten Seite die noch fehlenden Glieder ergänzt (*Sinusglied* $0 \cdot \sin x \equiv 0$ und *absolutes* Glied 0, sie verändern nichts):

$$2A = 2, \quad -2B = 0, \quad C = 1, \quad D = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 1, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad D = 0$$

Partikuläre Lösung: $y_p = x(1 \cdot \sin x + 0 \cdot \cos x) + 1x + 0 = x \cdot \sin x + x$

3. Schritt: Die *inhomogene* Dgl besitzt damit die folgende *allgemeine* Lösung:

$$y = y_0 + y_p = C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x + x \cdot \sin x + x$$

4. Schritt: Aus den *Anfangswerten* berechnen wir die noch unbekannten Koeffizienten C_1 und C_2:

$$y(\pi) = 2\pi \quad \Rightarrow \quad C_1 \cdot \underbrace{\sin \pi}_{0} + C_2 \cdot \underbrace{\cos \pi}_{-1} + \pi \cdot \underbrace{\sin \pi}_{0} + \pi = -C_2 + \pi = 2\pi \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\pi$$

$$y' = C_1 \cdot \cos x - C_2 \cdot \sin x + 1 \cdot \sin x + (\cos x) \cdot x + 1 =$$

$$= C_1 \cdot \cos x - C_2 \cdot \sin x + \sin x + x \cdot \cos x + 1$$

$$y'(\pi) = \pi \quad \Rightarrow \quad C_1 \cdot \underbrace{\cos \pi}_{-1} - C_2 \cdot \underbrace{\sin \pi}_{0} + \underbrace{\sin \pi}_{0} + \pi \cdot \underbrace{\cos \pi}_{-1} + 1 = -C_1 - \pi + 1 = \pi$$

$$\Rightarrow \quad -C_1 = -1 + 2\pi \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1 - 2\pi$$

Die gesuchte *spezielle* Lösung lautet damit:

$$y = (1 - 2\pi) \cdot \sin x - \pi \cdot \cos x + x \cdot \sin x + x$$

G64

Anregung eines Feder-Masse-Schwingers durch eine exponentiell abklingende äußere Kraft

Ein schwingungsfähiges *Feder-Masse-System* mit der Masse m und der Federkonstanten c unterliege der zeitabhängigen äußeren Kraft $F(t) = F_0 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t}$ mit $\alpha > 0$. Lösen Sie die *Schwingungsgleichung*

$$m\ddot{x} + cx = F_0 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t}$$

für die *Anfangswerte* $x(0) = 0$ und $v(0) = \dot{x}(0) = 0$. Wie lautet die *„stationäre" Lösung*?

$x = x(t)$: Weg-Zeit-Gesetz; $v = v(t) = \dot{x}(t)$: Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz.

Wir bringen die Dgl zunächst auf eine etwas übersichtlichere Gestalt:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\, x = \frac{F_0}{m} \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} \quad \text{oder} \quad \ddot{x} + \omega^2 \cdot x = K_0 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{c}{m}, \quad K_0 = \frac{F_0}{m}$$

1. Schritt: Die zugehörige *homogene* Dgl $\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0$ wird durch den *Exponentialansatz* $x = \mathrm{e}^{\lambda t}$ gelöst:

$$x = \mathrm{e}^{\lambda t}, \quad \dot{x} = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}, \quad \ddot{x} = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} + \omega^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} = (\lambda^2 + \omega^2) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda t}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm \mathrm{j}\,\omega$$

Damit ist $x_0 = C_1 \cdot \sin(\omega t) + C_2 \cdot \cos(\omega t)$ die *allgemeine* Lösung der *homogenen* Dgl.

2. Schritt: Den zur Störfunktion $g(t) = K_0 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t}$ gehörenden *Lösungsansatz* für eine *partikuläre* Lösung x_p der *inhomogenen* Dgl entnehmen wir der Tabelle. Er lautet: $x_p = A \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t}$. Mit diesem Ansatz und den Ableitungen $\dot{x}_p = -\alpha A \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t}$ und $\ddot{x}_p = \alpha^2 A \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t}$ gehen wir jetzt in die *inhomogene* Dgl und bestimmen den noch unbekannten Parameter A:

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = K_0 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} \quad \Rightarrow$$

$$\alpha^2 A \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} + \omega^2 A \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} = K_0 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} \;|: \mathrm{e}^{-\alpha t} \quad \Rightarrow \quad A(\alpha^2 + \omega^2) = K_0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{K_0}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Partikuläre Lösung: $x_p = \dfrac{K_0}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t}$

3. Schritt: Die *allgemeine* Lösung der Dgl lautet damit:

$$x = x_0 + x_p = C_1 \cdot \sin(\omega t) + C_2 \cdot \cos(\omega t) + \frac{K_0}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t}, \quad t \geq 0$$

4. Schritt: Die Parameter C_1 und C_2 werden wie folgt aus den *Anfangswerten* bestimmt:

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0 + \frac{K_0}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot \mathrm{e}^0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + \frac{K_0}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad C_2 + \frac{K_0}{\alpha^2 + \omega^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{K_0}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\dot{x} = \omega C_1 \cdot \cos(\omega t) - \omega C_2 \cdot \sin(\omega t) - \alpha \cdot \frac{K_0}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} \qquad (\textit{Kettenregel})$$

$$\dot{x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega C_1 \cdot \cos 0 - \omega C_2 \cdot \sin 0 - \alpha \cdot \frac{K_0}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot \mathrm{e}^0 =$$

$$= \omega C_1 \cdot 1 - \omega C_2 \cdot 0 - \alpha \cdot \frac{K_0}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega C_1 - \alpha \cdot \frac{K_0}{\alpha^2 + \omega^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega C_1 = \alpha \cdot \frac{K_0}{\alpha^2 + \omega^2} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{\alpha}{\omega} \cdot \frac{K_0}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Lösung: $x = \dfrac{\alpha}{\omega} \cdot \dfrac{K_0}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot \sin(\omega t) - \dfrac{K_0}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot \cos(\omega t) + \dfrac{K_0}{\alpha^2 + \omega^2} \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} =$

$$= \frac{K_0}{\alpha^2 + \omega^2} \left(\frac{\alpha}{\omega} \cdot \sin(\omega t) - \cos(\omega t) + \mathrm{e}^{-\alpha t} \right), \quad t \geq 0$$

„Stationäre Lösung“: Im Laufe der Zeit (d. h. für $t \to \infty$) spielt der Summand $\mathrm{e}^{-\alpha t}$ *keine* nennenswerte Rolle mehr und darf daher *vernachlässigt* werden ($\mathrm{e}^{-\alpha t}$ geht asymptotisch gegen Null):

$$x_{\text{stationär}} = \frac{K_0}{\alpha^2 + \omega^2} \left(\frac{\alpha}{\omega} \cdot \sin(\omega t) - \cos(\omega t) \right) = \frac{K_0}{\omega(\alpha^2 + \omega^2)} \left(\alpha \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot \cos(\omega t) \right)$$

G65 Lösen Sie die folgende *Schwingungsgleichung*:

$$\ddot{x} + x = 10(\cos t - \sin t) \qquad \text{Anfangswerte: } x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 5$$

1. Schritt: Wir lösen zunächst die zugehörige *homogene* Dgl $\ddot{x} + x = 0$.

Lösungsansatz: $x = e^{\lambda t}$, $\dot{x} = \lambda \cdot e^{\lambda t}$, $\ddot{x} = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$

$$\ddot{x} + x = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = (\lambda^2 + 1) \cdot \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm 1 \mathrm{j} = \mathrm{j}$$

Allgemeine Lösung der *homogenen* Dgl: $x_0 = C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t$

2. Schritt: Störglied $g(t) = 10(\cos t - \sin t)$

Aus der Tabelle entnehmen wir den folgenden *Lösungsansatz* für eine *partikuläre* Lösung ($\beta = 1$; $\mathrm{j}\beta = \mathrm{j}1 = \mathrm{j}$ ist eine *Lösung* der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + 1 = 0$; siehe 1. Schritt):

$$x_p = t(A \cdot \sin t + B \cdot \cos t)$$

Mit der *Produktregel* bilden wir die benötigten Ableitungen 1. und 2. Ordnung:

$$\dot{x}_p = 1(A \cdot \sin t + B \cdot \cos t) + (A \cdot \cos t - B \cdot \sin t)t = A \cdot \sin t + B \cdot \cos t + t(A \cdot \cos t - B \cdot \sin t)$$

$$\ddot{x}_p = A \cdot \cos t - B \cdot \sin t + 1(A \cdot \cos t - B \cdot \sin t) + (-A \cdot \sin t - B \cdot \cos t)t =$$

$$= A \cdot \cos t - B \cdot \sin t + A \cdot \cos t - B \cdot \sin t - t(A \cdot \sin t + B \cdot \cos t) =$$

$$= 2A \cdot \cos t - 2B \cdot \sin t - t(A \cdot \sin t + B \cdot \cos t)$$

Wir setzen diese Ausdrücke in die *inhomogene* Dgl ein:

$$\ddot{x} + x = 10(\cos t - \sin t) \quad \Rightarrow$$

$$2A \cdot \cos t - 2B \cdot \sin t \underbrace{- t(A \cdot \sin t + B \cdot \cos t) + t(A \cdot \sin t + B \cdot \cos t)}_{0} = 10(\cos t - \sin t) \quad \Rightarrow$$

$$2A \cdot \cos t - 2B \cdot \sin t = 10 \cdot \cos t - 10 \cdot \sin t$$

Koeffizientenvergleich liefert dann (Vergleich der Kosinus- bzw. Sinusglieder auf beiden Seiten):

$$2A = 10, \quad -2B = -10 \quad \Rightarrow \quad A = 5, \quad B = 5$$

Partikuläre Lösung: $x_p = t(5 \cdot \sin t + 5 \cdot \cos t) = 5t(\sin t + \cos t)$

3. Schritt: Die *allgemeine* Lösung der Schwingungsgleichung lautet:

$$x = x_0 + x_p = C_1 \cdot \sin t + C_2 \cdot \cos t + 5t(\sin t + \cos t), \quad t \geq 0$$

4. Schritt: Aus den *Anfangsbedingungen* berechnen wir die Parameter C_1 und C_2:

$$x(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0 + 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1$$

$$\dot{x} = C_1 \cdot \cos t - C_2 \cdot \sin t + 5(\sin t + \cos t) + 5t(\cos t - \sin t)$$

(Ableitung des letzten Summanden nach der *Produktregel*)

$$\dot{x}(0) = 5 \quad \Rightarrow \quad C_1 \cdot \cos 0 - C_2 \cdot \sin 0 + 5(\sin 0 + \cos 0) + 0 = C_1 \cdot 1 - C_2 \cdot 0 + 5(0 + 1) = 5$$

$$\Rightarrow \quad C_1 + 5 = 5 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

Lösung: $x = 0 \cdot \sin t + 1 \cdot \cos t + 5t(\sin t + \cos t) = \cos t + 5t(\sin t + \cos t), \quad t \geq 0$

Der zeitliche Verlauf der Schwingung ist in Bild G-21 dargestellt.

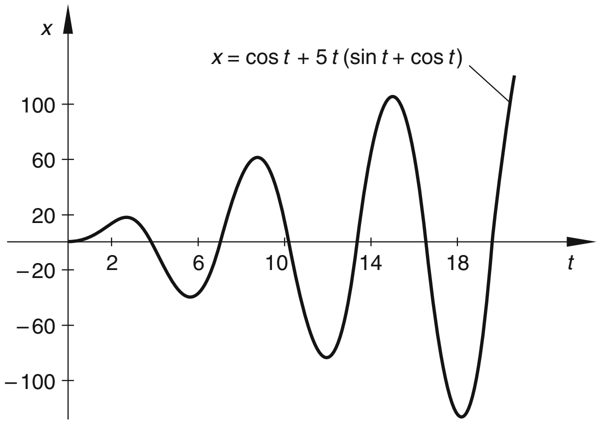


Bild G-21

G66

Elektrische Schwingung in einem LC-Stromkreis (Resonanzfall)

In einem LC-Stromkreis mit der Induktivität L und der Kapazität C genügt die *Ladung* q der Dgl

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = u$$

Dabei ist $u = u(t)$ die von außen angelegte Spannung. Bestimmen Sie den *zeitlichen* Verlauf der *Kondensatorladung* $q = q(t)$, wenn die Wechselspannung

$$u = u_0 \cdot \cos(\omega_0 t) \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

angelegt wird. Der Kondensator soll zu Beginn, d. h. zur Zeit $t = 0$ die Ladung $q(0) = q_0$ haben, der Stromkreis zur gleichen Zeit *stromlos* sein.

Hinweis: Die Stromstärke $i = i(t)$ ist die *1. Ableitung* der Ladung $q = q(t)$ nach der Zeit t.

Wir bringen die Dgl zunächst auf folgende Gestalt:

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC} \cdot q = \frac{u}{L} \quad \text{oder} \quad \ddot{q} + \omega_0^2 \cdot q = \frac{u_0}{L} \cdot \cos(\omega_0 t) \qquad \left(\text{mit} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}\right)$$

1. Schritt: Integration der zugehörigen *homogenen* Dgl $\ddot{q} + \omega_0^2 \cdot q = 0$

Lösungsansatz: $q = \mathrm{e}^{\lambda t}$, $\dot{q} = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$, $\ddot{q} = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \cdot q = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} + \omega_0^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} = (\lambda^2 + \omega_0^2) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda t}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm \omega_0 \mathrm{j}$$

Lösung der *homogenen* Dgl: $q_h = C_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + C_2 \cdot \cos(\omega_0 t)$

2. Schritt: Störglied $g(t) = \dfrac{u_0}{L} \cdot \cos(\omega_0 t)$

Aus der Tabelle erhalten wir für die *partikuläre* Lösung q_P der *inhomogenen* Dgl den folgenden *Lösungsansatz* ($\beta = \omega_0$; $\mathrm{j}\beta = \mathrm{j}\omega_0 = \omega_0 \mathrm{j}$ ist eine *Lösung* der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$, siehe 1. Schritt):

$$q_P = t[A \cdot \sin(\omega_0 t) + B \cdot \cos(\omega_0 t)]$$

Mit der *Produkt-* und *Kettenregel* bilden wir die benötigten ersten beiden Ableitungen:

$$\dot{q}_P = 1\,[A \cdot \sin(\omega_0 t) + B \cdot \cos(\omega_0 t)] + [\omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t) - \omega_0 B \cdot \sin(\omega_0 t)]\,t =$$

$$= A \cdot \sin(\omega_0 t) + B \cdot \cos(\omega_0 t) + t\,[\omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t) - \omega_0 B \cdot \sin(\omega_0 t)]$$

$$\ddot{q}_P = \omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t) - \omega_0 B \cdot \sin(\omega_0 t) + 1\,[\omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t) - \omega_0 B \cdot \sin(\omega_0 t)] +$$

$$+ [-\omega_0^2 A \cdot \sin(\omega_0 t) - \omega_0^2 B \cdot \cos(\omega_0 t)] \cdot t =$$

$$= \omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t) - \omega_0 B \cdot \sin(\omega_0 t) + \omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t) - \omega_0 B \cdot \sin(\omega_0 t)\,t -$$

$$- \omega_0^2\,t\,[A \cdot \sin(\omega_0 t) + B \cdot \cos(\omega_0 t)] =$$

$$= 2\,\omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t) - 2\,\omega_0 B \cdot \sin(\omega_0 t) - \omega_0^2\,t\,[A \cdot \sin(\omega_0 t) + B \cdot \cos(\omega_0 t)]$$

Einsetzen in die *inhomogene* Dgl:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \cdot q = \frac{u_0}{L} \cdot \cos(\omega_0 t) \quad \Rightarrow$$

$$2\,\omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t) - 2\,\omega_0 B \cdot \sin(\omega_0 t) - \omega_0^2\,t\,[A \cdot \sin(\omega_0 t) + B \cdot \cos(\omega_0 t) +$$

$$+ \omega_0^2\,t\,[A \cdot \sin(\omega_0 t) + B \cdot \cos(\omega_0 t)] = \frac{u_0}{L} \cdot \cos(\omega_0 t) \quad \Rightarrow$$

$$2\,\omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t) - 2\,\omega_0 B \cdot \sin(\omega_0 t) = \frac{u_0}{L} \cdot \cos(\omega_0 t) + 0 \cdot \sin(\omega_0 t)$$

(mathematischer „Trick“: wir haben die rechte Seite um das fehlende *Sinusglied* ergänzt: $0 \cdot \sin(\omega_0 t) \equiv 0$). *Koeffizientenvergleich* liefert zwei Gleichungen für die Unbekannten A und B, aus der sich diese bestimmen lassen:

$$2\,\omega_0 A = \frac{u_0}{L}, \quad -2\,\omega_0 B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{u_0}{2\,\omega_0 L}, \quad B = 0$$

Partikuläre Lösung: $q_P = t\left[\frac{u_0}{2\,\omega_0 L} \cdot \sin(\omega_0 t) + 0 \cdot \cos(\omega_0 t)\right] = \frac{u_0}{2\,\omega_0 L} \cdot t \cdot \sin(\omega_0 t)$

3. Schritt: Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Dgl lautet damit:

$$q = q_h + q_P = C_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + C_2 \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{u_0}{2\,\omega_0 L} \cdot t \cdot \sin(\omega_0 t), \quad t \ge 0$$

4. Schritt: Aus den *Anfangsbedingungen* lassen sich die noch unbekannten Konstanten C_1 und C_2 wie folgt bestimmen:

$$q(0) = q_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0 + 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = C_2 = q_0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = q_0$$

$$\dot{q} = \omega_0 C_1 \cdot \cos(\omega_0 t) - \omega_0 C_2 \cdot \sin(\omega_0 t) + \frac{u_0}{2\,\omega_0 L}\left[1 \cdot \sin(\omega_0 t) - t \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t)\right] =$$

$$= \omega_0 C_1 \cdot \cos(\omega_0 t) - \omega_0 C_2 \cdot \sin(\omega_0 t) + \frac{u_0}{2\,\omega_0 L}\,[\sin(\omega_0 t) - \omega_0 t \cdot \cos(\omega_0 t)]$$

(Ableitung durch *gliedweises* Differenzieren unter Verwendung von *Ketten-* und *Produktregel*)

$$i(0) = \dot{q}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 C_1 \cdot \cos 0 - \omega_0 C_2 \cdot \sin 0 + \frac{u_0}{2\,\omega_0 L}\,(\sin 0 - 0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_0 C_1 \cdot 1 - \omega_0 C_2 \cdot 0 + \frac{u_0}{2\,\omega_0 L} \cdot 0 = \omega_0 C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

Lösung: $q = 0 \cdot \sin(\omega_0 t) + q_0 \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{u_0}{2\,\omega_0 L} \cdot t \cdot \sin(\omega_0 t) =$

$$= q_0 \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{u_0}{2\,\omega_0 L} \cdot t \cdot \sin(\omega_0 t), \quad t \ge 0$$

Bild G-22 zeigt den zeitlichen Verlauf der Kondensatorladung.

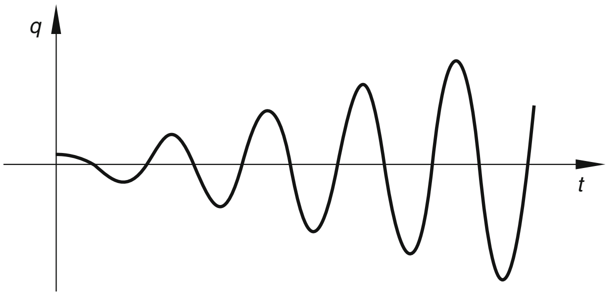


Bild G-22

G67

Erzwungene Schwingung in einem mechanischen Schwingkreis

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden *Schwingungsgleichung*:

$$\ddot{x} + 16\dot{x} + 64x = 79 \cdot \cos t + 47 \cdot \sin t$$

Wie lautet die *„stationäre" Lösung* dieser Dgl, dargestellt als phasenverschobene Sinusschwingung in der Form

$$x_{\text{stationär}} = C \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{mit} \quad C > 0 \quad \text{und} \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

(sog. *erzwungene Schwingung*)?

---

1. Schritt: Integration der zugehörigen *homogenen* Dgl $\ddot{x} + 16\dot{x} + 64x = 0$

Lösungsansatz: $x = e^{\lambda t}, \; \dot{x} = \lambda \cdot e^{\lambda t}, \; \ddot{x} = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$

$$\ddot{x} + 16\dot{x} + 64x = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + 16\lambda \cdot e^{\lambda t} + 64 \cdot e^{\lambda t} = (\lambda^2 + 16\lambda + 64) \cdot \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + 16\lambda + 64 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -8 \pm \sqrt{64 - 64} = -8 \pm 0 = -8$$

Lösung der *homogenen* Dgl: $x_0 = (C_1 t + C_2) \cdot e^{-8t}$

2. Schritt: Störfunktion $g(t) = 79 \cdot \cos t + 47 \cdot \sin t$

Aus der Tabelle entnommener *Lösungsansatz* für eine *partikuläre* Lösung x_p der *inhomogenen* Dgl (mit 1. und 2. Ableitung):

$$x_p = A \cdot \sin t + B \cdot \cos t, \quad \dot{x}_p = A \cdot \cos t - B \cdot \sin t, \quad \ddot{x}_p = -A \cdot \sin t - B \cdot \cos t$$

Begründung: $\beta = 1, \; j\beta = j1 = j$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + 16\lambda + 64 = 0$, siehe 1. Schritt.

Einsetzen in die *inhomogene* Dgl und ordnen der Glieder:

$$\ddot{x} + 16\dot{x} + 64x = 79 \cdot \cos t + 47 \cdot \sin t \quad \Rightarrow$$

$$-A \cdot \sin t - B \cdot \cos t + 16(A \cdot \cos t - B \cdot \sin t) + 64(A \cdot \sin t + B \cdot \cos t) = 79 \cdot \cos t + 47 \cdot \sin t$$

$$-A \cdot \sin t - B \cdot \cos t + 16A \cdot \cos t - 16B \cdot \sin t + 64A \cdot \sin t + 64B \cdot \cos t = 79 \cdot \cos t + 47 \cdot \sin t$$

$$(16A + 63B) \cdot \cos t + (63A - 16B) \cdot \sin t = 79 \cdot \cos t + 47 \cdot \sin t$$

Koeffizientenvergleich (verglichen werden die *Kosinus*- bzw. *Sinusglieder* beider Seiten) liefert zwei einfache Gleichungen für die Unbekannten A und B:

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & 16A + 63B = 79 & | \cdot 16 \\ \text{(II)} & 63A - 16B = 47 & | \cdot 63 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \left.\begin{array}{lrcl} (\text{I}^*) & 256A + 1008B & = & 1264 \\ (\text{II}^*) & 3969A - 1008B & = & 2961 \end{array}\right\} + \\ \hline \qquad 4225A \qquad\qquad = 4225 \quad \Rightarrow \quad A = 1 \end{array}$$

$$\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad 16A + 63B = 16 \cdot 1 + 63B = 16 + 63B = 79 \quad \Rightarrow \quad 63B = 63 \quad \Rightarrow \quad B = 1$$

Partikuläre Lösung der *inhomogenen* Dgl: $x_p = 1 \cdot \sin t + 1 \cdot \cos t = \sin t + \cos t$

3. Schritt: Die *allgemeine* Lösung der Schwingungsgleichung lautet:

$$x = x_0 + x_p = (C_1 t + C_2) \cdot \mathrm{e}^{-8t} + \sin t + \cos t, \quad t \geq 0$$

4. Schritt: Nach einer gewissen *„Einschwingphase“* (d. h. nach genügend langer Zeit t) ist der 1. Summand in der allgemeinen Lösung bedeutungslos und darf daher *vernachlässigt* werden ($\mathrm{e}^{-8t} \to 0$ für $t \to \infty$). Die *stationäre Lösung* lautet daher (siehe Bild G-23):

$$x_{\text{stationär}} = \sin t + \cos t$$

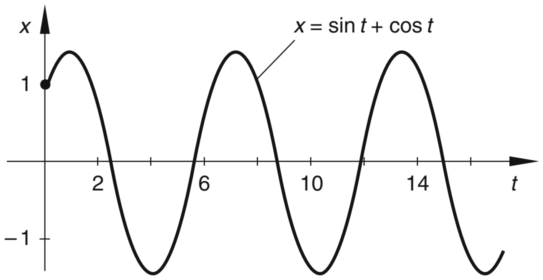


Bild G-23

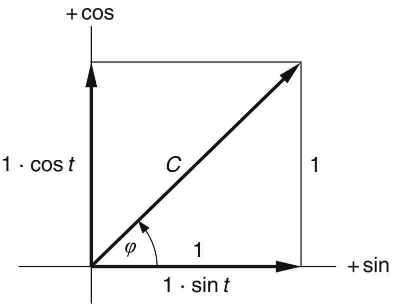


Bild G-24

Die *erzwungene Schwingung* lässt sich anhand des *Zeigerdiagramms* auch als phasenverschobene Sinusschwingung mit der Amplitude $C = \sqrt{2}$ und dem Nullphasenwinkel $\varphi = 45° \mathrel{\widehat{=}} \pi/4$ darstellen (Bild G-24):

$$x_{\text{stationär}} = \sin t + \cos t = C \cdot \sin(t + \varphi)$$

$$C^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{2}; \quad \tan\varphi = \frac{1}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan 1 = \pi/4$$

$$x_{\text{stationär}} = \sqrt{2} \cdot \sin(t + \pi/4)$$

G68

Erzwungene mechanische Schwingung

Lösen Sie das folgende *Schwingungsproblem*:

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 8x = -\cos(3t) - 18 \cdot \sin(3t) \quad \text{mit} \quad x(0) = -2 \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = 0$$

Wie lautet die sog. *„stationäre“ Lösung*, die sich nach Ablauf der „Einschwingphase“ einstellt?

---

1. Schritt: Zugehörige *homogene* Dgl $\ddot{x} + 6\dot{x} + 8x = 0$

Lösungsansatz: $x = \mathrm{e}^{\lambda t}$, $\dot{x} = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$, $\ddot{x} = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 8x = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} + 6\lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} + 8 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} = (\lambda^2 + 6\lambda + 8) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda t}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -3 \pm \sqrt{9-8} = -3 \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -4$$

Lösung der *homogenen* Dgl: $x_0 = C_1 \cdot \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-4t}$

2. Schritt: Störglied $g(t) = -\cos(3t) - 18 \cdot \sin(3t)$

Lösungsansatz für eine *partikuläre* Lösung x_p der *inhomogenen* Dgl mit 1. und 2. Ableitung (*Kettenregel*):

$$x_p = A \cdot \sin(3t) + B \cdot \cos(3t), \quad \dot{x}_p = 3A \cdot \cos(3t) - 3B \cdot \sin(3t),$$

$$\ddot{x}_p = -9A \cdot \sin(3t) - 9B \cdot \cos(3t)$$

Begründung: $\beta = 3$, $\mathrm{j}\beta = \mathrm{j}3 = 3\mathrm{j}$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$, siehe 1. Schritt.

Einsetzen in die *inhomogene* Dgl:

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 8x = -\cos(3t) - 18 \cdot \sin(3t) \quad \Rightarrow$$

$$-9A \cdot \sin(3t) - 9B \cdot \cos(3t) + 6(3A \cdot \cos(3t) - 3B \cdot \sin(3t)) + 8(A \cdot \sin(3t) + B \cdot \cos(3t)) =$$
$$= -\cos(3t) - 18 \cdot \sin(3t)$$

$$-9A \cdot \sin(3t) - 9B \cdot \cos(3t) + 18A \cdot \cos(3t) - 18B \cdot \sin(3t) + 8A \cdot \sin(3t) + 8B \cdot \cos(3t) =$$
$$= -\cos(3t) - 18 \cdot \sin(3t)$$

$$(18A - B) \cdot \cos(3t) + (-A - 18B) \cdot \sin(3t) = -\cos(3t) - 18 \cdot \sin(3t)$$

Koeffizientenvergleich der Kosinus- bzw. Sinusglieder beider Seiten:

$$\text{(I)} \quad 18A - B = -1 \quad \Rightarrow \quad -B = -18A - 1 \quad \Rightarrow \quad B = 18A + 1 \qquad \text{(Einsetzen in (II))}$$

$$\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad -A - 18B = -18 \quad \Rightarrow \quad -A - 18(18A + 1) = -A - 324A - 18 = -325A - 18 = -18$$
$$\Rightarrow \quad -325A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

$$\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad -A - 18B = 0 - 18B = -18B = -18 \quad \Rightarrow \quad B = 1$$

Partikuläre Lösung: $x_p = 0 \cdot \sin(3t) + 1 \cdot \cos(3t) = \cos(3t)$

3. Schritt: Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Dgl lautet somit:

$$x = x_0 + x_p = C_1 \cdot \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-4t} + \cos(3t), \quad t \geq 0$$

4. Schritt: Aus den *Anfangswerten* bestimmen wir die (noch unbekannten) Parameter C_1 und C_2:

$$x(0) = -2 \quad \Rightarrow \quad C_1 \cdot \mathrm{e}^0 + C_2 \cdot \mathrm{e}^0 + \cos 0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 + 1 = -2 \quad \Rightarrow \quad \text{(I)} \quad C_1 + C_2 = -3$$

$$\dot{x} = -2C_1 \cdot \mathrm{e}^{-2t} - 4C_2 \cdot \mathrm{e}^{-4t} - 3 \cdot \sin(3t) \qquad \text{(Kettenregel)}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2C_1 \cdot \mathrm{e}^0 - 4C_2 \cdot \mathrm{e}^0 - 3 \cdot \sin 0 = -2C_1 \cdot 1 - 4C_2 \cdot 1 - 0 = 0$$
$$\Rightarrow \quad -2C_1 - 4C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2C_1 = 4C_2 \quad \Rightarrow \quad \text{(II)} \quad C_1 = -2C_2 \qquad \text{(Einsetzen in (I))}$$

$$\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = -2C_2 + C_2 = -C_2 = -3 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 3$$

$$\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -2C_2 = -2 \cdot 3 = -6$$

Spezielle Lösung: $x = -6 \cdot \mathrm{e}^{-2t} + 3 \cdot \mathrm{e}^{-4t} + \cos(3t), \quad t \geq 0$

5. Schritt: *Stationäre* Lösung nach einer gewissen Einschwingphase (d. h. für $t \gg 0$; siehe Bild G-25):

$$x_{\text{stationär}} = \cos(3t)$$

Begründung: Die beiden streng monoton fallenden Exponentialfunktionen in der (speziellen) Lösung spielen dann keine *nennenswerte* Rolle mehr (sie streben asymptotisch gegen Null) und dürfen daher *vernachlässigt* werden.

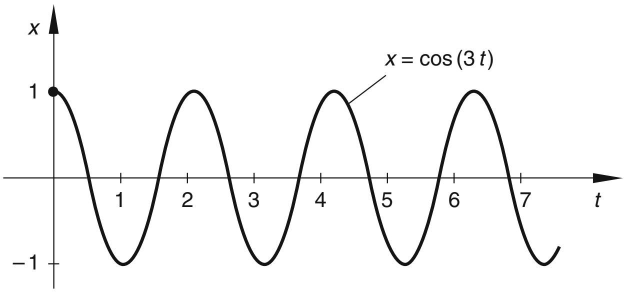


Bild G-25

G69

Freie bzw. erzwungene Schwingung in einem mechanischen Schwingkreis

Gegeben ist ein schwingungsfähiges *Feder-Masse-System* mit den folgenden Kenndaten:

Masse: $m = 2$ kg; Reibungsfaktor (Dämpferkonstante): $b = 10$ kg/s; Federkonstante: $c = 12$ N/m

a) Wie lautet die *spezielle* Lösung $x_0(t)$ für die *Anfangswerte* $x(0) = 0$ m und $\dot{x}(0) = 1$ m/s.

b) Das System wird jetzt durch die äußere Kraft

$$F(t) = -50 \cdot \sin t + 10 \cdot \cos t \qquad \text{(in Newton)}$$

zu *erzwungenen Schwingungen* erregt. Wie lautet die *allgemeine* Lösung der Schwingungsgleichung? Welche *„stationäre"* Schwingung stellt sich nach Ablauf der sog. „Einschwingphase" ein? Stellen Sie diese (erzwungene) Schwingung in der phasenverschobenen Sinusform dar.

---

a) Die *Schwingungsgleichung* lautet (ohne Einheiten):

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\ddot{x} + 10\dot{x} + 12x = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = 0$$

Lösungsansatz: $x = e^{\lambda t}$, $\dot{x} = \lambda \cdot e^{\lambda t}$, $\ddot{x} = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + 5\lambda \cdot e^{\lambda t} + 6 \cdot e^{\lambda t} = (\lambda^2 + 5\lambda + 6) \cdot \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3$$

Die Lösung der *homogenen* Dgl beschreibt eine *aperiodische* Schwingung:

$$x_0 = C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 \cdot e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

Die Parameter C_1 und C_2 bestimmen wir aus den *Anfangsbedingungen* wie folgt:

$$x_0(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(I)} \quad C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 = C_1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -C_2$$

$$\dot{x}_0 = -2C_1 \cdot e^{-2t} - 3C_2 \cdot e^{-3t} \qquad (\textit{Kettenregel})$$

$$\dot{x}_0(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{(II)} \quad -2C_1 \cdot e^0 - 3C_2 \cdot e^0 = -2C_1 \cdot 1 - 3C_2 \cdot 1 = -2C_1 - 3C_2 = 1$$

Aus Gleichung (I) folgt $C_1 = -C_2$. Diesen Ausdruck setzen wir jetzt in Gleichung (II) ein und erhalten:

$$\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad -2C_1 - 3C_2 = -2(-C_2) - 3C_2 = 2C_2 - 3C_2 = -C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -1$$

$$\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -C_2 = -(-1) = 1$$

Die *spezielle* Lösung lautet somit:

$$x_0 = \mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-3t}, \quad t \geq 0$$

Verlauf dieser aperiodischen Schwingung: siehe Bild G-26

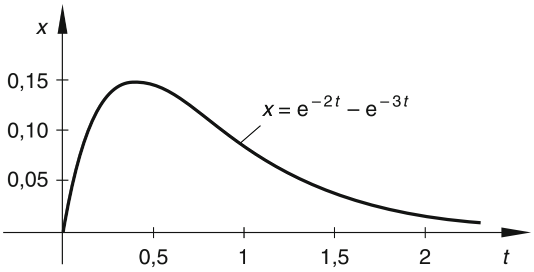


Bild G-26

b) Durch die äußere Kraft $F(t) = -50 \cdot \sin t + 10 \cdot \cos t$ wird das System zu *erzwungenen* Schwingungen erregt. Die *Schwingungsgleichung* lautet jetzt:

$$2\ddot{x} + 10\dot{x} + 12x = -50 \cdot \sin t + 10 \cdot \cos t \qquad \text{oder} \qquad \ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = -25 \cdot \sin t + 5 \cdot \cos t$$

Lösungsansatz für eine *partikuläre* Lösung der *inhomogenen* Dgl (aus der Tabelle entnommen für $\beta = 1 \Rightarrow \mathrm{j}\beta = \mathrm{j}1 = \mathrm{j}$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$, siehe Teil a)):

$$x_P = A \cdot \sin t + B \cdot \cos t, \quad \dot{x}_P = A \cdot \cos t - B \cdot \sin t, \quad \ddot{x}_P = -A \cdot \sin t - B \cdot \cos t$$

Einsetzen in die *inhomogene* Dgl:

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = -25 \cdot \sin t + 5 \cdot \cos t \quad \Rightarrow$$

$$-A \cdot \sin t - B \cdot \cos t + 5(A \cdot \cos t - B \cdot \sin t) + 6(A \cdot \sin t + B \cdot \cos t) = -25 \cdot \sin t + 5 \cdot \cos t \quad \Rightarrow$$

$$-A \cdot \sin t - B \cdot \cos t + 5A \cdot \cos t - 5B \cdot \sin t + 6A \cdot \sin t + 6B \cdot \cos t = -25 \cdot \sin t + 5 \cdot \cos t \quad \Rightarrow$$

$$(5A - 5B) \cdot \sin t + (5A + 5B) \cdot \cos t = -25 \cdot \sin t + 5 \cdot \cos t$$

Koeffizientenvergleich (Sinus- und Kosinusglieder beiderseits vergleichen) führt zu zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten A und B:

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{(I)} & 5A - 5B = & -25 \\ \text{(II)} & 5A + 5B = & 5 \end{array}\right\} +$$

$$\overline{\quad 10A \qquad = -20 \quad \Rightarrow \quad A = -2}$$

$$\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad 5A + 5B = 5 \cdot (-2) + 5B = -10 + 5B = 5 \quad \Rightarrow \quad 5B = 15 \quad \Rightarrow \quad B = 3$$

Die *partikuläre* Lösung lautet damit:

$$x_P = -2 \cdot \sin t + 3 \cdot \cos t$$

Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Schwingungsgleichung erhalten wir, indem wir zur *allgemeinen* Lösung x_0 der zugehörigen homogenen Dgl (siehe Teil a)) diese partikuläre Lösung *addieren*:

$$x = x_0 + x_P = C_1 \cdot \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-3t} - 2 \cdot \sin t + 3 \cdot \cos t, \quad t \geq 0$$

Die *stationäre* Lösung ist mit der *partikulären* Lösung x_P identisch, da x_0 wegen der streng monoton *fallenden* Exponentialfunktionen im Laufe der Zeit (d. h. für $t \to \infty$) *verschwindet*:

$$x_{\text{stationär}} = x_P = -2 \cdot \sin t + 3 \cdot \cos t = K \cdot \sin(t + \varphi)$$

Amplitude K und *Nullphasenwinkel* φ dieser erzwungenen Schwingung lassen sich aus dem *Zeigerdiagramm* leicht berechnen (siehe Bild G-27):

$$K^2 = 2^2 + 3^2 = 13 \quad \Rightarrow \quad K = \sqrt{13} = 3{,}606$$

$$\tan\alpha = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 33{,}7^\circ \mathrel{\hat{=}} 0{,}588$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \alpha = \frac{\pi}{2} + 0{,}588 = 2{,}159$$

Stationäre Lösung:

$$x_{\text{stationär}} = -2 \cdot \sin t + 3 \cdot \cos t = 3{,}606 \cdot \sin(t + 2{,}159)$$

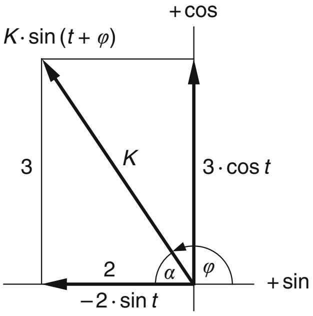


Bild G-27

G70

Erzwungene Schwingung eines mechanischen Systems

Lösen Sie die folgende Dgl einer *erzwungenen Schwingung*:

$$\ddot{x} + 8\dot{x} + 52x = 48 \cdot \sin(10t) + 464 \cdot \cos(10t)$$

Geben Sie eine physikalische Deutung der sog. *„stationären“* Lösung dieser Schwingungsgleichung.

---

1. Schritt: Zugehörige *homogene* Dgl $\ddot{x} + 8\dot{x} + 52x = 0$

Lösungsansatz: $x = e^{\lambda t}$, $\dot{x} = \lambda \cdot e^{\lambda t}$, $\ddot{x} = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$

$$\ddot{x} + 8\dot{x} + 52x = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + 8\lambda \cdot e^{\lambda t} + 52 \cdot e^{\lambda t} = (\lambda^2 + 8\lambda + 52) \cdot \underbrace{e^{\lambda t}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + 8\lambda + 52 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -4 \pm \sqrt{16 - 52} = -4 \pm \sqrt{-36} = -4 \pm 6\,\mathrm{j}$$

Lösung der *homogenen* Dgl (es handelt sich um eine *gedämpfte* Schwingung):

$$x_0 = e^{-4t}[C_1 \cdot \sin(6t) + C_2 \cdot \cos(6t)], \quad t \geq 0$$

2. Schritt: Störfunktion $g(t) = 48 \cdot \sin(10t) + 464 \cdot \cos(10t)$

Lösungsansatz für eine *partikuläre* Lösung der *inhomogenen* Dgl (aus der Tabelle entnommen) mit den benötigten Ableitungen (unter Verwendung der *Kettenregel*):

$$x_p = A \cdot \sin(10t) + B \cdot \cos(10t), \quad \dot{x}_p = 10A \cdot \cos(10t) - 10B \cdot \sin(10t),$$

$$\ddot{x}_p = -100A \cdot \sin(10t) - 100B \cdot \cos(10t)$$

Begründung: $\beta = 10 \Rightarrow \mathrm{j}\beta = \mathrm{j}\,10 = 10\,\mathrm{j}$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + 8\lambda + 52 = 0$, siehe 1. Schritt.

Einsetzen in die *inhomogene* Dgl, ordnen der Glieder:

$$\ddot{x} + 8\dot{x} + 52x = 48 \cdot \sin(10t) + 464 \cdot \cos(10t) \quad \Rightarrow$$

$$-100A \cdot \sin(10t) - 100B \cdot \cos(10t) + 8[10A \cdot \cos(10t) - 10B \cdot \sin(10t)] +$$
$$+ 52[A \cdot \sin(10t) + B \cdot \cos(10t)] = 48 \cdot \sin(10t) + 464 \cdot \cos(10t) \quad \Rightarrow$$

$$-100A \cdot \sin(10t) - 100B \cdot \cos(10t) + 80A \cdot \cos(10t) - 80B \cdot \sin(10t) +$$
$$+ 52A \cdot \sin(10t) + 52B \cdot \cos(10t) = 48 \cdot \sin(10t) + 464 \cdot \cos(10t) \quad \Rightarrow$$

$$(-48A - 80B) \cdot \sin(10t) + (80A - 48B) \cdot \cos(10t) = 48 \cdot \sin(10t) + 464 \cdot \cos(10t)$$

Koeffizientenvergleich der Sinus- bzw. Kosinusglieder auf beiden Seiten:

$$\left.\begin{array}{llll}(\mathrm{I}) & -48A-80B=48 & \mid\cdot(-3) \\ (\mathrm{II}) & 80A-48B=464 & \mid\cdot 5\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll}(\mathrm{I}^{*}) & 144A+240B=-144 \\ (\mathrm{II})^{*}) & 400A-240B=2320\end{array}\right\}+$$

$$\overline{544A \qquad = 2176} \quad \Rightarrow \quad A=4$$

$$(\mathrm{I}) \Rightarrow \quad -48A-80B=-48\cdot 4-80B=-192-80B=48 \quad \Rightarrow \quad -80B=240 \quad \Rightarrow \quad B=-3$$

Partikuläre Lösung: $x_p = 4 \cdot \sin(10t) - 3 \cdot \cos(10t)$

3. Schritt: Die *allgemeine* Lösung der Schwingungsgleichung lautet damit:

$$x = x_0 + x_p = \underbrace{\mathrm{e}^{-4t}\left[C_1 \cdot \sin(6t) + C_2 \cdot \cos(6t)\right]}_{\text{gedämpfte Schwingung}} + \underbrace{4 \cdot \sin(10t) - 3 \cdot \cos(10t)}_{\text{ungedämpfte Schwingung}}, \quad t \geq 0$$

(*Überlagerung* aus einer *gedämpften* und einer *ungedämpften* Schwingung).

4. Schritt: Im Laufe der Zeit *verschwindet* die *gedämpfte* Schwingung, das System schwingt dann harmonisch mit der Kreisfrequenz $\omega = 10$ des Erregers (sog. *erzwungene* Schwingung). Diese *stationäre* Lösung (identisch mit der *partikulären* Lösung)

$$x_{\text{stationär}} = 4 \cdot \sin(10t) - 3 \cdot \cos(10t)$$

bringen wir noch mit Hilfe des *Zeigerdiagramms* auf die Sinusform $x_{\text{stationär}} = K \cdot \sin(10t + \varphi)$ (siehe Bild G-28):

$$K^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad K = 5$$

$$\tan\alpha = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) = 36{,}87^{\circ}$$

$$\varphi = 360^{\circ} - \alpha = 360^{\circ} - 36{,}87^{\circ} = 323{,}13^{\circ} \mathrel{\hat{=}} 5{,}64$$

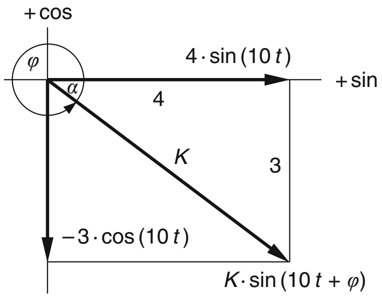


Bild G-28

Stationäre Lösung:

$$x_{\text{stationär}} = 4 \cdot \sin(10t) - 3 \cdot \cos(10t) =$$

$$= 5 \cdot \sin(10t + 5{,}64)$$

Die stationäre Lösung ist eine ungedämpfte Schwingung mit der Amplitude $K = 5$, der Kreisfrequenz $\omega = 10$ und dem Nullphasenwinkel $\varphi = 5{,}64$.

G71

Elektrische Schwingung in einem Reihenschwingkreis (*RLC*-Kreis; Bild G-29)

Der in Bild G-29 dargestellte *Reihenschwingkreis* enthält den ohmschen Widerstand $R = 20\,\Omega$, eine Spule mit der Induktivität $L = 1\,\mathrm{H}$ und einen Kondensator mit der Kapazität $C = 0{,}005\,\mathrm{F}$. Beim Anlegen der Wechselspannung $u(t) = 200\,\mathrm{V} \cdot \cos(20\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t)$ entsteht eine *elektrische Schwingung.*

Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf der *Kondensatorladung* $q = q(t)$ für die *Anfangsbedingungen* $q(0) = 0$ und $\dot{q}(0) = i(0) = 0$ (der Kondensator ist also zur Zeit $t = 0$ *ladungsfrei*, der Schwingkreis *stromlos*; $i = i(t)$: Stromstärke).

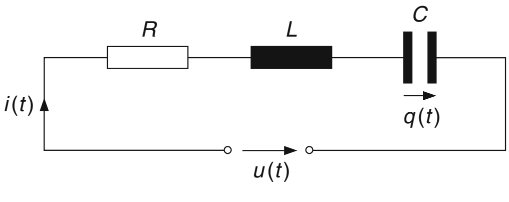


Bild G-29

Hinweis: Die Kondensatorladung genügt der folgenden Dgl 2. Ordnung:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = u(t)$$

Mit den angegebenen Werten erhalten wir die folgende Dgl (*Schwingungsgleichung*) für die Kondensatorladung q (ohne Einheiten):

$$1\ddot{q} + 20\dot{q} + \frac{q}{0{,}005} = 200 \cdot \cos(20t) \quad \text{oder} \quad \ddot{q} + 20\dot{q} + 200q = 200 \cdot \cos(20t)$$

Wir lösen sie schrittweise wie folgt:

1. Schritt: Integration der zugehörigen *homogenen* Dgl $\ddot{q} + 20\dot{q} + 200q = 0$

Lösungsansatz: $q = \mathrm{e}^{\lambda t}$, $\dot{q} = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$, $\ddot{q} = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$

$$\ddot{q} + 20\dot{q} + 200q = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} + 20\lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} + 200 \cdot \mathrm{e}^{\lambda t} = (\lambda^2 + 20\lambda + 200) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda t}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^2 + 20\lambda + 200 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -10 \pm \sqrt{100 - 200} = -10 \pm \sqrt{-100} = -10 \pm 10\mathrm{j}$$

Lösung der *homogenen* Dgl (*gedämpfte* elektrische Schwingung):

$$q_0 = \mathrm{e}^{-10t}\left[C_1 \cdot \sin(10t) + C_2 \cdot \cos(10t)\right], \quad t \geq 0$$

2. Schritt: Störglied $g(t) = 200 \cdot \cos(20t)$

Den *Lösungsansatz* für eine *partikuläre* Lösung q_P der *inhomogenen* Dgl entnehmen wir der Tabelle ($\beta = 20 \Rightarrow \mathrm{j}\beta = \mathrm{j}20 = 20\mathrm{j}$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + 20\lambda + 200 = 0$; siehe 1. Schritt). Er lautet:

$$q_P = A \cdot \sin(20t) + B \cdot \cos(20t), \quad \dot{q}_P = 20A \cdot \cos(20t) - 20B \cdot \sin(20t),$$

$$\ddot{q}_P = -400A \cdot \sin(20t) - 400B \cdot \cos(20t)$$

Einsetzen in die *inhomogene* Dgl, ordnen der Glieder:

$$\ddot{q} + 20\dot{q} + 200q = 200 \cdot \cos(20t) \quad \Rightarrow$$

$$-400A \cdot \sin(20t) - 400B \cdot \cos(20t) + 20[20A \cdot \cos(20t) - 20B \cdot \sin(20t)] +$$
$$+ 200[A \cdot \sin(20t) + B \cdot \cos(20t)] = 200 \cdot \cos(20t) \quad \Rightarrow$$

$$-400A \cdot \sin(20t) - 400B \cdot \cos(20t) + 400A \cdot \cos(20t) - 400B \cdot \sin(20t) +$$
$$+ 200A \cdot \sin(20t) + 200B \cdot \cos(20t) = 200 \cdot \cos(20t) \quad \Rightarrow$$

$$(-200A - 400B) \cdot \sin(20t) + (400A - 200B) \cdot \cos(20t) = 0 \cdot \sin(20t) + 200 \cdot \cos(20t)$$

Koeffizientenvergleich der Sinus- und Kosinusglieder beiderseits (der Vollständigkeit halber wurde die rechte Seite um den fehlenden Sinusterm $0 \cdot \sin(20t) \equiv 0$ ergänzt) führt zu zwei Gleichungen für die unbekannten Koeffizienten A und B:

$$\text{(I)} \quad -200A - 400B = 0 \quad \Rightarrow \quad -200A = 400B \quad \Rightarrow \quad A = -2B$$

$$\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad 400A - 200B = 200 \quad |:200 \quad \Rightarrow \quad 2A - B = 1$$

$$\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad 2A - B = 2 \cdot (-2B) - B = -4B - B = -5B = 1 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{5}$$

$$\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad A = -2B = -2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

Partikuläre Lösung: $q_P = \frac{2}{5} \cdot \sin(20t) - \frac{1}{5} \cdot \cos(20t)$

3. Schritt: Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Dgl lautet damit:

$$q = q_0 + q_P = \mathrm{e}^{-10t} [C_1 \cdot \sin(10t) + C_2 \cdot \cos(10t)] + \frac{2}{5} \cdot \sin(20t) - \frac{1}{5} \cdot \cos(20t), \quad t \geq 0$$

4. Schritt: Aus den *Anfangswerten* bestimmen wir die noch unbekannten Parameter C_1 und C_2

$$q(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^0 (C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0) + \frac{2}{5} \cdot \sin 0 - \frac{1}{5} \cdot \cos 0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1(C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1) + \frac{2}{5} \cdot 0 - \frac{1}{5} \cdot 1 = C_2 - \frac{1}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{1}{5}$$

$$\dot{q} = -10 \cdot \mathrm{e}^{-10t} [C_1 \cdot \sin(10t) + C_2 \cdot \cos(10t)] +$$
$$+ [10 C_1 \cdot \cos(10t) - 10 C_2 \cdot \sin(10t)] \cdot \mathrm{e}^{-10t} + 8 \cdot \cos(20t) + 4 \cdot \sin(20t)$$

(Ableitung mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel)

$$\dot{q}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -10 \cdot \mathrm{e}^0 (C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0) +$$
$$+ (10 C_1 \cdot \cos 0 - 10 C_2 \cdot \sin 0) \cdot \mathrm{e}^0 + 8 \cdot \cos 0 + 4 \cdot \sin 0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -10 \cdot 1(C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1) + (10 C_1 \cdot 1 - 10 C_2 \cdot 0) \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -10 C_2 + 10 C_1 + 8 = -10 \cdot \frac{1}{5} + 10 C_1 + 8 = 10 C_1 + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 10 C_1 = -6 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{3}{5}$$

Lösung:

$$q = \mathrm{e}^{-10t} \left[-\frac{3}{5} \cdot \sin(10t) + \frac{1}{5} \cdot \cos(10t) \right] + \frac{2}{5} \cdot \sin(20t) - \frac{1}{5} \cdot \cos(20t), \quad t \geq 0$$

Physikalische Deutung: Wir erhalten eine Überlagerung aus einer *gedämpften* Schwingung (Lösung der *homogenen* Dgl) und einer *ungedämpften* Schwingung (*partikuläre* Lösung der inhomogenen Dgl). Nach einer gewissen *„Einschwingphase"* verschwindet die *gedämpfte* Schwingung (1. Summand) und es verbleibt eine *ungedämpfte* (elektrische) Schwingung mit der Kreisfrequenz $\omega = 20\,\mathrm{s}^{-1}$ der äußeren Erregung, beschrieben durch die folgende Gleichung (siehe Bild G-30):

$$q_{\text{stationär}} = \frac{2}{5} \cdot \sin(20t) - \frac{1}{5} \cdot \cos(20t)$$

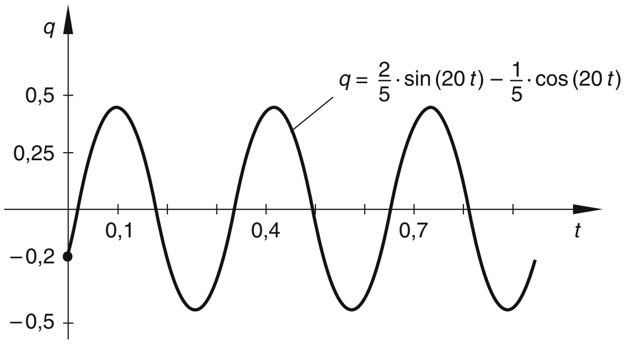


Bild G-30

3 Integration von Differentialgleichungen 2. Ordnung durch Substitution

Alle Differentialgleichungen in diesem Abschnitt lassen sich mit Hilfe einer geeigneten *Substitution* auf solche *1. Ordnung* zurückführen.

Hinweis

Formelsammlung: Kapitel X.3.1

G72

Lösen Sie die *Anfangswertaufgabe*

$$x y'' \cdot \ln x = y' \quad \text{mit} \quad y(\mathrm{e}) = 1 \quad \text{und} \quad y'(\mathrm{e}) = 2$$

mit Hilfe einer geeigneten *Substitution*.

Mit Hilfe der *Substitution* $u = y'$, $u' = y''$ erhalten wir eine durch *„Trennung der Variablen"* leicht lösbare Dgl *1. Ordnung*:

$$x y'' \cdot \ln x = y' \quad \Rightarrow \quad x u' \cdot \ln x = u \quad \Rightarrow \quad x \frac{du}{dx} \cdot \ln x = u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x \cdot \ln x} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{du}{u} = \underbrace{\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}}_{\text{Integral } 343} \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = \ln|\ln x| + \ln|C| = \ln|C \cdot \ln x|$$

(*Rechenregel:* R1). Durch Entlogarithmierung folgt (*Rechenregeln:* R5 und R6):

$$|u| = |C \cdot \ln x| \quad \Rightarrow \quad u = \pm C \cdot \ln x = K_1 \cdot \ln x \qquad (\text{mit } K_1 = \pm C)$$

Rücksubstitution und Integration führen schließlich zur *allgemeinen* Lösung:

$$y' = u = K_1 \cdot \ln x \quad \Rightarrow \quad y = \int y' \, dx = K_1 \cdot \underbrace{\int \ln x \, dx}_{\text{Integral } 332} = K_1 x (\ln x - 1) + K_2$$

Aus den *Anfangswerten* lassen sich die Parameter K_1 und K_2 wie folgt berechnen:

$$y(\mathrm{e}) = 1 \quad \Rightarrow \quad K_1 \mathrm{e} (\ln \mathrm{e} - 1) + K_2 = K_1 \mathrm{e} (1 - 1) + K_2 = 0 + K_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad K_2 = 1$$

$$y'(\mathrm{e}) = 2 \quad \Rightarrow \quad K_1 \cdot \ln \mathrm{e} = K_1 \cdot 1 = K_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 2$$

Lösung: $y = 2x(\ln x - 1) + 1$

G73

Differentialgleichung der Kettenlinie

Die in Bild G-31 skizzierte *Kettenlinie* mit symmetrischer Aufhängung genügt der *nicht-linearen* Dgl 2. Ordnung

$$a y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = a \quad \text{und} \quad y'(0) = 0 .$$

Lösen Sie diese Dgl durch *Substitution*.

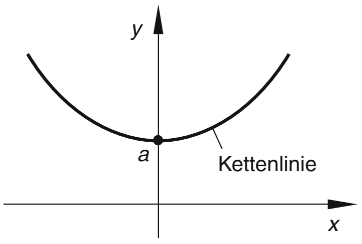


Bild G-31

Die *Substitution* $u = y'$, $u' = y''$ führt auf eine (nicht-lineare) *Dgl 1. Ordnung*, die wir durch *„Trennung der Variablen“* leicht lösen können:

$$a y'' = \sqrt{1 + (y')^2} \quad \Rightarrow \quad a u' = \sqrt{1 + u^2} \quad \Rightarrow \quad a \frac{du}{dx} = \sqrt{1 + u^2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{1}{a} \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}}}_{\text{Integral 123 mit } a^2 = 1} = \frac{1}{a} \cdot \int 1 \, dx \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arsinh} u = \frac{x}{a} + C_1$$

Wir lösen diese Gleichung nach u auf (zur Erinnerung: die sinh-Funktion ist die *Umkehrfunktion* der arsinh-Funktion):

$$u = \sinh \left(\frac{x}{a} + C_1 \right)$$

Rücksubstitution und eine sich anschließende Integration führen dann zunächst zu:

$$y' = u = \sinh \left(\frac{x}{a} + C_1 \right) \quad \Rightarrow \quad y = \int y' \, dx = \int \sinh \underbrace{\left(\frac{x}{a} + C_1 \right)}_{t} dx$$

Dieses Integral führen wir durch eine *lineare Substitution* auf ein *Grundintegral* zurück:

$$t = \frac{x}{a} + C_1 , \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{a} , \quad dx = a \, dt$$

$$y = \int \sinh \left(\frac{x}{a} + C_1 \right) dx = \int \sinh t \cdot a \, dt = a \cdot \int \sinh t \, dt =$$

$$= a \cdot \cosh t + C_2 = a \cdot \cosh \left(\frac{x}{a} + C_1 \right) + C_2$$

(nach erfolgter Rücksubstitution). Die Gleichung der *Kettenlinie* lautet also:

$$y = a \cdot \cosh \left(\frac{x}{a} + C_1 \right) + C_2$$

Die noch unbekannten Parameter C_1 und C_2 bestimmen wir aus den *Anfangsbedingungen*. Die dabei benötigte Ableitung der Kettenlinie erhalten wir mit Hilfe der *Kettenregel* (Substitution: $t = x/a + C_1$):

$$y' = a \cdot \sinh \left(\frac{x}{a} + C_1 \right) \cdot \frac{1}{a} = \sinh \left(\frac{x}{a} + C_1 \right)$$

$$y(0) = a \quad \Rightarrow \quad \text{(I)} \quad a \cdot \cosh (0 + C_1) + C_2 = a \cdot \cosh C_1 + C_2 = a$$

$$y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(II)} \quad \sinh (0 + C_1) = \sinh C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \operatorname{arsinh} 0 = 0$$

$$\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad a \cdot \cosh C_1 + C_2 = a \cdot \cosh 0 + C_2 = a \cdot 1 + C_2 = a + C_2 = a \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

Lösung: $y = a \cdot \cosh \left(\dfrac{x}{a} \right)$

G74

Lösen Sie die folgende *Randwertaufgabe* mit Hilfe einer geeigneten *Substitution*:

$$y'' + \frac{2y'}{x} = 0 \qquad \text{Randwerte: } y(0{,}5) = -2 , \quad y(1) = 2$$

Diese *homogene* lineare Dgl *2. Ordnung* lässt sich mit der *Substitution* $u = y'$, $u' = y''$ in eine *lineare Dgl 1. Ordnung* überführen, die wir durch *„Trennung der Variablen“* lösen:

$$y'' + \frac{2y'}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad u' + \frac{2u}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{du}{dx} = -\frac{2u}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = -2 \cdot \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{du}{u} = -2 \cdot \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = -2 \cdot \ln|x| + \ln|C| = \ln x^{-2} + \ln|C| = \ln|Cx^{-2}|$$

(*Rechenregeln:* R3 und R1). *Entlogarithmieren* liefert dann (*Rechenregeln:* R5 und R6):

$$|u| = |Cx^{-2}| \quad \Rightarrow \quad u = \pm Cx^{-2} = K_1 \cdot x^{-2} \quad (\text{mit } K_1 = \pm C)$$

Rücksubstitution und unbestimmte Integration führen zur *allgemeinen* Lösung:

$$y' = u = K_1 \cdot x^{-2} \quad \Rightarrow \quad y = \int y' \, dx = K_1 \cdot \int x^{-2} \, dx = K_1 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + K_2 = -\frac{K_1}{x} + K_2$$

Aus den *Randwerten* bestimmen wir die (noch unbekannten) Parameter K_1 und K_2:

$$y(0{,}5) = -2 \quad \Rightarrow \quad (\text{I}) \quad -\frac{K_1}{0{,}5} + K_2 = -2K_1 + K_2 = -2$$

$$y(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad (\text{II}) \quad -\frac{K_1}{1} + K_2 = -K_1 + K_2 = 2$$

$$\left.\begin{array}{lrcr} (\text{I}) & -2K_1 + K_2 & = & -2 \\ (\text{II}) & -K_1 + K_2 & = & 2 \end{array}\right\} -$$

$$\overline{\quad -K_1 \qquad = -4 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 4 \quad}$$

$$(\text{II}) \quad \Rightarrow \quad -K_1 + K_2 = -4 + K_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad K_2 = 6$$

Die gesuchte *spezielle* Lösung lautet damit: $y = -\frac{4}{x} + 6$

G75

Weg-Zeit-Gesetz einer beschleunigten Masse unter Berücksichtigung der Reibung

Das *Weg-Zeit-Gesetz* $x = x(t)$ einer Masse m, die durch eine *konstante* Kraft F_0 beschleunigt wird, genügt bei Berücksichtigung der *Reibung* der folgenden Dgl 2. Ordnung:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} = F_0 \qquad (b\dot{x}\text{: Reibungskraft; } b > 0\text{: Reibungsfaktor})$$

Lösen Sie diese Dgl mit Hilfe einer geeigneten *Substitution*, wenn zu Beginn der Bewegung $(t = 0)$ folgende Bedingungen vorliegen: $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$.

Mit der *Substitution* $u = \dot{x}$, $\dot{u} = \ddot{x}$ wird diese Dgl 2. Ordnung in eine inhomogene lineare Dgl *1. Ordnung* mit konstanten Koeffizienten übergeführt, die wir durch *„Variation der Konstanten"* lösen wollen:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} = F_0 \quad \Rightarrow \quad m\dot{u} + bu = F_0 \quad \text{oder} \quad \dot{u} + \alpha u = K_0 \qquad (\text{mit } \alpha = b/m \text{ und } K_0 = F_0/m)$$

Zunächst lösen wir die zugehörige *homogene* Dgl durch *„Trennung der Variablen"*:

$$\dot{u} + \alpha u = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{u} = \frac{du}{dt} = -\alpha u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u} = -\alpha \, dt$$

$$\int \frac{du}{u} = -\alpha \cdot \int 1 \, dt \quad \Rightarrow \quad \ln|u| = -\alpha t + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln|u| - \ln|C| = \ln\left|\frac{u}{C}\right| = -\alpha t$$

(*Rechenregel:* R2). *Entlogarithmierung* führt schließlich zu (*Rechenregeln:* R5 und R6):

$$\left|\frac{u}{C}\right| = \mathrm{e}^{-\alpha t} \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{C} = \pm \mathrm{e}^{-\alpha t} \quad \Rightarrow \quad u = \pm C \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} = K \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} \qquad (\text{mit } K = \pm C)$$

Damit lautet der *Lösungsansatz* für die *inhomogene* Dgl wie folgt („*Variation der Konstanten*“: $K \to K(t)$):

$$u = K(t) \cdot e^{-\alpha t}, \quad \dot{u} = \dot{K}(t) \cdot e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \cdot (-\alpha) \cdot K(t) = \dot{K}(t) \cdot e^{-\alpha t} - \alpha K(t) \cdot e^{-\alpha t}$$

(Ableitung mit der *Produkt-* und *Kettenregel*) Einsetzen dieser Ausdrücke in die *inhomogene* Dgl liefert eine einfache *Dgl 1. Ordnung* für die noch unbekannte Faktorfunktion $K(t)$, die wir durch *elementare Integration* lösen können:

$$\dot{u} + \alpha u = K_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{K}(t) \cdot e^{-\alpha t} \underbrace{- \alpha K(t) \cdot e^{-\alpha t} + \alpha K(t) \cdot e^{-\alpha t}}_{0} = \dot{K}(t) \cdot e^{-\alpha t} = K_0 \quad \Rightarrow$$

$$\dot{K}(t) = K_0 \cdot e^{\alpha t} \quad \Rightarrow \quad K(t) = \int \dot{K}(t)\, dt = K_0 \cdot \underbrace{\int e^{\alpha t}\, dt}_{\text{Integral 312 mit } a = \alpha} = K_0 \cdot \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} + C_1 = \frac{K_0}{\alpha} \cdot e^{\alpha t} + C_1$$

Die *allgemeine* Lösung lautet damit:

$$u = K(t) \cdot e^{-\alpha t} = \left(\frac{K_0}{\alpha} \cdot e^{\alpha t} + C_1 \right) \cdot e^{-\alpha t} = \frac{K_0}{\alpha} + C_1 \cdot e^{-\alpha t}$$

Aus $u = \dot{x}$ erhalten wir schließlich durch *unbestimmte Integration* die *allgemeine* Lösung der ursprünglichen Dgl 2. Ordnung:

$$x = \int \dot{x}\, dt = \int u\, dt = \int \left(\frac{K_0}{\alpha} + C_1 \cdot \underbrace{e^{-\alpha t}}_{\text{Integral 312 mit } a = -\alpha} \right) dt = \frac{K_0}{\alpha}\, t + C_1 \cdot \frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha} + C_2 = \frac{K_0}{\alpha}\, t - \frac{C_1}{\alpha} \cdot e^{-\alpha t} + C_2$$

Allgemeine Lösung der *inhomogenen* Dgl:

$$x = \frac{K_0}{\alpha}\, t - \frac{C_1}{\alpha} \cdot e^{-\alpha t} + C_2, \quad t \geq 0$$

Die noch unbekannten Konstanten C_1 und C_2 bestimmen wir aus den *Anfangswerten* (die benötigte Ableitung erhalten wir durch *gliedweises* Differenzieren unter Verwendung der *Kettenregel*):

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(I)} \quad 0 - \frac{C_1}{\alpha} \cdot e^0 + C_2 = -\frac{C_1}{\alpha} \cdot 1 + C_2 = -\frac{C_1}{\alpha} + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{C_1}{\alpha}$$

$$\dot{x} = u = \frac{K_0}{\alpha} + C_1 \cdot e^{-\alpha t}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{(II)} \quad \frac{K_0}{\alpha} + C_1 \cdot e^0 = \frac{K_0}{\alpha} + C_1 \cdot 1 = \frac{K_0}{\alpha} + C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{K_0}{\alpha}$$

$$\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{C_1}{\alpha} = -\frac{K_0}{\alpha^2}$$

Lösung (Weg-Zeit-Gesetz): $x = \frac{K_0}{\alpha}\, t + \frac{K_0}{\alpha^2} \cdot e^{-\alpha t} - \frac{K_0}{\alpha^2} = \frac{K_0}{\alpha^2}\, (\alpha t + e^{-\alpha t} - 1), \quad t \geq 0$

Im Laufe der Zeit *verschwindet* die streng monoton fallende Exponentialfunktion $e^{-\alpha t}$ und das Weg-Zeit-Gesetz geht über in das *lineare* Gesetz

$$x = \frac{K_0}{\alpha^2}\, (\alpha t - 1) \qquad (\text{für } t \gg 1)$$

Bild G-32 zeigt das *exakte* Weg-Zeit-Gesetz und den linearen *asymptotischen* Verlauf für $t \gg 1$.

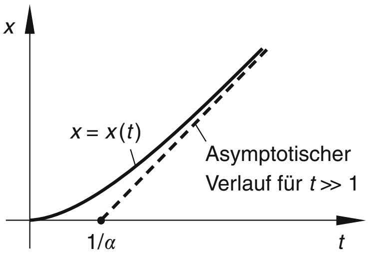


Bild G-32

4 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die *homogene* lineare Dgl wird durch einen *Exponentialansatz* gelöst, die *inhomogene* lineare Dgl durch *„Aufsuchen einer partikulären Lösung“*.

Hinweise

(1) **Lehrbuch:** Band 2, Kapitel IV.5
Formelsammlung: Kapitel X.5

(2) **Tabelle** mit Lösungsansätzen für eine partikuläre Lösung → Band 2, Kapitel V.3.4 (Tabelle 3) und Formelsammlung, Kapitel X.5.3 (Tabelle)

4.1 Homogene lineare Differentialgleichungen

G76 $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

Der Lösungsansatz

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x} \quad \text{mit} \quad y' = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}, \; y'' = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} \quad \text{und} \quad y''' = \lambda^3 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$$

führt zu der folgenden *charakteristischen Gleichung*:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = \lambda^3 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} - 3\lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + 3\lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} - \mathrm{e}^{\lambda x} =$$

$$= (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

Durch Probieren findet man die Lösung $\lambda_1 = 1$, mit dem *Horner-Schema* wie folgt die restlichen Lösungen:

	1	−3	3	−1
$\lambda_1 = 1$		1	−2	1
	1	−2	1	0

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\lambda^2 - 2\lambda + 1}_{\text{2. Binom}} = (\lambda - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{2/3} = 1$$

Somit gilt $\lambda_{1/2/3} = 1$ und die *allgemeine* Lösung der Dgl lautet daher:

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) \cdot \mathrm{e}^x$$

G77 $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$ Anfangswerte: $y(0) = 0, \quad y'(0) = 12, \quad y''(0) = 40$

Lösungsansatz: $y = \mathrm{e}^{\lambda x}, \; y' = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}, \; y'' = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}, \; y''' = \lambda^3 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$

Charakteristische Gleichung:

$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = \lambda^3 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} - 2\lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + 4\lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} - 8 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} =$$

$$= (\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0$$

Durch Probieren findet man die Lösung $\lambda_1 = 2$, mit Hilfe des *Horner-Schemas* die weiteren Lösungen:

	1	−2	4	−8
$\lambda_1 = 2$		2	0	8
	1	0	4	0

$\Rightarrow \quad \lambda^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{2/3} = \pm 2\mathrm{j}$

Die *allgemeine* Lösung der Dgl lautet damit wie folgt:

$$y = C_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} + C_2 \cdot \sin(2x) + C_3 \cdot \cos(2x)$$

Die Integrationskonstanten C_1, C_2 und C_3 bestimmen wir wie folgt aus den *Anfangsbedingungen*:

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 \cdot \mathrm{e}^0 + C_2 \cdot \sin 0 + C_3 \cdot \cos 0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + C_3 \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{(I)} \quad C_1 + C_3 = 0$$

$$y' = 2C_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} + 2C_2 \cdot \cos(2x) - 2C_3 \cdot \sin(2x)$$

$$y'' = 4C_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} - 4C_2 \cdot \sin(2x) - 4C_3 \cdot \cos(2x)$$

(unter Verwendung der Kettenregel, Substitution jeweils $u = 2x$)

$$y'(0) = 12 \quad \Rightarrow \quad 2C_1 \cdot \mathrm{e}^0 + 2C_2 \cdot \cos 0 - 2C_3 \cdot \sin 0 = 2C_1 \cdot 1 + 2C_2 \cdot 1 - 2C_3 \cdot 0 = 12$$

$$\Rightarrow \quad \text{(II)} \quad 2C_1 + 2C_2 = 12 \quad \text{oder} \quad C_1 + C_2 = 6$$

$$y''(0) = 40 \quad \Rightarrow \quad 4C_1 \cdot \mathrm{e}^0 - 4C_2 \cdot \sin 0 - 4C_3 \cdot \cos 0 = 4C_1 \cdot 1 - 4C_2 \cdot 0 - 4C_3 \cdot 1 = 40$$

$$\Rightarrow \quad \text{(III)} \quad 4C_1 - 4C_3 = 40 \quad \text{oder} \quad C_1 - C_3 = 10$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & C_1 + C_3 = 0 \\ \text{(III)} & C_1 - C_3 = 10 \end{array}\right\} +$$

$$\overline{\quad 2C_1 \qquad = 10 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 5}$$

$$\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_3 = 5 + C_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_3 = -5$$

$$\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 5 + C_2 = 6 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1$$

Partikuläre Lösung:

$$y = 5 \cdot \mathrm{e}^{2x} + 1 \cdot \sin(2x) - 5 \cdot \cos(2x) = 5 \cdot \mathrm{e}^{2x} + \sin(2x) - 5 \cdot \cos(2x)$$

G78 $\quad y^{(4)} + 5y''' + 3y'' - 9y' = 0$

Lösungsansatz: $y = \mathrm{e}^{\lambda x}, \; y' = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}, \; y'' = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}, \; y''' = \lambda^3 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}, \; y^{(4)} = \lambda^4 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$

Charakteristische Gleichung:

$$y^{(4)} + 5y''' + 3y'' - 9y' = \lambda^4 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + 5\lambda^3 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + 3\lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} - 9\lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} =$$

$$= (\lambda^4 + 5\lambda^3 + 3\lambda^2 - 9\lambda) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^4 + 5\lambda^3 + 3\lambda^2 - 9\lambda = \lambda(\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda - 9) = 0$$

Eine Lösung ist $\lambda_1 = 0$, die restlichen erhält man aus der kubischen Gleichung $\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda - 9 = 0$. Durch Probieren findet man eine weitere Lösung bei $\lambda_2 = 1$, mit dem *Horner-Schema* die restlichen:

	1	5	3	-9
$\lambda_2 = 1$		1	6	9
	1	6	9	0

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\lambda^2 + 6\lambda + 9}_{\text{1. Binom}} = (\lambda + 3)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{3/4} = -3$$

Damit lautet die *allgemeine* Lösung der Dgl wie folgt: $y = C_1 + C_2 \cdot \mathrm{e}^{x} + (C_3 + C_4 x) \cdot \mathrm{e}^{-3x}$

G79 $\quad y^{(4)} - 16y = 0 \qquad$ Anfangswerte: $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 32$

Lösungsansatz: $y = \mathrm{e}^{\lambda x}, \; y' = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}, \; y'' = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}, \; y''' = \lambda^3 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}, \; y^{(4)} = \lambda^4 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$

Charakteristische Gleichung:

$$y^{(4)} - 16y = \lambda^4 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} - 16 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = (\lambda^4 - 16) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^4 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^4 = 16$$

Diese einfache *bi-quadratische* Gleichung wird durch die *Substitution* $u = \lambda^2$ gelöst:

$$\lambda^4 = 16 \quad \Rightarrow \quad u^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad u_{1/2} = \pm 4 \begin{cases} \lambda^2 = 4 & \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm 2 \\ \lambda^2 = -4 & \Rightarrow \quad \lambda_{3/4} = \pm 2\mathrm{j} \end{cases}$$

Damit besitzt die Dgl die folgende *allgemeine* Lösung:

$$y = C_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} + C_2 \cdot \mathrm{e}^{-2x} + C_3 \cdot \sin(2x) + C_4 \cdot \cos(2x)$$

Aus den *Anfangswerten* bestimmen wir die noch unbekannten Parameter C_1, C_2, C_3 und C_4. Die dabei benötigten Ableitungen erhält man durch *gliedweise* Differentiation in Verbindung mit der *Kettenregel* (Substitutionen: $t = 2x$ bzw. $t = -2x$):

$$y' = 2C_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} - 2C_2 \cdot \mathrm{e}^{-2x} + 2C_3 \cdot \cos(2x) - 2C_4 \cdot \sin(2x)$$

$$y'' = 4C_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} + 4C_2 \cdot \mathrm{e}^{-2x} - 4C_3 \cdot \sin(2x) - 4C_4 \cdot \cos(2x)$$

$$y''' = 8C_1 \cdot \mathrm{e}^{2x} - 8C_2 \cdot \mathrm{e}^{-2x} - 8C_3 \cdot \cos(2x) + 8C_4 \cdot \sin(2x)$$

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 \cdot \mathrm{e}^0 + C_2 \cdot \mathrm{e}^0 + C_3 \cdot \sin 0 + C_4 \cdot \cos 0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 + C_3 \cdot 0 + C_4 \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{(I)} \quad C_1 + C_2 + C_4 = 0$$

$$y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2C_1 \cdot \mathrm{e}^0 - 2C_2 \cdot \mathrm{e}^0 + 2C_3 \cdot \cos 0 - 2C_4 \cdot \sin 0 =$$

$$= 2C_1 \cdot 1 - 2C_2 \cdot 1 + 2C_3 \cdot 1 - 2C_4 \cdot 0 = 2C_1 - 2C_2 + 2C_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{(II)} \quad C_1 - C_2 + C_3 = 0$$

$$y''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4C_1 \cdot \mathrm{e}^0 + 4C_2 \cdot \mathrm{e}^0 - 4C_3 \cdot \sin 0 - 4C_4 \cdot \cos 0 =$$

$$= 4C_1 \cdot 1 + 4C_2 \cdot 1 - 4C_3 \cdot 0 - 4C_4 \cdot 1 = 4C_1 + 4C_2 - 4C_4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{(III)} \quad C_1 + C_2 - C_4 = 0$$

$$y'''(0) = 32 \quad \Rightarrow \quad 8C_1 \cdot \mathrm{e}^0 - 8C_2 \cdot \mathrm{e}^0 - 8C_3 \cdot \cos 0 + 8C_4 \cdot \sin 0 =$$

$$= 8C_1 \cdot 1 - 8C_2 \cdot 1 - 8C_3 \cdot 1 + 8C_4 \cdot 0 = 8C_1 - 8C_2 - 8C_3 = 32$$

$$\Rightarrow \quad \text{(IV)} \quad C_1 - C_2 - C_3 = 4$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & C_1 + C_2 + C_4 = 0 \\ \text{(III)} & C_1 + C_2 - C_4 = 0 \end{array}\right\} - \qquad \left.\begin{array}{ll} \text{(II)} & C_1 - C_2 + C_3 = 0 \\ \text{(IV)} & C_1 - C_2 - C_3 = 4 \end{array}\right\} -$$

$$2C_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_4 = 0 \qquad\qquad 2C_3 = -4 \quad \Rightarrow \quad C_3 = -2$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & C_1 + C_2 + 0 = 0 \\ \text{(II)} & C_1 - C_2 - 2 = 0 \end{array}\right\} +$$

$$2C_1 \qquad - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2C_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1$$

$$\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 + C_4 = 1 + C_2 + 0 = 1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -1$$

Damit ergibt sich folgende *spezielle* Lösung:

$$y = 1 \cdot \mathrm{e}^{2x} - 1 \cdot \mathrm{e}^{-2x} - 2 \cdot \sin(2x) + 0 \cdot \cos(2x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x} - 2 \cdot \sin(2x) =$$

$$= 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}\right)}_{\sinh(2x) \;\to\; \text{FS: Kapitel III.11.1}} - 2 \cdot \sin(2x) = 2 \cdot \sinh(2x) - 2 \cdot \sin(2x) = 2\left[\sinh(2x) - \sin(2x)\right]$$

$$y = 2\left[\sinh(2x) - \sin(2x)\right]$$

G80 $\quad y^{(5)} - 2y^{(4)} + 10y''' - 18y'' + 9y' = 0$

Lösungsansatz: $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y' = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y''' = \lambda^3 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y^{(4)} = \lambda^4 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y^{(5)} = \lambda^5 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$

Charakteristische Gleichung:

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + 10y''' - 18y'' + 9y' = \lambda^5 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} - 2\lambda^4 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + 10\lambda^3 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} - 18\lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + 9\lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} =$$

$$= (\lambda^5 - 2\lambda^4 + 10\lambda^3 - 18\lambda^2 + 9\lambda) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 + 10\lambda^3 - 18\lambda^2 + 9\lambda = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda(\lambda^4 - 2\lambda^3 + 10\lambda^2 - 18\lambda + 9) = 0 \begin{array}{l} \nearrow \; \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \\ \searrow \; \lambda^4 - 2\lambda^3 + 10\lambda^2 - 18\lambda + 9 = 0 \end{array}$$

Durch Probieren finden wir für die Gleichung 4. Grades eine Lösung bei $\lambda_2 = 1$ und für die durch Abspaltung des zugehörigen Linearfaktors entstehende kubische Gleichung ebenfalls die Lösung $\lambda_3 = 1$. Wir verwenden das *Horner-Schema*:

$$\begin{array}{l|ccccc}
 & 1 & -2 & 10 & -18 & 9 \\
\hline
\lambda_2 = 1 & & 1 & -1 & 9 & -9 \\
\hline
 & 1 & -1 & 9 & -9 & 0
\end{array} \quad \Rightarrow \quad \lambda^3 - \lambda^2 + 9\lambda - 9 = 0 \qquad (\lambda_3 = 1 \text{ ist eine Lösung})$$

$$\begin{array}{l|cccc}
 & 1 & -1 & 9 & -9 \\
\hline
\lambda_3 = 1 & & 1 & 0 & 9 \\
\hline
 & 1 & 0 & 9 & 0
\end{array} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{4/5} = \pm 3\mathrm{j}$$

Damit besitzt die charakteristische Gleichung folgende Lösungen: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2/3} = 1$ und $\lambda_{4/5} = \pm 3\mathrm{j}$. Dies führt zu der folgenden *allgemeinen* Lösung der Dgl:

$$y = C_1 + (C_2 + C_3 x) \cdot \mathrm{e}^x + C_4 \cdot \sin(3x) + C_5 \cdot \cos(3x)$$

4.2 Inhomogene lineare Differentialgleichungen

G81 $y''' + y'' = 6x + \mathrm{e}^{-x}$

---

1. Schritt: Wir lösen zunächst die zugehörige *homogene* Dgl $y''' + y'' = 0$ in der bekannten Weise durch den *Exponentialansatz*:

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad y' = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad y''' = \lambda^3 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$$

$$y''' + y'' = \lambda^3 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = (\lambda^3 + \lambda^2) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^3 + \lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2(\lambda + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = 0, \quad \lambda_3 = -1$$

Lösung der *homogenen* Dgl: $y_0 = C_1 + C_2 x + C_3 \cdot \mathrm{e}^{-x}$

2. Schritt: Störfunktion $g(x) = 6x + \mathrm{e}^{-x} = g_1(x) + g_2(x)$ mit $g_1(x) = 6x$ und $g_2(x) = \mathrm{e}^{-x}$

Aus der Tabelle entnehmen wir für die einzelnen Störglieder folgende *Lösungsansätze* für eine *partikuläre* Lösung y_p:

Störglied $g_1(x) = 6x \xrightarrow{a_0 = a_1 = 0} y_{P1} = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2$

Störglied $g_2(x) = \mathrm{e}^{-x} \xrightarrow{c = -1} y_{P2} = Cx \cdot \mathrm{e}^{-x}$

Begründung: $c = -1$ ist eine *einfache* Lösung der charakteristischen Gleichung $\lambda^3 + \lambda^2 = 0$, siehe 1. Schritt.

Lösungsansatz y_p (= Summe der Teilansätze) mit den benötigten Ableitungen 1. bis 3. Ordnung (unter Verwendung der *Produkt-* und *Kettenregel*):

$$y_P = y_{P1} + y_{P2} = Ax^3 + Bx^2 + Cx \cdot \mathrm{e}^{-x}, \qquad y'_P = 3Ax^2 + 2Bx + C \cdot \mathrm{e}^{-x} - Cx \cdot \mathrm{e}^{-x}$$

$$y''_P = 6Ax + 2B - C \cdot \mathrm{e}^{-x} - C \cdot \mathrm{e}^{-x} + Cx \cdot \mathrm{e}^{-x} = 6Ax + 2B - 2C \cdot \mathrm{e}^{-x} + Cx \cdot \mathrm{e}^{-x}$$

$$y'''_P = 6A + 2C \cdot \mathrm{e}^{-x} + C \cdot \mathrm{e}^{-x} - Cx \cdot \mathrm{e}^{-x} = 6A + 3C \cdot \mathrm{e}^{-x} - Cx \cdot \mathrm{e}^{-x}$$

Einsetzen in die *inhomogene* Dgl:

$$y''' + y'' = 6x + \mathrm{e}^{-x} \quad \Rightarrow$$

$$6A + 3C \cdot \mathrm{e}^{-x} - Cx \cdot \mathrm{e}^{-x} + 6Ax + 2B - 2C \cdot \mathrm{e}^{-x} + Cx \cdot \mathrm{e}^{-x} = 6x + \mathrm{e}^{-x} \quad \Rightarrow$$

$$6A + 2B + 6Ax + C \cdot \mathrm{e}^{-x} = 0 + 6x + \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{(auf der rechten Seite wurde die Zahl 0 addiert)}$$

Wir vergleichen auf beiden Seiten der Reihe nach die *absoluten* Glieder, die *linearen* Glieder und die *Exponentialglieder* (*Koeffizientenvergleich*):

$$6A + 2B = 0, \quad 6A = 6, \quad C = 1 \quad \Rightarrow \quad A = 1, \quad B = -3A = -3 \cdot 1 = -3, \quad C = 1$$

Partikuläre Lösung: $y_p = 1x^3 - 3x^2 + 1x \cdot \mathrm{e}^{-x} = x^3 - 3x^2 + x \cdot \mathrm{e}^{-x}$

3. Schritt: Die *inhomogene* Dgl besitzt damit die folgende *allgemeine* Lösung:

$$y = y_0 + y_p = C_1 + C_2 x + C_3 \cdot \mathrm{e}^{-x} + x^3 - 3x^2 + x \cdot \mathrm{e}^{-x} =$$

$$= C_1 + C_2 x - 3x^2 + x^3 + (C_3 + x) \cdot \mathrm{e}^{-x}$$

G82

$$y''' + y' = 3x^2$$

---

1. Schritt: Integration der zugehörigen *homogenen* Dgl $y''' + y' = 0$ durch den *Exponentialansatz*

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x} \quad \text{mit} \quad y' = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad y''' = \lambda^3 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}:$$

$$y''' + y' = \lambda^3 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} = (\lambda^3 + \lambda) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^3 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + 1) = 0$$

Die *charakteristische Gleichung* hat die Lösungen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_{2/3} = \pm \mathrm{j}$.

Allgemeine Lösung der *homogenen* Dgl: $y_0 = C_1 + C_2 \cdot \sin x + C_3 \cdot \cos x$

2. Schritt: Störfunktion $g(x) = 3x^2$

Lösungsansatz für eine *partikuläre* Lösung (aus der Tabelle entnommen für $a_0 = 0,\ a_1 \neq 0$) mit allen benötigten Ableitungen:

$$y_p = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

$$y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y_p'' = 6Ax + 2B, \quad y_p''' = 6A$$

Einsetzen in die *inhomogene* Dgl und ordnen der Glieder nach fallenden Potenzen:

$$y''' + y' = 6A + 3Ax^2 + 2Bx + C = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad 3Ax^2 + 2Bx + (6A + C) = 3x^2 + 0 \cdot x + 0$$

Auf der rechten Seite wurden das fehlende *lineare* und *absolute* Glied „ergänzt“. *Koeffizientenvergleich* entsprechender Potenzen auf beiden Seiten dieser Gleichung führt dann zu:

$$3A = 3, \quad 2B = 0, \quad 6A + C = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 1, \quad B = 0, \quad C = -6A = -6 \cdot 1 = -6$$

Partikuläre Lösung: $y_p = x^3 + 0x^2 - 6x = x^3 - 6x$

3. Schritt: Die gesuchte *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Dgl lautet somit:

$$y = y_0 + y_p = C_1 + C_2 \cdot \sin x + C_3 \cdot \cos x + x^3 - 6x$$

G83

$$y''' - 11y'' + 35y' - 25y = 32 \cdot \mathrm{e}^{x}$$

Anfangswerte: $y(0) = 1, \quad y'(0) = 5, \quad y''(0) = 25$

1. Schritt: Integration der zugehörigen *homogenen* Dgl $y''' - 11y'' + 35y' - 25y$ durch den *Exponentialansatz* $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ mit $y' = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$ und $y''' = \lambda^3 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$:

$$y''' - 11y'' + 35y' - 25y = \lambda^3 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} - 11\lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + 35\lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} - 25 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} =$$

$$= (\lambda^3 - 11\lambda^2 + 35\lambda - 25) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^3 - 11\lambda^2 + 35\lambda - 25 = 0$$

Durch Probieren findet man die Lösung $\lambda_1 = 1$, mit Hilfe des *Horner-Schemas* erhalten wir die restlichen Lösungen der charakteristischen Gleichung:

	1	−11	35	−25
$\lambda_1 = 1$		1	−10	25
	1	−10	25	0

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\lambda^2 - 10\lambda + 25}_{\text{2. Binom}} = (\lambda - 5)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{2/3} = 5$$

Lösung der *homogenen* Dgl: $y_0 = C_1 \cdot \mathrm{e}^{x} + (C_2 + C_3 x) \cdot \mathrm{e}^{5x}$

2. Schritt: Störfunktion $g(x) = 32 \cdot \mathrm{e}^{x}$ mit $c = 1$

Da $c = 1$ eine *einfache* Lösung der charakteristischen Gleichung ist, lautet der aus der Tabelle entnommene *Lösungsansatz* für eine *partikuläre* Lösung y_p wie folgt (mit den benötigten Ableitungen, die wir unter Verwendung der *Produktregel* erhalten):

$$y_p = Ax \cdot \mathrm{e}^{x}, \quad y'_p = A \cdot \mathrm{e}^{x} + Ax \cdot \mathrm{e}^{x}, \quad y''_p = A \cdot \mathrm{e}^{x} + A \cdot \mathrm{e}^{x} + Ax \cdot \mathrm{e}^{x} = 2A \cdot \mathrm{e}^{x} + Ax \cdot \mathrm{e}^{x}$$

$$y'''_p = 2A \cdot \mathrm{e}^{x} + A \cdot \mathrm{e}^{x} + Ax \cdot \mathrm{e}^{x} = 3A \cdot \mathrm{e}^{x} + Ax \cdot \mathrm{e}^{x}$$

Einsetzen in die *inhomogene* Dgl und kürzen durch $\mathrm{e}^{x} \neq 0$:

$$y''' - 11y'' + 35y' - 25y = 32 \cdot \mathrm{e}^{x} \quad \Rightarrow$$

$$3A \cdot \mathrm{e}^{x} + Ax \cdot \mathrm{e}^{x} - 11(2A \cdot \mathrm{e}^{x} + Ax \cdot \mathrm{e}^{x}) + 35(A \cdot \mathrm{e}^{x} + Ax \cdot \mathrm{e}^{x}) - 25Ax \cdot \mathrm{e}^{x} = 32 \cdot \mathrm{e}^{x} \quad \Rightarrow$$

$$3A + Ax - 11(2A + Ax) + 35(A + Ax) - 25Ax = 32 \quad \Rightarrow$$

$$3A + Ax - 22A - 11Ax + 35A + 35Ax - 25Ax = 32 \quad \Rightarrow \quad 16A = 32 \quad \Rightarrow \quad A = 2$$

Partikuläre Lösung der *inhomogenen* Dgl: $y_p = 2x \cdot \mathrm{e}^{x}$

3. Schritt: Die *inhomogene* Dgl besitzt somit die folgende *allgemeine* Lösung:

$$y = y_0 + y_p = C_1 \cdot \mathrm{e}^{x} + (C_2 + C_3 x) \cdot \mathrm{e}^{5x} + 2x \cdot \mathrm{e}^{x} = (C_1 + 2x) \cdot \mathrm{e}^{x} + (C_2 + C_3 x) \cdot \mathrm{e}^{5x}$$

4. Schritt: Aus den *Anfangswerten* bestimmen wir die noch unbekannten Parameter C_1, C_2 und C_3. Die dabei benötigten Ableitungen lauten (*Produktregel* in Verbindung mit der *Kettenregel*):

$$y' = 2 \cdot \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x}(C_1 + 2x) + C_3 \cdot \mathrm{e}^{5x} + 5 \cdot \mathrm{e}^{5x}(C_2 + C_3 x) =$$

$$= (2 + C_1 + 2x) \cdot \mathrm{e}^{x} + (5C_2 + C_3 + 5C_3 x) \cdot \mathrm{e}^{5x}$$

$$y'' = 2 \cdot \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{x}(C_1 + 2 + 2x) + 5C_3 \cdot \mathrm{e}^{5x} + 5 \cdot \mathrm{e}^{5x}(5C_2 + C_3 + 5C_3 x) =$$

$$= (C_1 + 4 + 2x) \cdot \mathrm{e}^{x} + (25C_2 + 10C_3 + 25C_3 x) \cdot \mathrm{e}^{5x}$$

$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \text{(I)} \quad C_1 + C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1 - C_1$$

$$y'(0) = 5 \quad \Rightarrow \quad (2 + C_1) \cdot e^0 + (5C_2 + C_3) \cdot e^0 = (2 + C_1) \cdot 1 + (5C_2 + C_3) \cdot 1 = $$

$$= 2 + C_1 + 5C_2 + C_3 = 5$$

$$\Rightarrow \quad \text{(II)} \quad C_1 + 5C_2 + C_3 = 3$$

$$y''(0) = 25 \quad \Rightarrow \quad (C_1 + 4) \cdot e^0 + (25C_2 + 10C_3) \cdot e^0 = (C_1 + 4) \cdot 1 + (25C_2 + 10C_3) \cdot 1 =$$

$$= C_1 + 4 + 25C_2 + 10C_3 = 25$$

$$\Rightarrow \quad \text{(III)} \quad C_1 + 25C_2 + 10C_3 = 21$$

$$\begin{array}{lrcl}
\text{(II)} & C_1 + 5C_2 + C_3 & = & 3 \;|\; \cdot 10 \\
 & 10C_1 + 50C_2 + 10C_3 & = & 30 \\
\text{(III)} & C_1 + 25C_2 + 10C_3 & = & 21 \\
\hline
 & 9C_1 + 25C_2 & = & 9 \quad \Rightarrow \quad \text{(Gleichung (I) einsetzen)}
\end{array}$$

(the lines 10C_1… and (III) joined by a brace with $-$)

$$9C_1 + 25(1 - C_1) = 9C_1 + 25 - 25C_1 = 9 \quad \Rightarrow \quad -16C_1 = -16 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1$$

$$\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1 - C_1 = 1 - 1 = 0$$

$$\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad C_1 + 5C_2 + C_3 = 1 + 5 \cdot 0 + C_3 = 3 \quad \Rightarrow \quad 1 + C_3 = 3 \quad \Rightarrow \quad C_3 = 2$$

Partikuläre Lösung:

$$y = (1 + 2x) \cdot e^x + (0 + 2x) \cdot e^{5x} = (1 + 2x) \cdot e^x + 2x \cdot e^{5x}$$

G84

Lösen Sie die folgende *Anfangswertaufgabe*:

$$y^{(4)} + y'' = 36 \cdot \sin(2x)$$

Anfangswerte: $y(0) = 1, \quad y'(0) = 5, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = -26$

---

1. Schritt: Integration der zugehörigen *homogenen* Dgl $y^{(4)} + y'' = 0$ durch den *Exponentialansatz*

$$y = e^{\lambda x} \quad \text{mit} \quad y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}, \quad y''' = \lambda^3 \cdot e^{\lambda x} \quad \text{und} \quad y^{(4)} = \lambda^4 \cdot e^{\lambda x}:$$

$$y^{(4)} + y'' = \lambda^4 \cdot e^{\lambda x} + \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} = (\lambda^4 + \lambda^2) \cdot \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^4 + \lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2(\lambda^2 + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = 0, \quad \lambda_{3/4} = \pm j$$

Allgemeine Lösung der *homogenen* Dgl: $y_0 = C_1 + C_2 x + C_3 \cdot \sin x + C_4 \cdot \cos x$

2. Schritt: Störglied $g(x) = 36 \cdot \sin(2x)$ mit $\beta = 2$

Da $\mathrm{j}\beta = \mathrm{j}2 = 2\mathrm{j}$ *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung $\lambda^4 + \lambda^2 = 0$ ist (siehe 1. Schritt), lautet der aus der Tabelle entnommene *Lösungsansatz* für eine *partikuläre* Lösung y_p der *inhomogenen* Dgl wie folgt (mit den benötigten Ableitungen unter Verwendung der *Kettenregel*, Substitution: $u = 2x$):

$$y_p = A \cdot \sin(2x) + B \cdot \cos(2x)$$

$$y'_p = 2A \cdot \cos(2x) - 2B \cdot \sin(2x), \quad y''_p = -4A \cdot \sin(2x) - 4B \cdot \cos(2x)$$

$$y'''_p = -8A \cdot \cos(2x) + 8B \cdot \sin(2x), \quad y_p^{(4)} = 16A \cdot \sin(2x) + 16B \cdot \cos(2x)$$

Einsetzen in die *inhomogene* Dgl, ordnen der Glieder und ein *Koeffizientenvergleich* liefern zwei Gleichungen für die noch unbekannten Parameter A und B:

$$y^{(4)} + y'' = 16A \cdot \sin(2x) + 16B \cdot \cos(2x) - 4A \cdot \sin(2x) - 4B \cdot \cos(2x) = 36 \cdot \sin(2x) \quad \Rightarrow$$

$$12A \cdot \sin(2x) + 12B \cdot \cos(2x) = 36 \cdot \sin(2x) + 0 \cdot \cos(2x) \quad \Rightarrow$$

(auf der rechten Seite wurde der identisch verscwindene Term $0 \cdot \cos(2x)$ ergänzt)

$$12A = 36, \quad 12B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 3, \quad B = 0$$

Partikuläre Lösung der *inhomogenen* Dgl: $y_p = 3 \cdot \sin(2x) + 0 \cdot \cos(2x) = 3 \cdot \sin(2x)$

3. Schritt: Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Dgl lautet damit:

$$y = y_0 + y_p = C_1 + C_2 x + C_3 \cdot \sin x + C_4 \cdot \cos x + 3 \cdot \sin(2x)$$

4. Schritt: Aus den *Anfangsbedingungen* ermitteln wir die noch unbekannten Werte der vier Integrationskonstanten. Die dabei benötigten Ableitungen lauten (unter Verwendung der Kettenregel, Substitution: $u = 2x$):

$$y' = C_2 + C_3 \cdot \cos x - C_4 \cdot \sin x + 6 \cdot \cos(2x), \quad y'' = -C_3 \cdot \sin x - C_4 \cdot \cos x - 12 \cdot \sin(2x),$$

$$y''' = -C_3 \cdot \cos x + C_4 \cdot \sin x - 24 \cdot \cos(2x)$$

$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 \cdot 0 + C_3 \cdot \sin 0 + C_4 \cdot \cos 0 + 3 \cdot \sin 0 = C_1 + C_3 \cdot 0 + C_4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \text{(I)} \quad C_1 + C_4 = 1$$

$$y'(0) = 5 \quad \Rightarrow \quad C_2 + C_3 \cdot \cos 0 - C_4 \cdot \sin 0 + 6 \cdot \cos 0 = C_2 + C_3 \cdot 1 - C_4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 = 5$$

$$\Rightarrow \quad \text{(II)} \quad C_2 + C_3 + 6 = 5 \quad \text{oder} \quad C_2 + C_3 = -1$$

$$y''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -C_3 \cdot \sin 0 - C_4 \cdot \cos 0 - 12 \cdot \sin 0 = -C_3 \cdot 0 - C_4 \cdot 1 - 12 \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{(III)} \quad -C_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_4 = 0$$

$$y'''(0) = -26 \quad \Rightarrow \quad -C_3 \cdot \cos 0 + C_4 \cdot \sin 0 - 24 \cdot \cos 0 = -C_3 \cdot 1 + C_4 \cdot 0 - 24 \cdot 1 = -26$$

$$\Rightarrow \quad \text{(IV)} \quad -C_3 - 24 = -26 \quad \Rightarrow \quad -C_3 = -2 \quad \Rightarrow \quad C_3 = 2$$

Somit ist $C_3 = 2$ und $C_4 = 0$. Die restlichen Unbekannten erhalten wir aus den Gleichungen (I) und (II):

$$\text{(I)} \quad C_1 + C_4 = C_1 + 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1$$

$$\text{(II)} \quad C_2 + C_3 = C_2 + 2 = -1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -3$$

Somit gilt: $C_1 = 1$, $C_2 = -3$, $C_3 = 2$ und $C_4 = 0$.

Spezielle Lösung:

$$y = 1 - 3x + 2 \cdot \sin x + 0 \cdot \cos x + 3 \cdot \sin(2x) = 1 - 3x + 2 \cdot \sin x + 3 \cdot \sin(2x)$$

G85

$$y^{(4)} - 6y''' + 9y'' + 4y' - 12y = 8 \cdot \mathrm{e}^{x}$$

1. Schritt: Integration der zugehörigen *homogenen* Dgl $y^{(4)} - 6y''' + 9y'' + 4y' - 12y = 0$ durch den Exponentialansatz

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x} \quad \text{mit} \quad y' = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad y''' = \lambda^3 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} \quad \text{und} \quad y^{(4)} = \lambda^4 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}:$$

$$y^{(4)} - 6y''' + 9y'' + 4y' - 12y = \lambda^4 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} - 6\lambda^3 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + 9\lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + 4\lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} - 12 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} =$$

$$= (\lambda^4 - 6\lambda^3 + 9\lambda^2 + 4\lambda - 12) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 9\lambda^2 + 4\lambda - 12 = 0$$

Die *charakteristische Gleichung* besitzt eine Lösung bei $\lambda_1 = 2$ (durch Probieren gefunden). Mit dem *Horner-Schema* erhalten wir das 1. reduzierte Polynom vom Grade 3:

	1	-6	9	4	-12
$\lambda_1 = 2$		2	-8	2	12
	1	-4	1	6	0

$$\Rightarrow \quad \lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$$

Auch diese Gleichung 3. Grades hat eine Lösung bei $\lambda_2 = 2$. Das *Horner-Schema* liefert dann eine quadratische Gleichung für die restlichen Lösungen:

	1	-4	1	6
$\lambda_2 = 2$		2	-4	-6
	1	-2	-3	0

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = -1, \quad \lambda_4 = 3$$

Die charakteristische Gleichung hat somit die Lösungen $\lambda_{1/2} = 2$, $\lambda_3 = -1$ und $\lambda_4 = 3$. Daraus ergibt sich die folgende *allgemeine* Lösung der *homogenen* Dgl:

$$y_0 = (C_1 + C_2 x) \cdot \mathrm{e}^{2x} + C_3 \cdot \mathrm{e}^{-x} + C_4 \cdot \mathrm{e}^{3x}$$

2. Schritt: Störfunktion $g(x) = 8 \cdot \mathrm{e}^{x}$ mit $c = 1$

Aus der Tabelle entnehmen wir den folgenden *Ansatz* für eine *partikuläre* Lösung y_p der *inhomogenen* Dgl ($c = 1$ ist *keine* Lösung der charakteristischen Gleichung, siehe 1. Schritt):

$$y_p = A \cdot \mathrm{e}^{x} \quad \text{mit} \quad y_p' = y_p'' = y_p''' = y_p^{(4)} = A \cdot \mathrm{e}^{x}$$

Einsetzen in die *inhomogene* Dgl und kürzen durch e^{x}:

$$y^{(4)} - 6y''' + 9y'' + 4y' - 12y = A \cdot \mathrm{e}^{x} - 6A \cdot \mathrm{e}^{x} + 9A \cdot \mathrm{e}^{x} + 4A \cdot \mathrm{e}^{x} - 12A \cdot \mathrm{e}^{x} = 8 \cdot \mathrm{e}^{x} \quad \Rightarrow$$

$$-4A \cdot \mathrm{e}^{x} = 8 \cdot \mathrm{e}^{x} \quad \Rightarrow \quad -4A = 8 \quad \Rightarrow \quad A = -2$$

Partikuläre Lösung der *inhomogenen* Dgl: $y_p = -2 \cdot \mathrm{e}^{x}$

3. Schritt: Wir erhalten damit für die *inhomogene* Dgl folgende *allgemeine* Lösung:

$$y = y_0 + y_p = (C_1 + C_2 x) \cdot \mathrm{e}^{2x} + C_3 \cdot \mathrm{e}^{-x} + C_4 \cdot \mathrm{e}^{3x} - 2 \cdot \mathrm{e}^{x} =$$

$$= C_3 \cdot \mathrm{e}^{-x} - 2 \cdot \mathrm{e}^{x} + (C_1 + C_2 x) \cdot \mathrm{e}^{2x} + C_4 \cdot \mathrm{e}^{3x}$$

G86 $y^{(5)} - y^{(4)} + 4y''' - 4y'' = 12x + 4$

---

1. Schritt: Integration der zugehörigen *homogenen* Dgl $y^{(5)} - y^{(4)} + 4y''' - 4y'' = 0$ durch den *Exponentialansatz*

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x} \quad \text{mit} \quad y' = \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad y''' = \lambda^3 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad y^{(4)} = \lambda^4 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} \quad \text{und} \quad y^{(5)} = \lambda^5 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}:$$

$$y^{(5)} - y^{(4)} + 4y''' - 4y'' = \lambda^5 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} - \lambda^4 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + 4\lambda^3 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} - 4\lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} =$$

$$= (\lambda^5 - \lambda^4 + 4\lambda^3 - 4\lambda^2) \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda x}}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^5 - \lambda^4 + 4\lambda^3 - 4\lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2(\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4) = 0 \begin{array}{l} \nearrow \; \lambda^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1/2} = 0 \\ \searrow \; \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0 \end{array}$$

Für die kubische Gleichung findet man durch Probieren die Lösung $\lambda_3 = 1$. Mit Hilfe des *Horner-Schemas* lassen sich die restlichen Lösungen leicht bestimmen:

	1	-1	4	-4
$\lambda_3 = 1$		1	0	4
	1	0	4	0

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{4/5} = \pm 2\mathrm{j}$$

Die Lösungen der *charakteristischen Gleichung* lauten also: $\lambda_{1/2} = 0$, $\lambda_3 = 1$ und $\lambda_{4/5} = \pm 2\mathrm{j}$. Damit besitzt die *homogene* Dgl die folgende *allgemeine* Lösung:

$$y_0 = C_1 + C_2 x + C_3 \cdot \mathrm{e}^x + C_4 \cdot \sin(2x) + C_5 \cdot \cos(2x)$$

2. Schritt: Störglied $g(x) = 12x + 4$

Wegen $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$ liefert die Tabelle den folgenden *Lösungsansatz* für eine *partikuläre* Lösung y_p der *inhomogenen* Dgl (mit allen benötigten Ableitungen):

$$y_p = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2$$

$$y_p' = 3Ax^2 + 2Bx, \quad y_p'' = 6Ax + 2B, \quad y_p''' = 6A, \quad y_p^{(4)} = 0, \quad y_p^{(5)} = 0$$

Einsetzen in die *inhomogene* Dgl:

$$y^{(5)} - y^{(4)} + 4y''' - 4y'' = 0 - 0 + 4 \cdot 6A - 4(6Ax + 2B) = 12x + 4 \quad \Rightarrow$$

$$24A - 24Ax - 8B = -24Ax + (24A - 8B) = 12x + 4$$

Wir vergleichen beiderseits die *linearen* und die *absoluten* Glieder und erhalten zwei einfache Gleichungen für die noch unbekannten Parameter A und B:

(I) $\quad -24A = 12 \quad \Rightarrow \quad A = -0{,}5$ (Einsetzen in (II))

(II) $\quad 24A - 8B = 4 \quad \Rightarrow \quad 24 \cdot (-0{,}5) - 8B = -12 - 8B = 4 \quad \Rightarrow \quad -8B = 16 \quad \Rightarrow \quad B = -2$

Partikuläre Lösung der *inhomogenen* Dgl: $y_p = -0{,}5x^3 - 2x^2$

3. Schritt: Die *inhomogene* Dgl besitzt damit die folgende *allgemeine* Lösung:

$$y = y_0 + y_p = C_1 + C_2 x + C_3 \cdot \mathrm{e}^x + C_4 \cdot \sin(2x) + C_5 \cdot \cos(2x) - 0{,}5x^3 - 2x^2 =$$

$$= C_1 + C_2 x - 2x^2 - 0{,}5x^3 + C_3 \cdot \mathrm{e}^x + C_4 \cdot \sin(2x) + C_5 \cdot \cos(2x)$$

5 Lösung linearer Anfangswertprobleme mit Hilfe der Laplace-Transformation

Verwenden Sie in diesem Abschnitt das folgende Lösungsverfahren:

(1) Das *Anfangswertproblem* wird zunächst in den *Bildbereich* transformiert *(Laplace-Transformation)*.

(2) Die erhaltene algebraische Gleichung wird dann nach der *Bildfunktion* aufgelöst.

(3) Durch *Rücktransformation* mit Hilfe der Laplace-Transformationstabelle erhält man aus der Bildfunktion die gesuchte *Originalfunktion*, d. h. die spezielle Lösung der Dgl.

Hinweise

Lehrbuch: Band 2, Kapitel VI.5.1
Formelsammlung: Kapitel XIII.5

5.1 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Hinweise

(1) **Lehrbuch:** Band 2, Kapitel VI.5.1.2
Formelsammlung: Kapitel XIII.5.2

(2) **Tabelle** spezieller Laplace-Transformationen → Band 2, Kapitel VI.4.2 und Formelsammlung, Kapitel XIII.6

(3) In den Lösungen wird die jeweilige Nummer der Laplace-Transformation mit den entsprechenden Parameterwerten angegeben (z. B. Nr. 6 mit $a = -1$).

G87 $y' + y = t \cdot \mathrm{e}^{-t}$ Anfangswert: $y(0) = 2$

Die Dgl wird durch die *Laplace-Transformation* in die folgende *algebraische* Gleichung übergeführt (Transformation in den *Bildbereich*):

$$[s \cdot Y(s) - 2] + Y(s) = \underbrace{\mathscr{L}\{t \cdot \mathrm{e}^{-t}\}}_{\text{Nr. 6 mit } a = -1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Diese Gleichung lösen wir nach der *Bildfunktion* $Y(s)$ auf:

$$s \cdot Y(s) - 2 + Y(s) = (s+1) \cdot Y(s) - 2 = \frac{1}{(s+1)^2} \quad \Rightarrow \quad (s+1) \cdot Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + 2 \quad \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^3} + \frac{2}{s+1}$$

Die *Rücktransformation* in den *Originalbereich* liefert die gesuchte Lösung:

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3} + \frac{2}{s+1}\right\} = \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\}}_{\text{Nr. 13 mit } a\,=\,-1} + 2 \cdot \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}}_{\text{Nr. 3 mit } a\,=\,-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\,t^2 \cdot \mathrm{e}^{-t} + 2 \cdot \mathrm{e}^{-t} = \left(\frac{1}{2}\,t^2 + 2\right) \cdot \mathrm{e}^{-t}, \quad t \geq 0$$

G88 $y' + 4y = 10 \cdot \cos t$ Anfangswert: $y(0) = \pi$

Wir transformieren die Dgl zunächst in den *Bildbereich* (Laplace-Transformation):

$$[s \cdot Y(s) - \pi] + 4 \cdot Y(s) = \mathscr{L}\{10 \cdot \cos t\} = 10 \cdot \underbrace{\mathscr{L}\{\cos t\}}_{\text{Nr. 25 mit } a\,=\,1} = 10 \cdot \frac{s}{s^2+1}$$

Diese algebraische Gleichung lösen wir jetzt nach der *Bildfunktion* $Y(s)$ auf:

$$s \cdot Y(s) - \pi + 4 \cdot Y(s) = (s+4) \cdot Y(s) - \pi = 10 \cdot \frac{s}{s^2+1} \quad \Rightarrow$$

$$(s+4) \cdot Y(s) = 10 \cdot \frac{s}{s^2+1} + \pi \quad \Rightarrow \quad Y(s) = 10 \cdot \frac{s}{(s+4)(s^2+1)} + \frac{\pi}{s+4}$$

Rücktransformation in den *Originalbereich* (inverse Laplace-Transformation):

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{10 \cdot \frac{s}{(s+4)(s^2+1)} + \frac{\pi}{s+4}\right\} =$$

$$= 10 \cdot \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+4)(s^2+1)}\right\} + \pi \cdot \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}}_{\text{Nr. 3 mit } a\,=\,-4} = 10 \cdot \mathscr{L}^{-1}\Bigg\{\underbrace{\frac{s}{(s+4)(s^2+1)}}_{F(s)}\Bigg\} + \pi \cdot \mathrm{e}^{-4t} =$$

$$= 10 \cdot \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} + \pi \cdot \mathrm{e}^{-4t}$$

Die *Rücktransformation* der Bildfunktion $F(s) = \dfrac{s}{(s+4)(s^2+1)}$ erfolgt mit dem *Faltungssatz* (→ Band 2: Kapitel VI.2.7 bzw. FS: Kapitel XIII.2.7):

$$F(s) = \frac{s}{(s+4)(s^2+1)} = \underbrace{\frac{1}{s+4}}_{F_1(s)} \cdot \underbrace{\frac{s}{s^2+1}}_{F_2(s)} = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

Aus der *Transformationstabelle* entnehmen wir die Originalfunktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ zu $F_1(s)$ und $F_2(s)$:

$$f_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)\} = \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}}_{\text{Nr. 3 mit } a\,=\,-4} = \mathrm{e}^{-4t}$$

$$f_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F_2(s)\} = \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}}_{\text{Nr. 25 mit } a\,=\,1} = \cos t$$

Die Originalfunktion zu $F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$ ist dann das *Faltungsprodukt* $f_1(t) * f_2(t)$ der Originalfunktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(u) \cdot f_2(t-u)\,du = \int_0^t f_2(u) \cdot f_1(t-u)\,du = \int_0^t \cos u \cdot \mathrm{e}^{-4(t-u)}\,du =$$

$$= \int_0^t \cos u \cdot \mathrm{e}^{-4t+4u}\,du = \int_0^t \cos u \cdot \mathrm{e}^{-4t} \cdot \mathrm{e}^{4u}\,du = \mathrm{e}^{-4t} \cdot \underbrace{\int_0^t \cos u \cdot \mathrm{e}^{4u}\,du}_{I} = \mathrm{e}^{-4t} \cdot I$$

Die Auswertung des Integrals I erfolgt mit der *Integraltafel* der Formelsammlung (Integral 324 mit $a = 4,\ b = 1$):

$$I = \int_0^t \cos u \cdot \mathrm{e}^{4u}\,du = \left[\frac{\mathrm{e}^{4u}}{16+1}\,(4 \cdot \cos u + \sin u)\right]_0^t = \frac{1}{17}\left[\mathrm{e}^{4u}(4 \cdot \cos u + \sin u)\right]_0^t =$$

$$= \frac{1}{17}\left[\mathrm{e}^{4t}(4 \cdot \cos t + \sin t) - \mathrm{e}^0(4 \cdot \cos 0 + \sin 0)\right] = \frac{1}{17}\left[\mathrm{e}^{4t}(4 \cdot \cos t + \sin t) - 1(4 \cdot 1 + 0)\right] =$$

$$= \frac{1}{17}\left[(4 \cdot \cos t + \sin t) \cdot \mathrm{e}^{4t} - 4\right]$$

Somit gilt:

$$f_1(t) * f_2(t) = \mathrm{e}^{-4t} \cdot I = \mathrm{e}^{-4t} \cdot \frac{1}{17}\left[(4 \cdot \cos t + \sin t) \cdot \mathrm{e}^{4t} - 4\right] = \frac{1}{17}\left[4 \cdot \cos t + \sin t - 4 \cdot \mathrm{e}^{-4t}\right]$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4} \cdot \frac{s}{s^2+1}\right\} = f_1(t) * f_2(t) =$$

$$= \frac{1}{17}\left(4 \cdot \cos t + \sin t - 4 \cdot \mathrm{e}^{-4t}\right)$$

Die *Lösung* der Anfangswertaufgabe lautet damit wie folgt:

$$y(t) = 10 \cdot \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} + \pi \cdot \mathrm{e}^{-4t} = \frac{10}{17}\left(4 \cdot \cos t + \sin t - 4 \cdot \mathrm{e}^{-4t}\right) + \pi \cdot \mathrm{e}^{-4t} =$$

$$= \frac{10}{17}(4 \cdot \cos t + \sin t) + \left(\pi - \frac{40}{17}\right) \cdot \mathrm{e}^{-4t}, \quad t \ge 0$$

G89

RL-Stromkreis mit linear ansteigender äußerer Spannung

Der in Bild G-33 skizzierte Stromkreis enthält einen ohmschen Widerstand R und eine Induktivität L. Die von außen angelegte Spannung $u = kt$ steigt mit der Zeit t *linear* an $(k > 0)$. Bestimmen Sie den *zeitlichen* Verlauf der *Stromstärke* $i = i(t)$, wenn der RL-Stromkreis im Einschaltzeitpunkt $t = 0$ *stromlos* ist.

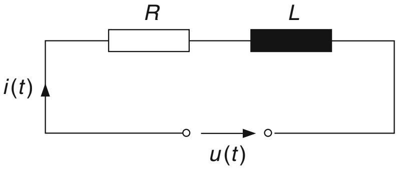


Bild G-33

Anleitung: Aus der *Maschenregel* erhält man für die Stromstärke $i = i(t)$ die folgende Dgl 1. Ordnung:

$$L \cdot \frac{di}{dt} + Ri = u$$

Wir *transformieren* die noch etwas umgestellte Dgl wie folgt in den *Bildbereich* (die Laplace-Transformierte der gesuchten Lösung $i = i(t)$ bezeichnen wir mit $I(s)$):

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i = \frac{u}{L} = \frac{k}{L} \cdot t \quad \text{oder} \quad \frac{di}{dt} + \alpha i = \beta t \qquad (\text{mit } \alpha = R/L \text{ und } \beta = k/L)$$

$$[s \cdot I(s) - \underbrace{i(0)}_{0}] + \alpha \cdot I(s) = \mathscr{L}\{\beta t\} = \beta \cdot \underbrace{\mathscr{L}\{t\}}_{\text{Nr. 4}} = \beta \cdot \frac{1}{s^2}$$

Diese algebraische Gleichung lösen wir nach $I(s)$ auf:

$$s \cdot I(s) + \alpha \cdot I(s) = (s + \alpha) \cdot I(s) = \beta \cdot \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad I(s) = \beta \cdot \frac{1}{(s + \alpha)\, s^2}$$

Rücktransformation aus dem Bildbereich in den Originalbereich (*inverse* Laplace-Transformation) führt zur gesuchten *Lösung* der Anfangswertaufgabe:

$$i(t) = \mathscr{L}^{-1}\{I(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\beta \cdot \frac{1}{(s + \alpha)\, s^2}\right\} = \beta \cdot \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + \alpha)\, s^2}\right\}}_{\text{Nr. 11 mit } a = -\alpha} = \beta \cdot \frac{e^{-\alpha t} + \alpha t - 1}{\alpha^2} =$$

$$= \frac{k}{L} \cdot \frac{e^{-\frac{R}{L} t} + \frac{R}{L} t - 1}{\frac{R^2}{L^2}} = \frac{kL}{R^2} \left(e^{-\frac{R}{L} t} + \frac{R}{L} t - 1 \right), \quad t \geq 0$$

Da im Laufe der Zeit (d. h. für $t \gg 1$) der *erste* Summand in der Klammer *verschwindet* (streng monoton *fallende* Exponentialfunktion), erhält man für große Zeiten einen *linearen* Zusammenhang zwischen der Stromstärke i und der Zeit t (Bild G-34):

$$i \approx \frac{kL}{R^2} \left(\frac{R}{L}\, t - 1 \right) = \frac{k}{R} \left(t - \frac{L}{R} \right)$$

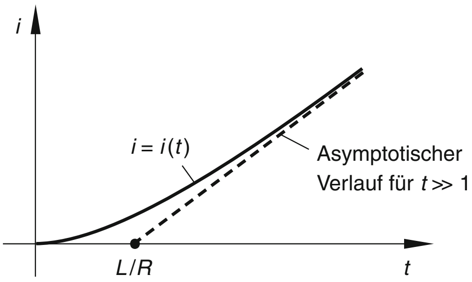


Bild G-34

G90

Sinkgeschwindigkeit eines Körpers in einer zähen Flüssigkeit

Die *Sinkgeschwindigkeit* v einer Stahlkugel in einer zähen Flüssigkeit genügt der folgenden Dgl (*ohne* Auftrieb, siehe Bild G-35):

$$m\dot{v} + kv = mg$$

m: Masse der Kugel
k: Reibungsfaktor
g: Erdbeschleunigung

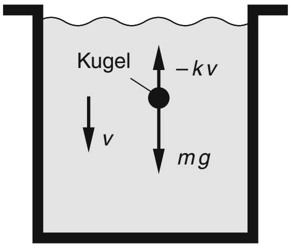


Bild G-35

Wie lautet das *Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz* $v = v(t)$ bei einer Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = v_0$? Welche *Endgeschwindigkeit* v_E wird erreicht?

Hinweis: Siehe hierzu auch Aufgabe G 36.
Dort wurde diese Dgl durch „*Variation der Konstanten*“ gelöst.

Wir stellen die Dgl zunächst etwas um und transformieren sie anschließend mit Hilfe der Laplace-Transformation in den *Bildbereich* (die Bildfunktion von $v = v(t)$ bezeichnen wir mit $V(s)$):

$$\dot{v} + \frac{k}{m}\,v = g \quad \text{oder} \quad \dot{v} + \alpha v = g \qquad (\text{mit } \alpha = k/m)$$

$$[s \cdot V(s) - \underbrace{v(0)}_{v_0}] + \alpha \cdot V(s) = \mathscr{L}\{g\} = g \cdot \underbrace{\mathscr{L}\{1\}}_{\text{Nr. 2}} = g \cdot \frac{1}{s}$$

Diese algebraische Gleichung lösen wir nach $V(s)$ auf:

$$s \cdot V(s) - v_0 + \alpha \cdot V(s) = (s + \alpha) \cdot V(s) - v_0 = g \cdot \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad (s + \alpha) \cdot V(s) = g \cdot \frac{1}{s} + v_0 \quad \Rightarrow$$

$$V(s) = g \cdot \frac{1}{s(s + \alpha)} + v_0 \cdot \frac{1}{s + \alpha}$$

Rücktransformation in den *Originalbereich* (*inverse* Laplace-Transformation) liefert das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz für $t \ge 0$:

$$v(t) = \mathscr{L}^{-1}\{V(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{g \cdot \frac{1}{s(s + \alpha)} + v_0 \cdot \frac{1}{s + \alpha}\right\} =$$

$$= g \cdot \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s + \alpha)}\right\}}_{\text{Nr. 5 mit } a = -\alpha} + v_0 \cdot \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \alpha}\right\}}_{\text{Nr. 3 mit } a = -\alpha} = g \cdot \frac{e^{-\alpha t} - 1}{-\alpha} + v_0 \cdot e^{-\alpha t} =$$

$$= -\frac{g}{\alpha}\,(e^{-\alpha t} - 1) + v_0 \cdot e^{-\alpha t} = \left(v_0 - \frac{g}{\alpha}\right) \cdot e^{-\alpha t} + \frac{g}{\alpha} = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

Die (konstante) *Endgeschwindigkeit* v_E erhalten wir für den Grenzübergang $t \to \infty$:

$$v_E = \lim_{t \to \infty} v(t) = \lim_{t \to \infty}\left[\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) \cdot \underbrace{e^{-\frac{k}{m}t}}_{\to 0} + \frac{mg}{k}\right] = \frac{mg}{k}$$

(die Exponentialfunktion verschwindet für $t \to \infty$)

Bild G-36 zeigt den zeitlichen Verlauf der Sinkgeschwindigkeit v („Sättigungsfunktion“).

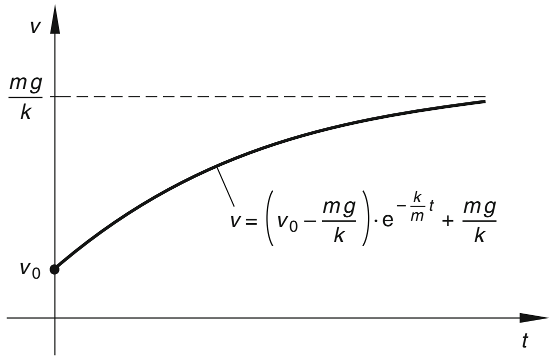


Bild G-36

G91

DT_1-Regelkreisglied

Das Verhalten eines sog. DT_1-Regelkreisgliedes der Regelungstechnik lässt sich durch die lineare Dgl

$$T \cdot \dot{v} + v = K \cdot \dot{u}$$

beschreiben. Dabei bedeuten:

$T,\ K$: positive Konstanten
$u = u(t)$: Eingangssignal
$v = v(t)$: Ausgangssignal

Bestimmen Sie das zeitabhängige *Ausgangssignal* $v = v(t)$ für das *periodische Eingangssignal* $u = E \cdot \sin(\omega t)$ und den *Anfangswert* $v(0) = 0$.

Mit $\dot{u} = E\omega \cdot \cos(\omega t)$ (Kettenregel) lautet die Dgl für das Ausgangssignal $v = v(t)$ wie folgt:

$$T \cdot \dot{v} + v = K \cdot \dot{u} = KE\omega \cdot \cos(\omega t) \quad \text{oder} \quad \dot{v} + \alpha v = \beta \cdot \cos(\omega t) \quad (\text{mit } \alpha = 1/T \text{ und } \beta = (KE\omega)/T)$$

Wir *transformieren* die Dgl mit Hilfe der *Laplace-Transformation* in den *Bildbereich*:

$$[s \cdot V(s) - \underbrace{v(0)}_{0}] + \alpha \cdot V(s) = \mathscr{L}\{\beta \cdot \cos(\omega t)\} = \beta \cdot \underbrace{\mathscr{L}\{\cos(\omega t)\}}_{\text{Nr. 25 mit } a = \omega} = \beta \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Diese algebraische Gleichung wird nach $V(s)$ aufgelöst ($V(s)$ ist die *Laplace-Transformierte* der gesuchten Lösung $v = v(t)$):

$$s \cdot V(s) + \alpha \cdot V(s) = (s + \alpha) \cdot V(s) = \beta \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \Rightarrow \quad V(s) = \beta \cdot \frac{s}{(s^2 + \omega^2)(s + \alpha)}$$

Bei der Rücktransformation verwenden wir den *Faltungssatz*:

$$v(t) = \mathscr{L}^{-1}\{V(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\beta \cdot \frac{s}{(s^2 + \omega^2)(s + \alpha)}\right\} = \beta \cdot \mathscr{L}^{-1}\left\{\underbrace{\frac{s}{s^2 + \omega^2}}_{F_1(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{s + \alpha}}_{F_2(s)}\right\} =$$

$$= \beta \cdot \mathscr{L}^{-1}\{F_1(s) \cdot F_2(s)\} = \beta \cdot (f_1(t) * f_2(t))$$

Dabei ist $f_1(t) * f_2(t)$ das *Faltungsprodukt* der noch unbekannten Originalfunktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ der Faktorfunktionen $F_1(s)$ und $F_2(s)$. Durch *Rücktransformation* aus dem Bild- in den Originalbereich erhalten wir:

$$f_1(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F_1(s)\} = \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\omega^2}\right\}}_{\text{Nr. 25 mit } a = \omega} = \cos(\omega t), \quad f_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F_2(s)\} = \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\alpha}\right\}}_{\text{Nr. 3 mit } a = -\alpha} = \mathrm{e}^{-\alpha t}$$

Wir ermitteln jetzt das *Faltungsprodukt*:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(u) \cdot f_2(t-u)\,du = \int_0^t \cos(\omega u) \cdot \mathrm{e}^{-\alpha(t-u)}\,du = \int_0^t \cos(\omega u) \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t + \alpha u}\,du =$$

$$= \int_0^t \cos(\omega u) \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} \cdot \mathrm{e}^{\alpha u}\,du = \mathrm{e}^{-\alpha t} \cdot \underbrace{\int_0^t \cos(\omega u) \cdot \mathrm{e}^{\alpha u}\,du}_{I} = \mathrm{e}^{-\alpha t} \cdot I$$

Auswertung des Integrals I mit Hilfe der *Integraltafel* der Formelsammlung (Integral 324 mit $a = \alpha$ und $b = \omega$):

$$I = \int_0^t \cos(\omega u) \cdot \mathrm{e}^{\alpha u}\,du = \left[\frac{\mathrm{e}^{\alpha u}}{\alpha^2+\omega^2}\left[\alpha \cdot \cos(\omega u) + \omega \cdot \sin(\omega u)\right]\right]_0^t =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\left[\mathrm{e}^{\alpha u}\big(\alpha \cdot \cos(\omega u) + \omega \cdot \sin(\omega u)\big)\right]_0^t =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\left[\mathrm{e}^{\alpha t}\big(\alpha \cdot \cos(\omega t) + \omega \cdot \sin(\omega t)\big) - \underbrace{\mathrm{e}^0}_{1}(\alpha \cdot \underbrace{\cos 0}_{1} + \omega \cdot \underbrace{\sin 0}_{0})\right] =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\left[\mathrm{e}^{\alpha t}(\alpha \cdot \cos(\omega t) + \omega \cdot \sin(\omega t)) - \alpha\right]$$

Damit gilt für das *Faltungsprodukt*:

$$f_1(t) * f_2(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t} \cdot I = \mathrm{e}^{-\alpha t} \cdot \frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\left[\mathrm{e}^{\alpha t}(\alpha \cdot \cos(\omega t) + \omega \cdot \sin(\omega t)) - \alpha\right] =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\left[\alpha \cdot \cos(\omega t) + \omega \cdot \sin(\omega t) - \alpha \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t}\right]$$

Die *Lösung* der Dgl lautet daher wie folgt:

$$v(t) = \beta \cdot (f_1(t) * f_2(t)) = \frac{\beta}{\alpha^2+\omega^2}\left[\alpha \cdot \cos(\omega t) + \omega \cdot \sin(\omega t) - \alpha \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t}\right] =$$

$$= \frac{KE\omega}{T\left(\frac{1}{T^2}+\omega^2\right)}\left(\frac{1}{T} \cdot \cos(\omega t) + \omega \cdot \sin(\omega t) - \frac{1}{T} \cdot \mathrm{e}^{-t/T}\right) =$$

$$= \frac{KE\omega T}{T^2\left(\frac{1}{T^2}+\omega^2\right)}\left(\frac{1}{T} \cdot \cos(\omega t) + \omega \cdot \sin(\omega t) - \frac{1}{T} \cdot \mathrm{e}^{-t/T}\right) =$$

$$= \frac{KE\omega}{1+(\omega T)^2}\left[\cos(\omega t) + \omega T \cdot \sin(\omega t) - \mathrm{e}^{-t/T}\right]$$

Umformungen: Bruch vor der Klammer mit T erweitern, dann T bzw. T^2 in die Klammern multiplizieren.

5.2 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Hinweise

(1) **Lehrbuch:** Band 2, Kapitel VI.5.1.3
Formelsammlung: Kapitel XIII.5.3

(2) **Tabelle** spezieller Laplace-Transformationen → Band 2, Kapitel VI.4.2 und Formelsammlung, Kapitel XIII.6

(3) In den Lösungen wird die jeweilige Nummer der Laplace-Transformation mit den entsprechenden Parameterwerten angegeben (z. B. Nr. 6 mit $a = -1$).

G92 Lösen Sie die folgende *Schwingungsgleichung* mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0 \qquad \text{Anfangswerte: } x(0) = 10, \quad \dot{x}(0) = 0$$

Wir *transformieren* die Dgl in den *Bildbereich*:

$$[s^2 \cdot X(s) - s \cdot \underbrace{x(0)}_{10} - \underbrace{\dot{x}(0)}_{0}] + 2[s \cdot X(s) - \underbrace{x(0)}_{10}] + 5 \cdot X(s) = \mathscr{L}\{0\} = 0$$

Diese algebraische Gleichung lösen wir nach der *Bildfunktion* $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}$ auf:

$$s^2 \cdot X(s) - 10s + 2s \cdot X(s) - 20 + 5 \cdot X(s) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(s^2 + 2s + 5) \cdot X(s) = 10s + 20 = 10(s + 2) \quad \Rightarrow \quad X(s) = 10 \cdot \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 5}$$

Vor der *Rücktransformation* müssen wir diese gebrochene Funktion so zerlegen, dass wir die Glieder in der Transformationstabelle finden:

$$X(s) = 10 \cdot \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 5} = 10 \cdot \frac{s + 2}{\underbrace{(s^2 + 2s + 1)}_{(s+1)^2} + 4} = 10 \cdot \frac{(s + 1) + 1}{(s + 1)^2 + 2^2} =$$

$$= 10 \left(\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2} + \frac{1}{(s + 1)^2 + 2^2} \right)$$

Rücktransformation in den *Originalbereich* führt jetzt zur gesuchten Lösung (*inverse* Laplace-Transformation):

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{ 10 \left(\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2} + \frac{1}{(s + 1)^2 + 2^2} \right) \right\} =$$

$$= 10 \left(\underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 2^2} \right\}}_{\text{Nr. 29 mit } a = 2,\ b = -1} + \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{(s + 1)^2 + 2^2} \right\}}_{\text{Nr. 28 mit } a = 2,\ b = -1} \right) =$$

$$= 10 \left(e^{-t} \cdot \cos(2t) + \frac{e^{-t} \cdot \sin(2t)}{2} \right) = 5 \cdot e^{-t}[2 \cdot \cos(2t) + \sin(2t)]$$

Der zeitliche Verlauf dieser *gedämpften Schwingung* ist in Bild G-37 dargestellt.

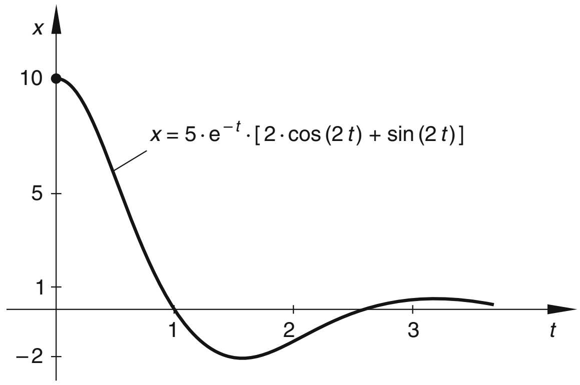


Bild G-37

G93

Stoßdämpferproblem

Ein *schwingungsfähiges* (gedämpftes) Feder-Masse-System mit der Masse $m = 50$ kg, der Federkonstanten $c = 10\,200$ N/m und der Dämpferkonstanten $b = 2000$ kg/s wird zur Zeit $t = 0$ aus der Gleichgewichtelage heraus mit der Geschwindigkeit $v_0 = 2{,}8$ m/s angestoßen. Untersuchen Sie die Bewegung der Masse mit Hilfe der *Schwingungsgleichung*

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

und skizzieren Sie den *zeitlichen* Verlauf der *Ortskoordinate* $x = x(t)$.

Wir erhalten die folgende *Schwingungsgleichung* (ohne Einheiten):

$$50\ddot{x} + 2000\dot{x} + 10\,200x = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x} + 40\dot{x} + 204x = 0$$

Transformation in den Bildraum (mit $X(s)$ bezeichnen wir die *Laplace-Transformierte* der gesuchten Lösung $x = x(t)$):

$$\left[s^2 \cdot X(s) - s \cdot \underbrace{x(0)}_{0} - \underbrace{\dot{x}(0)}_{2{,}8}\right] + 40\left[s \cdot X(s) - \underbrace{x(0)}_{0}\right] + 204 \cdot X(s) = \mathscr{L}\{0\} = 0$$

Wir lösen diese Gleichung nach $X(s)$ auf:

$$s^2 \cdot X(s) - 2{,}8 + 40s \cdot X(s) + 204 \cdot X(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad (s^2 + 40s + 204) \cdot X(s) = 2{,}8 \quad \Rightarrow$$

$$X(s) = \frac{2{,}8}{s^2 + 40s + 204} = \frac{2{,}8}{(s^2 + 40s + 400) - 196} = \frac{2{,}8}{(s + 20)^2 - 14^2}$$

Umformung des Nenners: Quadratische Ergänzung zu einem Binom.

Durch *Rücktransformation* in den *Originalbereich* erhalten wir das gesuchte *Weg-Zeit-Gesetz* (*inverse* Laplace-Transformation):

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2{,}8}{(s + 20)^2 - 14^2}\right\} = 2{,}8 \cdot \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 20)^2 - 14^2}\right\}}_{\text{Nr. 32 mit } a = 14,\ b = -20} =$$

$$= 2{,}8 \cdot \frac{e^{-20t} \cdot \sinh(14t)}{14} = 0{,}2 \cdot e^{-20t} \cdot \sinh(14t), \quad t \geq 0$$

Es handelt sich (infolge der starken Dämpfung) um eine sog. *aperiodische Schwingung*, deren zeitlicher Verlauf in Bild G-38 dargestellt ist.

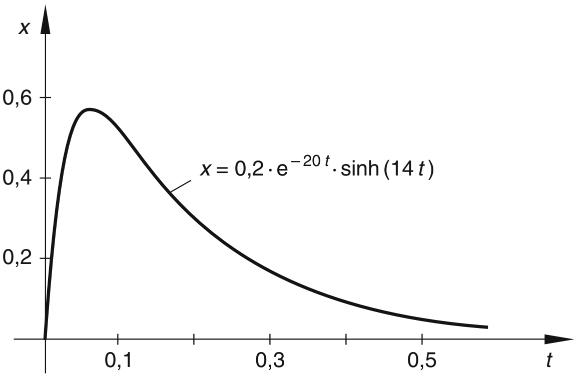


Bild G-38

G94

Erzwungene mechanische Schwingung

Lösen Sie das folgende *Schwingungsproblem*:

$$\ddot{x} + 25x = 2 \cdot \sin(2t) \qquad \text{Anfangswerte: } x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1$$

Transformation in den *Bildbereich*:

$$\left[s^2 \cdot X(s) - s \cdot \underbrace{x(0)}_{0} - \underbrace{\dot{x}(0)}_{1}\right] + 25 \cdot X(s) = \mathscr{L}\{2 \cdot \sin(2t)\} = 2 \cdot \underbrace{\mathscr{L}\{\sin(2t)\}}_{\text{Nr. 24 mit } a\,=\,2} = 2 \cdot \frac{2}{s^2+4} = \frac{4}{s^2+4}$$

Wir lösen diese algebraische Gleichung nach $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}$ auf:

$$s^2 \cdot X(s) - 1 + 25 \cdot X(s) = \frac{4}{s^2+4} \quad \Rightarrow \quad (s^2+25) \cdot X(s) - 1 = \frac{4}{s^2+4} \quad \Rightarrow$$

$$(s^2+25) \cdot X(s) = \frac{4}{s^2+4} + 1 \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{4}{(s^2+4)(s^2+25)} + \frac{1}{s^2+25}$$

Rücktransformation in den *Originalbereich* liefert das gesuchte *Weg-Zeit-Gesetz*:

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s^2+4)(s^2+25)} + \frac{1}{s^2+25}\right\} =$$

$$= \underbrace{4 \cdot \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)(s^2+25)}\right\}}_{\text{Nr. 43 mit } a\,=\,2,\; b\,=\,5} + \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+25}\right\}}_{\text{Nr. 24 mit } a\,=\,5} =$$

$$= 4 \cdot \frac{2 \cdot \sin(5t) - 5 \cdot \sin(2t)}{10(4-25)} + \frac{\sin(5t)}{5} = -\frac{2}{105}\left[2 \cdot \sin(5t) - 5 \cdot \sin(2t)\right] + \frac{1}{5} \cdot \sin(5t) =$$

$$= -\frac{4}{105} \cdot \sin(5t) + \frac{2}{21} \cdot \sin(2t) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5t) = \underbrace{\left(\frac{1}{5} - \frac{4}{105}\right)}_{\frac{21\,-\,4}{105}\,=\,\frac{17}{105}} \cdot \sin(5t) + \frac{2}{21} \cdot \sin(2t) =$$

$$= \frac{17}{105} \cdot \sin(5t) + \frac{2}{21} \cdot \sin(2t), \quad t \ge 0$$

G95

$L\,C\,R$-Stromkreis

Ein Stromkreis enthält die Induktivität $L = 1\,\text{H}$, den ohmschen Widerstand $R = 80\,\Omega$ und eine Kapazität von $C = 400\,\mu\text{F} = 4 \cdot 10^{-4}\,\text{F}$. Er wird durch die Gleichspannung $u = 100\,\text{V}$ gespeist. Bestimmen Sie den *zeitlichen* Verlauf der *Kondensatorladung* $q = q(t)$, die der Dgl

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = u$$

mit den *Anfangswerten* $q(0) = 0$ und $i(t) = \dot{q}(0) = 0$ genügt.

$i = i(t) = \dot{q}(t)$: Stromstärke (zeitliche Ableitung der Ladung)

Die Dgl für die Ladung $q = q(t)$ lautet wie folgt (ohne Einheiten):

$$1 \cdot \ddot{q} + 80\dot{q} + \frac{1}{4 \cdot 10^{-4}} \cdot q = 100 \quad \text{oder} \quad \ddot{q} + 80\dot{q} + 2500q = 100$$

Wir *transformieren* sie in den *Bildbereich* (*Laplace-Transformation*):

$$\left[s^2 \cdot Q(s) - s \cdot \underbrace{q(0)}_{0} - \underbrace{\dot{q}(0)}_{0}\right] + 80\left[s \cdot Q(s) - \underbrace{q(0)}_{0}\right] + 2500\,Q(s) = \mathcal{L}\{100\} = 100 \cdot \underbrace{\mathcal{L}\{1\}}_{\text{Nr. 2}} = \frac{100}{s}$$

Diese algebraische Gleichung lösen wir nach $Q(s) = \mathcal{L}\{q(t)\}$ auf:

$$s^2 \cdot Q(s) + 80s \cdot Q(s) + 2500 \cdot Q(s) = \frac{100}{s} \quad \Rightarrow \quad (s^2 + 80s + 2500) \cdot Q(s) = \frac{100}{s} \quad \Rightarrow$$

$$Q(s) = \frac{100}{s(s^2 + 80s + 2500)}$$

Vor der *Rücksubstitution* zerlegen wir die echt gebrochenrationale Bildfunktion $Q(s)$ in *Partialbrüche*. Da der Faktor $s^2 + 80s + 2500$ auf *konjugiert komplexe* Nennernullstellen führt, erhalten wir für die Partialbruchzerlegung den folgenden Ansatz:

$$\frac{100}{s(s^2 + 80s + 2500)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 80s + 2500}$$

Wir bringen alle Brüche der rechten Seite auf den Hauptnenner $s(s^2 + 80s + 2500)$ und erhalten durch Vergleich beider Seiten die folgende Gleichung:

$$\frac{100}{s(s^2 + 80s + 2500)} = \frac{A(s^2 + 80s + 2500) + (Bs + C)s}{s(s^2 + 80s + 2500)} \quad \Rightarrow$$

$$100 = A(s^2 + 80s + 2500) + (Bs + C)s = As^2 + 80As + 2500A + Bs^2 + Cs =$$

$$= (A + B)s^2 + (80A + C)s + 2500A$$

Wir vertauschen beide Seiten und ergänzen dann auf der rechten Seite die noch fehlenden Glieder $0 \cdot s^2$ und $0 \cdot s$:

$$(A + B)s^2 + (80A + C)s + 2500A = 0 \cdot s^2 + 0 \cdot s + 100$$

Durch *Koeffizientenvergleich* folgt:

(I) $A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -A = -0{,}04$

(II) $80A + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -80A = -80 \cdot 0{,}04 = -3{,}2$

(III) $2500A = 100 \quad \Rightarrow \quad A = 0{,}04$

Wir haben dieses *gestaffelte* lineare Gleichungssystem schrittweise von unten nach oben gelöst. Damit gilt:

$$Q(s) = \frac{100}{s(s^2 + 80s + 2500)} = \frac{0{,}04}{s} + \frac{-0{,}04s - 3{,}2}{s^2 + 80s + 2500} =$$

$$= \frac{0{,}04}{s} - 0{,}04 \cdot \frac{s + 80}{s^2 + 80s + 2500} = 0{,}04 \left(\frac{1}{s} - \frac{s + 80}{s^2 + 80s + 2500} \right)$$

Damit wir bei der *Rücktransformation* die Glieder in der *Transformationstabelle* finden, bringen wir den 2. Bruch in der Klammer auf die folgende Gestalt (quadratische Ergänzung im Nenner, anschließend den Bruch in zwei Teilbrüche aufspalten):

$$\frac{s + 80}{s^2 + 80s + 2500} = \frac{(s + 40) + 40}{\underbrace{(s^2 + 80s + 1600)}_{(s+40)^2} + \underbrace{900}_{30^2}} = \frac{(s + 40) + 40}{(s + 40)^2 + 30^2} =$$

$$= \frac{s + 40}{(s + 40)^2 + 30^2} + \frac{40}{(s + 40)^2 + 30^2}$$

Damit gilt:

$$Q(s) = 0{,}04 \left(\frac{1}{s} - \frac{s + 80}{s^2 + 80s + 2500} \right) = 0{,}04 \left(\frac{1}{s} - \frac{s + 40}{(s + 40)^2 + 30^2} - \frac{40}{(s + 40)^2 + 30^2} \right)$$

Durch *Rücktransformation* erhalten wir die folgende Abhängigkeit der Ladung q von der Zeit t:

$$q(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Q(s)\} = \mathscr{L}^{-1} \left\{ 0{,}04 \left(\frac{1}{s} - \frac{s + 40}{(s + 40)^2 + 30^2} - \frac{40}{(s + 40)^2 + 30^2} \right) \right\} =$$

$$= 0{,}04 \left(\underbrace{\mathscr{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\}}_{\text{Nr. 2}} - \underbrace{\mathscr{L}^{-1} \left\{ \frac{s + 40}{(s + 40)^2 + 30^2} \right\}}_{\text{Nr. 29 mit } a \,=\, 30,\ b \,=\, -40} - 40 \cdot \underbrace{\mathscr{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + 40)^2 + 30^2} \right\}}_{\text{Nr. 28 mit } a \,=\, 30,\ b \,=\, -40} \right) =$$

$$= 0{,}04 \left(1 - \mathrm{e}^{-40t} \cdot \cos(30t) - 40 \cdot \frac{\mathrm{e}^{-40t} \cdot \sin(30t)}{30} \right) =$$

$$= 0{,}04 \left(1 - \mathrm{e}^{-40t} \left[\cos(30t) + \frac{4}{3} \cdot \sin(30t) \right] \right) = 0{,}04 - 0{,}04 \cdot \mathrm{e}^{-40t} \left[\cos(30t) + \frac{4}{3} \cdot \sin(30t) \right]$$

Die Kondensatorladung strebt im Laufe der Zeit gegen den *konstanten* Wert $q_E = 0{,}04$ As:

$$q_E = \lim_{t \to \infty} q(t) = \lim_{t \to \infty} \left\{ 0{,}04 - 0{,}04 \cdot \mathrm{e}^{-40t} \left[\cos(30t) + \frac{4}{3} \cdot \sin(30t) \right] \right\} = 0{,}04$$

Bild G-39 zeigt den zeitlichen Verlauf der Ladung q.

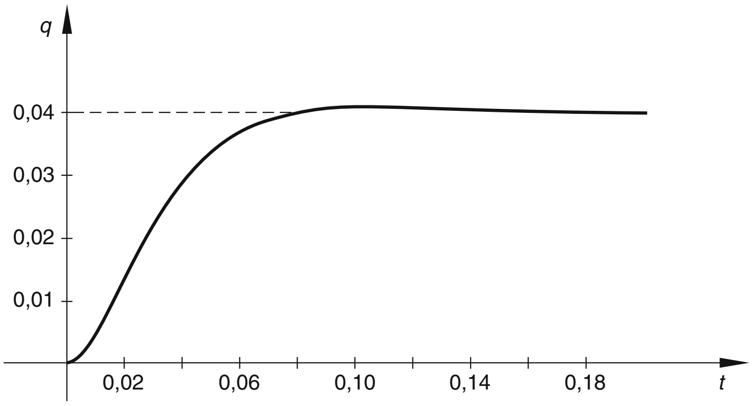


Bild G-39

H Komplexe Zahlen und Funktionen

Hinweise für das gesamte Kapitel

(1) Die Darstellung einer komplexen Zahl z erfolgt entweder in der *kartesischen* Form oder in einer der beiden *Polarformen* (Exponentialform oder trigonometrische Form):

Kartesische Form: $z = x + \mathrm{j}\,y \qquad (\text{mit } x, y \in \mathbb{R})$

Polarformen: $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = r(\cos\varphi + \mathrm{j} \cdot \sin\varphi) \qquad (\text{mit } r \geq 0 \text{ und } 0 \leq \varphi < 2\pi)$

Die Angabe des Winkels (Argumentes) von z erfolgt in der Regel als *Hauptwert* im Intervall $0 \leq \varphi < 2\pi$ (Drehung im mathematisch *positiven* Sinn, d. h. im *Gegenuhrzeigersinn*). In der Technik wird als Winkel häufig der *kleinstmögliche* Drehwinkel angegeben, die Hauptwerte liegen dann im Intervall $-\pi < \varphi \leq \pi$. Die Winkel können auch im *Gradmaß* angegeben werden.

(2) Wir erinnern: $\mathrm{j}^2 = -1, \quad \mathrm{j}^3 = -\mathrm{j}, \quad \mathrm{j}^4 = 1, \quad \frac{1}{\mathrm{j}} = -\mathrm{j}$

(3) Die zu z *konjugiert komplexe* Zahl kennzeichnen wir duch das Symbol z^*.

1 Komplexe Rechnung

1.1 Grundrechenarten

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel VII.1 und 2.1

Formelsammlung: Kapitel VIII.1 und 2

H1 Die nachfolgenden komplexen Zahlen sind in der *Exponentialform* $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ und der *trigonometrischen* Form $z = r(\cos\varphi + \mathrm{j} \cdot \sin\varphi)$ mit $r \geq 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ darzustellen. Wie lauten die zugehörigen *konjugiert* komplexen Zahlen in der Polarform und der kartesischen Darstellungsform?

a) $z = 3 - 11\,\mathrm{j}$ b) $z = -4{,}5 - 1{,}8\,\mathrm{j}$ c) $z = (2 - \mathrm{j})^* - (5 - \mathrm{j})^2$

Grundsätzlich sind *zwei* verschiedene Lösungswege möglich:

1. Die in der Polarform, d. h. in der trigonometrischen bzw. Exponentialform verwendeten Polarkoordinaten r und φ lassen sich rein *geometrisch* aus einer *Lageskizze* mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks bestimmen (siehe hierzu als Musterbeispiel die Lösung der Teilaufgabe a)).
2. Die Polarkoordinaten r und φ können auch mit den aus dem Lehrbuch (Band 1) und der Formelsammlung bekannten „Lösungsformeln“ berechnet werden:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + K$$

L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Klausur- und Übungsaufgaben,*
DOI 10.1007/978-3-8348-9730-5_8,© Vieweg+Teubner Verlag |Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2010

Dabei ist K eine von der *Lage* der komplexen Zahl $z = x + \mathrm{j}y$ in der Gaußschen Zahlenebene abhängige *Konstante*. Bei Beschränkung auf den *Hauptwertbereich* $0 \le \varphi < 2\pi$ (entspricht einer vollen Drehung im Gegenuhrzeigersinn) gilt dann: $K = 0$ im 1. Quadrant, $K = \pi$ im 2. und 3. Quadrant und $K = 2\pi$ im 4. Quadrant.

Bei der Lösung der Aufgaben werden wir im *Regelfall* den *zuletzt* beschriebenen Lösungsweg einschlagen.

a) $z = 3 - 11\,\mathrm{j} = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = r(\cos\varphi + \mathrm{j} \cdot \sin\varphi)$ (4. Quadrant, siehe Bild H-1)

1. Lösungsweg („geometrische Lösung“)

Aus dem *rechtwinkligen* Dreieck (in der Lageskizze *dick* umrandet) berechnen wir die Hypotenuse r und den „Hilfswinkel“ α und daraus dann den gesuchten *Hauptwert* des Winkels φ:

Satz des Pythagoras:

$$r^2 = 3^2 + 11^2 = 9 + 121 = 130 \quad \Rightarrow$$

$$r = \sqrt{130} = 11{,}402$$

Hilfswinkel α:

$$\tan\alpha = \frac{11}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\left(\frac{11}{3}\right) = 74{,}74^\circ$$

Polarwinkel φ:

$$\varphi = 360^\circ - \alpha = 360^\circ - 74{,}74^\circ = 285{,}26^\circ = 4{,}9786 \quad \text{(im Bogenmaß)}$$

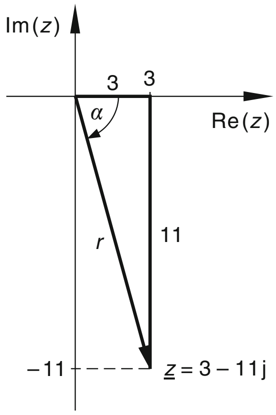


Bild H-1

Ergebnis: $z = 3 - 11\,\mathrm{j} = 11{,}402 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,4{,}9786} =$

$= 11{,}402\,(\cos 4{,}9786 + \mathrm{j} \cdot \sin 4{,}9786)$

Die *konjugiert* komplexe Zahl lautet:

$$z^* = 3 + 11\,\mathrm{j} = 11{,}402 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(-4{,}9786)} = 11{,}402 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(-4{,}9786 + 2\pi)} = 11{,}402 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,1{,}3046} =$$

$$= 11{,}402\,(\cos 1{,}3046 + \mathrm{j} \cdot \sin 1{,}3046)$$

(*Hauptwert* des Winkels: $\varphi = -4{,}9786 + 2\pi = 1{,}3046$)

2. Lösungsweg (Verwendung der „Lösungsformeln“)

Die komplexe Zahl $z = 3 - 11\,\mathrm{j}$ liegt im 4. Quadrant (siehe Bild H-1).

$$r = \sqrt{3^2 + (-11)^2} = \sqrt{9 + 121} = \sqrt{130} = 11{,}402$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-11}{3}\right) + 2\pi = \arctan\left(-\frac{11}{3}\right) + 2\pi = 4{,}9786 = 285{,}26^\circ \quad \text{(im Gradmaß)}$$

$$z = 3 - 11\,\mathrm{j} = 11{,}402 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,4{,}9786} = 11{,}402\,(\cos 4{,}9786 + \mathrm{j} \cdot \sin 4{,}9786)$$

$$z^* = 3 + 11\,\mathrm{j} = 11{,}402 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(-4{,}9786)} = 11{,}402 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(-4{,}9786 + 2\pi)} = 11{,}402 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,1{,}3046} =$$

$$= 11{,}402\,(\cos 1{,}3046 + \mathrm{j} \cdot \sin 1{,}3046)$$

b) $z = -4{,}5 - 1{,}8\,\mathrm{j} = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = r(\cos\varphi + \mathrm{j} \cdot \sin\varphi)$ (3. Quadrant)

$$r = \sqrt{(-4{,}5)^2 + (-1{,}8)^2} = \sqrt{20{,}25 + 3{,}24} = \sqrt{23{,}49} = 4{,}847$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-1{,}8}{-4{,}5}\right) + \pi = \arctan 0{,}4 + \pi = 3{,}5221 = 201{,}80^\circ \quad \text{(im Gradmaß)}$$

$$z = -4{,}5 - 1{,}8\,\mathrm{j} = 4{,}847 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,3{,}5221} = 4{,}847\,(\cos 3{,}5221 + \mathrm{j} \cdot \sin 3{,}5221)$$

Die *konjugiert* komplexe Zahl lautet:

$$z^* = -4{,}5 + 1{,}8\,\mathrm{j} = 4{,}847 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(-3{,}5221)} = 4{,}847 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(-3{,}5221 + 2\pi)} = 4{,}847 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2{,}7611} =$$

$$= 4{,}847\,(\cos 2{,}7611 + \mathrm{j} \cdot \sin 2{,}7611)$$

(*Hauptwert* des Winkels: $\varphi = -3{,}5221 + 2\pi = 2{,}7611$)

c) Wir bringen z zunächst in die *kartesische* Form:

$$z = (2 - \mathrm{j})^* - (5 - \mathrm{j})^2 = (2 + \mathrm{j}) - (25 - 10\,\mathrm{j} + \mathrm{j}^2) = 2 + \mathrm{j} - (25 - 10\,\mathrm{j} - 1) =$$

$$= 2 + \mathrm{j} - (24 - 10\,\mathrm{j}) = 2 + \mathrm{j} - 24 + 10\,\mathrm{j} = -22 + 11\,\mathrm{j} \qquad \text{(2. Quadrant)}$$

Umrechnung in die *Polarform* $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = r\,(\cos\varphi + \mathrm{j} \cdot \sin\varphi)$:

$$r = \sqrt{(-22)^2 + 11^2} = \sqrt{484 + 121} = \sqrt{605} = 24{,}597$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{11}{-22}\right) + \pi = \arctan(-0{,}5) + \pi = 2{,}6779 = 153{,}43^\circ \quad \text{(im Gradmaß)}$$

$$z = -22 + 11\,\mathrm{j} = 24{,}597 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2{,}6779} = 24{,}597\,(\cos 2{,}6779 + \mathrm{j} \cdot \sin 2{,}6779)$$

Konjugiert komplexe Zahl:

$$z^* = -22 - 11\,\mathrm{j} = 24{,}597 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(-2{,}6779)} = 24{,}597 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(-2{,}6779 + 2\pi)} = 24{,}597 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,3{,}6053} =$$

$$= 24{,}597\,(\cos 3{,}6053 + \mathrm{j} \cdot \sin 3{,}6053)$$

(*Hauptwert* des Winkels: $\varphi = -2{,}6779 + 2\pi = 3{,}6053$)

H2

Die nachfolgenden komplexen Zahlen sind in der *kartesischen* Form $z = x + \mathrm{j}\,y$ dazustellen. Wie lautet die jeweilige *konjugiert* komplexe Zahl (in kartesischer Darstellung)?

a) $z = 6 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2{,}5}$ b) $z = 10\,[\cos(-225^\circ) + \mathrm{j} \cdot \sin(-225^\circ)]$

c) $z = 4\,[\cos(-40^\circ) + \mathrm{j} \cdot \sin(-40^\circ)] + 2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,30^\circ} - 3 + 1{,}5\,\mathrm{j}$

Lösungsweg: Schrittweise Umformung nach dem folgenden Schema:

$$\text{Exponentialform} \longrightarrow \text{trigonometrische Form} \xrightarrow{\text{ausmultiplizieren}} \text{kartesische Form}$$

a) $z = 6 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2{,}5} = 6\,(\cos 2{,}5 + \mathrm{j} \cdot \sin 2{,}5) = 6 \cdot \cos 2{,}5 + (6 \cdot \sin 2{,}5)\,\mathrm{j} = -4{,}807 + 3{,}591\,\mathrm{j}$

$z^* = (-4{,}807 + 3{,}591\,\mathrm{j})^* = -4{,}807 - 3{,}591\,\mathrm{j}$

b) $z = 10\,[\cos(-225^\circ) + \mathrm{j} \cdot \sin(-225^\circ)] = 10 \cdot \cos(-225^\circ) + [10 \cdot \sin(-225^\circ)]\,\mathrm{j} = -7{,}071 + 7{,}071\,\mathrm{j}$

$z^* = (-7{,}071 + 7{,}071\,\mathrm{j})^* = -7{,}071 - 7{,}071\,\mathrm{j}$

c) Die ersten beiden Summanden müssen zunächst in die *kartesische* Form gebracht werden, da die *Addition* komplexer Zahlen *nur* in dieser Darstellungsform möglich ist:

$$z = 4\,[\cos(-40^\circ) + \mathrm{j} \cdot \sin(-40^\circ)] + 2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,30^\circ} - 3 + 1{,}5\,\mathrm{j} =$$

$$= 4 \cdot \cos(-40^\circ) + [4 \cdot \sin(-40^\circ)]\,\mathrm{j} + 2\,(\cos 30^\circ + \mathrm{j} \cdot \sin 30^\circ) - 3 + 1{,}5\,\mathrm{j} =$$

$$= 3{,}064 - 2{,}571\,\mathrm{j} + 2 \cdot \cos 30^\circ + (2 \cdot \sin 30^\circ)\,\mathrm{j} - 3 + 1{,}5\,\mathrm{j} =$$

$$= 3{,}064 - 2{,}571\,\mathrm{j} + 1{,}732 + \mathrm{j} - 3 + 1{,}5\,\mathrm{j} = 1{,}796 - 0{,}071\,\mathrm{j}$$

$$z^* = (1{,}796 - 0{,}071\,\mathrm{j})^* = 1{,}796 + 0{,}071\,\mathrm{j}$$

H3

Berechnen Sie mit den komplexen Zahlen

$$z_1 = 2 - \mathrm{j}, \qquad z_2 = 5 + 2\mathrm{j} \qquad \text{und} \qquad z_3 = -3\mathrm{j}$$

die folgenden Terme (Endergebnisse in der *kartesischen* Darstellungsform):

a) $z_3 \cdot (2 z_2^* - 3 z_1) + z_3^* - 3\mathrm{j} \cdot z_1$

b) $\dfrac{z_1^* + 2 z_3 \cdot z_1 - \mathrm{j} \cdot z_2}{2(z_2 - z_3^*) \cdot z_1}$

c) $\dfrac{|z_1| + \sqrt{2}\,|z_2 + z_3^*| + z_1^* \cdot z_2 - 18}{|(z_3 - z_1)^*| - |\mathrm{j} \cdot (z_1 - z_2)|}$

---

a) $$z_3 \cdot (2 z_2^* - 3 z_1) + z_3^* - 3\mathrm{j} \cdot z_1 = -3\mathrm{j}[2(5 + 2\mathrm{j})^* - 3(2 - \mathrm{j})] + (-3\mathrm{j})^* - 3\mathrm{j}(2 - \mathrm{j}) =$$
$$= -3\mathrm{j}[2(5 - 2\mathrm{j}) - 6 + 3\mathrm{j}] + 3\mathrm{j} - 6\mathrm{j} + 3\mathrm{j}^2 =$$
$$= -3\mathrm{j}(10 - 4\mathrm{j} - 6 + 3\mathrm{j}) - 3\mathrm{j} - 3 = -3\mathrm{j}(4 - \mathrm{j}) - 3\mathrm{j} - 3 =$$
$$= -12\mathrm{j} + 3\mathrm{j}^2 - 3\mathrm{j} - 3 = -15\mathrm{j} - 3 - 3 = -6 - 15\mathrm{j}$$

b) Der besseren Übersicht wegen bringen wir zunächst in *getrennter Rechnung* Zähler und Nenner in die kartesische Form.

Zähler: $$z_1^* + 2 z_3 \cdot z_1 - \mathrm{j} \cdot z_2 = (2 - \mathrm{j})^* + 2(-3\mathrm{j})(2 - \mathrm{j}) - \mathrm{j}(5 + 2\mathrm{j}) =$$
$$= 2 + \mathrm{j} - 6\mathrm{j}(2 - \mathrm{j}) - 5\mathrm{j} - 2\mathrm{j}^2 = 2 - 4\mathrm{j} - 12\mathrm{j} + 6\mathrm{j}^2 + 2 =$$
$$= 4 - 16\mathrm{j} - 6 = -2 - 16\mathrm{j} = 2(-1 - 8\mathrm{j})$$

Nenner: $$2(z_2 - z_3^*) \cdot z_1 = 2[5 + 2\mathrm{j} - (-3\mathrm{j})^*](2 - \mathrm{j}) = 2(5 + 2\mathrm{j} - 3\mathrm{j})(2 - \mathrm{j}) = 2(5 - \mathrm{j})(2 - \mathrm{j}) =$$
$$= 2(10 - 5\mathrm{j} - 2\mathrm{j} + \mathrm{j}^2) = 2(10 - 7\mathrm{j} - 1) = 2(9 - 7\mathrm{j})$$

Berechnung des Bruches (dieser wird zunächst mit dem *konjugiert* komplexen Nenner, also der komplexen Zahl $9 + 7\mathrm{j}$ erweitert; Faktor 2 vorher kürzen):

$$\frac{z_1^* + 2 z_3 \cdot z_1 - \mathrm{j} \cdot z_2}{2(z_2 - z_3^*) \cdot z_1} = \frac{2(-1 - 8\mathrm{j})}{2(9 - 7\mathrm{j})} = \frac{-1 - 8\mathrm{j}}{9 - 7\mathrm{j}} = \frac{(-1 - 8\mathrm{j})(9 + 7\mathrm{j})}{\underbrace{(9 - 7\mathrm{j})(9 + 7\mathrm{j})}_{\text{3. Binom}: (a-b)(a+b) = a^2 - b^2}} = \frac{-9 - 7\mathrm{j} - 72\mathrm{j} - 56\mathrm{j}^2}{81 - 49\mathrm{j}^2} =$$
$$= \frac{-9 - 79\mathrm{j} + 56}{81 + 49} = \frac{47 - 79\mathrm{j}}{130} = \frac{47}{130} - \frac{79}{130}\mathrm{j} = 0{,}362 - 0{,}608\mathrm{j}$$

c) Wir bringen zunächst (in getrennter Rechnung) alle Summanden im Zähler und Nenner des Bruches in die *kartesische* Form.

Summanden des Zählers

$$|z_1| = |2 - \mathrm{j}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$\sqrt{2}\,|z_2 + z_3^*| = \sqrt{2}\,|(5 + 2\mathrm{j}) + (-3\mathrm{j})^*| = \sqrt{2}\,|5 + 2\mathrm{j} + 3\mathrm{j}| = \sqrt{2}\,|5 + 5\mathrm{j}| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2} =$$
$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{25 + 25} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 50} = \sqrt{100} = 10$$

$$z_1^* \cdot z_2 = (2 - \mathrm{j})^*(5 + 2\mathrm{j}) = (2 + \mathrm{j})(5 + 2\mathrm{j}) = 10 + 4\mathrm{j} + 5\mathrm{j} + 2\mathrm{j}^2 = 10 + 9\mathrm{j} - 2 = 8 + 9\mathrm{j}$$

Summanden des Nenners

$$|(z_3 - z_1)^*| = |z_3 - z_1| = |-3\mathrm{j} - (2 - \mathrm{j})| = |-3\mathrm{j} - 2 + \mathrm{j}| = |-2 - 2\mathrm{j}| =$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

(unter Berücksichtigung von $|z^*| = |z|$)

$$|\mathrm{j} \cdot (z_1 - z_2)| = |\mathrm{j}| \cdot |z_1 - z_2| = 1\,|(2 - \mathrm{j}) - (5 + 2\mathrm{j})| = |2 - \mathrm{j} - 5 - 2\mathrm{j}| = |-3 - 3\mathrm{j}| =$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Berechnung des Bruches

$$\frac{|z_1| + \sqrt{2}\,|z_2 + z_3^*| + z_1^* \cdot z_2 - 18}{|(z_3 - z_1)^*| - |\mathrm{j} \cdot (z_1 - z_2)|} = \frac{\sqrt{5} + 10 + 8 + 9\mathrm{j} - 18}{2\sqrt{2} - 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} + 9\mathrm{j}}{-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5} + 9\mathrm{j})(-\sqrt{2})}{(-\sqrt{2})(-\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{-\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} - 9\sqrt{2}\mathrm{j}}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{10} - \frac{9}{2}\sqrt{2}\mathrm{j} = -1{,}581 - 6{,}364\mathrm{j}$$

H4

Berechnen Sie mit den komplexen Zahlen

$$z_1 = \frac{2 + \mathrm{j}}{1 - 2\mathrm{j}}, \qquad z_2 = 2 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/3} \qquad \text{und} \qquad z_3 = 4(\cos 30^\circ + \mathrm{j} \cdot \sin 30^\circ)$$

die folgenden Ausdrücke:

a) $z_1 + 5z_2 - \sqrt{3}\,z_3^*$ b) $\dfrac{z_1^* \cdot z_3}{0{,}5\,z_2}$

---

a) Addition und Subtraktion lassen sich bekanntlich *nur* in der *kartesischen* Darstellungsform durchführen. Wir müssen daher die gegebenen Zahlen zunächst in diese Form bringen.

Umformungen: z_1 zunächst mit dem *konjugiert* komplexen Nenner, d. h. der komplexen Zahl $1 + 2\mathrm{j}$ *erweitern*. Die komplexe Zahl z_2 in die trigonometrische Form bringen, dann ausmultiplizieren. Die komplexe Zahl z_3 ausmultiplizieren.

$$z_1 = \frac{2 + \mathrm{j}}{1 - 2\mathrm{j}} = \frac{(2 + \mathrm{j})(1 + 2\mathrm{j})}{\underbrace{(1 - 2\mathrm{j})(1 + 2\mathrm{j})}_{\text{3. Binom: } (a-b)(a+b) = a^2 - b^2}} = \frac{2 + 4\mathrm{j} + \mathrm{j} + 2\mathrm{j}^2}{1 - 4\mathrm{j}^2} = \frac{2 + 5\mathrm{j} - 2}{1 + 4} = \frac{5\mathrm{j}}{5} = \mathrm{j}$$

$$z_2 = 2 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/3} = 2[\cos(-\pi/3) + \mathrm{j} \cdot \sin(-\pi/3)] = 2 \cdot \cos(-\pi/3) + [2 \cdot \sin(-\pi/3)]\mathrm{j} = 1 - \sqrt{3}\mathrm{j}$$

$$z_3 = 4(\cos 30^\circ + \mathrm{j} \cdot \sin 30^\circ) = 4 \cdot \cos 30^\circ + (4 \cdot \sin 30^\circ)\mathrm{j} = 2\sqrt{3} + 2\mathrm{j}$$

Somit erhalten wir:

$$z_1 + 5z_2 - \sqrt{3}\,z_3^* = \mathrm{j} + 5(1 - \sqrt{3}\mathrm{j}) - \sqrt{3}(2\sqrt{3} + 2\mathrm{j})^* = \mathrm{j} + 5 - 5\sqrt{3}\mathrm{j} - \sqrt{3}(2\sqrt{3} - 2\mathrm{j}) =$$

$$= \mathrm{j} + 5 - 5\sqrt{3}\mathrm{j} - 6 + 2\sqrt{3}\mathrm{j} = -1 + \mathrm{j} - 3\sqrt{3}\mathrm{j} = -1 - (3\sqrt{3} - 1)\mathrm{j} =$$

$$= -1 - 4{,}196\mathrm{j}$$

b) Die Berechnung des Bruches soll hier in der für Multiplikation und Division bequemeren *Exponentialform* erfolgen.

Umformungen: Die komplexen Zahlen z_1 und z_3 zunächst in die *Exponentialform* bringen, wobei wir das Ergebnis $z_1 = \mathrm{j}$ aus Teilaufgabe a) berücksichtigen.

$$z_1 = \frac{2 + \mathrm{j}}{1 - 2\mathrm{j}} = \mathrm{j} = 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}, \qquad z_3 = 4(\cos 30^\circ + \mathrm{j} \cdot \sin 30^\circ) = 4 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}30^\circ} = 4 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/6}$$

$$\frac{z_1^* \cdot z_3}{0{,}5\,z_2} = \frac{(1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2})^* \cdot (4 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/6})}{0{,}5\,(2 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/3})} = \frac{4 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/6}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/3}} = 4 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/6} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/3} =$$

$$= 4 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)} = 4 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{-3\pi+\pi+2\pi}{6}} = 4 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}0} = 4 \cdot \mathrm{e}^{0} = 4 \cdot 1 = 4$$

Alternative: Berechnung in *kartesischer* Form, wobei die Zahlen z_2 und z_3 zunächst in dieser Form dargestellt werden müssen. Der Bruch wird dann mit z_2^* *erweitert*, Zähler und Nenner anschließend ausmultipliziert.

H5

Stellen sie die Summe

$$z = z_1 + z_2 + z_3 = 2 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,1{,}25\,\pi} + 0{,}2\,(1 - 3\mathrm{j})^3 + \frac{2 - \mathrm{j}}{3 + 4\mathrm{j}}$$

in der *kartesischen* und *exponentiellen* Form dar.

Wir müssen zunächst die drei Summanden z_1, z_2 und z_3 in die *kartesische* Form bringen, da Additionen *nur* in dieser Form durchführbar sind:

$$z_1 = 2 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,1{,}25\,\pi} = 2\,[\cos(-1{,}25\,\pi) + \mathrm{j} \cdot \sin(-1{,}25\,\pi)] = 2 \cdot \cos(-1{,}25\,\pi) + [2 \cdot \sin(-1{,}25\,\pi)]\,\mathrm{j} =$$

$$= -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{j}$$

$$z_2 = 0{,}2\underbrace{(1 - 3\mathrm{j})^3}_{\text{Binom}:\,(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} = 0{,}2\,(1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot 3\mathrm{j} + 3 \cdot 1\,(3\mathrm{j})^2 - (3\mathrm{j})^3) = 0{,}2\,(1 - 9\mathrm{j} + 27\mathrm{j}^2 - 27\mathrm{j}^3) =$$

$$= 0{,}2\,(1 - 9\mathrm{j} - 27 + 27\mathrm{j}) = 0{,}2\,(-26 + 18\mathrm{j}) = -5{,}2 + 3{,}6\,\mathrm{j}$$

$$z_3 = \frac{2 - \mathrm{j}}{3 + 4\mathrm{j}} = \frac{(2 - \mathrm{j})\,(3 - 4\mathrm{j})}{\underbrace{(3 + 4\mathrm{j})\,(3 - 4\mathrm{j})}_{3.\ \text{Binom}:\,(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2}} = \frac{6 - 8\mathrm{j} - 3\mathrm{j} + 4\mathrm{j}^2}{9 - 16\mathrm{j}^2} = \frac{6 - 11\mathrm{j} - 4}{9 + 16} = \frac{2 - 11\mathrm{j}}{25} = \frac{2}{25} - \frac{11}{25}\,\mathrm{j} =$$

$$= 0{,}08 - 0{,}44\,\mathrm{j}$$

Umformung: Die komplexe Zahl z_3 wurde zunächst mit dem *konjugiert* komplexen Nenner, d. h. der komplexen Zahl $3 - 4\mathrm{j}$ *erweitert*.

Summenwert in kartesischer Form

$$z = z_1 + z_2 + z_3 = (-\sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{j}) + (-5{,}2 + 3{,}6\,\mathrm{j}) + (0{,}08 - 0{,}44\,\mathrm{j}) =$$

$$= (-\sqrt{2} - 5{,}2 + 0{,}08) + (\sqrt{2} + 3{,}6 - 0{,}44)\,\mathrm{j} = -6{,}534 + 4{,}574\,\mathrm{j}$$

Summenwert in der Exponentialform

$$z = -6{,}534 + 4{,}574\,\mathrm{j} = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \qquad \text{(2. Quadrant)}$$

$$r = \sqrt{(-6{,}534)^2 + 4{,}574^2} = \sqrt{63{,}6146} = 7{,}976$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{4{,}574}{-6{,}534}\right) + \pi = \arctan(-0{,}7000) + \pi = 2{,}5308 = 145{,}01^\circ \quad \text{(im Gradmaß)}$$

Ergebnis: $z = -6{,}534 + 4{,}574\,\mathrm{j} = 7{,}976 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2{,}5308}$

1.2 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel VII.2.2 bis 2.4
Formelsammlung: Kapitel VIII.3 bis 5

H6

Berechnen Sie die folgenden Potenzen mit Hilfe der *Formel von Moivre*. Die Ergebnisse sind in der *kartesischen* und *exponentiellen* Darstellungsform anzugeben (Winkel als *Hauptwert* im Intervall $0 \le \varphi < 2\pi$).

a) $(1 - \sqrt{2}\,\mathrm{j})^3$ b) $(2 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/4})^6$ c) $[\sqrt{2}\,(\cos 30^\circ + \mathrm{j} \cdot \sin 30^\circ)]^8$

Die Basiszahlen der Potenzen müssen gegebenenfalls zunächst in die *Exponentialform* gebracht werden (betrifft die Teilaufgaben a) und c), dann nach *Moivre* potenzieren: $z^n = (r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi})^n = r^n \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}$.

a) **Basis:** $z = 1 - \sqrt{2}\,\mathrm{j} = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ (z liegt im 4. Quadrant)

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$$

$$\varphi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{-\sqrt{2}}{1}\right) + 2\pi = \arctan(-\sqrt{2}) + 2\pi = 5{,}3279$$

Somit: $z = 1 - \sqrt{2}\,\mathrm{j} = \sqrt{3} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,5{,}3279}$

Berechnung der Potenz z^3 nach der *Formel von Moivre*:

$$z^3 = (1 - \sqrt{2}\,\mathrm{j})^3 = (\sqrt{3} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,5{,}3279})^3 = (\sqrt{3})^3 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(3 \cdot 5{,}3279)} = 3\sqrt{3} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,15{,}9837} =$$

$$= 3\sqrt{3} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(15{,}9837 - 4\pi)} = 3\sqrt{3} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,3{,}4173} = 3\sqrt{3}\,(\cos 3{,}4173 + \mathrm{j} \cdot \sin 3{,}4173) =$$

$$= 3\sqrt{3} \cdot \cos 3{,}4173 + (3\sqrt{3} \cdot \sin 3{,}4173)\,\mathrm{j} = -5{,}000 - 1{,}415\,\mathrm{j}$$

(der Winkel liegt zunächst *außerhalb* des Hauptwertbereiches und muss um *zwei* volle Umdrehungen zurückgedreht werden ⇒ Hauptwert $= 15{,}9837 - 2 \cdot 2\pi = 15{,}9837 - 4\pi = 3{,}4173$)

Ergebnis: $(1 - \sqrt{2}\,\mathrm{j})^3 = -5{,}000 - 1{,}415\,\mathrm{j} = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,3{,}4173} = 5{,}196 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,3{,}4173}$

b) **Basis:** $z = 2 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/4}$ (z liegt bereits in der Exponentialform vor)

Berechnung der Potenz z^6 nach der *Formel von Moivre*:

$$z^6 = (2 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/4})^6 = 2^6 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,(6 \cdot \pi/4)} = 64 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,6\pi/4} = 64 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,3\pi/2} = 64 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(-3\pi/2 + 2\pi)} =$$

$$= 64 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2} = 64\,[\cos(\pi/2) + \mathrm{j} \cdot \sin(\pi/2)] = 64\,(0 + \mathrm{j} \cdot 1) = 64\,\mathrm{j}$$

(*Hauptwert* des Winkels $= -3\pi/2 + 2\pi = \pi/2$)

Ergebnis: $(2 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/4})^6 = 64\,\mathrm{j} = 64 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}$

c) **Basis:** $z = \sqrt{2}\,(\cos 30^\circ + \mathrm{j} \cdot \sin 30^\circ) = \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,30^\circ}$

Berechnung der Potenz z^8 nach der *Formel von Moivre*:

$$z^8 = (\sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,30^\circ})^8 = (\sqrt{2})^8 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(8 \cdot 30^\circ)} = 16 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,240^\circ} = 16\,(\cos 240^\circ + \mathrm{j} \cdot \sin 240^\circ) =$$
$$= 16 \cdot \cos 240^\circ + (16 \cdot \sin 240^\circ)\,\mathrm{j} = -8 - 13{,}856\,\mathrm{j}$$

Ergebnis: $[\sqrt{2}\,(\cos 30^\circ + \mathrm{j} \cdot \sin 30^\circ]^8 = -8 - 13{,}856\,\mathrm{j} = 16 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,240^\circ}$

H7

Berechnen Sie die Potenz $\left(\frac{3 + \mathrm{j}}{1 - \mathrm{j}}\right)^4$

a) mit Hilfe der *Binomischen Formel*,

b) mit Hilfe der *Formel von Moivre*.

Das Ergebnis soll in der *kartesischen* Form angegeben werden.

---

a) Wir bringen die Basis $z = \frac{3 + \mathrm{j}}{1 - \mathrm{j}}$ zunächst in die *kartesische* Form (Bruch mit dem *konjugiert* komplexen Nenner, d. h. der komplexen Zahl $1 + \mathrm{j}$ *erweitern*):

$$z = \frac{3 + \mathrm{j}}{1 - \mathrm{j}} = \underbrace{\frac{(3 + \mathrm{j})\,(1 + \mathrm{j})}{(1 - \mathrm{j})\,(1 + \mathrm{j})}}_{3.\ \text{Binom}:\ (a - b)\,(a + b) = a^2 - b^2} = \frac{3 + 3\mathrm{j} + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2}{1 - \mathrm{j}^2} = \frac{3 + 4\mathrm{j} - 1}{1 + 1} = \frac{2 + 4\mathrm{j}}{2} = \frac{2}{2} + \frac{4}{2}\,\mathrm{j} = 1 + 2\mathrm{j}$$

Die *Binomische Formel* $(a + b)^4 = a^4 + 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 + 4\,a\,b^3 + b^4$ mit $a = 1$ und $b = 2\mathrm{j}$ liefert das gesuchte Ergebnis:

$$z^4 = \left(\frac{3 + \mathrm{j}}{1 - \mathrm{j}}\right)^4 = (1 + 2\mathrm{j})^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 \cdot 2\mathrm{j} + 6 \cdot 1^2 \cdot (2\mathrm{j})^2 + 4 \cdot 1 \cdot (2\mathrm{j})^3 + (2\mathrm{j})^4 =$$
$$= 1 + 8\mathrm{j} + 24\mathrm{j}^2 + 32\mathrm{j}^3 + 16\mathrm{j}^4 = 1 + 8\mathrm{j} - 24 - 32\mathrm{j} + 16 = -7 - 24\mathrm{j}$$

b) Wir bringen die Basis $z = \frac{3 + \mathrm{j}}{1 - \mathrm{j}} = 1 + 2\mathrm{j}$ in die *Exponentialform*:

$$z = \frac{3 + \mathrm{j}}{1 - \mathrm{j}} = 1 + 2\mathrm{j} = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \qquad (1.\ \text{Quadrant})$$

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$\varphi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{2}{1}\right) = \arctan 2 = 1{,}1071$$

Somit: $z = \frac{3 + \mathrm{j}}{1 - \mathrm{j}} = 1 + 2\mathrm{j} = \sqrt{5} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,1{,}1071}$

Die *Formel von Moivre* liefert dann das gesuchte Ergebnis:

$$z^4 = \left(\frac{3 + \mathrm{j}}{1 - \mathrm{j}}\right)^4 = \left(\sqrt{5} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,1{,}1071}\right)^4 = \left(\sqrt{5}\right)^4 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,(4 \cdot 1{,}1071)} = 25 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,4{,}4284} =$$
$$= 25\,(\cos 4{,}4284 + \mathrm{j} \cdot \sin 4{,}4284) = 25 \cdot \cos 4{,}4284 + (25 \cdot \sin 4{,}4284)\,\mathrm{j} =$$
$$= -7{,}005 - 23{,}999\,\mathrm{j} \approx -7 - 24\,\mathrm{j}$$

Anmerkung: Die geringfügige Abweichung vom Ergebnis aus der (exakten) Rechnung in a) beruht auf Rundungsfehlern.

H8

Einer Formelsammlung entnehmen wir die folgenden trigonometrischen Formeln:

$$\cos(4\varphi) = 8 \cdot \cos^4 \varphi - 8 \cdot \cos^2 \varphi + 1$$

$$\sin(4\varphi) = 4 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \, (2 \cdot \cos^2 \varphi - 1)$$

Leiten Sie diese Beziehungen aus der *Formel von Moivre* und unter Verwendung der *Binomischen Formel* her.

Formel von Moivre: $[r(\cos \varphi + \mathrm{j} \cdot \sin \varphi)]^n = r^n [\cos(n\varphi) + \mathrm{j} \cdot \sin(n\varphi)]$

Wir setzen $r = 1$ und $n = 4$ und erhalten die folgende Gleichung (seitenvertauscht):

$$(*) \quad \cos(4\varphi) + \mathrm{j} \cdot \sin(4\varphi) = (\cos \varphi + \mathrm{j} \cdot \sin \varphi)^4$$

Die *rechte* Seite entwickeln wir nach der *Binomischen Formel* für $(a + b)^4$:

$$(\underbrace{\cos \varphi}_{a} + \underbrace{\mathrm{j} \cdot \sin \varphi}_{b})^4 = (a + b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4 =$$

$$= (\cos \varphi)^4 + 4(\cos \varphi)^3 (\mathrm{j} \cdot \sin \varphi) + 6(\cos \varphi)^2 (\mathrm{j} \cdot \sin \varphi)^2 + 4(\cos \varphi)(\mathrm{j} \cdot \sin \varphi)^3 + (\mathrm{j} \cdot \sin \varphi)^4 =$$

$$= \cos^4 \varphi + \mathrm{j}(4 \cdot \cos^3 \varphi \cdot \sin \varphi) + \mathrm{j}^2 (6 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi) + \mathrm{j}^3 (4 \cdot \cos \varphi \cdot \sin^3 \varphi) + \mathrm{j}^4 (\sin^4 \varphi) =$$

$$= \cos^4 \varphi + \mathrm{j}(4 \cdot \cos^3 \varphi \cdot \sin \varphi) - 6 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi - \mathrm{j}(4 \cdot \cos \varphi \cdot \sin^3 \varphi) + \sin^4 \varphi =$$

$$= (\cos^4 \varphi - 6 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi) + \mathrm{j}(4 \cdot \cos^3 \varphi \cdot \sin \varphi - 4 \cdot \cos \varphi \cdot \sin^3 \varphi)$$

Dieser komplexe Ausdruck ist gleich der komplexen Zahl $\cos(4\varphi) + \mathrm{j} \cdot \sin(4\varphi)$ (*linke* Seite der Gleichung (*)). Durch *Vergleich* der Real- bzw. Imaginiärteile erhalten wir folgende Beziehungen:

$$\cos(4\varphi) = \cos^4 \varphi - 6 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi$$

$$\sin(4\varphi) = 4 \cdot \cos^3 \varphi \cdot \sin \varphi - 4 \cdot \cos \varphi \cdot \sin^3 \varphi$$

Mit Hilfe des „*trigonometrischen Pythagoras*“ $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ lassen sich diese Formeln auf die in der Aufgabenstellung angegebene Form bringen:

$$\cos(4\varphi) = \cos^4 \varphi - 6 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi = \cos^4 \varphi - \underbrace{\sin^2 \varphi}_{1 - \cos^2 \varphi} (6 \cdot \cos^2 \varphi - \underbrace{\sin^2 \varphi}_{1 - \cos^2 \varphi}) =$$

$$= \cos^4 \varphi - (1 - \cos^2 \varphi)(6 \cdot \cos^2 \varphi - 1 + \cos^2 \varphi) = \cos^4 \varphi - (1 - \cos^2 \varphi)(7 \cdot \cos^2 \varphi - 1) =$$

$$= \cos^4 \varphi - (7 \cdot \cos^2 \varphi - 1 - 7 \cdot \cos^4 \varphi + \cos^2 \varphi) = \cos^4 \varphi - (8 \cdot \cos^2 \varphi - 1 - 7 \cdot \cos^4 \varphi) =$$

$$= \cos^4 \varphi - 8 \cdot \cos^2 \varphi + 1 + 7 \cdot \cos^4 \varphi = 8 \cdot \cos^4 \varphi - 8 \cdot \cos^2 \varphi + 1$$

$$\sin(4\varphi) = 4 \cdot \cos^3 \varphi \cdot \sin \varphi - 4 \cdot \cos \varphi \cdot \sin^3 \varphi = 4 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \, (\cos^2 \varphi - \underbrace{\sin^2 \varphi}_{1 - \cos^2 \varphi}) =$$

$$= 4 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \, (\cos^2 \varphi - 1 + \cos^2 \varphi) = 4 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \, (2 \cdot \cos^2 \varphi - 1)$$

H9

Bestimmen Sie die folgenden *Wurzeln* in *exponentieller* und *kartesischer* Darstellungsform. Deuten Sie die Ergebnisse *geometrisch* (Skizze anfertigen).

a) $\sqrt[4]{2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{j}}$ b) $\sqrt[3]{8 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}}$

Zur Erinnerung: Im Komplexen ist eine Wurzel immer *mehrdeutig* (Anzahl der verschiedenen Werte = Wurzelexponent). Der *Radikand* der Wurzel muss zunächst in die *Exponentialform* gebracht werden.

a) **Radikand:** $a = 2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{j} = a_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha + k \cdot 2\pi)}$ (4. Quadrant; $k \in \mathbb{Z}$)

$$a_0 = |a| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\alpha = \arg(a) = \arctan\left(\frac{-2\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi = \arctan(-\sqrt{3}) + 2\pi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5}{3}\pi$$

Somit: $a = 2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{j} = 4 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(5\pi/3 + k \cdot 2\pi)}$

Wir setzen $z = \sqrt[4]{a}$ und erhalten daraus durch *Potenzieren* die Gleichung $z^4 = a$. Mit dem Ansatz $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ und $a = 4 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(5\pi/3 + k \cdot 2\pi)}$ folgt dann unter Verwendung der *Formel von Moivre*:

$$z^4 = a \quad \Rightarrow \quad (r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi})^4 = r^4 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(4\varphi)} = 4 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(5\pi/3 + k \cdot 2\pi)}$$

Durch *Vergleich* der Beträge bzw. Winkel beiderseits erhalten wir zwei Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten r und φ:

$$r^4 = 4 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{2}; \qquad 4\varphi = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi \quad \Rightarrow \quad \varphi_k = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \frac{\pi}{2} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Für den Winkel ergeben sich genau *vier* Hauptwerte (für $k = 0, 1, 2, 3$):

$$\varphi_0 = \frac{5}{12}\pi = 75^\circ, \qquad \varphi_1 = \frac{11}{12}\pi = 165^\circ, \qquad \varphi_2 = \frac{17}{12}\pi = 255^\circ, \qquad \varphi_3 = \frac{23}{12}\pi = 345^\circ$$

Die restlichen k-Werte führen zu Winkeln, die sich von einem der vier Hauptwerte um ein *ganzzahliges Vielfaches* von 2π unterscheiden. Diese sog. *Nebenwerte* liefern *keine* neuen Ergebnisse. So erhalten wir z. B. für $k = 4$ den Winkel

$$\varphi_4 = \frac{5}{12}\pi + 4 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5}{12}\pi + 2\pi = \varphi_0 + 2\pi$$

der sich vom Winkel $\varphi_0 = \frac{5}{12}\pi$ genau um 2π, d. h. um *eine* volle Umdrehung in der Zahlenebene unterscheidet.

Es gibt somit genau *vier* verschiedene Lösungen (Wurzeln). Sie lauten der Reihe nach:

$$z_0 = \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,75^\circ} = \sqrt{2}(\cos 75^\circ + \mathrm{j} \cdot \sin 75^\circ) = 0{,}366 + 1{,}366\,\mathrm{j}$$

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,165^\circ} = \sqrt{2}(\cos 165^\circ + \mathrm{j} \cdot \sin 165^\circ) = -1{,}366 + 0{,}366\,\mathrm{j}$$

$$z_2 = \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,255^\circ} = \sqrt{2}(\cos 255^\circ + \mathrm{j} \cdot \sin 255^\circ) = -0{,}366 - 1{,}366\,\mathrm{j}$$

$$z_3 = \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,345^\circ} = \sqrt{2}(\cos 345^\circ + \mathrm{j} \cdot \sin 345^\circ) = 1{,}366 - 0{,}366\,\mathrm{j}$$

Geometrische Deutung in der Gaußschen Zahlenebene (Bild H-2)

Die Bildpunkte der vier Wurzeln z_0, z_1, z_2, z_3 liegen auf dem *Mittelpunktskreis* mit dem Radius $R = \sqrt{2}$ und bilden die Ecken eines *Quadrates* (der Winkel zwischen zwei benachbarten Bildpunkten beträgt jeweils 90° (rechter Winkel)).

Die Zeiger z_0 und z_2 bzw. z_1 und z_3 sind jeweils *entgegengerichtet*:

$$z_2 = -z_0 = -(0{,}366 + 1{,}366\,\mathrm{j}) = -0{,}366 - 1{,}366\,\mathrm{j}$$

$$z_3 = -z_1 = -(-1{,}366 + 0{,}366\,\mathrm{j}) = 1{,}366 - 0{,}366\,\mathrm{j}$$

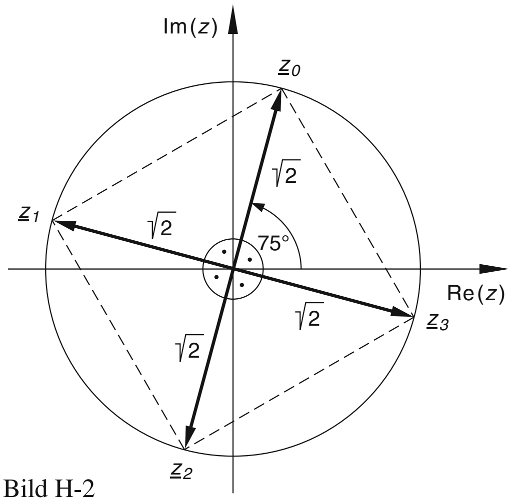


Bild H-2

b) **Radikand:** $a = 8 \cdot e^{j\pi/4} = 8 \cdot e^{j(\pi/4 + k \cdot 2\pi)} \qquad (k \in \mathbb{Z})$

Lösungsweg wie in Teilaufgabe a):

$$z = \sqrt[3]{a} \quad \Rightarrow \quad z^3 = a \qquad \text{mit} \qquad z = r \cdot e^{j\varphi} \qquad \text{und} \qquad a = 8 \cdot e^{j(\pi/4 + k \cdot 2\pi)}$$

$$z^3 = a \quad \Rightarrow \quad (r \cdot e^{j\varphi})^3 = r^3 \cdot e^{j(3\varphi)} = 8 \cdot e^{j(\pi/4 + k \cdot 2\pi)}$$

Vergleich der Beträge bzw. Winkel beiderseits:

$$r^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{8} = 2\,; \qquad 3\varphi = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad \Rightarrow \quad \varphi_k = \frac{\pi}{12} + k \cdot \frac{2}{3}\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Für $k = 0, 1, 3$ erhält man die *Winkelhauptwerte* aus dem Intervall $0 \le \varphi < 2\pi$, alle übrigen k-Werte liefern nur *Nebenwerte* (d. h. Winkel, die sich von einem der drei Hauptwerte um *ganzzahlige* Vielfache von 2π unterscheiden):

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{12} = 15°, \qquad \varphi_1 = \frac{9}{12}\pi = \frac{3}{4}\pi = 135°, \qquad \varphi_2 = \frac{17}{12}\pi = 255°$$

Es gibt somit genau *drei* verschiedene Lösungen (Wurzeln). Sie lauten:

$$z_0 = 2 \cdot e^{j\,15°} = 2\,(\cos 15° + j \cdot \sin 15°) = 1{,}932 + 0{,}518\,j$$

$$z_1 = 2 \cdot e^{j\,135°} = 2\,(\cos 135° + j \cdot \sin 135°) = -1{,}414 + 1{,}414\,j$$

$$z_2 = 2 \cdot e^{j\,255°} = 2\,(\cos 255° + j \cdot \sin 255°) = -0{,}518 - 1{,}932\,j$$

Geometrische Deutung in der Gaußschen Zahlenebene (Bild H-3)

Die Bildpunkte der drei Wurzeln z_0, z_1, z_2 liegen auf dem *Mittelpunktskreis* mit dem Radius $R = 2$ und bilden die Eckpunkte eines *gleichseitigen* Dreiecks (der Winkel zwischen zwei benachbarten Bildpunkten beträgt jeweils 120°).

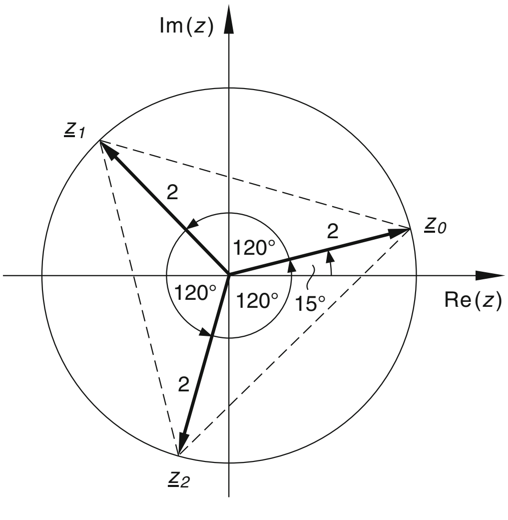


Bild H-3

H10

Berechnen Sie den *natürlichen Logarithmus* der folgenden komplexen Zahlen:

a) $z = -\sqrt{3} + j$ b) $z = 3 \cdot e^{j\pi/5}$ c) $z = (4 - 3j)^6$

Geben Sie den jeweiligen *Hauptwert* an.

Zur Erinnerung: Der Logarithmus einer *komplexen* Zahl ist – im Gegensatz zum Logarithmus einer positiven reellen Zahl – stets *unendlich vieldeutig*. Die Werte unterscheiden sich dabei im *Imaginärteil* um *ganzzahlige* Vielfache von 2π.

Die komplexe Zahl muss zunächst in die *Exponentialform* gebracht werden und wird dann *logarithmiert* unter Verwendung der folgenden (bekannten) Rechenregeln:

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b\,, \qquad \ln a^n = n \cdot \ln a \qquad \text{und} \qquad \ln e^n = n \qquad (\text{mit } a > 0,\ b > 0)$$

a) $z = -\sqrt{3} + \mathrm{j} = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi + k \cdot 2\pi)}$ (2. Quadrant; $k \in \mathbb{Z}$)

$$r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\varphi = \arg(z) = \arctan\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) + \pi = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5}{6}\pi$$

Somit: $z = -\sqrt{3} + \mathrm{j} = 2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(5\pi/6 + k \cdot 2\pi)}$

Logarithmieren unter Verwendung der bekannten Rechenregeln:

$$\ln z = \ln\left(2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(5\pi/6 + k \cdot 2\pi)}\right) = \ln 2 + \ln \mathrm{e}^{\mathrm{j}(5\pi/6 + k \cdot 2\pi)} = \ln 2 + \mathrm{j}\left(\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi\right) =$$

$$= 0{,}6931 + \mathrm{j}\left(\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi\right) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Hauptwert ($k = 0$): $\operatorname{Ln} z = 0{,}6931 + \frac{5}{6}\pi\,\mathrm{j} = 0{,}6931 + 2{,}6180\,\mathrm{j}$

b) $z = 3 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/5} = 3 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/5 + k \cdot 2\pi)}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Logarithmieren unter Verwendung der bekannten Rechenregeln:

$$\ln z = \ln\left(3 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/5 + k \cdot 2\pi)}\right) = \ln 3 + \ln \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/5 + k \cdot 2\pi)} = \ln 3 + \mathrm{j}\left(\frac{\pi}{5} + k \cdot 2\pi\right) =$$

$$= 1{,}0986 + \mathrm{j}\left(\frac{\pi}{5} + k \cdot 2\pi\right) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Hauptwert ($k = 0$): $\operatorname{Ln} z = 1{,}0986 + \frac{\pi}{5}\,\mathrm{j} = 1{,}0986 + 0{,}6283\,\mathrm{j}$

c) $\ln z = \ln(4 - 3\mathrm{j})^6 = 6 \cdot \ln \underbrace{(4 - 3\mathrm{j})}_{a} = 6 \cdot \ln a$

Die komplexe Zahl $a = 4 - 3\mathrm{j}$ wird in die *Exponentialform* gebracht:

$$a = 4 - 3\mathrm{j} = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi + k \cdot 2\pi)} \qquad \text{(4. Quadrant; } k \in \mathbb{Z})$$

$$r = |a| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\varphi = \arg(a) = \arctan\left(\frac{-3}{4}\right) + 2\pi = \arctan(-0{,}75) + 2\pi = 5{,}6397$$

Somit: $a = 4 - 3\mathrm{j} = 5 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(5{,}6397 + k \cdot 2\pi)}$

Logarithmieren unter Verwendung der bekannten Rechenregeln:

$$\ln z = 6 \cdot \ln a = 6 \cdot \ln\left(5 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(5{,}6397 + k \cdot 2\pi)}\right) = 6\left[\ln 5 + \ln \mathrm{e}^{\mathrm{j}(5{,}6397 + k \cdot 2\pi)}\right] =$$

$$= 6\left[\ln 5 + \mathrm{j}(5{,}6397 + k \cdot 2\pi)\right] = 6 \cdot \ln 5 + \mathrm{j} \cdot 6(5{,}6397 + k \cdot 2\pi) =$$

$$= 9{,}6566 + (33{,}8382 + k \cdot 12\pi)\,\mathrm{j} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Hauptwert ($k = 0$): $\operatorname{Ln} z = 9{,}6566 + 33{,}8382\,\mathrm{j}$

1.3 Algebraische Gleichungen, Polynomnullstellen

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel VII.2.3

Formelsammlung: Kapitel VIII.4

H11

Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $z^2 = (-\sqrt{3} + \mathrm{j})^3$ b) $z^3 = 4 - 5\,\mathrm{j}$

Zunächst muss die *rechte* Seite der jeweiligen Gleichung in die *Exponentialform* gebracht werden.

a) $z^2 = a^3$ mit $a = -\sqrt{3} + \mathrm{j} = a_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$ (2. Quadrant)

$$a_0 = |a| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\alpha = \arg(a) = \arctan\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) + \pi = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5}{6}\pi$$

Somit: $a = -\sqrt{3} + \mathrm{j} = 2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}5\pi/6}$

Die Potenz a^3 berechnen wir mit der *Formel von Moivre:*

$$a^3 = (-\sqrt{3} + \mathrm{j})^3 = (2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}5\pi/6})^3 = 2^3 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(3 \cdot 5\pi/6)} = 8 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}5\pi/2} = 8 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(5\pi/2 - 2\pi)} =$$

$$= 8 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2} = 8 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/2 + k \cdot 2\pi)} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(*Hauptwert* des Winkels: $5\pi/2 - 2\pi = \pi/2$; dieser Winkel ist bis auf *ganzzahlige* Vielfache von 2π bestimmt → Nebenwerte).

Mit dem Ansatz $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ geht die Gleichung $z^2 = a^3$ dann über in:

$$(r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi})^2 = r^2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\varphi)} = 8 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi/2 + \mathrm{k} \cdot 2\pi)}$$

Vergleich von Betrag bzw. Winkel beiderseits:

$$r^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$2\varphi = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad \Rightarrow \quad \varphi_k = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Für den Winkel gibt es *zwei* Hauptwerte (für $k = 0, 1$):

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ, \qquad \varphi_1 = \frac{5}{4}\pi = 225^\circ$$

Die restlichen Winkel unterscheiden sich von φ_0 bzw. φ_1 um ganzzahlige Vielfache von 2π (Nebenwerte) und liefern *keine* weiteren Lösungen.

Lösungen der Gleichung:

$$z_0 = 2\sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4} = 2\sqrt{2}\,[\cos(\pi/4) + \mathrm{j} \cdot \sin(\pi/4)] = 2 + 2\mathrm{j}$$

$$z_1 = 2\sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}5\pi/4} = 2\sqrt{2}\,[\cos(5\pi/4) + \mathrm{j} \cdot \sin(5\pi/4)] = -2 - 2\mathrm{j}$$

Anmerkung: $z_1 = -z_0 = -(2 + 2\mathrm{j}) = -2 - 2\mathrm{j}$

b) $z^3 = a$ mit $a = 4 - 5\,\mathrm{j} = a_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$ (4. Quadrant)

$$a_0 = |a| = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$$

$$\alpha = \arg(a) = \arctan\left(\frac{-5}{4}\right) + 2\pi = \arctan(-1{,}25) + 2\pi = 5{,}3871$$

Somit: $a = 4 - 5\,\mathrm{j} = \sqrt{41} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}5{,}3871} = \sqrt{41} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(5{,}3871 + k \cdot 2\pi)} \quad (k \in \mathbb{Z})$

(*Hauptwert* des Winkels α: 5,3871; *Nebenwerte*: $5{,}3871 + k \cdot 2\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$).

Mit dem Ansatz $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ und unter Verwendung der *Formel von Moivre* geht die Gleichung $z^3 = a$ dann über in:

$$(r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi})^3 = r^3 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(3\varphi)} = \sqrt{41} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(5{,}3871 + k \cdot 2\pi)}$$

Vergleich von Betrag bzw. Winkel beiderseits:

$$r^3 = \sqrt{41} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\sqrt{41}} = 1{,}857$$

$$3\varphi = 5{,}3871 + k \cdot 2\pi \quad \Rightarrow \quad \varphi_k = 1{,}7957 + k \cdot \frac{2}{3}\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Hauptwerte des Winkels φ (für $k = 0, 1, 2$):

$$\varphi_0 = 1{,}7957 = 102{,}89^\circ, \qquad \varphi_1 = 3{,}8901 = 222{,}89^\circ, \qquad \varphi_2 = 5{,}9845 = 342{,}89^\circ$$

Die restlichen Winkel sind *Nebenwerte* und führen zu *keinen* weiteren Lösungen.

Lösungen der Gleichung:

$$z_0 = 1{,}857 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}1{,}7957} = 1{,}857\,(\cos 1{,}7957 + \mathrm{j} \cdot \sin 1{,}7957) = -0{,}414 + 1{,}810\,\mathrm{j}$$

$$z_1 = 1{,}857 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}3{,}8901} = 1{,}857\,(\cos 3{,}8901 + \mathrm{j} \cdot \sin 3{,}8901) = -1{,}361 - 1{,}264\,\mathrm{j}$$

$$z_2 = 1{,}857 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}5{,}9845} = 1{,}857\,(\cos 5{,}9845 + \mathrm{j} \cdot \sin 5{,}9845) = 1{,}775 - 0{,}546\,\mathrm{j}$$

H12

Lösen Sie die algebraische Gleichung

$$z^4 + 4z^2 + 16 = 0$$

mit Hilfe einer geeigneten *Substitution*. Wie lassen sich die Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene *geometrisch* deuten?

Diese Gleichung 4. Grades ist *bi-quadratisch* (sie enthält nur *gerade* Potenzen von z) und lässt sich daher durch die *Substitution* $u = z^2$ in eine quadratische Gleichung überführen, die wir nach der p,q-Formel lösen:

$$u^2 + 4u + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 - 16} = -2 \pm \sqrt{-12} = -2 \pm \sqrt{12}\,\mathrm{j}$$

Die insgesamt *vier* Lösungen der Ausgangsgleichung erhalten wir dann wie folgt durch *Rücksubstitution*:

$$\boxed{z^2 = u_1 = -2 + \sqrt{12}\,\mathrm{j}}$$

Die *rechte* Seite wird in die *Exponentialform* gebracht:

$$a = u_1 = -2 + \sqrt{12}\,\mathrm{j} = a_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha + k \cdot 2\pi)} \qquad (2.\ \text{Quadrant};\ k \in \mathbb{Z})$$

$$a_0 = |a| = \sqrt{(-2)^2 + (\sqrt{12})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\alpha = \arg(a) = \arctan\left(\frac{\sqrt{12}}{-2}\right) + \pi = \arctan\left(-\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) + \pi = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi$$

Somit: $a = -2 + \sqrt{12}\,\mathrm{j} = 4 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/3 + k \cdot 2\pi)}$

Wir lösen die Gleichung $z^2 = a$ mit dem Ansatz $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ unter Verwendung der *Formel von Moivre*:

$$z^2 = a \quad \Rightarrow \quad (r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi})^2 = r^2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\varphi)} = 4 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/3 + k \cdot 2\pi)}$$

Vergleich von Betrag und Winkel beiderseits:

$$r^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{4} = 2$$

$$2\varphi = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \quad \Rightarrow \quad \varphi_k = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Hauptwerte des Winkels φ (für $k = 0, 1$):

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{3} = 60°, \qquad \varphi_1 = \frac{4}{3}\pi = 240°$$

Für alle übrigen Werte des Laufindex k erhalten wir Nebenwerte, d. h. Winkel, die sich von φ_0 bzw. φ_1 um *ganzzahlige* Vielfache von 2π unterscheiden und somit zu *keinen* neuen Lösungen führen.

Lösungen der Gleichung $z^2 = -2 + \sqrt{12}\,\mathrm{j}$:

$$z_0 = 2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}60°} = 2(\cos 60° + \mathrm{j} \cdot \sin 60°) = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{j}$$

$$z_1 = 2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}240°} = 2(\cos 240° + \mathrm{j} \cdot \sin 240°) = -1 - \sqrt{3}\,\mathrm{j}$$

$$\boxed{z^2 = u_2 = -2 - \sqrt{12}\,\mathrm{j}}$$

Die Lösungen dieser Gleichung lassen sich auf gleiche Weise bestimmen. Einfacher ist hier der folgende Lösungsweg. Da die bi-quadratische Ausgangsgleichung ausschließlich *reelle* Koeffizienten besitzt, treten *komplexe* Lösungen immer *paarweise* als Paare *konjugiert* komplexer Zahlen auf. Mit den bereits bestimmten Lösungen z_0 und z_1 sind daher auch z_0^* und z_1^* Lösungen der bi-quadratischen Gleichung:

Gesamtlösung: $z_0 = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{j}, \quad z_1 = -1 - \sqrt{3}\,\mathrm{j}, \quad z_2 = z_0^* = 1 - \sqrt{3}\,\mathrm{j}, \quad z_3 = z_1^* = -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{j}$

Geometrische Deutung in der Gaußschen Zahlenebene (Bild H-4)

Die Bildpunkte der vier Lösungen liegen auf dem *Mittelpunktkreis* mit dem Radius $R = 2$ und bilden die Ecken eines *Rechtecks*.

Die Zeiger z_0 und z_1 bzw. z_2 und z_3 sind jeweils *entgegengerichtet*:

$$z_1 = -z_0 = -(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{j}) = -1 - \sqrt{3}\,\mathrm{j}$$

$$z_3 = -z_2 = -(1 - \sqrt{3}\,\mathrm{j}) = -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{j}$$

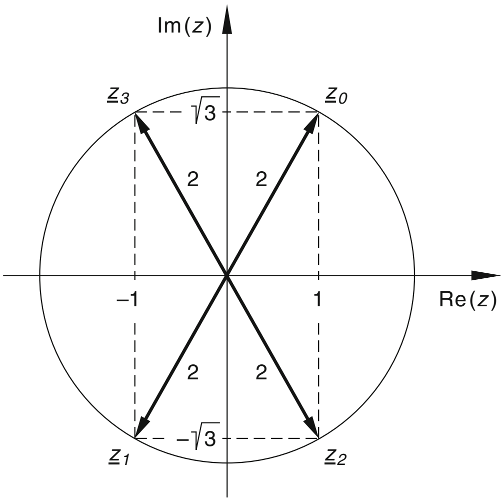


Bild H-4

H13

$f(z) = 2z^3 + 4z^2 + 42z - 116$

Bestimmen Sie sämtliche *Nullstellen* dieser Polynomfunktion. Wie lautet die *Produktdarstellung*?

Das Polynom ist vom Grade $n = 3$ (*ungerade*), sämtliche Koeffizienten sind *reell*. Daher gibt es (mindestens) eine *reelle* Nullstelle. Durch *Probieren* finden wir diese bei $z_1 = 2$. Mit dem *Horner-Schema* reduzieren wir das Polynom (Abspalten des Linearfaktors $z - 2$) und berechnen die noch fehlenden beiden Nullstellen aus dem 1. reduzierten Polynom:

	2	4	42	− 116	
$z_1 = 2$		4	16	116	
	2	8	58	0	⇒ *1. reduziertes Polynom:* $2z^2 + 8z + 58$

Restliche Nullstellen (Nullstellen des 1. reduzierten Polynoms):

$$2z^2 + 8z + 58 = 0 \mid : 2 \quad \Rightarrow \quad z^2 + 4z + 29 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$z_{2/3} = -2 \pm \sqrt{4 - 29} = -2 \pm \sqrt{-25} = -2 \pm \sqrt{25}\,\mathrm{j} = -2 \pm 5\mathrm{j}$$

Nullstellen: $z_1 = 2, \quad z_2 = -2 + 5\mathrm{j}, \quad z_3 = -2 - 5\mathrm{j}$

Produktform: $f(z) = 2(z - 2)[z - (-2 + 5\mathrm{j})][z - (-2 - 5\mathrm{j})] = 2(z - 2)(z + 2 - 5\mathrm{j})(z + 2 + 5\mathrm{j})$

H14

Von der algebraischen Gleichung 4. Grades

$$z^4 - 4z^3 - 2z^2 + 12z - 16 = 0$$

ist *eine* der insgesamt vier Lösungen bekannt: $z_1 = 1 + \mathrm{j}$ (führen Sie den Nachweis). Wo liegen die *übrigen* Lösungen?

Wir zeigen zunächst, dass $z_1 = 1 + \mathrm{j}$ eine Lösung der Gleichung ist (Einsetzen des Wertes in die Gleichung):

$$(1 + \mathrm{j})^4 - 4(1 + \mathrm{j})^3 - 2(1 + \mathrm{j})^2 + 12(1 + \mathrm{j}) - 16 =$$

$$= \underbrace{(1 + \mathrm{j})^2}_{\uparrow} \cdot \underbrace{(1 + \mathrm{j})^2}_{\uparrow} - 4\underbrace{(1 + \mathrm{j})^2}_{\uparrow} \cdot (1 + \mathrm{j}) - 2\underbrace{(1 + \mathrm{j})^2}_{\uparrow} + 12 + 12\mathrm{j} - 16 =$$

$$(1 + \mathrm{j})^2 = 1 + 2\mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 1 + 2\mathrm{j} - 1 = 2\mathrm{j}$$

$$= 2\mathrm{j} \cdot 2\mathrm{j} - 4(2\mathrm{j})(1 + \mathrm{j}) - 2 \cdot 2\mathrm{j} - 4 + 12\mathrm{j} = 4\mathrm{j}^2 - 8\mathrm{j} - 8\mathrm{j}^2 - 4\mathrm{j} - 4 + 12\mathrm{j} = -4 + 8 - 4 = 0$$

Mit $z_1 = 1 + \mathrm{j}$ ist auch die *konjugiert* komplexe Zahl $z_2 = z_1^* = 1 - \mathrm{j}$ eine Lösung der Gleichung, da *sämtliche* Koeffizienten der Gleichung *reell* sind und damit komplexe Lösungen nur *paarweise* auftreten können (als Paare *konjugiert* komplexer Zahlen). Die zu den Lösungen $z_1 = 1 + \mathrm{j}$ und $z_2 = 1 - \mathrm{j}$ gehörigen Linearfaktoren fassen wir zu einem quadratischen Polynom zusammen und spalten dieses dann durch *Polynomdivision* vom Ausgangspolynom (*linke* Seite der algebraischen Gleichung) ab:

$$(z - z_1)(z - z_2) = [z - (1 + \mathrm{j})][z - (1 - \mathrm{j})] = \underbrace{[(z - 1) - \mathrm{j}][(z - 1) + \mathrm{j}]}_{\text{3. Binom}: (a - b)(a + b) = a^2 - b^2} =$$

$$= (z - 1)^2 - \mathrm{j}^2 = z^2 - 2z + 1 + 1 = z^2 - 2z + 2$$

Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
(z^4 - 4z^3 - 2z^2 + 12z - 16) : (z^2 - 2z + 2) = z^2 - 2z - 8 \\
-\ (z^4 - 2z^3 + 2z^2) \\
\hline
\qquad - 2z^3 - 4z^2 + 12z - 16 \\
\quad -\ (-2z^3 + 4z^2 - \ 4z) \\
\hline
\qquad\qquad - 8z^2 + 16z - 16 \\
\qquad\quad -\ (-8z^2 + 16z - 16) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Restliche Lösungen (Nullstellen des Restpolynoms $z^2 - 2z - 8$):

$$z^2 - 2z - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{3/4} = 1 \pm \sqrt{1 + 8} = 1 \pm \sqrt{9} = 1 \pm 3 \quad \Rightarrow \quad z_3 = 4, \qquad z_4 = -2$$

Gesamtlösung: $z_1 = 1 + \mathrm{j}, \quad z_2 = 1 - \mathrm{j}, \quad z_3 = 4, \quad z_4 = -2$

H15 Die Polynomfunktion $f(z) = z^4 + 6z^3 + 10z^2 - 2z - 15$ besitzt an der Stelle $z_1 = -2 - \mathrm{j}$ eine *komplexe Nullstelle*. Wo liegen die *restlichen* Nullstellen? Wie lautet die Zerlegung des Polynoms in *Linearfaktoren*?

Da das Polynom 4. Grades ausschließlich *reelle* Koeffizienten hat, treten *komplexe* Nullstellen immer *paarweise* auf (als Paare *konjugiert* komplexer Zahlen). Mit der bekannten *komplexen* Nullstelle $z_1 = -2 - \mathrm{j}$ ist daher auch $z_2 = z_1^* = -2 + \mathrm{j}$ eine (komplexe) Nullstelle des Polynoms. Die beiden zugehörigen *Linearfaktoren* fassen wir zu einem quadratischen Faktor (Polynom 2. Grades) wie fogt zusammen:

$$(z - z_1)(z - z_2) = [z - (-2 - \mathrm{j})][z - (-2 + \mathrm{j})] = \underbrace{[(z + 2) + \mathrm{j}][(z + 2) - \mathrm{j}]}_{3.\ \text{Binom}:\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2} =$$

$$= (z + 2)^2 - \mathrm{j}^2 = z^2 + 4z + 4 + 1 = z^2 + 4z + 5$$

Diesen quadratischen Faktor spalten wir nun durch *Polynomdivision* vom Ausgangspolynom ab:

$$
\begin{array}{l}
(z^4 + 6z^3 + 10z^2 - \ 2z - 15) : (z^2 + 4z + 5) = z^2 + 2z - 3 \\
-\ (z^4 + 4z^3 + \ 5z^2) \\
\hline
\qquad\quad 2z^3 + \ 5z^2 - \ 2z - 15 \\
\quad -\ (2z^3 + \ 8z^2 + 10z) \\
\hline
\qquad\qquad - \ 3z^2 - 12z - 15 \\
\qquad\quad -\ (- \ 3z^2 - 12z - 15) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Restliche Nullstellen (Nullstellen des Restpolynoms $z^2 + 2z - 3$) :

$$z^2 + 2z - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{3/4} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm \sqrt{4} = -1 \pm 2 \quad \Rightarrow \quad z_3 = 1, \qquad z_4 = -3$$

Polynomnullstellen: $z_1 = -2 - \text{j}, \quad z_2 = -2 + \text{j}, \quad z_3 = 1, \quad z_4 = -3$

Zerlegung des Polynoms in **Linearfaktoren (Produktform)**:

$$f(z) = [z - (-2 - \text{j})][z - (-2 + \text{j})](z - 1)(z + 3) = (z - 1)(z + 3)(z + 2 + \text{j})(z + 2 - \text{j})$$

H16

$f(z) = z^5 - 3z^4 + 7z^3 - 11z^2 + 12z - 6$

Diese Polynomfunktion 5. Grades besitzt im komplexen Bereich genau fünf Nullstellen, eine davon liegt bei $z_1 = 1 - \text{j}$, eine weitere im *Rellen* (sie ist positiv und ganzzahlig). Bestimmen Sie die noch *fehlenden Nullstellen*. Wie lautet die *Produktform* der Polynomfunktion?

Da sämtliche Polynomkoeffizienten *reell* sind, treten *komplexe* Nullstellen immer als *Paare* konjugiert komplexer Zahlen auf. Mit der bekannten *komplexen* Nullstelle $z_1 = 1 - \text{j}$ ist daher auch $z_2 = z_1^* = 1 + \text{j}$ eine (komplexe) Polynomnullstelle. Durch *Probieren* findet man die *reelle* Nullstelle bei $z_3 = 1$ (Kriterium: die Summe aller Polynomkoeffizienten *verschwindet*). Die Linearfaktoren der inzwischen bekannten drei Nullstellen fassen wir jetzt zu einem Polynom 3. Grades zusammen und spalten dieses anschließend durch *Polynomdivision* vom Ausgangspolynom ab:

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = [z - (1 - \text{j})][z - (1 + \text{j})](z - 1) = \underbrace{[(z-1) + \text{j}][(z-1) - \text{j}]}_{\text{3. Binom}: \, (a+b)(a-b) = a^2 - b^2}(z - 1) =$$

$$= [(z-1)^2 - \text{j}^2](z - 1) = (z^2 - 2z + 1 + 1)(z - 1) =$$

$$= (z^2 - 2z + 2)(z - 1) = z^3 - z^2 - 2z^2 + 2z + 2z - 2 =$$

$$= z^3 - 3z^2 + 4z - 2$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{l}
(z^5 - 3z^4 + 7z^3 - 11z^2 + 12z - 6) : (z^3 - 3z^2 + 4z - 2) = z^2 + 3 \\
-\,(z^5 - 3z^4 + 4z^3 - \ \ 2z^2) \\
\hline
\qquad\qquad\quad 3z^3 - \ \ 9z^2 + 12z - 6 \\
\qquad\qquad -\,(3z^3 - \ \ 9z^2 + 12z - 6) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Restliche Nullstellen (Nullstellen des Restpolynoms $z^2 + 3$):

$$z^2 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 = -3 \quad \Rightarrow \quad z_{4/5} = \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}\,\text{j}$$

Polynomnullstellen: $z_1 = 1 - \text{j}, \quad z_2 = 1 + \text{j}, \quad z_3 = 1, \quad z_4 = \sqrt{3}\,\text{j}, \quad z_5 = -\sqrt{3}\,\text{j}$

Produktform: $f(z) = [z - (1 - \text{j})][z - (1 + \text{j})](z - 1)(z - \sqrt{3}\,\text{j})(z + \sqrt{3}\,\text{j}) =$

$$= (z - 1)(z - \sqrt{3}\,\text{j})(z + \sqrt{3}\,\text{j})(z - 1 + \text{j})(z - 1 - \text{j})$$

2 Anwendungen

In diesem Abschnitt finden Sie anwendungsorientierte Aufgaben zu den folgenden Themen:

- Superposition (ungestörte Überlagerung) gleichfrequenter Schwingungen (mechanische Schwingungen, Wechselströme)
- Lissajous-Figuren
- Komplexer Widerstand und Leitwert eines elektrischen Schaltkreises
- Wirk-, Blind- und Scheinwiderstand
- Ortskurven komplexwertiger Funktionen
- Inversion von Ortskurven
- Netzwerkfunktionen, Widerstands- und Leitwertortskurven elektrischer Schaltkreise

2.1 Überlagerung von Schwingungen

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel VII.3.1

Formelsammlung: Kapitel VIII.8

H17

Superposition gleichfrequenter mechanischer Schwingungen

Die gleichfrequenten mechanischen Schwingungen mit den Gleichungen

$$y_1 = 4\,\text{cm} \cdot \cos(\omega t - \pi/4) \quad \text{und} \quad y_2 = 3\,\text{cm} \cdot \sin(\omega t - \pi/6)$$

kommen ungestört zur Überlagerung und ergeben eine *resultierende Sinusschwingung*

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

mit $A > 0$ und $0 \le \pi < 2\varphi$ ($t \ge 0\,\text{s}$; Kreisfrequenz $\omega = 5\,\text{s}^{-1}$). Bestimmen Sie die *Schwingungsamplitude* A und den *Nullphasenwinkel* φ mit komplexer Rechnung.

Zunächst bringen wir die Kosinusschwingung y_1 auf die *Sinusform*:

$$y_1 = 4\,\text{cm} \cdot \cos(\omega t - \pi/4) = 4\,\text{cm} \cdot \sin(\omega t - \pi/4 + \pi/2) = 4\,\text{cm} \cdot \sin(\omega t + \pi/4)$$

Darstellung der beiden sinusförmigen Einzelschwingungen in *komplexer* Form:

$$y_1 = 4\,\text{cm} \cdot \sin(\omega t + \pi/4) \quad \longrightarrow \quad \underline{y}_1 = 4\,\text{cm} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \underline{A}_1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

$$y_2 = 3\,\text{cm} \cdot \sin(\omega t - \pi/6) \quad \longrightarrow \quad \underline{y}_2 = 3\,\text{cm} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/6} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \underline{A}_2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

Darstellung der resultierenden Sinusschwingung in *komplexer* Form:

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad \longrightarrow$$

$$\underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2 = \underline{A}_1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \underline{A}_2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = (\underline{A}_1 + \underline{A}_2) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \underline{A} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

Die *komplexen* Amplituden $\underline{A}_1 = 4\,\text{cm} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}$ und $\underline{A}_2 = 3\,\text{cm} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/6}$ der Einzelschwingungen addieren sich zur *komplexen* Amplitude $\underline{A}$ der *resultierenden* Schwingung (Bild H-5):

$$\underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = 4\,\text{cm} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4} + 3\,\text{cm} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/6} =$$

$$= 4\,\text{cm}\,[\cos(\pi/4) + \mathrm{j} \cdot \sin(\pi/4)] + 3\,\text{cm}\,[\cos(-\pi/6) + \mathrm{j} \cdot \sin(-\pi/6)] =$$

$$= 2{,}828\,\text{cm} + \mathrm{j} \cdot 2{,}828\,\text{cm} + 2{,}598\,\text{cm} - \mathrm{j} \cdot 1{,}5\,\text{cm} = (5{,}426 + 1{,}328\,\mathrm{j})\,\text{cm}$$

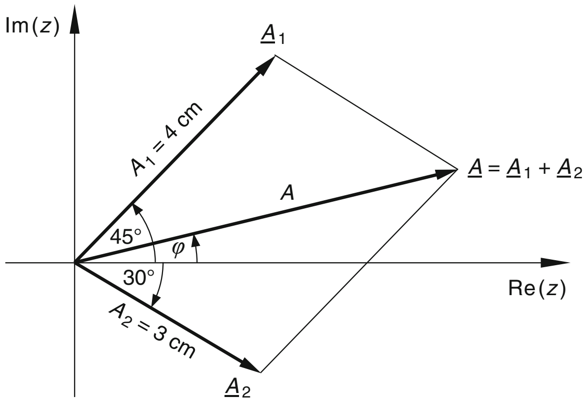


Bild H-5 Komplexe Addition der Einzelamplituden nach der Parallelogrammregel

Die (reelle) Amplitude A der resultierenden Sinusschwingung ist der *Betrag* von $\underline{A}$, der Nullphasenwinkel φ der *Winkel* von $\underline{A}$. Aus dem Zeigerdiagramm erhalten wir dann (Bild H-6):

Satz des Pythagoras:

$$A = |\underline{A}| = \sqrt{5{,}426^2 + 1{,}328^2}\,\text{cm} = 5{,}586\,\text{cm}$$

$$\tan\varphi = \frac{1{,}328\,\text{cm}}{5{,}426\,\text{cm}} = 0{,}2447 \quad \Rightarrow$$

$$\varphi = \arctan 0{,}2447 = 0{,}2400 = 13{,}75\,^\circ \quad \text{(im Gradmaß)}$$

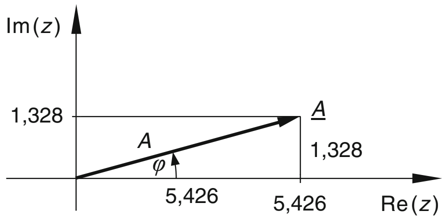


Bild H-6

Komplexe Schwingungsamplitude $\underline{A}$ in der *Exponentialform*:

$$\underline{A} = (5{,}426 + 1{,}328\,\text{j})\,\text{cm} = A \cdot \text{e}^{\text{j}\varphi} = 5{,}586\,\text{cm} \cdot \text{e}^{\text{j}\,0{,}2400}$$

Resultierende Schwingung in komplexer Darstellung

$$\underline{y} = \underline{A} \cdot \text{e}^{\text{j}\omega t} = 5{,}586\,\text{cm} \cdot \text{e}^{\text{j}\,0{,}2400} \cdot \text{e}^{\text{j}\,5\,\text{s}^{-1} \cdot t} = 5{,}586\,\text{cm} \cdot \text{e}^{\text{j}\,(5\,\text{s}^{-1} \cdot t + 0{,}2400)} =$$

$$= 5{,}586\,\text{cm}\,[\cos(5\,\text{s}^{-1} \cdot t + 0{,}2400) + \text{j} \cdot \sin(5\,\text{s}^{-1} \cdot t + 0{,}2400)]$$

Resultierende Schwingung in der (reellen) Sinusform (Imaginärteil von $\underline{y}$)

$$y = y_1 + y_2 = \text{Im}(\underline{y}) = 5{,}586\,\text{cm} \cdot \sin(5\,\text{s}^{-1} \cdot t + 0{,}2400)$$

H18

Überlagerung gleichfrequenter Wechselströme

Zeigen Sie: Drei *gleichfrequente* sinusförmige Wechselströme mit den Scheitelwerten i_0 und den Nullphasenwinkeln $\varphi_1 = 0\,^\circ$, $\varphi_2 = 120\,^\circ$ und $\varphi_3 = 240\,^\circ$ löschen sich bei ungestörter Überlagerung gegenseitig aus (Kreisfrequenz: $\omega > 0$).

a) Rechnerische Lösung in *komplexer* Form.

b) Zeichnerische Lösung im *Zeigerdiagramm.*

---

a) Wir stellen die sinusförmigen Wechselströme in der *komplexen* Form dar (Nullphasenwinkel im Bogenmaß):

$$i_1 = i_0 \cdot \sin(\omega t) \quad \longrightarrow \quad \underline{i}_1 = i_0 \cdot \text{e}^{\text{j}\omega t}$$

$$i_2 = i_0 \cdot \sin(\omega t + 2\pi/3) \quad \longrightarrow \quad \underline{i}_2 = i_0 \cdot \text{e}^{\text{j}2\pi/3} \cdot \text{e}^{\text{j}\omega t}$$

$$i_3 = i_0 \cdot \sin(\omega t + 4\pi/3) \quad \longrightarrow \quad \underline{i}_3 = i_0 \cdot \text{e}^{\text{j}4\pi/3} \cdot \text{e}^{\text{j}\omega t}$$

Sie haben der Reihe nach die folgenden *komplexen* Scheitelwerte:

$$\hat{i}_1 = i_0 , \qquad \hat{i}_2 = i_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi/3} , \qquad \hat{i}_3 = i_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,4\pi/3}$$

Ihre *Summe* ist der *komplexe* Scheitelwert $\hat{i}$ des *resultierenden* Wechselstroms $\underline{i} = \hat{i} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$:

$$\hat{i} = \hat{i}_1 + \hat{i}_2 + \hat{i}_3 = i_0 + i_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi/3} + i_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,4\pi/3} = i_0 \left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi/3} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,4\pi/3}\right)$$

Der in der Klammer stehende Ausdruck *verschwindet* (wir „entwickeln“ den 2. und 3. Summand jeweils mit Hilfe der *Formel von Euler*: $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{j} \cdot \sin\varphi$):

$$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,2\pi/3} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,4\pi/3} = 1 + \cos(2\pi/3) + \mathrm{j} \cdot \sin(2\pi/3) + \cos(4\pi/3) + \mathrm{j} \cdot \sin(4\pi/3) =$$

$$= 1 - 0{,}5 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j} - 0{,}5 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{j} = 0 + 0\,\mathrm{j} = 0$$

Somit ist auch $\hat{i} = 0$ und $\underline{i} = 0$. Die drei gleichfrequenten Wechselströme löschen sich – wie behauptet – aus.

b) Die Stromzeiger $\underline{i}_2$ und $\underline{i}_3$ liegen im Zeigerdiagramm *spiegelsymmetrisch* zur reellen Achse (*konjugiert* komplexe Größen: $\underline{i}_3 = \underline{i}_2^*$; siehe auch Bild H-7, linkes Teilbild). Wir fassen sie nach der *Parallelogrammregel* zu einem *resultierenden* Zeiger $\underline{i}_{2,3}$ zusammen. Dieser Zeiger fällt in die *negativ-reelle* Achse, er hat die *gleiche* Länge i_0 wie die Zeiger der drei Einzelströme und ist somit dem Stromzeiger $\underline{i}_1$ *entgegen gerichtet*:

$$\underline{i}_{2,3} = \underline{i}_2 + \underline{i}_3 = -\underline{i}_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{i}_1 + \underline{i}_2 + \underline{i}_3 = 0$$

Dies aber bedeutet: Die drei Wechselströme löschen sich aus.

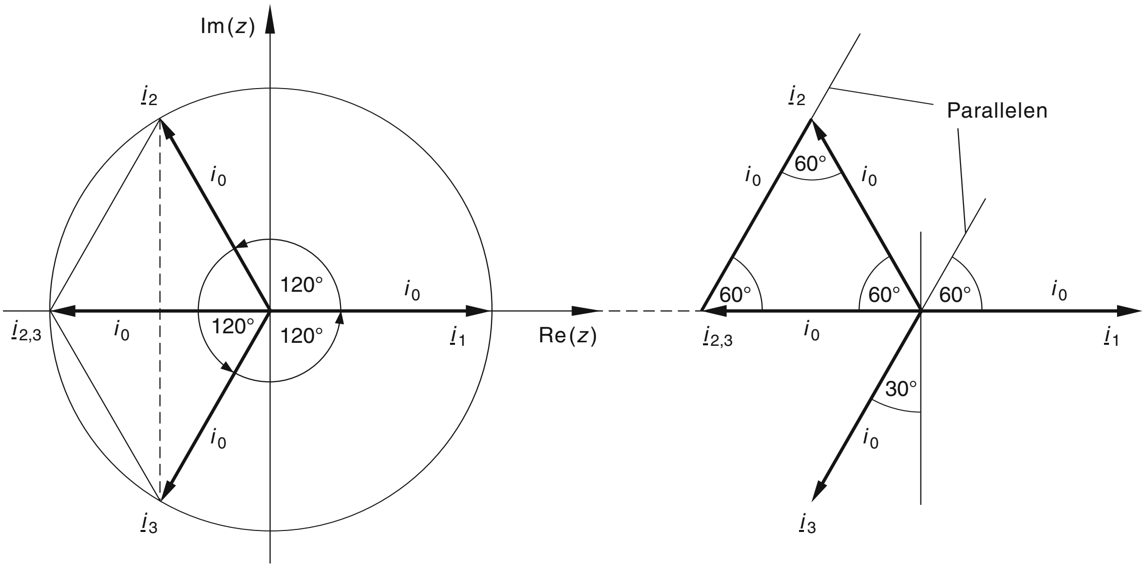


Bild H-7 Ungestörte Überlagerung gleichfrequenter Wechselströme

Warum hat der Zeiger $\underline{i}_{2,3}$ die gleiche Länge i_0 wie die Zeiger $\underline{i}_1$, $\underline{i}_2$ und $\underline{i}_3$? Das Parallelogramm aus den Zeigern $\underline{i}_2$ und $\underline{i}_3$ ist ein *Rhombus* (eine *Raute*), alle vier Seiten haben die *gleiche* Länge i_0. Die reelle Achse zerlegt den Rhombus in zwei kongruente Dreiecke. Wir betrachten das obere Dreieck etwas genauer (Bild H-7, rechtes Teilbild) und bestimmen die Innenwinkel des Dreiecks aus den bekannten Eigenschaften. Ergebnis: Die drei Innenwinkel betragen jeweils 60°, das Dreieck ist daher *gleichseitig*. Somit hat der resultierende Zeiger $\underline{i}_{2,3}$ die *gleiche* Länge wie die Zeiger $\underline{i}_2$ und $\underline{i}_3$:

$$|\underline{i}_{2,3}| = |\underline{i}_2| = |\underline{i}_3| = i_0$$

H19

Periodische Bahnkurve eines Massenpunktes (Lissajous-Figur)

Ein Massenpunkt bewege sich in der *x,y*-Ebene auf einer periodischen (geschlossenen) Bahn mit den *Parametergleichungen*

$$x = x(t) = \cos t \quad \text{und} \quad y = y(t) = \sin(2t)$$

(x, y: zeitabhängige Lagekoordinaten; $t \geq 0$: Zeitparameter).

Beschreiben Sie diese Bahn durch eine *komplexwertige* Funktion der reellen Variablen t (Zeitparameter). Wie lautet die Gleichung der Bahnkurve (Ortskurve) in *kartesischen* Koordinaten? *Skizzieren* Sie die Kurve unter Verwendung einer Wertetabelle.

Hinweis: Die Bahnkurve entsteht durch ungestörte Überlagerung zweier *aufeinander senkrecht* stehender harmonischer Schwingungen, deren (Kreis-)Frequenzen im rationalen Verhältnis 1 : 2 stehen (sog. *Lissajous-Figur*).

Wir deuten die periodischen Bewegungen (harmonischen Schwingungen) in *x*- und *y*-Richtung als *Real*- und *Imaginärteil* der *komplexwertigen* Funktion

$$z(t) = x(t) + \mathrm{j} \cdot y(t) = \cos t + \mathrm{j} \cdot \sin(2t) \qquad (\text{mit } t \geq 0)$$

Die geschlossene Bahnkurve (Ortskurve) wird dabei bereits im Periodenintervall $0 \leq t \leq 2\pi$ durchlaufen. Sie lässt sich auch wie folgt in *kartesischen* Koordinaten ausdrücken:

$$y = \sin(2t) = 2 \cdot \cos t \cdot \sin t \quad | \text{ quadrieren}$$

$$y^2 = 4 \cdot \cos^2 t \cdot \underbrace{\sin^2 t}_{1 - \cos^2 \mathrm{t}} = 4 \cdot \underbrace{\cos^2 t}_{x^2}(1 - \underbrace{\cos^2 t}_{x^2}) = 4x^2(1 - x^2) \qquad (-1 \leq x \leq 1)$$

Umformung: Trigonometrische Formeln $\sin(2t) = 2 \cdot \sin t \cdot \cos t$ und $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ verwenden; $x = \cos t$ (1. Parametergleichung).

Wegen der ausschließlich *geraden* Potenzen von x und y ist die Bahnkurve (Ortskurve) sowohl zur *x*- als auch zur *y*-Achse (d. h. zur reellen und imaginären Achse) *spiegelsymmetrisch*. Bei der Erstellung der Wertetabelle können wir uns daher auf den *1. Quadranten* beschränken. Die Funktionsgleichung lautet dort:

$$y = \sqrt{4x^2(1 - x^2)} = 2x \cdot \sqrt{1 - x^2}, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

Wir wählen die Schrittweise $\Delta x = 0{,}1$. Bild H-8 zeigt den Verlauf der geschlossenen Bahnkurve.

Wertetabelle

x	y
0	0
0,1	0,20
0,2	0,39
0,3	0,57
0,4	0,73
0,5	0,87
0,6	0,96
0,7	1,00
0,8	0,96
0,9	0,78
1	0

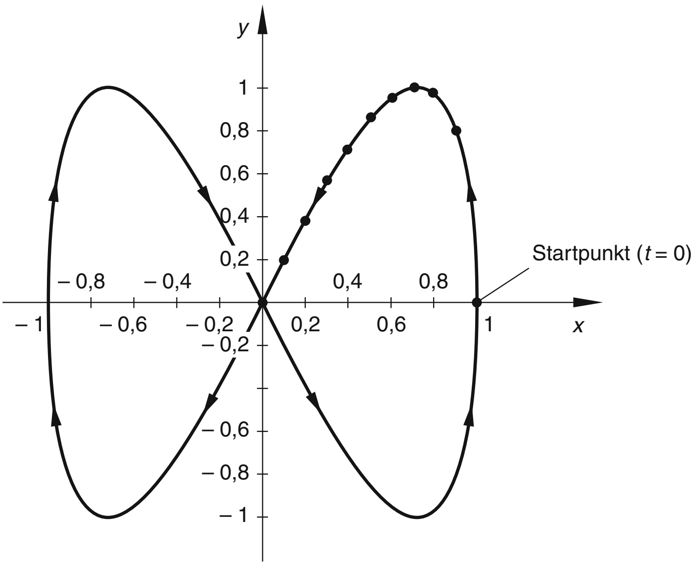


Bild H-8

2.2 Komplexe Widerstände und Leitwerte

Hinweis

Lehrbuch: Band 1, Kapitel VII.3.2

H20

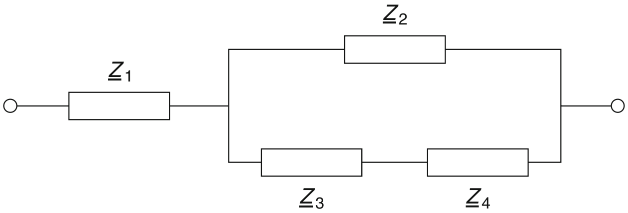


Bild H-9

$\underline{Z}_1 = (20 + 10\,\mathrm{j})\ \Omega$

$\underline{Z}_2 = (10 + 0\,\mathrm{j})\ \Omega = 10\ \Omega$

$\underline{Z}_3 = (5 - 10\,\mathrm{j})\ \Omega$

$\underline{Z}_4 = (15 + 20\,\mathrm{j})\ \Omega$

a) Bestimmen Sie zunächst formelmäßig den *komplexen Gesamtwiderstand* $\underline{Z}$ der in Bild H-9 dargestellten Schaltung mit den vier komplexen Einzelwiderständen $\underline{Z}_1$ bis $\underline{Z}_4$.

b) Berechnen Sie dann mit den vorgegebenen Werten der Einzelwiderstände den *komplexen Gesamtwiderstand* sowie den *Wirk-*, *Blind-* und *Scheinwiderstand* der Schaltung.

c) Wie groß ist der *komplexe Leitwert* $\underline{Y}$ des Schaltkreises?

---

a) Wir fassen die komplexen Einzelwiderstände Schritt für Schritt zum *komplexen Gesamtwiderstand* $\underline{Z}$ zusammen (Bild H10).

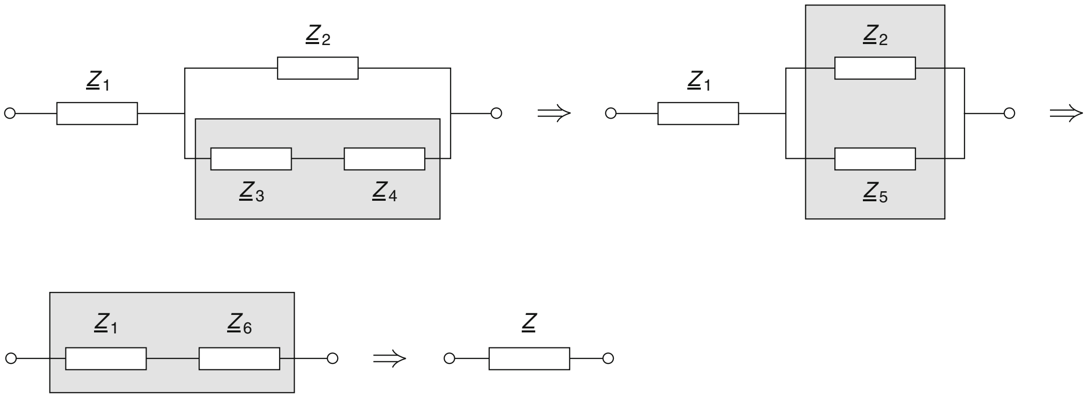


Bild H-10 Schrittweise Zusammenfassung der vier Einzelwiderstände zum Gesamtwiderstand $\underline{Z}$

1. Schritt: Die Widerstände $\underline{Z}_3$ und $\underline{Z}_4$ sind in *Reihe* geschaltet, sie *addieren* sich daher zum *Ersatzwiderstand* $\underline{Z}_5 = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4$.

2. Schritt: Die Widerstände $\underline{Z}_2$ und $\underline{Z}_5$ sind *parallel* geschaltet, es *addieren* sich daher ihre *Leitwerte* (Kehrwerte der Widerstände) zum Leitwert des Ersatzwiderstandes $\underline{Z}_6$:

$$\frac{1}{\underline{Z}_6} = \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_5} = \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}{\underline{Z}_2\,(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)} \qquad (\text{Hauptnenner: } \underline{Z}_2\,(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4))$$

Durch Kehrwertbildung folgt: $\underline{Z}_6 = \dfrac{\underline{Z}_2\,(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}$

3. Schritt: Die Widerstände $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_6$ sind in *Reihe* geschaltet und *addieren* sich zum gesuchten (komplexen) *Gesamtwiderstand* $\underline{Z}$ des Schaltkreises:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_6 = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2\,(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}$$

b) Einsetzen der vorgegebenen Werte (Zwischenrechnung ohne Einheiten):

$$\underline{Z} = 20 + 10\,\mathrm{j} + \frac{10\,(5 - 10\,\mathrm{j} + 15 + 20\,\mathrm{j})}{10 + 5 - 10\,\mathrm{j} + 15 + 20\,\mathrm{j}} = 20 + 10\,\mathrm{j} + \frac{10\,(20 + 10\,\mathrm{j})}{30 + 10\,\mathrm{j}} =$$

$$= 20 + 10\,\mathrm{j} + \frac{10\,(20 + 10\,\mathrm{j})}{10\,(3 + \mathrm{j})} = 20 + 10\,\mathrm{j} + \frac{20 + 10\,\mathrm{j}}{3 + \mathrm{j}} = 20 + 10\,\mathrm{j} + \frac{(20 + 10\,\mathrm{j})\,(3 - \mathrm{j})}{\underbrace{(3 + \mathrm{j})\,(3 - \mathrm{j})}_{\text{3. Binom}:\ (a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2}} =$$

$$= 20 + 10\,\mathrm{j} + \frac{60 - 20\,\mathrm{j} + 30\,\mathrm{j} - 10\,\mathrm{j}^2}{9 - \mathrm{j}^2} = 20 + 10\,\mathrm{j} + \frac{60 + 10\,\mathrm{j} + 10}{9 + 1} = 20 + 10\,\mathrm{j} + \frac{70 + 10\,\mathrm{j}}{10} =$$

$$= 20 + 10\,\mathrm{j} + \frac{70}{10} + \frac{10}{10}\,\mathrm{j} = 20 + 10\,\mathrm{j} + 7 + \mathrm{j} = 27 + 11\,\mathrm{j} \qquad (\text{in } \Omega)$$

Komplexer Gesamtwiderstand in *kartesischer* Darstellung: $\underline{Z} = (27 + 11\,\mathrm{j})\ \Omega$

Komplexer Gesamtwiderstand in *exponentieller* Darstellung: $\underline{Z} = (27 + 11\,\mathrm{j})\ \Omega = Z \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ (1. Quadrant)

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{27^2 + 11^2}\ \Omega = \sqrt{729 + 121}\ \Omega = \sqrt{850}\ \Omega = 29{,}155\ \Omega$$

$$\varphi = \arg(\underline{Z}) = \arctan\left(\frac{11\ \Omega}{27\ \Omega}\right) = \arctan 0{,}4074 = 0{,}3869 = 22{,}17^\circ \qquad (\text{im Gradmaß})$$

Somit: $\underline{Z} = (27 + 11\,\mathrm{j})\ \Omega = 29{,}155\ \Omega \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,0{,}3869}$

Der *Widerstand* R ist der *Realteil*, der *Blindwiderstand* X der *Imaginärteil*, der *Scheinwiderstand* Z der *Betrag* des komplexen Gesamtwiderstandes $\underline{Z}$:

Wirkwiderstand: $R = \mathrm{Re}\,(\underline{Z}) = 27\ \Omega$

Blindwiderstand: $X = \mathrm{Im}\,(\underline{Z}) = 11\ \Omega$

Scheinwiderstand: $Z = |\underline{Z}| = 29{,}155\ \Omega$

c) Der *komplexe Leitwert* $\underline{Y}$ ist der *Kehrwert* des komplexen Gesamtwiderstandes $\underline{Z}$:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{29{,}155\ \Omega \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,0{,}3869}} = 0{,}0343\ \mathrm{S} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,0{,}3869} = 0{,}0343\,[\cos(-0{,}3869) + \mathrm{j} \cdot \sin(-0{,}3869)]\ \mathrm{S} =$$

$$= (0{,}0318 - 0{,}0129\,\mathrm{j})\ \mathrm{S} \qquad (\mathrm{S} = 1/\Omega:\ \text{Siemens})$$

H21

Komplexer Widerstand und Leitwert eines *RLC*-Schaltkreises

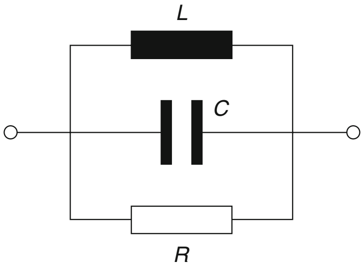


Bild H-11 *RLC*-Schaltkreis

Ohmscher Widerstand: $R = 100\ \Omega$

Induktivität: $L = 0{,}5\ \mathrm{H}$

Kapazität: $C = 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{F}$

Welchen *komplexen Widerstand* und *Leitwert* besitzt der in Bild H-11 skizzierte Wechselstromkreis bei einer Kreisfrequenz von $\omega = 100\ \mathrm{s}^{-1}$?

Da eine *Parallelschaltung* vorliegt, addieren sich die *Leitwerte* der drei Schaltelemente R, C und L zum *komplexen Leitwert* $\underline{Y}$ des Schaltkreises (Zwischenrechnung ohne Einheiten):

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\,\omega C - \mathrm{j}\,\frac{1}{\omega L} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = \frac{1}{100} + \mathrm{j}\left(100 \cdot 2 \cdot 10^{-5} - \frac{1}{100 \cdot 0{,}5}\right) =$$

$$= 0{,}01 + \mathrm{j}\,(2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-2}) = 0{,}01 + \mathrm{j}\,(0{,}002 - 0{,}02) = 0{,}01 - 0{,}018\,\mathrm{j} \qquad (\text{in S} = \text{Siemens})$$

Der *komplexe Widerstand* $\underline{Z}$ des Schaltkreises ist der *Kehrwert* des komplexen Leitwertes $\underline{Y}$ (in der Einheit Ohm = Ω):

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{0{,}01 - 0{,}018\,\mathrm{j}} = \frac{0{,}01 + 0{,}018\,\mathrm{j}}{\underbrace{(0{,}01 - 0{,}018\,\mathrm{j})\,(0{,}01 + 0{,}018\,\mathrm{j})}_{3.\ \text{Binom}:\ (a-b)\,(a+b) = a^2 - b^2}} = \frac{0{,}01 + 0{,}018\,\mathrm{j}}{0{,}01^2 - 0{,}018^2\,\mathrm{j}^2} =$$

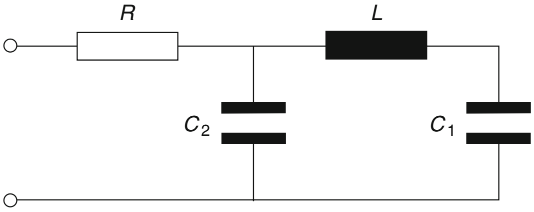
$$= \frac{0{,}01 + 0{,}018\,\mathrm{j}}{0{,}0001 + 0{,}000\,324} = \frac{0{,}01 + 0{,}018\,\mathrm{j}}{0{,}000\,424} = \frac{0{,}01}{0{,}000\,424} + \frac{0{,}018}{0{,}000\,424}\,\mathrm{j} = 23{,}58 + 42{,}45\,\mathrm{j} \qquad (\text{in } \Omega)$$

Umformung: Der Bruch wurde mit dem *konjugiert* komplexen Nenner, d. h. der komplexen Zahl $0{,}01 + 0{,}018\,\mathrm{j}$ *erweitert.*

Ergebnis: $\underline{Z} = (23{,}58 + 42{,}45\,\mathrm{j})\ \Omega$; $\underline{Y} = (0{,}01 - 0{,}018\,\mathrm{j})\ \mathrm{S}$

Komplexer Widerstand, Wirk-, Blind- und Scheinwiderstand eines Wechselstromkreises

H22



Ohmscher Widerstand: $R = 50\ \Omega$

Induktivität: $L = 2\ \mathrm{H}$

Kapazitäten: $C_1 = C_2 = C = 5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{F}$

Bild H-12

a) Bestimmen Sie formelmäßig den *komplexen Widerstand* $\underline{Z}$ des in Bild H-12 skizzierten Wechselstromkreises in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω der angelegten Wechselspannung.

b) Wie groß sind *Wirk-*, *Blind-* und *Scheinwiderstand* für die angegebenen Werte der Schaltelemente R, L, C_1 und C_2 bei einer Kreisfrequenz von $\omega = 200\ \mathrm{s}^{-1}$?

---

a) Die komplexen Widerstände der insgesamt vier Schaltelemente fassen wir wie folgt *schrittweise* zum komplexen *Gesamtwiderstand* $\underline{Z}$ des Wechselstromkreises zusammen (Bild H-13):

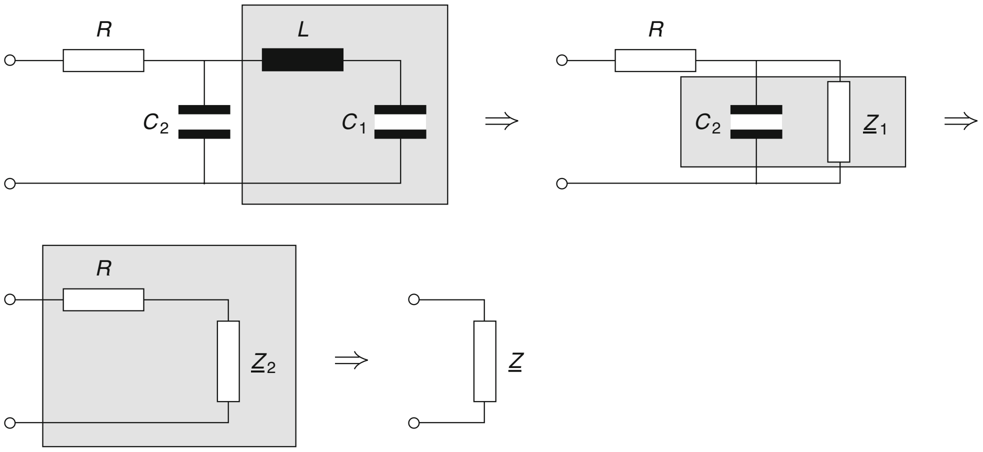


Bild H-13 Schrittweise Zusammenfassung der vier Einzelwiderstände zum komplexen Gesamtwiderstand $\underline{Z}$

1. Schritt: Induktivität L und Kapazität $C_1 = C$ sind in *Reihe* geschaltet, ihre komplexen Wechselstromwiderstände *addieren* sich somit zum *Ersatzwiderstand* $\underline{Z}_1$:

$$\underline{Z}_1 = \mathrm{j}\,\omega L - \mathrm{j}\,\frac{1}{\omega C_1} = \mathrm{j}\,\omega L - \mathrm{j}\,\frac{1}{\omega C} = \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \mathrm{j}\,\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}$$

2. Schritt: Kapazität $C_2 = C$ und Ersatzwiderstand $\underline{Z}_1$ sind *parallel* geschaltet, daher addieren sich ihre *Leitwerte* zum Leitwert des Ersatzwiderstandes $\underline{Z}_2$ (dieser ersetzt C_2 und $\underline{Z}_1$):

$$\frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \mathrm{j}\,\omega C_2 = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \mathrm{j}\,\omega C = \frac{1}{\mathrm{j}}\,\frac{\omega C}{\omega^2 LC - 1} + \mathrm{j}\,\omega C = -\mathrm{j}\,\frac{\omega C}{\omega^2 LC - 1} + \mathrm{j}\,\omega C =$$

$$= \mathrm{j}\,\omega C\left(\frac{-1}{\omega^2 LC - 1} + 1\right) = \mathrm{j}\,\omega C\,\frac{-1 + \omega^2 LC - 1}{\omega^2 LC - 1} = \frac{\mathrm{j}\,\omega C\,(\omega^2 LC - 2)}{\omega^2 LC - 1}$$

Durch Kehrwertbildung erhalten wir für den Ersatzwiderstand $\underline{Z}_2$ den folgenden Ausdruck:

$$\underline{Z}_2 = \frac{\omega^2 LC - 1}{\mathrm{j}\,\omega C\,(\omega^2 LC - 2)} = \frac{1}{\mathrm{j}}\,\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C\,(\omega^2 LC - 2)} = -\mathrm{j}\,\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C\,(\omega^2 LC - 2)}$$

3. Schritt: Die Widerstände R und $\underline{Z}_2$ sind in *Reihe* geschaltet und *addieren* sich zum gesuchten *komplexen Gesamtwiderstand* $\underline{Z}$:

$$\underline{Z} = \underline{Z}(\omega) = R + \underline{Z}_2 = R - \mathrm{j}\,\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C\,(\omega^2 LC - 2)}$$

b) Einsetzen der vorgegebenen Werte (Zwischenrechnung ohne Einheiten):

$$\underline{Z} = 50 - \mathrm{j}\,\frac{200^2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10^{-5} - 1}{200 \cdot 5 \cdot 10^{-5}\,(200^2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10^{-5} - 2)} = 50 - \mathrm{j}\,\frac{4 \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 10^{-5} - 1}{10^3 \cdot 10^{-5}\,(4 \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 10^{-5} - 2)} =$$

$$= 50 - \mathrm{j}\,\frac{4 - 1}{10^{-2}\,(4 - 2)} = 50 - \mathrm{j}\,\frac{100 \cdot 3}{2} = 50 - 150\,\mathrm{j} \qquad (\text{in } \Omega)$$

Komplexer Gesamtwiderstand: $\underline{Z} = (50 - 150\,\mathrm{j})\,\Omega$

Der *Wirkwiderstand* ist der *Realteil*, der *Blindwiderstand* der *Imaginärteil* und der *Scheinwiderstand* der *Betrag* des komplexen Gesamtwiderstandes $\underline{Z}$:

Wirkwiderstand: $\operatorname{Re}(\underline{Z}) = 50\,\Omega$

Blindwiderstand: $\operatorname{Im}(\underline{Z}) = -150\,\Omega$

Scheinwiderstand: $Z = |\underline{Z}| = \sqrt{50^2 + (-150)^2}\,\Omega = \sqrt{2500 + 22\,500}\,\Omega = \sqrt{25\,000}\,\Omega = 158{,}11\,\Omega$

2.3 Ortkurven, Netzwerkfunktionen, Widerstands- und Leitwertortskurven elektrischer Schaltkreise

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel VII.4

Formelsammlung: Kapitel VIII.6

H23

Bestimmen und skizzieren Sie die *Ortskurven* der folgenden komplexwertigen Funktionen einer reellen Variablen t:

a) $z(t) = z_1 + t\,(z_2 - z_1) \qquad (z_1 \neq z_2\,; \quad -\infty < t < \infty)$

b) $z(t) = \left(2 + \dfrac{1}{t}\right) + \mathrm{j} \qquad (t > 0)$

c) $z(t) = z_0 + a \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}t} \qquad (a > 0\,; \quad z_0 = x_0 + \mathrm{j}\,y_0\,; \quad 0 \leq t \leq 2\pi)$

---

a) Die *lineare* Funktion beschreibt eine *Gerade* durch die Bildpunkte von z_1 und z_2, die zu den Parameterwerten $t = 0$ und $t = 1$ gehören (siehe Bild H-14):

$$z(t = 0) = z_1 + 0(z_2 - z_1) = z_1$$

$$z(t = 1) = z_1 + 1(z_2 - z_1) =$$

$$= z_1 + z_2 - z_1 = z_2$$

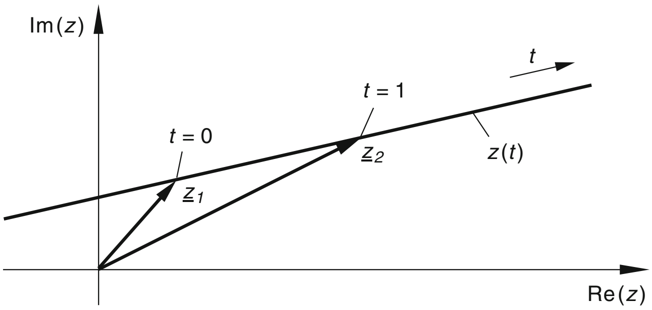


Bild H-14

b) Wir führen den „Hilfsparameter" $\lambda = 1/t$ ein. Die Funktion $z(t)$ geht dann über in die folgende *linear* von λ abhängige Funktion:

$$z(\lambda) = (2 + \lambda) + \mathrm{j} \qquad (\text{mit } \lambda > 0)$$

Der Imaginärteil hat den *konstanten* Wert $\operatorname{Im}(z) = 1$, während der Realteil $\operatorname{Re}(z) = 2 + \lambda$ im Intervall $\lambda > 0$ alle Werte von 2 (ausschließlich) bis ∞ durchläuft. Die zugehörige Ortskurve ist eine *Halbgerade*, sie verläuft vom Bildpunkt der komplexen Zahl $z_0 = 2 + \mathrm{j}$ ausgehend *parallel* zur reellen Achse, wie in Bild H-15 dargestellt.

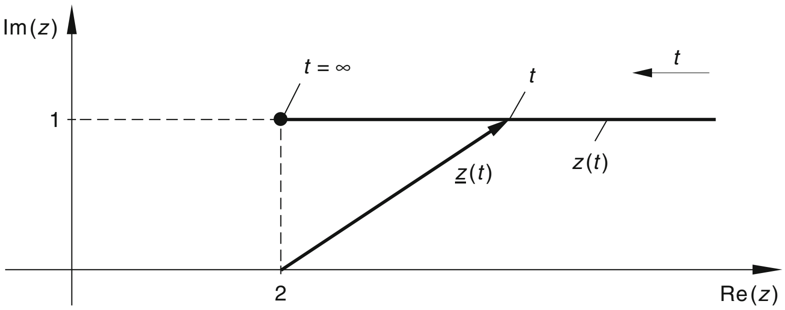


Bild H-15

c) Wir formen die Funktionsgleichung zunächst geringfügig um und bilden dann beiderseits den Betrag:

$$z = z_0 + a \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}t} \quad \Rightarrow \quad z - z_0 = a \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}t} \quad \Rightarrow \quad |z - z_0| = |a \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}t}| = a \underbrace{|\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}|}_{1} = a = \text{const.}$$

Geometrische Deutung: Alle Bildpunkte der Funktion $z = z(t)$ haben vom Bildpunkt der komplexen Zahl $z_0 = x_0 + \mathrm{j}y_0$ den *gleichen* Abstand $d = |z - z_0| = a$ und liegen somit auf einem *Kreis* mit dem Mittelpunkt $M = (x_0;\, y_0)$ und dem Radius $R = a$ (siehe Bild H-16).

Kreisgleichung

$$|z - z_0| = |(x + \mathrm{j}y) - (x_0 + \mathrm{j}y_0)| =$$

$$= |x + \mathrm{j}y - x_0 - \mathrm{j}y_0| =$$

$$= |(x - x_0) + \mathrm{j}(y - y_0)| =$$

$$= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = a \quad |\,\text{quadrieren}$$

Somit: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$

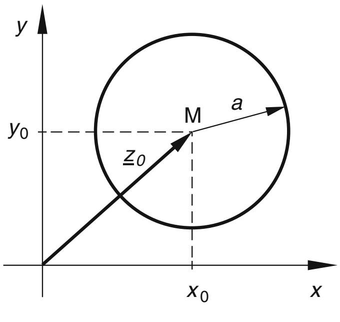


Bild H-16

H24

$z(t) = 5(1 + e^{jt}), \qquad 0 \le t \le \pi$

a) Welche *Ortskurve* beschreibt diese komplexwertige Funktion der reellen Variablen t?

b) Bestimmen und skizzieren Sie die durch *Inversion* entstandene *Ortskurve* (*ohne* Anwendung der bekannten Inversionsregeln).

---

a) Wir zeigen zunächst, dass die Bildpunkte von $z = z(t)$ auf einem *Kreis* liegen:

$$z = 5(1 + e^{jt}) = 5 + 5 \cdot e^{jt} \quad \Rightarrow \quad z - 5 = 5 \cdot e^{jt} \quad \Rightarrow \quad |z - 5| = |5 \cdot e^{jt}| = 5 \underbrace{|e^{jt}|}_{1} = 5$$

Jeder Bildpunkt hat somit vom Bildpunkt der reellen Zahl $z_0 = 5$ den *gleichen* Abstand $d = |z - 5| = 5$. Die Bildpunkte liegen daher auf einem *Kreis* mit dem Mittelpunkt $M = (5; 0)$ und dem Radius $R = 5$, allerdings mit der folgenden *Einschränkung*. Aus

$$z(t) = 5(1 + e^{jt}) = 5(1 + \cos t + j \cdot \sin t) = 5(1 + \cos t) + j(5 \cdot \sin t)$$

folgt, dass der Imaginärteil von $z(t)$ im Definitionsintervall $0 \le t \le \pi$ stets größer oder gleich Null ist:

$$\text{Im}(z(t)) = 5 \cdot \sin t \ge 0$$

(bekanntlich gilt im Intervall $0 \le t \le \pi$, d. h. im 1. und 2. Quadrant stets $\sin t \ge 0$). Die Kreispunkte *unterhalb* der reellen Achse scheiden damit aus, die gesuchte Ortskurve ist der in Bild H-17 skizzierte *Halbkreis*.

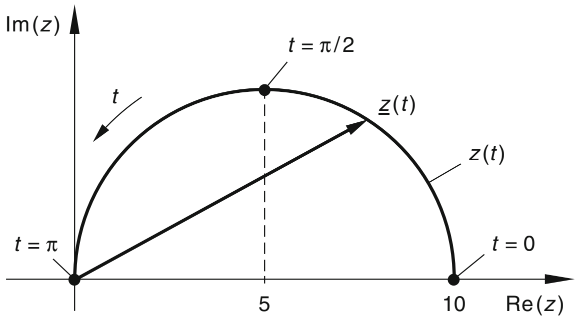


Bild H-17

b) Durch *Inversion* erhalten wir aus $z(t)$ die folgende Funktion:

$$w(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{5(1 + e^{jt})} = \frac{0{,}2}{(1 + \cos t) + j \cdot \sin t} = \frac{0{,}2\,[(1 + \cos t) - j \cdot \sin t]}{\underbrace{[(1 + \cos t) + j \cdot \sin t]\,[(1 + \cos t) - j \cdot \sin t]}_{\text{3. Binom}: (a+b)(a-b) = a^2 - b^2}} =$$

$$= \frac{0{,}2\,[(1 + \cos t) - j \cdot \sin t]}{(1 + \cos t)^2 - j^2 \cdot \sin^2 t} = \frac{0{,}2(1 + \cos t) - j(0{,}2 \cdot \sin t)}{1 + 2 \cdot \cos t + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1}} = \frac{0{,}2(1 + \cos t) - j(0{,}2 \cdot \sin t)}{2 + 2 \cdot \cos t} =$$

$$= \frac{0{,}2(1 + \cos t) - j(0{,}2 \cdot \sin t)}{2(1 + \cos t)} = \frac{0{,}2(1 + \cos t)}{2(1 + \cos t)} - j\,\frac{0{,}2 \cdot \sin t}{2(1 + \cos t)} = 0{,}1 - j\,\frac{0{,}1 \cdot \sin t}{1 + \cos t} \qquad (0 \le t < \pi)$$

Umformungen: Der Bruch wurde zunächst mit dem *konjugiert* komplexen Nenner, d. h. der komplexen Zahl $(1 + \cos t) - j \cdot \sin t$ *erweitert*. Ferner gilt: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ (*trigonometrischer Pythagoras*).

Der Realteil der Funktion $w(t)$ hat den *konstanten* Wert $\text{Re}(w(t)) = 0{,}1$. Der Imaginärteil dagegen durchläuft im Intervall $0 \le t < \pi$ alle Werte von 0 bis $-\infty$. Die Ortskurve von $w(t)$ ist daher eine *Halbgerade* parallel zur imaginären Achse (siehe Bild H-18).

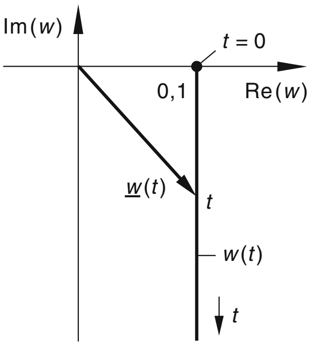


Bild H-18

H25

Bestimmen und skizzieren Sie die *Ortskurve* der komplexwertigen Funktion

$$z(t) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\, t}, \qquad -\infty < t < \infty$$

unter Verwendung der *Inversionsregeln*.

Hinweis: Untersuchen Sie zunächst den Nenner $w(t) = 1 + \mathrm{j}\, t$.

Der *Nenner* $w(t) = 1 + \mathrm{j}\, t$ beschreibt im Intervall $-\infty < t < \infty$ eine zur imaginären Achse im Abstand 1 *parallel* verlaufende Gerade (siehe Bild H-19). Die Funktion $z(t)$ geht dann aus $w(t)$ durch *Inversion* hervor: $z(t) = 1/w(t)$. Nach der *2. Inversionsregel* beschreibt dann $z(t)$ einen durch den Nullpunkt gehenden *Kreis*, dessen genaue Lage wir wie folgt bestimmen. Der Schnittpunkt der Parallelen $w(t) = 1 + \mathrm{j}\, t$ mit der reellen Achse (er gehört zum Parameterwert $t = 0$) hat von allen Punkten der Parallelen den *kleinsten* Abstand vom Nullpunkt und geht somit bei der *Inversion* in den Bildpunkt mit dem *größten* Abstand vom Nullpunkt über:

$$|w|_{\min} = w(t = 0) = 1 \quad \xrightarrow{\text{Inversion}} \quad |z|_{\max} = z(t = 0) = \frac{1}{|w|_{\min}} = 1$$

Damit besitzt der gesuchte Kreis den Durchmesser $2R = |z|_{\max} = 1$ und den Radius $R = 0{,}5$. Der Mittelpunkt des Kreises liegt auf der reellen Achse und fällt in den Punkt $M = (0{,}5;\, 0)$ (siehe Bild H-20).

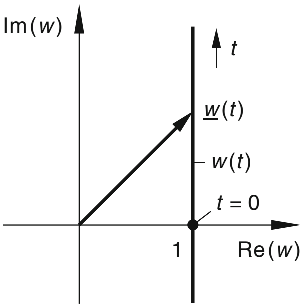


Bild H-19

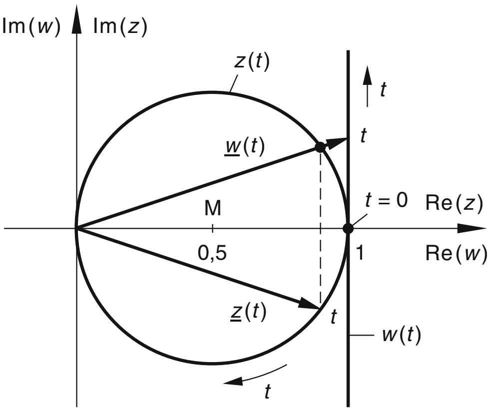


Bild H-20

H26

Netzwerkfunktionen einer *RL*-Reihenschaltung

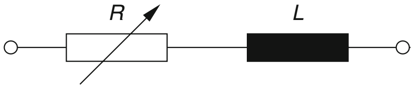


Bild H-21

Die in Bild H-21 skizzierte Reihenschaltung enthält einen *variablen* ohmschen Widerstand R mit $0 \le R \le R_0$ und eine Spule mit der *konstanten* Induktivität L, deren ohmscher Widerstand vernachlässigbar ist. Bestimmen Sie die folgenden *Netzwerkfunktionen* (bei *konstanter* Kreisfrequenz ω der angelegten Wechselspannung):

a) *Komplexer Gesamtwiderstand* $\underline{Z} = \underline{Z}(R)$.

b) *Komplexer Leitwert* $\underline{Y} = \underline{Y}(R)$.

Skizzieren Sie die *Widerstands-* und *Leitwertortskurve*.

a) R und L sind in *Reihe* geschaltet, ihre (komplexen) Wechselstromwiderstände *addieren* sich daher zum *komplexen Gesamtwiderstand*:

$$\underline{Z} = \underline{Z}(R) = R + \mathrm{j}\,\omega L \qquad (0 \le R \le R_0)$$

Der Imaginärteil $\operatorname{Im}(\underline{Z}) = \omega L$ ist dabei *unabhängig* von der Variablen R, während der Realteil $\operatorname{Re}(\underline{Z}) = R$ alle Werte von 0 bis R_0 durchläuft. Die *Widerstandsortskurve* ist daher Teil einer zur reellen Achse *parallel* verlaufenden *Geraden* (Bild H-22).

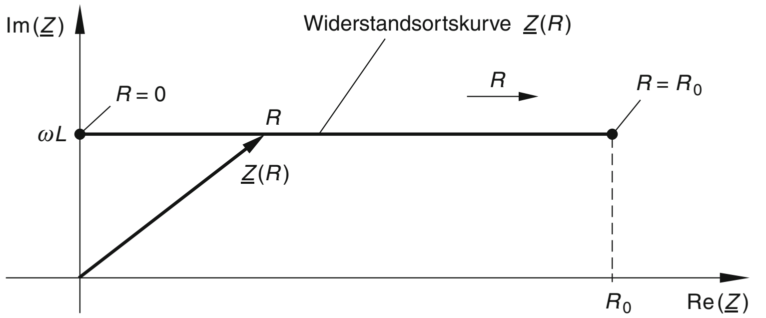


Bild H-22

b) Der *komplexe Leitwert* $\underline{Y}$ ist der *Kehrwert* des komplexen Widerstandes $\underline{Z}$:

$$\underline{Y} = \underline{Y}(R) = \frac{1}{\underline{Z}(R)} = \frac{1}{R + \mathrm{j}\,\omega L} = \frac{R - \mathrm{j}\,\omega L}{\underbrace{(R + \mathrm{j}\,\omega L)(R - \mathrm{j}\,\omega L)}_{3.\ \text{Binom}:\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2}} = \frac{R - \mathrm{j}\,\omega L}{R^2 - \mathrm{j}^2\,\omega^2 L^2} = \frac{R - \mathrm{j}\,\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} =$$

$$= \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - \mathrm{j}\,\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \qquad (0 \le R \le R_0)$$

Umformung: Der Bruch wird mit dem *konjugiert* komplexen Nenner, d. h. der komplexen Zahl $R - \mathrm{j}\,\omega L$ *erweitert*.

Da die Widerstandsortskurve $\underline{Z}(R)$ Teil einer *Geraden* ist, die *nicht* durch den Nullpunkt geht (siehe Bild H-22), ist die durch *Inversion* entstandene *Leitwertortskurve* $\underline{Y}(R)$ nach der *2. Inversionsregel* Teil eines *Kreises*, der durch den Nullpunkt verläuft. Die Lage dieses Kreises bestimmen wir wie folgt. Der zu $R = 0$ gehörige Punkt auf der Widerstandsortskurve $\underline{Z}(R)$ hat von allen Punkten dieser Kurve den *kleinsten* Abstand vom Nullpunkt (siehe Bild H-22):

$$|\underline{Z}|_{\min} = |\underline{Z}(R = 0)| = |\mathrm{j}\,\omega L| = |\mathrm{j}| \cdot |\omega L| = 1 \cdot (\omega L) = \omega L$$

Der entsprechende Punkt auf der Leitwertortskurve $\underline{Y}(R)$ hat dann den *größten* Abstand aller Punkte dieser Kurve vom Nullpunkt:

$$|\underline{Y}|_{\max} = \frac{1}{|\underline{Z}|_{\min}} = \frac{1}{\omega L}$$

Dies ist zugleich der Wert des Kreisdurchmessers: $2R = 1/(\omega L)$. Der Mittelpunkt des Kreises liegt auf der imaginären Achse bei $-1/(2\omega L)$, der Radius beträgt $\varrho = 1/(2\omega L)$. Der Verlauf der *Leitwertortskurve* $\underline{Y} = \underline{Y}(R)$ ist in Bild H-23 dargestellt.

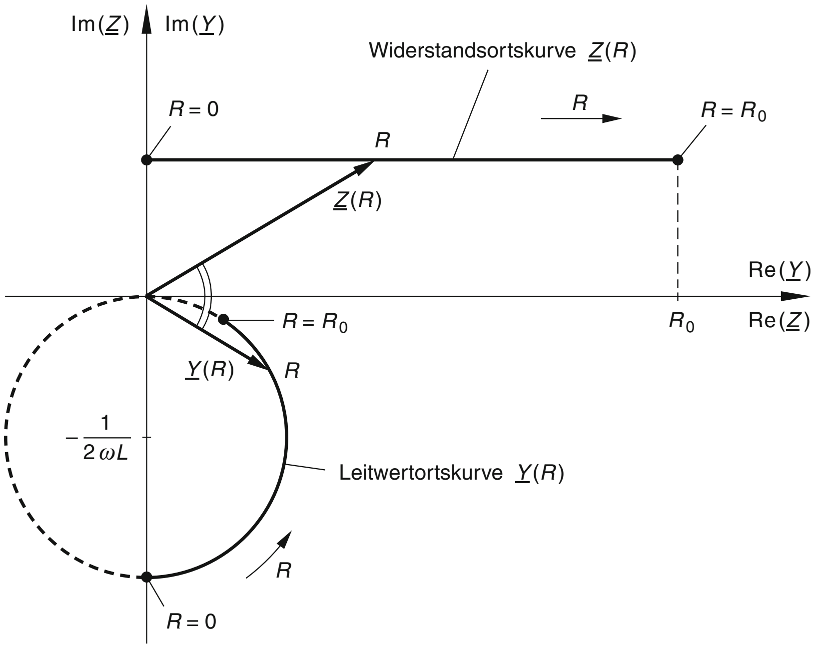


Bild H-23

H27

Widerstands- und Leitwertortskurve eines Parallelschwingkreises

Der in Bild H-24 dargestellte *Parallelschwingkreis* enthält einen ohmschen Widerstand R, eine Induktivität L und eine Kapazität C.

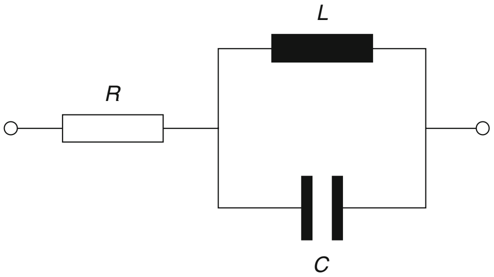


Bild H-24 Parallelschwingkreis

a) Bestimmen Sie die Abhängigkeit des *komplexen Gesamtwiderstandes* $\underline{Z}$ von der Kreisfrequenz ω der angelegten Wechselspannung $(0 \le \omega < \omega_0 = 1/\sqrt{LC})$ und skizzieren Sie die zugehörige *Widerstandsortskurve*.

b) Durch *Inversion* soll aus der Widerstandsortskurve $\underline{Z}(\omega)$ die *Leitwertortskurve* $\underline{Y}(\omega)$ ermittelt werden.

c) Wie groß sind *Wirk-*, *Blind-* und *Scheinwiderstand* für $R = 200\,\Omega$, $L = 10\,\text{H}$ und $C = 10^{-5}\,\text{F}$ bei einer Kreisfrequenz von $\omega = 50\,\text{s}^{-1}$?

---

a) Die *parallel* geschalteten Elemente L und C ersetzen wir im 1. Schritt durch den *Ersatzwiderstand* $\underline{Z}_1$ (siehe Bild H-25).

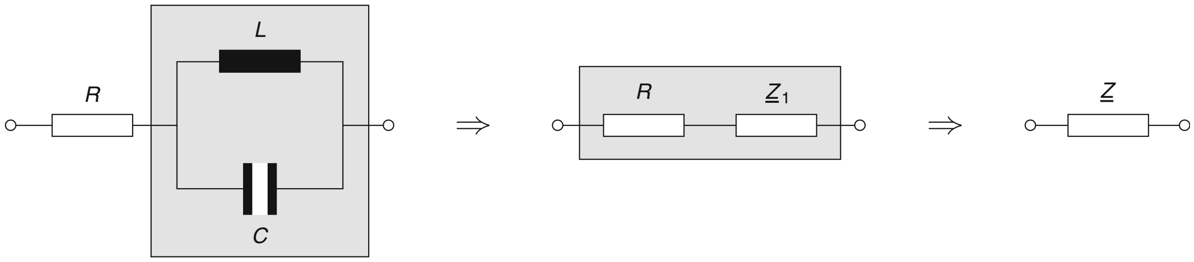


Bild H-25 Schrittweise Zusammenfassung der Einzelwiderstände zum komplexen Gesamtwiderstand $\underline{Z}$

Es *addieren* sich dabei die *Leitwerte* von C und L zum Leitwert $\underline{Y}_1$ der Parallelschaltung:

$$\underline{Y}_1 = \mathrm{j}\,\omega C - \mathrm{j}\,\frac{1}{\omega L} = \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = \mathrm{j}\,\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L} = \frac{\mathrm{j}\,(\omega^2 LC - 1)}{\omega L}$$

Der Ersatzwiderstand $\underline{Z}_1$ ist der *Kehrwert* des Leitwertes $\underline{Y}_1$:

$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{\underline{Y}_1} = \frac{\omega L}{\mathrm{j}\,(\omega^2 LC - 1)} = \frac{\mathrm{j}\,\omega L}{\mathrm{j}^2\,(\omega^2 LC - 1)} = \mathrm{j}\,\frac{\omega L}{-(\omega^2 LC - 1)} = \mathrm{j}\,\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

Umformung: Den Bruch mit j *erweitern* und dabei die Beziehung $\mathrm{j}^2 = -1$ beachten.

Die Größe LC lässt sich noch wie folgt durch ω_0 ausdrücken:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{LC} = \frac{1}{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad LC = \frac{1}{\omega_0^2}$$

Der Ersatzwiderstand $\underline{Z}_1$ kann dann auch nach der folgenden Formel berechnet werden:

$$\underline{Z}_1 = \mathrm{j}\,\frac{\omega L}{1 - \omega^2 \underbrace{LC}_{1/\omega_0^2}} = \mathrm{j}\,\frac{\omega L}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \mathrm{j}\,\frac{\omega L}{\dfrac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2}} = \mathrm{j}\,\frac{\omega_0^2 L\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Im nächsten Schritt *addieren* wir die in *Reihe* geschalteten Widerstände R und $\underline{Z}_1$ und erhalten den gesuchten *komplexen Gesamtwiderstand* $\underline{Z}$ des Parallelschwingkreises in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω:

$$\underline{Z}(\omega) = R + \underline{Z}_1 = R + \mathrm{j}\,\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} = R + \mathrm{j}\,\frac{\omega_0^2 L\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad (0 \le \omega < \omega_0)$$

Bestimmung der Widerstandsortskurve

Der Realteil von $\underline{Z}(\omega)$ ist *frequenzunabhängig*, er hat den *konstanten* Wert $\mathrm{Re}(\underline{Z}(\omega)) = R$. Der Imaginärteil dagegen hängt von der Kreisfrequenz ω ab und durchläuft im Intervall $0 \le \omega < \omega_0$ alle Werte von 0 bis ∞. Die *Widerstandsortskurve* ist daher eine zur imaginären Achse parallele *Halbgerade* (Bild H-26).

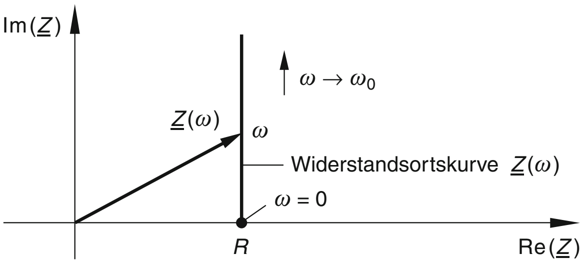


Bild H-26
Widerstandsortskurve

b) Durch *Inversion* der Widerstandortskurve $\underline{Z}(\omega)$ erhalten wir die *Leitwertortskurve* $\underline{Y}(\omega)$. Aus der *Halbgeraden* wird dabei nach der *2. Inversionsregel* ein durch den Nullpunkt gehender *Halbkreis*, dessen genaue Lage sich wie folgt bestimmen lässt. Der zu $\omega = 0$ gehörige Punkt auf der Halbgeraden (Schnittpunkt mit der reellen Achse) hat vom Nullpunkt den *kleinsten* Abstand. Er geht bei der Inversion über in den Punkt auf der Leitwertortskurve mit dem *größten* Abstand vom Nullpunkt:

$$|\underline{Z}|_{\min} = |\underline{Z}(\omega = 0)| = R \quad \xrightarrow{\text{Inversion}} \quad |\underline{Y}|_{\max} = \frac{1}{|\underline{Z}|_{\min}} = \frac{1}{R}$$

Dieser (auf der reellen Achse liegende) Punkt hat also den Abstand $1/R$ vom Nullpunkt. Der Durchmesser des Kreises (bzw. Halbkreises) beträgt daher $d = 1/R$, der Radius ist somit $\varrho = 1/(2R)$. Der Mittelpunkt liegt auf der reellen Achse bei $M = (1/(2R);\ 0)$. Bild H-27 zeigt den genauen Verlauf der *halbkreisförmigen Leitwertortskurve*.

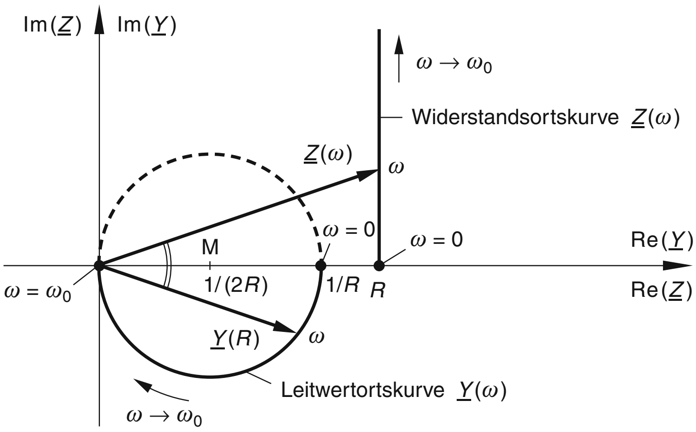


Bild H-27 Widerstands- und Leitwertortskurve

c) Wir berechnen zunächst den *komplexen Gesamtwiderstand* $\underline{Z}$ (Zwischenrechnung ohne Einheiten):

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}\,\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} = 200 + \mathrm{j}\,\frac{50 \cdot 10}{1 - 50^2 \cdot 10 \cdot 10^{-5}} = 200 + \mathrm{j}\,\frac{500}{1 - 5^2 \cdot 10^2 \cdot 10 \cdot 10^{-5}} =$$

$$= 200 + \mathrm{j}\,\frac{500}{1 - 25 \cdot 10^{-2}} = 200 + \mathrm{j}\,\frac{500}{1 - 0{,}25} = 200 + \mathrm{j}\,\frac{500}{0{,}75} = 200 + 666{,}67\,\mathrm{j} \qquad (\text{in } \Omega)$$

Der *Wirkwiderstand* ist der *Realteil*, der *Blindwiderstand* der *Imaginärteil*, der *Scheinwiderstand* der *Betrag* von $\underline{Z}$:

Wirkwiderstand: $\operatorname{Re}(\underline{Z}) = 200\,\Omega$

Blindwiderstand: $\operatorname{Im}(\underline{Z}) = 666{,}67\,\Omega$

Scheinwiderstand: $Z = |\underline{Z}| = \sqrt{200^2 + 666{,}67^2}\,\Omega = \sqrt{484\,448{,}89}\,\Omega = 696{,}02\,\Omega$

I Vektorrechnung

1 Vektoroperationen

In diesem Abschnitt finden Sie Aufgaben zu folgenden Themen:

- Darstellung von Vektoren (Vektorkoordinaten oder skalare Vektorkomponenten, Betrag, Richtungswinkel)
- Grundrechenoperationen mit Vektoren (Addition und Subtraktion, Multiplikation mit einem Skalar)
- Skalar- und Vektorprodukt, gemischtes oder Spatprodukt

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel II.1 bis 3
Formelsammlung: Kapitel II.1 bis 3

I1

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die *skalaren Komponenten* (Vektorkoordinaten) sowie die *Beträge* und *Richtungswinkel* der folgenden Vektoren:

a) $\vec{s} = 5\vec{a} - 3(\vec{b} + 2\vec{c}) + 3(2\vec{a} - \vec{c})$

b) $\vec{s} = -3\vec{b} + 4(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{c} + \vec{a})\vec{c}$

---

a) $$\vec{s} = 5\vec{a} - 3(\vec{b} + 2\vec{c}) + 3(2\vec{a} - \vec{c}) = 5\vec{a} - 3\vec{b} - 6\vec{c} + 6\vec{a} - 3\vec{c} = 11\vec{a} - 3\vec{b} - 9\vec{c} =$$

$$= 11\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - 9\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 55 \\ 33 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -15 \\ -24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -45 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Betrag: $|\vec{s}| = \sqrt{(-20)^2 + 40^2 + 0^2} = \sqrt{2000} = 44{,}72$

Berechnung der drei Richtungswinkel α, β und γ

$$\cos\alpha = \frac{s_x}{|\vec{s}|} = \frac{-20}{\sqrt{2000}} = -0{,}4472 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos(-0{,}4472) = 116{,}57^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{s_y}{|\vec{s}|} = \frac{40}{\sqrt{2000}} = 0{,}8944 \quad \Rightarrow \quad \beta = \arccos 0{,}8944 = 26{,}57^\circ$$

Der Vektor $\vec{s}$ liegt wegen $s_z = 0$ in der x, y-Ebene. Daher ist $\gamma = 90^\circ$ (*rechter* Winkel mit der z-Achse).

Richtungswinkel: $\alpha = 116{,}57^\circ$, $\beta = 25{,}57^\circ$, $\gamma = 90^\circ$

b) Wir berechnen zunächst die *Skalarprodukte* $\vec{a} \cdot \vec{c}$ und $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{c} + \vec{a})$:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 10 + 0 + 3 = 13$$

L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Klausur- und Übungsaufgaben,*
DOI 10.1007/978-3-8348-9730-5_9,© Vieweg+Teubner Verlag |Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2010

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad 2\vec{c} + \vec{a} = 2\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{c} + \vec{a}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 36 + 0 - 25 = 11$$

$$\vec{s} = -3\vec{b} + 4\underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{c})}_{13}\vec{a} - \underbrace{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{c} + \vec{a})}_{11}\vec{c} = -3\vec{b} + 52\vec{a} - 11\vec{c} =$$

$$= -3\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + 52\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} - 11\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -15 \\ -24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 104 \\ 260 \\ 156 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -55 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 \\ 245 \\ 121 \end{pmatrix}$$

Betrag: $|\vec{s}| = \sqrt{52^2 + 245^2 + 121^2} = \sqrt{77\,370} = 278{,}15$

Berechnung der drei Richtungswinkel α, β und γ

$$\cos\alpha = \frac{s_x}{|\vec{s}|} = \frac{52}{\sqrt{77\,370}} = 0{,}1869 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos 0{,}1869 = 79{,}23^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{s_y}{|\vec{s}|} = \frac{245}{\sqrt{77\,370}} = 0{,}8808 \quad \Rightarrow \quad \beta = \arccos 0{,}8808 = 28{,}26^\circ$$

$$\cos\gamma = \frac{s_z}{|\vec{s}|} = \frac{121}{\sqrt{77\,370}} = 0{,}4350 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arccos 0{,}4350 = 64{,}21^\circ$$

Richtungswinkel: $\alpha = 79{,}23^\circ$, $\beta = 28{,}26^\circ$, $\gamma = 64{,}21^\circ$

I2

Ein Vektor $\vec{a}$ hat den Betrag $|\vec{a}| = 3$ und die Vektorkoordinaten $a_x = -2$, $a_y = 2$ und $a_z < 0$. Berechnen Sie die *fehlende* Vektorkoordinate a_z sowie die drei *Richtungswinkel.*

Wir bestimmen zunächst die *Vektorkomponente* a_z unter Beachtung von $a_z < 0$:

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \quad \Rightarrow \quad a_z^2 = |\vec{a}|^2 - a_x^2 - a_y^2 = 3^2 - (-2)^2 - 2^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_z = -1$$

Berechnung der drei Richtungswinkel α, β und γ

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = 131{,}81^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \beta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 48{,}19^\circ$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = 109{,}47^\circ$$

Richtungswinkel: $\alpha = 131{,}81^\circ$, $\beta = 48{,}19^\circ$, $\gamma = 109{,}47^\circ$

13

Von einem Vektor $\vec{a}$ sind folgende Eigenschaften bekannt:

$$|\vec{a}| = 10; \quad \text{Richtungswinkel: } \alpha = \gamma = 60^\circ, \ \beta > 90^\circ$$

Bestimmen Sie den noch *fehlenden* Richtungswinkel β sowie die drei *Vektorkoordinaten* a_x, a_y und a_z.

Wir berechnen zunächst den noch fehlenden *Richtungswinkel* β (wegen $90^\circ < \beta < 180^\circ$ ist $\cos \beta < 0$):

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\cos^2 \beta = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma = 1 - \cos^2 60^\circ - \cos^2 60^\circ = 1 - 0{,}25 - 0{,}25 = 0{,}5 \quad \Rightarrow$$

$$\cos \beta = -\sqrt{0{,}5} \quad \Rightarrow \quad \beta = \arccos\,(-\sqrt{0{,}5}\,) = 135^\circ$$

Berechnung der Vektorkoordinaten a_x, a_y und a_z ($a_x = a_z$, da $\alpha = \gamma$)

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha = 10 \cdot \cos 60^\circ = 5; \quad a_y = |\vec{a}| \cdot \cos \beta = 10 \cdot \cos 135^\circ = -7{,}071$$

Vektorkoordinaten: $a_x = 5;\ a_y = -7{,}071;\ a_z = 5$

14

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} u \\ 1 \\ v \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Parameter u und v so, dass der Vektor $\vec{c}$ sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$ *orthogonal* ist und zwar unter ausschließlicher Verwendung von

a) *Skalarprodukten*, b) *Vektorprodukten*.

a) Die Skalarprodukte $\vec{a} \cdot \vec{c}$ und $\vec{b} \cdot \vec{c}$ müssen jeweils *verschwinden*. Dies führt zu zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten u und v:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ 1 \\ v \end{pmatrix} = u + 5 + 2v = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ 1 \\ v \end{pmatrix} = -2u + 14 + v = 0$$

$$\text{(I)} \quad u + 5 + 2v = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -2v - 5$$

$$\text{(II)} \quad -2u + 14 + v = 0$$

Gleichung (I) nach u auflösen, den gefundenen Ausdruck dann in Gleichung (II) einsetzen:

$$\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad -2(-2v - 5) + 14 + v = 4v + 10 + 14 + v = 5v + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5v = -24$$

$$\Rightarrow \quad v = -4{,}8$$

$$\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad u = -2v - 5 = -2 \cdot (-4{,}8) - 5 = 4{,}6$$

Lösung: $u = 4{,}6;\ v = -4{,}8$

b) Das *Vektorprodukt* aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist ein Vektor, der sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ *senkrecht* steht. Der gesuchte Vektor $\vec{c}$ ist daher zum Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ entweder *parallel* oder *anti-parallel*, d. h. $\vec{c}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ sind *kollineare* Vektoren (sie liegen in einer gemeinsamen Linie). Somit muss der Vektor $\vec{c}$ ein Vielfaches von $\vec{a} \times \vec{b}$ sein: $\vec{c} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$. Diese Vektorgleichung führt dann zu drei Gleichungen für die drei Unbekannten λ, u und v:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 28 \\ -4 - 1 \\ 14 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ -5 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} u \\ 1 \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -23 \\ -5 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23\lambda \\ -5\lambda \\ 24\lambda \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lrcl} \text{(I)} & u & = & -23\lambda \\ \text{(II)} & 1 & = & -5\lambda \\ \text{(III)} & v & = & 24\lambda \end{array} \right.$$

Aus Gleichung (II) folgt zunächst $\lambda = -1/5$, aus den beiden restlichen Gleichungen erhalten wir

$$u = -23\lambda = -23 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = 4{,}6 \quad \text{und} \quad v = 24\lambda = 24 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -4{,}8$$

Lösung: $u = 4{,}6;\ v = -4{,}8$ (in Übereinstimmung mit der Lösung aus Teil a))

I5

Beweisen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung den *Satz des Thales*:

„Jeder Peripheriewinkel über einem Kreisdurchmesser $\overline{AB}$ ist ein *rechter* Winkel (Bild I-1)“.

R: Kreisradius

M: Kreismittelpunkt

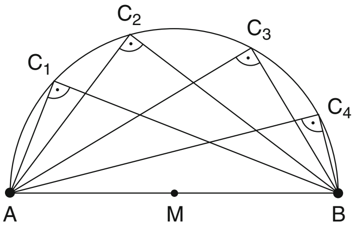


Bild I-1

Anhand von Bild I-2 führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{MC} = \vec{b}$$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = R$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{u}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{v}$$

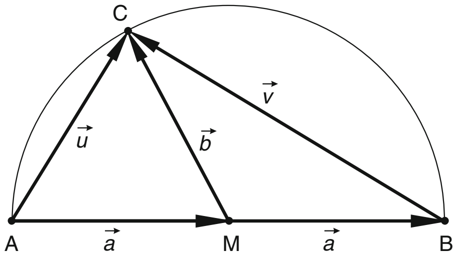


Bild I-2

Wir müssen zeigen, dass der Winkel $\measuredangle\ ACB$ ein *rechter* Winkel ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ *orthogonal* sind, d. h. das Skalarprodukt aus $\vec{u}$ und $\vec{v}$ *verschwindet*. Zunächst drücken wir $\vec{u}$ und $\vec{v}$ durch die gleichlangen „Hilfsvektoren“ $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wie folgt aus:

$$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} \quad \text{und} \quad \vec{a} + \vec{v} = \vec{b}, \quad \text{d. h.} \quad \vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$$

Damit erhalten wir für das Skalarprodukt aus $\vec{u}$ und $\vec{v}$ (unter Verwendung des *Distributiv-* und *Kommutativgesetzes* für Skalarprodukte):

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} =$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = -R^2 + R^2 = 0$$

Folgerung: Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ stehen aufeinander *senkrecht*, der Winkel $\measuredangle\ ABC$ ist ein *rechter*. Damit ist der *Satz von Thales* bewiesen.

I6

Bilden Sie mit den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die folgenden *Produkte* (Skalar-, Vektor- bzw. Spatprodukte):

$$\vec{a} \cdot \vec{b}, \quad (\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{c}), \quad \vec{b} \times \vec{c}, \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{b}), \quad (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = [\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}]$$

Zunächst bilden wir die benötigten *Summen* und *Differenzen*, dann die *Produkte* (Skalarprodukt, Vektorprodukt bzw. Spatprodukt):

$$\vec{a} + b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad \vec{a} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 3 + 5 = 6$$

$$(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = -12 - 24 + 24 = -12$$

Das Skalarprodukt $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{c})$ lässt sich mit Hilfe des *Distributiv-* und *Kommutativgesetzes* auch wie folgt berechnen:

$$(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{a}}_{0} + \vec{c} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{c} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (4 + 1 + 25) - (16 + 25 + 1) = 30 - 42 = -12$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 5 \\ 4 + 1 \\ -5 - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -17 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 12 \\ 30 - 0 \\ 2 - 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 30 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Spatproduktes $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = [\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}]$ auf zwei verschiedene Arten

1. Lösungsweg: Erst das *Vektorprodukt* $\vec{a} \times \vec{c}$ bilden, dann diesen Vektor *skalar* mit dem Vektor $\vec{b}$ multiplizieren:

$$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 25 \\ 20 - 2 \\ 10 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -24 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 24 + 54 + 6 = 84$$

2. Lösungsweg: Spatprodukt $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = [\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}]$ in der *Determinantenform* darstellen, Determinante dann nach der *Regel von Sarrus* berechnen:

$$\underbrace{\left|\begin{array}{rrr|rr} 2 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right.}_{(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = [\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}]} \quad \Rightarrow \quad (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = 10 + 60 - 1 + 25 - 6 - 4 = 84$$

17

Zeigen Sie, dass die drei Kräfte

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix} \text{N}, \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} \text{N} \quad \text{und} \quad \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \text{N}$$

in einer *Ebene* liegen. Berechnen Sie ferner die *resultierende* Kraft $\vec{F}_r$ (Kraftkomponenten, Betrag und Richtungswinkel).

Die drei Kräfte liegen genau dann in einer Ebene, wenn das aus ihnen gebildete Spatprodukt $[\vec{F}_1\ \vec{F}_2\ \vec{F}_3]$ *verschwindet* (Rechnung ohne Einheiten):

$$[\vec{F}_1\ \vec{F}_2\ \vec{F}_3] = \begin{vmatrix} -5 & 30 & 10 \\ -20 & 0 & 10 \\ 10 & 60 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \cdot (-1) & 30 \cdot 1 & 10 \cdot 1 \\ 5 \cdot (-4) & 30 \cdot 0 & 10 \cdot 1 \\ 5 \cdot 2 & 30 \cdot 2 & 10 \cdot 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 30 \cdot 10 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{D} = 1500\,D$$

Zur Erinnerung: Die Spalten haben der Reihe nach die *gemeinsamen* Faktoren 5, 30 und 10 (*grau* unterlegt), die wir bekanntlich vor die Determinante ziehen dürfen.

Determinantenberechnung nach der *Regel von Sarrus*:

$$\left|\begin{array}{rrr|rr} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad D = 0 + 2 - 8 - 0 + 2 + 4 = 0$$

Somit gilt: $[\vec{F}_1\ \vec{F}_2\ \vec{F}_3] = 1500\,D = 1500 \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow$ Die Kräfte liegen in einer Ebene

Berechnung der resultierenden Kraft $\vec{F}_r$ und ihrer Richtungswinkel α, β und γ

$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix} \text{N} + \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} \text{N} + \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \text{N} = \begin{pmatrix} 35 \\ -10 \\ 80 \end{pmatrix} \text{N} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} F_x &= 35\ \text{N} \\ F_y &= -10\ \text{N} \\ F_z &= 80\ \text{N} \end{aligned} \right.$$

$$|\vec{F}_r| = F_r = \sqrt{35^2 + (-10)^2 + 80^2}\ \text{N} = \sqrt{7725}\ \text{N} = 87{,}89\ \text{N}$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F_r} = \frac{35\ \text{N}}{\sqrt{7725}\ \text{N}} = 0{,}3982 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos 0{,}3982 = 66{,}53^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{F_y}{F_r} = \frac{-10\ \text{N}}{\sqrt{7725}\ \text{N}} = -0{,}1138 \quad \Rightarrow \quad \beta = \arccos(-0{,}1138) = 96{,}53^\circ$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{F_r} = \frac{80\ \text{N}}{\sqrt{7725}\ \text{N}} = 0{,}9102 \qquad \Rightarrow \quad \gamma = \arccos 0{,}9102 = 24{,}47^{\circ}$$

Ergebnis: $F_r = 87{,}89\ \text{N},\ \alpha = 66{,}53^{\circ},\ \beta = 96{,}53^{\circ},\ \gamma = 24{,}47^{\circ}$

18

Eine Kraft $\vec{F}$ vom Betrage $F = 100\sqrt{14}\ \text{N}$ soll *senkrecht* auf einer Ebene E mit den *Richtungsvektoren* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ stehen. Bestimmen Sie die (skalaren) *Komponenten* F_x, F_y und F_z dieser Kraft. Wie viele Lösungen gibt es?

Der gesuchte Kraftvektor $\vec{F}$ verläuft *parallel* oder *antiparallel* zum Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E ($\vec{n}$ steht bekanntlich *senkrecht* auf der Ebene). Ein solcher Normalenvektor ist das *Vektorprodukt* der Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, das wir anschließend noch *normieren*, um einen *Einheitsvektor* $\vec{e}$ zu erhalten:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ 2-1 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad |\vec{n}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{n}|}\,\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der gesuchte Kraftvektor $\vec{F}$ hat entweder die *gleiche* Richtung wie der Einheitsvektor $\vec{e}$ oder die *Gegenrichtung*, seine Länge ist bekannt und beträgt $F = 100\sqrt{14}\ \text{N}$. Es gibt daher *zwei* Lösungen, die wie folgt lauten:

$$\vec{F} = \pm F\,\vec{e} = \pm 100\sqrt{14} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{N} = \pm 100 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{N} = \pm \begin{pmatrix} -200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} \text{N}$$

Kraftkomponenten: $F_x = -200\ \text{N},\ F_y = 100\ \text{N},\ F_z = 300\ \text{N}$ bzw. $F_x = 200\ \text{N},\ F_y = -100\ \text{N},\ F_z = -300\ \text{N}$

19

Berechnen Sie die *Oberfläche* O eines *regulären* Tetraeders mit der Seitenlänge a (Bild I-3).

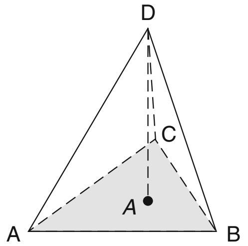


Bild I-3

Das *reguläre Tetraeder* besteht aus *vier kongruenten* (*deckungsgleichen*) gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge a (siehe Bild I-3). Es genügt daher, die *Grundfläche* A zu berechnen, die wir (wie in Bild I-4 dargestellt) in die x,y-Ebene legen. Wir bestimmen zunächst die Seitenvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$, mit deren Hilfe dann der Flächeninhalt A der Grundfläche berechnet werden kann (über das *Vektorprodukt* der beiden Seitenvektoren):

$$\overrightarrow{AB} = a\,\vec{e}_x = a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\overline{AM} = a/2; \quad \overline{MC} = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}\overline{AM}\\\overline{MC}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a/2\\\sqrt{3}\,a/2\\0\end{pmatrix} = \frac{a}{2}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$$

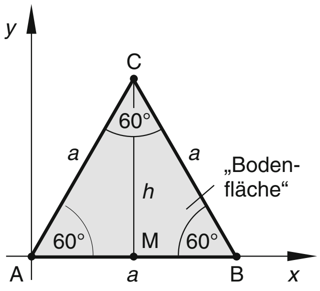


Bild I-4

Vektorprodukt aus $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ und Flächeninhalt A der Grundfläche

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \frac{a}{2}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix} = \frac{a^2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\\0\end{pmatrix} = \frac{a^2}{2}\begin{pmatrix}0-0\\0-0\\\sqrt{3}-0\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\\sqrt{3}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a^2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a^2\,\vec{e}_z$$

Die gesuchte Grundfläche A entspricht der *halben* Fläche des Parallelogramms, das von den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aufgespannt wird. Die Parallelogrammfläche ist der *Betrag* des Vektorproduktes dieser Vektoren. Daher gilt:

$$A = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\,| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\,a^2 \cdot \underbrace{|\vec{e}_z|}_{1} = \frac{1}{4}\sqrt{3}\,a^2$$

Gesamtoberfläche des Tetraeders: $O = 4A = \sqrt{3}\,a^2$

I10

Zeigen Sie die *lineare Unabhängigkeit* der drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ und stellen Sie den Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ als *Linearkombination* dieser Vektoren dar.

Wie lauten die *skalaren* Vektorkomponenten von $\vec{r}$?

Die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind genau dann *linear unabhängig*, wenn das aus ihnen gebildete *Spatprodukt* $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,]$ von Null *verschieden* ist (wir verwenden hier die Determinantenschreibweise des Spatproduktes):

$$\underbrace{\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{vmatrix}}_{[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,]}\begin{matrix}0 & 1\\1 & 1\\-1 & 0\end{matrix} \quad \Rightarrow \quad [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = 0 + 0 + 0 - 1 - 0 - 1 = -2 \neq 0$$

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind somit *linear unabhängig*, der vierte Vektor $\vec{r}$ muss daher in der Form

$$\vec{r} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

darstellbar sein. Dies führt zu dem folgenden *linearen Gleichungssystem* für λ_1, λ_2 und λ_3:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ -\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda_3 \\ 0 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Komponentenweise geschrieben (und seitenvertauscht):

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & \lambda_2 - \lambda_3 & = & 2 \\ \text{(II)} & \lambda_1 + \lambda_2 \phantom{{}-\lambda_3} & = & -1 \\ \text{(III)} & -\lambda_1 + \phantom{\lambda_2 +{}} \lambda_3 & = & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Wir addieren die 3 Gleichungen und erhalten:} \\ 2\lambda_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 1 \end{array}$$

Die übrigen Werte erhalten wir aus den Gleichungen (I) und (II), wenn wir dort $\lambda_2 = 1$ setzen:

$$\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad 1 - \lambda_3 = 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = -1; \quad \text{(II)} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 + 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -2$$

Somit ist $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ und der Vektor $\vec{r}$ besitzt die folgende Darstellung:

$$\vec{r} = -2\vec{a} + 1\vec{b} - 1\vec{c} = -2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} =$$

$$= -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Skalare Vektorkomponenten von $\vec{r}$: $r_x = 2$, $r_y = -1$, $r_z = 1$

Anmerkung: Aus der Matrizenrechnung ist bekannt, dass drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ genau dann *linear unabhängig* sind, wenn die aus ihnen gebildete Matrix A *regulär* ist und somit $\det A \neq 0$ gilt. Die *Determinante* von A ist aber nichts anderes als das *Spatprodukt* der drei Vektoren: $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = \det A$.

I11

Stellen Sie fest, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ *linear unabhängig* oder *linear abhängig* sind:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -13 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}$

Die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind genau dann *linear unabhängig*, wenn das aus ihnen gebildete Spatprodukt $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,]$ *nicht* verschwindet (Berechnung der Determinante nach der *Regel von Sarrus*):

$$\text{a)} \; [\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,] = \left|\begin{array}{rrr|rr} 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} [\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\,] = 8 + 20 - 2 + 40 - 8 - 1 = 57 \neq 0 \\ \Rightarrow \quad \text{linear } \textit{unabhängige} \text{ Vektoren} \end{array}\right.$$

$$\text{b)} \; [\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,] = \left|\begin{array}{rrr|rr} 5 & -1 & -13 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 13 & 1 & 5 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} [\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\,] = 0 + 2 - 65 - 0 + 50 + 13 = 0 \\ \Rightarrow \quad \text{linear } \textit{abhängige} \text{ Vektoren} \end{array}\right.$$

I12 Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}$ *komplanar*?

Die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind *komplanar*, wenn ihr Spatprodukt $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,]$ *verschwindet* (Berechnung der Determinante nach der *Regel von Sarrus*):

$$\underbrace{\left|\begin{array}{rrr} 1 & -4 & 11 \\ 5 & 0 & 15 \\ 3 & 3 & 3 \end{array}\right|}_{[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,]}\begin{array}{rr} 1 & -4 \\ 5 & 0 \\ 3 & 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = 0 - 180 + 165 - 0 - 45 + 60 = 0 \\ \Rightarrow \quad \text{Vektoren sind } \textit{komplanar} \end{array} \right.$$

I13 $$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{N}, \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{N}, \quad \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{N}$$

a) Zeigen Sie die *lineare Unabhängigkeit* dieser drei Kraftvektoren.

b) Wie lautet die *resultierende* Kraft $\vec{F}_{\text{res}}$ (Angabe der Kraftkomponenten, des Betrages und der Richtungswinkel)?

a) Die drei Kraftvektoren sind *linear unabhängig*, da das aus ihnen gebildete Spatprodukt *nicht* verschwindet (Rechnung erfolgt *ohne* Einheiten; Berechnung der Determinante nach der *Regel von Sarrus*):

$$\underbrace{\left|\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{array}\right|}_{[\vec{F}_1\,\vec{F}_2\,\vec{F}_3]}\begin{array}{rr} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad [\vec{F}_1\,\vec{F}_2\,\vec{F}_3] = 0 - 20 + 30 - 0 - 6 - 0 = 4 \neq 0$$

b) Die *resultierende* Kraft lautet wie folgt:

$$\vec{F}_{\text{res}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{N} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{N} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{N} = \begin{pmatrix} 1 - 2 + 5 \\ 2 + 0 + 2 \\ 5 + 3 + 0 \end{pmatrix} \text{N} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \text{N}$$

Betrag: $|\vec{F}_{\text{res}}| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 8^2}\ \text{N} = \sqrt{96}\ \text{N} = 9{,}80\ \text{N}$

Berechnung der drei Richtungswinkel α, β und γ ($\alpha = \beta$ wegen $F_x = F_y$)

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{|\vec{F}_{\text{res}}|} = \frac{4\ \text{N}}{\sqrt{96}\ \text{N}} = 0{,}4082 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos 0{,}4082 = 65{,}91^\circ$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{|\vec{F}_{\text{res}}|} = \frac{8\ \text{N}}{\sqrt{96}\ \text{N}} = 0{,}8165 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arccos 0{,}8165 = 35{,}26^\circ$$

Richtungswinkel: $\alpha = \beta = 65{,}91^\circ$, $\gamma = 35{,}26^\circ$

I 14

$$\vec F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{N}, \quad \vec F_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{N}, \quad \vec F_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix} \text{N}, \quad \vec F_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix} \text{N}$$

Zeigen Sie, dass diese Kräfte in einer *Ebene* liegen.

Wir zeigen zunächst, dass das *Spatprodukt* aus $\vec F_1$, $\vec F_2$ und $\vec F_3$ *verschwindet* und diese Kräfte damit in einer *Ebene* liegen (Rechnung in der Determinantenschreibweise ohne Einheiten, Determinantenberechnung nach der *Regel von Sarrus*):

$$\underbrace{\left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -6 \\ 1 & 5 & -7 \end{array}\right|}_{[\vec F_1 \, \vec F_2 \, \vec F_3]} \begin{array}{rr} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad [\vec F_1 \, \vec F_2 \, \vec F_3] = 0 - 12 + 10 - 0 + 30 - 28 = 0$$

Diese Ebene wird z. B. durch die *linear unabhängigen* Kraftvektoren $\vec F_1$ und $\vec F_2$ aufgespannt, die somit als *Richtungsvektoren* der Ebene dienen können. $\vec F_1$ und $\vec F_2$ sind *linear unabhängig* und damit *nicht-kollinear* (d. h. weder parallel noch anti-parallel), da ihr Vektorprodukt *nicht* verschwindet (ohne Einheiten):

$$\vec F_1 \times \vec F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 - 0 \\ 2 - 5 \\ 0 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec 0$$

Der noch verbliebene vierte Kraftvektor $\vec F_4$ liegt dann ebenfalls in dieser Ebene, wenn das *Spatprodukt* der drei Kräfte $\vec F_1$, $\vec F_2$ und $\vec F_4$ *verschwindet*:

$$\underbrace{\left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 6 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 18 \end{array}\right|}_{[\vec F_1 \, \vec F_2 \, \vec F_4]} \begin{array}{rr} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad [\vec F_1 \, \vec F_2 \, \vec F_4] = 0 + 8 - 60 - 0 - 20 + 72 = 0$$

Folgerung: Alle vier Kräfte liegen in einer gemeinsamen Ebene.

I 15

Ein *homogenes* Magnetfeld mit der Flussdichte $B = |\vec B| = B_0$ verläuft *parallel* zur z-Achse eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems. In diesem Feld wird ein metallischer Leiter mit der *konstanten* Geschwindigkeit $v = |\vec v| = v_0$ in Richtung der Raumdiagonale eines achsenparallelen Würfels bewegt (Bild I-5). Die dabei im Leiter induzierte *elektrische Feldstärke* $\vec E$ ist nach dem Induktionsgesetz das *Vektorprodukt* aus dem Geschwindigkeitsvektor $\vec v$ und dem Vektor $\vec B$ der magnetischen Flussdichte.

a) Bestimmen Sie die *Komponenten* und den *Betrag* des Feldstärkevektors $\vec E$.

b) Unter welchem Winkel φ gegenüber dem Magnetfeld bewegt sich der Leiter?

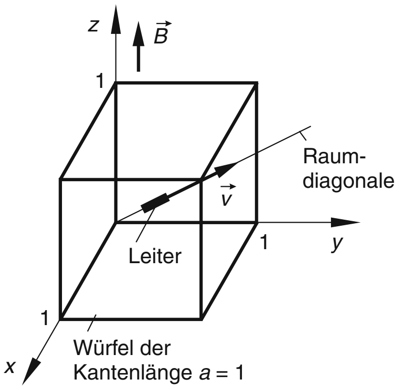


Bild I-5

a) Es gilt:

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{mit} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} = B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = v_0\,\vec{e}$$

Dabei ist $\vec{e}$ der *Einheitsvektor* in Richtung der Raumdiagonale. Wegen der *Symmetrie* müssen die drei Vektorkoordinaten von $\vec{e}$ übereinstimmen:

$$e_x = e_y = e_z = a \quad \Rightarrow \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\vec{e}| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1/\sqrt{3}$$

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = v_0\,\vec{e} = \frac{v_0}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir den folgenden *elektrischen Feldstärkevektor*:

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} = \frac{v_0}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{v_0 B_0}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{v_0 B_0}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 0 - 1 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \frac{v_0 B_0}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Skalare Komponenten der elektrischen Feldstärke:

$$E_x = \frac{v_0 B_0}{\sqrt{3}}, \quad E_y = -E_x = -\frac{v_0 B_0}{\sqrt{3}}, \quad E_z = 0$$

Betrag der elektrischen Feldstärke:

$$E = |\vec{E}| = \frac{v_0 B_0}{\sqrt{3}} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \frac{v_0 B_0}{\sqrt{3}} \sqrt{2} = v_0 B_0 \sqrt{\frac{2}{3}}$$

b) der gesuchte Winkel φ ist der von den Vektoren $\vec{v}$ bzw. $\vec{e}$ und $\vec{B}$ eingeschlossene Winkel. Wir erhalten ihn über das *skalare Produkt* dieser Vektoren:

$$\vec{e} \cdot \vec{B} = |\vec{e}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\varphi = 1 \cdot B_0 \cdot \cos\varphi = B_0 \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow$$

$$B_0 \cdot \cos\varphi = \vec{e} \cdot \vec{B} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{B_0}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{B_0}{\sqrt{3}} (0 + 0 + 1) = \frac{B_0}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54{,}74^\circ$$

I16

Eine Ladung q bewege sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch ein elektromagnetisches Feld mit der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ und der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ und erfahre dort die Kraft $\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$. Bestimmen Sie für

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ -300 \\ -300 \end{pmatrix} \frac{\text{V}}{\text{m}}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{\text{V s}}{\text{m}^2} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 100 \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

die *Geschwindigkeitskomponenten* v_y und v_z so, dass die Bewegung *kräftefrei* erfolgt.

Aus der Bedingung $\vec{F} = \vec{0}$ erhalten wir folgende Vektorgleichung (Rechnung ohne Einheiten):

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{0} \;\Big|: q \quad \Rightarrow \quad \vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{0} \quad \text{oder} \quad (\vec{v} \times \vec{B}) = -\vec{E} \;\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 100 \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_y - v_z \\ 2v_z + 100 \\ 100 - 2v_y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -300 \\ -300 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} -v_y - v_z \\ 2v_z + 100 \\ 100 - 2v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Komponentenweise Schreibweise führt zu einem leicht lösbaren *linearen Gleichungssystem* mit drei Gleichungen für die beiden unbekannten Geschwindigkeitskomponenten v_y und v_z:

(I) $-v_y - v_z = 0 \quad \Rightarrow \quad v_z = -v_y$

(II) $2v_z + 100 = 300 \quad \Rightarrow \quad 2v_z = 200 \quad \Rightarrow \quad v_z = 100$

(III) $100 - 2v_y = 300 \quad \Rightarrow \quad -2v_y = 200 \quad \Rightarrow \quad v_y = -100$

Lösung: $v_x = 100\,\text{m/s}, \; v_y = -100\,\text{m/s}, \; v_z = 100\,\text{m/s}$

I17

Eine Ladung q, die sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch ein homogenes Magnetfeld mit der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ bewegt, erfährt dort die sog. „*Lorentzkraft*“ $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$.

a) Wann erfolgt die Bewegung *kräftefrei*?

b) Zeigen Sie: Das Magnetfeld verrichtet an der Ladung *keine* Arbeit.

---

a) Aus $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{0}$ folgt wegen $q \neq 0$, dass das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{B}$ *verschwinden* muss. Dies ist bekanntlich genau dann der Fall, wenn die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{B}$ *kollinear* sind, d. h. entweder *parallel* oder *antiparallel* verlaufen.

Folgerung: Die Ladung q bewegt sich *kräftefrei*, wenn sie in Feldrichtung oder in der Gegenrichtung in das Magnetfeld eintritt (Bild I-6).

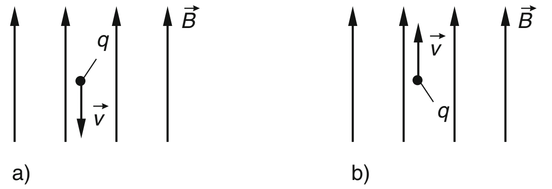


Bild I-6

b) Die Bahnkurve der Ladung q im Magnetfeld lässt sich durch einen *zeitabhängigen* Ortsvektor $\vec{r} = \vec{r}(t)$ beschreiben. Die *Änderung* des Ortsvektors in dem kleinen Zeitintervall dt beträgt dann $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$ (Bild I-7). Die auf die Ladung bei dieser Verschiebung um $d\vec{r}$ einwirkende *Lorentzkraft* verrichtet dabei definitionsgemäß die folgende Arbeit dW (die Arbeit dW ist das *Skalarprodukt* aus dem Kraftvektor $\vec{F}$ und dem Verschiebungsvektor $d\vec{r}$):

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}\,dt =$$

$$= \underbrace{\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})}_{[\vec{v}\;\vec{v}\;\vec{B}]}\, q\,dt = \underbrace{[\vec{v}\,\vec{v}\,\vec{B}]}_{0}\, q\,dt = 0$$

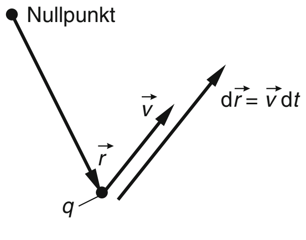


Bild I-7

Ein *Spatprodukt* mit zwei *gleichen* Vektoren *verschwindet* bekanntlich. Dies aber bedeutet, dass das Magnetfeld *keine* Arbeit an der Ladung verrichtet und zwar *unabhängig* von der Geschwindigkeit $\vec{v}$ der Ladung.

2 Anwendungen

In diesem Abschnitt finden Sie ausschließlich *anwendungsorientierte* Aufgaben zu folgenden Themen:

- Geraden (vektorielle Parameterdarstellung, Richtungsvektor, Abstand Punkt-Gerade, Abstand paralleler Geraden, windschiefe Geraden, Schnittpunkt und Schnittwinkel von Geraden)
- Ebenen (vektorielle Parameterdarstellung, Koordinatendarstellung, Richtungsvektoren, Normalenvektor, Abstand Punkt-Ebene, Abstand Gerade-Ebene, Abstand paralleler Ebenen, Schnittpunkt und Schnittwinkel mit einer Geraden, Schnittgerade und Schnittwinkel mit einer Ebene)
- Arbeit einer Kraft an Massen und elektrischen Ladungen in Kraftfeldern
- Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor von Massen und elektrischen Ladungen

Hinweise

Lehrbuch: Band 1, Kapitel II.4

Formelsammlung: Kapitel II.4

I18

Wie lautet die *Vektorgleichung* der Geraden g durch den Punkt $P_1 = (1;\,5;\,10)$ *parallel* zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$? Welche Punkte gehören zu den Parameterwerten $\lambda = -3$, $\lambda = 5$ und $\lambda = 10$?

Bestimmen Sie ferner alle auf der Geraden g gelegenen Punkte, die von P_1 den Abstand $d = 6$ haben.

Ansatz der Geradengleichung in der *Punkt-Richtungs-Form* mit dem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ (der Vektor $\vec{a}$ ist der *Richtungsvektor* der Geraden):

$$g\colon\quad \vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda\,\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda \\ -\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda \\ 5 - \lambda \\ 10 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

Ortsvektoren für die Parameterwerte $\lambda = -3$, $\lambda = 5$ und $\lambda = 10$:

$$\vec{r}(\lambda = -3) = \begin{pmatrix} 1 - 6 \\ 5 + 3 \\ 10 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \vec{r}(\lambda = 5) = \begin{pmatrix} 1 + 10 \\ 5 - 5 \\ 10 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix};$$

$$\vec{r}(\lambda = 10) = \begin{pmatrix} 1 + 20 \\ 5 - 10 \\ 10 + 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -5 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Koordinaten der zugehörigen Punkte: $(-5;\,8;\,4)$, $(11;\,0;\,20)$, $(21;\,-5;\,30)$

Aus Bild I-8 entnehmen wir, dass es genau *zwei* Punkte Q_1 und Q_2 gibt, die vom Punkt P_1 den Abstand $d = 6$ haben. Daher gilt:

$$|\overrightarrow{P_1 Q_1}| = |\overrightarrow{P_1 Q_2}| = |\lambda\,\vec{a}| = d = 6$$

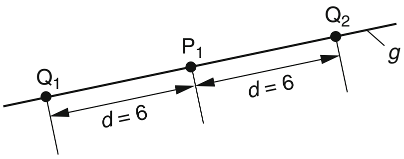


Bild I-8

$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}| = |\lambda| \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = |\lambda| \cdot 3 = 6 \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm 2$$

Zur Erinnerung: Die Betragsgleichung $|x| = c > 0$ hat *zwei* Lösungen $x_{1/2} = \pm c$.

Wir bestimmen noch die *Ortsvektoren* der zugehörigen Punkte:

$$\vec{r}(Q_1) = \vec{r}(\lambda_1 = 2) = \begin{pmatrix} 1 + 4 \\ 5 - 2 \\ 10 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}; \quad \vec{r}(Q_2) = \vec{r}(\lambda_2 = -2) = \begin{pmatrix} 1 - 4 \\ 5 + 2 \\ 10 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Koordinaten der zugehörigen Punkte: $Q_1 = (5;\,3;\,14)$, $Q_2 = (-3;\,7;\,6)$

I19

Stellen Sie fest, ob die drei Punkte in einer *Geraden* liegen und bestimmen Sie *gegebenenfalls* die Vektorgleichung der Geraden.

a) $P_1 = (3;\,3;\,5)$, $P_2 = (1;\,-2;\,4)$, $P_3 = (-5;\,-17;\,1)$

b) $A = (2;\,1;\,0)$, $B = (3;\,4;\,2)$, $C = (-1;\,1;\,2)$

Drei Punkte P_1, P_2 und P_3 liegen genau dann in einer *Geraden*, wenn die Vektoren $\overrightarrow{P_1 P_2}$ und $\overrightarrow{P_1 P_3}$ *kollinear* sind und somit das *Vektorprodukt* dieser Vektoren *verschwindet* (Bild I-9).

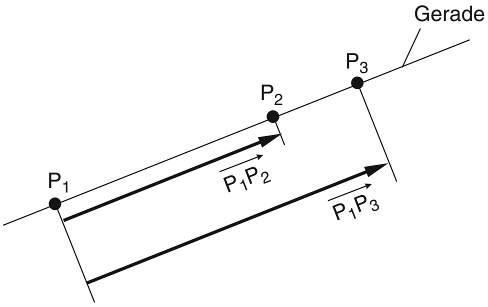


Bild I-9

a) $$\overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} 1 - 3 \\ -2 - 3 \\ 4 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{P_1 P_3} = \begin{pmatrix} -5 - 3 \\ -17 - 3 \\ 1 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -20 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_1 P_2} \times \overrightarrow{P_1 P_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ -20 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 - 20 \\ 8 - 8 \\ 40 - 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Die Vektoren sind demnach *kollinear*, somit liegen die drei Punkte in einer Geraden. Zum gleichen Ergebnis kommt man, wenn man erkennt, dass der Vektor $\overrightarrow{P_1 P_3}$ genau das *Vierfache* des Vektors $\overrightarrow{P_1 P_2}$ ist:

$$\overrightarrow{P_1 P_3} = \begin{pmatrix} -8 \\ -20 \\ -4 \end{pmatrix} = 4 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{P_1 P_2}} = 4\,\overrightarrow{P_1 P_2} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{P_1 P_2} \text{ und } \overrightarrow{P_1 P_3} \text{ sind } \textit{kollinear}$$

Geradengleichung in der Parameterform (Zwei-Punkte-Form)

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 - 3 \\ -2 - 3 \\ 4 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2\lambda \\ 3 - 5\lambda \\ 5 - \lambda \end{pmatrix}$$

b) Wir prüfen, ob die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ *kollinear* sind, d. h. in einer Geraden liegen:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4-1 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 1-1 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ -6-2 \\ 0+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Die Vektoren sind *nicht-kollinear*, d. h. die Punkte A, B und C liegen *nicht* in einer (gemeinsamen) Geraden.

I20

Von einer *Geraden* g ist der Punkt $P_1 = (2;\,2;\,1)$ und der *Richtungsvektor* $\vec{a}$ mit den *skalaren Vektorkomponenten* $a_x = 1$, $a_y = -2$ und $a_z = 5$ bekannt. Welchen *Abstand* besitzt der Punkt $A = (5;\,10;\,3)$ bzw. $B = (-1;\,8;\,-14)$ von dieser Geraden?

Gleichung der Geraden in der Punkt-Richtungs-Form

$$g\colon \quad \vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda\,\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ 5\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\lambda \\ 2-2\lambda \\ 1+5\lambda \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Abstand d des Punktes A von der Geraden g (→ FS: Kap. II.4.2.3)

$$\vec{a} \times (\vec{r}_A - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5-2 \\ 10-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-40 \\ 15-2 \\ 8+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -44 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times (\vec{r}_A - \vec{r}_1| = \sqrt{(-44)^2 + 13^2 + 14^2} = \sqrt{2301}; \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{30}$$

$$d = \frac{|\vec{a} \times (\vec{r}_A - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{2301}}{\sqrt{30}} = 8{,}758$$

Abstand d des Punktes B von der Geraden g

$$\vec{a} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1-2 \\ 8-2 \\ -14-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30-30 \\ -15+15 \\ 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$|\vec{a} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_1)| = |\vec{0}| = 0; \quad |\vec{a}| = \sqrt{30} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{|\vec{a} \times (\vec{r}_B - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|} = \frac{0}{\sqrt{30}} = 0$$

Der Punkt B liegt somit *auf* der Geraden.

I21

Gegeben sind zwei Geraden g_1 und g_2 mit dem *gemeinsamen* Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Die Gerade g_1 enthält den Punkt $P_1 = (5;\,2;\,3)$, die Gerade g_2 den Punkt $P_2 = (1;\,-1;\,8)$.

Welchen *Abstand* haben diese Geraden voneinander?

Bestimmen Sie ferner einen *Normalenvektor* der von den Geraden g_1 und g_2 aufgespannten Ebene E.

Für die Berechnung des Abstandes d der *parallelen* Geraden benötigen wir die *Beträge* der Vektoren $\vec{a} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ und $\vec{a}$ (→ FS: Kap. II.4.2.4):

$$\vec{a} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 - 5 \\ -1 - 2 \\ 8 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 + 6 \\ -8 - 5 \\ -3 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)| = \sqrt{21^2 + (-13)^2 + 9^2} = \sqrt{691}; \qquad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$d = \frac{|\vec{a} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{691}}{\sqrt{14}} = 7{,}025$$

Bestimmung eines Normalenvektors $\vec{n}$ der Ebene E

Die Ebene E enthält beide Geraden und somit den Richtungsvektor $\vec{a}$ sowie die Punkte P_1 und P_2 und somit den Vektor $\overrightarrow{P_1 P_2}$. Der gesuchte *Normalenvektor* $\vec{n}$ ist dann das *Vektorprodukt* aus $\vec{a}$ und $\overrightarrow{P_1 P_2}$:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 - 5 \\ -1 - 2 \\ 8 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 + 6 \\ -8 - 5 \\ -3 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

I22

Zeigen Sie, dass die Geraden g_1 und g_2 mit den Parameterdarstellungen

$$\vec{r}(\lambda_1) = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}(\lambda_2) = \vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

windschief sind und berechnen Sie ihren *Abstand*.

Die Geraden sind genau dann *windschief*, wenn die Bedingungen $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq \vec{0}$ und $[\vec{a}_1 \vec{a}_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] \neq 0$ erfüllt sind:

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 - 0 \\ 16 - 3 \\ 0 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$[\vec{a}_1 \vec{a}_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] = \begin{vmatrix} 1 & 4 & (-1 - 2) \\ -3 & 0 & (5 - 1) \\ 4 & 3 & (1 - 3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -3 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Determinantenberechnung nach der *Regel von Sarrus*:

$$\left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 4 & -3 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad [\vec{a}_1 \vec{a}_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] = 0 + 64 + 27 - 0 - 12 - 24 = 55 \neq 0$$

Die Geraden g_1 und g_2 sind also *windschief*. Ihr *Abstand* d beträgt (→ FS: Kap. II.4.2.5):

$$d = \frac{|[\vec{a}_1 \vec{a}_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)]|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} = \frac{55}{\sqrt{(-9)^2 + 13^2 + 12^2}} = \frac{55}{\sqrt{394}} = 2{,}771$$

I 23

Zeigen Sie, dass sich die Geraden g_1 und g_2 schneiden und berechnen Sie den *Schnittpunkt* S und den *Schnittwinkel* φ.

$$g_1\colon \quad \vec{r}(\lambda_1) = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$g_2\colon \quad \vec{r}(\lambda_2) = \vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die beiden Geraden *schneiden* sich genau dann in einem Punkt S, wenn die Bedingungen $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq \vec{0}$ und $[\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] = 0$ erfüllt sind:

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 12 \\ 0 - \ \ 2 \\ 3 - \ \ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -\ \ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$[\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & (5-5) \\ 1 & 3 & (4-1) \\ 4 & 2 & (6-4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{identische Spalten} \;\Rightarrow\; \text{Determinante} = 0$$

Die Geraden kommen also zum Schnitt.

Berechnung des Schnittpunktes $S = (x_S;\, y_S;\, z_S)$

Der *Schnittpunkt* S liegt *sowohl* auf g_1 *als auch* auf g_2. Somit gilt für den zugehörigen *Ortsvektor* $\vec{r}_S$ die folgende Bedingung:

$$\vec{r}_S = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1 = \vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir formen diese Vektorgleichung noch geringfügig um:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ 4\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3\lambda_2 \\ -2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 \\ 4\lambda_1 - 2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die *Komponentenschreibweise* führt zu einem leicht lösbaren *gestaffelten* linearen Gleichungssystem mit den beiden unbekannten Parametern λ_1 und λ_2:

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & \lambda_1 = 0 & \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(II)} & \lambda_1 - 3\lambda_2 = 3 & \Rightarrow \quad 0 - 3\lambda_2 = 3 \\ \text{(III)} & 4\lambda_1 - 2\lambda_2 = 2 & \Rightarrow \quad 0 - 2\lambda_2 = 2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = -1$$

Der *Ortsvektor* des *Schnittpunktes* S lautet demnach (berechnet aus der Gleichung der Geraden g_1 für $\lambda_1 = 0$):

$$\vec{r}_S = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S = (5;\, 1;\, 4)$$

Kontrolle (Berechnung des Ortsvektors aus der Gleichung der *zweiten* Geraden g_2 für $\lambda_2 = -1$):

$$\vec{r}_S = \vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Schnittwinkels φ

Definitionsgemäß ist der *Schnittwinkel* φ der Winkel zwischen den beiden *Richtungsvektoren* $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$. Wir erhalten ihn über das *Skalarprodukt* dieser Vektoren:

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = |\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2| \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}$$

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 + 3 + 8 = 11$$

$$|\vec{a}_1| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{18}; \quad |\vec{a}_2| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{11}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{13}} = 0{,}7191 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos 0{,}7191 = 44{,}02^\circ$$

I 24

Welcher der drei Punkte A, B und C liegen auf der in der vektoriellen Parameterform vorliegenden Geraden g?

$$g: \quad \vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda \\ 2 + \lambda \\ 4 + 2\lambda \end{pmatrix} \qquad (\text{mit } \lambda \in \mathbb{R})$$

$$A = (4;\ 1;\ 2), \quad B = (7;\ -1;\ -2), \quad C = (-15;\ 10;\ 20)$$

Es gibt *verschiedene* Möglichkeiten festzustellen, ob ein Punkt P auf einer Geraden g liegt oder nicht. Der Punkt $A = (4;\ 1;\ 2)$ beispielsweise liegt genau dann auf g, wenn die Vektoren $\overrightarrow{P_1 A}$ und $\vec{a}$ *kollinear* sind (in einer Linie liegen), d. h. $\overrightarrow{P_1 A} = \lambda \vec{a}$ und somit $\overrightarrow{P_1 A} \times \vec{a} = \vec{0}$ ist (siehe Bild I-10). Dies ist hier *nicht* der Fall:

$$\overrightarrow{P_1 A} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 1 - 2 \\ 2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

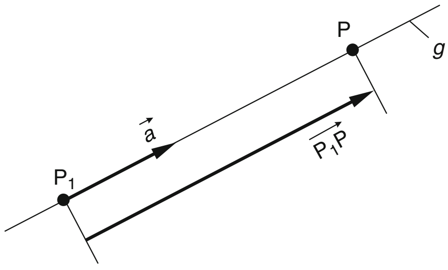


Bild I-10

$$\overrightarrow{P_1 A} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 2 \\ 4 - 6 \\ 3 - 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Der Punkt A liegt somit *nicht* auf der Geraden g.

Bei den Punkten B und C wollen wir einen anderen Lösungsweg einschlagen. Wenn B auf der Geraden g liegt, dann gehört zu B ein *eindeutiger* Parameterwert λ der Geradengleichung. Wir erhalten ein *lineares Gleichungssystem* mit drei Gleichungen für den noch unbekannten Parameter λ:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda \\ 2 + \lambda \\ 4 + 2\lambda \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{(I)} & 1 - 2\lambda = 7 \\ \text{(II)} & 2 + \lambda = -1 \\ \text{(III)} & 4 + 2\lambda = -2 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -3$$

Alle drei Gleichungen liefern den selben Wert $\lambda = -3$, d. h. der Punkt B liegt *auf* der Geraden g.

Ebenso gehen wir beim Punkt C vor:

$$\vec{r}_C = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -15 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda \\ 2 + \lambda \\ 4 + 2\lambda \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{(I)} & 1 - 2\lambda = -15 \\ \text{(II)} & 2 + \lambda = 10 \\ \text{(III)} & 4 + 2\lambda = 20 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 8$$

Auch C liegt *auf* g.

Ergebnis: Die Punkte B und C liegen *auf* der Geraden g, *Punkt* A dagegen *nicht*.

I25

Gegeben ist eine Gerade g mit der folgenden vektoriellen Parameterdarstellung (alle Koordinaten in der Einheit m):

$$g: \quad \vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + \lambda \\ 1 + 2\lambda \\ 2 + \lambda \end{pmatrix} \qquad (\text{mit } \lambda \in \mathbb{R})$$

Eine Masse wird durch die konstante Kraft $\vec{F}$ mit den Kraftkomponenten $F_x = 8\,\text{N}$, $F_y = -2\,\text{N}$ und $F_z = 10\,\text{N}$ längs dieser Geraden vom Punkt A aus nach B verschoben. Diese Punkte sind durch die Parameterwerte $\lambda = 2$ (Punkt A) und $\lambda = 10$ (Punkt B) festgelegt. Welche *Arbeit* W wird dabei an der Masse verrichtet? Wie groß ist der *Winkel* φ zwischen der Kraft und dem Verschiebungsvektor?

Der *Verschiebungsvektor* $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$ lässt sich aus den Ortsvektoren der Punkte A und B wie folgt bestimmen (siehe Bild I-11; alle Vektorkoordinaten in m):

$$\vec{r}(A) = \vec{r}(\lambda = 2) = \begin{pmatrix} 4 + 2 \\ 1 + 4 \\ 2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(B) = \vec{r}(\lambda = 10) = \begin{pmatrix} 4 + 10 \\ 1 + 20 \\ 2 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix}$$

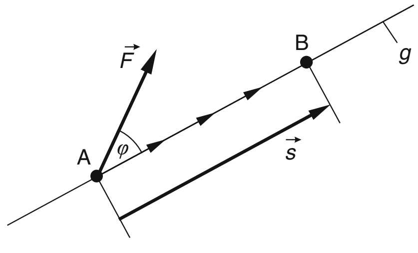


Bild I-11

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = \vec{r}(B) - \vec{r}(A) = \begin{pmatrix} 14 \\ 21 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Die von der Kraft $\vec{F}$ bei der Verschiebung der Masse von A nach B verrichtete *Arbeit* W ist das *Skalarprodukt* aus dem Kraft- und dem Verschiebungsvektor:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} \text{N} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} \text{m} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} \text{Nm} = (64 - 32 + 80)\,\text{Nm} = 112\,\text{Nm}$$

Auch die *Winkelberechnung* läuft über dieses Skalarprodukt, wobei wir noch die *Beträge* der Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{s}$ benötigen:

$$|\vec{F}| = \sqrt{8^2 + (-2)^2 + 10^2}\,\text{N} = \sqrt{168}\,\text{N}; \quad |\vec{s}| = \sqrt{8^2 + 16^2 + 8^2}\,\text{m} = \sqrt{384}\,\text{m}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{W}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{112\,\text{Nm}}{\sqrt{168}\,\text{N} \cdot \sqrt{384}\,\text{m}} = 0{,}4410 \quad \Rightarrow$$

$$\varphi = \arccos 0{,}4410 = 63{,}83\,^\circ$$

Ergebnis: Arbeit $W = 192\,\text{N m}$; Winkel zwischen dem Kraft- und dem Verschiebungsvektor: $\varphi = 63{,}83\,^\circ$

I 26

In einem *homogenen* elektrischen Feld mit dem Feldstärkevektor $\vec{E}$ wird eine Ladung q längs einer Geraden g vom Punkt A aus nach B verschoben. Berechnen Sie die dabei vom Feld verrichtete *Arbeit* W sowie den *Winkel* φ zwischen dem Kraft- und dem Verschiebungsvektor.

$$g: \ \vec{r}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda \\ 1 + \ \lambda \\ 1 + 2\lambda \end{pmatrix} \ (\text{in m}; \lambda \in \mathbb{R}); \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\text{V}}{\text{m}}; \quad q = 10^{-9}\,\text{As}$$

Ortsvektoren von A und B: $\vec{r}(A) = \vec{r}(\lambda = -2)$; $\vec{r}(B) = \vec{r}(\lambda = 3)$

Wir bestimmen zunächst die *Ortsvektoren* der Punkte A und B und daraus den benötigten *Verschiebungsvektor* $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$ (Bild I-12):

$$\vec{r}(A) = \vec{r}(\lambda = -2) = \begin{pmatrix} 1 - 4 \\ 1 - 2 \\ 1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \ (\text{in m}); \quad \vec{r}(B) = \vec{r}(\lambda = 3) = \begin{pmatrix} 1 + 6 \\ 1 + 3 \\ 1 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \ (\text{in m})$$

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = \vec{r}(B) - \vec{r}(A) = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \ (\text{in m})$$

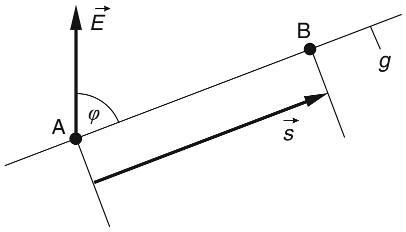


Bild I-12

Die auf die Ladung $q = 10^{-9}$ As im elektrischen Feld einwirkende *Kraft* beträgt dann:

$$\vec{F} = q\vec{E} = 10^{-9}\,\text{As} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\text{V}}{\text{m}} =$$

$$= 10^{-9} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\text{V As}}{\text{m}} = 10^{-9} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{N}$$

Umrechnung der Einheiten: $1\,\text{V As} = 1\,\text{W s} = 1\,\text{N m} \quad \Rightarrow \quad 1\,\frac{\text{V As}}{\text{m}} = 1\,\text{N}$

Die vom elektrischen Feld an der Ladung verrichtete *Arbeit* W erhält man definitionsgemäß als *Skalarprodukt* aus Kraft- und Verschiebungsvektor:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = 10^{-9} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{N} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \mathrm{m} = 10^{-9} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \mathrm{Nm} =$$

$$= 10^{-9} (50 - 10 + 10) \, \mathrm{Nm} = 5 \cdot 10^{-8} \, \mathrm{Nm} = 5 \cdot 10^{-8} \, \mathrm{Ws}$$

Den *Winkel* φ zwischen dem Kraft- und dem Verschiebungsvektor erhalten wir aus dem *Skalarprodukt* dieser Vektoren wie folgt:

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad \cos \varphi = \frac{W}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot 10^{-9} \, \mathrm{N} = \sqrt{30} \cdot 10^{-9} \, \mathrm{N}; \quad |\vec{s}| = \sqrt{10^2 + 5^2 + 10^2} \, \mathrm{m} = \sqrt{225} \, \mathrm{m} = 15 \, \mathrm{m}$$

$$\cos \varphi = \frac{W}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{5 \cdot 10^{-8} \, \mathrm{Nm}}{\sqrt{30} \cdot 10^{-9} \, \mathrm{N} \cdot 15 \, \mathrm{m}} = \frac{10}{3 \sqrt{30}} = 0{,}6086 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos 0{,}6086 = 52{,}51^\circ$$

Ergebnis: Arbeit $W = 5 \cdot 10^{-8} \, \mathrm{Ws}$; Winkel zwischen dem Kraft- und dem Verschiebungsvektor: $\varphi = 52{,}51^\circ$

I27

Die Drehachse eines starren Körpers liegt in der Geraden g mit der vektoriellen Parameterdarstellung

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{alle Koordinaten in cm}; \; \lambda \in \mathbb{R})$$

Der Körper *rotiert* um diese Achse mit der (konstanten) Winkelgeschwindigkeit $|\vec{\omega}| = \omega = 10 \sqrt{3} \, \mathrm{s}^{-1}$. Bestimmen Sie den *Geschwindigkeitsvektor* $\vec{v}$ des Körperpunktes $Q = (2; 1; 2)$ cm.

Anleitung: Es gilt $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Dabei ist $\vec{r}$ der *Ortsvektor* von Q, von einem *beliebigen* Punkt der Drehachse aus gemessen und $\vec{\omega}$ der *Vektor der Kreisfrequenz* ($\vec{\omega}$ liegt in der Drehachse).

Wir führen gemäß Bild I-13 die folgenden Bezeichnungen ein:

g: Drehachse
P_0 : Bezugspunkt auf der Drehachse (siehe weiter unten)
$\vec{r}_0$: Ortsvektor von P_0
$\vec{r}_Q$: Ortsvektor von Q
O: Nullpunkt des räumlichen Koordinatensystems

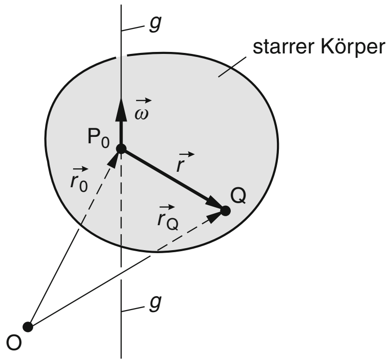


Bild I-13

Den auf der Drehachse g liegenden Bezugspunkt P_0 legen wir (willkürlich) durch den Parameterwert $\lambda = 0$ fest (sie können auch einen *anderen* Bezugspunkt wählen). Sein *Ortsvektor* lautet damit:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(\lambda = 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{in cm})$$

Wir bestimmen aus Bild I-13 den benötigten *Verbindungsvektor* $\vec{r} = \overrightarrow{P_0 Q}$:

$$\vec{r}_0 + \vec{r} = \vec{r}_Q \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}_Q - \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(in cm)}$$

Der *Kreisfrequenzvektor* $\vec{\omega}$ vom Betrag $\omega = 10\sqrt{3}\ \text{s}^{-1}$ liegt in der Drehachse und ist somit zum Richtungsvektor $\vec{a}$ der Geraden g *parallel*. Durch *Normierung* von $\vec{a}$ erhalten wir den benötigten Einheitsvektor $\vec{e}$ *gleicher* Richtung:

$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|}\,\vec{a} \quad \text{mit} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für den *Bahngeschwindigkeitsvektor* $\vec{v}$ des Punktes Q auf dem starren Körper folgt dann unter Berücksichtigung von $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}$:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega\,\vec{e} \times \vec{r} = \omega\,(\vec{e} \times \vec{r}) \quad \Rightarrow$$

$$\vec{v} = 10\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{cm} \cdot \text{s}^{-1} = 10 \begin{pmatrix} -1-1 \\ 1-1 \\ 1+1 \end{pmatrix} \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 10 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{\text{cm}}{\text{s}} = \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

(Man beachte die Einheiten: ω in s^{-1}, $\vec{r}$ in cm, $\vec{e}$ ist dimensionslos $\Rightarrow$ $\vec{v}$ in cm/s)

Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}$:

$$v_x = -20\ \text{cm/s}, \quad v_y = 0\ \text{cm/s}, \quad v_z = 20\ \text{cm/s}$$

Betrag der Geschwindigkeit:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-20)^2 + 0^2 + 20^2}\ \text{cm/s} = \sqrt{800}\ \text{cm/s} = 20\sqrt{2}\ \text{cm/s} = 28{,}28\ \text{cm/s}$$

I28

Elektronen bewegen sich, wenn sie *schräg* in ein homogenes Magnetfeld eintreten, auf einer *schraubenlinienförmigen* Bahn mit dem zeitabhängigen Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\omega t) \\ R \cdot \sin(\omega t) \\ c\,t \end{pmatrix}$$

($\omega > 0$: Kreisfrequenz; R: Radius; $c > 0$; siehe hierzu Bild I-14).

Bestimmen Sie den *Geschwindigkeitsvektor* $\vec{v}$ sowie den *Beschleunigungsvektor* $\vec{a}$ sowie deren Beträge.

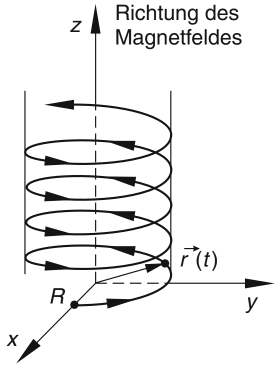


Bild I-14

Die *Geschwindigkeit* $\vec{v}$ ist die 1. Ableitung, die *Beschleunigung* $\vec{a}$ die 2. Ableitung des Ortsvektors $\vec{r} = \vec{r}(t)$ nach der Zeit t, wobei *komponentenweise* zu differenzieren ist. Wir erhalten mit Hilfe der *Kettenregel* (Substitution: $u = \omega t$):

Geschwindigkeitsvektor $v = v(t)$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt}\,\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} R \cdot \cos(\omega t) \\ R \cdot \sin(\omega t) \\ c t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\omega \cdot \sin(\omega t) \\ R\omega \cdot \cos(\omega t) \\ c \end{pmatrix}$$

$$v^2 = |\vec{v}|^2 = R^2\omega^2 \cdot \sin^2(\omega t) + R^2\omega^2 \cdot \cos^2(\omega t) + c^2 =$$

$$= R^2\omega^2 [\underbrace{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)}_{1}] + c^2 = R^2\omega^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad v = |\vec{v}| = \sqrt{R^2\omega^2 + c^2} = \text{const.}$$

Beschleunigungsvektor $\vec{a} = \vec{a}(t)$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}\,\vec{v} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} -R\omega \cdot \sin(\omega t) \\ R\omega \cdot \cos(\omega t) \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\omega^2 \cdot \cos(\omega t) \\ -R\omega^2 \cdot \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = -R\omega^2 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a^2 = |\vec{a}|^2 = (-R\omega^2)^2 (\underbrace{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)}_{1} + 0) = R^2\omega^4 \quad \Rightarrow \quad a = |\vec{a}| = R\omega^2 = \text{const.}$$

Folgerung: Die Elektronen bewegen sich in dem Magnetfeld auf schraubenlinienförmigen Bahnen mit (dem Betrage nach) *konstanter* Geschwindigkeit und *konstanter* Beschleunigung.

I 29

Von einer Geraden g sind der Punkt P_1 und der Richtungsvektor $\vec{a}$ bekannt, von einer Ebene E der Punkt P_0 und der Normalenvektor $\vec{n}$:

$$\text{Gerade } g\colon \quad P_1 = (5;\,1;\,5), \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \text{Ebene } E\colon \quad P_0 = (1;\,1;\,8); \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass Gerade und Ebene *parallel* verlaufen und berechnen Sie ihren *Abstand*.

Gerade g und Ebene E sind genau dann *parallel*, wenn das *Skalarprodukt* aus dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene und dem Richtungsvektor $\vec{a}$ der Geraden *verschwindet*:

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -4 + 0 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad E \parallel g$$

Abstand d zwischen g und E (→ FS: Kap. II.4.3.5)

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5-1 \\ 1-1 \\ 5-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = -8 + 0 - 3 = -11$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|}{|\vec{n}|} = \frac{|-11|}{\sqrt{5}} = \frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{\sqrt{5}\,\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{5} = \frac{11}{5}\sqrt{5} = 4{,}919$$

I 30

Zeigen Sie zunächst, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *nicht-kollinear* sind und somit zusammen mit dem Punkt $P_1 = (2;\ 1;\ -3)$ in eindeutiger Weise eine *Ebene* E festlegen.

a) Wie lautet die *Parameterdarstellung* dieser Ebene?

b) Geben Sie die *Koordinatendarstellung* der Ebene an.

c) Welche Punkte der Ebene E gehören zu den Parameterwertepaaren $(\lambda;\ \mu) = (1;\ 2)$ und $(\lambda;\ \mu) = (-3;\ 4)$?

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann *nicht-kollinear*, wenn ihr Vektorprodukt *nicht* verschwindet. Dies ist hier der Fall:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 3 \\ -3 - 2 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ können daher als *Richtungsvektoren* der Ebene E dienen, das Vektorprodukt selbst ist ein *Normalenvektor* der Ebene: $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$.

a) Parameterdarstellung der Ebene *E* (Punkt-Richtungs-Form)

$$\vec{r}(\lambda;\ \mu) = r_1 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 0 \\ 3\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 + 2\lambda - \mu \\ 1 + \mu \\ -3 + 3\lambda + \mu \end{pmatrix} \qquad (\text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ und } \mu \in \mathbb{R})$$

b) Koordinatendarstellung der Ebene *E*

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 1 \\ z + 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-3(x - 2) - 5(y - 1) + 2(z + 3) = -3x + 6 - 5y + 5 + 2z + 6 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-3x - 5y + 2z + 17 = 0$$

c) Ortsvektoren für die Parameterwertepaare $(\lambda;\ \mu) = (1;\ 2)$ und $(\lambda;\ \mu) = (-3;\ 4)$:

$$\vec{r}(\lambda = 1;\ \mu = 2) = \begin{pmatrix} 2 + 2 - 2 \\ 1 + 2 \\ -3 + 3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{r}(\lambda = -3;\ \mu = 4) = \begin{pmatrix} 2 - 6 - 4 \\ 1 + 4 \\ -3 - 9 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Koordinaten der zugehörigen Punkte: $(2;\ 3;\ 2)$, $(-8;\ 5;\ -8)$

I31

Zeigen Sie: Die drei Punkte $P_1 = (5;\,1;\,-1)$, $P_2 = (-2;\,0;\,3)$ und $P_3 = (1;\,6;\,3)$ liegen in einer *Ebene* E.

a) Wie lautet die Gleichung dieser Ebene in der *vektoriellen Parameterform*?

b) Bestimmen Sie die *Koordinatendarstellung* der Ebene.

c) Welche *Koordinaten* besitzen die in der Ebene E gelegenen Punkte, die zu den Parameterwertepaaren $(\lambda;\,\mu) = (-1;\,3)$ und $(\lambda;\,\mu) = (2;\,-2)$ gehören?

Wir zeigen zunächst mit Hilfe des Vektorproduktes, dass die Vektoren $\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ und $\vec{b} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$, gebildet aus den Ortsvektoren der drei Punkte P_1, P_2 und P_3, *nicht-kollinear* sind und damit als *Richtungsvektoren* der Ebene E geeignet sind (siehe hierzu auch Bild I-15):

$$\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \qquad \vec{b} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ 4 - 20 \\ -16 + 28 \\ -35 - \ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -24 \\ 12 \\ -39 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

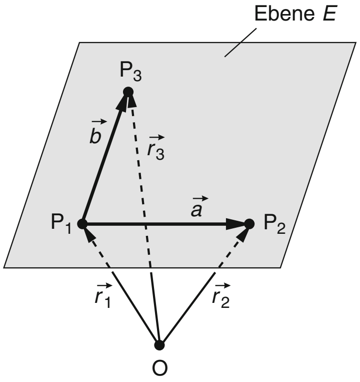


Bild I-15

Wegen $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ *nicht-kollinear*. Das Vektorprodukt steht dabei bekanntlich *senkrecht* auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene und ist somit ein *Normalenvektor* dieser Ebene: $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$.

a) Parameterdarstellung der Ebene E (Drei-Punkte-Form)

$$\vec{r}(\lambda;\,\mu) = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \mu(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7\lambda \\ -\ \lambda \\ 4\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4\mu \\ 5\mu \\ 4\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 7\lambda - 4\mu \\ 1 - \ \lambda + 5\mu \\ -1 + 4\lambda + 4\mu \end{pmatrix} \qquad (\text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ und } \mu \in \mathbb{R})$$

b) Koordinatendarstellung der Ebene E

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -24 \\ 12 \\ -39 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 5 \\ y - 1 \\ z + 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-24(x - 5) + 12(y - 1) - 39(z + 1) = -24x + 120 + 12y - 12 - 39z - 39 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-24x + 12y - 39z + 69 = 0 \mid : (-3) \quad \Rightarrow \quad 8x - 4y + 13z - 23 = 0$$

c) Ortsvektoren für die Parameterwertepaare $(\lambda; \mu) = (-1; 3)$ und $(\lambda; \mu) = (2; -2)$:

$$\vec{r}(\lambda = -1; \mu = 3) = \begin{pmatrix} 5 + 7 - 12 \\ 1 + 1 + 15 \\ -1 - 4 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(\lambda = 2; \mu = -2) = \begin{pmatrix} 5 - 14 + 8 \\ 1 - 2 - 10 \\ -1 + 8 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Koordinaten der zugehörigen Punkte: $(0; 17; 7)$, $(-1; -11; -1)$.

I32 Bestimmen Sie die Gleichung der durch den Punkt $P_1 = (5; 1; 5)$ gehenden *Ebene* E mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Koordinatendarstellung der Ebene E

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 5 \\ y - 1 \\ z - 5 \end{pmatrix} = -1(x - 5) + 2(y - 1) - 1(z - 5) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-x + 5 + 2y - 2 - z + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad -x + 2y - z + 8 = 0 \quad \text{oder} \quad x - 2y + z - 8 = 0$$

Gleichung der Ebene: $x - 2y + z - 8 = 0$

I33 Der Normalenvektor $\vec{n}$ einer Ebene E hat die Richtungswinkel $\alpha = 120°$, $\beta = 60°$ und $\gamma > 90°$. Wie lautet die *Koordinatendarstellung* dieser Ebene, die noch den Punkt $P_1 = (8; 6; 8)$ enthält?

Wir müssen zunächst den *Normalenvektor* $\vec{n}$ der Ebene bestimmen. Da seine Länge (sein Betrag) *keine* Rolle spielt (solange $|\vec{n}| \neq 0$ ist), wählen wir $|\vec{n}| = 1$ (Einheitsvektor). Der noch unbekannte *Richtungswinkel* γ lässt sich aus der Beziehung

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

unter Beachtung der Vorgabe $90° < \gamma < 180°$ und damit $\cos\gamma < 0$ wie folgt bestimmen:

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = 1 - \cos^2 120° - \cos^2 60° = 1 - (-0{,}5)^2 - 0{,}5^2 =$$

$$= 1 - 0{,}25 - 0{,}25 = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \cos\gamma = -\sqrt{0{,}5} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arccos(-\sqrt{0{,}5}) = 135°$$

Damit ergeben sich für den Normalenvektor $\vec{n}$ folgende *Vektorkomponenten*:

$$\left.\begin{aligned} n_x &= |\vec{n}| \cdot \cos\alpha = 1 \cdot \cos 120° = -0{,}5 \\ n_y &= |\vec{n}| \cdot \cos\beta = 1 \cdot \cos 60° = 0{,}5 \\ n_z &= |\vec{n}| \cdot \cos\gamma = 1 \cdot \cos 135° = -0{,}707 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ -0{,}707 \end{pmatrix}$$

Koordinatendarstellung der Ebene E

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ -0{,}707 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 8 \\ y - 6 \\ z - 8 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-0{,}5\,(x - 8) + 0{,}5\,(y - 6) - 0{,}707\,(z - 8) = -0{,}5\,x + 4 + 0{,}5\,y - 3 - 0{,}707\,z + 5{,}656 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-0{,}5\,x + 0{,}5\,y - 0{,}707\,z + 6{,}656 = 0 \mid \cdot (-2) \quad \Rightarrow \quad x - y + 1{,}414\,z - 13{,}312 = 0$$

Gleichung der Ebene: $x - y + 1{,}414\,z - 13{,}312 = 0$

I 34

Eine Ebene E mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ enthält den Punkt P_1. Welchen *Abstand* besitzen die Punkte A und B von dieser Ebene?

$$\text{Ebene } E: \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = (5; -1; 3); \quad A = (10; 3; 8), \quad B = (0; 2; 11)$$

Welche *Höhenkoordinate* z muss der Punkt $P = (2; -4; z)$ haben, damit er in der Ebene E liegt?

Abstand d des Punktes A von der Ebene E (→ FS: Kap. II.4.3.4):

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}_A - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 - 5 \\ 3 + 1 \\ 8 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 - 4 + 5 = 6$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_A - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} = 3{,}464$$

Abstand d des Punktes B von der Ebene E

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 - 5 \\ 2 + 1 \\ 11 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = -5 - 3 + 8 = 0; \quad |\vec{n}| = \sqrt{3}$$

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|} = \frac{0}{\sqrt{3}} = 0 \quad \Rightarrow \quad B \text{ liegt } \textit{in} \text{ der Ebene } E$$

Koordinatendarstellung der Ebene E

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 5 \\ y + 1 \\ z - 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$1\,(x - 5) - 1\,(y + 1) + 1\,(z - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 5 - y - 1 + z - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x - y + z = 9$$

Höhenkoordinate z des Punktes $P = (2; -4; z)$: $z = 9 - x + y = 9 - 2 - 4 = 3$

I35

Zeigen Sie, dass sich Gerade g und Ebene E *schneiden* und bestimmen Sie die Koordinaten des *Schnittpunktes* S sowie den *Schnittwinkel* φ.

$$g: \quad \vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad E: \quad \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix} = 0$$

Gerade g und Ebene E schneiden sich genau dann in einem Punkt S, wenn das *skalare Produkt* aus dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene und dem Richtungsvektor $\vec{a}$ der Geraden *nicht* verschwindet. Dies ist hier der Fall:

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = -2 + 2 + 5 = 5 \neq 0$$

Der *Schnittpunkt* S mit dem *Ortsvektor* $\vec{r}_S$ liegt sowohl auf g als auch in E. Daher gilt:

$$\vec{r}_S = \vec{r}(\lambda_S) = \vec{r}_1 + \lambda_S \vec{a} \quad \text{und} \quad \vec{n} \cdot (\vec{r}_S - \vec{r}_0) = 0$$

In die zweite Gleichung setzen wir für $\vec{r}_S$ den Ausdruck $\vec{r}_1 + \lambda_S \vec{a}$ ein und erhalten unter Verwendung des *Distributivgesetzes* für Skalarprodukte:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}_S - \vec{r}_0) = \vec{n} \cdot (\vec{r}_1 + \lambda_S \vec{a} - \vec{r}_0) = \vec{n} \cdot ([\vec{r}_1 - \vec{r}_0] + \lambda_S \vec{a}) = \vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) + \lambda_S (\vec{n} \cdot \vec{a}) = 0$$

Diese Gleichung lösen wir nach dem noch unbekannten Parameter λ_S auf:

$$\lambda_S (\vec{n} \cdot \vec{a}) = -\vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = \vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_1) \quad \Rightarrow \quad \lambda_S = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_1)}{\vec{n} \cdot \vec{a}}$$

Berechnung des Parameters λ_S

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-4 \\ 1-1 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 + 0 - 2 = 1; \qquad \vec{n} \cdot \vec{a} = 5 \ \text{(s. oben)}$$

$$\lambda_S = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_1)}{\vec{n} \cdot \vec{a}} = \frac{1}{5}$$

Ortsvektor $\vec{r}_S$ des Schnittpunktes S

Aus der Gleichung der Geraden g erhalten wir für $\lambda_S = 1/5$:

$$\vec{r}_S = \vec{r}(\lambda_S = 1/5) = \vec{r}_1 + \frac{1}{5} \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}4 \\ 1{,}2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt: $S = (4{,}4;\ 1{,}2;\ 3)$

Berechnung des Schnittwinkels φ (→ FS: Kap. II.4.3.7)

Wir benötigen noch die *Beträge* der Vektoren $\vec{n}$ und $\vec{a}$:

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}; \quad |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{30}; \qquad \vec{n} \cdot \vec{a} = 5 \ \text{(s. oben)}$$

$$\varphi = \arcsin \left(\frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} \right) = \arcsin \left(\frac{5}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{30}} \right) = \arcsin 0{,}3727 = 21{,}88^{\circ}$$

Schnittwinkel: $\varphi = 21{,}88^{\circ}$

I 36

Zeigen Sie, dass die Ebenen E_1 und E_2 *parallel* verlaufen und berechnen Sie ihren *Abstand* (von jeder Ebene ist jeweils ein Punkt und der Normalenvektor bekannt):

$$\text{Ebene } E_1: \ P_1 = (5;\, 10;\, 2)\,, \quad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \text{Ebene } E_2: \ P_2 = (1;\, 5;\, 6)\,, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Ebenen E_1 und E_2 sind genau dann *parallel*, wenn ihre Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ *kollinear* sind, d. h. in einer gemeinsamen Linie (Geraden) liegen. Dies ist der Fall, da $\vec{n}_2$ ein *Vielfaches* von $\vec{n}_1$ ist:

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{n}_1} = -3\,\vec{n}_1 \quad \Rightarrow \quad E_1 \parallel E_2$$

Abstand d der beiden Ebenen (→ FS: Kap. II.4.3.6)

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - 5 \\ 5 - 10 \\ 6 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = -4 + 5 - 4 = -3$$

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$d = \frac{|\vec{n}_1 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}_1|} = \frac{|-3|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

I 37

Von zwei Ebenen E_1 und E_2 sind jeweils ein *Punkt* und der *Normalenvektor* $\vec{n}$ gegeben:

$$\text{Ebene } E_1: \ P_1 = (1;\, 4;\, 5)\,, \quad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{Ebene } E_2: \ P_2 = (-2;\, 5;\, 5)\,, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass sich die Ebenen längs einer *Geraden* g schneiden und bestimmen Sie die *Gleichung der Schnittgeraden* und den *Schnittwinkel* φ der beiden Ebenen.

Die Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich genau dann längs einer *Geraden* g, wenn ihre *Normalenvektoren* $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ *nicht-kollinear* sind, d. h. *weder* parallel *noch* anti-parallel verlaufen und somit $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$ gilt. Dies ist hier der Fall:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 0 \\ 0 - 1 \\ 3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Ansatz für die *Schnittgerade* g in der *Punkt-Richtungs-Form*:

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_0 + \lambda\,\vec{a} \quad \text{mit} \quad \vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Denn der zunächst noch *unbekannte* Richtungsvektor $\vec{a}$ der Schnittgeraden ist sowohl zu $\vec{n}_1$ als auch zu $\vec{n}_2$ *orthogonal* und somit als *Vektorprodukt* $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ darstellbar. $\vec{r}_0$ ist dabei der *Ortsvektor* eines (zunächst beliebigen) noch unbekannten Punktes $P_0 = (x_0; y_0; z_0)$ der Schnittgeraden g. Dieser Punkt liegt somit in *beiden* Ebenen und lässt sich daher aus den Gleichungen

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_1) = 0 \quad \text{und} \quad \vec{n}_2 \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_2) = 0$$

wie folgt berechnen:

$$\text{(I)} \quad \vec{n}_1 \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 - 1 \\ y_0 - 4 \\ z_0 - 5 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$1(x_0 - 1) - 1(y_0 - 4) + 0(z_0 - 5) = x_0 - 1 - y_0 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 - y_0 + 3 = 0$$

$$\text{(II)} \quad \vec{n}_2 \cdot (\vec{r}_0 - \vec{r}_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 + 2 \\ y_0 - 5 \\ z_0 - 5 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2(x_0 + 2) + 3(y_0 - 5) + 1(z_0 - 5) = 2x_0 + 4 + 3y_0 - 15 + z_0 - 5 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2x_0 + 3y_0 + z_0 - 16 = 0$$

Gleichung (I) nach y_0 auflösen ($y_0 = x_0 + 3$), den gefundenen Ausdruck in Gleichung (II) einsetzen:

$$\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad 2x_0 + 3(x_0 + 3) + z_0 - 16 = 2x_0 + 3x_0 + 9 + z_0 - 16 = 5x_0 + z_0 - 7 = 0$$

Diese Gleichung ist nur lösbar, wenn wir für x_0 *oder* z_0 einen Wert vorgeben. Wir wählen $z_0 = 2$. Daraus ergeben sich folgende Werte für die restlichen Koordinaten:

$$\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad 5x_0 + z_0 - 7 = 5x_0 + 2 - 7 = 5x_0 - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x_0 = 5 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 1$$

$$\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad x_0 - y_0 + 3 = 1 - y_0 + 3 = 4 - y_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad -y_0 = -4 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 4$$

Damit ist $P_0 = (1; 4; 2)$ der gesuchte Punkt auf der Schnittgeraden g, deren Gleichung wie folgt lautet:

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_0 + \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad (\text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{R})$$

Berechnung des Schnittwinkels φ der beiden Ebenen

Definitionsgemäß ist der *Schnittwinkel* φ der Ebenen E_1 und E_2 der Winkel zwischen den beiden *Normalenvektoren* $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$. Wir erhalten ihn über das *Skalarprodukt* dieser Vektoren:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 3 + 0 = -1$$

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}; \quad |\vec{n}_2| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}} = -0{,}1890 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos(-0{,}1890) = 100{,}89^\circ$$

Schnittwinkel: $\varphi = 100{,}89^\circ$

I38

Eine Ebene E steht *senkrecht* auf dem Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und enthält ferner den Punkt $P_1 = (2;\,-1;\,5)$. Welchen *Abstand* d hat der Punkt $Q = (1;\,2;\,-2)$ von dieser Ebene? Bestimmen Sie die Gleichung der durch Q gehenden *Parallelebene* E^*.

Abstand d des Punktes Q von der Ebene E (→ FS: Kap. II.4.3.4)

$$\vec{n} \cdot (\vec{r}_Q - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2+1 \\ -2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} = -2+3-7 = -6$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}; \quad d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|} = \frac{|-6|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}\,\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

Parallelebene E^* durch den Punkt Q

Da die Ebenen E und E^* *parallel* verlaufen, gilt dies auch für die zugehörigen *Normalenvektoren* $\vec{n}$ und $\vec{n}^*$, d. h. der Normalenvektor $\vec{n}$ von E ist auch ein Normalenvektor der *Parallelebene* E^*. Diese enthält ferner den Punkt Q. Die Gleichung der gesuchten Ebene E^* lautet damit in der *Koordinatendarstellung* wie folgt (mit $\vec{n}^* = \vec{n}$):

$$\vec{n}^* \cdot (\vec{r} - \vec{r}_Q) = \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_Q) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z+2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2(x-1) + 1(y-2) + 1(z+2) = 2x - 2 + y - 2 + z + 2 = 2x + y + z - 2 = 0$$

Gleichung der Parallelebene E^*: $2x + y + z - 2 = 0$

I39

Eine Ebene E enthält die Gerade g mit der Parameterdarstellung

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad (\text{mit } \lambda \in \mathbb{R})$$

sowie den Punkt $Q = (1;\,4;\,3)$. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Ebene

a) in der *Parameterdarstellung*,

b) in der *Koordinatendarstellung*.

Die Ebene E enthält den *Richtungsvektor* $\vec{a}$ der Geraden g sowie die Punkte P_1 und Q (Bild I-16). Wenn die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{P_1 Q}$ *nicht-kollinear* sind (d. h. *nicht* in einer Linie liegen), können sie als *Richtungsvektoren* dieser Ebene verwendet werden. Ihr *Vektorprodukt* $\vec{a} \times \vec{b}$ ist dann ein *Normalenvektor* der Ebene. Wegen

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \overrightarrow{P_1 Q} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-1 \\ 4-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-10 \\ 0-\ 4 \\ 4-\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ *nicht-kollineare* Vektoren und $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ daher ein *Normalenvektor* der gesuchten Ebene.

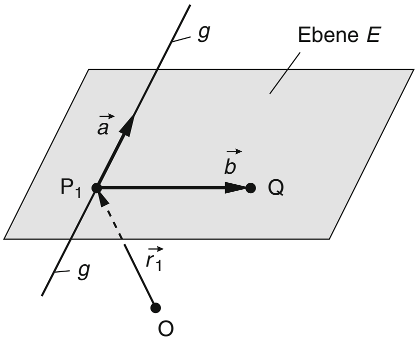


Bild I-16

a) Parameterdarstellung der Ebene E (Punkt-Richtungs-Form)

$$\vec{r}(\lambda;\mu) = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (\text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ und } \mu \in \mathbb{R})$$

b) Koordinatendarstellung der Ebene E

$$\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_1) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{r}-\vec{r}_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-12(x-1) - 4(y-2) + 4(z-1) = -12x + 12 - 4y + 8 + 4z - 4 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-12x - 4y + 4z + 16 = 0 \mid : (-4) \quad \Rightarrow \quad 3x + y - z - 4 = 0$$

Gleichung der Ebene E: $3x + y - z - 4 = 0$

I40

Von zwei Ebenen E_1 und E_2 sind jeweils ein Punkt und der Normalenvektor gegeben:

$$\text{Ebene } E_1: \ P_1 = (1;5;-3), \quad \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{Ebene } E_2: \ P_2 = (2;-1;1), \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie diejenige *Ebene* E, die den Punkt $Q = (2;4;6)$ enthält und sowohl auf E_1 als auch auf E_2 *senkrecht* steht.

Gleichungen der Ebenen E_1 und E_2 (Koordinatendarstellung)

$$E_1: \ \vec{n}_1\cdot(\vec{r}-\vec{r}_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-5 \\ z+3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$1(x-1) + 2(y-5) + 1(z+3) = x - 1 + 2y - 10 + z + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2y + z - 8 = 0$$

$$E_2: \ \vec{n}_2\cdot(\vec{r}-\vec{r}_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$1(x-2) - 1(y+1) + 2(z-1) = x - 2 - y - 1 + 2z - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x - y + 2z - 5 = 0$$

Gleichung der Ebene E senkrecht zu E_1 und E_2 (Koordinatendarstellung)

Die gesuchte Ebene E steht sowohl auf E_1 als auch auf E_2 *senkrecht*, somit muss der (noch unbekannte) *Normalenvektor* $\vec{n}$ der Ebene E sowohl auf $\vec{n}_1$ als auch $\vec{n}_2$ *senkrecht* stehen. Ein solcher Vektor ist das *Vektorprodukt* aus $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$:

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 1 \\ 1 - 2 \\ -1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ferner enthält die Ebene E den Punkt $Q = (2;\, 4;\, 6)$. Ihre Gleichung lautet daher in der *Koordinatendarstellung* wie folgt:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_Q) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 4 \\ z - 6 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$5(x - 2) - 1(y - 4) - 3(z - 6) = 5x - 10 - y + 4 - 3z + 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x - y - 3z + 12 = 0$$

Gleichung der Ebene E: $5x - y - 3z + 12 = 0$

I41

Gegeben sind zwei *parallele* Geraden g_1 und g_2 mit dem gemeinsamen Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. g_1 verläuft durch den Punkt $P_1 = (4;\, 1;\, -2)$, g_2 durch den Punkt $P_2 = (-1;\, 2;\, 2)$.

a) Berechnen Sie den *Abstand* d der Geraden.

b) Bestimmen Sie die *Ebene* E, die *beide* Geraden enthält (*Parameter-* und *Koordinatendarstellung*).

Die Gleichungen der beiden *parallelen* Geraden lauten in der *Parameterdarstellung* (*Punkt-Richtungs-Form*) wie folgt:

$$g_1\colon \quad \vec{r}(\lambda_1) = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (\text{mit } \lambda_1 \in \mathbb{R})$$

$$g_2\colon \quad \vec{r}(\lambda_2) = \vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (\text{mit } \lambda_2 \in \mathbb{R})$$

a) Abstand d der parallelen Geraden (→ FS: Kap. II.4.2.4)

$$\vec{a} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 - 4 \\ 2 - 1 \\ 2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 4 \\ -20 - 4 \\ 1 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -24 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)| = \sqrt{4^2 + (-24)^2 + 11^2} = \sqrt{713}\,; \quad |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

$$d = \frac{|\vec{a} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{713}}{\sqrt{21}} = 5{,}827$$

b) Gleichung der Ebene E

Die gesuchte Ebene E enthält den *Richtungsvektor* $\vec{a}$ der parallelen Geraden, die *Punkte* P_1 und P_2 und damit auch den *Verbindungsvektor* $\vec{b} = \overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ dieser Punkte (siehe hierzu Bild I-17). Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind *nicht-kollinear*, da ihr Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ *nicht* verschwindet, wie wir bereits unter a) gezeigt haben:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{a} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -24 \\ 11 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

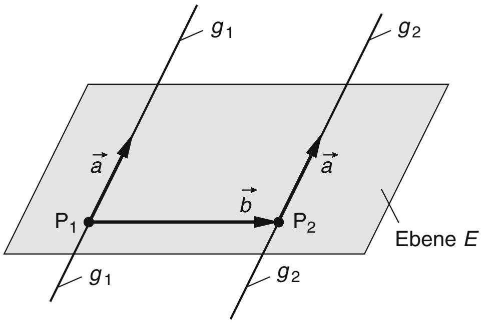


Bild I-17

Daher können diese Vektoren als *Richtungsvektoren* der gesuchten Ebene E verwendet werden. Das *Vektorprodukt* $\vec{a} \times \vec{b}$ selbst ist ein *Normalenvektor* der Ebene, d. h. $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$. Die Gleichung der Ebene E lautet damit wie folgt:

In der Parameterdarstellung (Punkt-Richtungs-Form)

$$\vec{r}(\lambda; \mu) = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (\text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ und } \mu \in \mathbb{R})$$

In der Koordinatendarstellung

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -24 \\ 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 4 \\ y - 1 \\ z + 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$4(x - 4) - 24(y - 1) + 11(z + 2) = 4x - 16 - 24y + 24 + 11z + 22 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$4x - 24y + 11z + 30 = 0$$

I42

Eine Masse wird auf der Ebene E mit der Parameterdarstellung

$$\vec{r}(\lambda; \mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{in der Einheit m}; \ \lambda \in \mathbb{R}, \ \mu \in \mathbb{R})$$

durch die Kraft $\vec{F} = (10\,\text{N})\,\vec{e}_x + (20\,\text{N})\,\vec{e}_y + (3\,\text{N})\,\vec{e}_z$ *geradlinig* von $P_1\ (\lambda = 0;\ \mu = -1)$ nach $P_2\,(\lambda = 1;\ \mu = 2)$ verschoben.

Berechnen Sie die dabei an der Masse verrichtete *Arbeit* W sowie den *Winkel* φ zwischen dem Kraft- und dem Verschiebungsvektor.

Wir bestimmen zunächst den *Verschiebungsvektor* $\vec{s} = \overrightarrow{P_1 P_2}$ der Masse (Bild I-18). Dazu benötigen wir die Koordinaten bzw. den Ortsvektor der beiden Punkte (alle Koordinaten in der Einheit m):

$$\vec{r}(P_1) = \vec{r}(\lambda = 0; \mu = -1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(P_2) = \vec{r}(\lambda = 1; \mu = 2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s} = \overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{r}(P_2) - \vec{r}(P_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

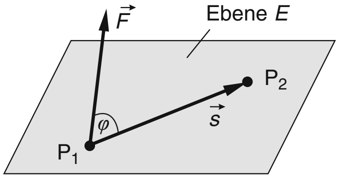


Bild I-18

Die von der Kraft an der Masse verrichtete *Arbeit* W ist das *Skalarprodukt* aus dem Kraftvektor $\vec{F}$ und dem Verschiebungsvektor $\vec{s}$:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix} \text{N} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{m} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{Nm} = (-20 + 60 + 3)\,\text{Nm} = 43\,\text{Nm}$$

Den *Winkel* φ zwischen dem Kraft- und dem Verschiebungsvektor erhalten wir ebenfalls über das *Skalarprodukt* $\vec{F} \cdot \vec{s}$:

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{W}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{10^2 + 20^2 + 3^2}\,\text{N} = \sqrt{509}\,\text{N}; \qquad |\vec{s}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2}\,\text{m} = \sqrt{14}\,\text{m}$$

$$\cos\varphi = \frac{W}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{43\,\text{Nm}}{\sqrt{509}\,\text{N} \cdot \sqrt{14}\,\text{m}} = 0{,}5094 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos 0{,}5094 = 59{,}38^\circ$$

Ergebnis: $W = 43\,\text{Nm}$; $\varphi = 59{,}38^\circ$

I43

Eine Ebene E enthält die Punkte $P_1 = (2;\,1;\,-3)$, $P_2 = (3;\,0;\,2)$ und $P_3 = (2;\,2;\,1)$ (alle Koordinaten in der Einheit m). In P_1 greift eine Kraft $\vec{F}$ mit der z-Komponente $F_z = -2\,\text{N}$ an.

a) Bestimmen Sie die noch unbekannten *Kraftkomponenten* F_x und F_y so, dass der Kraftvektor *senkrecht* auf der Ebene steht.

b) Wie lautet der *Momentenvektor* $\vec{M}$ der Kraft bezüglich des Punktes $Q = (5;\,1;\,-2)$ m?

Anleitung: $\vec{M}$ ist das *Vektorprodukt* aus dem Verbindungsvektor $\vec{r}$ von Q nach P_1 und dem Kraftvektor $\vec{F}$.

---

a) Die in der Ebene E liegenden Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{P_1 P_2}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{P_1 P_3}$ sind *linear unabhängig* und können daher als *Richtungsvektoren* dieser Ebene angesehen werden. Ihr *Vektorprodukt* ist daher ein *Normalenvektor* $\vec{n}$ der Ebene E (Bild I-19; alle Zwischenrechnungen ohne Einheiten):

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} 3 - 2 \\ 0 - 1 \\ 2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

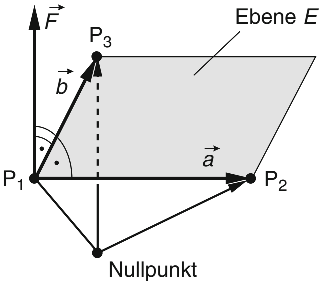


Bild I-19

$$\vec{b} = \overrightarrow{P_1 P_3} = \begin{pmatrix} 2 - 2 \\ 2 - 1 \\ 1 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 - 5 \\ 0 - 4 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da der Kraftvektor $\vec{F}$ *senkrecht* auf der Ebene E stehen soll, müssen $\vec{F}$ und $\vec{n}$ *kollineare* Vektoren sein ($\vec{F}$ ist entweder *parallel* oder *anti-parallel* zu $\vec{n}$). Es gilt also $\vec{F} = \lambda \vec{n}$ und somit $\vec{F} \times \vec{n} = \vec{0}$.

Aus der letzten Bedingung erhalten wir drei leicht lösbare Gleichungen für die noch unbekannten Kraftkomponenten F_x und F_y:

$$\vec{F} \times \vec{n} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_y - 8 \\ F_x - 18 \\ -4F_x + 9F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

(I) $\quad F_y - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_y = 8$

(II) $\quad F_x - 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_x = 18$

(III) $\quad -4F_x + 9F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -4 \cdot 18 + 9 \cdot 8 = -72 + 72 = 0$ (diese Gleichung ist also erfüllt)

Die *Kraftkomponenten* lauten somit: $F_x = 18\,\text{N}, \; F_y = 8\,\text{N}, \; F_z = -2\,\text{N}$

Anmerkung: Sie können die Kraftkomponenten auch aus der Bedingung $\vec{F} = \lambda \vec{n}$ bestimmen. Sie führt auf drei Gleichungen mit den noch unbekannten Kraftkomponenten F_x und F_y und dem (nicht weiter interessierenden) Parameter λ.

b) Mit Hilfe von Bild I-20 erhalten wir für das *Moment* $\vec{M}$ der in P_1 angreifenden Kraft $\vec{F}$ bezüglich des Punktes Q die folgende Darstellung:

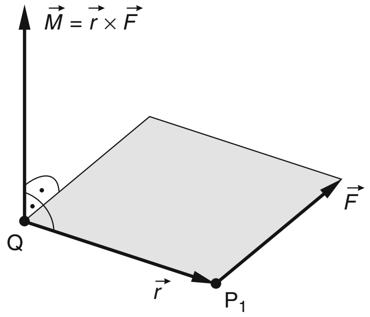


Bild I-20

$$\vec{r} = \overrightarrow{QP_1} = \vec{r}(P_1) - \vec{r}(Q) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{(in m)}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 8 \\ -18 - 6 \\ -24 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -24 \\ -24 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{(in N m)}$$

$$|\vec{M}| = 8 \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-3)^2}\,\text{N m} = 8\sqrt{19}\,\text{N m} = 34{,}87\,\text{N m}$$

J Lineare Algebra

Hinweise für das gesamte Kapitel

(1) Für die *Matrizenmultiplikation* verwenden wir das *Falk-Schema* (→ Band 2: Kapitel I.2.6.3 und Formelsammlung: Kapitel VII.1.3.3).

(2) Die Berechnung *dreireihiger* Determinanten erfolgt nach der *Regel von Sarrus* (→ Band 2: Kapitel I.3.3.1 und Formelsammlung: Kapitel VII.2.2).

(3) Die *Streichung* von Zeilen bzw. Spalten in einer Determinante oder Matrix wird durch *Grauunterlegung* der betreffenden Zeilen bzw. Spalten gekennzeichnet.

(4) Die *Vorzeichenbestimmung* der algebraischen Komplemente erfolgt meist mit der sog. *„Schachbrettregel"* (→ Band 2: Kapitel I.3.3.2 und Formelsammlung: Kapitel VII.2.3.2).

1 Matrizen und Determinanten

1.1 Rechenoperationen mit Matrizen

Hinweise

Lehrbuch: Band 2, Kapitel I.2.3 und 2.6

Formelsammlung: Kapitel VII.1.3

J1

Berechnen Sie mit den $(2, 3)$-Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

die folgenden Ausdrücke:

a) $3\mathbf{A} + 2\mathbf{B} - 5\mathbf{C}$ b) $2(\mathbf{A} - 2\mathbf{B}) - 3(\mathbf{B}^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} - 2\mathbf{C}$

---

a) Zunächst werden die Matrizen **A**, **B** und **C** der Reihe nach *elementweise* mit den Skalaren 3, 2 und -5 *multipliziert*, anschließend die *gleichstelligen* Elemente *addiert* bzw. *subtrahiert*:

$$3\mathbf{A} + 2\mathbf{B} - 5\mathbf{C} = 3\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 15 & 6 \\ 3 & 12 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 10 & 16 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 5 & -10 \\ -25 & 10 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 22 & 0 \\ -12 & 38 & -2 \end{pmatrix}$$

L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Klausur- und Übungsaufgaben,*
DOI 10.1007/978-3-8348-9730-5_10,© Vieweg+Teubner Verlag |Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2010

b) Summen und Differenzen werden *gliedweise* transponiert, *zweimaliges* Transponieren führt wieder zur Ausgangsmatrix, alle Matrizen sind dann vom Typ $(2,\ 3)$:

$$2\,(\mathbf{A} - 2\,\mathbf{B}) - 3\,(\mathbf{B}^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} - 2\,\mathbf{C} = 2\,\mathbf{A} - 4\,\mathbf{B} - 3\,(\mathbf{B} - \mathbf{A}) - 2\,\mathbf{C} = 2\,\mathbf{A} - 4\,\mathbf{B} - 3\,\mathbf{B} + 3\,\mathbf{A} - 2\,\mathbf{C} =$$

$$= 5\,\mathbf{A} - 7\,\mathbf{B} - 2\,\mathbf{C} = 5\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & 25 & 10 \\ 5 & 20 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 & -7 & -14 \\ -35 & -56 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -10 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 20 & -8 \\ -40 & -32 & 7 \end{pmatrix}$$

J2

Zeigen Sie am Beispiel der 3-reihigen Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 9 & -3 \\ -4 & 6 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$,

dass die Matrizenmultiplikation *nicht-kommutativ* ist, d. h. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ gilt.

Wir berechnen beide Matrizenprodukte nach dem *Falk-Schema*:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|}
\cline{5-7}
\multicolumn{4}{r|}{} & 0 & 1 & -2 \\
\multicolumn{4}{r|}{\mathbf{B}} & -1 & 0 & 3 \\
\multicolumn{4}{r|}{} & 2 & -3 & 0 \\
\cline{2-7}
 & -6 & 9 & -3 & -15 & 3 & 39 \\
\mathbf{A} & -4 & 6 & -2 & -10 & 2 & 26 \\
 & -2 & 3 & -1 & -5 & 1 & 13 \\
\cline{2-7}
\multicolumn{7}{r}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc|ccc|}
\cline{5-7}
\multicolumn{4}{r|}{} & -6 & 9 & -3 \\
\multicolumn{4}{r|}{\mathbf{A}} & -4 & 6 & -2 \\
\multicolumn{4}{r|}{} & -2 & 3 & -1 \\
\cline{2-7}
 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{B} & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cline{2-7}
\multicolumn{7}{r}{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}}
\end{array}$$

Es ist $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$, aber $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$ und somit $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

J3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie am Beispiel dieser Matrizen die Gültigkeit der folgenden Rechenregeln (sofern alle Summen und Produkte existieren):

a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ b) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ c) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

---

a) Wir bilden zunächst die *Summe* $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (*gleichstellige* Elemente werden addiert) und mit Hilfe des *Falk-Schemas* dann die *Produkte* $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ und $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccc|cc|}
\cline{5-6}
 & & & \mathbf{C} & 3 & 1 \\
 & & & & 0 & 2 \\
 & & & & 1 & 5 \\
\hline
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
\mathbf{A}+\mathbf{B} & 2 & 0 & 4 & 10 & 22 \\
 & 4 & 4 & 1 & 13 & 17 \\
\hline
\end{array}$$

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$

$$\begin{array}{c|ccc|cc|}
\cline{5-6}
 & & & \mathbf{C} & 3 & 1 \\
 & & & & 0 & 2 \\
 & & & & 1 & 5 \\
\hline
 & 1 & 0 & -1 & 2 & -4 \\
\mathbf{A} & 0 & 2 & 3 & 3 & 19 \\
 & 4 & 1 & 1 & 13 & 11 \\
\hline
\end{array}$$

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$

$$\begin{array}{c|ccc|cc|}
\cline{5-6}
 & & & \mathbf{C} & 3 & 1 \\
 & & & & 0 & 2 \\
 & & & & 1 & 5 \\
\hline
 & -1 & 1 & 1 & -2 & 6 \\
\mathbf{B} & 2 & -2 & 1 & 7 & 3 \\
 & 0 & 3 & 0 & 0 & 6 \\
\hline
\end{array}$$

$\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$

Wir bilden die Summe $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 19 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 7 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 10 & 22 \\ 13 & 17 \end{pmatrix}$$

Ein Vergleich zeigt: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$.

b) Wir bilden zunächst unter Verwendung des *Falk-Schemas* das Matrizenprodukt $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, daraus dann $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$ und schließlich $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$, wobei das Produkt $\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ bereits aus a) bekannt ist:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|}
\cline{5-7}
 & & & \mathbf{B} & -1 & 1 & 1 \\
 & & & & 2 & -2 & 1 \\
 & & & & 0 & 3 & 0 \\
\hline
 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \\
\mathbf{A} & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\
 & 4 & 1 & 1 & -2 & 5 & 5 \\
\hline
\end{array}$$

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

$$\begin{array}{c|ccc|cc|}
\cline{5-6}
 & & & \mathbf{C} & 3 & 1 \\
 & & & & 0 & 2 \\
 & & & & 1 & 5 \\
\hline
 & -1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\
\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} & 4 & 5 & 2 & 14 & 24 \\
 & -2 & 5 & 5 & -1 & 33 \\
\hline
\end{array}$$

$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$

$$\begin{array}{c|ccc|cc|}
\cline{5-6}
 & & & \mathbf{B}\cdot\mathbf{C} & -2 & 6 \\
 & & & & 7 & 3 \\
 & & & & 0 & 6 \\
\hline
 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\
\mathbf{A} & 0 & 2 & 3 & 14 & 24 \\
 & 4 & 1 & 1 & -1 & 33 \\
\hline
\end{array}$$

$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$

Ein Vergleich der Matrizenprodukte $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$ und $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$ zeigt: $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$.

c) Das Matrizenprodukt $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ ist bereits aus b) bekannt, wir müssen es noch *transponieren* (Zeilen und Spalten miteinander vertauschen):

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Jetzt *transponieren* wir die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ und bilden dann das Matrizenprodukt $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix};\quad\mathbf{B}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|}
\cline{5-7}
 & & & \mathbf{A}^{\mathrm{T}} & 1 & 0 & 4 \\
 & & & & 0 & 2 & 1 \\
 & & & & -1 & 3 & 1 \\
\hline
 & -1 & 2 & 0 & -1 & 4 & -2 \\
\mathbf{B}^{\mathrm{T}} & 1 & -2 & 3 & -2 & 5 & 5 \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 5 \\
\hline
\end{array}$$

$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

Ein Vergleich der Matrizenprodukte $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\mathrm{T}}$ und $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ zeigt: $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

J4

Gegeben sind die 3-reihigen Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie mit dem *Falk-Schema* die folgenden Produkte:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}^2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$$

b) Berechnen Sie die folgenden Produkte auf zwei *verschiedene* Arten:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}), \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B})^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}), \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})$$

Sind die bekannten *Binomischen Formeln* auf Matrizen anwendbar?

---

a) Mit dem *Falk-Schema* erhalten wir:

$$\begin{array}{cccc|ccc}
 & & & & 2 & 1 & 1 \\
 & & & \mathbf{B} & 1 & 2 & -1 \\
 & & & & 0 & 1 & 0 \\ \hline
 & 1 & 4 & -1 & 6 & 8 & -3 \\
\mathbf{A} & 2 & 0 & 3 & 4 & 5 & 2 \\
 & 1 & 2 & 1 & 4 & 6 & -1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccc|ccc}
 & & & & 1 & 4 & -1 \\
 & & & \mathbf{A} & 2 & 0 & 3 \\
 & & & & 1 & 2 & 1 \\ \hline
 & 2 & 1 & 1 & 5 & 10 & 2 \\
\mathbf{B} & 1 & 2 & -1 & 4 & 2 & 4 \\
 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3
\end{array}$$

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ $\qquad$ $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

Erwartungsgemäß ist $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ (die Matrizenmultiplikation ist *nicht* kommutativ).

$$\begin{array}{cccc|ccc}
 & & & & 1 & 4 & -1 \\
 & & & \mathbf{A} & 2 & 0 & 3 \\
 & & & & 1 & 2 & 1 \\ \hline
 & 1 & 4 & -1 & 8 & 2 & 10 \\
\mathbf{A} & 2 & 0 & 3 & 5 & 14 & 1 \\
 & 1 & 2 & 1 & 6 & 6 & 6
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccc|ccc}
 & & & & 2 & 1 & 1 \\
 & & & \mathbf{B} & 1 & 2 & -1 \\
 & & & & 0 & 1 & 0 \\ \hline
 & 2 & 1 & 1 & 5 & 5 & 1 \\
\mathbf{B} & 1 & 2 & -1 & 4 & 4 & -1 \\
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1
\end{array}$$

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$ $\qquad$ $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^2$

b) Die Matrizenprodukte (Potenzen) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2$, $(\mathbf{A} - \mathbf{B})^2$ und $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B})$ dürfen wir nicht nach den *Binomischen Formeln* berechnen, da die Matrizenmultiplikation eine *nicht-kommutative* Rechenoperation ist:

$$(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^2 \neq \mathbf{A}^2 \pm 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 \quad \text{und} \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \neq \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$$

Vielmehr gilt:

$$(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^2 = (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 \pm \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \pm \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}^2$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B}^2$$

Am einfachsten erhält man diese Produkte, in dem man zunächst die Matrizen $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ bzw. $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ bildet und dann mit dem *Falk-Schema* die gesuchten Produkte berechnet:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Matrizenprodukte $(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^2$

$$\begin{array}{cccc|ccc}
 & & & & 3 & 5 & 0 \\
\mathbf{A}+\mathbf{B} & & & & 3 & 2 & 2 \\
 & & & & 1 & 3 & 1 \\
\hline
 & 3 & 5 & 0 & 24 & 25 & 10 \\
\mathbf{A}+\mathbf{B} & 3 & 2 & 2 & 17 & 25 & 6 \\
 & 1 & 3 & 1 & 13 & 14 & 7
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc|ccc}
 & & & & -1 & 3 & -2 \\
\mathbf{A}-\mathbf{B} & & & & 1 & -2 & 4 \\
 & & & & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & -1 & 3 & -2 & 2 & -11 & 12 \\
\mathbf{A}-\mathbf{B} & 1 & -2 & 4 & 1 & 11 & -6 \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3
\end{array}$$

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2$ $(\mathbf{A}-\mathbf{B})^2$

Kontrollrechnung:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = (\mathbf{A}+\mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 2 & 10 \\ 5 & 14 & 1 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 25 & 10 \\ 17 & 25 & 6 \\ 13 & 14 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})^2 = (\mathbf{A}-\mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 2 & 10 \\ 5 & 14 & 1 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 8 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -11 & 12 \\ 1 & 11 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Matrizenproduktes $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})$

$$\begin{array}{cccc|ccc}
 & & & & -1 & 3 & -2 \\
\mathbf{A}-\mathbf{B} & & & & 1 & -2 & 4 \\
 & & & & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 3 & 5 & 0 & 2 & -1 & 14 \\
\mathbf{A}+\mathbf{B} & 3 & 2 & 2 & 1 & 7 & 4 \\
 & 1 & 3 & 1 & 3 & -2 & 11
\end{array}$$

$(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A}-\mathbf{B})$

In dem Produkt $(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A}-\mathbf{B})$ dürfen die Faktoren *nicht* vertauscht werden:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B}^2$$

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B}^2$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A}-\mathbf{B}) \neq (\mathbf{A}-\mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A}+\mathbf{B})$$

Kontrollrechnung:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 2 & 10 \\ 5 & 14 & 1 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 8 & -3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 14 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$$

J5

Gegeben sind folgende Matrizen: $\mathbf{A}_{(3,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Bilden Sie alle möglichen Produkte $X \cdot Y$ mit *zwei* Faktoren.

b) Bilden Sie alle möglichen Produkte $X \cdot Y \cdot Z$ mit *drei verschiedenen* Faktoren.

a) Die Produktbildung mit *zwei* Faktoren ist nur möglich, wenn die beiden Faktoren die folgende Bedingung erfüllen:

Spaltenzahl des *linken* Faktors = Zeilenzahl des *rechten* Faktors

Damit ergeben sich folgende Produkte (sie sind jeweils angekreuzt):

	$\mathbf{A}_{(3,2)}$	$\mathbf{B}_{(2,2)}$	$\mathbf{C}_{(2,3)}$
$\mathbf{A}_{(3,2)}$		×	×
$\mathbf{B}_{(2,2)}$		×	×
$\mathbf{C}_{(2,3)}$	×		

← rechter Faktor

⮥ linker Faktor

Berechnung der Matrizenprodukte $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^2$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ und $\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$ nach dem *Falk-Schema*:

$$\begin{array}{c|cc|cc|}
\cline{4-5}
 & & & 2 & 1 \\
 & & \mathbf{B} & 3 & -2 \\
\hline
 & 1 & 3 & 11 & -5 \\
\mathbf{A} & 2 & 0 & 4 & 2 \\
 & 1 & 4 & 14 & -7 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cc|ccc|}
\cline{4-6}
 & & & 2 & 0 & -1 \\
 & & \mathbf{C} & 6 & 1 & 3 \\
\hline
 & 1 & 3 & 20 & 3 & 8 \\
\mathbf{A} & 2 & 0 & 4 & 0 & -2 \\
 & 1 & 4 & 26 & 4 & 11 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cc|cc|}
\cline{4-5}
 & & & 2 & 1 \\
 & & \mathbf{B} & 3 & -2 \\
\hline
\mathbf{B} & 2 & 1 & 7 & 0 \\
 & 3 & -2 & 0 & 7 \\
\hline
\end{array}$$

A · B **A · C** **B · B**

$$\begin{array}{c|cc|ccc|}
\cline{4-6}
 & & & 2 & 0 & -1 \\
 & & \mathbf{C} & 6 & 1 & 3 \\
\hline
\mathbf{B} & 2 & 1 & 10 & 1 & 1 \\
 & 3 & -2 & -6 & -2 & -9 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc|cc|}
\cline{5-6}
 & & & & 1 & 3 \\
 & & & \mathbf{A} & 2 & 0 \\
 & & & & 1 & 4 \\
\hline
\mathbf{C} & 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\
 & 6 & 1 & 3 & 11 & 30 \\
\hline
\end{array}$$

B · C **C · A**

b) Die möglichen Matrizenprodukte mit *drei verschiedenen* Faktoren entnehmen Sie der folgenden Tabelle:

	$\mathbf{A}_{(3,2)}$	$\mathbf{B}_{(2,2)}$	$\mathbf{C}_{(2,3)}$	$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{(3,2)}$	$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})_{(3,3)}$	$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})_{(2,3)}$	$(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})_{(2,2)}$
$\mathbf{A}_{(3,2)}$						×	
$\mathbf{B}_{(2,2)}$							×
$\mathbf{C}_{(2,3)}$				×			
$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})_{(3,2)}$			×				
$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})_{(3,3)}$							
$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})_{(2,3)}$	×						
$(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})_{(2,2)}$		×					

← rechter Faktor

⮥ linker Faktor

Berechnung der möglichen Produkte $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$, $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})$, $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$, $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$, $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A}$ und $(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$ nach dem *Falk-Schema*:

$$\begin{array}{c|cc|ccc|}
\cline{4-6}
 & & & 10 & 1 & 1 \\
 & & \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} & -6 & -2 & -9 \\
\hline
 & 1 & 3 & -8 & -5 & -26 \\
\mathbf{A} & 2 & 0 & 20 & 2 & 2 \\
 & 1 & 4 & -14 & -7 & -35 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|cc|cc|}
\cline{4-5}
 & & & 1 & 2 \\
 & & \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} & 11 & 30 \\
\hline
\mathbf{B} & 2 & 1 & 13 & 34 \\
 & 3 & -2 & -19 & -54 \\
\hline
\end{array}$$

A · (B · C) **B · (C · A)**

$$\begin{array}{cccc|cc}
 & & & & 11 & -5 \\
 & & & \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} & 4 & 2 \\
 & & & & 14 & -7 \\
\hline
\mathbf{C} & 2 & 0 & -1 & 8 & -3 \\
 & 6 & 1 & 3 & 112 & -49
\end{array}$$

$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 & & \mathbf{C} & 2 & 0 & -1 \\
 & & & 6 & 1 & 3 \\
\hline
 & 11 & -5 & -8 & -5 & -26 \\
\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} & 4 & 2 & 20 & 2 & 2 \\
 & 14 & -7 & -14 & -7 & -35
\end{array}$$

$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$

$$\begin{array}{cccc|cc}
 & & & & 1 & 3 \\
 & & & \mathbf{A} & 2 & 0 \\
 & & & & 1 & 4 \\
\hline
\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} & 10 & 1 & 1 & 13 & 34 \\
 & -6 & -2 & -9 & -19 & -54
\end{array}$$

$(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\cdot\mathbf{A}$

$$\begin{array}{ccc|cc}
 & & \mathbf{B} & 2 & 1 \\
 & & & 3 & -2 \\
\hline
\mathbf{C}\cdot\mathbf{A} & 1 & 2 & 8 & -3 \\
 & 11 & 30 & 112 & -49
\end{array}$$

$(\mathbf{C}\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}$

Da für Matrizenprodukte das *Assoziativgesetz* gilt, ist erwartungsgemäß

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}, \quad \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}) = (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\cdot\mathbf{A} \quad \text{und} \quad \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{C}\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}.$$

J6

Bilden Sie aus den 2-reihigen Matrizen (in diesem Zusammenhang auch als *Untermatrizen* bezeichnet)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die 4-reihigen *Blockmatrizen*

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{array}\right) \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{array}\right)$$

und zeigen Sie, dass für das *Matrizenprodukt* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ folgende Beziehung gilt:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{P}\cdot\mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Q}\cdot\mathbf{S} \end{array}\right)$$

Die *Blockmatrizen* $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ enthalten jeweils vier Zeilen und Spalten. Sie lauten:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen zunächst das Matrizenprodukt $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ unter Verwendung des *Falk-Schemas*:

$$\begin{array}{ccccc|cccc}
 & & & & & 1 & -2 & 0 & 0 \\
 & & & & \mathbf{B} & 2 & 3 & 0 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 1 & 3 \\
 & & & & & 0 & 0 & 5 & 8 \\
\hline
 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\
\mathbf{A} & 1 & 3 & 0 & 0 & 7 & 7 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 21 & 35 \\
 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 7 & 14
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 35 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

Ferner benötigen wir noch die Matrizenprodukte $\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}$ und $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}$ (ebenfalls nach dem *Falk-Schema* berechnet):

$$\begin{array}{c|cc|cc|} & & \mathbf{R} & 1 & -2 \\ & & & 2 & 3 \\ \hline \mathbf{P} & 2 & 1 & 4 & -1 \\ & 1 & 3 & 7 & 7 \\ \hline & & & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc|cc|} & & \mathbf{S} & 1 & 3 \\ & & & 5 & 8 \\ \hline \mathbf{Q} & 1 & 4 & 21 & 35 \\ & 2 & 1 & 7 & 14 \\ \hline & & & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}} \end{array}$$

Die aus diesen Produkten gebildete 4-reihige *Blockmatrix* lautet somit:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \end{array}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 35 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

Sie stimmt (wie behauptet) mit dem Matrizenprodukt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ überein.

J7

Bestimmen Sie alle 2-reihigen Matrizen vom Typ $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, deren Matrizenprodukt mit der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ sich *kommutativ* verhält $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A})$.

Wir berechnen zunächst die benötigten Matrizenprodukte $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ und $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+0) & (b+0) \\ (-a+c) & (-b+d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ (c-a) & (d-b) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-b) & (0+b) \\ (c-d) & (0+d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-b) & b \\ (c-d) & d \end{pmatrix}$$

Somit müssen die noch unbekannten Elemente a, b, c und d die folgende Matrizengleichung erfüllen:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ (c-a) & (d-b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-b) & b \\ (c-d) & d \end{pmatrix}$$

Durch Vergleich entsprechender Elemente auf beiden Seiten dieser Gleichung erhält man vier Gleichungen mit folgender Lösung:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(I)} & a = a - b & \Rightarrow \quad b = 0, \quad a = \text{beliebig} \\ \text{(II)} & b = b & \Rightarrow \quad b = \text{beliebig} \\ \text{(III)} & c - a = c - d & \Rightarrow \quad d = a, \quad c = \text{beliebig} \\ \text{(IV)} & d - b = d & \Rightarrow \quad b = 0, \quad d = \text{beliebig} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a = d = \text{beliebig}, \quad b = 0, \quad c = \text{beliebig}$$

Lösung: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

Kontrollrechnung:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ (-a+c) & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ (c-a) & a \end{pmatrix} \\ \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ (c-a) & a \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}$$

1.2 Determinanten

Hinweise

Lehrbuch: Band 2, Kapitel I.3

Formelsammlung: Kapitel VII.2

J8

Begründen Sie, warum die folgenden Determinanten verschwinden:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} -1 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & -10 \\ 6 & -12 & 30 \end{vmatrix} \qquad \text{c)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & 5 & -8 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & -6 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{d)} \begin{vmatrix} 4 & -3 & 4 \\ -20 & 15 & -20 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

---

a) Die Determinante enthält den *Nullvektor* (3. Spalte).

b) Die Determinante enthält zwei *proportionale* Spalten (die 3. Spalte ist das 5-fache der 1. Spalte).

c) Die 4. Zeile ist die *Summe* der ersten beiden Zeilen und somit eine *Linearkombination* dieser Zeilen.

d) Die Determinante enthält zwei *gleiche* Spalten (1. und 3. Spalte).

J9

Entwickeln Sie die folgenden 3-reihigen Determinanten nach einer *möglichst günstigen* Zeile oder Spalte:

$$\text{a)}\ D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{b)}\ D = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

---

a) Wir entwickeln die 3-reihige Determinante nach den Elementen der *1. Zeile*, da $a_{13} = 0$ ist (*Alternative*: Entwicklung nach der 3. Spalte):

$$D = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} = 2 A_{11} + 1 A_{12} + 0 \cdot A_{13} = 2 A_{11} + A_{12}$$

Berechnung der *algebraischen Komplemente* A_{11} und A_{12} (Vorzeichen nach der *Schachbrettregel*):

$$A_{11} = +D_{11} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}_{D_{11}} = -4 - 6 = -10$$

$$A_{12} = -D_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = - \underbrace{\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{D_{12}} = -(-5 - 2) = 7$$

Somit gilt:

$$D = 2 A_{11} + A_{12} = 2 \cdot (-10) + 7 = -20 + 7 = -13$$

b) Wir entwickeln diese Determinante zweckmäßigerweise nach den Elementen der *1. Spalte* (alle Elemente sind gleich Eins):

$$D = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31} = 1 A_{11} + 1 A_{21} + 1 A_{31} = A_{11} + A_{21} + A_{31}$$

Berechnung der *algebraischen Komplemente* A_{11}, A_{21} und A_{31} aus den entsprechenden zweireihigen Unterdeterminanten D_{11}, D_{21} und D_{31}:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & y^2 \\ z & z^2 \end{vmatrix} = yz^2 - zy^2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot D_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x & x^2 \\ z & z^2 \end{vmatrix} = -(xz^2 - zx^2) = -xz^2 + zx^2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot D_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = xy^2 - yx^2$$

Damit besitzt die Determinante D den folgenden Wert:

$$D = A_{11} + A_{21} + A_{31} = yz^2 - zy^2 - xz^2 + zx^2 + xy^2 - yx^2 = x^2(z - y) + y^2(x - z) + z^2(y - x)$$

J10

Entwickeln Sie die folgenden 4-reihigen Determinanten nach einer *günstigen* Zeile oder Spalte und berechnen Sie die dabei anfallenden 3-reihigen Determinanten nach der *Regel von Sarrus*:

$$\text{a)}\ D = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 & 0 \\ 10 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} \qquad \text{b)}\ D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

---

a) Besonders günstig für die Laplace-Entwicklung ist die *3. Zeile*, da diese *zwei* Nullen enthält $(a_{31} = a_{33} = 0)$:

$$D = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} = 0 \cdot A_{31} + 4A_{32} + 0 \cdot A_{33} - 2A_{34} = 4A_{32} - 2A_{34}$$

Berechnung der *algebraischen Komplemente* A_{32} und A_{34} nach der *Regel von Sarrus*:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot D_{32} = - \begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 & 0 \\ 10 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = - \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 10 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}_{D_{32} = 112} = -112$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 10 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}_{D_{32}} \begin{matrix} -2 & 4 \\ 10 & 3 \\ 1 & 3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D_{32} = 12 + 8 + 0 - 0 + 12 + 80 = 112$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \cdot D_{34} = - \begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 & 0 \\ 10 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = - \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 10 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}_{D_{34} = 67} = -67$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 10 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}_{D_{34}} \begin{matrix} -2 & -1 \\ 10 & -4 \\ 1 & 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D_{34} = 24 - 3 + 0 + 16 + 0 + 30 = 67$$

Somit gilt:

$$D = 4A_{32} - 2A_{34} = 4 \cdot (-112) - 2 \cdot (-67) = -448 + 134 = -314$$

b) Die *4. Spalte* enthält *drei* Nullen $(a_{14} = a_{24} = a_{44} = 0)$, daher entwickeln wir die Determinante nach den Elementen dieser Spalte:

$$D = \underbrace{a_{14}}_{0} A_{14} + \underbrace{a_{24}}_{0} A_{24} + \underbrace{a_{34}}_{4} A_{34} + \underbrace{a_{44}}_{0} A_{44} = 4A_{34}$$

Berechnung des *algebraischen Komplements* A_{34} nach der *Regel von Sarrus* (Vorzeichenbestimmung nach der *Schachbrettregel*):

$$A_{34} = -D_{34} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}}_{D_{34} = -4} = -(-4) = 4$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}}_{D_{34}} \begin{matrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D_{34} = 0 + 1 + 0 - 0 - 0 - 5 = -4$$

Somit: $D = 4A_{34} = 4 \cdot 4 = 16$

J11

Zeigen Sie durch *elementare Umformungen*, dass die Determinanten der folgenden Matrizen *verschwinden*:

$$\text{a)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 18 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 18 & -1 \\ 4 & -3 & 5 & 6 \\ -6 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Die vorgenommenen Umformungen in den Zeilen und Spalten der Determinante werden jeweils in der entsprechenden Zeile bzw. Spalte angeschrieben (Z: Zeile).

$$\text{a)}\quad \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 18 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +Z_1 \\ -2Z_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 12 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -3Z_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ = 0 \\ \leftarrow \text{Nullvektor} \end{matrix}$$

Die Determinante enthält in der *3. Zeile* nur *Nullen* und hat daher den Wert *Null*.

Anmerkung: Bereits nach dem 1. Schritt enthält die Determinante zwei *proportionale* Zeilen (2. und 3. Zeile) und hat daher den Wert *Null*. Wenn Sie dies erkannt haben, können Sie hier bereits abbrechen.

$$\text{b)}\quad \det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 18 & -1 \\ 4 & -3 & 5 & 6 \\ -6 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2Z_1 \\ +3Z_1 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 18 & -1 \\ 0 & -13 & -31 & 8 \\ 0 & 18 & 45 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \text{Proportionale Zeilen}$$

Die 3. Zeile ist das *9-fache* der 4. Zeile, die Determinante hat daher den Wert $\det \mathbf{B} = 0$.

J12

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

Berechnen Sie diese Determinante durch *Laplace-Entwicklung*

a) nach der günstigsten Zeile,

b) nach der günstigsten Spalte.

---

a) *Günstig* sind die Zeilen 2 und 3, da sie beide *zwei* Nullen enthalten. Wir entscheiden uns für die *2. Zeile* $(a_{21} = a_{24} = 0)$:

$$D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} = 0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} - 1 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{24} = A_{22} - A_{23}$$

Berechnung der *algebraischen Komplemente* A_{22} und A_{23} aus den entsprechenden 3-reihigen Unterdeterminanten D_{22} und D_{23} nach der *Regel von Sarrus* (Vorzeichenbestimmung nach der *Schachbrettregel*):

$$A_{22} = +D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}}_{D_{22} = 36} = 36$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}}_{D_{22}} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & -5 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D_{22} = 0 + 16 + 0 - 0 + 20 - 0 = 36$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}_{D_{23}} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 2 & -3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D_{23} = 4 + 0 + 0 - 8 + 12 - 0 = 8$$

$$A_{23} = -D_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}_{D_{23} = 8} = -8$$

Somit gilt:

$$D = A_{22} - A_{23} = 36 - (-8) = 36 + 8 = 44$$

b) Die *1. Spalte* enthält die *meisten* Nullen $(a_{21} = a_{31} = 0)$, also entwickeln wir die Determinante nach den Elementen dieser Spalte:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 2A_{41} = A_{11} + 2A_{41}$$

Berechnung der *algebraischen Komplemente* A_{11} und A_{41} aus den entsprechenden 3-reihigen Unterdeterminanten D_{11} und D_{41} nach der *Regel von Sarrus* (Vorzeichenbestimmung nach der *Schachbrettregel*):

$$A_{11} = +D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix}}_{D_{11} = 36} = 36$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix}}_{D_{11}} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ -3 & -5 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D_{11} = 0 + 12 + 0 - 0 + 20 + 4 = 36$$

$$A_{41} = -D_{41} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix}}_{D_{41} = -4} = -(-4) = 4$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix}}_{D_{41}} \begin{matrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D_{41} = 0 + 0 + 0 + 4 - 0 - 8 = -4$$

Somit besitzt die Determinante den folgenden Wert (in Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus a)):

$$D = A_{11} + 2A_{41} = 36 + 2 \cdot 4 = 36 + 8 = 44$$

J13

Berechnen Sie die Determinante

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

a) nach der *Regel von Sarrus*,

b) durch *Laplace-Entwicklung* nach der *günstigsten* Zeile oder Spalte,

c) durch Umformung auf *Dreiecksform* mit Hilfe *elementarer Zeilenumformungen*.

---

a) Determinantenberechnung nach *Sarrus*:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}}_{D} \begin{matrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D = 20 + 0 + 0 - 1 - 0 + 20 = 39$$

b) Besonders günstig für die Entwicklung der Determinante ist die zweite *oder* dritte Zeile bzw. die zweite *oder* dritte Spalte. Wir entscheiden uns für die *dritte Zeile*:

$$D = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = 1 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{32} + 5A_{33} = A_{31} + 5A_{33}$$

Berechnung der *algebraischen Komplemente* A_{31} und A_{33} aus den entsprechenden Unterdeterminanten D_{31} und D_{33} (Vorzeichenbestimmung nach der *Schachbrettregel*):

$$A_{31} = +D_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}_{D_{31}} = 0 - 1 = -1$$

$$A_{33} = +D_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}_{D_{33}} = 4 + 4 = 8$$

Somit gilt:

$$D = A_{31} + 5A_{33} = -1 + 5 \cdot 8 = -1 + 40 = 39$$

c) Wir *vertauschen* zunächst die Zeilen 1 und 3 miteinander, wobei sich das Vorzeichen der Determinante *ändert*. Die weiteren Zeilenumformungen sind jeweils angeschrieben:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \updownarrow = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ +2Z_1 \\ -4Z_1 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & -19 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2Z_2 \end{matrix} = - \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -39 \end{vmatrix}}_{\text{Diagonalmatrix}} =$$

$$= -\left[1 \cdot 1 \cdot (-39)\right] = 39$$

J14 Welche Lösungen besitzt die Gleichung $\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$?

Wir berechnen zunächst die 3-reihige Determinante D nach der *Regel von Sarrus*:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 2 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix}}_{D} \begin{matrix} \lambda - 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 \\ -2 & 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$D = (\lambda - 1)^2 (1 - \lambda) + 0 + 0 + 4(\lambda - 1) + 0 + 0 = (\lambda - 1)^2 (1 - \lambda) + 4(\lambda - 1)$$

Die sich daraus ergebende kubische Gleichung lösen wir durch Ausklammern des gemeinsamen Faktors $\lambda - 1$ wie folgt:

$$(\lambda - 1)^2 \underbrace{(1 - \lambda)}_{-(\lambda - 1)} + 4(\lambda - 1) = -(\lambda - 1)^3 + 4(\lambda - 1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(\lambda - 1)^3 - 4(\lambda - 1) = (\lambda - 1)\left[(\lambda - 1)^2 - 4\right] = 0 \begin{cases} \lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \\ (\lambda - 1)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \end{cases}$$

$$(\lambda - 1)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 1)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda - 1 = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \pm 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -1$$

Lösung: $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 3, \ \lambda_3 = -1$

J15

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & -4 & 6 \\ 7 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = ?$$

Vereinfachen Sie diese Determinante durch elementare Umformungen in den *Spalten* so lange, bis Sie eine Determinante erhalten, die in einer Zeile nur noch ein von Null verschiedenes Element enthält und entwickeln Sie anschließend nach *Laplace* (Berechnung der anfallenden 3-reihigen Determinante nach der *Regel von Sarrus*).

Wir nehmen folgende Umformungen in den *Spalten* der Determinante vor: von der vierten Spalte subtrahieren wir die erste Spalte, von der dritten Spalte das 5-fache der ersten Spalte. Dann enthält die Determinante in der *letzten* (grau unterlegten) Zeile nur noch *ein* von Null verschiedenes Element: $a_{41} = 1,\ a_{42} = a_{43} = a_{44} = 0$. Die Entwicklung der Determinante nach den Elementen dieser Zeile führt dann auf eine *dreireihige* Determinante, die wir nach der *Regel von Sarrus* leicht berechnen können.

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & -4 & 6 \\ 7 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \underset{\substack{\uparrow \\ -5S_1}}{5} & \underset{\substack{\uparrow \\ -S_1}}{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 7 & 4 \\ 2 & -8 & -14 & 4 \\ 7 & 5 & -34 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{a_{41}}_{1} A_{41} + \underbrace{a_{42}}_{0} A_{42} + \underbrace{a_{43}}_{0} A_{43} + \underbrace{a_{44}}_{0} A_{44} = A_{41}$$

Berechnung des *algebraischen Komplements* A_{41} aus der Unterdeterminante D_{41} nach *Sarrus*:

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \cdot D_{41} = -D_{41} = -\begin{vmatrix} -1 & 4 & 7 & 4 \\ 2 & -8 & -14 & 4 \\ 7 & 5 & -34 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 7 & 4 \\ -8 & -14 & 4 \\ 5 & -34 & -7 \end{vmatrix}}_{D_{41} = 2052} = -2052$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 7 & 4 \\ -8 & -14 & 4 \\ 5 & -34 & -7 \end{vmatrix}}_{D_{41}} \begin{matrix} 4 & 7 \\ -8 & -14 \\ 5 & -34 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D_{41} = 392 + 140 + 1088 + 280 + 544 - 392 = 2052$$

Ergebnis: $D = A_{41} = -2052$

J16

Zeigen Sie, dass die Gleichung $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$ eine *Gerade* durch die Punkte $P_1 = (x_1;\, y_1)$ und $P_2 = (x_2;\, y_2)$ darstellt.

Wir berechnen zunächst die 3-reihige Determinante nach der *Regel von Sarrus*:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix}}_{D} \begin{matrix} 1 & 1 \\ x & x_1 \\ y & y_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D = x_1 y_2 + x_2 y + x y_1 - x_1 y - x_2 y_1 - x y_2$$

Aus $D = 0$ erhalten wir die folgende *lineare* Gleichung mit den Koordinaten x und y:

$$x_1 y_2 + x_2 y + x y_1 - x_1 y - x_2 y_1 - x y_2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\underbrace{(x_2 - x_1)}_{a}\, y + \underbrace{(y_1 - y_2)}_{b}\, x + \underbrace{x_1 y_2 - x_2 y_1}_{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad a y + b x + c = 0$$

Diese Gleichung ist die Funktionsgleichung einer *linearen* Funktion in *impliziter* Form und repräsentiert bekanntlich eine *Gerade*. Beide Punkte liegen auf der Geraden, da beim Einsetzen der Koordinaten von P_1 bzw. P_2 in die Determinante der Ausgangsgleichung zwei *gleiche* Spalten entstehen und die Determinante somit jeweils *verschwindet*:

$$P_1 = (x_1;\, y_1) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_1 & x_2 \\ y_1 & y_1 & y_2 \end{vmatrix}}_{\text{identische Spalten}} = 0; \qquad P_2 = (x_2;\, y_2) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_1 & x_2 \\ y_2 & y_1 & y_2 \end{vmatrix}}_{\text{identische Spalten}} = 0$$

J17 Wie ändert sich der Determinantenwert einer n-reihigen Matrix $\mathbf{A}$, wenn man diese Matrix mit dem Skalar λ multipliziert?

Die Multiplikation einer Matrix $\mathbf{A}$ mit einem Skalar λ erfolgt bekanntlich *elementweise*, d. h. *jedes* Matrixelement wird mit λ multipliziert:

$$\lambda \cdot \mathbf{A} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\det(\lambda \cdot \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

In der Determinante von $\lambda \cdot \mathbf{A}$ enthält somit *jede* der n Zeilen (Spalten) den *gemeinsamen* Faktor λ. Bekanntlich darf ein allen Elementen *einer* Zeile (Spalte) gemeinsamer Faktor *vor* die Determinante gezogen werden. Wir können daher aus *jeder* der n Zeilen (Spalten) den gemeinsamen Faktor λ vorziehen. Der Faktor λ tritt daher genau n-mal vor der Determinante auf:

$$\det(\lambda \cdot \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = \underbrace{\lambda \cdot \lambda \cdot \cdots \cdot \lambda}_{n\text{-mal}} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\det \mathbf{A}} = \lambda^n \cdot \det \mathbf{A}$$

Folgerung: Wird eine n-reihige Matrix $\mathbf{A}$ mit dem Skalar λ multipliziert, so multipliziert sich ihre Determinante mit λ^n, d. h. es gilt:

$$\det(\lambda \cdot \mathbf{A}) = \lambda^n \cdot \det \mathbf{A}$$

J18 Zeigen Sie: Für die Determinante der 4-reihigen *Blockmatrix* $\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\overbrace{\begin{matrix} a & b \end{matrix}}^{\mathbf{P}}} & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \end{array}\right)$ gilt ($\mathbf{Q}$ unter dem Block $\begin{matrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{matrix}$):

$$\det \mathbf{A} = (\det \mathbf{P}) \cdot (\det \mathbf{Q})$$

Zahlenbeispiel für die folgenden Untermatrizen:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Wert der Determinante $\det \mathbf{A}$.

Wir entwickeln die Determinante der *Blockmatrix* $\mathbf{A}$ nach dem Elementen der *1. Zeile*:

$$\det \mathbf{A} = \left|\begin{array}{cc|cc} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \end{array}\right| = \underbrace{a_{11}}_{a} A_{11} + \underbrace{a_{12}}_{b} A_{12} + \underbrace{a_{13}}_{0} A_{13} + \underbrace{a_{14}}_{0} A_{14} = a A_{11} + b A_{12}$$

Berechnung der *algebraischen Komplemente* A_{11} und A_{12} aus den entsprechenden Unterdeterminanten D_{11} und D_{12} nach der *Regel von Sarrus*:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = D_{11} = \left|\begin{array}{cc|cc} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \end{array}\right| = \underbrace{\begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{vmatrix}}_{D_{11} = d(\alpha\delta - \beta\gamma)} = d(\alpha\delta - \beta\gamma)$$

$$\underbrace{\left|\begin{array}{ccc} d & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{array}\right|}_{D_{11}} \begin{array}{cc} d & 0 \\ 0 & \alpha \\ 0 & \gamma \end{array} \quad \Rightarrow \quad D_{11} = d\alpha\delta + 0 + 0 - 0 - d\beta\gamma - 0 = d\alpha\delta - d\beta\gamma = d(\alpha\delta - \beta\gamma)$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot D_{12} = -D_{12} = -\left|\begin{array}{cccc} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \end{array}\right| = -\underbrace{\begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{vmatrix}}_{D_{12} = c(\alpha\delta - \beta\gamma)} = -c(\alpha\delta - \beta\gamma)$$

$$\underbrace{\left|\begin{array}{ccc} c & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{array}\right|}_{D_{12}} \begin{array}{cc} c & 0 \\ 0 & \alpha \\ 0 & \gamma \end{array} \quad \Rightarrow \quad D_{12} = c\alpha\delta + 0 + 0 - 0 - c\beta\gamma - 0 = c\alpha\delta - c\beta\gamma = c(\alpha\delta - \beta\gamma)$$

Damit erhalten wir:

$$\det \mathbf{A} = a A_{11} + b A_{12} = ad(\alpha\delta - \beta\gamma) - bc(\alpha\delta - \beta\gamma) = \underbrace{(ad - bc)}_{\det \mathbf{P}} \underbrace{(\alpha\delta - \beta\gamma)}_{\det \mathbf{Q}} = (\det \mathbf{P}) \cdot (\det \mathbf{Q})$$

Die beiden Faktoren dieses Produktes sind aber genau die *Determinanten* der Untermatrizen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$:

$$\det \mathbf{P} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad \det \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

Zahlenbeispiel:

$$\det \mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{}^{\mathbf{P}}} & & \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ & & \multicolumn{2}{c}{\underbrace{}_{\mathbf{Q}}} \end{array}\right) = (\det \mathbf{P}) \cdot (\det \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (10 - 3) \cdot (12 - 2) = 7 \cdot 10 = 70$$

J19

Gegeben sind die 3-reihigen Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die *Determinante* des Matrizenproduktes $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ auf *zwei verschiedene* Arten.

b) Welchen Wert besitzt die Determinante des Produktes $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$?

---

a) Wir verwenden das *Multiplikationstheorem* für n-reihige Matrizen: $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\det \mathbf{A}) \cdot (\det \mathbf{B})$.

1. Lösungsweg

Wir bilden zunächst das *Matrizenprodukt* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ nach dem *Falk-Schema*, dann die *Determinante* des Produktes unter Verwendung der *Regel von Sarrus*:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|}
\cline{5-7}
\multicolumn{1}{c}{} & & & & 1 & 1 & 1 \\
\multicolumn{1}{c}{\mathbf{B}} & & & & 0 & -5 & 3 \\
\multicolumn{1}{c}{} & & & & 4 & 1 & 2 \\
\cline{2-7}
 & 1 & 2 & 0 & 1 & -9 & 7 \\
\mathbf{A} & -1 & 5 & 3 & 11 & -23 & 20 \\
 & 1 & 0 & 2 & 9 & 3 & 5 \\
\cline{2-7}
\multicolumn{1}{c}{} & & & & \multicolumn{3}{c}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -9 & 7 \\ 11 & -23 & 20 \\ 9 & 3 & 5 \end{vmatrix}}_{\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}
\begin{matrix} 1 & -9 \\ 11 & -23 \\ 9 & 3 \end{matrix}$$

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = -115 - 1620 + 231 + 1449 - 60 + 495 = 380$$

2. Lösungsweg

Wir berechnen die *Determinanten* von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ nach der *Regel von Sarrus* und *multiplizieren* diese:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}_{\det \mathbf{A}}
\begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ 1 & 0 \end{matrix}
\quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = 10 + 6 + 0 - 0 - 0 + 4 = 20$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{\det \mathbf{B}}
\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -5 \\ 4 & 1 \end{matrix}
\quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{B} = -10 + 12 + 0 + 20 - 3 - 0 = 19$$

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\det \mathbf{A}) \cdot (\det \mathbf{B}) = 20 \cdot 19 = 380$$

b) Aus dem *Multiplikationstheorem* für Determinanten folgt:

$$\det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = (\det \mathbf{B}) \cdot (\det \mathbf{A}) = 19 \cdot 20 = 380$$

Somit ist $\det(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$, obwohl die *Matrizenprodukte* $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ und $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ *verschieden* sind.

J20

Zeige: Für eine n-reihige Diagonalmatrix $\mathbf{A}$ mit den Diagonalelementen $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ gilt:

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Wir entwickeln die n-reihige Diagonaldeterminante $\det \mathbf{A}$ zunächst nach den Elementen der *1. Zeile*, wobei nur das *Diagonalelement* a_{11} einen Beitrag liefert (die *übrigen* Elemente sind alle gleich *Null*). Die Entwicklung führt zu einer $(n-1)$-reihigen *Diagonaldeterminante* mit den Diagonalelementen $a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$. Diese Determinante entwickeln wir wieder nach den Elementen der *1. Zeile* (nur das *1. Element* a_{22} liefert einen Beitrag, die *übrigen* Elemente sind wieder alle gleich *Null*).

Die Entwicklung führt dann auf eine $(n-2)$-reihige *Diagonaldeterminante* mit den Diagonalelementen $a_{33}, a_{44}, \ldots, a_{nn}$. Dieses Verfahren setzen wir fort, bis wir auf die 1-reihige Determinante mit dem (einzigen) Element a_{nn} stoßen. Somit gilt:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \begin{vmatrix} a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \cdots = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{n-1,\,n-1} \cdot \underbrace{|a_{nn}|}_{a_{nn}} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$$

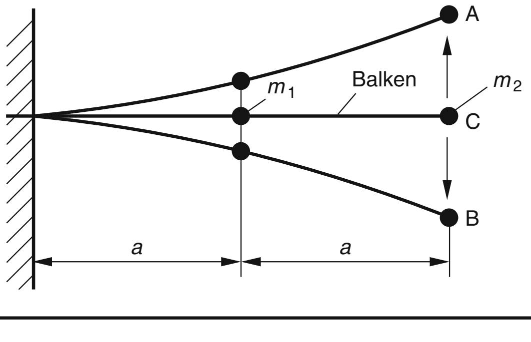
Anmerkung: $|a_{nn}|$ ist die *1-reihige Determinante* mit dem einzigen Element a_{nn} (nicht zu verwechseln mit dem *Betrag* von a_{nn}).

J21

Der in Bild J-1 dargestellte elastische Balken der Länge $l = 2a$ ist am linken Ende fest eingespannt und trägt in der angegebenen Weise zwei gleiche Punktmassen $m_1 = m_2 = m$. Infolge seiner Elastizität ist er zu *Biegeschwingungen* fähig. Die Kreisfrequenzen ω dieser sog. *Eigenschwingungen* lassen sich aus der Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} (\alpha - \omega^2) & -\frac{5}{2}\,\omega^2 \\ -\frac{5}{2}\,\omega^2 & (\alpha - 8\,\omega^2) \end{vmatrix} = 0 \qquad \left(\text{mit } \alpha = \frac{3\,EI}{m\,l^3}\right)$$

bestimmen (EI: Biegesteifigkeit des Balkens). Berechnen Sie diese Eigenkreisfrequenzen.



A, B: Umkehrpunkte der Biegeschwingung

C: Gleichgewichtslage des Balkens

Bild J-1

Die Determinantengleichung führt zu einer *bi-quadratischen* Gleichung, die wir mit der *Substitution* $u = \omega^2$ wie folgt lösen:

$$\begin{vmatrix} (\alpha - \omega^2) & -\frac{5}{2}\,\omega^2 \\ -\frac{5}{2}\,\omega^2 & (\alpha - 8\,\omega^2) \end{vmatrix} = (\alpha - \omega^2)\,(\alpha - 8\,\omega^2) - \frac{25}{4}\,\omega^4 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\alpha^2 - 8\,\alpha\,\omega^2 - \alpha\,\omega^2 + 8\,\omega^4 - \frac{25}{4}\,\omega^4 = \frac{7}{4}\,\omega^4 - 9\,\alpha\,\omega^2 + \alpha^2 = 0 \,\Big|\cdot \frac{4}{7} \quad \Rightarrow$$

$$\omega^4 - \frac{36}{7}\,\alpha\,\omega^2 + \frac{4}{7}\,\alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\text{Substitution: } u = \omega^2) \quad u^2 - \frac{36}{7}\,\alpha\,u + \frac{4}{7}\,\alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$u_{1/2} = \frac{18}{7}\,\alpha \pm \sqrt{\frac{324}{49}\,\alpha^2 - \frac{4}{7}\,\alpha^2} = \frac{18}{7}\,\alpha \pm \sqrt{\frac{324\,\alpha^2 - 28\,\alpha^2}{49}} = \frac{18}{7}\,\alpha \pm \sqrt{\frac{296\,\alpha^2}{49}} =$$

$$= \frac{18}{7}\,\alpha \pm \frac{\sqrt{296}\,\alpha}{7} = 2{,}5714\,\alpha \pm 2{,}4578\,\alpha \quad \Rightarrow \quad u_1 = 5{,}0292\,\alpha; \quad u_2 = 0{,}1136\,\alpha$$

Rücksubstitution unter Beachtung der Bedingung $\omega > 0$ führt zu den folgenden Lösungen:

$$\omega^2 = u_1 = 5{,}0292\,\alpha \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{5{,}0292\,\alpha} = 2{,}243\,\sqrt{\alpha}$$

$$\omega^2 = u_2 = 0{,}1136\,\alpha \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{0{,}1136\,\alpha} = 0{,}337\,\sqrt{\alpha}$$

J22

Berechnen Sie die *Determinante* der 5-reihigen Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) durch *Laplace-Entwicklung* nach günstigen Zeilen oder Spalten (auf 3-reihige Determinanten zurückführen, die dann nach der *Regel von Sarrus* berechnet werden),

b) indem Sie die Matrix zunächst mit Hilfe *elementarer Zeilenumformungen* auf *Diagonalgestalt* bringen und dann die Determinante der Diagonalmatrix berechnen.

---

a) Besonders *günstig* sind die *3. Spalte* und die *4. Zeile*, die beide jeweils *drei* Nullen enthalten. Wir entscheiden uns für die *4. Zeile*. Die Entwicklung der Determinante nach *Laplace* enthält dann nur *zwei* von Null verschiedene Glieder:

$$\det \mathbf{A} = \underbrace{a_{41}}_{-2} A_{41} + \underbrace{a_{42}}_{1} A_{42} + \underbrace{a_{43}}_{0} A_{43} + \underbrace{a_{44}}_{0} A_{44} + \underbrace{a_{45}}_{0} A_{45} = -2\,A_{41} + A_{42} =$$

$$= -2 \cdot (-1)^{4+1} \cdot D_{41} + (-1)^{4+2} \cdot D_{42} = -2 \cdot (-1) \cdot D_{41} + 1 \cdot D_{42} = 2\,D_{41} + D_{42}$$

Die 4-reihigen Unterdeterminanten lauten:

$$D_{41} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}_{\det \mathbf{B}}; \qquad D_{42} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}_{\det \mathbf{C}}$$

Die Determinanten $D_{41} = \det \mathbf{B}$ und $D_{42} = \det \mathbf{C}$ entwickeln wir jeweils nach den Elementen der *1. Zeile*, die daraus resultierenden 3-reihigen Unterdeterminanten werden dann nach der *Regel von Sarrus* berechnet:

Entwicklung der Determinante $D_{41} = \det \mathbf{B}$

$$\det \mathbf{B} = \underbrace{b_{11}}_{-1} B_{11} + \underbrace{b_{12}}_{0} B_{12} + \underbrace{b_{13}}_{2} B_{13} + \underbrace{b_{14}}_{0} B_{14} = -B_{11} + 2B_{13}$$

$$B_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}_{B_{11} = -7} = -7$$

$$\underbrace{\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}\right|}_{B_{11}} \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad B_{11} = 6 + 1 + 0 - 12 - 2 - 0 = -7$$

$$B_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{B_{13} = 2} = 2$$

$$\underbrace{\left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right|}_{B_{13}} \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad B_{13} = 0 + 0 + 4 - 0 - 0 - 2 = 2$$

Somit gilt:

$$D_{41} = \det \mathbf{B} = -B_{11} + 2B_{13} = -(-7) + 2 \cdot 2 = 7 + 4 = 11$$

Entwicklung der Determinante $D_{42} = \det \mathbf{C}$

$$\det \mathbf{C} = \underbrace{c_{11}}_{1} C_{11} + \underbrace{c_{12}}_{0} C_{12} + \underbrace{c_{13}}_{2} C_{13} + \underbrace{c_{14}}_{0} C_{14} = C_{11} + 2C_{13}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}_{C_{11} = -7} = -7$$

Diese Determinante ist identisch mit der bereits berechneten Determinante B_{11}: $C_{11} = B_{11} = -7$.

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \underset{\text{proportionale Spalten}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = 0$$

Zur Erinnerung: Eine Determinante mit zwei *proportionalen* Zeilen (oder Spalten) *verschwindet*.

Somit gilt:

$$D_{42} = \det \mathbf{C} = C_{11} + 2C_{13} = -7 + 2 \cdot 0 = -7$$

Für die Ausgangsdeterminante $\det \mathbf{A}$ erhalten wir damit den folgenden Wert:

$$\det \mathbf{A} = 2D_{41} + D_{42} = 2 \cdot 11 - 7 = 22 - 7 = 15$$

b) Die durchgeführten Umformungen in den *Zeilen* der Matrix $\mathbf{A}$ sind jeweils angeschrieben:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ +Z_4 \\ \\ \\ +Z_4 \end{array} \overset{\textcircled{1}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -Z_3 \\ \\ +2Z_1 \\ -Z_3 \end{array} \overset{\textcircled{2}}{\Rightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} +Z_3 \\ -Z_5 \\ \\ +Z_3 \\ \\ \end{array} \overset{\textcircled{3}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \updownarrow \\ \\ \updownarrow \\ \\ \end{array} \overset{\textcircled{4}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \updownarrow \\ \\ \\ \end{array} \overset{\textcircled{5}}{\Rightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ +7Z_4 \end{array} \overset{\textcircled{6}}{\Rightarrow} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}}_{\text{Obere Dreiecksmatrix}}$$

Umformungen

① Zur 2. und 5. Zeile *addieren* wir die 4. Zeile.

② Von der 2. und 5. Zeile wird die 3. Zeile *subtrahiert*, zur 4. Zeile das 2-fache der 1. Zeile *addiert*.

③ Zur 1. und 4. Zeile wird die 3. Zeile *addiert*, von der 2. Zeile die 5. Zeile *subtrahiert*.

④ Wir *vertauschen* jeweils die 2. Zeile mit der 3. Zeile und die 4. Zeile mit der 5. Zeile.

⑤ *Vertauschen* der Zeilen 3 und 4.

⑥ Zur 5. Zeile wird das 7-fache der 4. Zeile *addiert*. Wir erhalten eine obere Dreiecksmatrix.

Berechnung der Determinante det A

Die vorgenommenen Zeilenumformungen in der Matrix $\mathbf{A}$ bewirken *keine* Änderung des Determinantenwertes. Mit einer Ausnahme: Beim *Vertauschen* zweier Zeilen *ändert* die Determinante ihr *Vorzeichen*. Insgesamt wurden *drei* Vertauschungen vorgenommen (Operationen ④ und ⑤), so dass sich die Determinante mit $(-1)(-1)(-1) = -1$ *multipliziert*. Somit gilt:

$$\det \mathbf{A} = -1 \cdot [(1) \cdot (1) \cdot (1) \cdot (-1) \cdot (15)] = 15$$

(für *Dreiecksmatrizen* gilt bekanntlich: $\det \mathbf{A} =$ Produkt der Diagonalelemente).

1.3 Spezielle Matrizen

Hinweise

Lehrbuch: Band 2, Kapitel I.2.4, 3 und 6

Formelsammlung: Kapitel VII.1.2, 1.4, 1.5 und 4

J23

Welche der nachfolgenden 3-reihigen Matrizen sind *regulär*, welche *singulär*? (Nachweis über Determinanten)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & 1 & 9 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{mit } a \in \mathbb{R})$$

Eine n-reihige Matrix $\mathbf{A}$ ist *regulär*, wenn ihre Determinante *nicht verschwindet*, anderenfalls ist sie *singulär*. Die Berechnung der hier vorliegenden 3-reihigen Determinanten erfolgt nach der *Regel von Sarrus*.

$$\underbrace{\left|\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right|}_{\det \mathbf{A}} \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = 1 + 16 + 0 - 4 - 2 - 0 = 11 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ ist } \textit{regulär}$$

$$\underbrace{\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right|}_{\det \mathbf{B}} \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{B} = 12 + 0 + 0 - 0 - 12 - 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} \text{ ist } \textit{singulär}$$

$$\underbrace{\left|\begin{array}{ccc} a & 1 & 9 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right|}_{\det \mathbf{C}} \begin{array}{cc} a & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{C} = 0 + 2a + 9 - 0 - a^2 - 1 = -a^2 + 2a + 8$$

$$\det \mathbf{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad -a^2 + 2a + 8 = 0 \;\Big|\; \cdot (-1) \quad \Rightarrow \quad a^2 - 2a - 8 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$a_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1 + 8} = 1 \pm 3 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 4, \quad a_2 = -2$$

Für $a = 4$ bzw. $a = -2$ ist die Matrix $\mathbf{C}$ demnach *singulär*, für alle übrigen reellen Werte von a *regulär*.

J24

Bestimmen Sie mit Hilfe *elementarer Umformungen* in den Zeilen bzw. Spalten der Matrix den *Rang* r dieser Matrix und entscheiden Sie dann, ob die Matrix *regulär* oder *singulär* ist.

$$\text{a)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 5 & -3 \\ 8 & -7 & 21 \end{pmatrix} \qquad \text{c)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 16 & 4 \end{pmatrix}$$

Eine n-reihige Matrix $\mathbf{A}$ ist genau dann *regulär*, wenn ihr *Rang* r gleich n ist, sonst ist sie *singulär*. Durch *elementare Zeilenumformungen* bringen wir die Matrix $\mathbf{A}$ auf die „Trapezform“ $\mathbf{A}^*$ und bestimmen den jeweiligen Rang (er ist gleich der Anzahl der *nicht-verschwindenden* Zeilen).

a) $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \\ \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2Z_1 \\ -2Z_1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -2Z_2 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^*$$

$$r = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}^*) = 3, \quad n = 3 \quad \Rightarrow \quad r = n = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ ist } \textit{regulär}$$

b) $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 5 & -3 \\ 8 & -7 & 21 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ +2Z_1 \\ -8Z_1 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 13 & 9 \\ 0 & -39 & -27 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +3Z_2 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 13 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ = \mathbf{A}^* \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{array}$$

$$r = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}^*) = 2, \quad n = 3 \quad \Rightarrow \quad r < n = 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ ist } \textit{singulär}$$

c) $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 16 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \\ \\ +Z_3 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 20 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2Z_1 \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 20 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ +Z_3 \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 20 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +2Z_2 \\ \\ \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 20 & 5 \\ 0 & 0 & 20 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -Z_3 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 20 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ = \mathbf{A}^* \\ \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{array}$$

$$r = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}^*) = 3, \quad n = 4 \quad \Rightarrow \quad r < n = 4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ ist } \textit{singulär}$$

J25

Zeigen Sie, dass die Matrix $\mathbf{A}$ *regulär* ist und bestimmen Sie ihre *Inverse* $\mathbf{A}^{-1}$ mit Hilfe von *Unterdeterminanten* von $D = \det \mathbf{A}$:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ (mit $a, b, c \neq 0$) b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Kontrollieren Sie das Ergebnis.

Wir zeigen zunächst, dass $\det \mathbf{A} \neq 0$ ist und $\mathbf{A}$ somit eine *reguläre* und *invertierbare* Matrix ist. Die Berechnung der *inversen* Matrix $\mathbf{A}$ erfolgt dann mit Hilfe der *algebraischen Komplemente* über die entsprechenden Unterdeterminanten (Vorzeichenbestimmung nach der *Schachbrettregel* → FS: Kap. VII.2.3.2).

Die Ergebnisse werden kontrolliert durch den Nachweis der Beziehung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

a) $$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = a\,b\,c \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ ist } \textit{regulär}$$

($\mathbf{A}$ ist eine *Diagonalmatrix*, die Determinante von $\mathbf{A}$ somit gleich dem Produkt der *Diagonalelemente*!)

Berechnung der *algebraischen Komplemente* A_{ik} aus den entsprechenden 2-reihigen Unterdeterminanten D_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ der Determinante $D = \det \mathbf{A}$:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} = bc - 0 = bc; \quad D_{12} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0;$$

$$D_{13} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0; \quad D_{21} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0;$$

$$D_{22} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} = ac - 0 = ac; \quad D_{23} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0;$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0; \quad D_{32} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0;$$

$$D_{33} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab - 0 = ab$$

$A_{11} = +D_{11} = bc$, $A_{22} = +D_{22} = ac$, $A_{33} = +D_{33} = ab$, alle übrigen algebraischen Komplemente *verschwinden.*

Inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{pmatrix} bc & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix}$$

Kontrolle: Nachweis der Beziehung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|} \cline{5-7} & & & & 1/a & 0 & 0 \\ & & \mathbf{A}^{-1} & & 0 & 1/b & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1/c \\ \cline{2-7} & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{A} & 0 & b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 1 \\ \cline{2-7} \multicolumn{7}{r}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc|ccc|} \cline{5-7} & & & & a & 0 & 0 \\ & & & \mathbf{A} & 0 & b & 0 \\ & & & & 0 & 0 & c \\ \cline{2-7} & 1/a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{A}^{-1} & 0 & 1/b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1/c & 0 & 0 & 1 \\ \cline{2-7} \multicolumn{7}{r}{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}} \end{array}$$

Somit gilt: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

b) $$\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}_{\det \mathbf{A} = D} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{matrix} \Rightarrow \det \mathbf{A} = D = 0 + 1 + 6 - 4 + 4 - 0 = 7 \neq 0 \Rightarrow \mathbf{A} \text{ ist } \textit{regulär}$$

Berechnung der *algebraischen Komplemente* A_{ik} aus den entsprechenden 2-reihigen Unterdeterminanten D_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2 \quad \Rightarrow \quad A_{11} = +D_{11} = 2$$

$$D_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad A_{12} = -D_{12} = -1$$

$$D_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2 \quad \Rightarrow \quad A_{13} = +D_{13} = -2$$

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \quad \Rightarrow \quad A_{21} = -D_{21} = 2$$

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad A_{22} = D_{22} = -1$$

$$D_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 1 = -5 \quad \Rightarrow \quad A_{23} = -D_{23} = 5$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 4 = 3 \quad \Rightarrow \quad A_{31} = D_{31} = 3$$

$$D_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \quad \Rightarrow \quad A_{32} = -D_{32} = -5$$

$$D_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11 \quad \Rightarrow \quad A_{33} = D_{33} = 11$$

Inverse Matrix: $$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} = \frac{1}{7}\, \mathbf{B}$$

Kontrolle: Nachweis der Beziehung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$ und damit $\frac{1}{7}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{1}{7}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{E}$ bzw. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = 7\mathbf{E}$.

$$\begin{array}{cccc|ccc} & & & & 2 & 2 & 3 \\ & & & \mathbf{B} & -1 & -1 & -5 \\ & & & & -2 & 5 & 11 \\ \hline & 2 & -1 & -1 & 7 & 0 & 0 \\ \mathbf{A} & 3 & 4 & 1 & 0 & 7 & 0 \\ & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ & & & & & \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 7 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} = 7\mathbf{E}$$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
 & & & \mathbf{A} & 2 & -1 & -1 \\
 & & & & 3 & 4 & 1 \\
 & & & & -1 & -2 & 0 \\ \hline
 & 2 & 2 & 3 & 7 & 0 & 0 \\
\mathbf{B} & -1 & -1 & -5 & 0 & 7 & 0 \\
 & -2 & 5 & 11 & 0 & 0 & 7 \\ \hline
 & & & & & \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 7 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} = 7\mathbf{E}$$

Somit gilt: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = 7\mathbf{E}$ und $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

J26 Die Matrix $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -9 \end{pmatrix}$ ist die *Inverse* einer (noch unbekannten) Matrix $\mathbf{A}$. Bestimmen Sie diese nach dem *Gauß-Jordan-Verfahren* (mit Kontrollrechnung).

Es gilt $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ und somit $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}$. Die gesuchte *inverse* Matrix von $\mathbf{B}$ bestimmen wir nach dem *Gauß-Jordan-Verfahren* wie folgt (→ FS: Kap. VII.1.5.2.2):

$$(\mathbf{B} \mid \mathbf{E}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -2Z_1 \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ -2Z_2 \end{array} \Rightarrow$$

$$\underbrace{}_{\mathbf{B}} \quad \underbrace{}_{\mathbf{E}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -3Z_3 \\ +5Z_3 \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \end{array} \right) = (\mathbf{E} \mid \mathbf{B}^{-1})$$

$$\underbrace{}_{\mathbf{E}} \quad \underbrace{}_{\mathbf{B}^{-1}}$$

Damit gilt:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 6 & -3 \\ 18 & -9 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -9 \end{pmatrix}$$

Kontrolle: Wir zeigen, dass $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$ ist.

$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
 & & & & 1 & 0 & 3 \\
 & & & \mathbf{A}^{-1} & 2 & 1 & 1 \\
 & & & & 0 & 2 & -9 \\ \hline
 & -11 & 6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\
\mathbf{A} & 18 & -9 & 5 & 0 & 1 & 0 \\
 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
 & & & & & \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc|ccc}
 & & & & -11 & 6 & -3 \\
 & & & \mathbf{A} & 18 & -9 & 5 \\
 & & & & 4 & -2 & 1 \\ \hline
 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\
\mathbf{A}^{-1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & 0 & 2 & -9 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
 & & & & & \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E} &
\end{array}$$

Somit gilt: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$.

J27

Zeigen Sie zunächst mit Hilfe von *Determinanten*, dass die Matrix $\mathbf{A}$ *regulär* und somit *invertierbar* ist und berechnen Sie dann nach dem *Gauß-Jordan-Verfahren* die *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\text{a)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kontrollieren Sie das Ergebnis.

---

a) Berechnung der 3-reihigen Determinante $\det \mathbf{A}$ nach der *Regel von Sarrus*:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{\det \mathbf{A}} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = 0 + 0 - 4 - 0 - 1 - 0 = -5 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ ist } \textit{regulär}$$

Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ nach *Gauß-Jordan* (→ FS: Kap. VII.1.5.2.2)

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{E}) = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}}_{\mathbf{A}} \left| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{E}} \right. \right) \begin{matrix} \\ -2Z_1 \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} -Z_3 \\ -Z_3 \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \updownarrow \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ -Z_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 1 & -2 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ :5 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/5 & 1/5 & -2/5 \end{array} \right) \begin{matrix} +2Z_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{E}} \left| \underbrace{\begin{matrix} 1/5 & 2/5 & -9/5 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2/5 & 1/5 & -2/5 \end{matrix}}_{\mathbf{A}^{-1}} \right. \right) = (\mathbf{E} \mid \mathbf{A}^{-1})$$

Somit lautet die *Inverse* der Matrix $\mathbf{A}$ wie folgt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & -9/5 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2/5 & 1/5 & -2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & -9/5 \\ 0 & 0 & 5/5 \\ -2/5 & 1/5 & -2/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Kontrolle: Nachweis der Beziehung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

$$\begin{array}{c|rrr|rrr|} \cline{5-7} & & & & 1/5 & 2/5 & -9/5 \\ \mathbf{A}^{-1} & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & -2/5 & 1/5 & -2/5 \\ \cline{2-7} & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{A} & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cline{2-7} \end{array} \qquad \begin{array}{c|rrr|rrr|} \cline{5-7} & & & & 1 & 1 & -2 \\ \mathbf{A} & & & & 2 & 4 & 1 \\ & & & & 0 & 1 & 0 \\ \cline{2-7} & 1/5 & 2/5 & -9/5 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{A}^{-1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & -2/5 & 1/5 & -2/5 & 0 & 0 & 1 \\ \cline{2-7} \end{array}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \qquad\qquad \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$$

Somit gilt: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$.

b) Wir entwickeln die 4-reihige Determinante $D = \det \mathbf{A}$ nach den Elementen der *1. Zeile* und erhalten zwei *3-reihige* Determinanten, die dann nach der *Regel von Sarrus* berechnet werden:

$$D = \det \mathbf{A} = \underbrace{a_{11}}_{1} A_{11} + \underbrace{a_{12}}_{0} A_{12} + \underbrace{a_{13}}_{1} A_{13} + \underbrace{a_{14}}_{0} A_{14} = A_{11} + A_{13}$$

Die *algebraischen Komplemente* A_{11} und A_{13} erhalten wir aus den entsprechenden 3-reihigen Unterdeterminanten D_{11} und D_{13} unter Beachtung der Vorzeichenregel (*Schachbrettregel* → FS: Kap. VII.2.3.2):

$$A_{11} = +D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}_{D_{11} = -2} = -2$$

$$\underbrace{\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right|}_{D_{11}} \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad D_{11} = 0 + 0 - 2 - 1 + 1 - 0 = -2$$

$$A_{13} = +D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{D_{13} = 3} = 3$$

$$\underbrace{\left| \begin{array}{ccc} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right|}_{D_{13}} \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad D_{13} = 0 + 0 + 2 - 0 + 1 - 0 = 3$$

Somit gilt:

$$D = \det \mathbf{A} = A_{11} + A_{13} = -2 + 3 = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ ist } \textit{regulär} \text{ und } \textit{invertierbar}$$

Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ nach Gauß-Jordan (→ FS: Kap. VII.1.5.2.2)

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{E}) = \left(\underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}}_{\mathbf{A}} \middle| \underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}}_{\mathbf{E}} \right) \begin{array}{l} \\ +Z_1 \\ -2Z_1 \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ -2Z_2 \\ -Z_2 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ -2Z_4 \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -Z_3 \\ -Z_3 \\ \\ +2Z_3 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1&0&0&-1&3&0&-1&2\\ 0&1&0&0&3&1&-1&2\\ 0&0&1&1&-2&0&1&-2\\ 0&0&0&1&-5&-1&2&-3\end{array}\right)\begin{array}{l}+Z_4\\ \\ -Z_4\\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\underbrace{\begin{array}{rrrr}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}}_{\mathbf{E}}\middle|\underbrace{\begin{array}{rrrr}-2&-1&1&-1\\3&1&-1&2\\3&1&-1&1\\-5&-1&2&-3\end{array}}_{\mathbf{A}^{-1}}\right) = (\mathbf{E}\mid\mathbf{A}^{-1})$$

Inverse Matrix: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2&-1&1&-1\\ 3&1&-1&2\\ 3&1&-1&1\\ -5&-1&2&-3\end{pmatrix}$

Kontrolle: Nachweis der Beziehung $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{E}$

$$\begin{array}{c|c|c} & & \begin{array}{rrrr}-2&-1&1&-1\\3&1&-1&2\\3&1&-1&1\\-5&-1&2&-3\end{array} \\ \mathbf{A}^{-1} & & \\ \hline \mathbf{A} & \begin{array}{rrrr}1&0&1&0\\-1&1&0&1\\2&2&1&1\\0&1&-1&0\end{array} & \begin{array}{rrrr}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array} \\ \hline & & \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c} & & \begin{array}{rrrr}1&0&1&0\\-1&1&0&1\\2&2&1&1\\0&1&-1&0\end{array} \\ \mathbf{A} & & \\ \hline \mathbf{A}^{-1} & \begin{array}{rrrr}-2&-1&1&-1\\3&1&-1&2\\3&1&-1&1\\-5&-1&2&-3\end{array} & \begin{array}{rrrr}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array} \\ \hline & & \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{E} \end{array}$$

Somit gilt: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{E}$.

J28

Lösen Sie die Matrizengleichungen $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{B}$ und $\mathbf{Y}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{B}$ durch *Invertierung* der Matrix $\mathbf{A}$ nach dem *Gauß-Jordan-Verfahren*:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}$$

Die Matrix $\mathbf{A}$ ist *regulär* und daher *invertierbar*, da ihre Determinante *nicht* verschwindet:

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix}2&5\\1&3\end{vmatrix} = 6-5 = 1 \neq 0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{A} \text{ ist } \textit{regulär}$$

Mit dem *Gauß-Jordan-Verfahren* berechnen wir die zugehörige *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ (→ FS: Kap. VII.1.5.2.2):

$$(\mathbf{A}\mid\mathbf{E}) = \left(\underbrace{\begin{array}{rr}2&5\\1&3\end{array}}_{\mathbf{A}}\middle|\underbrace{\begin{array}{rr}1&0\\0&1\end{array}}_{\mathbf{E}}\right)\updownarrow \;\Rightarrow\; \left(\begin{array}{rr|rr}1&3&0&1\\2&5&1&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\\-2Z_1\end{array} \;\Rightarrow\; \left(\begin{array}{rr|rr}1&3&0&1\\0&-1&1&-2\end{array}\right)\begin{array}{l}+3Z_2\\ \\ \end{array} \;\Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rr|rr}1&0&3&-5\\0&-1&1&-2\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot(-1)\end{array} \;\Rightarrow\; \left(\underbrace{\begin{array}{rr}1&0\\0&1\end{array}}_{\mathbf{E}}\middle|\underbrace{\begin{array}{rr}3&-5\\-1&2\end{array}}_{\mathbf{A}^{-1}}\right) = (\mathbf{E}\mid\mathbf{A}^{-1}) \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}$$

Lösung der Gleichung $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{B}$

Wir multiplizieren die Gleichung von *links* mit $\mathbf{A}^{-1}$ (alle Matrizenprodukte sind vorhanden):

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{B} \;\Rightarrow\; \underbrace{\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}}_{\mathbf{E}}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B} \;\Rightarrow\; \underbrace{\mathbf{E}\cdot\mathbf{X}}_{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B} \;\Rightarrow\; \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}$$

Berechnung des Matrizenproduktes $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$ mit dem *Falk-Schema*:

$$\begin{array}{cccc|cc|}
\cline{5-6}
 & & & \mathbf{B} & 1 & 4 \\
 & & & & 2 & 3 \\
\cline{2-6}
\mathbf{A}^{-1} & \multicolumn{1}{|c}{3} & -5 & & -7 & -3 \\
 & \multicolumn{1}{|c}{-1} & 2 & & 3 & 2 \\
\cline{2-6}
 & & & & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}}
\end{array}
\qquad \textbf{Lösung:}\ \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung der Gleichung $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$

Diese Gleichung wird von *rechts* mit $\mathbf{A}^{-1}$ multipliziert (alle Multiplikationen sind durchführbar):

$$\mathbf{Y} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Y} \cdot \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}}_{\mathbf{E}} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mathbf{Y} \cdot \mathbf{E}}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

Das Matrizenprodukt $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ berechnen wir mit dem *Falk-Schema*:

$$\begin{array}{ccc|cc|}
\cline{4-5}
\mathbf{A}^{-1} & & & 3 & -5 \\
 & & & -1 & 2 \\
\cline{2-5}
\mathbf{B} & \multicolumn{1}{|c}{1} & 4 & -1 & 3 \\
 & \multicolumn{1}{|c}{2} & 3 & 3 & -4 \\
\cline{2-5}
 & & & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}}
\end{array}
\qquad \textbf{Lösung:}\ \mathbf{Y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

J29

Bestimmen Sie die Lösung $\mathbf{X}$ der Matrizengleichung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ mit Hilfe der *inversen* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ (Berechnung nach dem *Gauß-Jordan-Verfahren*). Warum ist die Gleichung $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$ *nicht lösbar*?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 \\ -4 & -9 & 14 \end{pmatrix}$$

Wir zeigen zunächst, dass die 2-reihige Matrix $\mathbf{A}$ *regulär* und somit *invertierbar* ist:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ ist } \textit{regulär}$$

Die *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ berechnen wir nach dem *Gauß-Jordan-Verfahren* (→ FS: Kap. VII.1.5.2.2):

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{E}) = \left(\underbrace{\begin{matrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{matrix}}_{\mathbf{A}} \left| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{E}} \right. \right) \begin{matrix} +Z_2 \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right. \right) \begin{matrix} \\ -3Z_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{matrix} \right. \right) \begin{matrix} +Z_2 \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{matrix} \right. \right) \begin{matrix} \\ \cdot (-1) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{E}} \left| \underbrace{\begin{matrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{matrix}}_{\mathbf{A}^{-1}} \right. \right) = (\mathbf{E} \mid \mathbf{A}^{-1}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Matrizengleichung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ lösen wir, indem wir beide Seiten von *links* mit $\mathbf{A}^{-1}$ multiplizieren (alle auftretenden Matrizenprodukte sind vorhanden):

$$\underbrace{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}}_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mathbf{E} \cdot \mathbf{X}}_{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

Berechnung des Matrizenproduktes $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$ mit dem *Falk-Schema*:

$$\begin{array}{r|rr|rrr|}
\cline{4-6}
\multicolumn{3}{r|}{\mathbf{B}} & 2 & 5 & -8 \\
\multicolumn{3}{r|}{} & -4 & -9 & 14 \\
\cline{2-6}
\mathbf{A}^{-1} & -2 & -1 & 0 & -1 & 2 \\
 & 3 & 2 & -2 & -3 & 4 \\
\cline{2-6}
\multicolumn{3}{c}{} & \multicolumn{3}{c}{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}}
\end{array}$$

Lösung: $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

Die Gleichung $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$ ist dagegen *nicht* lösbar. Um diese Gleichung nach $\mathbf{Y}$ aufzulösen, müssten wir zunächst beide Seiten von *rechts* mit $\mathbf{A}^{-1}$ multiplizieren:

$$\mathbf{Y} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Y} \cdot \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}}_{\mathbf{E}} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{Y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

Das Matrizenprodukt $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ existiert *nicht*, da $\mathbf{B}$ vom Typ $(2, 3)$, $\mathbf{A}^{-1}$ aber vom Typ $(2, 2)$ ist.

J30

Lösen Sie die Matrizengleichung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

durch *Invertierung* der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ nach dem Verfahren von *Gauß-Jordan* (mit Probe).

Die 3-reihige Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ ist *regulär* und somit *invertierbar*, da ihre Determinante *nicht* verschwindet (Berechnung nach der *Regel von Sarrus*):

$$\underbrace{\left|\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{matrix}\right|}_{\det \mathbf{A}} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = 0 + 12 + 1 - 0 - 0 - 2 = 11 \neq 0$$

Mit dem *Gauß-Jordan-Verfahren* berechnen wir die für die Lösung benötigte *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ (→ FS: Kap. VII.1.5.2.2):

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{E}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \updownarrow \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -4Z_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

where the left part is $\underbrace{}_{\mathbf{A}}$ and the right part $\underbrace{}_{\mathbf{E}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -Z_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ :(-11) \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/11 & 4/11 & -1/11 \end{array}\right) \begin{matrix} -3Z_3 \\ -Z_3 \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/11 & -1/11 & 3/11 \\ 0 & 1 & 0 & 10/11 & -4/11 & 1/11 \\ 0 & 0 & 1 & 1/11 & 4/11 & -1/11 \end{array}\right) = (\mathbf{E} \mid \mathbf{A}^{-1})$$

where the left part is $\underbrace{}_{\mathbf{E}}$ and the right part $\underbrace{}_{\mathbf{A}^{-1}}$

Somit gilt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3/11 & -1/11 & 3/11 \\ 10/11 & -4/11 & 1/11 \\ 1/11 & 4/11 & -1/11 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 10 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} = \frac{1}{11}\,\mathbf{C}$$

Die Matrizengleichung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ multiplizieren wir von *links* mit $\mathbf{A}^{-1}$ und erhalten:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}}_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mathbf{E} \cdot \mathbf{X}}_{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{11}\,(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B})$$

Berechnung des Matrizenproduktes $\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$ nach dem *Falk-Schema*:

$$\begin{array}{c|ccc|c|} \cline{5-5} & & & & 7 \\ & & & \mathbf{B} & 14 \\ & & & & 8 \\ \cline{2-5} & -3 & -1 & 3 & -11 \\ \mathbf{C} & 10 & -4 & 1 & 22 \\ & 1 & 4 & -1 & 55 \\ \cline{2-5} \multicolumn{4}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}} \end{array}$$

Lösung: $\mathbf{X} = \frac{1}{11}\,(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -11 \\ 22 \\ 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Kontrolle durch Einsetzen in die Gleichung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$:

$$\begin{array}{c|ccc|c|} \cline{5-5} & & & & -1 \\ & & & \mathbf{X} & 2 \\ & & & & 5 \\ \cline{2-5} & 0 & 1 & 1 & 7 \\ \mathbf{A} & 1 & 0 & 3 & 14 \\ & 4 & 1 & 2 & 8 \\ \cline{2-5} \multicolumn{4}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

J31

Prüfen Sie, ob die *Spaltenvektoren* der folgenden Matrizen *linear abhängig* oder *linear unabhängig* sind:

$$\text{a)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & -3 & 6 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

---

a) Wir zeigen, dass die aus den drei Spaltenvektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ gebildete 3-reihige Matrix $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\,\mathbf{a}_3)$ *regulär* ist und die Vektoren somit *linear unabhängig* sind:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix}}_{\det \mathbf{A}} \begin{matrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \det \mathbf{A} = -32 - 32 - 32 + 8 - 64 - 64 = -216 \neq 0 \quad \Rightarrow \\ \mathbf{A} \ \text{ist}\ \textit{regulär} \end{array} \right.$$

b) Die drei Vektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ aus dem $\mathbb{R}^4$ sind genau dann *linear unabhängig*, wenn die aus ihnen gebildete Matrix $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3)$ vom Typ $(4, 3)$ den Rang $r = n = 3$ besitzt:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & -3 & 6 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{Rg}\,(\mathbf{A}) = r \le 3$$

Diese Matrix hat den Rang $r = 3$, wenn es *mindestens eine* von Null verschiedene 3-reihige Unterdeterminante gibt. Die durch Streichen der *4. Zeile* erhaltene Unterdeterminante D_4 erfüllt diese Bedingung (Berechnung nach der *Regel von Sarrus*):

$$\underbrace{\left|\begin{array}{rrr} 3 & -1 & 4 \\ 4 & -3 & 6 \\ 0 & 4 & -3 \end{array}\right|}_{D_4} \begin{array}{rr} 3 & -1 \\ 4 & -3 \\ 0 & 4 \end{array} \quad \Rightarrow \quad D_4 = 27 + 0 + 64 - 0 - 72 - 12 = 7 \ne 0$$

Damit gilt $r = 3$, die drei Vektoren sind also *linear unabhängig*.

J32

Bestimmen Sie den *Rang* der nachfolgenden Matrizen unter ausschließlicher Verwendung von *Unterdeterminanten*:

$$\text{a)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{c)}\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung der anfallenden 3-reihigen Determinanten erfolgt nach der *Regel von Sarrus*.

a) Die 3-reihige Determinante von $\mathbf{A}$ ist von Null verschieden, die Matrix $\mathbf{A}$ ist daher *regulär* und besitzt den Rang $r = 3$:

$$\underbrace{\left|\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right|}_{\det \mathbf{A}} \begin{array}{rr} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = 4 + 4 + 1 - 2 - 4 - 2 = 1 \ne 0 \quad \Rightarrow \quad r = \text{Rg}\,(\mathbf{A}) = 3$$

b) Die Matrix $\mathbf{B}$ vom Typ $(4, 3)$ hat den Rang $r = 3$, da es eine *3-reihige* von Null *verschiedene* Unterdeterminante D_1 gibt (wir streichen in $\mathbf{B}$ die 1. Zeile):

$$\underbrace{\left|\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right|}_{D_1} \begin{array}{rr} 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad D_1 = 6 + 0 + 6 - 0 + 3 + 6 = 21 \ne 0 \quad \Rightarrow \quad r = \text{Rg}\,(\mathbf{B}) = 3$$

c) Zunächst gilt: $r \le 3$. Der Rang von $\mathbf{C}$ ist $r = 3$, wenn es *wenigstens eine* von Null verschiedene *3-reihige* Unterdeterminante gibt (wir streichen in $\mathbf{C}$ der Reihe nach die 1., 2., 3. bzw. 4. Spalte):

$$D_1 = D_2 = \left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right|; \quad \underbrace{\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right|}_{D_1 \,=\, D_2} \begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad D_1 = D_2 = -9 + 0 + 2 - 0 + 1 + 6 = 0$$

$$D_3 = \underset{\text{identische Spalten}}{\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right|} = 0, \qquad D_4 = \underset{\text{identische Spalten}}{\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right|} = 0$$

Alle vier 3-reihigen Unterdeterminanten verschwinden somit. Daher ist $r < 3$, d. h. $r \le 2$. Es gibt aber eine *2-reihige* Unterdeterminante mit einem von Null verschiedenen Wert (wir streichen in $\mathbf{C}$ die 1. und 2. Spalte sowie die 3. Zeile), nämlich:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r = \operatorname{Rg}(\mathbf{C}) = 2$$

J33

Bestimmen Sie den *Matrizenrang* mittels *elementarer Umformungen* in den Zeilen bzw. Spalten:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 9 & 10 \\ -1 & -2 & -7 & -8 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 5 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 2 & -1 \\ 6 & -14 & 9 & -10 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

Die Matrix $\mathbf{A}$ wird mit Hilfe *elementarer Umformungen* in den Zeilen oder Spalten auf *Trapezform* gebracht. Der Rang von $\mathbf{A}$ ist dann gleich der Anzahl r der *nicht-verschwindenden* Zeilen: $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = r$.

a)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \updownarrow \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +3Z_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2Z_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{matrix}$$

Somit gilt: $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = 2$

b)
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 9 & 10 \\ -1 & -2 & -7 & -8 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +Z_1 \\ +Z_1 \\ -Z_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 12 & 12 \\ 0 & -4 & -4 & -6 \\ 0 & 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +2Z_2 \\ -3Z_2 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 20 & 18 \\ 0 & 0 & -40 & -38 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +2Z_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 20 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Rg}(\mathbf{B}) = 4$$

c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 5 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 2 & -1 \\ 6 & -14 & 9 & -10 & 7 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -4Z_1 \\ \\ -6Z_1 \end{matrix} \Rightarrow \underset{\longleftrightarrow\ \ \longleftrightarrow}{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -17 & -11 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -32 & -15 & -16 & 1 & 7 \end{pmatrix}} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & -11 & -17 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -16 & -15 & -32 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +5Z_3 \\ \\ +7Z_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & 5 & 6 & -11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \updownarrow \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 15 & 5 & 6 & -11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -1{,}5Z_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang: } r = 4$$

J34

Zeigen Sie, dass die folgenden Matrizen *orthogonal* sind:

$$\text{a)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Wie lautet die jeweilige *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$?

Eine n-reihige Matrix $\mathbf{A}$ ist *orthogonal*, wenn sie die Bedingung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}$ erfüllt. Für eine *orthogonale* Matrix $\mathbf{A}$ gilt stets $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, d. h. die *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ ist die *Transponierte* von $\mathbf{A}$.

a) Wir zeigen mit Hilfe des *Falk-Schemas*, dass die Matrix $\mathbf{A}$ die Eigenschaft $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}$ besitzt:

$$\begin{array}{cccc|ccc}
 & & & \mathbf{A}^{\mathrm{T}} & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\
 & & & & -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 1 \\ \hline
\mathbf{A} & \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 & (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) & (\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \cos\alpha \cdot \sin\alpha) & 0 \\
 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & (\cos\alpha \cdot \sin\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha) & (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} &
\end{array}$$

Unter Verwendung des „trigonometrischen Pythagoras“ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ erhalten wir:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) & (\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \cos\alpha \cdot \sin\alpha) & 0 \\ (\cos\alpha \cdot \sin\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha) & (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

$\Rightarrow$ Die Matrix $\mathbf{A}$ ist somit *orthogonal*.

Inverse Matrix: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}^{\mathrm{T}}}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{9}\,(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}})$$

Berechnung des Matrizenproduktes $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ nach dem *Falk-Schema*:

$$\begin{array}{cccc|ccc}
 & & & \mathbf{B}^{\mathrm{T}} & 1 & 2 & 2 \\
 & & & & 2 & 1 & -2 \\
 & & & & -2 & 2 & -1 \\ \hline
\mathbf{B} & 1 & 2 & -2 & 9 & 0 & 0 \\
 & 2 & 1 & 2 & 0 & 9 & 0 \\
 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 9 \\
 & & & & & \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}} &
\end{array}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{9}\,(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}}) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ ist } \textit{orthogonal}$$

Inverse Matrix: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

J35

Welche der nachstehenden Matrizen sind *symmetrisch*, welche *schiefsymmetrisch*?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 8 \\ -3 & -8 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 & 8 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & 0 & 4 \\ -8 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Bei einer *symmetrischen* Matrix sind die Elemente spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen angeordnet. *Symmetrisch* sind daher die folgenden Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{D}^{\mathrm{T}}$$

Bei einer *schiefsymmetrischen* Matrix verschwinden sämtliche Diagonalelemente und spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen liegende Elemente unterscheiden sich nur im *Vorzeichen. Schiefsymmetrisch* sind daher:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{B}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 & 8 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & 0 & 4 \\ -8 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$$

Die Matrix $\mathbf{C}$ ist *weder* symmetrisch *noch* schiefsymmetrisch (bei einer schiefsymmetrischen Matrix müssen alle Diagonalelemente verschwinden, was hier nicht der Fall ist).

J36

Stellen Sie fest, ob die *komplexe* Matrix $\mathbf{A}$ *hermitesch* oder *schiefhermitesch* ist. Zerlegen Sie die Matrix in einen *Realteil* $\mathbf{B}$ und einen *Imaginärteil* $\mathbf{C}$. Welchen Wert besitzt die *Determinante* von $\mathbf{A}$?

$$\text{a)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1-\mathrm{j} & 5+2\mathrm{j} \\ 1+\mathrm{j} & 0 & 3+\mathrm{j} \\ 5-2\mathrm{j} & 3-\mathrm{j} & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{j} & -1+\mathrm{j} & 2+5\mathrm{j} \\ 1+\mathrm{j} & 0 & 1+3\mathrm{j} \\ -2+5\mathrm{j} & -1+3\mathrm{j} & 8\mathrm{j} \end{pmatrix}$$

---

a) Für eine *hermitesche* Matrix $\mathbf{A}$ gilt die Bedingung $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}}$, die hier erfüllt ist:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1-\mathrm{j} & 5+2\mathrm{j} \\ 1+\mathrm{j} & 0 & 3+\mathrm{j} \\ 5-2\mathrm{j} & 3-\mathrm{j} & 8 \end{pmatrix} \overset{\textcircled{1}}{\Rightarrow} \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 2 & 1+\mathrm{j} & 5-2\mathrm{j} \\ 1-\mathrm{j} & 0 & 3-\mathrm{j} \\ 5+2\mathrm{j} & 3+\mathrm{j} & 8 \end{pmatrix} \overset{\textcircled{2}}{\Rightarrow}$$

$$(\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}} = \overline{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1-\mathrm{j} & 5+2\mathrm{j} \\ 1+\mathrm{j} & 0 & 3+\mathrm{j} \\ 5-2\mathrm{j} & 3-\mathrm{j} & 8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$$

Durchgeführte Operationen:

① **Konjugation:** Die Matrixelemente werden durch die konjugiert komplexen Elemente ersetzt.

② **Transponieren:** Zeilen und Spalten werden miteinander vertauscht (Spiegelung der Elemente an der Hauptdiagonalen).

Zerlegung der hermiteschen Matrix **A** in einen *symmetrischen* Realteil **B** und einen *schiefsymmetrischen* Imaginärteil **C**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 - \mathrm{j} & 5 + 2\mathrm{j} \\ 1 + \mathrm{j} & 0 & 3 + \mathrm{j} \\ 5 - 2\mathrm{j} & 3 - \mathrm{j} & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{j} & 2\mathrm{j} \\ \mathrm{j} & 0 & \mathrm{j} \\ -2\mathrm{j} & -\mathrm{j} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}}_{\substack{\mathbf{B} \\ \text{(symmetrisch)}}} + \mathrm{j} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\mathbf{C} \\ \text{(schiefsymmetrisch)}}} = \mathbf{B} + \mathrm{j} \cdot \mathbf{C}$$

Berechnung der Determinante $\det \mathbf{A}$ nach der *Regel von Sarrus* $(\mathrm{j}^2 = -1)$:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 - \mathrm{j} & 5 + 2\mathrm{j} \\ 1 + \mathrm{j} & 0 & 3 + \mathrm{j} \\ 5 - 2\mathrm{j} & 3 - \mathrm{j} & 8 \end{vmatrix}}_{\det \mathbf{A}} \begin{matrix} 2 & 1 - \mathrm{j} \\ 1 + \mathrm{j} & 0 \\ 5 - 2\mathrm{j} & 3 - \mathrm{j} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= 0 + (1 - \mathrm{j})(3 + \mathrm{j})(5 - 2\mathrm{j}) + (5 + 2\mathrm{j})(1 + \mathrm{j})(3 - \mathrm{j}) - \\ &\quad - 0 - (3 - \mathrm{j})(3 + \mathrm{j}) 2 - 8(1 + \mathrm{j})(1 - \mathrm{j}) = \\ &= (3 + \mathrm{j} - 3\mathrm{j} + 1)(5 - 2\mathrm{j}) + (5 + 5\mathrm{j} + 2\mathrm{j} - 2)(3 - \mathrm{j}) - (9 + 1) 2 - 8(1 + 1) = \\ &= (4 - 2\mathrm{j})(5 - 2\mathrm{j}) + (3 + 7\mathrm{j})(3 - \mathrm{j}) - 20 - 16 = \\ &= 20 - 8\mathrm{j} - 10\mathrm{j} - 4 + 9 - 3\mathrm{j} + 21\mathrm{j} + 7 - 36 = \\ &= (20 - 4 + 9 + 7 - 36) + (-8\mathrm{j} - 10\mathrm{j} - 3\mathrm{j} + 21\mathrm{j}) = -4 \end{aligned}$$

b) Für eine *schiefhermitesche* Matrix **A** gilt die Bedingung $\mathbf{A} = -\overline{\mathbf{A}} = -(\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{j} & -1 + \mathrm{j} & 2 + 5\mathrm{j} \\ 1 + \mathrm{j} & 0 & 1 + 3\mathrm{j} \\ -2 + 5\mathrm{j} & -1 + 3\mathrm{j} & 8\mathrm{j} \end{pmatrix} \overset{\textcircled{1}}{\Rightarrow} \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -2\mathrm{j} & -1 - \mathrm{j} & 2 - 5\mathrm{j} \\ 1 - \mathrm{j} & 0 & 1 - 3\mathrm{j} \\ -2 - 5\mathrm{j} & -1 - 3\mathrm{j} & -8\mathrm{j} \end{pmatrix} \overset{\textcircled{2}}{\Rightarrow}$$

$$(\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}} = \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -2\mathrm{j} & 1 - \mathrm{j} & -2 - 5\mathrm{j} \\ -1 - \mathrm{j} & 0 & -1 - 3\mathrm{j} \\ 2 - 5\mathrm{j} & 1 - 3\mathrm{j} & -8\mathrm{j} \end{pmatrix} = - \underbrace{\begin{pmatrix} 2\mathrm{j} & -1 + \mathrm{j} & 2 + 5\mathrm{j} \\ 1 + \mathrm{j} & 0 & 1 + 3\mathrm{j} \\ -2 + 5\mathrm{j} & -1 + 3\mathrm{j} & 8\mathrm{j} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}$$

Durchgeführte Operationen:

① **Konjugation:** Die Matrixelemente werden durch die konjugiert komplexen Werte ersetzt.

② **Transponieren:** Zeilen und Spalten werden miteinander vertauscht (Spiegelung der Elemente an der Hauptdiagonalen).

Somit gilt $\overline{\mathbf{A}} = -\mathbf{A}$ und damit $\mathbf{A} = -\overline{\mathbf{A}}$, d. h. **A** ist *schiefhermitesch.*

Zerlegung der *schiefhermiteschen* Matrix **A** in einen *schiefsymmetrischen* Realteil **B** und einen *symmetrischen* Imaginärteil **C**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{j} & -1+\mathrm{j} & 2+5\mathrm{j} \\ 1+\mathrm{j} & 0 & 1+3\mathrm{j} \\ -2+5\mathrm{j} & -1+3\mathrm{j} & 8\mathrm{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mathrm{j} & \mathrm{j} & 5\mathrm{j} \\ \mathrm{j} & 0 & 3\mathrm{j} \\ 5\mathrm{j} & 3\mathrm{j} & 8\mathrm{j} \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Realteil } \mathbf{B}} + \mathrm{j} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}}_{\text{Imaginärteil } \mathbf{C}} = \mathbf{B} + \mathrm{j} \cdot \mathbf{C}$$

Berechnung der Determinante $\det \mathbf{A}$ nach der *Regel von Sarrus* $(\mathrm{j}^2 = -1)$:

$$\underbrace{\left| \begin{matrix} 2\mathrm{j} & -1+\mathrm{j} & 2+5\mathrm{j} \\ 1+\mathrm{j} & 0 & 1+3\mathrm{j} \\ -2+5\mathrm{j} & -1+3\mathrm{j} & 8\mathrm{j} \end{matrix} \right|}_{\det \mathbf{A}} \begin{matrix} 2\mathrm{j} & -1+\mathrm{j} \\ 1+\mathrm{j} & 0 \\ -2+5\mathrm{j} & -1+3\mathrm{j} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= 0 + (-1+\mathrm{j})(1+3\mathrm{j})(-2+5\mathrm{j}) + (2+5\mathrm{j})(1+\mathrm{j})(-1+3\mathrm{j}) - \\ &\qquad - 0 - (-1+3\mathrm{j})(1+3\mathrm{j})2\mathrm{j} - 8\mathrm{j}(1+\mathrm{j})(-1+\mathrm{j}) = \\ &= (-1-3\mathrm{j}+\mathrm{j}-3)(-2+5\mathrm{j}) + (2+2\mathrm{j}+5\mathrm{j}-5)(-1+3\mathrm{j}) - \\ &\qquad - (-1-9)2\mathrm{j} - 8\mathrm{j}(-1-1) = \\ &= (-4-2\mathrm{j})(-2+5\mathrm{j}) + (-3+7\mathrm{j})(-1+3\mathrm{j}) + 20\mathrm{j} + 16\mathrm{j} = \\ &= 8 - 20\mathrm{j} + 4\mathrm{j} + 10 + 3 - 9\mathrm{j} - 7\mathrm{j} - 21 + 36\mathrm{j} = \\ &= (8+10+3-21) + (-20\mathrm{j} + 4\mathrm{j} - 9\mathrm{j} - 7\mathrm{j} + 36\mathrm{j}) = 4\mathrm{j} \end{aligned}$$

J37

Zeigen Sie, dass die *komplexe* Matrix $\mathbf{A} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1-\mathrm{j} & -\mathrm{j} \\ 1 & -1+\mathrm{j} \end{pmatrix}$ *unitär* ist und berechnen Sie ihre *Determinante* und die *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$.

---

a) Eine Matrix **A** ist *unitär*, wenn sie die Bedingung $\mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{E}$ erfüllt. Zunächst bilden wir die *konjugiert transponierte* Matrix $\overline{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1-\mathrm{j} & -\mathrm{j} \\ 1 & -1+\mathrm{j} \end{pmatrix} \overset{\textcircled{1}}{\Rightarrow} \mathbf{A}^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{j} & \mathrm{j} \\ 1 & -1-\mathrm{j} \end{pmatrix} \overset{\textcircled{2}}{\Rightarrow}$$

$$(\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}} = \overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{j} & 1 \\ \mathrm{j} & -1-\mathrm{j} \end{pmatrix}$$

Durchgeführte Operationen:

① **Konjugation:** Die Matrixelemente werden durch ihre konjugiert komplexen Werte ersetzt.

② **Transponieren:** Spiegelung der Matrixelemente an der Hauptdiagonalen.

Berechnung des Matrizenproduktes $\mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{A}}$

$$\mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1-\mathrm{j} & -\mathrm{j} \\ 1 & -1+\mathrm{j} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{j} & 1 \\ \mathrm{j} & -1-\mathrm{j} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1-\mathrm{j} & -\mathrm{j} \\ 1 & -1+\mathrm{j} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+\mathrm{j} & 1 \\ \mathrm{j} & -1-\mathrm{j} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Wir berechnen jetzt die Matrixelemente b_{11}, b_{12}, b_{21} und b_{22} unter Berücksichtigung der Beziehung $\mathrm{j}^2 = -1$:

$$b_{11} = \underbrace{(1-\mathrm{j})(1+\mathrm{j})}_{\text{3. Binom}} + (-\mathrm{j})\,\mathrm{j} = 1 - \mathrm{j}^2 - \mathrm{j}^2 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$b_{12} = (1-\mathrm{j})\,1 + (-\mathrm{j})(-1-\mathrm{j}) = 1 - \mathrm{j} + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 1 - 1 = 0$$

$$b_{21} = 1\,(1+\mathrm{j}) + (-1+\mathrm{j})\,\mathrm{j} = 1 + \mathrm{j} - \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 1 - 1 = 0$$

$$b_{22} = 1 \cdot 1 + (-1+\mathrm{j})(-1-\mathrm{j}) = 1 + 1 + \mathrm{j} - \mathrm{j} - \mathrm{j}^2 = 1 + 1 + 1 = 3$$

Somit gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} = \mathbf{E}$$

Die Matrix $\mathbf{A}$ ist also *unitär*.

b) $$\det \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1-\mathrm{j} & -\mathrm{j} \\ 1 & -1+\mathrm{j} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \left[(1-\mathrm{j})(-1+\mathrm{j}) + \mathrm{j} \right] = \frac{1}{3} (-1 + \mathrm{j} + \mathrm{j} - \mathrm{j}^2 + \mathrm{j}) =$$

$$= \frac{1}{3} (-1 + \mathrm{j} + \mathrm{j} + 1 + \mathrm{j}) = \frac{1}{3} \cdot 3\mathrm{j} = \mathrm{j} \quad \Rightarrow \quad |\det \mathbf{A}| = |\mathrm{j}| = 1$$

c) Für eine *unitäre* Matrix $\mathbf{A}$ gilt stets $\mathbf{A}^{-1} = \overline{\mathbf{A}}$ und somit:

$$\mathbf{A}^{-1} = \overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{j} & 1 \\ \mathrm{j} & -1-\mathrm{j} \end{pmatrix}$$

J38

Ist die *komplexe* Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\cos\alpha & \mathrm{j} \cdot \sin\alpha \\ -\mathrm{j} \cdot \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ *unitär*?

Welchen Wert besitzt die *Determinante* von $\mathbf{A}$, wie lautet die *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$?

Die Matrix $\mathbf{A}$ ist *unitär*, wenn sie die Bedingung $\mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{E}$ erfüllt. Wir berechnen daher zunächst die *konjugiert transponierte* Matrix $\overline{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\cos\alpha & \mathrm{j} \cdot \sin\alpha \\ -\mathrm{j} \cdot \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \overset{①}{\Rightarrow} \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -\cos\alpha & -\mathrm{j} \cdot \sin\alpha \\ \mathrm{j} \cdot \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \overset{②}{\Rightarrow}$$

$$(\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}} = \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -\cos\alpha & \mathrm{j} \cdot \sin\alpha \\ -\mathrm{j} \cdot \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Durchgeführte Operationen:

① **Konjugation:** Die Matrixelemente werden durch ihre konjugiert komplexen Werte ersetzt.

② **Transponieren:** Spiegelung der Matrixelemente an der Hauptdiagonalen.

Wir bilden jetzt das *Matrizenprodukt* $\mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{A}}$:

$$\mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -\cos\alpha & \mathrm{j} \cdot \sin\alpha \\ -\mathrm{j} \cdot \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos\alpha & \mathrm{j} \cdot \sin\alpha \\ -\mathrm{j} \cdot \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos^2\alpha - \mathrm{j}^2 \cdot \sin^2\alpha) & (-\mathrm{j} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \mathrm{j} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha) \\ (\mathrm{j} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - \mathrm{j} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha) & (-\mathrm{j}^2 \cdot \sin^2\alpha + \cos^2\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) & 0 \\ 0 & (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

(unter Beachtung von $\mathrm{j}^2 = -1$ und der trigonometrischen Beziehung $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$)

Aus $\mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{E}$ folgt, dass $\mathbf{A}$ eine *unitäre* Matrix ist.

Berechnung der Determinante det A

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} -\cos\alpha & \mathrm{j} \cdot \sin\alpha \\ -\mathrm{j} \cdot \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = -\cos^2\alpha + \underbrace{\mathrm{j}^2}_{-1} \cdot \sin^2\alpha = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$$

$$= -\underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{1} = -1 \quad \Rightarrow \quad |\det \mathbf{A}| = 1$$

Inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$

Für eine *unitäre* Matrix gilt bekanntlich stets $\mathbf{A}^{-1} = \overline{\mathbf{A}}$. Somit ist

$$\mathbf{A}^{-1} = \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -\cos\alpha & \mathrm{j} \cdot \sin\alpha \\ -\mathrm{j} \cdot \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Für die hier vorliegende *unitäre* Matrix $\mathbf{A}$ gilt sogar $\mathbf{A}^{-1} = \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$.

J39

a) Zeigen Sie: Eine *quadratische* Matrix $\mathbf{A}$ lässt sich stets als *Summe* der Matrizen

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}) \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}})$$

darstellen, wobei $\mathbf{B}$ eine *symmetrische* und $\mathbf{C}$ eine *schief-symmetrische* Matrix ist (Nachweis führen).

b) Zerlegen Sie die 3-reihige Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ auf diese Weise in einen *symmetrischen* Anteil $\mathbf{B}$ und einen *schiefsymmetrischen* Anteil $\mathbf{C}$.

c) Bilden Sie aus diesen Anteilen je eine *hermitesche* Matrix $\mathbf{H}$ und eine *schiefhermitesche* Matrix $\mathbf{S}$.

---

a) Wir zeigen zunächst, dass $\mathbf{A}$ die *Summe* aus $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ ist:

$$\mathbf{B} + \mathbf{C} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}) + \frac{1}{2}\,(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \frac{1}{2}\,\mathbf{A} + \frac{1}{2}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}\,\mathbf{A} - \frac{1}{2}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$$

Wir müssen ferner zeigen, dass $\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}$ und $\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{C}$ gilt (dann ist $\mathbf{B}$ *symmetrisch* und $\mathbf{C}$ *schiefsymmetrisch*):

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \underbrace{(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}}_{\mathbf{A}}\right) = \frac{1}{2}\,(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A}) = \underbrace{\frac{1}{2}\,(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})}_{\mathbf{B}} = \mathbf{B}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} \text{ ist } \textit{symmetrisch}$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \underbrace{(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}}_{\mathbf{A}}\right) = \frac{1}{2}\,(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}) =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\,(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}})}_{\mathbf{C}} = -\mathbf{C} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{C} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C} \text{ ist } \textit{schiefsymmetrisch}$$

b) Zerlegung der Matrix $\mathbf{A}$ in eine *Summe* aus einer *symmetrischen* und einer *schiefsymmetrischen* Matrix:

$$\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 8 \\ 2 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 8 \\ 2 & 8 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ -6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ -6 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}}_{\text{symmetrisch}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{schiefsymmetrisch}}$$

c) Eine *komplexe* Matrix $\mathbf{H}$ mit einem *symmetrischen* Realteil und einem *schiefsymmetrischen* Imaginärteil ist stets *hermitesch*. Somit ist die folgende Matrix hermitesch:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} + \mathrm{j} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} + \mathrm{j} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \mathrm{j} & 1 + 3\mathrm{j} \\ 1 + \mathrm{j} & 4 & 4 + 2\mathrm{j} \\ 1 - 3\mathrm{j} & 4 - 2\mathrm{j} & 8 \end{pmatrix}$$

Eine *komplexe* Matrix $\mathbf{S}$ mit einem *schiefsymmetrischen* Realteil und einem *symmetrischen* Imaginärteil ist immer *schiefhermitesch*. Die folgende Matrix besitzt daher diese Eigenschaft:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} + \mathrm{j} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{j} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{j} & -1 + \mathrm{j} & 3 + \mathrm{j} \\ 1 + \mathrm{j} & 4\mathrm{j} & 2 + 4\mathrm{j} \\ -3 + \mathrm{j} & -2 + 4\mathrm{j} & 8\mathrm{j} \end{pmatrix}$$

2 Lineare Gleichungssysteme

Hinweise

(1) **Lehrbuch:** Band 2, Kapitel I.5
Formelsammlung: Kapitel VII.3

(2) Wir verwenden die Abkürzung LGS für *lineares Gleichungssystem*.

J40

Lösen Sie die folgenden *homogenen quadratischen* linearen Gleichungssysteme mit Hilfe *elementarer Umformungen* in den *Zeilen* der Koeffizientenmatrix (*Gaußscher Algorithmus*):

a) $$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ein *homogenes* lineares (n, n)-System $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist *stets* lösbar. Ist die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ *regulär*, d. h. $\det \mathbf{A} \neq 0$, gibt es genau *eine* Lösung, nämlich die sog. *triviale* Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (*alle* Unbekannten haben den Wert *Null*). Bei einer *singulären* Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ dagegen gibt es *unendlich* viele Lösungen mit $n - r$ Parametern, wobei r der Rang von $\mathbf{A}$ ist.

a) Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ ist *regulär*, da $\det \mathbf{A} \neq 0$ ist:

$$\underbrace{\left| \begin{matrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix} \right|}_{\det \mathbf{A}} \begin{matrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = 15 - 4 + 8 + 10 - 3 - 16 = 10 \neq 0$$

Das LGS ist daher nur *trivial* lösbar: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

b) Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ ist *singulär*, da $\det \mathbf{A} = 0$ ist:

$$\underbrace{\left| \begin{matrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & -7 \end{matrix} \right|}_{\det \mathbf{A}} \begin{matrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = -42 + 15 - 3 + 10 + 27 - 7 = 0$$

Es gibt also *nicht-triviale* Lösungen. Wir bringen die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen auf *Trapezform* und lösen dann das *gestaffelte* LGS von unten nach oben:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} +3Z_2 \\ \\ +5Z_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \big\updownarrow \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -Z_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} = \mathbf{A}^* \\ \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{matrix}$$

$$r = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}^*) = 2$$

Es gibt also wegen $r < n = 3$ *unendlich* viele Lösungen mit $n - r = 3 - 2 = 1$ Parameter, die wir aus dem *gestaffelten* LGS $\mathbf{A}^* \mathbf{x} = \mathbf{0}$ wie folgt berechnen (wir wählen $w = \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ als Parameter und lösen zunächst die untere Gleichung):

$$-u + 2v + 3w = 0 \quad \Rightarrow \quad -u - \frac{16}{7}\lambda + 3\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad -u + \frac{5}{7}\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{5}{7}\lambda$$

$$7v + 8w = 0 \quad \Rightarrow \quad 7v + 8\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 7v = -8\lambda \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{8}{7}\lambda$$

Lösung: $u = \frac{5}{7}\lambda, \; v = -\frac{8}{7}\lambda, \; w = \lambda$ (mit $\lambda \in \mathbb{R}$ als Parameter)

Kontrolle: Wir setzen die gefundenen (vom Parameter λ abhängenden) Werte der drei Unbekannten in die Ausgangsgleichungen ein und zeigen, dass diese erfüllt sind:

$$\text{(I)} \quad 3u + v - w = \frac{15}{7}\lambda - \frac{8}{7}\lambda - \lambda = \frac{7}{7}\lambda - \lambda = \lambda - \lambda = 0$$

$$\text{(II)} \quad -u + 2v + 3w = -\frac{5}{7}\lambda - \frac{16}{7}\lambda + 3\lambda = -\frac{21}{7}\lambda + 3\lambda = -3\lambda + 3\lambda = 0$$

$$\text{(III)} \quad 5u - 3v - 7w = \frac{25}{7}\lambda + \frac{24}{7}\lambda - 7\lambda = \frac{49}{7}\lambda - 7\lambda = 7\lambda - 7\lambda = 0$$

c) Wir bringen die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ zunächst auf *Trapezform*:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2Z_1 \\ -3Z_1 \\ -Z_1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & -7 & 14 & -14 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ :3 \\ :(-7) \\ \\ \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +Z_2 \\ +Z_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow \quad \mathbf{A}^* \\ \text{Nullzeilen} \end{array}$$

$$r = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}^*) = 2$$

Es gibt also *unendlich* viele Lösungen mit $n - r = 4 - 2 = 2$ unabhängigen Parametern, die wir aus dem *gestaffelten* LGS mit der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}^*$ wie folgt bestimmen:

$$\text{(I)} \quad x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0$$

$$\text{(II)} \quad -x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0$$

Wir wählen $x_3 = \lambda$ und $x_4 = \mu$ als Parameter und lösen Gleichung (II) nach x_2 auf:

$$\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad -x_2 + 2\lambda - 2\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2\lambda - 2\mu$$

In Gleichung (I) setzen wir die für x_2, x_3 und x_4 gefundenen (parameterabhängigen) Werte ein und lösen nach x_1 auf:

$$\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad x_1 + 3(2\lambda - 2\mu) - 5\lambda + 4\mu = x_1 + 6\lambda - 6\mu - 5\lambda + 4\mu = x_1 + \lambda - 2\mu = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x_1 = -\lambda + 2\mu$$

Lösung: $x_1 = -\lambda + 2\mu, \; x_2 = 2\lambda - 2\mu, \; x_3 = \lambda, \; x_4 = \mu$ (mit den Parametern $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R}$)

Kontrolle (Probe): Wir zeigen, dass die gefundene Lösung *jede* der vier Ausgangsgleichungen erfüllt:

$$\text{(I)} \quad x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -\lambda + 2\mu + 3(2\lambda - 2\mu) - 5\lambda + 4\mu =$$
$$= -\lambda + 2\mu + 6\lambda - 6\mu - 5\lambda + 4\mu = 0$$

$$\text{(II)}\quad 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 2(-\lambda + 2\mu) + 3(2\lambda - 2\mu) - 4\lambda + 2\mu =$$
$$= -2\lambda + 4\mu + 6\lambda - 6\mu - 4\lambda + 2\mu = 0$$

$$\text{(III)}\quad 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 3(-\lambda + 2\mu) + 2(2\lambda - 2\mu) - \lambda - 2\mu =$$
$$= -3\lambda + 6\mu + 4\lambda - 4\mu - \lambda - 2\mu = 0$$

$$\text{(IV)}\quad x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -\lambda + 2\mu + 4(2\lambda - 2\mu) - 7\lambda + 6\mu =$$
$$= -\lambda + 2\mu + 8\lambda - 8\mu - 7\lambda + 6\mu = 0$$

J41

Lösen Sie die folgenden *homogenen* linearen (m, n)-Systeme:

a) $$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & -7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{aligned} u + 3v + 2w &= 0 \\ 2u - 18v + w &= 0 \\ -6u + 2v + 3w &= 0 \\ 3u + v + 5w &= 0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 8 & -10 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 9 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ein *homogenes* lineares (m, n)-System $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist *stets* lösbar. Die Lösungsmenge hängt noch vom Rang r der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ ab, wobei gilt:

$r = n \quad \Rightarrow$ genau *eine* Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (sog. „triviale" Lösung, alle Unbekannten haben den Wert *Null*)

$r < n \quad \Rightarrow$ *unendlich* viele Lösungen mit $n - r$ voneinander unabhängigen *Parametern*

a) Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ auf *Trapezform*:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & -7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} :2 \\ \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & -7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +Z_1 \\ -Z_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & 2 & -6 \\ 0 & -12 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :2 \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & -12 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +3Z_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^*$$

$$r = \text{Rg}(\mathbf{A}) = \text{Rg}(\mathbf{A}^*) = 3, \quad n = 4$$

Es gibt *unendlich* viele Lösungen mit genau einem Parameter, da $n - r = 4 - 3 = 1$ ist (wir wählen $x_4 = \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ als Parameter). Das *gestaffelte* LGS $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lautet wie folgt (wir lösen es sukzessive von unten nach oben):

$$2x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + 0 + 3\lambda - \lambda = 2x_1 + 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\lambda$$

$$4x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x_2 + 3\lambda - 3\lambda = 4x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0$$

$$2x_3 - 6\underbrace{x_4}_{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_3 - 6\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 3\lambda$$

Lösung: $x_1 = -\lambda,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3\lambda,\ x_4 = \lambda$ (mit dem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$)

Kontrolle (Einsetzen der gefundenen parameterabhängigen Werte in die drei Ausgangsgleichungen):

$$\text{(I)} \quad 4x_1 + 10x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -4\lambda + 0 + 6\lambda - 2\lambda = 0$$

$$\text{(II)} \quad -2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 2\lambda + 0 + 3\lambda - 5\lambda = 0$$

$$\text{(III)} \quad 2x_1 - 7x_2 + 2x_4 = -2\lambda - 0 + 2\lambda = 0$$

b) In der Matrizendarstellung lautet dieses *homogene* $(4, 3)$-System wie folgt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -18 & 1 \\ -6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{0}} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Wir bringen die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ zunächst auf *Trapezform* (mit Hilfe elementarer Umformungen in den Zeilen):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -18 & 1 \\ -6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2Z_1 \\ 6Z_1 \\ -3Z_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -24 & -3 \\ 0 & 20 & 15 \\ 0 & -8 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :3 \\ :5 \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -8 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -8 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -8 & -1 \\ 0 & -8 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -Z_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +2Z_2 \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ = \mathbf{A}^* \\ \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{matrix}$$

$$r = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}^*) = 3, \quad n = 3$$

Das homogene LGS ist wegen $r = n = 3$ nur *trivial* lösbar, d. h. $u = v = w = 0$.

Lösung: $u = 0, \; v = 0, \; w = 0.$

c) Mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen bringen wir die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ zunächst auf *Trapezform*:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 8 & -10 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 9 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2Z_1 \\ -3Z_1 \\ -5Z_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & -6 & 12 & 1 & -9 \\ 0 & -4 & 8 & 2 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :2 \\ \\ :2 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 12 & 1 & -9 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +3Z_2 \\ +Z_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2Z_4 \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & \underset{\curvearrowright}{0} & \underset{\curvearrowleft}{0} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ = \mathbf{A}^* \\ \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{matrix}$$

Anmerkung: Am Schluss wurden die Spalten 3 und 4 miteinander *vertauscht*. Auch diese Operation ist eine *äquivalente* Umformung, da sie lediglich eine *Umstellung* der Unbekannten bedeutet, hier also die Unbekannten x_3 und x_4 miteinander vertauscht.

$$r = \mathrm{Rg}\,(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}\,(\mathbf{A}^*) = 3\,, \quad n = 5$$

Es gibt somit *unendlich* viele Lösungen mit $n - r = 5 - 3 = 2$ voneinander unabhängigen Parametern. Wir lösen jetzt das erhaltene *gestaffelte* System $\mathbf{A}^*\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ von unten nach oben (Parameter sind $x_3 = \lambda$ und $x_5 = \mu$ mit $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$):

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2(2\lambda - \mu) - \lambda + 4\mu = x_1 + 4\lambda - 2\mu - \lambda + 4\mu =$$

$$= x_1 + 3\lambda + 2\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3\lambda - 2\mu$$

$$2x_2 + x_4 - 4x_3 - x_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_2 + 3\mu - 4\lambda - \mu = 2x_2 + 2\mu - 4\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2\lambda - \mu$$

$$2x_4 - 6x_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_4 - 6\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 3\mu$$

Lösung: $x_1 = -3\lambda - 2\mu,\ x_2 = 2\lambda - \mu,\ x_3 = \lambda,\ x_4 = 3\mu,\ x_5 = \mu$ (mit $\lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}$)

Kontrolle (Einsetzen der gefundenen parameterabhängigen Werte in die Ausgangsgleichungen):

(I) $$x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_5 = -3\lambda - 2\mu + 2(2\lambda - \mu) - \lambda + 4\mu =$$

$$= -3\lambda - 2\mu + 4\lambda - 2\mu - \lambda + 4\mu = 0$$

(II) $$2x_1 + 8x_2 - 10x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2(-3\lambda - 2\mu) + 8(2\lambda - \mu) - 10\lambda + 6\mu + 6\mu =$$

$$= -6\lambda - 4\mu + 16\lambda - 8\mu - 10\lambda + 6\mu + 6\mu = 0$$

(III) $$3x_1 + 9x_3 + x_4 + 3x_5 = 3(-3\lambda - 2\mu) + 9\lambda + 3\mu + 3\mu =$$

$$= -9\lambda - 6\mu + 9\lambda + 3\mu + 3\mu = 0$$

(IV) $$5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 10x_5 = 5(-3\lambda - 2\mu) + 6(2\lambda - \mu) + 3\lambda + 6\mu + 10\mu =$$

$$= -15\lambda - 10\mu + 12\lambda - 6\mu + 3\lambda + 6\mu + 10\mu = 0$$

J42

Lösen Sie die folgenden *inhomogenen quadratischen* linearen Gleichungssysteme mit Hilfe der *Cramerschen Regel*:

a) $$\begin{aligned} -\ x + 10y + 5z &= 3 \\ 3x - \ 6y - 2z &= -2 \\ -8x + 14y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

b) $$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

---

a) Das LGS lautet in der *Matrizendarstellung* wie folgt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 10 & 5 \\ 3 & -6 & -2 \\ -8 & 14 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen zunächst die benötigten 3-reihigen Determinanten $D = \det \mathbf{A}$, D_1, D_2 und D_3 nach der *Regel von Sarrus*:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 10 & 5 \\ 3 & -6 & -2 \\ -8 & 14 & 4 \end{vmatrix}}_{D \,=\, \det \mathbf{A}} \begin{matrix} -1 & 10 \\ 3 & -6 \\ -8 & 14 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D = 24 + 160 + 210 - 240 - 28 - 120 = 6$$

„Hilfsdeterminanten" D_1, D_2 und D_3 (in D werden der Reihe nach die 1., 2. und 3. Spalte durch den Spaltenvektor der rechten Seite des LGS ersetzt):

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 10 & 5 \\ -2 & -6 & -2 \\ 6 & 14 & 4 \end{vmatrix}}_{D_1} \begin{matrix} 3 & 10 \\ -2 & -6 \\ 6 & 14 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D_1 = -72 - 120 - 140 + 180 + 84 + 80 = 12$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & -2 \\ -8 & 6 & 4 \end{vmatrix}}_{D_2} \begin{matrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \\ -8 & 6 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D_2 = 8 + 48 + 90 - 80 - 12 - 36 = 18$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 10 & 3 \\ 3 & -6 & -2 \\ -8 & 14 & 6 \end{vmatrix}}_{D_3} \begin{matrix} -1 & 10 \\ 3 & -6 \\ -8 & 14 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D_3 = 36 + 160 + 126 - 144 - 28 - 180 = -30$$

Die *Cramersche Regel* liefert die folgende Lösung:

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{12}{6} = 2, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{18}{6} = 3, \quad z = \frac{D_3}{D} = \frac{-30}{6} = -5$$

Lösung: $x = 2, \; y = 3, \; z = -5$

b) Die Berechnung der Determinante $D = \det \mathbf{A}$ und der „Hilfsdeterminanten" D_1, D_2 und D_3 erfolgt jeweils nach der *Regel von Sarrus*:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix}}_{D \,=\, \det \mathbf{A}} \begin{matrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \\ 1 & -4 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D = -50 - 6 - 12 + 5 + 16 + 45 = -2$$

Hilfsdeterminanten D_1, D_2 und D_3:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 12 & -4 & 5 \end{vmatrix}}_{D_1} \begin{matrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \\ 12 & -4 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D_1 = -25 - 72 - 12 + 60 + 8 + 45 = 4$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 12 & 5 \end{vmatrix}}_{D_2} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 12 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D_2 = 30 + 2 + 36 - 3 - 48 - 15 = 2$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 12 \end{vmatrix}}_{D_3} \begin{matrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \\ 1 & -4 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D_3 = -120 - 9 - 12 + 5 + 24 + 108 = -4$$

Die *Cramersche Regel* führt zu der folgenden Lösung:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{4}{-2} = -2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{-2} = -1, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Lösung: $x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$

J43

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden *quadratischen* linearen Gleichungssysteme durch *elementare Zeilenumformungen* in der *erweiterten* Koeffizientenmatrix:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 15 & -9 \\ -3 & -18 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ein *inhomogenes* lineares (n, n)-System $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{c}$ ist nur lösbar, wenn der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$ mit dem Rang der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ *übereinstimmt*: $\operatorname{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = r$. Für $r = n$ gibt es eine *eindeutige* Lösung (die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ ist dann *regulär*, d. h. $\det \mathbf{A} \neq 0$). Gilt jedoch $r < n$, so gibt es *unendlich* viele Lösungen mit $n - r$ voneinander unabhängigen *Parametern*.

Das inhomogene lineare (n, n)-System $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{c}$ wird mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen auf *Trapezform* gebracht. Im Falle der Lösbarkeit $(\operatorname{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = r)$ wird das dann vorliegende *gestaffelte* System $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ schrittweise von unten nach oben gelöst.

a) Wir bringen die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$ zunächst mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen auf *Trapezform*:

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 15 & -9 \\ -3 & -18 & 11 \end{matrix}}_{\mathbf{A}} & \underbrace{\begin{matrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{matrix}}_{\mathbf{c}} \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -3Z_1 \\ +3Z_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 18 & -12 & 0 \\ 0 & -21 & 14 & 12 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ :6 \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -21 & 14 & 12 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ +7Z_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{\mathbf{A}^*} & \underbrace{\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 12 \end{matrix}}_{\mathbf{c}^*} \end{array}\right) = (\mathbf{A}^* \mid \mathbf{c}^*)$$

$$\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}^*) = 2 \quad (\mathbf{A}^* \text{ enthält } \textit{eine} \text{ Nullzeile!}), \quad \operatorname{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}^* \mid \mathbf{c}^*) = 3$$

Wegen $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) \neq \operatorname{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$ ist das inhomogene LGS *nicht* lösbar.

b) $$(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 6 & -2 & -2 \end{matrix}}_{\mathbf{A}} & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 16 \end{matrix}}_{\mathbf{c}} \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -3Z_1 \\ -4Z_1 \\ +2Z_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 10 & -13 & 7 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & 18 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -3Z_4 \\ -5Z_4 \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -19 & 16 & -54 \\ 0 & 0 & -33 & 27 & -93 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & 18 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ :3 \\ :2 \end{matrix} \updownarrow \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & -11 & 9 & -31 \\ 0 & 0 & -19 & 16 & -54 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \cdot 19 \\ \cdot (-11) \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & -209 & 171 & -589 \\ 0 & 0 & 209 & -176 & 594 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ +Z_3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -209 & 171 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{matrix}}_{\mathbf{A}^*} & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 9 \\ -589 \\ 5 \end{matrix}}_{\mathbf{c}^*} \end{array}\right) = (\mathbf{A}^* \mid \mathbf{c}^*)$$

$\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}^*) = 4, \quad \operatorname{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}^* \mid \mathbf{c}^*) = 4$

Somit gilt $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = r = 4$, das inhomogene LGS ist daher *lösbar* und zwar *eindeutig*, da $r = n = 4$ ist.

Wir lösen jetzt das *gestaffelte* System $\mathbf{A}^* \mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ schrittweise von unten nach oben:

$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 - 6 + 6 + 1 = x_1 + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

$x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 9 \quad \Rightarrow \quad x_2 + 4 + 2 = x_2 + 6 = 9 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3$

$-209x_3 + 171x_4 = -589 \quad \Rightarrow \quad -209x_3 - 171 = -589 \quad \Rightarrow \quad -209x_3 = -418 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 2$

$-5x_4 = 5 \quad \Rightarrow \quad x_4 = -1$

Lösung: $x_1 = 0, \; x_2 = 3, \; x_3 = 2, \; x_4 = -1$

c) $$(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{matrix}}_{\mathbf{A}} & \underbrace{\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}}_{\mathbf{c}} \end{array}\right) \begin{matrix} -5Z_3 \\ -2Z_3 \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -15 & 9 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} :(-3) \\ \\ \\ \end{matrix} \updownarrow \quad \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ +Z_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{\mathbf{A}^*} & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}}_{\mathbf{c}^*} \end{array}\right) \begin{matrix} = (\mathbf{A}^* \mid \mathbf{c}^*) \\ \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{matrix}$$

$\mathbf{A}^*$ und $(\mathbf{A}^* \mid \mathbf{c}^*)$ enthalten jeweils *eine* Nullzeile $\Rightarrow$

$\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}^*) = 2, \quad \operatorname{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}^* \mid \mathbf{c}^*) = 2$

Somit ist das inhomogene LGS *lösbar*, da $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = r = 2$ gilt. Die Lösungsmenge enthält wegen $n - r = 3 - 2 = 1$ genau *einen* Parameter.

Wir lösen das *gestaffelte* System $\mathbf{A}^* \mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ schrittweise wie folgt (als Parameter wählen wir $z = \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$):

$$x + 3y - 2z = 1 \quad \Rightarrow \quad x + \frac{3}{5}(3\lambda + 1) - 2\lambda = x + \frac{9}{5}\lambda + \frac{3}{5} - 2\lambda = x - \frac{1}{5}\lambda + \frac{3}{5} = 1$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{5}\lambda + \frac{2}{5} = \frac{1}{5}(\lambda + 2)$$

$$-5y + 3\underbrace{z}_{\lambda} = -1 \quad \Rightarrow \quad -5y + 3\lambda = -1 \quad \Rightarrow \quad -5y = -1 - 3\lambda \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{5}(3\lambda + 1)$$

Lösung: $x = \frac{1}{5}(\lambda + 2), \quad y = \frac{1}{5}(3\lambda + 1), \quad z = \lambda \quad$ (mit dem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$)

Kontrolle (Einsetzen der gefundenen parameterabhängigen Werte in die drei Ausgangsgleichungen):

$$\text{(I)} \quad 5x - z = \frac{5}{5}(\lambda + 2) - \lambda = \lambda + 2 - \lambda = 2$$

$$\text{(II)} \quad 2x + y - z = \frac{2}{5}(\lambda + 2) + \frac{1}{5}(3\lambda + 1) - \lambda = \frac{2}{5}\lambda + \frac{4}{5} + \frac{3}{5}\lambda + \frac{1}{5} - \lambda =$$

$$= \frac{5}{5}\lambda - \lambda + \frac{5}{5} = \lambda - \lambda + 1 = 1$$

$$\text{(III)} \quad x + 3y - 2z = \frac{1}{5}(\lambda + 2) + \frac{3}{5}(3\lambda + 1) - 2\lambda = \frac{1}{5}\lambda + \frac{2}{5} + \frac{9}{5}\lambda + \frac{3}{5} - 2\lambda =$$

$$= \frac{10}{5}\lambda - 2\lambda + \frac{5}{5} = 2\lambda - 2\lambda + 1 = 1$$

J44

Die Lösungen des linearen Gleichungssystems $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 2 \\ -2 & 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ hängen noch vom Wert des Parameters a ab.

Wann gibt es

a) eine *eindeutige* Lösung,

b) *unendlich* viele Lösungen,

c) *keine* Lösungen?

---

a) Es gibt genau dann *eine* Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante von Null *verschieden* ist. Wir berechnen daher zunächst die Determinante nach der *Regel von Sarrus*:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 2 \\ -2 & 2 & a \end{vmatrix}}_{\det \mathbf{A}} \begin{matrix} 1 & 1 \\ -a & 1 \\ -2 & 2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = a - 4 - 2a + 2 - 4 + a^2 = a^2 - a - 6$$

Die „Nullstellen“ der Determinante müssen ausgeschlossen werden:

$$\det \mathbf{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 - a - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

Mit *Ausnahme* der Werte $a_1 = 3$ und $a_2 = -2$ ist das LGS stets *eindeutig* lösbar.

b) Wir zeigen jetzt, dass es für den Parameterwert $a = 3$ *unendlich* viele Lösungen gibt. Zu diesem Zweck bringen wir die erweiterte Koeffizientenmatrix (mit $a = 3$) durch elementare Zeilenumformungen auf *Trapezform*:

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ +3Z_1 \\ +2Z_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -Z_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\mathbf{A}^* \mid \mathbf{c}^*) \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{matrix}$$

$$\underbrace{}_{\mathbf{A}} \; \underbrace{}_{\mathbf{c}} \qquad \qquad \underbrace{}_{\mathbf{A}^*} \; \underbrace{}_{\mathbf{c}^*}$$

$\mathbf{A}^*$ und $(\mathbf{A}^* \mid \mathbf{c}^*)$ enthalten jeweils *eine* Nullzeile $\Rightarrow$

$$\text{Rg}(\mathbf{A}) = \text{Rg}(\mathbf{A}^*) = 2, \quad \text{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = \text{Rg}(\mathbf{A}^* \mid \mathbf{c}^*) = 2$$

Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ und erweiterte Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$ haben den *gleichen* Rang $r = 2$. Das LGS ist daher *lösbar*, es gibt *unendlich* viele Lösungen, die noch von einem Parameter abhängen (Anzahl der Parameter: $n - r = 3 - 2 = 1$).

c) Wir zeigen jetzt, dass das LGS für $a = -2$ *nicht* lösbar ist. Die erweiterte Koeffizientenmatrix (mit $a = -2$) wird wieder auf *Trapezform* gebracht:

$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{c}) = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{matrix}}_{\mathbf{A}} & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}}_{\mathbf{c}} \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2Z_1 \\ +2Z_1 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ +4Z_2 \end{matrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{\mathbf{A}^*} & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{matrix}}_{\mathbf{c}^*} \end{array}\right) = (\mathbf{A}^*\,|\,\mathbf{c}^*)$$

$\mathbf{A}^*$ enthält *eine* Nullzeile und besitzt somit den Rang $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}^*) = 2$, die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}^*\,|\,\mathbf{c}^*)$ dagegen enthält *keine* Nullzeile und hat somit den Rang $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}^*\,|\,\mathbf{c}^*) = 3$. Somit gilt:

$$\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}^*) = 2 \quad \text{und} \quad \operatorname{Rg}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{c}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}^*\,|\,\mathbf{c}^*) = 3 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Rg}(\mathbf{A}) \neq \operatorname{Rg}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{c})$$

Das LGS ist daher *nicht* lösbar.

J45

Lösen Sie das *inhomogene* lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{B}$$

durch *Invertierung* der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ nach dem *Gauß-Jordan-Verfahren*.

Wir zeigen zunächst, dass die Determinante der 3-reihigen Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ *nicht* verschwindet und $\mathbf{A}$ somit *regulär* und daher *invertierbar* ist (Berechnung der Determinante nach *Sarrus*):

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}_{\det \mathbf{A}} \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = -3 + 0 - 1 - 6 - 2 - 0 = -12 \neq 0$$

Die *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ berechnen wir nach dem *Gauß-Jordan-Verfahren* (→ FS: Kap. VII.1.5.2.2):

$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{matrix}}_{\mathbf{A}} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{E}} \end{array}\right) \begin{matrix} \\ +Z_1 \\ -2Z_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -3Z_3 \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ :12 \\ \\ \end{matrix} \updownarrow \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/12 & 1/12 & -3/12 \end{array}\right) \begin{matrix} -Z_3 \\ +3Z_3 \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{E}} & \underbrace{\begin{matrix} 5/12 & -1/12 & 3/12 \\ -3/12 & 3/12 & 3/12 \\ 7/12 & 1/12 & -3/12 \end{matrix}}_{\mathbf{A}^{-1}} \end{array}\right) = (\mathbf{E}\,|\,\mathbf{A}^{-1})$$

Die *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ lautet somit:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5/12 & -1/12 & 3/12 \\ -3/12 & 3/12 & 3/12 \\ 7/12 & 1/12 & -3/12 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} = \frac{1}{12}\,\mathbf{C}$$

Das inhomogene LGS $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{B}$ lösen wir mit Hilfe der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ wie folgt (beide Seiten werden von *links* mit $\mathbf{A}^{-1}$ multipliziert):

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}}_{\mathbf{E}}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mathbf{E}\,\mathbf{x}}_{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{12}\,(\mathbf{C}\,\mathbf{B})$$

Berechnung des Matrizenproduktes $\mathbf{C}\,\mathbf{B}$ mit dem *Falk-Schema*:

				3
			B	0
				11
	5	−1	3	48
C	−3	3	3	24
	7	1	−3	−12
				CB

Lösungsvektor: $\mathbf{x} = \frac{1}{12}\,(\mathbf{C}\,\mathbf{B}) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 48 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Lösung: $x = 4, \; y = 2, \; z = -1$

J46

Bestimmen Sie unter Verwendung des *Gaußschen Algorithmus* in „elementarer Form" (→ Band 1: Kap. I.5.2) die Gleichung der *Parabel*, die durch die drei Punkte $P_1 = (1; -8)$, $P_2 = (2; -12)$ und $P_3 = (-1; -18)$ geht.

In den *Lösungsansatz* $y = a x^2 + b x + c$ setzen wir der Reihe nach die Koordinaten der drei Punkte P_1, P_2 und P_3 ein und erhalten ein *inhomogenes* LGS mit drei Gleichungen und den drei unbekannten Koeffizienten a, b und c:

$$P_1 = (1; -8) \quad \Rightarrow \quad \text{(I)} \quad a + b + c = -8$$

$$P_2 = (2; -12) \quad \Rightarrow \quad \text{(II)} \quad 4a + 2b + c = -12$$

$$P_3 = (-1; -18) \quad \Rightarrow \quad \text{(III)} \quad a - b + c = -18$$

Wir lösen das Gleichungssystem mit Hilfe des *Gaußschen Algorithmus* („elementares" Rechenschema → Bd. 1: Kap. I.5.2):

	a	b	c	c_i	s_i
$\boxed{E_1}$	1	1	1	−8	−5
	4	2	1	−12	−5
$-4 \cdot E_1$	−4	−4	−4	32	20
	1	−1	1	−18	−17
$-E_1$	−1	−1	−1	8	5
		−2	−3	20	15
		−2	0	−10	−12

c_i: Absolutglied
s_i: Zeilensumme

Die *grau* unterlegten Zeilen bilden das *gestaffelte* System.

Wir können an dieser Stelle abbrechen, da in der letzten Zeile nur noch eine Unbekannte auftritt. Das *gestaffelte* System besteht aus der Gleichung $\boxed{E_1}$ und den letzten beiden Gleichungen und wird schrittweise von unten nach oben gelöst:

$$\begin{array}{lll} a + b + c = -8 & \Rightarrow \quad a + 5 - 10 = -8 \quad \Rightarrow \quad a - 5 = -8 \quad \Rightarrow \quad a = -3 \\ -2b - 3c = 20 & \Rightarrow \quad -10 - 3c = 20 \quad \Rightarrow \quad -3c = 30 \quad \Rightarrow \quad c = -10 \\ -2b = -10 & \Rightarrow \quad b = 5 \end{array}$$

Lösung: $a = -3, \ b = 5, \ c = -10$; Parabelgleichung: $y = -3x^2 + 5x - 10$

J47

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

a) nach der *Cramerschen Regel*,

b) mit Hilfe des *Gaußschen Algorithmus* (Zeilenumformungen in der erweiterten Koeffizientenmatrix),

c) durch *Invertierung* der Koeffizientenmatrix nach dem *Gauß-Jordan-Verfahren*.

---

a) Wir berechnen zunächst die benötigte Determinante $D = \det \mathbf{A}$ sowie die „Hilfsdeterminanten" D_1, D_2 und D_3 (jeweils nach der *Regel von Sarrus*):

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}}_{D = \det \mathbf{A}} \begin{matrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D = -2 - 10 + 6 - 4 - 3 - 10 = -23$$

Hilfsdeterminanten D_1, D_2 *und* D_3:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 7 & -3 & -2 \end{vmatrix}}_{D_1} \begin{matrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \\ 7 & -3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D_1 = -8 - 35 + 0 - 14 - 12 - 0 = -69$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & -2 \end{vmatrix}}_{D_2} \begin{matrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & 7 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D_2 = 0 - 8 - 14 - 0 + 7 - 8 = -23$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 7 \end{vmatrix}}_{D_3} \begin{matrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D_3 = 7 + 0 + 12 - 8 - 0 + 35 = 46$$

Die *Cramersche Regel* liefert damit folgende Werte für die drei Unbekannten u, v und w:

$$u = \frac{D_1}{D} = \frac{-69}{-23} = 3, \quad v = \frac{D_2}{D} = \frac{-23}{-23} = 1, \quad w = \frac{D_3}{D} = \frac{46}{-23} = -2$$

Lösung: $u = 3, \ v = 1, \ w = -2$

b) Wir bringen die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}\mid\mathbf{c})$ mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen in die *Trapezform*:

$$(\mathbf{A}\mid\mathbf{c}) = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{matrix}}_{\mathbf{A}} \,\middle|\, \underbrace{\begin{matrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{matrix}}_{\mathbf{c}}\right) \begin{array}{l} \\ +Z_1 \\ -2Z_1 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & -13 & -6 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 13 \\ \cdot\ 6 \end{array} \quad\Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 78 & 13 & 52 \\ 0 & -78 & -36 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +Z_2 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 78 & 13 & 52 \\ 0 & 0 & -23 & 46 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :13 \\ :(-23) \end{array} \quad\Rightarrow\quad \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{A}^*} \,\middle|\, \underbrace{\begin{matrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{matrix}}_{\mathbf{c}^*}\right) = (\mathbf{A}^*\mid\mathbf{c}^*)$$

$$\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}^*) = 3\,, \quad \operatorname{Rg}(\mathbf{A}\mid\mathbf{c}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}^*\mid\mathbf{c}^*) = 3$$

Somit gilt $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}\mid\mathbf{c}) = r = 3$, das LGS ist daher *lösbar* und zwar wegen $r = n = 3$ *eindeutig*. Die Lösung berechnen wir aus dem *gestaffelten* System $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ schrittweise von unten nach oben:

$$u + 5v + 2w = 4 \quad\Rightarrow\quad u + 5 - 4 = u + 1 = 4 \quad\Rightarrow\quad u = 3$$

$$6v + w = 4 \quad\Rightarrow\quad 6v - 2 = 4 \quad\Rightarrow\quad 6v = 6 \quad\Rightarrow\quad v = 1$$

$$w = -2$$

Lösung: $u = 3,\ v = 1,\ w = -2$

c) Aus dem Lösungsteil a) ist bekannt, dass $\mathbf{A}$ wegen $\det\mathbf{A} = -23 \neq 0$ *regulär* ist und somit eine *Inverse* $\mathbf{A}^{-1}$ besitzt, die wir jetzt mit dem *Gauß-Jordan-Verfahren* berechnen wollen (→ FS: Kap. VII.1.5.2.2):

$$(\mathbf{A}\mid\mathbf{E}) = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{matrix}}_{\mathbf{A}} \,\middle|\, \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{E}}\right) \begin{array}{l} \\ +Z_1 \\ -2Z_1 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +2Z_2 \end{array} \quad\Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +5Z_3 \\ +6Z_3 \\ \\ \end{array} \quad\Rightarrow\quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -18 & 1 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & -23 & 1 & 13 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(-23) \\ \cdot(-1) \end{array} \updownarrow \quad\Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -18 & 1 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/23 & -13/23 & -6/23 \end{array}\right) \begin{array}{l} +18Z_3 \\ -4Z_3 \\ \\ \end{array} \quad\Rightarrow$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{E}} \,\middle|\, \underbrace{\begin{matrix} 5/23 & -4/23 & 7/23 \\ 4/23 & 6/23 & 1/23 \\ -1/23 & -13/23 & -6/23 \end{matrix}}_{\mathbf{A}^{-1}}\right) = (\mathbf{E}\mid\mathbf{A}^{-1})$$

Die *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ lautet damit:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5/23 & -4/23 & 7/23 \\ 4/23 & 6/23 & 1/23 \\ -1/23 & -13/23 & -6/23 \end{pmatrix} = \frac{1}{23}\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -4 & 7 \\ 4 & 6 & 1 \\ -1 & -13 & -6 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} = \frac{1}{23}\,\mathbf{B}$$

Wir lösen jetzt die Matrizengleichung $\mathbf{A\,x} = \mathbf{c}$ nach dem unbekannten Vektor $\mathbf{x}$ auf, indem wir beide Seiten von *links* mit $\mathbf{A}^{-1}$ multiplizieren:

$$\mathbf{A\,x} = \mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}}_{\mathbf{E}}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mathbf{E\,x}}_{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c} = \frac{1}{23}\,(\mathbf{B\,c})$$

Berechnung des Matrizenproduktes $\mathbf{B\,c}$ nach dem *Falk-Schema*:

$$\begin{array}{c|ccc|c|}
 & & & \mathbf{c} & 4 \\
 & & & & 0 \\
 & & & & 7 \\
\hline
 & 5 & -4 & 7 & 69 \\
\mathbf{B} & 4 & 6 & 1 & 23 \\
 & -1 & -13 & -6 & -46 \\
\hline
 & & & & \mathbf{B\,c}
\end{array}$$

Lösungsvektor: $\mathbf{x} = \dfrac{1}{23}\,(\mathbf{B\,c}) = \dfrac{1}{23}\begin{pmatrix} 69 \\ 23 \\ -46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lösung: $u = 3, \; v = 1, \; w = -2$

J48

Eine viereckige *Netzmasche* enthält die ohmschen Widerstände $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $R_3 = 5\,\Omega$ und $R_4 = 2\,\Omega$ sowie eine Spannungsquelle mit der Quellspannung $U_q = 19\,\text{V}$ (Bild J-2).

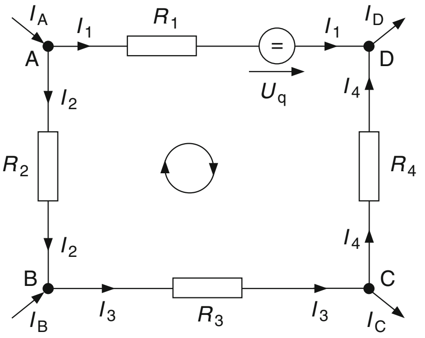


Bild J-2

Die in den Knotenpunkten A und B zufließenden Ströme betragen $I_A = 2\,\text{A}$ und $I_B = 1\,\text{A}$, der im Knotenpunkt C abfließende Strom $I_C = 1\,\text{A}$. Berechnen Sie mit Hilfe des *Gaußschen Algorithmus* die vier *Zweigströme* I_1, I_2, I_3 und I_4 aus dem folgenden linearen Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -R_1 & R_2 & R_3 & R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_A \\ -I_B \\ I_C \\ U_q \end{pmatrix}$$

Mit den vorgegebenen Werten erhalten wir das folgende *quadratische* LGS (ohne Einheiten; die noch unbekannten Ströme sind dann in der Einheit Ampère anzugeben):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 19 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A\,I} = \mathbf{c}$$

Wir bringen zunächst die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$ auf *Trapezform*:

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & 2 & 19 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ +Z_1 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & 21 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ -3Z_2 \end{array} \Rightarrow$$

$$\underbrace{}_{\mathbf{A}} \quad \underbrace{}_{\mathbf{c}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 24 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ -8Z_3 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 16 \end{array}\right) = (\mathbf{A}^* \mid \mathbf{c}^*)$$

$$\underbrace{}_{\mathbf{A}^*} \quad \underbrace{}_{\mathbf{c}^*}$$

Es gibt *keine* Nullzeilen, daher ist $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = r = 4$ und das LGS ist (aus physikalischer Sicht erwartungsgemäß) *eindeutig* lösbar. Die Lösung erhalten wir aus dem *gestaffelten* System $\mathbf{A}^*\mathbf{I} = \mathbf{c}^*$ (schrittweise von unten nach oben gelöst):

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 \qquad\qquad &= 2 \;\Rightarrow\; I_1 + 1{,}6 = 2 \;\Rightarrow\; I_1 = 0{,}4 \\ I_2 - I_3 \qquad &= -1 \;\Rightarrow\; I_2 - 2{,}6 = -1 \;\Rightarrow\; I_2 = 1{,}6 \\ I_3 - I_4 &= 1 \;\Rightarrow\; I_3 - 1{,}6 = 1 \;\Rightarrow\; I_3 = 2{,}6 \\ 10\,I_4 &= 16 \;\Rightarrow\; I_4 = 1{,}6 \end{aligned}$$

Lösung: $I_1 = 0{,}4\,\mathrm{A}$; $I_2 = 1{,}6\,\mathrm{A}$; $I_3 = 2{,}6\,\mathrm{A}$; $I_4 = 1{,}6\,\mathrm{A}$

J49

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Für welche Werte des reellen Parameters λ besitzt das *inhomogene* lineare Gleichungssystem genau *eine* Lösung?

Das inhomogene LGS $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{c}$ besitzt genau dann eine *eindeutige* Lösung, wenn $\det \mathbf{A} \neq 0$ gilt. Wir berechnen die 3-reihige Determinante nach der *Regel von Sarrus*:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \end{vmatrix}}_{\det \mathbf{A}} \begin{matrix} -1 & \lambda \\ 0 & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{matrix}$$

$$\det \mathbf{A} = -6 - 2\lambda + 0 + 4 - (1-\lambda) - 0 = -2 - 2\lambda - 1 + \lambda = -3 - \lambda$$

Aus der Bedingung $\det \mathbf{A} = -3 - \lambda \neq 0$ folgt $\lambda \neq -3$. Die LGS besitzt somit genau *eine* Lösung, wenn der Parameter λ von -3 *verschieden* ist.

J50

Der in Bild J-3 skizzierte Balken der Länge $2a$ mit loser Einspannung am linken Ende und schrägem Loslager am rechten Ende wird in der Balkenmitte durch eine schräg unter dem Winkel $\alpha > 0$ angreifende konstante Kraft F belastet.

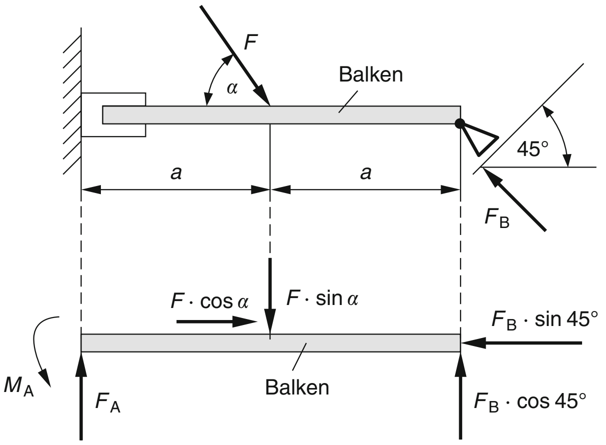


Bild J-3

Die beiden *Lagerkräfte* F_A und F_B sowie das *Moment* M_A genügen dabei dem folgenden linearen Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & a\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_A \\ F_B \\ M_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2F \cdot \sin\alpha \\ aF \cdot \sin\alpha \\ 2F \cdot \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der *Cramerschen Regel* die unbekannten Kräfte und Momente in Abhängigkeit vom Winkel α.

Hinweis: Die anfallenden 3-reihigen Determinanten sollen nach dem *Laplaceschen Entwicklungssatz* berechnet werden.

Für die Berechnung der drei Unbekannten F_A, F_B und M_A benötigen wir die Determinante $D = \det \mathbf{A}$ der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ sowie die aus D gewonnenen „Hilfsdeterminanten" D_1, D_2 und D_3 (in D wird der Reihe nach die erste, zweite bzw. dritte Spalte durch den Spaltenvektor $\mathbf{c}$ der rechten Seite des LGS ersetzt). Wir berechnen diese Determinanten jeweils nach *Laplace* durch Entwicklung nach möglichst günstigen Zeilen bzw. Spalten.

Koeffizientendeterminante $D = \det \mathbf{A}$

$$D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & a\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach den Elementen der *1. Spalte*, wobei nur das Element $a_{11} = 2$ einen Beitrag leistet:

$$D = a_{11} A_{11} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = a_{11} D_{11} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & a\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = 2\,(0 - \sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$$

Hilfsdeterminante D_1

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2F \cdot \sin\alpha & \sqrt{2} & 0 \\ aF \cdot \sin\alpha & a\sqrt{2} & 1 \\ 2F \cdot \cos\alpha & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach den Elementen der *3. Spalte*, wobei nur das Element $a_{23} = 1$ einen Beitrag leistet:

$$D_1 = a_{23} A_{23} = a_{23} \cdot (-1)^{2+3} \cdot D_{23} = -a_{23} D_{23} =$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 2F \cdot \sin\alpha & \sqrt{2} & 0 \\ aF \cdot \sin\alpha & a\sqrt{2} & 1 \\ 2F \cdot \cos\alpha & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2F \cdot \sin\alpha & \sqrt{2} \\ 2F \cdot \cos\alpha & \sqrt{2} \end{vmatrix} =$$

$$= -(2\sqrt{2}\,F \cdot \sin\alpha - 2\sqrt{2}\,F \cdot \cos\alpha) = 2\sqrt{2}\,F(\cos\alpha - \sin\alpha)$$

Hilfsdeterminante D_2

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2F \cdot \sin\alpha & 0 \\ 0 & aF \cdot \sin\alpha & 1 \\ 0 & 2F \cdot \cos\alpha & 0 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach den Elementen der 1. Spalte
(nur das Element $a_{11} = 2$ liefert einen Beitrag):

$$D_2 = a_{11} A_{11} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = a_{11} D_{11} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2F \cdot \sin\alpha & 0 \\ 0 & aF \cdot \sin\alpha & 1 \\ 0 & 2F \cdot \cos\alpha & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} aF \cdot \sin\alpha & 1 \\ 2F \cdot \cos\alpha & 0 \end{vmatrix} = 2(0 - 2F \cdot \cos\alpha) = -4F \cdot \cos\alpha$$

Hilfsdeterminante D_3

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{2} & 2F \cdot \sin\alpha \\ 0 & a\sqrt{2} & aF \cdot \sin\alpha \\ 0 & \sqrt{2} & 2F \cdot \cos\alpha \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach den Elementen der 1. Spalte
(nur das Element $a_{11} = 2$ liefert einen Beitrag):

$$D_3 = a_{11} A_{11} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = a_{11} D_{11} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{2} & 2F \cdot \sin\alpha \\ 0 & a\sqrt{2} & aF \cdot \sin\alpha \\ 0 & \sqrt{2} & 2F \cdot \cos\alpha \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a\sqrt{2} & aF \cdot \sin\alpha \\ \sqrt{2} & 2F \cdot \cos\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= 2(2\sqrt{2}\,aF \cdot \cos\alpha - \sqrt{2}\,aF \cdot \sin\alpha) = 2\sqrt{2}\,aF(2 \cdot \cos\alpha - \sin\alpha)$$

Berechnung der drei Unbekannten nach der Cramerschen Regel

$$F_A = \frac{D_1}{D} = \frac{2\sqrt{2}\,F(\cos\alpha - \sin\alpha)}{-2\sqrt{2}} = -F(\cos\alpha - \sin\alpha) = F(\sin\alpha - \cos\alpha)$$

$$F_B = \frac{D_2}{D} = \frac{-4F \cdot \cos\alpha}{-2\sqrt{2}} = \frac{2F \cdot \cos\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\,F \cdot \cos\alpha}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,F \cdot \cos\alpha$$

$$M_A = \frac{D_3}{D} = \frac{2\sqrt{2}\,aF(2 \cdot \cos\alpha - \sin\alpha)}{-2\sqrt{2}} = -aF(2 \cdot \cos\alpha - \sin\alpha) = aF(\sin\alpha - 2 \cdot \cos\alpha)$$

Lösung: $F_A = F(\sin\alpha - \cos\alpha)$, $F_B = \sqrt{2}\,F \cdot \cos\alpha$, $M_A = aF(\sin\alpha - 2 \cdot \cos\alpha)$

J51

Jedem Punkt $P = (x_1;\ x_2;\ x_3)$ des 3-dimensionalen Raumes wird durch die Gleichung $\mathbf{y} = \mathbf{A\,x}$ in eindeutiger Weise ein *Bildpunkt* $Q = (y_1;\ y_2;\ y_3)$ zugeordnet. Dabei ist $\mathbf{x}$ der *Ortsvektor* von P und $\mathbf{y}$ der *Ortsvektor* des Bildpunktes Q und $\mathbf{A}$ die *Abbildungsmatrix* dieser linearen Abbildung. Bestimmen Sie die sog. *Fixpunkte* der Abbildung, d. h. diejenigen Punkte, die in sich selbst abgebildet werden $(\mathbf{y} = \mathbf{x})$ für die Abbildungsmatrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Aus $\mathbf{y} = \mathbf{A\,x}$ und $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ erhalten wir das folgende *homogene* LGS für den Ortsvektor $\mathbf{x}$ des Fixpunktes:

$$\mathbf{A\,x} = \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A\,x} - \mathbf{x} = \mathbf{A\,x} - \mathbf{E\,x} = \underbrace{(\mathbf{A} - \mathbf{E})}_{\mathbf{B}}\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B\,x} = \mathbf{0}$$

($\mathbf{E}$: 3-reihige *Einheitsmatrix*; $\mathbf{0}$: *Nullvektor* des 3-dimensionalen Raumes). Die Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

bringen wir durch elementare Zeilenumformungen auf *Trapezform*:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -Z_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +2Z_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} = \mathbf{B}^* \\ \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{matrix}$$

Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{B}$ bzw. $\mathbf{B}^*$ besitzt den Rang $r = 2$, das homogene LGS hat somit *unendlich* viele Lösungen (Anzahl der Parameter: $n - r = 3 - 2 = 1$). Wir lösen jetzt das *gestaffelte* System $\mathbf{B}^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (als Parameter wählen wir $x_2 = \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$):

$$3x_1 + x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x_1 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{3}\,\lambda$$

$$2\underbrace{x_2}_{\lambda} + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -2\lambda$$

Lösung: $x_1 = -\frac{1}{3}\,\lambda,\ x_2 = \lambda,\ x_3 = -2\lambda \quad (\text{mit } \lambda \in \mathbb{R})$

Damit gibt es *unendlich* viele Fixpunkte mit den Koordinaten $x_1 = -\lambda/3$, $x_2 = \lambda$ und $x_3 = 2\lambda$ (mit $\lambda \in \mathbb{R}$). Diese Punkte gehen bei der Abbildung in sich selbst über.

J52

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme durch *elementare Umformungen* in den *Zeilen* der erweiterten Koeffizientenmatrix (*Gaußscher Algorithmus*):

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 11 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{aligned} u + 3v + 2w &= 19 \\ 2u - 18v + w &= -85 \\ -6u + 2v + 3w &= 1 \\ 3u + v + 5w &= 16 \end{aligned}$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -9 \\ -6 & 6 & -9 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -21 \end{pmatrix}$$

Ein *inhomogenes* lineares (m, n)-System $\mathbf{A\,x} = \mathbf{c}$ ist nur lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ mit dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$ *übereinstimmt*: $\text{Rg}\,(\mathbf{A}) = \text{Rg}\,(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = r$. Im Falle der Lösbarkeit hängt die Lösungsmenge noch wie folgt vom Rang r ab:

$r = n \quad \Rightarrow$ genau *eine* Lösung

$r < n \quad \Rightarrow$ *unendlich* viele Lösungen mit $n - r$ voneinander unabhängigen *Parametern*

a) Wir bringen die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$ mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen auf *Trapezform*:

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 5 \\ 7 & 11 \\ 2 & -3 \end{matrix}}_{\mathbf{A}} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{matrix}}_{\mathbf{c}}\right) \begin{matrix} \\ -7\,Z_1 \\ -2\,Z_1 \end{matrix} \;\Rightarrow\; \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -24 & -7 \\ 0 & -13 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ :(-13) \end{matrix} \;\Rightarrow\; \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -24 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ +24\,Z_3 \\ \\ \end{matrix} \;\Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \big\updownarrow \end{matrix} \;\Rightarrow\; \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{\mathbf{A}^*} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{matrix}}_{\mathbf{c}^*}\right) = (\mathbf{A}^* \mid \mathbf{c}^*)$$

$\mathbf{A}^*$ enthält *eine* Nullzeile, $(\mathbf{A}^* \mid \mathbf{c}^*)$ dagegen *keine*! Daraus folgt:

$$\text{Rg}\,(\mathbf{A}) = \text{Rg}\,(\mathbf{A}^*) = 2\,, \quad \text{Rg}\,(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = \text{Rg}\,(\mathbf{A}^* \mid \mathbf{c}^*) = 3$$

Somit ist $\text{Rg}\,(\mathbf{A}) \neq \text{Rg}\,(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$, das inhomogene LGS ist daher *nicht* lösbar.

b) Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$ wird zunächst durch elementare Zeilenumformungen auf *Trapezform* gebracht:

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -18 & 1 \\ -6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{matrix}}_{\mathbf{A}} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 19 \\ -85 \\ 1 \\ 16 \end{matrix}}_{\mathbf{c}}\right) \begin{matrix} \\ -2\,Z_1 \\ +6\,Z_1 \\ -3\,Z_1 \end{matrix} \;\Rightarrow\; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -24 & -3 & -123 \\ 0 & 20 & 15 & 115 \\ 0 & -8 & -1 & -41 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ :(-3) \\ :5 \\ \\ \end{matrix} \;\Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & 8 & 1 & 41 \\ 0 & 4 & 3 & 23 \\ 0 & -8 & -1 & -41 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -0{,}5\,Z_2 \\ +2\,Z_2 \end{matrix} \;\Rightarrow\; \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 2{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{\mathbf{A}^*} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 19 \\ 41 \\ 2{,}5 \\ 0 \end{matrix}}_{\mathbf{c}^*}\right) \begin{matrix} = (\mathbf{A}^* \mid \mathbf{c}^*) \\ \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{matrix}$$

$\mathbf{A}^*$ und $(\mathbf{A}^* \mid \mathbf{c}^*)$ enthalten jeweils *eine* Nullzeile. Es gilt:

$$\text{Rg}\,(\mathbf{A}) = \text{Rg}\,(\mathbf{A}^*) = 3\,, \quad \text{Rg}\,(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = \text{Rg}\,(\mathbf{A}^* \mid \mathbf{c}^*) = 3$$

Somit ist $\text{Rg}\,(\mathbf{A}) = \text{Rg}\,(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = r = 3$ und wegen $r = n = 3$ gibt es genau *eine* Lösung, die sich aus dem *gestaffelten* System $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ leicht berechnen lässt (von unten nach oben):

$$\begin{aligned} u + 3v + 2w &= 19 \quad \Rightarrow \quad u + 15 + 2 = u + 17 = 19 \quad \Rightarrow \quad u = 2 \\ 8v + w &= 41 \quad \Rightarrow \quad 8v + 1 = 41 \quad \Rightarrow \quad 8v = 40 \quad \Rightarrow \quad v = 5 \\ 2{,}5\,w &= 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad w = 1 \end{aligned}$$

Lösung: $u = 2, \; v = 5, \; w = 1$

c) Zunächst wird die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A} \mid \mathbf{c})$ durch elementare Umformungen in den Zeilen in die *Trapezform* gebracht:

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = \left(\underbrace{\begin{array}{rrrr} 1 & 5 & -1 & -9 \\ -6 & 6 & -9 & 15 \end{array}}_{\mathbf{A}} \left| \underbrace{\begin{array}{r} -1 \\ -21 \end{array}}_{\mathbf{c}} \right. \right) \begin{array}{l} \\ :3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & -1 & -9 & -1 \\ -2 & 2 & -3 & 5 & -7 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ +2Z_1 \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\underbrace{\begin{array}{rrrr} 1 & 5 & -1 & -9 \\ 0 & 12 & -5 & -13 \end{array}}_{\mathbf{A}^*} \left| \underbrace{\begin{array}{r} -1 \\ -9 \end{array}}_{\mathbf{c}^*} \right. \right) = (\mathbf{A}^* \mid \mathbf{c}^*)$$

$$\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}^*) = 2, \quad \operatorname{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}^* \mid \mathbf{c}^*) = 2$$

Das inhomogene LGS ist *lösbar*, da $\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) = r = 2$ ist. Es gibt *unendlich* viele Lösungen mit $n - r = 4 - 2 = 2$ Parametern. Wir lösen jetzt das *gestaffelte* System $\mathbf{A}^* \mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ schrittweise von unten nach oben und wählen dabei x_3 und x_4 als Parameter ($x_3 = \lambda,\ x_4 = \mu$ mit $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$):

$$\text{(I)} \quad x_1 + 5x_2 - x_3 - 9x_4 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_1 + \frac{5}{12}(5\lambda + 13\mu - 9) - \lambda - 9\mu = -1 \quad \Rightarrow$$

$$x_1 + \frac{25}{12}\lambda + \frac{65}{12}\mu - \frac{45}{12} - \frac{12}{12}\lambda - \frac{108}{12}\mu = -\frac{12}{12} \quad \Rightarrow \quad x_1 + \frac{13}{12}\lambda - \frac{43}{12}\mu - \frac{45}{12} = -\frac{12}{12} \quad \Rightarrow$$

$$x_1 = -\frac{13}{12}\lambda + \frac{43}{12}\mu + \frac{33}{12} = \frac{1}{12}(-13\lambda + 43\mu + 33)$$

$$\text{(II)} \quad 12x_2 - 5\underbrace{x_3}_{\lambda} - 13\underbrace{x_4}_{\mu} = -9 \quad \Rightarrow \quad 12x_2 - 5\lambda - 13\mu = -9 \quad \Rightarrow \quad 12x_2 = 5\lambda + 13\mu - 9 \quad \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{1}{12}(5\lambda + 13\mu - 9)$$

Lösung: $x_1 = \frac{1}{12}(-13\lambda + 43\mu + 33),\ x_2 = \frac{1}{12}(5\lambda + 13\mu - 9),\ x_3 = \lambda,\ x_4 = \mu$ (mit $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$)

Kontrolle (Einsetzen der gefundenen von zwei unabhängigen Parametern abhängigen Werte in die beiden Ausgangsgleichungen):

$$\text{(I)} \quad x_1 + 5x_2 - x_3 - 9x_4 = \frac{1}{12}(-13\lambda + 43\mu + 33) + \frac{5}{12}(5\lambda + 13\mu - 9) - \lambda - 9\mu =$$

$$= -\frac{13}{12}\lambda + \frac{43}{12}\mu + \frac{33}{12} + \frac{25}{12}\lambda + \frac{65}{12}\mu - \frac{45}{12} - \lambda - 9\mu = \frac{12}{12}\lambda - \lambda + \frac{108}{12}\mu - 9\mu - \frac{12}{12} =$$

$$= \lambda - \lambda + 9\mu - 9\mu - 1 = -1$$

$$\text{(II)} \quad -6x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 15x_4 = -\frac{6}{12}(-13\lambda + 43\mu + 33) + \frac{6}{12}(5\lambda + 13\mu - 9) - 9\lambda + 15\mu =$$

$$= -\frac{1}{2}(-13\lambda + 43\mu + 33) + \frac{1}{2}(5\lambda + 13\mu - 9) - 9\lambda + 15\mu =$$

$$= \frac{13}{2}\lambda - \frac{43}{2}\mu - \frac{33}{2} + \frac{5}{2}\lambda + \frac{13}{2}\mu - \frac{9}{2} - 9\lambda + 15\mu = \frac{18}{2}\lambda - 9\lambda - \frac{30}{2}\mu + 15\mu - \frac{42}{2} =$$

$$= 9\lambda - 9\lambda - 15\mu + 15\mu - 21 = -21$$

J53

Der in Bild J-4 skizzierte verzweigte Stromkreis mit den Ohmschen Widerständen $R_1 = 5\,\Omega$, $R_2 = 10\,\Omega$ und $R_3 = 20\,\Omega$ wird durch eine Gleichspannungsquelle mit der Quellenspannung $U_q = 70\,\text{V}$ gespeist. Die noch unbekannten *Zweigströme* I_1, I_2 und I_3 genügen dem folgenden linearen Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -R_1 & -R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -U_q \\ U_q \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie diese Ströme mit Hilfe der *Cramerschen Regel.*

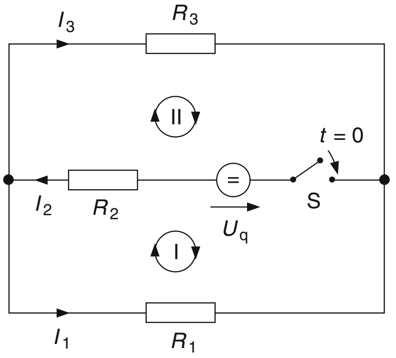


Bild J-4

Einsetzen der vorgegebenen Werte für die Teilwiderstände und die Spannung führen zu dem folgenden *inhomogenen* LGS (wir rechnen zunächst *ohne* Einheiten, die Teilströme sind dann in der Einheit *Ampère* anzugeben):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -5 & -10 & 0 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -70 \\ 70 \end{pmatrix}}_{\mathbf{c}} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A\,I} = \mathbf{c}$$

Für die *Cramersche Regel* benötigen wir die Determinante $D = \det \mathbf{A}$ sowie die drei „Hilfsdeterminanten" D_1, D_2 und D_3 (in D wird der Reihe die 1., 2. bzw. 3. Spalte durch den Spaltenvektor $\mathbf{c}$ ersetzt):

$$\underbrace{\left|\begin{array}{rrr} -1 & 1 & -1 \\ -5 & -10 & 0 \\ 0 & 10 & 20 \end{array}\right|}_{D\,=\,\det \mathbf{A}} \begin{array}{rr} -1 & 1 \\ -5 & -10 \\ 0 & 10 \end{array} \quad \Rightarrow \quad D = 200 + 0 + 50 - 0 - 0 + 100 = 350$$

$$\underbrace{\left|\begin{array}{rrr} 0 & 1 & -1 \\ -70 & -10 & 0 \\ 70 & 10 & 20 \end{array}\right|}_{D_1} \begin{array}{rr} 0 & 1 \\ -70 & -10 \\ 70 & 10 \end{array} \quad \Rightarrow \quad D_1 = 0 + 0 + 700 - 700 - 0 + 1400 = 1400$$

$$\underbrace{\left|\begin{array}{rrr} -1 & 0 & -1 \\ -5 & -70 & 0 \\ 0 & 70 & 20 \end{array}\right|}_{D_2} \begin{array}{rr} -1 & 0 \\ -5 & -70 \\ 0 & 70 \end{array} \quad \Rightarrow \quad D_2 = 1400 + 0 + 350 - 0 - 0 - 0 = 1750$$

$$\underbrace{\left|\begin{array}{rrr} -1 & 1 & 0 \\ -5 & -10 & -70 \\ 0 & 10 & 70 \end{array}\right|}_{D_3} \begin{array}{rr} -1 & 1 \\ -5 & -10 \\ 0 & 10 \end{array} \quad \Rightarrow \quad D_3 = 700 + 0 + 0 - 0 - 700 + 350 = 350$$

Damit erhalten wir folgende Werte für die drei *Teilströme* I_1, I_2 und I_3 (in Ampère):

$$I_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1400}{350} = 4, \quad I_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1750}{350} = 5, \quad I_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{350}{350} = 1$$

Lösung: $I_1 = 4\,\text{A}, \quad I_2 = 5\,\text{A}, \quad I_3 = 1\,\text{A}$

J54

Das in Bild J-5 skizzierte *Rollensystem* enthält in symmetrischer Anordnung drei *gleiche* Massen $m_1 = m_2 = m_3 = m$, die durch ein über Rollen führendes Seil miteinander verbunden sind. Die noch unbekannten Beschleunigungen a_1, a_2 und a_3 dieser Massen sowie die im Seil wirkende konstante Seilkraft F_S lassen sich mit Hilfe des *Gaußschen Algorithmus* aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ F_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\,g \\ m\,g \\ 0 \end{pmatrix}$$

berechnen (wegen der Symmetrie gilt $a_1 = a_2$).

Welchen Wert besitzen diese Größen?

Anmerkung: Rolle und Seil werden als *masselos* angenommen, Reibungskräfte *vernachlässigt* (g: Erdbeschleunigung).

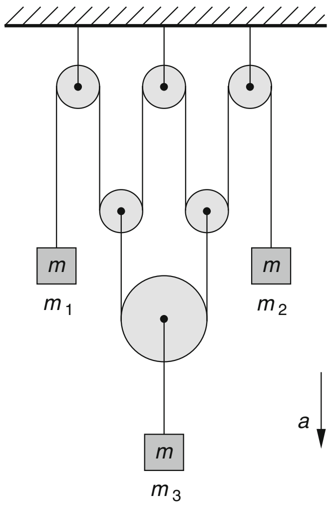


Bild J-5

Wir bringen zunächst die erweiterte Koeffizientenmatrix durch elementare Zeilenumformungen auf *Trapezform*:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 0 & 1 & m\,g \\ 0 & m & 4 & m\,g \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \updownarrow \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & m & 4 & m\,g \\ m & 0 & 1 & m\,g \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -m \cdot Z_1 \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & m & 4 & m\,g \\ 0 & -2m & 1 & m\,g \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +2Z_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & m & 4 & m\,g \\ 0 & 0 & 9 & 3\,m\,g \end{array}\right)$$

Da es *keine* Nullzeilen gibt, haben Koeffizientenmatrix und erweiterte Koeffizientenmatrix den *gleichen* Rang $r = 3$. Das quadratische LGS ist somit *eindeutig* lösbar. Die Lösung erhalten wir wie folgt aus dem *gestaffelten* System (von unten nach oben gelöst):

$$a_1 + 2a_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 - \frac{2}{3}\,g = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{2}{3}\,g$$

$$m\,a_3 + 4F_S = m\,g \quad \Rightarrow \quad m\,a_3 + \frac{4}{3}\,m\,g = m\,g \quad \Rightarrow \quad m\,a_3 = -\frac{1}{3}\,m\,g \quad \Rightarrow \quad a_3 = -\frac{1}{3}\,g$$

$$9F_S = 3\,m\,g \quad \Rightarrow \quad F_S = \frac{1}{3}\,m\,g$$

Lösung: $a_1 = a_2 = \frac{2}{3}\,g, \quad a_3 = -\frac{1}{3}\,g, \quad F_S = \frac{1}{3}\,m\,g$

Physikalische Deutung: Die beiden äußeren Massen bewegen sich nach *unten*, die mittlere Masse mit *halb* so großer Beschleunigung nach *oben*.

3 Eigenwertprobleme

Hinweise

Lehrbuch: Band 2, Kapitel I.7

Formelsammlung: Kapitel VII.5

J55

Bestimmen Sie die *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* der folgenden 2-reihigen Matrizen:

$$\text{a)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie ferner aus den Eigenwerten *Spur* und *Determinante* der Matrix (mit Kontrollrechnung).

---

a) Das Eigenwertproblem lautet:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 8 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung der *Eigenwerte* aus der charakteristischen Gleichung $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 8 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 0 = (1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

Wir berechnen jetzt die zugehörigen (normierten) *Eigenvektoren*.

$$\boxed{\lambda_1 = 1} \qquad (\mathbf{A} - 1\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix dieses homogenen LGS enthält *eine* Nullzeile und besitzt daher den Rang $r = 1$. Es gibt somit wegen $n - r = 2 - 1 = 1$ *unendlich* viele Lösungen mit einem Parameter. Das *gestaffelte* LGS besteht aus *einer* Gleichung mit den beiden Unbekannten x_1 und x_2, von denen wir eine *frei wählen* dürfen (wir entscheiden uns für x_1 und setzen $x_1 = \alpha$ mit $\alpha \neq 0$):

$$8x_1 + x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 8\alpha + x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -8\alpha$$

Somit gilt $x_1 = \alpha$ und $x_2 = -8\alpha$. Diesen Eigenvektor *normieren* wir (für $\alpha > 0$):

$$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -8\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{x_1}| = |\alpha| \cdot \sqrt{1^2 + (-8)^2} = |\alpha| \cdot \sqrt{65} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{65}}$$

Normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$: $\tilde{\mathbf{x}}_\mathbf{1} = \dfrac{1}{\sqrt{65}} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\lambda_2 = 2} \qquad (\mathbf{A} - 2\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} -x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \\ 8x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{array}$$

Dieses *homogene* LGS lässt sich auf die *erste* Gleichung reduzieren (die beiden Gleichungen sind *proportional*), in der die Unbekannte x_2 jeden reellen Wert annehmen kann ($0 \cdot x_2 = 0$ für $x_2 \in \mathbb{R}$). Damit erhalten wir folgende vom Parameter $x_2 = \beta$ abhängige Lösung:

$$-x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -x_1 + \underbrace{0 \cdot \beta}_{0} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \beta \quad (\text{mit } \beta \neq 0)$$

Normierung des Eigenvektors (für $\beta > 0$):

$$\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{x_2}| = |\beta| \cdot \sqrt{0^2 + 1^2} = |\beta| = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = 1$$

Normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$: $\tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Eigenvektoren $\mathbf{x_1}$ und $\mathbf{x_2}$ sind *linear unabhängig*, da die Determinante der aus ihnen gebildeten Matrix *nicht* verschwindet:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ -8\alpha & \beta \end{vmatrix} = \alpha\beta - 0 = \alpha\beta \neq 0 \quad (\text{da } \alpha \neq 0 \text{ und } \beta \neq 0)$$

Spur und Determinante der Matrix A

Die *Spur* ist die *Summe*, die *Determinante* das *Produkt* der Eigenwerte:

$$\operatorname{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 = 1 + 2 = 3; \quad \textit{Kontrolle}: \operatorname{Sp}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} = 1 + 2 = 3$$

$$\det \mathbf{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 \cdot 2 = 2; \quad \textit{Kontrolle}: \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$$

b) Das Eigenwertproblem lautet:

$$(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0{,}5 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung der *Eigenwerte* aus der charakteristischen Gleichung $\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) = 0$:

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0{,}5 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm \mathrm{j}$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren

$$\boxed{\lambda_1 = 1 + \mathrm{j}} \qquad (\mathbf{B} - (1+\mathrm{j})\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -\mathrm{j} & 0{,}5 \\ -2 & -\mathrm{j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses *homogene* LGS besteht aus zwei *proportionalen* Gleichungen (multipliziert man die erste Gleichung mit $-2\mathrm{j}$, so erhält man die zweite Gleichung):

$$\text{(I)} \quad -\mathrm{j}x_1 + 0{,}5x_2 = 0 \,|\cdot(-2\mathrm{j}) \quad \Rightarrow \quad -2x_1 - \mathrm{j}x_2 = 0$$

$$\text{(II)} \quad -2x_1 - \mathrm{j}x_2 = 0$$

Das System lässt sich daher auf Gleichung (II) reduzieren, in der wir über x_1 oder x_2 *frei verfügen* dürfen (wir wählen x_2 als Parameter und setzen $x_2 = 2\alpha$ mit $\alpha \neq 0$):

$$\text{(II)} \quad -2x_1 - \mathrm{j}x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x_1 - \mathrm{j}2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\mathrm{j}\alpha$$

Der *Eigenvektor* $\mathbf{x_1}$ mit den Komponenten $x_1 = -\mathrm{j}\alpha$ und $x_2 = 2\alpha$ wird noch *normiert* (für $\alpha > 0$). Aus der Normierungsbedingung: $\mathbf{x_1} \cdot \mathbf{x_1^*} = 1$ erhalten wir mit

$$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} -\mathrm{j}\alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -\mathrm{j} \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x_1^*} = \alpha \begin{pmatrix} \mathrm{j} \\ 2 \end{pmatrix}$$

das folgende Ergebnis:

$$\mathbf{x_1} \cdot \mathbf{x_1^*} = \alpha \begin{pmatrix} -\mathrm{j} \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \alpha \begin{pmatrix} \mathrm{j} \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha^2(-\mathrm{j}^2 + 2^2) = \alpha^2(1+4) = 5\alpha^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1 + \mathrm{j}$: $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\mathrm{j} \\ 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda_2 = 1 - \mathrm{j}}$ $\quad (\mathbf{B} - (1 - \mathrm{j})\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oder $\begin{pmatrix} \mathrm{j} & 0{,}5 \\ -2 & \mathrm{j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wiederum erhalten wir zwei *proportionale* Gleichungen:

(I) $\quad \mathrm{j}x_1 + 0{,}5x_2 = 0 \,|\cdot 2\mathrm{j} \quad \Rightarrow \quad -2x_1 + \mathrm{j}x_2 = 0$

(II) $\quad -2x_1 + \mathrm{j}x_2 = 0$

Das LGS lässt sich daher auf Gleichung (II) reduzieren, wobei wir über eine der beiden Unbekannten *frei verfügen* dürfen. Wir entscheiden uns für x_2 und setzen $x_2 = 2\beta$ mit $\beta \neq 0$:

(II) $\quad -2x_1 + \mathrm{j}x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x_1 + \mathrm{j}2\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \mathrm{j}\beta$

Der *Eigenvektor* $\mathbf{x}_2$ mit den Komponenten $x_1 = \mathrm{j}\beta$ und $x_2 = 2\beta$ soll noch *normiert* werden (für $\beta > 0$):

$$\mathbf{x_2} \cdot \mathbf{x_2^*} = \begin{pmatrix} \mathrm{j}\beta \\ 2\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\mathrm{j}\beta \\ 2\beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} \mathrm{j} \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} -\mathrm{j} \\ 2 \end{pmatrix} = \beta^2 \begin{pmatrix} \mathrm{j} \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\mathrm{j} \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \beta^2(-\mathrm{j}^2 + 2^2) = \beta^2(1 + 4) = 5\beta^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 1 - \mathrm{j}$: $\tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \mathrm{j} \\ 2 \end{pmatrix}$

Die (parameterabhängigen) Eigenvektoren $\mathbf{x_1}$ und $\mathbf{x_2}$ sind *linear unabhängig*, denn die Determinante der aus ihnen gebildeten Matrix ist stets von Null *verschieden*:

$$\begin{vmatrix} -\mathrm{j}\alpha & \mathrm{j}\beta \\ 2\alpha & 2\beta \end{vmatrix} = -\mathrm{j}2\alpha\beta - \mathrm{j}2\alpha\beta = -\mathrm{j}4\alpha\beta \neq 0 \qquad (\text{da } \alpha \neq 0 \text{ und } \beta \neq 0)$$

Spur und Determinante der Matrix B

Die *Spur* ist die *Summe*, die *Determinante* das *Produkt* der Eigenwerte:

$\mathrm{Sp}\,(\mathbf{B}) = \lambda_1 + \lambda_2 = (1 + \mathrm{j}) + (1 - \mathrm{j}) = 2$

$\det \mathbf{B} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = (1 + \mathrm{j})(1 - \mathrm{j}) = 1 - \mathrm{j}^2 = 1 + 1 = 2$

Kontrolle: $\mathrm{Sp}\,(\mathbf{B}) = b_{11} + b_{22} = 1 + 1 = 2$; $\quad \det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$

J56

Die *Spiegelung* eines Punktes $P = (x_1;\, x_2)$ an der (vertikalen) x_2-Achse führt zum Bildpunkt $Q = (y_1;\, y_2)$ und lässt sich durch die *Abbildungsmatrix* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ beschreiben. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$$

$\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ sind dabei die *Ortsvektoren* von P und Q. Bestimmen Sie diejenigen Punkte, deren Ortsvektoren bei der Abbildung in ein *Vielfaches* von sich selbst übergehen, d. h. für die $\mathbf{y} = \lambda\,\mathbf{x}$ mit $\lambda \neq 0$ gilt.

Hinweis: Die Lösung dieser Aufgabe führt auf ein *Eigenwertproblem*. Versuchen Sie eine *geometrische Deutung* der Eigenwerte und ihrer zugehörigen Eigenvektoren.

Die gesuchten *Ortsvektoren* $\mathbf{x}$ müssen die Bedingungen $\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ und $\mathbf{y} = \lambda\,\mathbf{x}$ erfüllen (mit $\lambda \in \mathbb{R}$). Dies führt zu dem *Eigenwertproblem*

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} - \lambda\,\mathbf{x} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} - \lambda\,\mathbf{E}\,\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

($\mathbf{E}$: 2-reihige Einheitsmatrix). Die Komponenten x_1 und x_2 der Ortsvektoren $\mathbf{x}$ genügen somit dem folgenden homogenen LGS:

$$(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die *Eigenwerte* sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung $\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = 0$:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda) - 0 = (-1-\lambda)(1-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren

$$\boxed{\lambda_1 = -1} \qquad (\mathbf{A} + 1\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses *homogene* LGS wird wie folgt gelöst:

$$\left.\begin{aligned} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 &= 0 \\ 0 \cdot x_1 + \quad 2x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \alpha, \quad x_2 = 0 \qquad (\text{mit } \alpha \neq 0)$$

Eigenvektor $\mathbf{x_1}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$: $\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\,\mathbf{e}_x$ (mit $\alpha \neq 0$)

$$\boxed{\lambda_2 = 1} \qquad (\mathbf{A} - 1\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir lösen dieses *homogene* LGS wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + 0 \cdot x_2 &= 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \beta, \quad x_1 = 0 \qquad (\text{mit } \beta \neq 0)$$

Eigenvektor $\mathbf{x_2}$ zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$: $\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\,\mathbf{e}_y$ (mit $\beta \neq 0$)

Geometrische Deutung

1. Die zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$ gehörenden Eigenvektoren $\mathbf{x_1} = \alpha\,\mathbf{e}_x$ beschreiben die Ortsvektoren der auf der (horizontalen) x_1-Achse gelegenen Punkte $P = (\alpha;\,0)$, die bei der Spiegelung an der vertikalen Achse in ihr *Spiegelbild* $Q = (-\alpha;\,0)$ übergehen (*Richtungsumkehr* des Ortsvektors, siehe Bild J-6).
2. Die zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ gehörenden Eigenvektoren $\mathbf{x_2} = \beta\,\mathbf{e}_y$ beschreiben die Ortsvektoren der auf der (vertikalen) x_2-Achse gelegenen Punkte $P = (0;\,\beta)$, deren Lage sich bei der Spiegelung an der vertikalen Achse *nicht* verändert (der Ortsvektor bleibt *erhalten*, siehe Bild J-7).

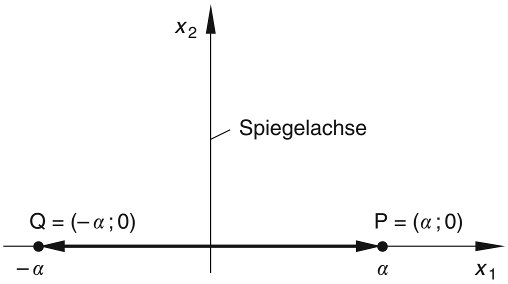


Bild J-6

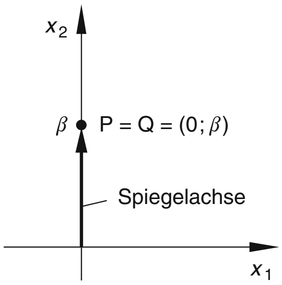


Bild J-7

J57

Berechnen Sie jeweils die *Eigenwerte* der Matrix $\mathbf{A}$ und daraus *Spur* und *Determinante* der Matrix (mit Kontrolle):

$$\text{a)}\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

---

a) Die *Eigenwerte* der Matrix $\mathbf{A}$ sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ (die Berechnung der 3-reihigen Determinanten erfolgt nach der *Regel von Sarrus*):

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \beta & 0 \\ \beta & \alpha-\lambda & \beta \\ 0 & \beta & \alpha-\lambda \end{vmatrix}}_{\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})} \begin{matrix} \alpha-\lambda & \beta \\ \beta & \alpha-\lambda \\ 0 & \beta \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = (\alpha-\lambda)^3 + 0 + 0 - 0 - \beta^2(\alpha-\lambda) - \beta^2(\alpha-\lambda) = (\alpha-\lambda)^3 - 2\beta^2(\alpha-\lambda) =$$

$$= (\alpha-\lambda)\left[(\alpha-\lambda)^2 - 2\beta^2\right]$$

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = 0 \quad\Rightarrow\quad (\alpha-\lambda)\left[(\alpha-\lambda)^2 - 2\beta^2\right] = 0 \begin{array}{l} \nearrow\ \alpha-\lambda = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1 = \alpha \\ \searrow\ (\alpha-\lambda)^2 - 2\beta^2 = 0 \quad\Rightarrow \end{array}$$

$$(\alpha-\lambda)^2 - 2\beta^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad (\alpha-\lambda)^2 = 2\beta^2 \quad\Rightarrow\quad \alpha-\lambda = \pm\sqrt{2}\,\beta \quad\Rightarrow\quad \lambda_{2/3} = \alpha \pm \sqrt{2}\,\beta$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = \alpha,\quad \lambda_2 = \alpha + \sqrt{2}\,\beta,\quad \lambda_3 = \alpha - \sqrt{2}\,\beta$

Spur und Determinante der Matrix A

$$\operatorname{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \alpha + (\alpha + \sqrt{2}\,\beta) + (\alpha - \sqrt{2}\,\beta) = \alpha + \alpha + \sqrt{2}\,\beta + \alpha - \sqrt{2}\,\beta = 3\alpha$$

Kontrolle: $\operatorname{Sp}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \alpha + \alpha + \alpha = 3\alpha$

$$\det\mathbf{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \alpha\,\underbrace{(\alpha + \sqrt{2}\,\beta)\,(\alpha - \sqrt{2}\,\beta)}_{\text{3. Binom}} = \alpha\,(\alpha^2 - 2\beta^2)$$

Kontrolle (Regel von Sarrus):

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{vmatrix}}_{\det\mathbf{A}} \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \\ 0 & \beta \end{matrix} \quad\Rightarrow\quad \det\mathbf{A} = \alpha^3 + 0 + 0 - 0 - \alpha\beta^2 - \alpha\beta^2 = \alpha^3 - 2\alpha\beta^2 = \alpha\,(\alpha^2 - 2\beta^2)$$

b) Berechnung der *Eigenwerte* aus der charakteristischen Gleichung $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}}_{\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})} \begin{matrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \\ 0 & 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = (3-\lambda)\,(6-\lambda)\,(2-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 0 - 4\,(2-\lambda) =$$

$$= (3-\lambda)\,(6-\lambda)\,(2-\lambda) - 4\,(2-\lambda) = (2-\lambda)\left[(3-\lambda)\,(6-\lambda) - 4\right] =$$

$$= (2-\lambda)\,(18 - 3\lambda - 6\lambda + \lambda^2 - 4) = (2-\lambda)\,(\lambda^2 - 9\lambda + 14)$$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad \Rightarrow \quad (2 - \lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 14) = 0 \begin{cases} 2 - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2 \\ \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0 \quad \Rightarrow \end{cases}$$

$$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{2/3} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 14} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{9}{2} \pm \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 7, \quad \lambda_3 = 2$$

Eigenwerte (neu nummeriert): $\lambda_{1/2} = 2, \quad \lambda_3 = 7$

Spur und Determinante der Matrix A

$$\text{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + 2 + 7 = 11$$

Kontrolle: $\text{Sp}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 3 + 6 + 2 = 11$

$$\det \mathbf{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$$

Kontrolle (Regel von Sarrus):

$$\underbrace{\left|\begin{array}{ccc} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right|}_{\det \mathbf{A}} \begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = 36 + 0 + 0 - 0 - 0 - 8 = 28$$

J58

Normalschwingungen eines linearen Moleküls vom Typ XY_2

Ein lineares symmetrisches 3-atomiges Molekül vom Typ XY_2 wie CO_2 oder NO_2 kann modellmäßig als ein System aus drei linear angeordneten Massenpunkten verstanden werden, die durch elastische Federn gekoppelt sind (Bild J-8).

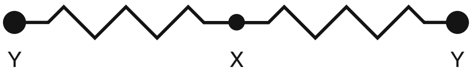


Bild J-8

Ein solches System ist zu *harmonischen Schwingungen* fähig, wobei in dieser Aufgabe nur die längs der Systemachse (Molekülachse) möglichen sog. *Normalschwingungen* untersucht werden sollen. Unter einer *Normalschwingung* eines Systems gekoppelter Massenpunkte versteht man einen Bewegungsablauf, bei dem *alle* Massen (Atome) mit der gleichen Kreisfrequenz ω um ihre Gleichgewichtslagen schwingen. Die Schwingungen unterscheiden sich lediglich in den Phasenwinkeln und den Amplituden und lassen sich mathematisch durch ein System aus drei *gekoppelten* linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschreiben. Die weitere Behandlung führt schließlich auf das folgende *Eigenwertproblem*:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \omega_a^2 & 0 & -\omega_a^2 \\ 0 & \omega_a^2 & -\omega_a^2 \\ -\omega_b^2 & -\omega_b^2 & 2\omega_b^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

Dabei sind A und B die Schwingungsamplituden der beiden äußeren Massen (Atome Y) und C die Amplitude der *Zentralmasse* (Atom X). Die in der Koeffizientematrix $\mathbf{K}$ auftretenden Größen ω_a^2 und ω_b^2 sind (positive) Konstanten, die von den Massen und der Federkonstanten der beiden Kopplungsfedern abhängen.

Bestimmen Sie zunächst die *Eigenwerte* λ der Matrix $\mathbf{K}$ und daraus die *Kreisfrequenzen* ω der Normalschwingungen, wobei $\omega = \sqrt{\lambda}$ gilt und nur *positive* Werte physikalisch sinnvoll sind (warum?).

Die *Eigenwerte* und damit auch die *Eigenkreisfrequenzen* werden aus der charakteristischen Gleichung

$$\det(\mathbf{K} - \lambda\,\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} \omega_a^2 - \lambda & 0 & -\omega_a^2 \\ 0 & \omega_a^2 - \lambda & -\omega_a^2 \\ -\omega_b^2 & -\omega_b^2 & 2\,\omega_b^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

bestimmt. Zunächst müssen wir die Determinante berechnen (*Regel von Sarrus*):

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} \omega_a^2 - \lambda & 0 & -\omega_a^2 & \omega_a^2 - \lambda & 0 \\ 0 & \omega_a^2 - \lambda & -\omega_a^2 & 0 & \omega_a^2 - \lambda \\ -\omega_b^2 & -\omega_b^2 & 2\,\omega_b^2 - \lambda & -\omega_b^2 & -\omega_b^2 \end{array}\right. \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{K} - \lambda\,\mathbf{E}) &= (\omega_a^2 - \lambda)^2\,(2\,\omega_b^2 - \lambda) + 0 + 0 - \omega_a^2\omega_b^2(\omega_a^2 - \lambda) - \omega_a^2\omega_b^2(\omega_a^2 - \lambda) - 0 = \\ &= (\omega_a^2 - \lambda)^2\,(2\,\omega_b^2 - \lambda) - 2\,\omega_a^2\omega_b^2(\omega_a^2 - \lambda) = \\ &= (\omega_a^2 - \lambda)\left[(\omega_a^2 - \lambda)\,(2\,\omega_b^2 - \lambda) - 2\,\omega_a^2\omega_b^2\right] = \\ &= (\omega_a^2 - \lambda)\,(2\,\omega_a^2\omega_b^2 - \omega_a^2\lambda - 2\,\omega_b^2\lambda + \lambda^2 - 2\,\omega_a^2\omega_b^2) = \\ &= (\omega_a^2 - \lambda)\,(\lambda^2 - \omega_a^2\lambda - 2\,\omega_b^2\lambda) = (\omega_a^2 - \lambda)\,(\lambda - \omega_a^2 - 2\,\omega_b^2)\,\lambda \end{aligned}$$

Damit erhalten wir folgende *Eigenwerte*:

$$\det(\mathbf{K} - \lambda\,\mathbf{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\omega_a^2 - \lambda)\,\lambda\,(\lambda - \omega_a^2 - 2\,\omega_b^2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = \omega_a^2, \quad \lambda_2 = \omega_a^2 + 2\,\omega_b^2, \quad \lambda_3 = 0$$

Daraus ergeben sich die folgenden *Kreisfrequenzen* für die *Normalschwingungen* $(\omega = \sqrt{\lambda} > 0)$:

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\omega_a^2} = \omega_a, \quad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\omega_a^2 + 2\,\omega_b^2}$$

($\lambda_3 = 0$ führt zu $\omega_3 = 0$ und scheidet somit aus, physikalische Interpretation dieses Sonderfalls am Ende dieser Aufgabe.)

Berechnung der Eigenvektoren (Schwingungsamplituden)

$$\boxed{\lambda_1 = \omega_a^2} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{K} - \omega_a^2\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\omega_a^2 \\ 0 & 0 & -\omega_a^2 \\ -\omega_b^2 & -\omega_b^2 & 2\,\omega_b^2 - \omega_a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{B} = \mathbf{K} - \omega_a^2\,\mathbf{E}$ dieses *homogenen* LGS bringen wir zunächst mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen auf *Trapezform*:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\omega_a^2 \\ 0 & 0 & -\omega_a^2 \\ -\omega_b^2 & -\omega_b^2 & 2\,\omega_b^2 - \omega_a^2 \end{pmatrix} \updownarrow \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -\omega_b^2 & -\omega_b^2 & 2\,\omega_b^2 - \omega_a^2 \\ 0 & 0 & -\omega_a^2 \\ 0 & 0 & -\omega_a^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -Z_2 \\ \\ -Z_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -\omega_b^2 & -\omega_b^2 & 2\,\omega_b^2 \\ 0 & 0 & -\omega_a^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} :\,(-\omega_b^2) \\ :\,(-\omega_a^2) \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ = \mathbf{B}^* \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{matrix}$$

$$\operatorname{Rg}(\mathbf{B}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{B}^*) = r = 2 \quad \Rightarrow \quad \textit{Anzahl}\ \text{der Parameter:}\ n - r = 3 - 2 = 1$$

Es gibt somit *unendlich* viele Lösungen, die noch von *einem* Parameter abhängen. Das *gestaffelte* System $\mathbf{B}^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$ liefert dann die folgenden Lösungen (als Parameter wählen wir $B = \alpha$ mit $\alpha \neq 0$):

$$A + B - 2C = 0 \quad\Rightarrow\quad A + \alpha - 0 = 0 \quad\Rightarrow\quad A = -\alpha$$

$$C = 0$$

Eigenvektoren zum *Eigenwert* $\lambda_1 = \omega_1^2$: $\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (mit $\alpha \neq 0$)

$$\boxed{\lambda_2 = \omega_a^2 + 2\omega_b^2} \quad\Rightarrow\quad (\mathbf{K} - (\omega_a^2 + 2\omega_b^2)\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -2\omega_b^2 & 0 & -\omega_a^2 \\ 0 & -2\omega_b^2 & -\omega_a^2 \\ -\omega_b^2 & -\omega_b^2 & -\omega_a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{B} = \mathbf{K} - (\omega_a^2 + 2\omega_b^2)\,\mathbf{E}$ dieses *homogenen* LGS bringen wir mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen auf *Trapezform*:

$$\begin{pmatrix} -2\omega_b^2 & 0 & -\omega_a^2 \\ 0 & -2\omega_b^2 & -\omega_a^2 \\ -\omega_b^2 & -\omega_b^2 & -\omega_a^2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2Z_3 \\ \\ \\ \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 0 & 2\omega_b^2 & \omega_a^2 \\ 0 & -2\omega_b^2 & -\omega_a^2 \\ -\omega_b^2 & -\omega_b^2 & -\omega_a^2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} +Z_2 \\ \\ \cdot(-1) \end{array} \quad\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega_b^2 & -\omega_a^2 \\ \omega_b^2 & \omega_b^2 & \omega_a^2 \end{pmatrix} \updownarrow \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} \omega_b^2 & \omega_b^2 & \omega_a^2 \\ 0 & -2\omega_b^2 & -\omega_a^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ = \mathbf{B}^* \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{array}$$

$$\operatorname{Rg}(\mathbf{B}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{B}^*) = r = 2 \quad\Rightarrow\quad \text{Anzahl der Parameter: } n - r = 3 - 2 = 1$$

Es gibt wiederum *unendlich* viele Lösungen, die noch von *einem* Parameter abhängen. Sie werden wie folgt aus dem *gestaffelten* System $\mathbf{B}^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bestimmt (Parameter ist die Unbekannte $B = \beta$ mit $\beta \neq 0$):

$$\omega_b^2 A + \omega_b^2 B + \omega_a^2 C = 0 \quad\Rightarrow\quad \omega_b^2 A + \omega_b^2 \beta + \omega_a^2 \cdot \left(-\frac{2\omega_b^2}{\omega_a^2}\,\beta \right) = \omega_b^2 A + \omega_b^2 \beta - 2\omega_b^2 \beta = 0$$

$$\Rightarrow\quad \omega_b^2 A - \omega_b^2 \beta = 0 \quad\Rightarrow\quad A = \beta$$

$$-2\omega_b^2 B - \omega_a^2 C = 0 \quad\Rightarrow\quad -2\omega_b^2 \beta - \omega_a^2 C = 0 \quad\Rightarrow\quad -\omega_a^2 C = 2\omega_b^2 \beta \quad\Rightarrow\quad C = -\frac{2\omega_b^2}{\omega_a^2}\,\beta$$

Eigenvektoren zum *Eigenwert* $\lambda_2 = \omega_a^2 + 2\omega_b^2$: $\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ -(2\omega_b^2/\omega_a^2)\,\beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2\omega_b^2/\omega_a^2 \end{pmatrix}$ (mit $\beta \neq 0$)

$$\boxed{\lambda_3 = 0} \quad\Rightarrow\quad (\mathbf{K} - 0\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \omega_a^2 & 0 & -\omega_a^2 \\ 0 & \omega_a^2 & -\omega_a^2 \\ -\omega_b^2 & -\omega_b^2 & 2\omega_b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bevor wir dieses *homogene* LGS lösen, bringen wir die Koeffizientenmatrix $\mathbf{K} - 0\,\mathbf{E} = \mathbf{K}$ auf *Trapezform*:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \omega_a^2 & 0 & -\omega_a^2 \\ 0 & \omega_a^2 & -\omega_a^2 \\ -\omega_b^2 & -\omega_b^2 & 2\omega_b^2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} :\omega_a^2 \\ :\omega_a^2 \\ :(-\omega_b^2) \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -Z_1 \end{array} \quad\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -Z_2 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ = \mathbf{K}^* \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{array}$$

$$\operatorname{Rg}(\mathbf{K}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{K}^*) = r = 2 \quad\Rightarrow\quad \text{Anzahl der Parameter: } n - r = 3 - 2 = 1$$

Wir lösen jetzt das *gestaffelte* System $\mathbf{K}^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$, wobei wir die Unbekannte C als Parameter wählen ($C = \gamma$ mit $\gamma \neq 0$):

$$A - C = 0 \quad \Rightarrow \quad A - \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \gamma$$

$$B - C = 0 \quad \Rightarrow \quad B - \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \gamma$$

Die zugehörigen *Eigenvektoren* lauten: $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (mit $\gamma \neq 0$)

Physikalische Deutung der Ergebnisse

1. Normalschwingung mit der Kreisfrequenz $\omega_1 = \omega_a$

Die Zentralmasse M ist in *Ruhe*, die beiden äußeren Massen schwingen mit *gleicher* Amplitude in *Gegenphase* (Bild J-9).

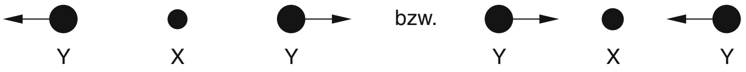


Bild J-9

2. Normalschwingung mit der Kreisfrequenz $\omega_2 = \sqrt{\omega_a^2 + 2\,\omega_b^2}$

Die beiden äußeren Massen schwingen mit *gleicher* Amplitude *in* Phase, die Zentralmasse M mit einer i. a. anderen Amplitude in *Gegenphase* (Bild J-10).

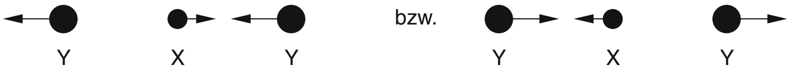


Bild J-10

3. Translationsbewegung

Der Eigenvektor $\mathbf{x}_3 = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_3 = 0$ und damit zur Kreisfrequenz $\omega_3 = 0$ beschreibt *keine* Schwingung (sonst müsste $\omega > 0$ sein), sondern eine *Translation*, bei der sich alle drei Massen in *gleicher* Richtung in *gleicher* Weise bewegen (Bild J-11).

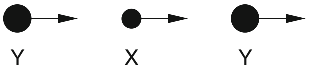


Bild J-11

J59

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Welche *Eigenwerte* besitzt diese Matrix? Berechnen Sie ferner $\det \mathbf{A}$ und $\operatorname{Sp}(\mathbf{A})$.

Die gesuchten *Eigenwerte* der Matrix $\mathbf{A}$ sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$. Die 4-reihige Determinante entwickeln wir zunächst nach den Elementen der *1. Zeile*, wobei nur das 1. Element einen Beitrag liefert (die übrigen Elemente sind alle gleich *Null*; gleichwertige Alternativen: Entwicklung nach der 2. Zeile oder der 3. oder 4. Spalte):

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & -4 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = a_{11} \cdot D_{11} =$$

$$= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & -4 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -4 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Die verbliebene 3-reihige Determinante entwickeln wir wiederum nach der *1. Zeile* (auch hier gilt: nur das 1. Element liefert einen Beitrag) und erhalten schließlich:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = (2-\lambda) \cdot (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -4 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(\lambda^2+1)$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (2-\lambda)^2(\lambda^2+1) = 0 \begin{cases} (2-\lambda)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = 2 \\ \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{3/4} = \pm\,\mathrm{j} \end{cases}$$

Eigenwerte: $\lambda_{1/2} = 2, \quad \lambda_{3/4} = \pm\,\mathrm{j}$

Determinante und Spur von A

$$\det\mathbf{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = 2 \cdot 2 \cdot \mathrm{j} \cdot (-\mathrm{j}) = -4\mathrm{j}^2 = -4 \cdot (-1) = 4 \qquad (\mathrm{j}^2 = -1)$$

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 2 + 2 + \mathrm{j} - \mathrm{j} = 4$$

J60

Berechnen Sie die *Eigenwerte* und (auf möglichst einfache Art) die *Determinante* und *Spur* der Matrix **A** (mit Kontrollrechnung):

$$\text{a)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$$

---

a) Die *Eigenwerte* der Matrix **A** werden aus der charakteristischen Gleichung

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ermittelt. Determinantenberechnung nach der *Regel von Sarrus*:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1-\lambda & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & 1 & 2-\lambda & 0 & 1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$

Determinante und Spur der Matrix A

$$\det \mathbf{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6; \quad \operatorname{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

Kontrollrechnung (**A** ist eine *Dreiecksmatrix*):

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} = 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6; \quad \operatorname{Sp}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 3 + 2 = 6$$

b) Berechnung der *Eigenwerte* aus der charakteristischen Gleichung

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & a-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & a-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Determinantenberechnung nach der *Regel von Sarrus*:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a-\lambda & 1 & 0 & a-\lambda & 1 \\ 1 & a-\lambda & 2 & 1 & a-\lambda \\ 0 & 2 & a-\lambda & 0 & 2 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = (a-\lambda)^3 + 0 + 0 - 0 - 4(a-\lambda) - (a-\lambda) = (a-\lambda)^3 - 5(a-\lambda)$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (a-\lambda)^3 - 5(a-\lambda) = (a-\lambda)\left[(a-\lambda)^2 - 5\right] = 0 \begin{cases} a-\lambda = 0 \\ (a-\lambda)^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

Aus der oberen Gleichung folgt $\lambda_1 = a$, die zweite Gleichung liefert weitere Lösungen:

$$(a-\lambda)^2 - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad (a-\lambda)^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad a - \lambda = \pm\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{2/3} = a \pm \sqrt{5}$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = a + \sqrt{5}, \quad \lambda_3 = a - \sqrt{5}$

Determinante und Spur der Matrix A

$$\det \mathbf{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = a\underbrace{(a+\sqrt{5})(a-\sqrt{5})}_{\text{3. Binom}} = a(a^2 - 5)$$

$$\operatorname{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a + (a+\sqrt{5}) + (a-\sqrt{5}) = a + a + \sqrt{5} + a - \sqrt{5} = 3a$$

Kontrollrechnung:

$$\underbrace{\left|\begin{array}{ccc} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 2 & a \end{array}\right|}_{\det \mathbf{A}}\begin{array}{cc} a & 1 \\ 1 & a \\ 0 & 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} = a^3 + 0 + 0 - 0 - 4a - a = a^3 - 5a = a(a^2 - 5)$$

$$\operatorname{Sp}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = a + a + a = 3a$$

J61

Gegeben ist die 3-reihige Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie

a) sämtliche *Eigenwerte*,

b) *Spur* und *Determinante* sowie

c) die *Eigenvektoren* dieser Matrix.

d) Sind die Eigenvektoren der Matrix **A** *linear unabhängig*?

a) Berechnung der Eigenwerte der Matrix A

Die gesuchten *Eigenwerte* der Matrix $\mathbf{A}$ sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Berechnung der Determinante nach der *Regel von Sarrus*:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 3-\lambda & 5 & 0 & 3-\lambda & 5 \\ 1 & 3-\lambda & 2 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 2 & 3-\lambda & 0 & 2 \end{array}\right. \quad \Rightarrow$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = (3-\lambda)^3 + 0 + 0 - 0 - 4(3-\lambda) - 5(3-\lambda) = (3-\lambda)^3 - 9(3-\lambda) =$$

$$= (3-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 9\right]$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (3-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 9\right] = 0 \begin{array}{l} \nearrow\; 3-\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3 \\ \searrow\; (3-\lambda)^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \end{array}$$

$$(3-\lambda)^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (3-\lambda)^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad 3-\lambda = \pm 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{2/3} = 3 \pm 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = 0$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = 0$

b) Spur und Determinante der Matrix A

Die *Spur* ist die *Summe*, die *Determinante* das *Produkt* der Eigenwerte:

$$\operatorname{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 + 6 + 0 = 9; \quad \det\mathbf{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 3 \cdot 6 \cdot 0 = 0$$

Kontrollrechnung (Determinantenberechnung nach *Sarrus*):

$$\operatorname{Sp}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 3 + 3 + 3 = 9$$

$$\underbrace{\left|\begin{array}{ccc|} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right.}_{\det\mathbf{A}} \begin{array}{cc} 3 & 5 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \det\mathbf{A} = 27 + 0 + 0 - 0 - 12 - 15 = 0$$

c) Berechnung der Eigenvektoren der Matrix A

Die Berechnung der Eigenvektoren erfolgt aus der Gleichung $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$

$$\boxed{\lambda_1 = 3} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{B} = \mathbf{A} - 3\mathbf{E}$ dieses *homogenen* LGS bringen wir durch elementare Zeilenumformungen zunächst auf *Trapezform* („*Gaußscher Algorithmus*“):

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2{,}5\,Z_3 \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow \\ \\ \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \updownarrow \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ = \mathbf{B}^* \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{array}$$

Die Matrix $\mathbf{B}$ hat also den *Rang* $r = \text{Rg}(\mathbf{B}) = \text{Rg}(\mathbf{B}^*) = 2$, es gibt daher *unendlich* viele Lösungen mit einem Parameter $(n - r = 3 - 2 = 1)$, die sich aus dem *gestaffelten* System $\mathbf{B}^* \mathbf{x} = \mathbf{0}$ leicht berechnen lassen (Parameter: $x_3 = \alpha$ mit $\alpha \neq 0$):

$$x_1 + 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2\alpha$$

$$2x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0$$

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$: $\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (mit $\alpha \neq 0$)

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 6$

$$\boxed{\lambda_2 = 6} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - 6\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{B} = \mathbf{A} - 6\mathbf{E}$ wird wiederum auf *Trapezform* gebracht, das dann vorliegende *gestaffelte* System von unten nach oben gelöst:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} +3Z_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \big\updownarrow \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} +2Z_3 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \big\updownarrow \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} = \mathbf{B}^* \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{matrix}$$

$$\text{Rg}(\mathbf{B}) = \text{Rg}(\mathbf{B}^*) = r = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{Anzahl der Parameter:} \quad n - r = 3 - 2 = 1$$

Lösung des *gestaffelten* Systems $\mathbf{B}^* \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (Parameter: $x_3 = \beta$ mit $\beta \neq 0$):

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 - 4{,}5\beta + 2\beta = x_1 - 2{,}5\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2{,}5\beta$$

$$2x_2 - 3x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_2 - 3\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_2 = 3\beta \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1{,}5\beta$$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 6$: $\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} 2{,}5\beta \\ 1{,}5\beta \\ \beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ (mit $\beta \neq 0$)

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_3 = 0$

$$\boxed{\lambda_3 = 0} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - 0\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ wird zunächst auf *Trapezform* gebracht, das dann vorliegende *gestaffelte* System von unten nach oben gelöst:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3Z_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -4 & -6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \big\updownarrow \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} +2Z_3 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \big\updownarrow \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} = \mathbf{A}^* \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{matrix}$$

$$\text{Rg}(\mathbf{A}) = \text{Rg}(\mathbf{A}^*) = r = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{Anzahl der Parameter:} \quad n - r = 3 - 2 = 1$$

Lösung des *gestaffelten* Systems $\mathbf{A}^* \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (Parameter: $x_3 = \gamma$ mit $\gamma \neq 0$):

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 - 4{,}5\gamma + 2\gamma = x_1 - 2{,}5\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2{,}5\gamma$$

$$2x_2 + 3x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_2 + 3\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1{,}5\gamma$$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 0$: $\mathbf{x_3} = \begin{pmatrix} 2{,}5\gamma \\ -1{,}5\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ (mit $\gamma \neq 0$)

d) Die aus den drei *Eigenvektoren* $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ und $\mathbf{x_3}$ gebildete Matrix ist *regulär*, da ihre Determinante einen von Null *verschiedenen* Wert besitzt:

$$\begin{vmatrix} -2\alpha & 2{,}5\beta & 2{,}5\gamma \\ 0 & 1{,}5\beta & -1{,}5\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 2{,}5 & 2{,}5 \\ 0 & 1{,}5 & -1{,}5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{D = -13{,}5} = -13{,}5\,\alpha\beta\gamma \neq 0 \qquad (\text{da } \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ \gamma \neq 0)$$

(die drei Spalten haben der Reihe nach den *gemeinsamen* Faktor α, β bzw. γ, den wir *vor* die Determinante ziehen dürfen). Die Determinante D wurde dabei wie folgt nach der *Regel von Sarrus* berechnet:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 2{,}5 & 2{,}5 \\ 0 & 1{,}5 & -1{,}5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{D} \begin{matrix} -2 & 2{,}5 \\ 0 & 1{,}5 \\ 1 & 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad D = -3 - 3{,}75 + 0 - 3{,}75 - 3 - 0 = -13{,}5 \neq 0$$

Folgerung: Die Eigenvektoren sind *linear unabhängig*.

J62

Bestimmen Sie auf möglichst einfache Art *Eigenwerte*, *Determinante* und *Spur* der folgenden Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}$ ist eine *Diagonalmatrix*, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ sind *Dreiecksmatrizen*. Die gesuchten *Eigenwerte* dieser Matrizen sind daher mit den *Hauptdiagonalelementen* identisch. Die *Spur* ist stets die *Summe*, die *Determinante* stets das *Produkt* der Eigenwerte. Somit gilt:

Matrix A Eigenwerte: $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 5,\ \lambda_4 = 2$

$$\operatorname{Sp}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 4 - 2 + 5 + 2 = 9$$

$$\det \mathbf{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = 4 \cdot (-2) \cdot 5 \cdot 2 = -80$$

Matrix B Eigenwerte: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = 4$

$$\operatorname{Sp}(\mathbf{B}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 5 + 4 = 10; \quad \det \mathbf{B} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1 \cdot 5 \cdot 4 = 20$$

Matrix C Eigenwerte: $\lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 7$

$$\operatorname{Sp}(\mathbf{C}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -5 + 2 + 7 = 4; \quad \det \mathbf{C} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = (-5) \cdot 2 \cdot 7 = -70$$

J63

Berechnen Sie die *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* der 3-reihigen *symmetrischen* Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein System aus drei *orthogonalen* Eigenvektoren.

Berechnung der Eigenwerte der Matrix A

Die *Eigenwerte* sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$. Wir berechnen zunächst die Determinante nach der *Regel von Sarrus*:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}}_{\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})} \begin{matrix} -1-\lambda & -2 \\ -2 & -1-\lambda \\ -2 & 2 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = (-1-\lambda)^3 + 8 + 8 - 4(-1-\lambda) - 4(-1-\lambda) - 4(-1-\lambda) =$$

$$= (-1-\lambda)^3 - 12(-1-\lambda) + 16$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (-1-\lambda)^3 - 12(-1-\lambda) + 16 =$$

$$= -1 - 3\lambda - 3\lambda^2 - \lambda^3 + 12 + 12\lambda + 16 = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 27 = 0$$

Durch Probieren findet man die Lösung $\lambda_1 = 3$, mit Hilfe des *Horner-Schemas* die beiden (falls überhaupt vorhanden) restlichen Lösungen (Nullstellen des *1. reduzierten* Polynoms):

	-1	-3	9	27
$\lambda_1 = 3$		-3	-18	-27
	-1	-6	-9	0

$$\Rightarrow \quad -\lambda^2 - 6\lambda - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\lambda^2 + 6\lambda + 9}_{\text{1. Binom}} = (\lambda + 3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{2/3} = -3$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_{2/3} = -3$

Eigenvektoren der Matrix A

$$\boxed{\lambda_1 = 3} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir bringen die Koeffizientenmatrix $\mathbf{B} = \mathbf{A} - 3\mathbf{E}$ dieses *homogenen* LGS mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen auf *Trapezform* (*Gaußscher Algorithmus*):

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2Z_2 \\ \\ -Z_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ -2 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -Z_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} :6 \\ :(-2) \\ \\ \end{matrix} \updownarrow \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} = \mathbf{B}^* \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{matrix}$$

$$\operatorname{Rg}(\mathbf{B}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{B}^*) = r = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{Anzahl der Parameter:} \quad n - r = 3 - 2 = 1$$

Das homogene LGS ist somit *lösbar*, die Lösungsmenge hängt von einem Parameter ab. Wir lösen jetzt das *gestaffelte* System $\mathbf{B}^* \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (Parameter: $x_3 = \alpha$ mit $\alpha \neq 0$):

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2\alpha - \alpha = x_1 + \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\alpha$$

$$x_2 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 - \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \alpha$$

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$: $\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (mit $\alpha \neq 0$)

$\boxed{\lambda_{2/3} = -3}$ $\Rightarrow$ $(\mathbf{A} + 3\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oder $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{B} = \mathbf{A} + 3\,\mathbf{E}$ wird auf *Trapezform* gebracht:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +Z_1 \\ +Z_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^* \quad \begin{matrix} \text{Nullzeilen} \end{matrix}$$

$$\operatorname{Rg}(\mathbf{B}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{B}^*) = r = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Anzahl der Parameter: } n - r = 3 - 1 = 2$$

Die Lösungsmenge enthält *zwei* voneinander unabhängige Parameter. Wir lösen jetzt das *gestaffelte* System $\mathbf{B}^* \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (Parameter: $x_2 = \beta$ und $x_3 = \gamma$ mit $\beta \neq 0,\ \gamma \neq 0$):

$$2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 - 2\beta - 2\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 = 2\beta + 2\gamma \quad \Rightarrow \quad x_1 = \beta + \gamma$$

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_{2/3} = -3$: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \beta + \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ (mit $\beta \neq 0,\ \gamma \neq 0$)

Sie sind wie folgt als *Linearkombination* zweier *linear unabhängiger* Eigenvektoren $\mathbf{x_2}$ und $\mathbf{x_3}$ darstellbar:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \beta + \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_2} + \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_3} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{x_2} + \mathbf{x_3}$$

Die Eigenvektoren $\mathbf{x_2}$ und $\mathbf{x_3}$ bilden zusammen mit dem zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$ gehörenden Eigenvektor $\mathbf{x_1}$ ein System *linear unabhängiger* Vektoren.

System aus drei orthogonalen Eigenvektoren

Bei einer *symmetrischen* Matrix gilt: Die zu *verschiedenen* Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren sind *orthogonal*. Damit sind $\mathbf{x_1}$ und $\mathbf{x_2}$ bzw. $\mathbf{x_1}$ und $\mathbf{x_3}$ *orthogonale* Eigenvektoren, und zwar unabhängig vom Wert der reellen Parameter α, β und γ. Wir wählen die (speziellen) *orthogonalen* Vektoren $\tilde{\mathbf{x}}_1$ mit $\alpha = 1$ und $\tilde{\mathbf{x}}_2$ mit $\beta = 1$, deren *Skalarprodukt* verschwindet:

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 + 1 + 0 = 0$$

Der dritte noch fehlende Eigenvektor $\mathbf{x_3}$ gehört zum Eigenwert $\lambda_{2/3} = -3$ und muss sowohl zu $\tilde{\mathbf{x}}_1$ als auch zu $\tilde{\mathbf{x}}_2$ *orthogonal* sein. Er ist in der Form $\tilde{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} \beta + \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ darstellbar. Wir bestimmen die noch unbekannten Parameter β und γ so, dass die genannten Orthogonalitätsbedingungen erfüllt sind (die *skalaren Produkte* von $\tilde{\mathbf{x}}_3$ mit den Eigenvektoren $\tilde{\mathbf{x}}_1$ bzw. $\tilde{\mathbf{x}}_2$ müssen *verschwinden*):

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta + \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = -1(\beta + \gamma) + \beta + \gamma = -\beta - \gamma + \beta + \gamma = 0$$

Diese Bedingung ist also *unabhängig* von den Parameterwerten stets erfüllt.

$$\tilde{\mathbf{x}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta + \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 1(\beta + \gamma) + \beta = \beta + \gamma + \beta = 2\beta + \gamma = 0$$

Wir setzen $\beta = 1$ und erhalten $\gamma = -2\beta = -2$. Der Eigenvektor $\tilde{\mathbf{x}}_3$ besitzt damit der Reihe nach die (skalaren) Komponenten -1, 1 und -2. Das gesuchte *System* aus drei orthogonalen Eigenvektoren lautet somit wie folgt:

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Kontrolle (über Skalarproduktbildung):

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 + 1 + 0 = 0; \quad \tilde{\mathbf{x}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 + 1 - 2 = 0$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 + 1 + 0 = 0$$

J64

Bestimmen Sie die *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* der 3-reihigen symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und zeigen Sie, dass die drei (zu *verschiedenen* Eigenwerten gehörenden) Eigenvektoren ein *orthogonales* System bilden, d. h. paarweise aufeinander *senkrecht* stehen.

Berechnung der Eigenwerte der Matrix A

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ liefern die *Eigenwerte* (Berechnung der 3-reihigen Determinante nach *Sarrus*):

$$\underbrace{\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}}_{\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})} \begin{matrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = -\lambda^3 + 0 + 0 - 0 + \lambda + \lambda = -\lambda^3 + 2\lambda$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda^3 + 2\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2/3} = \pm\sqrt{2}$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \sqrt{2}, \quad \lambda_3 = -\sqrt{2}$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren

$$\boxed{\lambda_1 = 0} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - 0\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ bringen wir zunächst mit Hilfe elementarer Umformungen in den Zeilen auf *Trapezform* und lösen dann das *gestaffelte* System schrittweise von unten nach oben:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -Z_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \big\updownarrow \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ = \mathbf{A}^{*} \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{matrix}$$

$$\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}^{*}) = r = 2 \quad \Rightarrow \quad \textit{Anzahl} \text{ der Parameter: } n - r = 3 - 2 = 1$$

Gestaffeltes System $\mathbf{A}^{*}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (Parameter: $x_3 = \alpha$ mit $\alpha \neq 0$):

$$x_1 + \quad x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\alpha$$

$$x_2 \quad = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0$$

Zum *Eigenwert* $\lambda_1 = 0$ gehörende *Eigenvektoren*: $\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (mit $\alpha \neq 0$)

$\boxed{\lambda_2 = \sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ $(\mathbf{A} - \sqrt{2}\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oder $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Koeffizientenmatrix $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \sqrt{2}\,\mathbf{E}$ auf *Trapezform* bringen, dann das *gestaffelte* System schrittweise von unten nach oben lösen:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \big\updownarrow \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +\sqrt{2}\,Z_1 \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +Z_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ = \mathbf{B}^{*} \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{matrix}$$

$$\operatorname{Rg}(\mathbf{B}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{B}^{*}) = r = 2 \quad \Rightarrow \quad \textit{Anzahl} \text{ der Parameter: } n - r = 3 - 2 = 1$$

Gestaffeltes System $\mathbf{B}^{*}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (Parameter: $x_3 = \beta$ mit $\beta \neq 0$):

$$x_1 - \sqrt{2}\,x_2 + \quad x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\,\beta + \beta = x_1 - 2\beta + \beta = x_1 - \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \beta$$

$$-x_2 + \sqrt{2}\,x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -x_2 + \sqrt{2}\,\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \sqrt{2}\,\beta$$

Zum *Eigenwert* $\lambda_2 = \sqrt{2}$ gehörende *Eigenvektoren*:

$$\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} \beta \\ \sqrt{2}\,\beta \\ \beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{mit } \beta \neq 0)$$

$\boxed{\lambda_3 = -\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ $(\mathbf{A} + \sqrt{2}\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oder $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \sqrt{2}\,\mathbf{E}$ bringen wir zunächst auf *Trapezform*, anschließend lösen wir das *gestaffelte* System schrittweise von unten nach oben:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \big\updownarrow \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\sqrt{2}\,Z_1 \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +Z_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ = \mathbf{B}^* \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{matrix}$$

$$\text{Rg}\,(\mathbf{B}) = \text{Rg}\,(\mathbf{B}^*) = r = 2 \quad \Rightarrow \quad \textit{Anzahl} \text{ der Parameter}: \; n - r = 3 - 2 = 1$$

Gestaffeltes System $\mathbf{B}^* \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (Parameter: $x_3 = \gamma$ mit $\gamma \neq 0$):

$$x_1 + \sqrt{2}\,x_2 + \quad x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + \sqrt{2}\,(-\sqrt{2}\,\gamma) + \gamma = x_1 - 2\gamma + \gamma = x_1 - \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \gamma$$

$$-x_2 - \sqrt{2}\,x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -x_2 - \sqrt{2}\,\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\sqrt{2}\,\gamma$$

Eigenvektoren zum *Eigenwert* $\lambda_3 = -\sqrt{2}$: $\quad \mathbf{x_3} = \begin{pmatrix} \gamma \\ -\sqrt{2}\,\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad$ (mit $\gamma \neq 0$)

Wir zeigen jetzt mit Hilfe des *Skalarproduktes*, dass die drei Eigenvektoren $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ und $\mathbf{x_3}$ *orthogonal* sind (die *Bedingungen* lauten: $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_k = 0$ für $i \neq k$; $i, k = 1, 2, 3$):

$$\mathbf{x_1} \cdot \mathbf{x_2} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\beta\,(-1 + 0 + 1) = 0$$

$$\mathbf{x_1} \cdot \mathbf{x_3} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\gamma\,(-1 + 0 + 1) = 0$$

$$\mathbf{x_2} \cdot \mathbf{x_3} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\gamma\,(1 - 2 + 1) = 0$$

J65

Gegeben ist die *Matrix* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ und der *Spaltenvektor* $\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie: Der Vektor $\mathbf{x_1}$ ist ein *Eigenvektor* der Matrix $\mathbf{A}$. Wie lautet der zugehörige *Eigenwert*?

b) Bestimmen Sie die restlichen *Eigenwerte* und *Eigenvektoren*.

---

a) Wenn der Vektor $\mathbf{x_1}$ ein *Eigenvektor* der Matrix $\mathbf{A}$ ist, muss das Matrizenprodukt aus $\mathbf{A}$ und $\mathbf{x_1}$ ein (noch unbekanntes) *Vielfaches* des Vektors $\mathbf{x_1}$ sein, d. h. die Gleichung $\mathbf{A}\,\mathbf{x_1} = \lambda\,\mathbf{x_1}$ muss eine *eindeutige* Lösung für λ ergeben:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 10 + 8 \\ 9 + 10 + 16 \\ 9 + 15 + 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 35 \\ 56 \end{pmatrix}; \quad \lambda\,\mathbf{x_1} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda \\ 5\lambda \\ 8\lambda \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x_1} = \lambda\,\mathbf{x_1} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 21 \\ 35 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda \\ 5\lambda \\ 8\lambda \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{matrix} 3\lambda = 21 \\ 5\lambda = 35 \\ 8\lambda = 56 \end{matrix} \right\} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 7$$

Die drei Gleichungen mit der Unbekannten λ führen jeweils zum *gleichen* Ergebnis $\lambda = 7$. Somit ist der Vektor $\mathbf{x_1}$ ein *Eigenvektor* der Matrix $\mathbf{A}$ zum *Eigenwert* $\lambda_1 = 7$.

b) Die *Eigenwerte* der Matrix **A** sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 3 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Die Berechnung der 3-reihigen Determinante nach *Sarrus* führt auf die folgende Gleichung 3. Grades für λ:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1-\lambda & 2 & 1 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda & 2 & 3 & 2-\lambda \\ 3 & 3 & 4-\lambda & 3 & 3 \end{array}\right. \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) &= (1-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) + 12 + 9 - 3(2-\lambda) - 6(1-\lambda) - 6(4-\lambda) = \\ &= (2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2)(4-\lambda) + 21 - 6 + 3\lambda - 6 + 6\lambda - 24 + 6\lambda = \\ &= (2 - 3\lambda + \lambda^2)(4-\lambda) + 15\lambda - 15 = \\ &= 8 - 2\lambda - 12\lambda + 3\lambda^2 + 4\lambda^2 - \lambda^3 + 15\lambda - 15 = -\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda - 7 \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda - 7 = 0$$

Eine Lösung haben wir bereits in Teil a) bestimmt: $\lambda_1 = 7$. Die *restlichen* Lösungen erhalten wir aus dem *1. reduzierten* Polynom mit Hilfe des *Horner-Schemas* (Abspalten des *Linearfaktors* $\lambda - 7$):

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 7 & 1 & -7 \\ \hline \lambda_1 = 7 & & -7 & 0 & 7 \\ \hline & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad -\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{2/3} = \pm 1$$

Somit gibt es genau *drei verschiedene* Eigenwerte: $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Wir bestimmen jetzt die noch fehlenden *Eigenvektoren* zu den Eigenwerten $\lambda_{2/3} = \pm 1$.

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$

$$\boxed{\lambda_2 = 1} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - 1\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir bringen dieses *homogene* LGS zunächst auf *Trapezform*:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -Z_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -Z_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{matrix}$$

Der *Rang* der Koeffizientenmatrix ist $r = 2$. Es gibt somit *unendlich* viele Lösungen, die noch von einem Parameter abhängen $(n - r = 3 - 2 = 1)$. Das *gestaffelte* System wird wie folgt gelöst (wir wählen x_2 als Parameter, setzen also $x_2 = \alpha$ mit $\alpha \neq 0$):

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad 3x_1 + \alpha - 4\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x_1 - 3\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x_1 = 3\alpha \quad \Rightarrow \quad x_1 = \alpha \\ 2x_2 + \ x_3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2\alpha + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -2\alpha \end{aligned}$$

Zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$ gehören damit folgende *Eigenvektoren*:

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad (\text{mit} \quad \alpha \neq 0)$$

Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_3 = -1$

$$\boxed{\lambda_3 = -1} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} + 1\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses *homogene* LGS bringen wir zunächst mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen auf *Trapezform*:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -Z_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -1{,}5\,Z_1 \\ :3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2\,Z_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{matrix}$$

Rang der Matrix: $r = 2 \quad \Rightarrow \quad$ *Anzahl* der Parameter: $n - r = 3 - 2 = 1$

Lösung des *gestaffelten* Systems (Parameter: $x_2 = \beta$ mit $\beta \neq 0$):

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + 2\beta + 0 = 2x_1 + 2\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 = -2\beta \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\beta$$

$$0{,}5\,x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0$$

Zum *Eigenwert* $\lambda_3 = -1$ gehören somit folgende *Eigenvektoren*:

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -\beta \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{mit} \quad \beta \neq 0)$$

J66

Wie lauten die *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* der hermiteschen Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\,\mathrm{j} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\,\mathrm{j} & 0 & 4 \end{pmatrix}$? Zeigen Sie die *lineare Unabhängigkeit* der Eigenvektoren.

Berechnung der Eigenwerte der Matrix A

Die *Eigenwerte* sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung $\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = 0$ (die 3-reihige Determinante berechnen wir nach *Sarrus*):

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2\,\mathrm{j} \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 2\,\mathrm{j} & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}}_{\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E})} \begin{matrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \\ 2\,\mathrm{j} & 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = (1-\lambda)(-\lambda)(4-\lambda) + 0 + 0 - 4\,\mathrm{j}^2\lambda - 0 - 0 = -\lambda(1-\lambda)(4-\lambda) + 4\lambda =$$

$$= -\lambda\left[(1-\lambda)(4-\lambda) - 4\right] = -\lambda(4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 4) = -\lambda(\lambda^2 - 5\lambda)$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda(\lambda^2 - 5\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 5) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = 0, \quad \lambda_3 = 5$$

Eigenwerte: $\lambda_{1/2} = 0, \quad \lambda_3 = 5$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren

$$\boxed{\lambda_{1/2} = 0} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - 0\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\,\mathrm{j} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\,\mathrm{j} & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir bringen zunächst die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A} - 0\,\mathbf{E} = \mathbf{A}$ durch elementare Zeilenumformungen auf *Trapezform*:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\mathrm{j} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\mathrm{j} & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2\mathrm{j} \cdot Z_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\mathrm{j} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} = \mathbf{A}^* \\ \leftarrow \text{2 Nullzeilen} \end{matrix}$$

$$\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{A}^*) = r = 1 \quad \Rightarrow \quad \textit{Anzahl} \text{ der Parameter: } n - r = 3 - 1 = 2$$

Wir lösen das *gestaffelte* System $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$, dessen Lösungsmenge *zwei* unabhängige Parameter enthält (wir wählen $x_2 = \alpha$ und $x_3 = \beta$ mit $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$):

$$x_1 - 2\mathrm{j}x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 - 2\mathrm{j}\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2\mathrm{j}\beta = 2\beta\mathrm{j}$$

Damit erhalten wir die folgenden von *zwei* Parametern α und β abhängenden *Eigenvektoren* zum (doppelten) *Eigenwert* $\lambda_{1/2} = 0$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2\beta\mathrm{j} \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \qquad (\text{mit} \quad \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0)$$

Wir können diesen Eigenvektor auch wie folgt als *Linearkombination* zweier *linear unabhängiger* Eigenvektoren $\mathbf{x_1}$ und $\mathbf{x_2}$ darstellen, die nur von α bzw. β abhängen:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2\beta\mathrm{j} \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta\mathrm{j} \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x_1}} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 2\mathrm{j} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x_2}} = \alpha\mathbf{x_1} + \beta\mathbf{x_2}$$

$$\boxed{\lambda_3 = 5} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - 5\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2\mathrm{j} \\ 0 & -5 & 0 \\ 2\mathrm{j} & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{B} = \mathbf{A} - 5\,\mathbf{E}$ bringen wir zunächst auf *Trapezform* und lösen dann das *gestaffelte* System:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2\mathrm{j} \\ 0 & -5 & 0 \\ 2\mathrm{j} & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} :2 \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & -\mathrm{j} \\ 0 & -5 & 0 \\ 2\mathrm{j} & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\mathrm{j}Z_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & -\mathrm{j} \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ = \mathbf{B}^* \\ \leftarrow \text{Nullzeile} \end{matrix}$$

$$\operatorname{Rg}(\mathbf{B}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{B}^*) = r = 2 \quad \Rightarrow \quad \textit{Anzahl} \text{ der Parameter: } n - r = 3 - 2 = 1$$

Wir lösen das *gestaffelte* System $\mathbf{B}^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (Parameter ist $x_3 = 2\gamma$ mit $\gamma \neq 0$):

$$-2x_1 - \mathrm{j}x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x_1 - \mathrm{j}\,2\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x_1 = \mathrm{j}\,2\gamma \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\mathrm{j}\gamma$$

$$-5x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0$$

Eigenvektoren zum *Eigenwert* $\lambda_3 = 5$: $\quad \mathbf{x_3} = \begin{pmatrix} -\mathrm{j}\gamma \\ 0 \\ 2\gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -\mathrm{j} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (\text{mit } \gamma \neq 0)$

Die drei Eigenvektoren $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ und $\mathbf{x_3}$ (mit $\gamma = 1$) sind *linear unabhängig*, da die aus ihnen gebildete Determinante von Null *verschieden* ist (Determinantenberechnung durch Entwicklung nach den Elementen der 2. Zeile, wobei nur das Element $a_{21} = 1$ einen Beitrag leistet):

$$\det(\mathbf{x_1}\,\mathbf{x_2}\,\mathbf{x_3}) = \begin{vmatrix} 0 & 2\mathrm{j} & -\mathrm{j} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} = a_{21} \cdot (-1)^{2+1} \cdot D_{21} = 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2\mathrm{j} & -\mathrm{j} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 2\mathrm{j} & -\mathrm{j} \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4\mathrm{j} + \mathrm{j}) = -5\mathrm{j} \neq 0$$

J67

Bestimmen Sie die *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* der symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie dann, dass die mit den *normierten Eigenvektoren* $\tilde{\mathbf{x}}_1$ und $\tilde{\mathbf{x}}_2$ gebildete Matrix $\mathbf{T} = (\tilde{\mathbf{x}}_1 \; \tilde{\mathbf{x}}_2)$ die Matrix $\mathbf{A}$ auf *Diagonalgestalt* transformiert:

$$\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{D} \qquad (\mathbf{D}: \text{ Diagonalmatrix})$$

Welche Bedeutung haben die *Diagonalelemente* dieser Diagonalmatrix?

Das *Eigenwertproblem* lautet:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die *Eigenwerte* berechnen wir aus der charakteristischen Gleichung $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 4 =$$

$$= -2 - \lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3$$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren

$$\boxed{\lambda_1 = 2} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses *homogene* LGS reduziert sich auf *eine* Gleichung (wir wählen die erste Gleichung), da die beiden Gleichungen *proportional* sind:

(I) $-x_1 + 2x_2 = 0 \,|\cdot(-2) \quad \Rightarrow \quad 2x_1 - 4x_2 = 0$ (dies aber ist genau Gleichung (II))

(II) $2x_1 - 4x_2 = 0$

Wir dürfen daher über *eine* der beiden Unbekannten *frei verfügen* und wählen x_2 als Parameter ($x_2 = \alpha$ mit $\alpha \neq 0$):

(II) $\Rightarrow \quad 2x_1 - 4\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 = 4\alpha \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2\alpha$

Der *Eigenvektor* $\mathbf{x}_1$ mit den Komponenten $x_1 = 2\alpha$ und $x_2 = \alpha$ wird noch *normiert* (Normierungsbedingung: $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1 = 1$; $\alpha > 0$):

$$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = 4\alpha^2 + \alpha^2 = 5\alpha^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$: $\tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\lambda_2 = -3} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} + 3\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wiederum erhalten wir zwei *proportionale* Gleichungen (die erste Gleichung ist das 2-fache der zweiten Gleichung):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & 4x_1 + 2x_2 = 0 \,|: 2 \\ \text{(II)} & 2x_1 + x_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + x_2 = 0$$

Da die verbliebene Gleichung noch *beide* Unbekannte enthält, können wir x_1 oder x_2 *frei wählen*. Wir entscheiden uns für den Parameter $x_1 = \beta$ mit $\beta \neq 0$:

$$2x_1 + x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\beta + x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2\beta$$

Den *Eigenvektor* $\mathbf{x_2}$ mit den Komponenten $x_1 = \beta$ und $x_2 = -2\beta$ müssen wir noch *normieren* $(\beta > 0)$:

$$\mathbf{x_2} \cdot \mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} \beta \\ -2\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ -2\beta \end{pmatrix} = \beta^2 + 4\beta^2 = 5\beta^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta^2 = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = -3$: $\tilde{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Transformation der Matrix A auf Diagonalgestalt

Mit den beiden normierten Eigenvektoren $\tilde{\mathbf{x}}_1$ und $\tilde{\mathbf{x}}_2$ bilden wir die *Transformationsmatrix* **T** und deren *Inverse* $\mathbf{T}^{-1}$:

$$\mathbf{T} = (\tilde{\mathbf{x}}_1 \, \tilde{\mathbf{x}}_2) = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{B}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{B} \right)^{-1} = \sqrt{5}\, \mathbf{B}^{-1}$$

Die Matrix **B** *invertieren* wir nach dem *Gauß-Jordan-Verfahren*:

$$(\mathbf{B} \mid \mathbf{E}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} \downarrow \\ \uparrow \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ -2Z_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ :5 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\text{mit } \underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix}}_{\mathbf{B}} \; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{E}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/5 & -2/5 \end{array} \right) \begin{matrix} +2Z_2 \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & -2/5 \end{array} \right) = (\mathbf{E} \mid \mathbf{B}^{-1})$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{\mathbf{E}} \; \underbrace{\begin{matrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{matrix}}_{\mathbf{B}^{-1}}$$

Somit gilt:

$$\mathbf{T}^{-1} = \sqrt{5}\, \mathbf{B}^{-1} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{B}$$

Wir transformieren die Matrix **A** mit Hilfe der Transformationsmatrix **T** und ihrer Inversen $\mathbf{T}^{-1}$ wie folgt auf *Diagonalgestalt*:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{B} = \frac{1}{5} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{1}{5} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$$

Die Matrizenprodukte $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ und $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$ berechnen wir mit dem *Falk-Schema*:

		A	1	2
			2	−2
B	2	1	4	2
	1	−2	−3	6

B · A

		B	2	1
			1	− 2
B · A	4	2	10	0
	−3	6	0	−15

(B · A) · B

Damit erhalten wir:

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \frac{1}{5} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Die Transformation führt in der Tat auf eine *Diagonalmatrix*, deren Diagonalelemente die *Eigenwerte* der Matrix **A** sind $(\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -3)$.