Перечень вопросов к экзамену с идеями док-ств (МИЛ)

1. **Утверждение о замкнутости кольца по отношению к операциям объединения и разности.**

   (Построить кольцо как замыкание исходной системы относительно конечных объединений и разностей: $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B), \quad A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$*.)*

2. **Утверждение о замкнутости алгебры относительно дополнения и объединения.**

   (Из первого свойства следует, что $X = A \cup (X \setminus A) \in \mathcal{K}$*. Далее проверяются аксиомы кольца:* $A \cap B = X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) \in \mathcal{K}$*,* $A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{K}$*,* $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \in \mathcal{K}$*.)*

3. **Теорема о существовании и единственности минимального кольца, порожденного системой множеств.**

   (Рассматривается множество $M = \bigcup_{A \in S} A$ *и кольцо* $\mathcal{P}(M)$*. Пусть* $\Sigma = \{\mathcal{K} \mid \mathcal{K} \subset \mathcal{P}(M),\ S \subset \mathcal{K}\}$ *— множество всех колец, содержащих* S*. Тогда искомым кольцом является пересечение всех колец из* Σ*:*$\mathcal{K}(S) = \bigcap_{\mathcal{K} \in \Sigma} \mathcal{K}$*. Это кольцо минимально по включению. Его можно также описать как множество всех множеств, получающихся из элементов* S *с помощью конечного числа операций пересечения и симметрической разности.)*

4. **Лемма о пополнении частичного разбиения до полного элементами полукольца.**

   (Проводится индукция по n*. База* $n = 1$ *следует непосредственно из определения полукольца. Предполагая утверждение верным для* $n = k$*, рассматривается множество* A_{k+1}*. Каждое из дополняющих множеств* B_s *из предположения индукции пересекается с* A_{k+1}*, и с помощью свойства полукольца эти пересечения разбиваются на конечные объединения элементов* S*, что даёт искомое разложение для* $n = k + 1$*.)*

5. **Теорема о структуре кольца, минимального над заданным полукольцом.**

   Сначала доказывается, что система всех конечных объединений элементов S *образует кольцо. Для двух таких множеств* $A = \bigcup A_i$ *и* $B = \bigcup B_j$ *их пересечение* $A \cap B = \bigcup_{i,j}(A_i \cap B_j)$ *также является конечным объединением элементов* S*, так как* $A_i \cap B_j \in S$*. Симметрическая разность* $A \triangle B$ *может быть представлена как объединение непересекающихся частей вида* $A_i \setminus B_j$ *и* $B_j \setminus A_i$*, каждая из которых в силу определения полукольца разбивается на конечные объединения элементов* S*. Применение Леммы* **??** *позволяет собрать все эти части в конечное разложение.*

6. **Мера (2 пункта). Примеры мер (длина, площадь, мера, порожденная функцией, мощность множества). Свойства монотонности и субтрактивности меры.**

   (монотонность следует из представления $A \subseteq B$ *как* $B = A \cup (B \setminus A)$ *и аддитивности. Субтрактивность - из монотонности)*

7. **Свойства меры: формула включения-исключения для двух множеств, симметрической разности, оценка модуля разности мер множеств, оценка меры симметрической разности двух множеств, счетная полуаддитивность меры.**

(Идея: 1. разбить $A \cup B$ на три непересекающихся множества: $A \setminus B$, $B \setminus A$ и $A \cap B$. Выразить меры A и B через меры этих компонент и сложить. 2. Использовать представление $A \triangle B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B))$ и применить свойства вычитания меры. 3. Заметить, что $A \subset B \cup (A \triangle B)$ и $B \subset A \cup (A \triangle B)$. Применить монотонность и аддитивность меры. 4. Использовать теоретико-множественное включение $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$ и монотонность меры. 5. Представление объединения как дизъюнктного объединения множеств $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k<n} A_k$.)

8. **Теорема о счетной аддитивности полуинтервальной меры.**

   ((двойное неравенство) Оценка сверху (): Из конечной аддитивности и монотонности меры для любого конечного объединения, а затем предельный переход. Оценка снизу (): выбирается отрезок, немного короче полуинтервала (на $\varepsilon/2$), чтобы избежать проблем с замкнутостью, и покрытие интервалом для i-го интервала (на $\varepsilon/2^{i+1}$). Лемма Гейне–Бореля о покрытии. Для конечного покрытия сумма длин интервалов длины укороченного отрезка.)

9. **Пример не σ-аддитивной меры на числовой прямой (в кач-ве порождающей функции взять разрывную функцию). Примеры σ-аддитивных мер (точечная, вероятностная).**

   (Точечная (диракская) мера), дискретная вероятностная мера

10. **Теорема о продолжении меры, заданной на полукольце, на минимальное кольцо. Следствие о сохранении свойства продолжения меры.**

    (Определить меру на кольце как сумму мер элементов разбиения. Построение: $\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$ где $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \in S$ попарно не пересекаются. Корректность: Нужно показать, что значение $\mu(A)$ не зависит от выбора разбиения. Для двух различных разбиений рассматриваются их пересечения, что приводит к общему «мелкому» разбиению. Суммы мер исходных разбиений совпадают благодаря аддитивности меры m на S. Проверка аксиом меры. Единственность: Следует из обязательности формулы построения.)

11. **Следствие о сохранении свойства продолжения меры.**

    (Используется тот факт, что мера на кольце строится через конечные разложения элементами полукольца, а на полукольце σ-аддитивность уже есть. Двойное разбиение позволяет «склеить» конечные разложения и применить перестановку сумм.)

12. **Множество меры нуль. Примеры множеств меры нуль (точка, мн-во рац.чисел). Непрерывность сверху (снизу) меры на полукольце. Теорема о связи счетной аддитивности и непрерывности меры.**

    (Необх-ть. Возрастающую последовательность $A_n \uparrow A$ можно представить как дизъюнктное объединение $A = A_1 \sqcup (A_2 \setminus A_1) \sqcup \ldots$ Применяя счётную аддитивность, получаем $m(A) = \lim m(A_n)$. Дост-ть. Для дизъюнктного объединения $B = \bigsqcup B_i$ рассмотрим частичные суммы $A_n = \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i$. Тогда $A_n \uparrow B$, и по непрерывности $m(B) = \lim m(A_n) = \sum m(B_i)$.)

13. **Внешняя мера (минимальная «стоимость» покрытия множества A счётным объединением множеств из алгебры $\mathcal{K}$). Утверждение о внешней мере как продолжении меры на алгебре.**

    ((двойное неравенство) Оценка m сверху (): полуаддитивности меры, inf мер покрытий=μ Оценка m снизу (): из опр-я внешн меры и если покрытие=A_1)

14. **Свойства внешней меры: мера элемента алгебры, неотрицательность, монотонность.**

    (2. Инфимум неотрицательных величин неотрицателен. Для $\emptyset$ используем покрытие из пустых множеств. 3. Любое покрытие B является также покрытием A, поэтому множество сумм для A шире, чем для B, и инфимум для A не превосходит инфимума для B.

15. **Свойства внешней меры: счетная полуаддитивность, оценка модуля разности мер, оценка меры симметрической разности двух множеств. Внутренняя мера (оценивает множество «изнутри», вычитая из меры всего пространства внешнюю меру дополнения). Соотношение внутренней и внешней меры одного и того же множества ($X = A \cup (X \setminus A)$ и применяем к нему полуаддитивность внешней меры).**

    (1. Для каждого B_i подбираем покрытие $\{A_{ij}\} \subset \mathcal{K}$ с суммой мер, близкой к $\mu^*(B_i)$ с точностью $\varepsilon/2^i$. Объединение всех таких покрытий даёт покрытие $\bigcup B_i$, сумма мер которого оценивается через $\sum \mu^*(B_i) + \varepsilon$. 2. Используем включения $A \subset B \cup (A \triangle B)$ и $B \subset A \cup (A \triangle B)$, затем применяем монотонность и полуаддитивность. 3. Доказываем включение $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$, затем применяем монотонность и полуаддитивность.)

16. **Множество, измеримое по Лебегу относительно меры. Измеримость по Лебегу множеств меры нуль. Критерий измеримости. Следствие о мере симметрической разности с измеримым множеством.**

    (Критерий: A измеримо, если для любого E выполняется $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$.)

17. **Теорема о структуре множества измеримых по Лебегу множеств. Следствие об измеримости счетного пересечения множеств.**

    (Идея: показать, что класс измеримых множеств является σ-алгеброй.)

18. **Теорема о свойстве сужения внешней меры на класс измеримых множеств. Полная мера. -конечная мера. Измеримость относительно -конечной меры.**

19. **Измеримость по Лебегу, если X — полуинтервал. Утверждения о мере Лебега одноточечного множества, мере Лебега не более чем счетного ограниченного множества, мере Лебега ограниченного промежутка, об измеримости по Лебегу любого открытого или замкнутого множества и любого ограниченного борелевского множества. Пример несчетного множества меры нуль.**
    (Пример: канторово множество.)

20. **Пример неизмеримого по Лебегу множества. Измеримость по Лебегу неограниченных множеств. Замечание об измеримости произвольного множества числовой прямой. Пример неограниченного измеримого по Лебегу множества. Теорема о -конечности меры, определенной на -алгебре всех измеримых по Лебегу множеств (без док-ва).**

21. **Скачок функции. Утверждение об оценке суммы скачков неубывающей функции на отрезке. Утверждение о множестве точек разрыва монотонно неубывающей на отрезке функции.**
    (Идея: сумма скачков ограничена разностью значений функции на концах отрезка.)

22. **Производные числа Дини. Пример. Утверждение о производной монотонно неубывающей на отрезке функции (без док-ва). Функция скачков.**

23. **Утверждение о представлении монотонной неубывающей функции непрерывной слева (без док-ва). Теорема — критерий -аддитивности меры Лебега-Стилтьеса на полукольце, порожденном системой полуинтервалов.**
    (Идея: -аддитивность эквивалентна непрерывности слева функции распределения.)

24. **Свойства подмножеств множества $X = [a, b)$, измеримых относительно меры Лебега-Стилтьеса: одноточечного множества, произвольного промежутка, борелевского множества. Замечания о конечной и -конечных мерах Лебега-Стилтьеса на $\mathbb{R}$.**

25. **Мера, абсолютно непрерывная относительно другой меры. Лемма — критерий абсолютной непрерывности одной меры относительно другой.**
    (Критерий: $\mu \ll \nu$ тогда и только тогда, когда $\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$.)

26. **Абсолютная непрерывность функции на отрезке. Свойства абсолютно непрерывных функций на отрезке.**

27. **Теорема-критерий абсолютной непрерывности меры Лебега-Стилтьеса относительно меры Лебега. Пример — канторова лестница.**
(Идея: мера Лебега-Стилтьеса абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда порождающая функция абсолютно непрерывна.)

28. **Измеримая функция. Лемма о необходимом и достаточном условии измеримости. Примеры: функция Дирихле, характеристическая функция измеримого множества, функция скачков.**
(Критерий: прообраз любого борелевского множества измерим.)

29. **Теорема об измеримости композиции измеримых функций. Замечание о непрерывности одной из функций композиции. Эквивалентность измеримых функций. Лемма об измеримости функции, эквивалентной измеримой функции. Эквивалентность функции Дирихле. Теорема об арифметических операциях над измеримыми функциями.**

30. **Сходимость в пространстве измеримых функций: равномерная, точечная, почти всюду, по мере. Теорема о пределе последовательности измеримых функций. Следствия.**
(Идея: поточечный предел измеримых функций измерим.)

31. **Теорема Лебега о сходимости последовательности измеримых функций на пространстве с полной конечной -аддитивной мерой. Пример последовательности на пространстве с -конечной мерой, когда сходимость по мере отсутствует. Пример последовательности, сходящейся по мере, но не сходящейся ни в одной точке.**
(Идея теоремы: сходимость почти всюду и ограниченность мажорантой влекут сходимость в L^1.)

32. **Теорема Рисса о подпоследовательности функций, сходящейся по мере. Замечание в случае -конечной меры.**
(Идея: из сходимости по мере можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду.)

33. **Теорема Егорова о возможности перехода поточечной сходимости в равномерную. Замечание для случая -конечной меры и соответствующий пример. Теорема Лузина (без док-ва).**
(Идея: на множестве конечной меры сходимость почти всюду можно сделать равномерной на подмножестве сколь угодно близкой меры.)

34. **Простые функции. Теорема — критерий простоты функции. Теорема о замкнутости множества простых функций относительно алгебраических операций. Теорема о существовании равномерно сходящейся последовательности для измеримой функции.**
(Идея: аппроксимировать измеримую функцию ступенчатыми функциями.)

35. **Суммируемость по мере (интегрируемой по Лебегу) простых функций. Лемма об интеграле от простой функции. Пример простой функции с условно сходящимся рядом.**
(Интеграл от простой функции определяется как сумма значений на множествах разбиения, умноженных на меры этих множеств.)

36. **Свойства интеграла Лебега от простых функций: линейность, ограниченность по модулю.**

37. **Функции, суммируемые по мере (интегрируемые по Лебегу). Корректность определения.**
(Определение через предел интегралов от аппроксимирующих простых функций.)

38. **Формула вычисления интеграла Лебега от измеримых функций. Обоснование. Пример вычисления интеграла Лебега от функции.**
(Идея: $\int f\,d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x : f(x) > t\})\,dt$ для неотрицательных функций.)

39. **Свойства интеграла Лебега по множеству конечной меры: интеграл от единичной функции, линейность, интегрируемость ограниченной функции, интеграл от неотрицательной функции, интегрируемость ограниченной по модулю функции (частные случаи).**

40. **Свойства интеграла Лебега по множеству конечной меры: аддитивность, суммируемость функции и ее модуля. Существенная ограниченность функции. Существенная верхняя грань функции.**
(Существенная верхняя грань: $\operatorname{ess\,sup} f = \inf\{c : \mu(\{x : f(x) > c\}) = 0\}$.)

41. **Свойства интеграла Лебега по множеству конечной меры: свойство подынтегральной функции, если интеграл нулевой. Лемма (неравенство Чебышева). Пример функции, интегрируемой по Лебегу, но не интегрируемой по Риману. Пример функции, эквивалентной простой функции, и вычисление от нее интеграла.**
(Неравенство Чебышева: $\mu(\{x : |f(x)| \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha}\int |f|\,d\mu$.)

42. **Интеграл Лебега как функция множества. Теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Теорема о -аддитивности интеграла Лебега (без док-ва). Следствие о суммируемости на подмножестве.**

43. **Теорема о суммируемости функции на разбиении (без док-ва).**

44. **Свойства интеграла Лебега как функции множества (без док-ва).**

45. **Теорема Лебега о пределе ограниченной последовательности измеримых функций (без док-ва). Следствие.**
(Теорема о мажорированной сходимости.)

46. **Теорема Беппо Леви (без док-ва). Следствие (без док-ва). Замечание.**
(Теорема о монотонной сходимости.)

47. **Теорема Фату (без док-ва). Замечание.**

48. **Суммируемость измеримой функции, заданной на множестве с -конечной мерой. Замечание.**

49. **Теорема о суммируемости функции при условии существования интеграла Римана (без док-ва).**

50. **Абсолютная сходимость несобственного интеграла. Теорема — необходимое и достаточное условие абсолютной сходимости интеграла Римана II рода (без док-ва).**

51. **Теорема — необходимое и достаточное условие абсолютной сходимости интеграла Римана I рода (без док-ва).**

52. **Интеграл Лебега-Стилтьеса.**
(Определение: $\int f\,dg = \int f\,d\mu_g$, где μ_g — мера Лебега-Стилтьеса, порожденная функцией g.)