1. Утверждение о замкнутости кольца по отношению к операциям объеди- нения и разности.

Пусть задано непустое множество X, $P(X)$ — семейство всех его подмножеств.
Определение 2.1. Непустое семейство $K \subset P(X)$ называют **кольцом подмножеств**, если для любых $A, B \in K$ выполнены условия: $A \triangle B \in K$, $A \cap B \in K$.
Утверждение 2.1. Пусть $K \subset P(X)$ — кольцо. Тогда для любых $A, B \in K$ выполняются включения: $A \cup B \in K$, $A \setminus B \in K$.
Доказательство. Для любых множеств A и B справедливы равенства: $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$ и $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$. Поскольку кольцо замкнуто относительно симметрической разности и пересечения, то $A \cup B \in K$ и $A \setminus B \in K$. □

2. Утверждение о замкнутости алгебры относительно дополнения и объеди- нения.

Утверждение 2.2. Пусть непустая система $K \subset P(X)$ обладает свойствами: 1) для любого $A \in K$ выполнено $X \setminus A \in K$; 2) для любых $A, B \in K$ выполнено $A \cup B \in K$. Тогда K является **алгеброй**.
Доказательство. Из условий (1) и (2) получаем: $X = A \cup (X \setminus A) \in K$. Далее: $A \cap B = X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) \in K$, $A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in K$, $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \in K$. Таким образом, K — кольцо, содержащее X, то есть алгебра. □
Определение 2.3. Кольцо множеств называется **σ-кольцом**, если оно вместе с каждой последовательностью множеств $A_1, A_2, \ldots$ содержит их счётное объединение, то есть $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in K$.
Определение 2.4. **σ-алгеброй** называется σ-кольцо с единицей.

3.Теорема о существовании и единственности минимального кольца, порож- денного системой множеств.

Теорема 2.1. Для любой непустой системы множеств $S \subset P(X)$ существует единственное минимальное кольцо $K(S)$, содержащее S, то есть такое, что: 1) $S \subset K(S)$; 2) для любого кольца K, содержащего S, выполнено $K(S) \subset K$.
Доказательство. Существование хотя бы одного кольца, содержащего S, очевидно: например, $P(X)$. Рассмотрим множество $M = \bigcup_{A \in S} A$ и кольцо $P(M)$ всех подмножеств M. Пусть $\Sigma = \{K : K \subset P(M),\ S \subset K,\ K \text{ — кольцо}\}$. Положим $K(S) = \bigcap_{K \in \Sigma} K$. Докажем, что $K(S)$ — искомое минимальное кольцо. Во-первых, пересечение любого семейства колец является кольцом (проверка замкнутости относительно $\triangle$ и $\cap$ очевидна). Следовательно, $K(S)$ — кольцо. Во-вторых, $S \subset K(S)$, так как S содержится в каждом кольце из Σ. Наконец, если K' — произвольное кольцо, содержащее S, то $K' \cap P(M)$ является кольцом из Σ, значит $K(S) \subset K' \cap P(M) \subset K'$. Единственность минимального кольца очевидна. □

4. Лемма о пополнении частичного разбиения до полного элементами полу- кольца.

Пусть X — непустое множество, $P(X)$ — семейство всех его подмножеств.
Определение 2.5. Непустая система $S \subset P(X)$ называется **полукольцом**, если: 1) $\varnothing \in S$; 2) для любых $A, B \in S$ выполнено $A \cap B \in S$; 3) для любых $A, B \in S$ существует конечная система попарно непересекающихся множеств $C_1, \ldots, C_n \in S$ такая, что $A \setminus B = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$.
Лемма 2.1. Пусть S — полукольцо, $A \in S$, и $A_1, \ldots, A_n \in S$ — попарно непересекающиеся множества, содержащиеся в A. Тогда систему $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ можно дополнить множествами $A_{n+1}, \ldots, A_m \in S$ до конечного разложения $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, причём $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$.
Доказательство. Индукция по n. При $n = 1$ утверждение следует из определения полукольца: существуют $C_1, \ldots, C_k \in S$ такие, что $A \setminus A_1 = \bigcup_{j=1}^{k} C_j$, причём множества C_j попарно не пересекаются и не пересекаются с A_1. Тогда $A = A_1 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_k$ — искомое разложение. Предположим, утверждение верно для $n = k$. Докажем для $n = k + 1$. По предположению индукции существует разложение $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k \cup B_1 \cup \cdots \cup B_l$, где все множества в правой части попарно не пересекаются и принадлежат S. Рассмотрим множество A_{k+1}. Для каждого $j = 1, \ldots, l$ множество $B_j \cap A_{k+1}$ принадлежит S (по замкнутости относительно пересечения). Тогда, по определению полукольца, существуют $D_{j1}, \ldots, D_{jr_j} \in S$, попарно непересекающиеся, такие, что $B_j \setminus A_{k+1} = \bigcup_{s=1}^{r_j} D_{js}$. При этом $B_j = (B_j \cap A_{k+1}) \cup D_{j1} \cup \cdots \cup D_{jr_j}$, и все компоненты не пересекаются. Заметим, что $B_j \cap A_{k+1} \subset A_{k+1}$ и не пересекается с другими A_i при $i \leq k$. Теперь заменим в разложении множества B_j на $B_j \cap A_{k+1}, D_{j1}, \ldots, D_{jr_j}$. После проведения такой замены для всех j получим разложение A, в котором все множества попарно не пересекаются, принадлежат S, и среди них присутствуют $A_1, \ldots, A_{k+1}$. Таким образом, шаг индукции завершён. □

5. Теорема о структуре кольца, минимального над заданным полукольцом.

Теорема 2.2. Пусть $S \subset P(X)$ — полукольцо. Тогда минимальное кольцо $K(S)$, порождённое S, состоит в точности из всех множеств, представимых в виде конечных объединений попарно непересекающихся элементов из S, то есть

$$K(S) = \left\{ A : A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ A_i \in S,\ A_i \cap A_j = \varnothing \text{ при } i \neq j \right\}.$$

Доказательство. Обозначим через R систему всех таких конечных объединений. Покажем, что R — кольцо. 1) Пусть $A, B \in R$. Тогда $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$, где $A_i, B_j \in S$ и внутри каждого объединения множества попарно не пересекаются. Тогда $A \cap B = \bigcup_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} (A_i \cap B_j)$. Каждое $A_i \cap B_j \in S$ (по замкнутости полукольца относительно пересечения), и эти множества попарно не пересекаются (так как не пересекаются A_i между собой и B_j между собой). Следовательно, $A \cap B \in R$. 2) Покажем, что $A \setminus B \in R$. Имеем:

$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j \right) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} (A_i \setminus B_j).$$

Для каждого i рассмотрим множества $A_i \setminus B_j$. По определению полукольца, каждое $A_i \setminus B_j$ представляется как конечное объединение непересекающихся элементов из S. Затем, применяя лемму, можно показать, что пересечение $\bigcap_{j=1}^{m} (A_i \setminus B_j)$ также допускает представление в виде конечного объединения непересекающихся элементов из S. Объединяя такие представления для всех i, получим, что $A \setminus B \in R$. 3) Поскольку кольцо замкнуто относительно симметрической разности и пересечения, а также объединения (как следствие), то R действительно является кольцом. Очевидно, что $S \subset R$. Если K — любое кольцо, содержащее S, то оно должно содержать все конечные объединения элементов из S, то есть $R \subset K$. Следовательно, $R = K(S)$. $\square$

6. Мера (2 пункта). Примеры мер (длина, площадь, мера, порожденная функ- цией, мощность множества). Свойства монотонности и субтрактивности меры.

Определение 3.1. Пусть на некотором множестве X задано полукольцо $S \subset P(X)$. Будем говорить, что на S задана **мера**, если каждому элементу $A \in S$ поставлено в соответствие вещественное число $m(A) \in \mathbb{R}$ и при этом выполнены следующие условия: 1) $m(A) \ge 0$ (неотрицательность); 2) если $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, где $A_i \in S$ и множества A_i попарно не пересекаются, то $m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$ (конечная аддитивность). Таким образом, мера первоначально определяется только на полукольце множеств.

Пример 3.1. На числовой прямой $\mathbb{R}$ рассмотрим полукольцо $S = \{[a, b) \mid -\infty < a < b < +\infty\}$ и определим меру $m([a, b)) = b - a$. Длина полуинтервала удовлетворяет аксиомам меры. **Пример 3.2.** На $\mathbb{R}^2$ рассмотрим полукольцо S, состоящее из «полуоткрытых» прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат: $P = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$, где $a_i < b_i$. Тогда площадь прямоугольника $m(P) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ удовлетворяет аксиомам меры.

Определение 3.2. Мера m, заданная на полукольце $S \subset P(X)$, называется **счётно-аддитивной** (или **σ-аддитивной** если для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots \in S$ такой, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$, выполнено равенство $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$.

Свойство 3.1 (Монотонность). Если $A, B \in K$ и $A \subset B$, то $m(A) \le m(B)$.

Доказательство. Поскольку $B = A \cup (B \setminus A)$ и $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$, причём $B \setminus A \in K$ (кольцо замкнуто относительно разности), то по аддитивности меры $m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \ge m(A)$, так как $m(B \setminus A) \ge 0$. $\square$

Свойство 3.2 (Субтрактивность меры). Если $A, B \in K$, $A \subset B$ и $m(A) < \infty$, то $m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$.

Доказательство. Из равенства $m(B) = m(A) + m(B \setminus A)$ следует искомая формула, поскольку все величины конечны. $\square$

7. Свойства меры: формула включения-исключения для двух множеств, сим- метрической разности, оценка модуля разности мер множеств, оценка ме- ры симметрической разности двух множеств, счетная полуаддитивность меры.

Свойство 3.4 (Включение–исключение для двух множеств). Если $A, B \in K$, то $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

Доказательство. Запишем $A \cup B$ как объединение непересекающихся множеств: $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$. Тогда по аддитивности $m(A \cup B) = m(A \setminus B) + m(A \cap B) + m(B \setminus A)$. С другой стороны, $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, откуда $m(A) = m(A \setminus B) + m(A \cap B)$. Аналогично, $m(B) = m(B \setminus A) + m(A \cap B)$. Выражая $m(A \setminus B)$ и $m(B \setminus A)$ и подставляя в первое равенство, получаем требуемую формулу. $\square$

Свойство 3.5 (Мера симметрической разности). Если $A, B \in K$, то $m(A \triangle B) = m(A) + m(B) - 2m(A \cap B)$.

Доказательство. Так как $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ и множества не пересекаются, то $m(A \triangle B) = m(A \setminus B) + m(B \setminus A)$.

Используя равенства $m(A \setminus B) = m(A) - m(A \cap B)$ и $m(B \setminus A) = m(B) - m(A \cap B)$ (которые справедливы, если мера конечна, либо в общем случае с осторожностью), получаем искомую формулу. $\square$

Свойство 3.6 (Неравенство для разности мер). Если $A, B \in K$, то $|m(A) - m(B)| \le m(A \triangle B)$. **Доказательство.** Заметим, что $A \subset B \cup (A \triangle B)$, откуда по монотонности и полуаддитивности $m(A) \le m(B) + m(A \triangle B)$. Аналогично, $B \subset A \cup (A \triangle B)$, поэтому $m(B) \le m(A) + m(A \triangle B)$. Из этих двух неравенств следует требуемое. $\square$

Свойство 3.7 (Неравенство треугольника для симметрической разности). Если $A, B, C \in K$, то $m(A \triangle B) \le m(A \triangle C) + m(C \triangle B)$. **Доказательство.** Используем включение $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$. Действительно, если $x \in A \triangle B$, то x принадлежит ровно одному из множеств A и B. Если $x \in C$, то $x \notin B$ (иначе x принадлежал бы обоим A и B), значит, $x \in C \triangle B$. Если же $x \notin C$, то $x \in A \triangle C$. Таким образом, включение доказано. Тогда по монотонности и полуаддитивности $m(A \triangle B) \le m((A \triangle C) \cup (C \triangle B)) \le m(A \triangle C) + m(C \triangle B)$. $\square$

Свойство 3.8 (Счётная полуаддитивность). Пусть мера m является σ-аддитивной на кольце K. Если $A_1, A_2, \ldots \in K$ и $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in K$, то $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$. **Доказательство.** Построим последовательность попарно непересекающихся множеств $B_k \in K$ следующим образом: $B_1 = A_1$, $B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$ для $k \ge 2$. Так как кольцо замкнуто относительно конечных объединений и разностей, то $B_k \in K$. Кроме того, $B_k \subset A_k$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$. В силу σ-аддитивности меры $m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$, где неравенство следует из монотонности $(m(B_k) \le m(A_k))$. $\square$

8. Теорема о счетной аддитивности полуинтервальной меры.

Теорема 3.1 (3.1). Длина полуинтервала, определённая на полукольце $S = \{[a, b) \subset \mathbb{R}\}$ формулой $m([a, b)) = b - a$, является σ-аддитивной мерой.

Доказательство. Пусть $A = [a, b) \in S$ и $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A_i = [a_i, b_i) \in S$ и множества A_i попарно не пересекаются. Требуется доказать, что $b - a = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)$. 1. Доказательство неравенства $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) \le b - a$. Для любого натурального n имеем $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset A$, и так как мера аддитивна для конечных объединений, то $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) = m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \le m(A) = b - a$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) \le b - a$. Ряд с неотрицательными членами сходится. 2. Доказательство неравенства $b - a \le \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Для каждого полуинтервала $A_i = [a_i, b_i)$ построим интервал $B_i = (a_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, b_i)$, так что $A_i \subset B_i$. Также вместо полуинтервала A рассмотрим отрезок $B = [a, b - \frac{\varepsilon}{2}] \subset A$. Тогда $B \subset A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Таким образом, отрезок B покрыт системой открытых интервалов $\{B_i\}$. По лемме Гейне–Бореля из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие: существуют индексы $i_1, \ldots, i_k$ такие, что $B \subset \bigcup_{j=1}^{k} B_{i_j}$. Тогда длина отрезка B не превосходит суммы длин интервалов этого конечного покрытия: $b - a - \frac{\varepsilon}{2} = |B| \le \sum_{j=1}^{k} |B_{i_j}| = \sum_{j=1}^{k} (b_{i_j} - a_{i_j} + \frac{\varepsilon}{2^{i_j+1}}) \le \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$. Поскольку $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \frac{\varepsilon}{2}$, получаем $b - a - \frac{\varepsilon}{2} \le \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) + \frac{\varepsilon}{2}$, откуда $b - a \le \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) + \varepsilon$. В силу произвольности ε заключаем, что $b - a \le \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i)$. Из двух доказанных неравенств следует равенство (3.1), что и доказывает σ-аддитивность длины. $\square$

9. Пример не σ-аддитивной меры на числовой прямой (в кач-ве порождаю- щей функции взять разрывную функцию). Примеры σ-аддитивных мер (точечная, вероятностная).

Пример 3.7. Мера, построенная по неубывающей функции F (пример 3.3), не обязана быть σ-аддитивной. Рассмотрим, например, функцию $F(x) = 0$ при $x < \frac{1}{2}$ и $F(x) = 1$ при $x \ge \frac{1}{2}$. Определим меру $m_F([a, b)) = F(b) - F(a)$. Покажем, что она не является σ-аддитивной. Возьмём полуинтервал $A = [0, \frac{1}{2})$ и разобьём его на счётное число непересекающихся полуинтервалов $A_i = [a_i, a_{i+1})$, где $a_1 = 0$, $a_i \uparrow \frac{1}{2}$. Тогда $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Вычислим: $m_F(A) = F(\frac{1}{2}) - F(0) = 1 - 0 = 1$, но для каждого i имеем $a_{i+1} < \frac{1}{2}$, поэтому $F(a_{i+1}) = 0$ и $F(a_i) = 0$, откуда $m_F(A_i) = 0$. Следовательно, $\sum_{i=1}^{\infty} m_F(A_i) = 0 \ne 1 = m_F(A)$. Таким образом, условие σ-аддитивности не выполняется. Этот пример показывает, что для σ-аддитивности меры, порождённой функцией F, необходимо накладывать дополнительные условия на F (например, непрерывность справа).

Пример 3.5. Пусть x_0 — фиксированная точка множества X. Для любого множества $A \subset X$ положим $\delta_{x_0}(A) = 1$, если $x_0 \in A$, и $\delta_{x_0}(A) = 0$, если $x_0 \notin A$. Эта мера, называемая **мерой Дирака** (или единичной массой в точке x_0), является σ-аддитивной на $S = P(X)$.

Пример 3.6. Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счётное множество, и заданы числа $p_n \ge 0$ такие, что $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. Для любого $A \subset X$ определим $m(A) = \sum_{x_n \in A} p_n$. Тогда m является σ-аддитивной мерой на $P(X)$ и $m(X) = 1$. Такая мера является **дискретным распределением вероятностей**.

10. Теорема о продолжении меры, заданной на полукольце, на минимальное кольцо. Следствие о сохранении свойства продолжения меры.

Определение 4.1. Пусть m — мера, заданная на полукольце S, и пусть K — кольцо, содержащее S (т.е. $S \subset K$). Мера μ, заданная на K, называется **продолжением меры** m, если для любого множества $A \in S$ выполняется равенство $\mu(A) = m(A)$.

Теорема 4.1. Пусть m — мера на полукольце $S \subset P(X)$ и $K(S)$ — минимальное кольцо, порождённое S. Тогда на $K(S)$ существует единственная мера μ, являющаяся продолжением меры m.

Доказательство. Доказательство разобьём на три этапа: построение продолжения, проверка корректности построения и проверка аксиом меры. 1. *Построение.* В силу теоремы о структуре минимального кольца, порождённого полукольцом (теорема 2.2), каждое множество $A \in K(S)$ допускает представление в виде конечного объединения попарно непересекающихся элементов из S: $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, где $A_i \in S$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Если на $K(S)$ существует продолжение μ меры m, то в силу аддитивности должно выполняться: $\mu(A) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n m(A_i)$. Это равенство задаёт явную формулу для продолжения, если оно существует. Таким образом, продолжение, если оно существует, единственно. 2. *Корректность.* Покажем, что формула задаёт функцию $\mu : K(S) \to [0, +\infty]$ корректно, т.е. значение $\mu(A)$ не зависит от выбора разбиения множества A на попарно непересекающиеся элементы из S. Пусть $A \in K(S)$ имеет два разложения: $A = \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{j=1}^m B_j$, где $A_i, B_j \in S$ и внутри каждого разложения множества попарно не пересекаются. Рассмотрим множества $C_{ij} = A_i \cap B_j$. Так как S — полукольцо, то $C_{ij} \in S$. Для каждого фиксированного i множества $\{C_{ij}\}_{j=1}^m$ попарно не пересекаются и $A_i = \bigcup_{j=1}^m C_{ij}$. Аналогично, для каждого фиксированного j множества $\{C_{ij}\}_{i=1}^n$ попарно не пересекаются и $B_j = \bigcup_{i=1}^n C_{ij}$. Тогда, используя конечную аддитивность меры m на S, получаем: $\sum_{i=1}^n m(A_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m(C_{ij}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n m(C_{ij}) = \sum_{j=1}^m m(B_j)$. Таким образом, значение $\mu(A)$ не зависит от выбора разложения, и функция μ определена корректно. 3. *Проверка аксиом меры.* • Неотрицательность: по определению, $\mu(A) = \sum_{i=1}^n m(A_i) \geq 0$, так как $m(A_i) \geq 0$. • Аддитивность: пусть $A, B \in K(S)$ и $A \cap B = \varnothing$. Тогда существуют разложения $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $B = \bigcup_{j=1}^m B_j$, где $A_i, B_j \in S$ и множества внутри каждого объединения попарно не пересекаются. Поскольку A и B не пересекаются, объединение $A \cup B$ можно представить как $\bigcup_{i=1}^n A_i \cup \bigcup_{j=1}^m B_j$, где все множества попарно не пересекаются. Тогда по определению μ: $\mu(A \cup B) = \sum_{i=1}^n m(A_i) + \sum_{j=1}^m m(B_j) = \mu(A) + \mu(B)$. Это доказывает конечную аддитивность μ. Более того, если $A_1, \ldots, A_k \in K(S)$ попарно не пересекаются, то аналогичным образом можно показать, что $\mu(\bigcup_{p=1}^k A_p) = \sum_{p=1}^k \mu(A_p)$. Таким образом, μ — мера на $K(S)$, которая по построению совпадает с m на S. Единственность уже обоснована на этапе построения. Теорема доказана. □