Содержание

1 Некоторые сведения из теории множеств

2 Кольцо, полукольцо, алгебра множеств

Для введения понятия меры нам понадобится класс множеств, удовлетворяющий по отношению к введённым операциям некоторым определённым условиям замкнутости.

2.1 Основные определения

Пусть задано непустое множество X, $\mathcal{P}(X)$ — семейство всех его подмножеств.

Определение 2.1. *Непустое семейство $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ называют **кольцом** подмножеств, если для любых $A, B \in \mathcal{K}$ выполнены условия:*

$$A \triangle B \in \mathcal{K}, \quad A \cap B \in \mathcal{K}.$$

Утверждение 2.1. *Пусть $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ — кольцо. Тогда для любых $A, B \in \mathcal{K}$ выполняются включения:*

$$A \cup B \in \mathcal{K}, \quad A \setminus B \in \mathcal{K}.$$

Доказательство. Для любых множеств A и B справедливы равенства:

$$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B), \quad A \setminus B = A \triangle (A \cap B).$$

Поскольку кольцо замкнуто относительно симметрической разности и пересечения, то $A \cup B \in \mathcal{K}$ и $A \setminus B \in \mathcal{K}$. □

Таким образом, кольцо множеств замкнуто относительно взятия объединения, пересечения, разности и симметрической разности. Отсюда следует, что кольцо замкнуто и относительно образования любых конечных объединений и пересечений: если $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{K}$, то

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{K}, \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{K}.$$

Однако кольцо, вообще говоря, не замкнуто относительно дополнения.

Любое кольцо содержит пустое множество $\emptyset$, так как $\emptyset = A \setminus A$ для любого $A \in \mathcal{K}$. Система, состоящая только из пустого множества, является наименьшим возможным кольцом.

Определение 2.2. *Кольцо $\mathcal{K}$ называется **алгеброй**, если $X \in \mathcal{K}$. Множество X в этом случае называется **единицей** кольца.*

Утверждение 2.2. *Пусть непустая система $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ обладает свойствами:*

1. *для любого $A \in \mathcal{K}$ выполнено $X \setminus A \in \mathcal{K}$;*
2. *для любых $A, B \in \mathcal{K}$ выполнено $A \cup B \in \mathcal{K}$.*

Тогда $\mathcal{K}$ является алгеброй.

Доказательство. Из условия 1 и 2 получаем, что $X = A \cup (X \setminus A) \in \mathcal{K}$. Далее,

$$A \cap B = X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) \in \mathcal{K},$$

$$A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{K},$$

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \in \mathcal{K}.$$

Таким образом, $\mathcal{K}$ — кольцо, содержащее X, т.е. алгебра. □

2.2 Примеры

1. Для любого множества X система $\mathcal{P}(X)$ всех его подмножеств является алгеброй.
2. На числовой прямой $\mathbb{R}$ система всех конечных и счётных подмножеств образует кольцо, но не алгебру (так как $\mathbb{R}$ несчётно).
3. Система всех ограниченных подмножеств $\mathbb{R}$ является кольцом, но не алгеброй (так как $\mathbb{R}$ неограниченно).
4. Система всех открытых подмножеств $\mathbb{R}$ не является кольцом (разность двух открытых множеств может не быть открытой).

2.3 Сигма-кольца и сигма-алгебры

Определение 2.3. *Кольцо множеств называется* ***σ-кольцом****, если оно вместе с каждой последовательностью множеств $A_1, A_2, \ldots$ содержит их счётное объединение, т.е.*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{K}.$$

Определение 2.4. ***σ-алгеброй*** *называется σ-кольцо с единицей.*

В теории меры часто приходится расширять произвольную систему множеств до кольца (алгебры) или σ-кольца (σ-алгебры).

2.4 Минимальное кольцо, порождённое системой множеств

Теорема 2.1. *Для любой непустой системы множеств $S \subset \mathcal{P}(X)$ существует единственное минимальное кольцо $\mathcal{K}(S)$, содержащее S, т.е. такое, что:*

1. *$S \subset \mathcal{K}(S)$;*
2. *для любого кольца $\mathcal{K}$, содержащего S, выполнено $\mathcal{K}(S) \subset \mathcal{K}$.*

Доказательство. Существование хотя бы одного кольца, содержащего S, очевидно: например, $\mathcal{P}(X)$. Рассмотрим множество

$$M = \bigcup_{A \in S} A$$

и кольцо $\mathcal{P}(M)$ всех подмножеств M. Пусть

$$\Sigma = \{\mathcal{K} : \mathcal{K} \subset \mathcal{P}(M),\ S \subset \mathcal{K},\ \mathcal{K} \text{ — кольцо}\}.$$

Положим

$$\mathcal{K}(S) = \bigcap_{\mathcal{K} \in \Sigma} \mathcal{K}.$$

Докажем, что $\mathcal{K}(S)$ — искомое минимальное кольцо. Во-первых, пересечение любого семейства колец является кольцом (проверка замкнутости относительно $\triangle$ и $\cap$ очевидна). Следовательно, $\mathcal{K}(S)$ — кольцо. Во-вторых, $S \subset \mathcal{K}(S)$, так как S содержится в каждом кольце из Σ. Наконец, если $\mathcal{K}'$ — произвольное кольцо, содержащее S, то $\mathcal{K}' \cap \mathcal{P}(M)$ является кольцом из Σ, значит, $\mathcal{K}(S) \subset \mathcal{K}' \cap \mathcal{P}(M) \subset \mathcal{K}'$. Единственность минимального кольца очевидна. □

Построение $\mathcal{K}(S)$ по произвольной системе S в общем случае сложно. Поэтому полезно выделить специальный класс систем, для которых строение минимального кольца прозрачно.

2.5 Полукольцо множеств

Определение 2.5. *Непустая система $S \subset \mathcal{P}(X)$ называется* ***полукольцом****, если:*

1. *$\emptyset \in S$;*
2. *для любых $A, B \in S$ выполнено $A \cap B \in S$;*
3. *для любых $A, B \in S$ существует конечная система попарно непересекающихся множеств $C_1, \ldots, C_n \in S$ такая, что*

$$A \setminus B = \bigcup_{k=1}^{n} C_k.$$

Заметим, что в полукольце разность множеств, вообще говоря, не принадлежит полукольцу, а представляется как конечное объединение непересекающихся элементов полукольца.

2.6 Примеры полуколец

1. Любое кольцо является полукольцом (в этом случае разность принадлежит кольцу, и можно взять одно множество).
2. Совокупность всех полуинтервалов $[a, b)$ на числовой прямой $\mathbb{R}$ образует полукольцо, но не кольцо.
3. Совокупность всех «полуоткрытых прямоугольников» $[a, b) \times [c, d)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ является полукольцом, но не кольцом.

2.7 Структура минимального кольца, порождённого полукольцом

Лемма 2.1. *Пусть S — полукольцо, $A \in S$, и $A_1, \ldots, A_n \in S$ — попарно непересекающиеся множества, содержащиеся в A. Тогда систему $\{A_i\}_{i=1}^n$ можно дополнить множествами $A_{n+1}, \ldots, A_m \in S$ до конечного разложения*

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \quad (A_i \cap A_j = \emptyset \text{ при } i \neq j).$$

Доказательство. Индукция по n. При $n = 1$ утверждение следует из определения полукольца: существуют $C_1, \ldots, C_k \in S$ такие, что

$$A \setminus A_1 = \bigcup_{j=1}^{k} C_j,$$

причём C_j попарно не пересекаются и не пересекаются с A_1. Тогда $A = A_1 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_k$ — искомое разложение.

Предположим, утверждение верно для $n = k$. Докажем для $n = k + 1$. По предположению индукции существует разложение

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_k \cup B_1 \cup \cdots \cup B_l,$$

где все множества в правой части попарно не пересекаются и принадлежат S. Рассмотрим множество A_{k+1}. Для каждого $j = 1, \ldots, l$ множество $B_j \cap A_{k+1}$ принадлежит S (по замкнутости относительно пересечения). Тогда, по определению полукольца, существуют $D_{j1}, \dots, D_{jr_j} \in S$, попарно непересекающиеся, такие, что

$$B_j \setminus A_{k+1} = \bigcup_{s=1}^{r_j} D_{js}.$$

При этом $B_j = (B_j \cap A_{k+1}) \cup D_{j1} \cup \dots \cup D_{jr_j}$, и все компоненты не пересекаются. Заметим, что $B_j \cap A_{k+1} \subset A_{k+1}$ и не пересекается с другими A_i (при $i \leq k$). Теперь заменим в разложении множества B_j на $B_j \cap A_{k+1}, D_{j1}, \dots, D_{jr_j}$. После проведения такой замены для всех j получим разложение A, в котором все множества попарно не пересекаются, принадлежат S, и среди них присутствуют $A_1, \dots, A_{k+1}$. Таким образом, шаг индукции завершён. □

Теорема 2.2. *Пусть $S \subset \mathcal{P}(X)$ — полукольцо. Тогда минимальное кольцо $\mathcal{K}(S)$, порождённое S, состоит в точности из всех множеств, представимых в виде конечных объединений попарно непересекающихся элементов из S, т.е.*

$$\mathcal{K}(S) = \left\{ A : A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ A_i \in S,\ A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j) \right\}.$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{R}$ систему всех таких конечных объединений. Покажем, что $\mathcal{R}$ — кольцо.

1. Пусть $A, B \in \mathcal{R}$. Тогда
$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j,$$
где $A_i, B_j \in S$ и внутри каждого объединения множества попарно не пересекаются. Тогда
$$A \cap B = \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (A_i \cap B_j).$$
Каждое $A_i \cap B_j \in S$ (по замкнутости полукольца относительно пересечения), и эти множества попарно не пересекаются (так как не пересекаются A_i между собой и B_j между собой). Следовательно, $A \cap B \in \mathcal{R}$.

2. Покажем, что $A \setminus B \in \mathcal{R}$. Имеем:
$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} \left(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B_j \right) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} (A_i \setminus B_j).$$
Для каждого i рассмотрим множества $A_i \setminus B_j$. По определению полукольца, каждое $A_i \setminus B_j$ представляется как конечное объединение непересекающихся элементов из S. Затем, применяя лемму, можно показать, что пересечение $\bigcap_{j=1}^{m} (A_i \setminus B_j)$ также допускает представление в виде конечного объединения непересекающихся элементов из S. Объединяя такие представления для всех i, получим, что $A \setminus B \in \mathcal{R}$.

3. Поскольку кольцо замкнуто относительно симметрической разности и пересечения, а также объединения (как следствие), то $\mathcal{R}$ действительно является кольцом.

Очевидно, что $S \subset \mathcal{R}$. Если $\mathcal{K}$ — любое кольцо, содержащее S, то оно должно содержать все конечные объединения элементов из S, т.е. $\mathcal{R} \subset \mathcal{K}$. Следовательно, $\mathcal{R} = \mathcal{K}(S)$. □

2.8 Примеры порождённых колец и сигма-алгебр

1. Пусть $X = [a, b)$ — фиксированный полуинтервал, $S = \{[\alpha, \beta) : a \leq \alpha < \beta \leq b\}$. Тогда $\mathcal{K}(S)$ состоит из всех конечных объединений непересекающихся полуинтервалов из S. Это кольцо является алгеброй.

2. Рассмотрим на числовой прямой $\mathbb{R}$ систему S всех открытых множеств. Сама S не является полукольцом (разность двух открытых множеств не обязательно открыта). Однако S можно использовать как порождающую систему для σ-алгебры. σ-алгебра, порождённая всеми открытыми множествами, называется **борелевской σ-алгеброй** и обозначается $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Её элементы называются **борелевскими множествами**. В эту σ-алгебру входят все открытые множества, все замкнутые множества, множества типа G_δ (счётные пересечения открытых), типа F_σ (счётные объединения замкнутых) и т.д.

3 Понятие меры множества. Простейшие свойства меры

Понятие меры множества является естественным обобщением таких понятий, как длина отрезка, площадь прямоугольника, объем параллелепипеда и т.д. При построении меры мы будем пользоваться не конкретными формулами для длины, площади или объема, а общими их свойствами, такими как неотрицательность и аддитивность. Сначала определим меру для некоторого класса так называемых элементарных множеств (заданных полукольцом), а затем расширим это понятие на более обширный класс множеств — измеримых.

3.1 Определение меры на полукольце

Определение 3.1. *Пусть на некотором множестве X задано полукольцо $S \subset \mathcal{P}(X)$. Будем говорить, что на S задана* ***мера****, если каждому элементу $A \in S$ поставлено в соответствие вещественное число $m(A) \in \mathbb{R}$ и при этом выполнены следующие условия:*

1. *$m(A) \geq 0$ (неотрицательность);*

2. *если $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, где $A_i \in S$ и множества A_i попарно не пересекаются, то*

$$m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \quad \text{(конечная аддитивность).}$$

Таким образом, мера первоначально определяется только на полукольце множеств.

Пример 3.1. *На числовой прямой $\mathbb{R}$ рассмотрим полукольцо $S = \{[a, b) \mid -\infty < a < b < +\infty\}$ и определим меру $m([a, b)) = b - a$. Длина полуинтервала удовлетворяет аксиомам меры.*

Пример 3.2. *На $\mathbb{R}^2$ рассмотрим полукольцо S, состоящее из «полуоткрытых» прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат:*

$$P = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2), \quad a_i < b_i.$$

Тогда площадь прямоугольника $m(P) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ удовлетворяет аксиомам меры.

Пример 3.3. *Рассмотрим полукольцо S полуинтервалов на $\mathbb{R}$. Пусть $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция. Определим меру полуинтервала $[a, b)$ формулой*

$$m_F([a, b)) = F(b) - F(a).$$

Требование неотрицательности меры эквивалентно условию $F(b) - F(a) \geq 0$ при $b > a$, что выполнено в силу монотонности F. Конечная аддитивность также выполняется: если $[a, b) = \bigcup_{i=1}^{n} [a_{i-1}, a_i)$, где $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$, то

$$\sum_{i=1}^{n} m_F([a_{i-1}, a_i)) = \sum_{i=1}^{n} (F(a_i) - F(a_{i-1})) = F(b) - F(a) = m_F([a, b)).$$

Пример 3.4. *Пусть на произвольном множестве X задано полукольцо, состоящее из всех его конечных подмножеств. Можно определить меру любого множества $A \in S$ как количество элементов в нём: $m(A) = |A|$. Очевидно, что аксиомы меры будут выполнены.*

3.2 Счетная аддитивность (σ-аддитивность)

В определении меры требуется аддитивность только для конечных разбиений. Однако во многих задачах возникает необходимость рассматривать счётные разбиения множеств. Это приводит к понятию σ-аддитивной меры.

Определение 3.2. *Мера m, заданная на полукольце $S \subset \mathcal{P}(X)$, называется* ***счетно-аддитивной*** *(или* ***σ-аддитивной****), если для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \dots \in S$ такой, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$, выполнено равенство*

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i). \tag{3.1}$$

Пример 3.5. *Пусть x_0 — фиксированная точка множества X. Для любого множества $A \subset X$ положим*

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_0 \in A, \\ 0, & \text{если } x_0 \notin A. \end{cases}$$

Эта мера, называемая ***мерой Дирака*** *(или единичной массой в точке x_0), является σ-аддитивной на $S = \mathcal{P}(X)$.*

Пример 3.6. *Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ — счётное множество, и заданы числа $p_n \geq 0$ такие, что $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. Для любого $A \subset X$ определим*

$$m(A) = \sum_{x_n \in A} p_n.$$

Тогда m является σ-аддитивной мерой на $\mathcal{P}(X)$ и $m(X) = 1$. Такая мера является дискретным распределением вероятностей.

3.3 σ-аддитивность длины полуинтервала

Теорема 3.1 (3.1)**.** *Длина полуинтервала, определённая на полукольце $S = \{[a, b) \subset \mathbb{R}\}$ формулой $m([a, b)) = b - a$, является σ-аддитивной мерой.*

Доказательство. Пусть $A = [a, b) \in S$ и $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A_i = [a_i, b_i) \in S$ и множества A_i попарно не пересекаются. Требуется доказать, что

$$b - a = \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i).$$

1. Доказательство неравенства $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \leq b - a$.
Для любого натурального n имеем $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset A$, и так как мера аддитивна для конечных объединений, то

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) = m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq m(A) = b - a.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \leq b - a$. Ряд с неотрицательными членами сходится.

2. Доказательство неравенства $b - a \leq \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)$.
Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Для каждого полуинтервала $A_i = [a_i, b_i)$ построим интервал $B_i = (a_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, b_i)$, так что $A_i \subset B_i$. Также вместо полуинтервала A рассмотрим отрезок $B = [a, b - \frac{\varepsilon}{2}] \subset A$. Тогда

$$B \subset A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Таким образом, отрезок B покрыт системой открытых интервалов $\{B_i\}$. По лемме Гейне–Бореля из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие: существуют индексы $i_1, \ldots, i_k$ такие, что

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{k} B_{i_j}.$$

Тогда длина отрезка B не превосходит суммы длин интервалов этого конечного покрытия:

$$b - a - \frac{\varepsilon}{2} = |B| \leq \sum_{j=1}^{k} |B_{i_j}| = \sum_{j=1}^{k} \left(b_{i_j} - a_{i_j} + \frac{\varepsilon}{2^{i_j+1}}\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}.$$

Поскольку $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \frac{\varepsilon}{2}$, получаем

$$b - a - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) + \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$b - a \leq \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε заключаем, что $b - a \leq \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)$.

Из двух доказанных неравенств следует равенство (3.1), что и доказывает σ-аддитивность длины. $\square$

Пример 3.7. *Мера, построенная по неубывающей функции F (пример 3.3), не обязана быть σ-аддитивной. Рассмотрим, например, функцию*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{2}, \\ 1, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Определим меру $m_F([a,b)) = F(b) - F(a)$. Покажем, что она не является σ-аддитивной. Возьмём полуинтервал $A = [0, \frac{1}{2})$ и разобьём его на счётное число непересекающихся полуинтервалов:

$$A_i = [a_i, a_{i+1}), \quad \text{где } a_1 = 0,\ a_i \uparrow \frac{1}{2}.$$

Тогда $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Вычислим:

$$m_F(A) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = 1 - 0 = 1,$$

но для каждого i имеем $a_{i+1} < \frac{1}{2}$, поэтому $F(a_{i+1}) = 0$ и $F(a_i) = 0$, откуда $m_F(A_i) = 0$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} m_F(A_i) = 0 \neq 1 = m_F(A).$$

Таким образом, условие σ-аддитивности не выполняется. Этот пример показывает, что для σ-аддитивности меры, порождённой функцией F, необходимо накладывать дополнительные условия на F (например, непрерывность справа).

3.4 Свойства меры на кольце

Дальнейшие свойства меры удобно изучать, предполагая, что мера задана на кольце (или алгебре) множеств. Напомним, что любое кольцо является полукольцом, и, более того, меру с полукольца можно единственным образом продолжить на порождённое кольцо с сохранением аддитивности (это будет обсуждаться позже). Поэтому следующие свойства формулируются для меры, заданной на кольце $\mathcal{K}$.

Свойство 3.1 (Монотонность)**.** *Если $A, B \in \mathcal{K}$ и $A \subset B$, то $m(A) \leq m(B)$.*

Доказательство. Поскольку $B = A \cup (B \setminus A)$ и $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, причём $B \setminus A \in \mathcal{K}$ (кольцо замкнуто относительно разности), то по аддитивности меры

$$m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \geq m(A),$$

так как $m(B \setminus A) \geq 0$. □

Свойство 3.2 (Субтрактивность меры (вычитание))**.** *Если $A, B \in \mathcal{K}$, $A \subset B$ и $m(A) < \infty$, то*

$$m(B \setminus A) = m(B) - m(A). \tag{3.4}$$

Доказательство. Из равенства $m(B) = m(A) + m(B \setminus A)$ следует искомая формула, поскольку все величины конечны. □

Свойство 3.3 (Конечная полуаддитивность)**.** *Если $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{K}$ и $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{K}$, то*

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} m(A_i).$$

Доказательство. Достаточно доказать для $n = 2$. Общий случай следует по индукции. Пусть $A, B \in \mathcal{K}$. Заметим, что $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, причём множества в правой части не пересекаются. Тогда

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B \setminus A) \leq m(A) + m(B),$$

поскольку $B \setminus A \subset B$ и по монотонности $m(B \setminus A) \leq m(B)$. □

Свойство 3.4 (Включение-исключение для двух множеств)**.** *Если* $A, B \in \mathcal{K}$*, то*

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B). \tag{3.5}$$

Доказательство. Запишем $A \cup B$ как объединение непересекающихся множеств: $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$. Тогда по аддитивности

$$m(A \cup B) = m(A \setminus B) + m(A \cap B) + m(B \setminus A).$$

С другой стороны, $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, откуда $m(A) = m(A \setminus B) + m(A \cap B)$. Аналогично, $m(B) = m(B \setminus A) + m(A \cap B)$. Выражая $m(A \setminus B)$ и $m(B \setminus A)$ и подставляя в первое равенство, получаем (3.5). □

Свойство 3.5 (Мера симметрической разности)**.** *Если* $A, B \in \mathcal{K}$*, то*

$$m(A \triangle B) = m(A) + m(B) - 2m(A \cap B). \tag{3.6}$$

Доказательство. Так как $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ и множества не пересекаются, то

$$m(A \triangle B) = m(A \setminus B) + m(B \setminus A).$$

Используя равенства $m(A \setminus B) = m(A) - m(A \cap B)$ и $m(B \setminus A) = m(B) - m(A \cap B)$ (которые справедливы, если мера конечна, либо в общем случае с осторожностью), получаем искомую формулу. □

Свойство 3.6 (Неравенство для разности мер)**.** *Если* $A, B \in \mathcal{K}$*, то*

$$|m(A) - m(B)| \leq m(A \triangle B). \tag{3.7}$$

Доказательство. Заметим, что $A \subset B \cup (A \triangle B)$, откуда по монотонности и полуаддитивности

$$m(A) \leq m(B) + m(A \triangle B).$$

Аналогично, $B \subset A \cup (A \triangle B)$, поэтому

$$m(B) \leq m(A) + m(A \triangle B).$$

Из этих двух неравенств следует (3.7). □

Свойство 3.7 (Неравенство треугольника для симметрической разности)**.** *Если* $A, B, C \in \mathcal{K}$*, то*

$$m(A \triangle B) \leq m(A \triangle C) + m(C \triangle B). \tag{3.8}$$

Доказательство. Используем включение $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$. Действительно, если $x \in A \triangle B$, то x принадлежит ровно одному из множеств A и B. Если $x \in C$, то $x \notin B$ (иначе x принадлежал бы обоим A и B), значит, $x \in C \triangle B$. Если же $x \notin C$, то $x \in A \triangle C$. Таким образом, включение доказано. Тогда по монотонности и полуаддитивности

$$m(A \triangle B) \leq m((A \triangle C) \cup (C \triangle B)) \leq m(A \triangle C) + m(C \triangle B).$$

□

Свойство 3.8 (Счётная полуаддитивность)**.** *Пусть мера* m *является* σ*-аддитивной на кольце* $\mathcal{K}$*. Если* $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{K}$ *и* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{K}$*, то*

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i). \tag{3.9}$$

Доказательство. Построим последовательность попарно непересекающихся множеств $B_k \in \mathcal{K}$ следующим образом:

$$B_1 = A_1, \quad B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \quad \text{для } k \geq 2.$$

Так как кольцо замкнуто относительно конечных объединений и разностей, то $B_k \in \mathcal{K}$. Кроме того, $B_k \subset A_k$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$. В силу σ-аддитивности меры

$$m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k),$$

где неравенство следует из монотонности $(m(B_k) \leq m(A_k))$. □

4 Продолжение меры с полукольца на минимальное кольцо

Пусть задано множество X и $S \subset \mathcal{P}(X)$ — полукольцо его подмножеств, на котором определена мера m. В этом разделе мы покажем, как можно продолжить меру m на минимальное кольцо $\mathcal{K}(S)$, порождённое полукольцом S. Это продолжение будет единственным и сохранит свойства аддитивности и, в случае σ-аддитивности исходной меры, также σ-аддитивность.

Определение 4.1. *Пусть m — мера, заданная на полукольце S, и пусть $\mathcal{K}$ — кольцо, содержащее S (т.е. $S \subset \mathcal{K}$). Мера μ, заданная на $\mathcal{K}$, называется* ***продолжением меры*** *m, если для любого множества $A \in S$ выполняется равенство $\mu(A) = m(A)$.*

Основной результат этого раздела состоит в следующем.

Теорема 4.1. *Пусть m — мера на полукольце $S \subset \mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{K}(S)$ — минимальное кольцо, порождённое S. Тогда на $\mathcal{K}(S)$ существует единственная мера μ, являющаяся продолжением меры m.*

Доказательство. Доказательство разобьём на три этапа: построение продолжения, проверка корректности построения и проверка аксиом меры.

1. Построение. В силу теоремы о структуре минимального кольца, порождённого полукольцом (теорема 2.2), каждое множество $A \in \mathcal{K}(S)$ допускает представление в виде конечного объединения попарно непересекающихся элементов из S:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad A_i \in S, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j).$$

Если на $\mathcal{K}(S)$ существует продолжение μ меры m, то в силу аддитивности должно выполняться:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i). \tag{4.1}$$

Это равенство задаёт явную формулу для продолжения, если оно существует. Таким образом, продолжение, если оно существует, единственно.

2. Корректность. Покажем, что формула (4.1) задаёт функцию $\mu : \mathcal{K}(S) \to [0, +\infty]$ корректно, т.е. значение $\mu(A)$ не зависит от выбора разбиения множества A на попарно непересекающиеся элементы из S.

Пусть $A \in \mathcal{K}(S)$ имеет два разложения:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_j,$$

где $A_i, B_j \in S$ и внутри каждого разложения множества попарно не пересекаются. Рассмотрим множества $C_{ij} = A_i \cap B_j$. Так как S — полукольцо, то $C_{ij} \in S$. Заметим, что для каждого фиксированного i множества $\{C_{ij}\}_{j=1}^{m}$ попарно не пересекаются и $A_i = \bigcup_{j=1}^{m} C_{ij}$ (поскольку $A_i \subset A$ и A_i покрывается множествами B_j, но из-за непересекаемости B_j пересечение A_i с каждым B_j даёт часть A_i, и эти части не пересекаются). Аналогично, для каждого фиксированного j множества $\{C_{ij}\}_{i=1}^{n}$ попарно не пересекаются и $B_j = \bigcup_{i=1}^{n} C_{ij}$.

Тогда, используя конечную аддитивность меры m на S, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} m(A_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m(C_{ij}) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m(C_{ij}) = \sum_{j=1}^{m} m(B_j).$$

Здесь изменение порядка суммирования допустимо, так как все суммы конечны и состоят из неотрицательных слагаемых. Таким образом, значение $\mu(A)$, заданное формулой (4.1), не зависит от выбора разложения, и функция μ определена корректно.

3. Проверка аксиом меры. Теперь убедимся, что μ является мерой на кольце $\mathcal{K}(S)$.

- **Неотрицательность.** По определению, $\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \geq 0$, так как $m(A_i) \geq 0$.

- **Аддитивность.** Пусть $A, B \in \mathcal{K}(S)$ и $A \cap B = \emptyset$. Тогда существуют разложения:

  $$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j,$$

  где $A_i, B_j \in S$ и множества внутри каждого объединения попарно не пересекаются. Поскольку A и B не пересекаются, объединение $A \cup B$ можно представить как $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup \bigcup_{j=1}^{m} B_j$, где все множества попарно не пересекаются. Тогда по определению μ:

  $$\mu(A \cup B) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) + \sum_{j=1}^{m} m(B_j) = \mu(A) + \mu(B).$$

  Это доказывает конечную аддитивность μ. Более того, если $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{K}(S)$ попарно не пересекаются, то аналогичным образом можно показать, что

  $$\mu\left(\bigcup_{p=1}^{k} A_p\right) = \sum_{p=1}^{k} \mu(A_p).$$

Таким образом, μ — мера на $\mathcal{K}(S)$, которая по построению совпадает с m на S. Единственность уже обоснована на этапе построения. Теорема доказана. □

Следствие 4.1. *Если мера m на полукольце S является σ-аддитивной, то её продолжение μ на $\mathcal{K}(S)$ также обладает свойством σ-аддитивности.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{K}(S)$ и $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где $A_k \in \mathcal{K}(S)$ и множества A_k попарно не пересекаются. Нужно доказать, что

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

По теореме о структуре $\mathcal{K}(S)$ каждое из множеств A и A_k допускает разложение на конечное число попарно непересекающихся элементов из S:

$$A = \bigcup_{j=1}^{m} B_j, \quad A_k = \bigcup_{l=1}^{s_k} B_{kl}, \quad B_j, B_{kl} \in S.$$

Рассмотрим множества $C_{jkl} = B_j \cap B_{kl} \in S$. Заметим, что для каждого фиксированного j множества $\{C_{jkl}\}_{k,l}$ попарно не пересекаются (так как B_{kl} при разных k или l не пересекаются внутри одного A_k, а при разных k множества A_k также не пересекаются) и

$$B_j = \bigcup_{k,l} C_{jkl}.$$

Аналогично, для фиксированных k и l множества $\{C_{jkl}\}_j$ попарно не пересекаются и

$$B_{kl} = \bigcup_{j} C_{jkl}.$$

Теперь вычислим $\mu(A)$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$, используя определение μ и σ-аддитивность меры m на S:

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{m} m(B_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k,l} m(C_{jkl}) = \sum_{k,l} \sum_{j=1}^{m} m(C_{jkl}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{s_k} m(B_{kl}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Законность изменения порядка суммирования в рядах с неотрицательными членами обеспечивается теоремой о перестановке рядов (например, теоремой Фубини для сумм). Таким образом, μ является σ-аддитивной мерой на $\mathcal{K}(S)$. $\square$

Замечание 4.1. *Предположение о том, что исходная мера задана именно на полукольце, существенно для однозначности её продолжения. Если мера задана на произвольной системе множеств, то продолжение на порождённое кольцо может быть не единственным.*

Элементы кольца $\mathcal{K}(S)$ естественно называть **элементарными множествами** относительно исходного полукольца S.

4.1 Множества меры нуль

Важным понятием в теории меры является понятие множества меры нуль. Оно позволяет говорить о свойствах, выполняющихся «почти всюду», что будет существенно при изучении интеграла Лебега.

Определение 4.2. *Пусть на кольце $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ задана σ-аддитивная мера μ. Множество $A \subset X$ (не обязательно принадлежащее $\mathcal{K}$) называется **множеством меры нуль**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечный или счётный набор множеств $E_i \in \mathcal{K}$, покрывающий A (т.е. $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$), такой, что*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) < \varepsilon.$$

Пример 4.1. *Рассмотрим на числовой прямой $\mathbb{R}$ полукольцо S полуинтервалов $[a, b)$ с обычной мерой длины $m([a, b)) = b - a$, и пусть μ — её продолжение на кольцо $\mathcal{K}(S)$.*

1. *Любое одноточечное множество $\{a\}$ является множеством меры нуль. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ выберем n так, что $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Тогда $\{a\} \subset [a, a+\frac{1}{n})$ и $m([a, a+\frac{1}{n})) = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Более того, можно покрыть $\{a\}$ интервалом сколь угодно малой длины.*

2. *Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ на числовой прямой также является множеством меры нуль. Поскольку $\mathbb{Q}$ счётно, занумеруем его: $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$. Для заданного $\varepsilon > 0$ покроем каждую точку r_i интервалом $[r_i, r_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}})$ (или, например, $(r_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+2}}, r_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+2}})$, адаптировав под полуинтервалы). Тогда*

$$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[r_i, r_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right),$$

и сумма длин этих полуинтервалов равна

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Таким образом, $\mathbb{Q}$ — множество меры нуль.

Понятие множества меры нуль позволяет ввести важное понятие «почти всюду».

Определение 4.3. *Свойство $P(x)$, определённое для точек $x \in X$, называется выполненным **почти всюду** (относительно меры μ), если множество точек, для которых это свойство не выполняется, является множеством меры нуль.*

Например, говорят, что две функции равны почти всюду, если множество точек, где они различаются, имеет меру нуль. В дальнейшем это понятие будет играть ключевую роль в теории интеграла Лебега.

5 Непрерывность счётно-аддитивной меры на кольце

В этом разделе мы изучаем важное свойство счётно-аддитивных мер — непрерывность. Мы покажем, что для мер, заданных на кольце, свойство счётной аддитивности эквивалентно непрерывности относительно монотонных последовательностей множеств.

Пусть $\mathcal{K}$ — кольцо подмножеств множества X, и на $\mathcal{K}$ задана мера m. Напомним, что мера может принимать значения в $[0, +\infty]$, но при рассмотрении непрерывности снизу мы обычно требуем конечности меры убывающих множеств (или иначе условие может быть сформулировано с осторожностью).

Определение 5.1 (Непрерывность сверху)**.** *Меру m, заданную на кольце $\mathcal{K}$, называют **непрерывной снизу**, если для любой возрастающей последовательности множеств $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, такой что $A_n \in \mathcal{K}$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$, выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m(A). \tag{5.1}$$

Обозначение: $A_n \uparrow A$.

Определение 5.2 (Непрерывность снизу)**.** *Меру m, заданную на кольце $\mathcal{K}$, называют **непрерывной сверху**, если для любой убывающей последовательности множеств $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$, такой что $A_n \in \mathcal{K}$, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$ и $m(A_1) < \infty$, выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m(A). \tag{5.2}$$

Обозначение: $A_n \downarrow A$. Условие $m(A_1) < \infty$ гарантирует, что все меры конечны (в силу монотонности) и разности $m(A_n) - m(A)$ имеют смысл.

Определение 5.3. *Меру называют* ***непрерывной****, если она непрерывна сверху или снизу (в соответствующем смысле).*

Заметим, что для мер, заданных на кольце, непрерывность сверху и непрерывность снизу, вообще говоря, не эквивалентны без дополнительных условий (например, конечности меры первого множества в убывающей последовательности). Однако для счётно-аддитивных мер на кольце эти свойства оказываются эквивалентными при естественных ограничениях.

Следующая теорема устанавливает фундаментальную связь между счётной аддитивностью и непрерывностью.

Теорема 5.1. *Мера m, заданная на кольце $\mathcal{K}$, является счётно-аддитивной тогда и только тогда, когда она непрерывна снизу. Кроме того, если мера счётно-аддитивна и $A_n \downarrow A$ с $m(A_1) < \infty$, то она непрерывна сверху.*

Доказательство. Доказательство разбиваем на две части: необходимость и достаточность.

Необходимость. Предположим, что мера m счётно-аддитивна на кольце $\mathcal{K}$. Докажем непрерывность снизу. Пусть $A_n \uparrow A$, где $A_n, A \in \mathcal{K}$. Построим последовательность попарно непересекающихся множеств:

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus A_{n-1} \text{ для } n \geq 2.$$

Так как $\mathcal{K}$ — кольцо, то $B_n \in \mathcal{K}$. Кроме того, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$. В силу счётной аддитивности имеем:

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n).$$

С другой стороны, для любого $n \geq 1$ выполнено $A_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} B_k$, поэтому

$$m(A_n) = \sum_{k=1}^{n} m(B_k).$$

Таким образом, частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} m(B_k)$ равны $m(A_n)$, и сходимость ряда влечёт

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) = m(A).$$

Значит, мера непрерывна снизу.

Теперь докажем непрерывность сверху при дополнительном условии конечности меры первого множества. Пусть $A_n \downarrow A$, $A_n, A \in \mathcal{K}$ и $m(A_1) < \infty$. Рассмотрим возрастающую последовательность множеств $B_n = A_1 \setminus A_n$. Так как A_n убывает, то B_n возрастает. Кроме того, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A_1 \setminus A$ (поскольку $x \in A_1 \setminus A$ тогда и только тогда, когда $x \in A_1$ и $x \notin A$, т.е. существует n такое, что $x \notin A_n$, а значит, $x \in B_n$). По только что доказанному свойству непрерывности снизу для последовательности $B_n \uparrow (A_1 \setminus A)$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty} m(B_n) = m(A_1 \setminus A).$$

Но $m(B_n) = m(A_1) - m(A_n)$ (так как $A_n \subseteq A_1$ и мера конечна, то свойство вычитания справедливо) и $m(A_1 \setminus A) = m(A_1) - m(A)$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} (m(A_1) - m(A_n)) = m(A_1) - m(A),$$

откуда $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m(A)$. Таким образом, мера непрерывна сверху.

Достаточность. Предположим теперь, что мера m непрерывна снизу. Докажем её счётную аддитивность. Пусть $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность попарно непересекающихся множеств из $\mathcal{K}$ таких, что $B = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{K}$. Определим возрастающую последовательность множеств:

$$A_n = \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i \in \mathcal{K}.$$

Очевидно, $A_n \uparrow B$. По условию непрерывности снизу имеем:

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m(B).$$

Но $m(A_n) = \sum_{i=1}^{n} m(B_i)$ в силу конечной аддитивности меры. Поэтому

$$m(B) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i),$$

что и означает счётную аддитивность меры m.

□

Замечание 5.1. *Если мера задана на полукольце и является там непрерывной (сверху или снизу), то она может не быть счётно-аддитивной. Это связано с тем, что полукольцо не замкнуто относительно счётных объединений, и условие непрерывности может выполняться тривиально для тех последовательностей, для которых предельное множество не принадлежит полукольцу. Для корректной формулировки эквивалентности необходимо, чтобы мера была задана на кольце (или хотя бы на алгебре), где можно рассматривать счётные объединения и пересечения.*

6 Внешняя мера

В параграфе 4 мы показали, что любую меру, заданную на полукольце S, можно единственным образом продолжить на минимальное кольцо $\mathcal{K}(S)$. Если мера m на S не является σ-аддитивной, то дальнейшее её продолжение на более широкий класс множеств в общем случае невозможно. Однако если мера m σ-аддитивна, то её можно продолжить на класс множеств, который шире, чем $\mathcal{K}(S)$, с помощью конструкции, предложенной Лебегом в 1902 году. Такое продолжение называется **лебеговым продолжением**. Мы остановимся на том случае, когда $\mathcal{K}(S)$ является алгеброй, т. е. $X \in \mathcal{K}(S)$, и вместо $\mathcal{K}(S)$ будем писать просто $\mathcal{K}$.

Пусть на алгебре $\mathcal{K}$ задана σ-аддитивная мера m. Определим на системе всех подмножеств множества X функцию μ^*, которая каждому множеству $A \subset X$ ставит в соответствие число $\mu^*(A)$ по следующему правилу. Поскольку $X \in \mathcal{K}$, то для каждого множества A существует его покрытие элементами алгебры $\mathcal{K}$ (например, $A_1 = X$, $A_i = \emptyset$ при $i \geq 2$). Вычислим меру такого покрытия и возьмём точную нижнюю грань по всевозможным покрытиям.

Определение 6.1. ***Внешней мерой*** *множества $A \subset X$ называется число*

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) : A_i \in \mathcal{K},\ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\}. \tag{6.1}$$

Заметим, что точная нижняя грань существует, так как суммы ряда неотрицательны (меры $m(A_i) \geq 0$), и тривиальное покрытие $A_1 = X$, $A_i = \emptyset$ $(i \geq 2)$ даёт сумму $m(X)$, которая может быть конечной или бесконечной.

Теорема 6.1. *Внешняя мера μ^*, заданная на $\mathcal{P}(X)$, является продолжением меры m с алгебры $\mathcal{K}$, т. е. для любого множества $A \in \mathcal{K}$ выполняется $\mu^*(A) = m(A)$.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{K}$. С одной стороны, рассмотрим покрытие $A_1 = A$, $A_i = \emptyset$ при $i \geq 2$. Тогда

$$\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) = m(A).$$

С другой стороны, пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — произвольное покрытие множества A элементами из $\mathcal{K}$, т. е. $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Поскольку мера m σ-аддитивна на алгебре $\mathcal{K}$, она обладает свойством счётной полуаддитивности (см. свойство 3.7):

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

Таким образом, $m(A)$ является нижней границей для сумм $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ по всем покрытиям. Следовательно,

$$m(A) \leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) : A_i \in \mathcal{K},\ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\} = \mu^*(A).$$

Из двух неравенств получаем $\mu^*(A) = m(A)$. □

Упражнение 6.1. *Показать, что внешняя мера μ^* не является, вообще говоря, аддитивной функцией на $\mathcal{P}(X)$, т. е. существуют непересекающиеся множества $A, B \subset X$ такие, что $\mu^*(A \cup B) < \mu^*(A) + \mu^*(B)$.*

Указание. *Позже будет показано, что при естественных предположениях (например, для меры Лебега на $\mathbb{R}$) существуют неизмеримые множества, для которых нарушается аддитивность. В качестве предварительного рассуждения можно заметить, что внешняя мера обладает лишь свойством счётной полуаддитивности (см. ниже свойство 6.4), которое слабее аддитивности.*

Далее перечислим основные свойства внешней меры.

Свойство 6.1 (Совпадение с мерой на алгебре)**.** *Если $A \in \mathcal{K}$, то*

$$\mu^*(A) = m(A). \tag{6.2}$$

Доказательство. Это прямое следствие теоремы 6.1. □

Свойство 6.2 (Неотрицательность и мера пустого множества)**.** *Для любого множества $A \subset X$ выполнено $\mu^*(A) \geq 0$, а также $\mu^*(\emptyset) = 0$.*

Доказательство. По определению, внешняя мера есть инфимум неотрицательных чисел, поэтому $\mu^*(A) \geq 0$. Для пустого множества рассмотрим покрытие $A_i = \emptyset$ для всех i. Тогда $\sum_{i=1}^{\infty} m(\emptyset) = 0$, откуда $\mu^*(\emptyset) \leq 0$. С другой стороны, неотрицательность даёт $\mu^*(\emptyset) \geq 0$. Следовательно, $\mu^*(\emptyset) = 0$. □

Свойство 6.3 (Монотонность)**.** *Если $A, B \subset X$ и $A \subseteq B$, то*

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B). \tag{6.4}$$

Доказательство. Любое покрытие множества B элементами из $\mathcal{K}$ является также покрытием для A. Поэтому множество сумм, по которому берётся инфимум для $\mu^*(A)$, содержит множество сумм для $\mu^*(B)$. Следовательно, инфимум для A не превосходит инфимума для B, т. е. $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. □

Свойство 6.4 (Счётная полуаддитивность). *Для любой последовательности множеств* $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ *выполняется неравенство*

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i). \tag{6.5}$$

Доказательство. Если ряд справа расходится, то неравенство очевидно. Предположим, что ряд сходится. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению внешней меры для каждого i существует покрытие $\{A_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ множества B_i элементами из $\mathcal{K}$ такое, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(A_{ij}) \le \mu^*(B_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}. \tag{6.6}$$

Объединение всех этих покрытий образует покрытие множества $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}.$$

Тогда по определению внешней меры

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} m(A_{ij}) \le \sum_{i=1}^{\infty}\left(\mu^*(B_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i) + \varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно, получаем требуемое неравенство. □

Свойство 6.5 (Неравенство для разности внешних мер). *Для любых множеств* $A, B \subset X$ *выполняется*

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \le \mu^*(A \triangle B). \tag{6.8}$$

Доказательство. Заметим, что $A \subset B \cup (A \triangle B)$. По свойствам монотонности и счётной полуаддитивности:

$$\mu^*(A) \le \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B).$$

Аналогично, $B \subset A \cup (A \triangle B)$, откуда

$$\mu^*(B) \le \mu^*(A) + \mu^*(A \triangle B).$$

Из этих двух неравенств следует, что $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \le \mu^*(A \triangle B)$. □

Свойство 6.6 (Неравенство треугольника для симметрической разности). *Для любых множеств* $A, B, C \subset X$ *выполняется*

$$\mu^*(A \triangle B) \le \mu^*(A \triangle C) + \mu^*(C \triangle B). \tag{6.9}$$

Доказательство. Используем включение $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$. Действительно, если $x \in A \triangle B$, то x принадлежит ровно одному из множеств A и B. Если $x \in C$, то $x \notin B$ (иначе x принадлежал бы обоим A и B), значит, $x \in C \triangle B$. Если же $x \notin C$, то $x \in A \triangle C$. Таким образом, включение доказано. Тогда по монотонности и счётной полуаддитивности:

$$\mu^*(A \triangle B) \le \mu^*((A \triangle C) \cup (C \triangle B)) \le \mu^*(A \triangle C) + \mu^*(C \triangle B).$$

□

6.1 Внутренняя мера

Для множества $A \subset X$ наряду с внешней мерой можно ввести понятие внутренней меры.

Определение 6.2. ***Внутренней мерой*** *множества $A \subset X$ называется число*

$$\mu_*(A) = m(X) - \mu^*(X \setminus A). \tag{6.10}$$

Это определение имеет смысл, если $m(X) < \infty$. В противном случае внутренняя мера может определяться иначе (например, как супремум мер множеств из $\mathcal{K}$, содержащихся в A), но в данном курсе мы часто будем предполагать конечность меры всего пространства.

Свойство 6.7 (Связь внутренней и внешней мер)**.** *Для любого множества $A \subset X$ выполняется неравенство*

$$\mu_*(A) \leq \mu^*(A). \tag{6.11}$$

Доказательство. Запишем очевидное равенство: $X = A \cup (X \setminus A)$. Применяя свойство счётной полуаддитивности внешней меры, получаем:

$$m(X) = \mu^*(X) \leq \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A).$$

Отсюда

$$m(X) - \mu^*(X \setminus A) \leq \mu^*(A).$$

Но левая часть равна $\mu_*(A)$ по определению. Таким образом, $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$. □

Замечание 6.1. *Внутренняя мера может быть интерпретирована как «мера, которая помещается внутри множества». Если внешняя мера оценивает множество «сверху» (через покрытия), то внутренняя — «снизу» (через дополнение). Для измеримых множеств (которые будут определены позже) внутренняя и внешняя меры совпадают.*

7 Измеримые по Лебегу множества и продолжение меры

В этом разделе мы покажем, как с помощью понятия внешней меры можно продолжить меру, заданную на алгебре множеств $\mathcal{K}$ (в частности, на $\mathcal{K}(S)$), на некоторую σ-алгебру, содержащую $\mathcal{K}$. Эта конструкция восходит к Лебегу и является основой теории интеграла Лебега.

Пусть X — произвольное множество, $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$ — алгебра его подмножеств, на которой задана σ-аддитивная конечная мера m (т. е. $m(X) < \infty$). Для каждого множества $A \subset X$ определена внешняя мера μ^* (см. параграф 6).

Определение 7.1. *Множество $A \subset X$ называется* ***измеримым по Лебегу*** *относительно меры m, если для него выполнено равенство*

$$\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X). \tag{7.1}$$

Упражнение 7.1. *Доказать, что множество A измеримо тогда и только тогда, когда*

$$\mu^*(A) = \mu_*(A), \tag{7.2}$$

где $\mu_*(A) = m(X) - \mu^*(X \setminus A)$ — внутренняя мера.

Если множество A измеримо, то его мерой полагают внешнюю меру, т.е.

$$\mu(A) = \mu^*(A). \tag{7.3}$$

Совокупность всех измеримых по Лебегу множеств обозначим через Σ. Заметим, что понятие измеримого множества зависит от исходной меры m, заданной на алгебре $\mathcal{K}$.

Пример 7.1. *Покажем, что любое множество меры нуль измеримо по Лебегу и* $\mu(A) = 0$*. Действительно, если A — множество меры нуль, то для любого $\varepsilon > 0$ существует система множеств $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, $A_i \in \mathcal{K}$, такая что $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) < \varepsilon$. Тогда по определению внешней меры $\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) < \varepsilon$, откуда $\mu^*(A) = 0$. Внутренняя мера $\mu_*(A) = m(X) - \mu^*(X \setminus A) \leq m(X)$, но также $\mu_*(A) \geq 0$. Однако из неравенства $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$ (свойство 6.7) и равенства $\mu^*(A) = 0$ следует $\mu_*(A) = 0$. Таким образом, $\mu^*(A) = \mu_*(A) = 0$, и по упражнению 7.1 множество A измеримо.*

7.1 Критерий измеримости

Следующая теорема даёт удобный критерий измеримости множества.

Теорема 7.1 (Критерий измеримости)**.** *Пусть задано множество X и алгебра $\mathcal{K}$ с σ-аддитивной конечной мерой m. Тогда для любого множества $A \subset X$ следующие утверждения эквивалентны:*

1. *A измеримо по Лебегу относительно меры m;*
2. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует элементарное множество $B \in \mathcal{K}$ такое, что*

$$\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon. \tag{7.4}$$

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть A измеримо, т.е. выполнено $\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X)$. По определению внешней меры для любого $\varepsilon > 0$ существуют покрытия:

- Для A: найдётся система множеств $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, $B_i \in \mathcal{K}$, такая что $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) < \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7.5}$$

- Для $X \setminus A$: найдётся система множеств $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$, $C_i \in \mathcal{K}$, такая что $X \setminus A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(C_i) < \mu^*(X \setminus A) + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7.7}$$

Выберем натуральное число N достаточно большим, чтобы

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} m(B_i) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Положим $B = \bigcup_{i=1}^{N} B_i$. Так как $\mathcal{K}$ — алгебра, то $B \in \mathcal{K}$. Оценим меру симметрической разности $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

- Оценим $\mu^*(A \setminus B)$. Так как $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, то $A \setminus B \subset \bigcup_{i=N+1}^{\infty} B_i$. По свойству монотонности и счётной полуаддитивности внешней меры,

$$\mu^*(A \setminus B) \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} m(B_i) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7.6}$$

- Оценим $\mu^*(B \setminus A)$. Заметим, что $B \setminus A = B \cap (X \setminus A)$. Так как $X \setminus A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, то

$$B \setminus A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (B \cap C_i).$$

Тогда

$$\mu^*(B \setminus A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(B \cap C_i). \tag{7.8}$$

Для каждого i имеем $C_i = (C_i \setminus B) \cup (B \cap C_i)$, причём множества в объединении не пересекаются. Так как m — мера на алгебре $\mathcal{K}$, то

$$m(C_i) = m(C_i \setminus B) + m(B \cap C_i).$$

Суммируя по i, получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(B \cap C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(C_i) - \sum_{i=1}^{\infty} m(C_i \setminus B). \tag{7.9}$$

Заметим теперь, что

$$X \subset \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (C_i \setminus B) \right),$$

так как если точка не принадлежит $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, то она принадлежит $X \setminus A$ (поскольку $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$) и тогда найдётся C_i, содержащее эту точку, и при этом она не лежит в B, т.е. принадлежит $C_i \setminus B$. Тогда по счётной полуаддитивности меры m (на алгебре $\mathcal{K}$ она σ-аддитивна, следовательно, обладает свойством счётной полуаддитивности),

$$m(X) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) + \sum_{i=1}^{\infty} m(C_i \setminus B),$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(C_i \setminus B) \geq m(X) - \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i). \tag{7.10}$$

Подставляя (7.10) в (7.9), получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(B \cap C_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(C_i) - m(X) + \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i). \tag{1.7.11}$$

Используя оценки (7.5) и (7.7), а также равенство (7.1), имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(C_i) - m(X) + \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) < \left(\mu^*(X \setminus A) + \frac{\varepsilon}{3} \right) - m(X) + \left(\mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{3} \right) = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, из (7.8) и (7.11) следует

$$\mu^*(B \setminus A) < \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{7.12}$$

Объединяя (7.6) и (7.12), получаем

$$\mu^*(A \triangle B) \leq \mu^*(A \setminus B) + \mu^*(B \setminus A) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Таким образом, условие 2) выполнено.

Теперь докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существует $B \in \mathcal{K}$ такое, что $\mu^*(A\triangle B) < \varepsilon$. Покажем, что тогда выполнено (7.1). Так как $B \in \mathcal{K}$, то $\mu^*(B) = m(B)$ и $\mu^*(X\setminus B) = m(X\setminus B)$, причём $m(B)+m(X\setminus B) = m(X)$. Используя свойство 6.5 внешней меры (неравенство для разности), имеем:

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A\triangle B) < \varepsilon,$$

$$|\mu^*(X \setminus A) - \mu^*(X \setminus B)| \leq \mu^*((X \setminus A)\triangle(X \setminus B)) = \mu^*(A\triangle B) < \varepsilon.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$|\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) - m(X)| \leq |\mu^*(A) - m(B)| + |\mu^*(X \setminus A) - m(X \setminus B)| < 2\varepsilon.$$

В силу произвольности ε заключаем, что $\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X)$, т.е. множество A измеримо. □

Следствие 7.1. *Множество $A \subset X$ измеримо тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $B \in \Sigma$ (не обязательно из $\mathcal{K}$) такое, что $\mu^*(A\triangle B) < \varepsilon$.*

Доказательство. Если A измеримо, то по теореме 7.1 существует $B \in \mathcal{K} \subset \Sigma$ с требуемым свойством. Обратно, если такое B существует, то поскольку B измеримо, по той же теореме для ε найдётся $C \in \mathcal{K}$ такое, что $\mu^*(B\triangle C) < \varepsilon$. Тогда

$$\mu^*(A\triangle C) \leq \mu^*(A\triangle B) + \mu^*(B\triangle C) < 2\varepsilon,$$

и, следовательно, A измеримо. □

7.2 Структура класса измеримых множеств

Теорема 7.2. *Совокупность Σ измеримых по Лебегу множеств образует σ-алгебру множеств, содержащую исходную алгебру $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Сначала докажем, что Σ — алгебра.

1. Заметим, что в определении измеримости множества A и $X \setminus A$ участвуют симметрично, поэтому если $A \in \Sigma$, то и $X \setminus A \in \Sigma$.

2. Пусть $A_1, A_2 \in \Sigma$. По теореме 7.1 для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множества $B_1, B_2 \in \mathcal{K}$ такие, что
$$\mu^*(A_1\triangle B_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(A_2\triangle B_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Положим $B = B_1 \cup B_2 \in \mathcal{K}$. Тогда
$$(A_1 \cup A_2)\triangle B \subset (A_1\triangle B_1) \cup (A_2\triangle B_2),$$
откуда
$$\mu^*((A_1 \cup A_2)\triangle B) \leq \mu^*(A_1\triangle B_1) + \mu^*(A_2\triangle B_2) < \varepsilon.$$
Следовательно, $A_1 \cup A_2 \in \Sigma$.

3. Так как $A_1 \cap A_2 = X \setminus ((X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2))$, то из уже доказанного следует, что пересечение двух измеримых множеств измеримо.

4. Разность $A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap (X \setminus A_2)$ также измерима.

Таким образом, Σ — алгебра.

Теперь докажем, что Σ — σ-алгебра. Для этого достаточно показать, что счётное объединение измеримых множеств измеримо. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Sigma$. Без ограничения общности можно считать, что множества A_i попарно не пересекаются (иначе можно перейти к последовательности $B_1 = A_1$, $B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$, которая состоит из попарно непересекающихся измеримых множеств, и $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$). Обозначим $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Так как для любого конечного n множество $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ измеримо (как конечное объединение измеримых), то по свойству монотонности внешней меры (которое верно и на Σ, так как внешняя мера совпадает с мерой на измеримых множествах) имеем:

$$\mu^*(A) \geq \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\mu^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i). \tag{7.22}$$

Ряд справа сходится, так как его частичные суммы ограничены сверху числом $\mu^*(A) \leq m(X) < \infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \mu^*(A_i) < \varepsilon.$$

Рассмотрим множество $C = \bigcup_{i=1}^{N} A_i \in \Sigma$. Тогда

$$\mu^*(A \triangle C) = \mu^* \left(\bigcup_{i=N+1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} \mu^*(A_i) < \varepsilon.$$

По следствию 7.1 (или непосредственно по теореме 7.1, так как $C \in \Sigma$ и существует $B \in \mathcal{K}$, близкое к C) множество A измеримо. Таким образом, Σ — σ-алгебра.

Наконец, покажем, что $\mathcal{K} \subset \Sigma$. Если $A \in \mathcal{K}$, то по теореме 6.1 $\mu^*(A) = m(A)$ и $\mu^*(X \setminus A) = m(X \setminus A)$, откуда $\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(A) + m(X \setminus A) = m(X)$. Следовательно, $A \in \Sigma$. $\square$

Следствие 7.2. *Счётное пересечение измеримых множеств измеримо.*

Доказательство. Это следует из того, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i)$, а Σ — σ-алгебра. $\square$

7.3 Счётная аддитивность меры Лебега

Теорема 7.3. *Сужение внешней меры μ^* на класс измеримых множеств Σ задаёт счётно-аддитивную меру μ, т.е. $\mu(A) = \mu^*(A)$ для всех $A \in \Sigma$.*

Доказательство. Сначала докажем конечную аддитивность. Пусть $A_1, A_2 \in \Sigma$ и $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. По теореме 7.1 для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множества $B_1, B_2 \in \mathcal{K}$ такие, что

$$\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon, \quad \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon. \tag{7.13}$$

Положим $B = B_1 \cup B_2 \in \mathcal{K}$. Тогда

$$\mu^*(A \triangle B) \leq \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2) < 2\varepsilon,$$

где $A = A_1 \cup A_2$. Используя свойство 6.5 внешней меры, получаем

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \triangle B) < 2\varepsilon. \tag{7.15}$$

Так как B_1 и B_2 могут пересекаться, вычислим меру B:

$$\mu(B) = m(B) = m(B_1) + m(B_2) - m(B_1 \cap B_2). \tag{7.16}$$

Заметим, что $B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$, поэтому

$$m(B_1 \cap B_2) \leq \mu^*(B_1 \cap B_2) \leq \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2) < 2\varepsilon.$$

Кроме того, снова используя свойство 6.5, имеем

$$|\mu^*(A_1) - m(B_1)| \leq \mu^*(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon, \quad |\mu^*(A_2) - m(B_2)| < \varepsilon.$$

Подставляя эти оценки в (7.16), получаем

$$\mu^*(B) = m(B) > \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 3\varepsilon.$$

Тогда из (7.15) следует

$$\mu^*(A) > \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 5\varepsilon. \tag{7.18}$$

В силу произвольности ε получаем $\mu^*(A) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$. С другой стороны, по свойству счётной полуаддитивности внешней меры (свойство 6.4) имеем $\mu^*(A) \leq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$. Таким образом,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2). \tag{7.21}$$

Итак, конечная аддитивность доказана.

Теперь докажем счётную аддитивность. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность попарно непересекающихся множеств из Σ, и $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Для любого конечного n из конечной аддитивности и монотонности следует:

$$\mu^*(A) \geq \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\mu^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i). \tag{7.23}$$

С другой стороны, по свойству счётной полуаддитивности внешней меры,

$$\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i). \tag{7.24}$$

Из (7.23) и (7.24) следует равенство:

$$\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Таким образом, мера $\mu = \mu^*|_{\Sigma}$ счётно-аддитивна. □

Таким образом, лебеговым продолжением меры m, заданной на алгебре $\mathcal{K}$, называется функция $\mu(A)$, определённая на классе измеримых множеств Σ и совпадающая на $\mathcal{K}$ с $m(A)$, а на Σ — с $\mu^*(A)$.

7.4 Полнота лебегового продолжения

Определение 7.2. *Мера m, заданная на алгебре $\mathcal{K}$, называется* ***полной****, если из условия $m(A) = 0$ следует, что любое подмножество $B \subset A$ принадлежит $\mathcal{K}$ и $m(B) = 0$.*

Лебегово продолжение обладает свойством полноты. Действительно, если $\mu(A) = 0$ и $B \subset A$, то $\mu^*(B) = 0$ (по монотонности внешней меры), и, как показано в примере 7.1, множество B измеримо и $\mu(B) = 0$. Таким образом, лебегово продолжение является полной мерой.

7.5 Случайσ-конечной меры

До сих пор мы предполагали, что мера m на алгебре $\mathcal{K}$ конечна ($m(X) < \infty$). Это предположение использовалось при определении внутренней меры и в некоторых доказательствах. Однако многие важные меры (например, мера Лебега на $\mathbb{R}$) не являются конечными. Поэтому рассмотрим случай σ-конечной меры.

Определение 7.3 (σ-конечная мера)**.** *Мера μ, заданная на кольце $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$, называется* ***$\sigma$-конечной****, если существует последовательность множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A_n \in \mathcal{K}$, такая что $\mu(A_n) < \infty$ для всех n и $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.*

Пример 7.2. 1. *Пусть $X = \mathbb{N}$. На $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ определим меру μ, полагая $\mu(A) = |A|$, если A конечно, и $\mu(A) = \infty$, если A бесконечно. Эта мера σ-конечна: в качестве A_n можно взять $\{1, 2, \dots, n\}$.*

2. *Длина (мера Лебега) на кольце, порождённом полуинтервалами в $\mathbb{R}$, является σ-конечной, так как $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n)$ и $\mu([-n, n)) = 2n < \infty$.*

Упражнение 7.2. *Показать, что если мера μ, заданная на кольце $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$, σ-конечна, то X можно представить в виде объединения счётной системы попарно непересекающихся множеств конечной меры, т.е. $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n$, где $\mu(X_n) < \infty$. (Например, для $\mathbb{R}$ можно взять $X_n = [n, n + 1)$.)*

Определение измеримого множества и конструкция лебегова продолжения обобщаются на случай σ-конечной меры. Один из способов — использовать разложение $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n$ на множества конечной меры и определить меру на каждом X_n как сужение исходной меры. Затем множество $A \subset X$ считается измеримым, если все пересечения $A \cap X_n$ измеримы относительно сужений, и тогда полагают

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A \cap X_n),$$

где μ_n — лебегово продолжение сужения меры на X_n. Можно показать, что это определение корректно и не зависит от выбора разложения.

Определение 7.4. *Пусть мера μ на алгебре $\mathcal{K}$ σ-конечна. Множество $A \subset X$ называется* ***измеримым****, если для каждого n множество $A \cap X_n$ измеримо относительно сужения меры на X_n, где $\{X_n\}$ — разложение X на непересекающиеся множества конечной меры. При этом полагают*

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap X_n). \tag{7.25}$$

Можно показать, что значение $\mu(A)$ не зависит от способа разбиения множества X. Класс измеримых множеств снова образует σ-алгебру, и мера μ является σ-аддитивной и полной.

8 Мера Лебега на числовой прямой

Одним из важнейших примеров меры является мера Лебега на числовой прямой. Она служит обобщением понятия длины интервала на более широкий класс множеств.

8.1 Построение меры Лебега для ограниченных множеств

Рассмотрим сначала ограниченные подмножества прямой. Пусть $[a, b)$ — фиксированный полуинтервал, S — полукольцо, состоящее из всех полуинтервалов $[\alpha, \beta) \subset [a, b)$, и определим меру на S как длину: $m([\alpha, \beta)) = \beta - \alpha$. Как было показано ранее, эта мера является σ-аддитивной на S. Минимальное кольцо $\mathcal{K}(S)$, порождённое S, состоит из всех конечных объединений непересекающихся полуинтервалов из S. Продолжим меру m на $\mathcal{K}(S)$ по аддитивности:

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n}[\alpha_i, \beta_i)\right) = \sum_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i).$$

Затем построим внешнюю меру для любого множества $A \subset [a, b)$:

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\beta_i - \alpha_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}[\alpha_i, \beta_i),\ [\alpha_i, \beta_i) \in S\right\}.$$

Множество A называется **измеримым по Лебегу** на $[a, b)$, если выполнено равенство

$$\mu^*(A) + \mu^*([a, b) \setminus A) = b - a.$$

Для измеримого A полагаем $\mu(A) = \mu^*(A)$. Таким образом, мера Лебега на отрезке — это лебегово продолжение длины.

Упражнение 8.1. *Показать, что мера Лебега ограниченного множества не зависит от выбора содержащего его полуинтервала. Точнее, пусть $A \subset [a, b)$ и $A \subset [a', b')$; μ и μ' — меры Лебега, построенные соответственно для полуинтервалов $[a, b)$ и $[a', b')$. Если A измеримо по одной из этих мер, то оно измеримо и по другой, и при этом $\mu(A) = \mu'(A)$. Воспользоваться определением измеримости множества.*

8.2 Свойства измеримых множеств

Утверждение 8.1. *Множество, состоящее из одной точки, измеримо, и его мера равна нулю.*

Доказательство. Пусть $A = \{a\}$. Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим покрытие $[a, a+\varepsilon)$. Тогда $\mu^*(\{a\}) \leq \varepsilon$, откуда $\mu^*(\{a\}) = 0$. Следовательно, $\{a\}$ — множество меры нуль, а значит, измеримо и $\mu(\{a\}) = 0$. □

Утверждение 8.2. *Всякое не более чем счётное ограниченное множество точек прямой измеримо, и его мера равна нулю.*

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. Тогда $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{a_i\}$. По утверждению 8.1 каждое $\{a_i\}$ измеримо и имеет меру нуль. Так как класс измеримых множеств является σ-алгеброй, то A измеримо. По счётной аддитивности меры $\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(\{a_i\}) = 0$. □

Утверждение 8.3. *Любой ограниченный промежуток (интервал, полуинтервал, отрезок) измерим, и его мера равна его длине.*

Доказательство. Для полуинтервала $[\alpha, \beta)$ это следует из построения, так как он принадлежит исходному полукольцу S. Для отрезка $[\alpha, \beta]$ заметим, что $[\alpha, \beta] = [\alpha, \beta) \cup \{\beta\}$, и так как $\{\beta\}$ имеет меру нуль, то

$$\mu([\alpha, \beta]) = \mu([\alpha, \beta)) + \mu(\{\beta\}) = (\beta - \alpha) + 0 = \beta - \alpha.$$

Для интервала (α, β) имеем $(\alpha, \beta) = [\alpha, \beta) \setminus \{\alpha\}$, откуда

$$\mu((\alpha, \beta)) = \mu([\alpha, \beta)) - \mu(\{\alpha\}) = (\beta - \alpha) - 0 = \beta - \alpha.$$

Аналогично рассматриваются случаи полуинтервалов вида $(\alpha, \beta]$. □

Утверждение 8.4. *Любое ограниченное открытое или замкнутое множество измеримо по Лебегу.*

Доказательство. Известно, что всякое ограниченное открытое множество $G \subset \mathbb{R}$ является объединением не более чем счётного числа непересекающихся интервалов: $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i)$ (это следует, например, из того, что каждая точка открытого множества содержится в некотором максимальном интервале, и таких интервалов не более чем счётно). По утверждению 8.3 каждый интервал измерим, поэтому G как счётное объединение измеримых множеств измеримо.

Пусть теперь F — ограниченное замкнутое множество. Выберем интервал $(\alpha, \beta) \supset F$. Тогда множество $G = (\alpha, \beta) \setminus F$ открыто (как разность открытого и замкнутого), следовательно, измеримо. Тогда $F = (\alpha, \beta) \setminus G$ измеримо как разность двух измеримых множеств. □

Утверждение 8.5. *Любое ограниченное борелевское множество на прямой измеримо по Лебегу.*

Доказательство. Борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ порождается всеми открытыми множествами. Рассмотрим ограниченное борелевское множество A, содержащееся, например, в отрезке $[a, b]$. Все открытые подмножества отрезка $[a, b]$ измеримы по Лебегу (утверждение 8.4). Так как σ-алгебра измеримых множеств Σ содержит все открытые множества, то она содержит и σ-алгебру, порождённую ими, т.е. $\mathcal{B}([a, b])$. Следовательно, A измеримо. □

Упражнение 8.2. *Доказать, что всякое измеримое по Лебегу множество на прямой есть объединение борелевского множества и множества меры нуль.*

8.3 Канторово множество

Пример 8.1 (Канторово совершенное множество)**.** *Построим классическое канторово множество на отрезке $[0, 1]$. Разделим отрезок $[0, 1]$ на три равные части и удалим открытый средний интервал $G_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Оставшееся множество $F_1 = [0, 1] \setminus G_1$ состоит из двух отрезков: $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Каждый из этих отрезков снова разделим на три части и удалим открытые средние трети: $G_2 = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Получим множество $F_2 = F_1 \setminus G_2$, состоящее уже из четырёх отрезков. Продолжая этот процесс бесконечно, на n-м шаге удаляем 2^{n-1} открытых интервалов длины 3^{-n} каждый. Канторово множество определяется как пересечение всех F_n:*

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Свойства канторова множества:

1. K непусто (например, концы удаляемых интервалов принадлежат K).

2. K замкнуто как пересечение замкнутых множеств.

3. K измеримо (как счётное пересечение измеримых множеств), и его мера Лебега равна нулю. Действительно, суммарная длина удалённых интервалов равна

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1/3}{1-2/3} = 1.$$

Следовательно, $\mu(K) = \mu([0,1]) - 1 = 0$.

4. K имеет мощность континуума. Это следует из того, что каждая точка $x \in K$ однозначно представляется в виде троичной дроби без цифры 1 (только 0 и 2). Таких последовательностей столько же, сколько двоичных последовательностей, т.е. мощность континуума.

5. K является совершенным множеством: оно замкнуто и не имеет изолированных точек (каждая точка является предельной).

6. K нигде не плотно (его замыкание не содержит ни одного интервала).

Заметим, что канторово множество обладает свойством самоподобия: его часть, лежащая на отрезке $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, будучи растянута в три раза, совпадает со всем множеством K. Аналогично для любой части, оставшейся на очередном шаге построения.

8.4 Существование неизмеримого множества

Пример 8.2 (Неизмеримое множество)**.** *Покажем, что если мера Лебега определена на всех подмножествах промежутка $[0,1)$, то она может не быть счётно-аддитивной. Построим множество, неизмеримое по Лебегу.*

Определим на полуинтервале $[0,1)$ отношение эквивалентности: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $x - y \in \mathbb{Q}$. Это отношение разбивает $[0,1)$ на непересекающиеся классы эквивалентности. С помощью аксиомы выбора образуем множество $A \subset [0,1)$, содержащее ровно по одному элементу из каждого класса эквивалентности.

Рассмотрим счётное множество всех рациональных чисел из отрезка $[-1,1)$, занумеруем их: $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$. Для каждого r_k определим множество

$$A_k = A + r_k = \{x + r_k \ (mod\ 1) : x \in A\},$$

где сложение по модулю 1 означает, что если $x + r_k \geq 1$, то мы рассматриваем дробную часть. Заметим, что множества A_k попарно не пересекаются. Действительно, если бы существовали $x, y \in A$ и r_k, r_l такие, что $x + r_k \equiv y + r_l \ (mod\ 1)$, то $x - y \equiv r_l - r_k \ (mod\ 1)$ было бы рациональным числом, откуда $x \sim y$, что противоречит построению A (в одном классе только один элемент).

Кроме того, объединение всех A_k покрывает $[0,1)$. В самом деле, для любого $z \in [0,1)$ найдётся $x \in A$ из того же класса эквивалентности, так что $z - x \in \mathbb{Q}$; при этом разность лежит в $[-1,1)$ (поскольку и x, и z лежат в $[0,1)$), значит, $z \in A_k$ для некоторого k. Более того, легко видеть, что

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset [-1,2).$$

Предположим теперь, что множество A измеримо. Тогда все A_k также измеримы (сдвиг по модулю 1 сохраняет измеримость и меру). В силу счётной аддитивности меры Лебега имеем:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A).$$

С одной стороны, $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq \mu([0,1)) = 1$, с другой стороны, $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \mu([-1,2)) = 3$. Таким образом,

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A) \leq 3.$$

Если $\mu(A) = 0$, то сумма ряда равна 0, что противоречит левому неравенству. Если же $\mu(A) > 0$, то ряд расходится, что противоречит правому неравенству. Полученное противоречие показывает, что множество A не может быть измеримым по Лебегу.

8.5 Мера Лебега для неограниченных множеств

Для определения меры Лебега на всей прямой необходимо расширить понятие измеримости на неограниченные множества.

Определение 8.1 (Измеримость неограниченного множества)**.** *Множество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется **измеримым по Лебегу**, если для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ ограниченное множество $A \cap [-n, n)$ измеримо по Лебегу (в смысле меры на ограниченном промежутке). Мерой Лебега множества A называется предел (возможно, бесконечный)*

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap [-n, n)).$$

Так как последовательность $\mu_n = \mu(A \cap [-n, n))$ не убывает, то предел существует (он может быть равен $+\infty$).

Замечание 8.1. *Альтернативный подход: представим $\mathbb{R}$ в виде объединения непересекающихся полуинтервалов единичной длины:*

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{n=-\infty}^{\infty} [n, n+1).$$

Тогда множество $A \subseteq \mathbb{R}$ измеримо тогда и только тогда, когда для каждого n измеримо множество $A_n = A \cap [n, n+1)$ (относительно меры Лебега на этом отрезке). При этом

$$\mu(A) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(A_n),$$

где если ряд расходится, то полагаем $\mu(A) = \infty$.

Оба определения эквивалентны.

Пример 8.3. *Рассмотрим неограниченное множество*

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[n, n + \frac{1}{3^n}\right).$$

Оно измеримо, так как каждое $A_n = A \cap [n, n+1) = \left[n, n + \frac{1}{3^n}\right)$ измеримо. Его мера равна

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}.$$

8.6 Основные теоремы

Теорема 8.1 (8.1). *Совокупность Σ всех измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}$ является σ-алгеброй; μ является σ-конечной мерой на этой σ-алгебре.*

Таким образом, мера Лебега — это стандартный пример полной, σ-конечной, счётно-аддитивной меры на σ-алгебре измеримых подмножеств прямой, которая для интервалов совпадает с их длиной.

9 Мера Лебега–Стилтьеса на числовой прямой

В параграфе 3 мы рассматривали меру, заданную на полукольце из полуинтервалов, порождённую монотонно неубывающей функцией F. В этом разделе мы подробно изучим эту меру и её свойства. Основная цель — выяснить условия, при которых эта мера является σ-аддитивной, и построить её лебегово продолжение на более широкий класс множеств.

9.1 Мера, порождённая функцией F

Пусть $X = [a, b)$ — фиксированный полуинтервал, $S = \{[\alpha, \beta) : a \le \alpha < \beta \le b\}$ — полукольцо полуинтервалов. Рассмотрим монотонно неубывающую ограниченную функцию $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Определим меру m_F на S формулой

$$m_F([\alpha, \beta)) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Нетрудно проверить, что m_F удовлетворяет аксиомам меры на полукольце (неотрицательность и конечная аддитивность). Эту меру можно единственным образом продолжить на минимальное кольцо $\mathcal{K}(S)$, порождённое полукольцом S. Если $A \in \mathcal{K}(S)$, то A представляется в виде конечного объединения непересекающихся полуинтервалов: $A = \bigcup_{i=1}^{n} [\alpha_i, \beta_i)$, и полагаем

$$m_F(A) = \sum_{i=1}^{n} m_F([\alpha_i, \beta_i)) = \sum_{i=1}^{n} (F(\beta_i) - F(\alpha_i)).$$

Для дальнейшего продолжения меры на более широкий класс множеств (по схеме Лебега) необходимо, чтобы мера m_F была σ-аддитивной на S. Выясним, какое условие на функцию F гарантирует σ-аддитивность.

9.2 Свойства монотонных функций

Напомним некоторые свойства монотонно неубывающих функций, которые понадобятся в дальнейшем.

Пусть $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ — монотонно неубывающая функция. Тогда в любой точке $x_0 \in (a, b)$ существуют односторонние пределы:

$$F(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0^-} F(x) = \sup\{F(x) : a \le x < x_0\},$$

$$F(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0^+} F(x) = \inf\{F(x) : x_0 < x \le b\}.$$

В точках a и b существуют соответственно $F(a + 0)$ и $F(b - 0)$. Очевидно, что

$$F(x_0 - 0) \le F(x_0) \le F(x_0 + 0).$$

Если $F(x_0-0)=F(x_0+0)$, то функция непрерывна в точке x_0. В противном случае точка x_0 называется **точкой разрыва первого рода**. Разность

$$\Delta_F(x_0)=F(x_0+0)-F(x_0-0)$$

называется **скачком функции** в точке x_0. Для концов отрезка полагают

$$\Delta_F(a)=F(a+0)-F(a),\quad \Delta_F(b)=F(b)-F(b-0).$$

Если $F(x_0)=F(x_0-0)$, то функция называется **непрерывной слева** в точке x_0; если $F(x_0)=F(x_0+0)$, то **непрерывной справа**.

Утверждение 9.1. *Пусть F — неубывающая функция на отрезке $[a,b]$ и $c_1,\dots,c_n$ — любые точки этого отрезка. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta_F(c_i)\le F(b)-F(a).$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что точки упорядочены: $a\le c_1<c_2<\dots<c_n\le b$. Рассмотрим сумму скачков в этих точках. Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta_F(c_i)=(F(c_1+0)-F(c_1-0))+\dots+(F(c_n+0)-F(c_n-0)).$$

Для внутренних точек c_i $(1<i<n)$ имеем $F(c_i-0)\le F(c_{i-1}+0)$ и $F(c_i+0)\le F(c_{i+1}-0)$ в силу монотонности. Поэтому, группируя слагаемые, получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta_F(c_i)\le (F(c_1+0)-F(a))+(F(c_2+0)-F(c_1-0))+\dots+(F(b)-F(c_n-0))\le F(b)-F(a),$$

поскольку все разности в скобках неотрицательны и не превосходят соответствующих приращений функции. □

Утверждение 9.2. *Множество точек разрыва монотонно неубывающей на отрезке $[a,b]$ функции не более чем счётно.*

Доказательство. Для каждого натурального k рассмотрим множество

$$M_k=\left\{x\in[a,b]:\Delta_F(x)\ge\frac{1}{k}\right\}.$$

Из утверждения 9.1 следует, что в множестве M_k не более $k(F(b)-F(a))$ точек, т.е. M_k конечно. Поскольку каждая точка разрыва принадлежит некоторому M_k (скачок положителен), то множество всех точек разрыва есть объединение счётного семейства конечных множеств $\bigcup_{k=1}^{\infty}M_k$, а значит, не более чем счётно. □

Утверждение 9.3. *Монотонно неубывающая на отрезке $[a,b]$ функция имеет почти всюду (относительно меры Лебега) конечную производную.*

Доказательство этого утверждения достаточно сложно и выходит за рамки данного курса. Оно может быть найдено, например, в книге Колмогорова А.Н., Фомина С.В. «Элементы теории функций и функционального анализа».

9.3 Функция скачков

Важным классом монотонных функций являются функции скачков. Пусть задано конечное или счётное множество точек $\{x_n\} \subset [a, b]$ и соответствующие положительные числа h_n такие, что ряд $\sum h_n$ сходится. Определим функцию

$$F(x) = \sum_{x_n < x} h_n,$$

где сумма берётся по всем индексам n, для которых $x_n < x$. Дополнительно полагаем $F(a) = 0$ (если ни одна точка x_n не меньше a, то сумма пустая, т.е. равна 0). Функция F монотонно неубывающая, ограниченная (поскольку ряд сходится) и непрерывная слева в каждой точке. Точками разрыва функции F являются именно точки x_n, причём скачок в точке x_n равен h_n:

$$\Delta_F(x_n) = F(x_n + 0) - F(x_n - 0) = h_n.$$

Такая функция называется **функцией скачков**.

Утверждение 9.4 (Разложение монотонной функции)**.** *Всякую монотонно неубывающую непрерывную слева функцию F на отрезке $[a, b]$ можно единственным образом представить в виде суммы непрерывной монотонно неубывающей функции F_c и функции скачков F_d:*

$$F(x) = F_c(x) + F_d(x).$$

Доказательство. Обозначим через $\{x_n\}$ множество точек разрыва функции F, и пусть $h_n = \Delta_F(x_n)$ — соответствующие скачки. Определим функцию скачков

$$F_d(x) = \sum_{x_n < x} h_n.$$

Тогда разность $F_c(x) = F(x) - F_d(x)$ будет непрерывной слева монотонной функцией. Более того, можно показать, что F_c непрерывна (так как все скачки «вычтены»). Единственность такого разложения очевидна. $\square$

9.4 Условие σ-аддитивности меры m_F

Следующая теорема даёт необходимое и достаточное условие σ-аддитивности меры m_F на полукольце S.

Теорема 9.1. *Пусть $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ — монотонно неубывающая ограниченная функция. Мера m_F, определённая на полукольце S полуинтервалов $[\alpha, \beta) \subset [a, b)$ формулой $m_F([\alpha, \beta)) = F(\beta) - F(\alpha)$, является σ-аддитивной тогда и только тогда, когда функция F непрерывна слева на $(a, b]$.*

Доказательство. **Необходимость.** Предположим, что m_F σ-аддитивна, но функция F имеет разрыв слева в некоторой точке $x_0 \in (a, b]$, т.е. $F(x_0 - 0) < F(x_0)$. Рассмотрим полуинтервал $A = [x_0, x_0)$ (вырожденный, мера нуль) и последовательность полуинтервалов $A_n = [x_0 - \frac{1}{n}, x_0)$. Тогда $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (x_0 - 1, x_0)$ (если выбрать достаточно большие n), но это объединение не покрывает точку x_0. Однако для σ-аддитивности важно, чтобы можно было представить полуинтервал $[x_0 - 1, x_0)$ как счётное объединение непересекающихся полуинтервалов, включая A_n. Более аккуратно: рассмотрим полуинтервал $[\alpha, x_0)$, где $\alpha < x_0$. Зафиксируем возрастающую последовательность $\alpha_n \uparrow x_0$. Тогда $[\alpha, x_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \alpha_{n+1}) \cup [\alpha, \alpha_1)$, если $\alpha_1 > \alpha$. По σ-аддитивности должно выполняться

$$F(x_0) - F(\alpha) = \sum_n (F(\alpha_{n+1}) - F(\alpha_n)) + (F(\alpha_1) - F(\alpha)).$$

Переходя к пределу при $\alpha_n \uparrow x_0$, получаем $F(x_0) - F(\alpha) = F(x_0-) - F(\alpha)$, откуда $F(x_0) = F(x_0-)$. Таким образом, необходимость доказана.

Достаточность. Предположим, что F непрерывна слева. Докажем, что мера m_F σ-аддитивна. Пусть полуинтервал $A = [\alpha, \beta)$ представлен в виде счётного объединения непересекающихся полуинтервалов $A_i = [\alpha_i, \beta_i)$, т.е.

$$[\alpha, \beta) = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} [\alpha_i, \beta_i).$$

Требуется доказать, что

$$F(\beta) - F(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} (F(\beta_i) - F(\alpha_i)). \tag{9.1}$$

Для любого конечного n имеем $\bigcup_{i=1}^{n} [\alpha_i, \beta_i) \subset [\alpha, \beta)$, поэтому в силу монотонности и конечной аддитивности меры

$$\sum_{i=1}^{n} (F(\beta_i) - F(\alpha_i)) \le F(\beta) - F(\alpha).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} (F(\beta_i) - F(\alpha_i)) \le F(\beta) - F(\alpha). \tag{9.2}$$

Теперь докажем обратное неравенство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности слева функции F в точке β найдётся $\delta > 0$ такое, что $0 < \beta - \beta' < \delta$ влечёт $F(\beta) - F(\beta') < \frac{\varepsilon}{2}$. Выберем β' так, что $\alpha < \beta' < \beta$ и $F(\beta) - F(\beta') < \frac{\varepsilon}{2}$. Для каждого полуинтервала $[\alpha_i, \beta_i)$ в силу непрерывности слева в точке β_i (если $\beta_i < b$) или в точке α_i можно подобрать числа $\alpha_i' < \alpha_i$ и $\beta_i' > \beta_i$ (если $\beta_i < b$) такие, что

$$F(\alpha_i) - F(\alpha_i') < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, \quad F(\beta_i') - F(\beta_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}.$$

Тогда интервалы (α_i', β_i') покрывают полуинтервал $[\alpha, \beta')$:

$$[\alpha, \beta') \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [\alpha_i, \beta_i) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i', \beta_i').$$

По лемме Гейне–Бореля из этого открытого покрытия отрезка $[\alpha, \beta']$ можно выделить конечное подпокрытие. Пусть это будут интервалы $(\alpha_{i_1}', \beta_{i_1}'), \ldots, (\alpha_{i_k}', \beta_{i_k}')$. Тогда

$$[\alpha, \beta'] \subset \bigcup_{j=1}^{k} (\alpha_{i_j}', \beta_{i_j}').$$

Оценим длину отрезка $[\alpha, \beta']$ через сумму длин покрывающих интервалов, но с учётом функции F. А именно, используя монотонность F, имеем:

$$F(\beta') - F(\alpha) \le \sum_{j=1}^{k} (F(\beta_{i_j}') - F(\alpha_{i_j}')).$$

Каждое слагаемое оценим как

$$F(\beta'_{i_j}) - F(\alpha'_{i_j}) \le (F(\beta_{i_j}) - F(\alpha_{i_j})) + \frac{\varepsilon}{2^{i_j}}.$$

Следовательно,

$$F(\beta') - F(\alpha) \le \sum_{j=1}^{k}(F(\beta_{i_j}) - F(\alpha_{i_j})) + \sum_{j=1}^{k}\frac{\varepsilon}{2^{i_j}} \le \sum_{i=1}^{\infty}(F(\beta_i) - F(\alpha_i)) + \varepsilon.$$

Учитывая, что $F(\beta) - F(\beta') < \frac{\varepsilon}{2}$, получаем

$$F(\beta) - F(\alpha) < \sum_{i=1}^{\infty}(F(\beta_i) - F(\alpha_i)) + \frac{3\varepsilon}{2}.$$

В силу произвольности ε имеем

$$F(\beta) - F(\alpha) \le \sum_{i=1}^{\infty}(F(\beta_i) - F(\alpha_i)). \tag{9.3}$$

Из (9.2) и (9.3) следует равенство (9.1), что и доказывает σ-аддитивность. □

Таким образом, для того чтобы мера m_F допускала лебегово продолжение, мы будем предполагать, что функция F монотонно неубывающая, ограниченная и непрерывная слева.

9.5 Построение меры Лебега–Стилтьеса

Пусть $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ — монотонно неубывающая, ограниченная, непрерывная слева функция. Тогда мера m_F на полукольце S является σ-аддитивной. По теореме 9.1 её можно продолжить на минимальное кольцо $\mathcal{K}(S)$, а затем, используя конструкцию внешней меры, на σ-алгебру измеримых по Лебегу–Стилтьесу множеств.

А именно, для любого множества $A \subset [a,b)$ определим внешнюю меру:

$$\mu_F^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(F(\beta_i) - F(\alpha_i)) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}[\alpha_i,\beta_i), [\alpha_i,\beta_i) \in S\right\}.$$

Множество A называется **измеримым по Лебегу–Стилтьесу** (относительно функции F), если

$$\mu_F^*(A) + \mu_F^*([a,b) \setminus A) = F(b) - F(a).$$

Класс всех таких множеств обозначим через Σ_F. На Σ_F функция $\mu_F = \mu_F^*|_{\Sigma_F}$ является σ-аддитивной мерой, называемой **мерой Лебега–Стилтьеса**, порождённой функцией F.

9.6 Свойства меры Лебега–Стилтьеса

Свойство 9.1. *Всякое одноточечное множество $\{x\} \subset [a,b)$ измеримо, и*

$$\mu_F(\{x\}) = \Delta_F(x) = F(x+0) - F(x).$$

Доказательство. Заметим, что $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left[x, x+\frac{1}{n}\right)$ (для достаточно больших n, чтобы $x + \frac{1}{n} < b$). Полуинтервалы $\left[x, x+\frac{1}{n}\right)$ образуют убывающую последовательность, и их пересечение есть $\{x\}$. Поскольку мера μ_F σ-аддитивна, она непрерывна сверху. Поэтому

$$\mu_F(\{x\}) = \lim_{n\to\infty}\mu_F\left(\left[x, x+\frac{1}{n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(F\left(x+\frac{1}{n}\right) - F(x)\right) = F(x+0) - F(x).$$

□

Свойство 9.2. *Любой промежуток (интервал, полуинтервал, отрезок), лежащий в $[a,b)$, измерим относительно меры μ_F.*

Доказательство. Для полуинтервала $[\alpha,\beta)$ это следует из построения. Для других типов промежутков используем представления:

$$[\alpha,\beta] = [\alpha,\beta) \cup \{\beta\}, \quad (\alpha,\beta) = [\alpha,\beta) \setminus \{\alpha\}, \quad (\alpha,\beta] = [\alpha,\beta) \setminus \{\alpha\} \cup \{\beta\},$$

и тот факт, что класс измеримых множеств является σ-алгеброй. □

Свойство 9.3. *Любое борелевское подмножество полуинтервала $[a,b)$ измеримо относительно меры μ_F.*

Доказательство. Борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}([a,b))$ порождается всеми интервалами. По свойству 9.2 все интервалы измеримы, следовательно, $\mathcal{B}([a,b)) \subset \Sigma_F$. □

Замечание 9.1. *Пусть теперь $X = \mathbb{R}$, а $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — монотонно неубывающая, ограниченная, непрерывная слева функция. Существуют пределы*

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x), \quad F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x).$$

Тогда, аналогично предыдущему, можно построить конечную меру Лебега–Стилтьеса на всей числовой прямой. Для этого в качестве полукольца берутся все полуинтервалы $[\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}$, и мера определяется той же формулой $m_F([\alpha,\beta)) = F(\beta) - F(\alpha)$. После построения внешней меры и класса измеримых множеств получаем σ-аддитивную меру μ_F на σ-алгебре Σ_F, причём $\mu_F(\mathbb{R}) = F(+\infty) - F(-\infty) < \infty$.

Замечание 9.2. *Если функция F монотонно неубывающая, непрерывная слева, но не ограничена (например, $\lim_{x\to b-0} F(x) = +\infty$ для $X = [a,b)$), то построенная мера μ_F будет σ-конечной, но не конечной. В этом случае определение измеримости и меры проводится с помощью исчерпания пространства множествами конечной меры. Например, для $X = [a,b)$ множество $A \subset [a,b)$ называется измеримым, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $A \cap [a, b-\varepsilon)$ измеримо относительно меры, построенной по сужению F на $[a, b-\varepsilon)$. Тогда полагают*

$$\mu_F(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mu_{F|_{[a,b-\varepsilon)}}(A \cap [a, b-\varepsilon)).$$

Аналогично для $\mathbb{R}$.

Замечание 9.3. *Важным частным случаем является мера Лебега, которая соответствует функции $F(x) = x$. В этом случае $m_F([\alpha,\beta)) = \beta - \alpha$ — обычная длина, а мера μ_F — классическая мера Лебега.*

Таким образом, мера Лебега–Стилтьеса представляет собой обобщение меры Лебега, позволяющее учитывать «вес», заданный функцией распределения F. Эта конструкция играет важную роль в теории вероятностей, где F — функция распределения случайной величины.

10 Абсолютная непрерывность меры

Рассматривая меру Лебега и меру Лебега–Стилтьеса на числовой прямой $\mathbb{R}$, мы заметили, что класс измеримых множеств относительно каждой меры, вообще говоря, свой. В общем случае и класс множеств меры нуль тоже зависит от исходной меры. Однако изучение класса множеств меры нуль представляет интерес для теории интегрирования.

Определение 10.1. *Пусть μ и ν — две σ-аддитивные меры, заданные на одной и той же σ-алгебре Σ измеримых подмножеств множества X. Мера ν называется* ***абсолютно непрерывной*** *относительно меры μ, если из того, что*

$$\mu(A) = 0 \quad \text{следует, что} \quad \nu(A) = 0.$$

Лемма 10.1. *Пусть μ и ν — две σ-аддитивные меры, заданные на одной и той же σ-алгебре Σ измеримых подмножеств множества X. Мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $A \in \Sigma$ с $\mu(A) < \delta$ справедливо неравенство $\nu(A) < \varepsilon$.*

Доказательство. **Необходимость.** Предположим, что мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ, но условие леммы не выполняется, т. е. существует $\varepsilon_0 > 0$, что какое бы $\delta_k = 2^{-k}$ мы ни взяли, найдется измеримое множество $A_k \in \Sigma$, для которого $\mu(A_k) < 2^{-k}$, а $\nu(A_k) \geq \varepsilon_0$.

Рассмотрим убывающую последовательность измеримых множеств $U_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k$, для которой

$$\mu(U_n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} = \delta_n,$$

тогда по предположению $\nu(U_n) \geq \nu(A_{n+1}) \geq \varepsilon_0$.

Обозначим через $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, тогда в силу непрерывности сверху σ-аддитивной меры имеем

$$\mu(U) = \lim_{n\to\infty} \mu(U_n) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0,$$

но

$$\nu(U) = \lim_{n\to\infty} \nu(U_n) \geq \lim_{n\to\infty} \nu(A_{n+1}) \geq \varepsilon_0.$$

Последнее соотношение противоречит абсолютной непрерывности ν относительно μ, поскольку $\mu(U) = 0$, а $\nu(U) \geq \varepsilon_0 > 0$.

Достаточность. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $\mu(A) < \delta$ следует $\nu(A) < \varepsilon$. Если $\mu(A) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ выполнено $\mu(A) = 0 < \delta$, откуда $\nu(A) < \varepsilon$. В силу произвольности ε получаем $\nu(A) = 0$. □

Пусть на множестве $[a, b]$ заданы мера Лебега μ и мера Лебега–Стилтьеса μ_F, порожденная монотонно неубывающей непрерывной слева ограниченной функцией $F(x)$. Выясним, какому дополнительному условию должна удовлетворять функция $F(x)$, чтобы мера μ_F была абсолютно непрерывна относительно μ. Это условие — абсолютная непрерывность функции F на отрезке $[a, b]$.

Определение 10.2. *Функция $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется* ***абсолютно непрерывной*** *на отрезке $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой конечной или счётной системы попарно непересекающихся интервалов $(a_i, b_i) \subset [a, b]$, для которой*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \delta,$$

выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon. \tag{10.1}$$

Рассмотрим основные свойства абсолютно непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$.

Утверждение 10.1. *Всякая абсолютно непрерывная функция является непрерывной и равномерно непрерывной.*

Доказательство. Возьмем в определении только один интервал (a_1, b_1). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из $|b_1 - a_1| < \delta$ следует $|F(b_1) - F(a_1)| < \varepsilon$. Это означает равномерную непрерывность, а следовательно, и непрерывность функции F. $\square$

Обратное утверждение неверно. Пример непрерывной, но не абсолютно непрерывной функции будет рассмотрен в конце параграфа.

Очевидно, что класс абсолютно непрерывных функций содержит функции, имеющие на отрезке $[a, b]$ ограниченную производную, поскольку по теореме Лагранжа

$$\sum_{i=1}^{\infty} |F(b_i) - F(a_i)| \le \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{x\in[a,b]} |F'(x)| \cdot (b_i - a_i) \le L \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < L\delta,$$

и, выбрав $\delta < \varepsilon/L$, получим требуемое.

Утверждение 10.2. *Класс абсолютно непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$, замкнут относительно алгебраических операций.*

Доказательство. Рассмотрим, например, случай произведения двух абсолютно непрерывных функций $f(x), g(x)$. Пусть (a_i, b_i) — система попарно непересекающихся интервалов на отрезке $[a, b]$. Имеем

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i)g(b_i) - f(a_i)g(a_i)| &\le \sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i)g(b_i) - f(b_i)g(a_i)| + \sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i)g(a_i) - f(a_i)g(a_i)| \\ &\le \sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i)|\,|g(b_i) - g(a_i)| + \sum_{i=1}^{\infty} |g(a_i)|\,|f(b_i) - f(a_i)|.\end{aligned}$$

Пусть $\alpha = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$, $\beta = \max_{x\in[a,b]} |g(x)|$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i)g(b_i) - f(a_i)g(a_i)| \le \alpha \sum_{i=1}^{\infty} |g(b_i) - g(a_i)| + \beta \sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i) - f(a_i)|.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ в силу абсолютной непрерывности f и g найдутся $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i) - f(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2\beta} \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \delta_1,$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} |g(b_i) - g(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2\alpha} \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \delta_2.$$

Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда при $\sum (b_i - a_i) < \delta$ получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i)g(b_i) - f(a_i)g(a_i)| < \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{2\alpha} + \beta \cdot \frac{\varepsilon}{2\beta} = \varepsilon.$$

Случаи суммы и разности доказываются аналогично. $\square$

Утверждение 10.3. *Всякая абсолютно непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция почти всюду дифференцируема.*

Доказательство. Вытекает из свойств монотонных функций и того факта, что всякая абсолютно непрерывная функция может быть представлена как разность двух абсолютно непрерывных монотонных неубывающих функций. □

Упражнение 10.1. *Доказать, что всякая абсолютно непрерывная функция может быть представлена как разность двух абсолютно непрерывных монотонных неубывающих функций.*

В дальнейшем мы покажем, что интеграл Лебега с переменным верхним пределом является абсолютно непрерывной функцией и остановимся на других свойствах абсолютно непрерывных функций.

А теперь вернемся к мере Лебега–Стилтьеса на $[a,b]$.

Теорема 10.1. *Пусть на σ-алгебре борелевских множеств $\mathcal{B}([a,b])$ задана мера μ_F, порождённая функцией $F(x)$. Мера μ_F абсолютно непрерывна относительно меры Лебега μ тогда и только тогда, когда функция $F(x)$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть мера μ_F абсолютно непрерывна относительно меры μ. Тогда по лемме для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $\mu(A) < \delta$, то $\mu_F(A) < \varepsilon$ для любого множества $A \in \mathcal{B}([a,b])$. Возьмём систему попарно непересекающихся интервалов $(a_i,b_i) \subset [a,b]$ такую, что $\sum(b_i - a_i) < \delta$. Положим $A = \bigcup_i(a_i,b_i)$. Тогда $\mu(A) = \sum(b_i - a_i) < \delta$, следовательно, $\mu_F(A) < \varepsilon$. Но $\mu_F(A) = \sum_i(F(b_i) - F(a_i))$ (так как F неубывающая, разности неотрицательны). Поэтому $\sum_i(F(b_i) - F(a_i)) < \varepsilon$, что означает абсолютную непрерывность функции F.

Достаточность. Пусть F — абсолютно непрерывная функция и для $A \in \mathcal{B}([a,b])$ выполнено $\mu(A) = 0$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем по нему $\delta > 0$ из условия абсолютной непрерывности функции F. Воспользуемся определением множества меры нуль и покроем A счётной системой интервалов $(\alpha_i,\beta_i) \subset [a,b]$ так, что

$$A \subset \bigcup_i(\alpha_i,\beta_i) \quad \text{и} \quad \sum_i(\beta_i - \alpha_i) < \frac{\delta}{2}.$$

Для каждого интервала (α_i,β_i) построим интервал $B_i = (\alpha_i - 2^{-(i+1)}\delta, \beta_i)$. Тогда

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i =: B.$$

Множество B открыто и, следовательно, его можно представить как объединение попарно непересекающихся интервалов, т.е.

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k) \quad \text{и при этом}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) = \mu(B) \le \sum_{i=1}^{\infty}(\beta_i - \alpha_i) + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-(i+1)}\delta < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Из выбора δ получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon.$$

Так как F неубывающая, то $|F(b_k) - F(a_k)| = F(b_k) - F(a_k)$. Следовательно,

$$\mu_F(A) \le \mu_F(B) = \sum_{k=1}^{\infty}(F(b_k) - F(a_k)) < \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что $\mu_F(A) = 0$. По определению это означает абсолютную непрерывность меры μ_F относительно меры μ. □

Рассмотрим пример функции, которая является равномерно непрерывной, но не абсолютно непрерывной.

Пример 10.1 (Канторова лестница). *На отрезке* $[0,1]$ *построим последовательность функций* $F_n(x)$ *следующим образом:*

$$F_1(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{если } x \in (1/3, 2/3), \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x = 1, \end{cases}$$

а на оставшихся отрезках $[0, 1/3]$ *и* $[2/3, 1]$ *доопределим линейно.*

$$F_2(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{если } x \in (1/3, 2/3), \\ 1/4, & \text{если } x \in (1/9, 2/9), \\ 3/4, & \text{если } x \in (7/9, 8/9), \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x = 1, \end{cases}$$

с линейным доопределением на остальных частях.

Вообще, на n*-ом шаге:*

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ (2k-1)/2^n, & x \in I_n^k, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

где I_n^k *—* k*-ый слева интервал, выброшенный при построении канторова множества на* n*-ом шаге. В остальных точках* $F_n(x)$ *доопределяется линейной интерполяцией.*

Последовательность $F_n(x)$ *сходится равномерно к неубывающей функции* $F(x)$*, называемой* ***канторовой лестницей****. Функция* $F(x)$ *постоянна на каждом из интервалов дополнения канторова множества, т.е. на множестве* $G = [0,1] \setminus K$*, где* K *— канторово множество. Так как* $\mu(G) = 1$*, то* $\mu_F(G) = 0$*. Точки роста функции* F *— это канторово множество* K*, причём* $\mu(K) = 0$*, но* $\mu_F(K) = 1$*. Действительно, на каждом шаге построения канторову множеству соответствуют скачки функции, сумма которых равна 1. Согласно теореме, мера* μ_F*, порождённая канторовой лестницей, не является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега* μ*, поэтому* $F(x)$ *не является абсолютно непрерывной функцией.*

11 Измеримые функции и их свойства

Понятие измеримой функции было введено в математику А. Лебегом в связи с построением теории интегрирования. Затем Н. Н. Лузиным была установлена связь между измеримыми и непрерывными функциями.

Введем ряд понятий, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Множество X, на котором задана некоторая σ-алгебра его измеримых подмножеств Σ, называется **измеримым пространством** и обозначается (X, Σ).

Измеримое пространство, на котором задана мера, называется **пространством с мерой** и обозначается (X, Σ, μ). Иногда пространство с мерой мы будем обозначать просто X. В дальнейшем мы будем предполагать, что μ — σ-аддитивная полная мера.

Нас будет интересовать понятие измеримости числовых функций, поскольку для них в дальнейшем строится теория интегрирования. При этом будем считать, что функции могут принимать не только конечные значения, но и значения $+\infty$ и $-\infty$.

Определение 11.1. *Пусть X — пространство с мерой. Действительная функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется **измеримой**, если для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $A_c = \{x : f(x) < c\}$ измеримо (здесь $\overline{\mathbb{R}}$ — расширенная числовая прямая). Комплекснозначная функция $g+ih$ измерима, если измеримы её действительная и мнимая части.*

Лемма 11.1. *Числовая функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима тогда и только тогда, когда для любого $c \in \mathbb{R}$ измеримо одно из множеств*

$$\{x : f(x) \le c\}, \quad \{x : f(x) > c\}, \quad \{x : f(x) \ge c\}.$$

Доказательство. **Необходимость.** Пусть функция f измерима. Тогда при любом $c \in \mathbb{R}$ и при любом $n \in \mathbb{N}$ измеримы множества

$$\{x : f(x) < c + 1/n\}.$$

Нетрудно показать, что

$$\{x : f(x) \le c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x : f(x) < c + \frac{1}{n}\right\}. \tag{11.1}$$

Действительно, если $x \in \{x : f(x) \le c\}$, то $f(x) < c + 1/n$ при любом $n \in \mathbb{N}$, откуда x принадлежит правой части. Обратно, если x принадлежит правой части, то $f(x) < c+1/n$ для всех n, значит $f(x) \le c$. Множество в левой части (11.1) измеримо как пересечение измеримых множеств. Далее,

$$\{x : f(x) > c\} = X \setminus \{x : f(x) \le c\},$$

$$\{x : f(x) \ge c\} = X \setminus \{x : f(x) < c\}.$$

Достаточность. Пусть, например, множество $\{x : f(x) \le c\}$ измеримо. Тогда можно показать, что

$$\{x : f(x) < c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x : f(x) \le c - \frac{1}{n}\right\}.$$

Аналогично проверяется достаточность двух других условий. □

Упражнение 11.1. *Показать, что если функция f измерима, то при любом $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x : f(x) = c\}$ измеримо. Верно ли обратное?*

Рассмотрим некоторые примеры измеримых функций.

Пример 11.1. *На числовой прямой $\mathbb{R}$ с мерой Лебега любая непрерывная функция измерима. Действительно, множество $A_c = \{x : f(x) < c\}$ является прообразом открытого множества $(-\infty, c)$, которое измеримо как борелевское множество.*

Пример 11.2 (Функция Дирихле)**.** *Рассмотрим функцию Дирихле*

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально}, \\ 1, & \text{если } x \text{ рационально}, \end{cases}$$

тогда при $c > 1$ $A_c = \{x : D(x) < c\} = \mathbb{R}$; при $0 < c \le 1$ $A_c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; а при $c \le 0$ $A_c = \emptyset$. Каждое из множеств A_c измеримо на $\mathbb{R}$.

Пример 11.3. *Пусть $\chi_A(x)$ — характеристическая функция измеримого множества $A \subset X$, т. е. $\chi_A(x) = 1$, если $x \in A$ и $\chi_A(x) = 0$, если $x \notin A$. В этом случае $A_c = \emptyset$ при $c \le 0$; $A_c = X \setminus A$ при $0 < c \le 1$; $A_c = X$ при $c > 1$. Следовательно, неизмеримой является характеристическая функция неизмеримого множества.*

Пример 11.4. *Пусть* $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, *где* A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ *— измеримые множества. Рассмотрим функцию* $f(x)$ *такую, что* $f(x) = y_i$, *если* $x \in A_i$, $i = 1, 2, \ldots$; $y_i \neq y_j$ *при* $i \neq j$. *Покажем, что* f *измерима.*

Пусть $c \in \mathbb{R}$ *любое, тогда*

$$A_c = \{x : f(x) < c\} = \bigcup_{i} A_i, \tag{11.2}$$

где суммирование распространяется на все индексы i *такие, что* $y_i < c$. *Из (11.2) вытекает измеримость множества* A_c, *т. е. измеримость функции* f. *В дальнейшем на рассмотрении таких функций мы остановимся более подробно.*

Перейдем к рассмотрению свойств измеримых функций.

Теорема 11.1. *Пусть* $f : X \to \mathbb{R}$ *— измеримая функция. Тогда для любой измеримой функции* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *их композиция* $h = g \circ f$ *также измерима на* X.

Доказательство. Покажем, что для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x : h(x) < c\}$ измеримо. Действительно,

$$\{x : h(x) < c\} = h^{-1}(-\infty, c) = f^{-1}(g^{-1}(-\infty, c)).$$

Поскольку g измерима, то $A = g^{-1}(-\infty, c) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, откуда, в силу измеримости f, находим, что $\{x : h(x) < c\} = f^{-1}(A) \in \Sigma$. □

Замечание 11.1. *Доказанная теорема применима, в частности, в том случае, когда функция* g *является непрерывной, поскольку каждая непрерывная функция измерима. Отметим, однако, что если* g *измерима,* f *непрерывна, то композиция* $f \circ g$ *может оказаться неизмеримой.*

Будем говорить, что две определенные на множестве X функции **эквивалентны**, если они равны между собой почти всюду, т. е. равны между собой для всех $x \in X$ за исключением, быть может, точек, принадлежащих множеству нулевой меры.

Лемма 11.2. *Функция* $f(x)$, *определенная на множестве* X *и эквивалентная на нем измеримой функции* $g(x)$, *также измерима.*

Доказательство. Из определения эквивалентности вытекает, что множества

$$\{x : f(x) < c\} \quad \text{и} \quad \{x : g(x) < c\}$$

могут отличаться друг от друга лишь на множестве меры нуль. □

Пример 11.5. *На числовой прямой функция Дирихле эквивалентна функции, тождественно равной нулю.*

Замена функции на её эквивалентную широко используется в теории интегрирования.

Покажем, что множество измеримых функций замкнуто относительно алгебраических операций над измеримыми функциями.

Теорема 11.2. *Пусть* (X, Σ, μ) *— пространство с мерой и* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *— измеримые функции. Тогда функции* $\alpha f + \beta g$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, $f \cdot g$, f/g *(при условии, что* $g(x) \neq 0$ *на* X*) измеримы.*

Доказательство. Измеримость функции αf при $\alpha = 0$ очевидна. Пусть $\alpha \neq 0$, тогда

$$\{x : \alpha f(x) < c\} = \begin{cases} \{x : f(x) < c/\alpha\}, & \text{если } \alpha > 0, \\ \{x : f(x) > c/\alpha\}, & \text{если } \alpha < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что из измеримости функции f вытекает измеримость $f + a$, где $a \in \mathbb{R}$. Покажем, что из измеримости функций f и g следует измеримость множества $\{x : f(x) > g(x)\}$. Пусть $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность всех рациональных чисел, занумерованных в произвольном порядке. Тогда

$$\{x : f(x) > g(x)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\{x : f(x) > r_k\} \cap \{x : g(x) < r_k\}\right). \tag{11.3}$$

Действительно, пусть x принадлежит левой части равенства (11.3), тогда найдется такое рациональное число $r_k \in \mathbb{Q}$, что

$$g(x) < r_k < f(x),$$

для заданного x и, поэтому, $f(x) > r_k$ и $g(x) < r_k$. Значит

$$x \in \{x : f(x) > r_k\} \cap \{x : g(x) < r_k\},$$

и, следовательно, x входит в правую часть (11.3).

Пусть теперь x входит в правую часть (11.3), тогда найдется $k_0 \in \mathbb{N}$, что $x \in \{x : f(x) > r_{k_0}\} \cap \{x : g(x) < r_{k_0}\}$, то есть $g(x) < r_{k_0} < f(x)$. Следовательно, для заданного x $f(x) > g(x)$, а это означает, что x входит в левую часть (11.3).

Докажем измеримость $f + g$. Рассмотрим множество

$$\{x : f(x) + g(x) > c\} = \{x : f(x) > c - g(x)\},$$

которое измеримо по доказанному выше.

Заметим, что если функция f измерима, то измерима и функция f^2. Действительно,

$$\{x : f^2(x) < c\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } c \leq 0, \\ \{x : f(x) < \sqrt{c}\} \cap \{x : f(x) > -\sqrt{c}\}, & \text{если } c > 0. \end{cases}$$

Тогда функция $f \cdot g$ измерима, так как

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\big((f + g)^2 - (f - g)^2\big).$$

Так как $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, то для доказательства измеримости частного достаточно доказать измеримость $\frac{1}{g}$. Рассмотрим множество

$$\left\{x : \frac{1}{g(x)} < c\right\} = \begin{cases} \{x : g(x) < 0\} \cup \{x : g(x) > 1/c\}, & c > 0, \\ \{x : g(x) < 0\}, & c = 0, \\ \{x : g(x) < 0\} \cap \{x : g(x) > 1/c\}, & c < 0, \end{cases}$$

которое, очевидно, измеримо. □

12 Сходимость в пространстве измеримых функций

Одним из свойств пространства измеримых функций является замкнутость относительно предельного перехода. Будем считать, что на измеримом пространстве (X, Σ) задана σ-аддитивная полная конечная мера μ. Рассмотрим различные виды сходимости последовательности измеримых функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ на пространстве с мерой X.

12.1 Равномерная сходимость

Последовательность измеримых функций f_n сходится к функции f равномерно, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_ε такой, что для всех $n > n_\varepsilon$ выполнено

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Равномерная сходимость обозначается так: $f_n \rightrightarrows f$.

12.2 Точечная сходимость

Последовательность f_n сходится к функции f точечно, если для любого $x \in X$ $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$.

12.3 Сходимость почти всюду

Последовательность f_n сходится к f почти всюду ($f_n \stackrel{\text{п.в.}}{\to} f$), если $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ для всех точек x за исключением, быть может, тех x, которые принадлежат множеству меры нуль.

12.4 Сходимость по мере

Сходимость по мере последовательности измеримых функций f_n к измеримой функции f обозначается $f_n \stackrel{\mu}{\to} f$ и означает, что для любого $\varepsilon > 0$ мера множества

$$A_n(\varepsilon) = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$.

Очевидно, что из равномерной сходимости следует сходимость точечная, а из точечной – сходимость почти всюду.

Покажем, что совокупность измеримых функций замкнута по отношению не только к арифметическим операциям, но и к операции предельного перехода.

Теорема 12.1. *Пусть (X, Σ, μ) – пространство с мерой и $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых функций. Если f_n сходится к функции f в каждой точке $x \in X$, то функция f измерима.*

Доказательство. Пусть для каждого $x \in X$ $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$. Покажем, что функция f измерима, т. е. для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $A_c = \{x : f(x) < c\}$ измеримо. Предварительно докажем равенство

$$A_c = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \left\{x : f_n(x) < c - \frac{1}{m}\right\}. \tag{12.1}$$

Действительно, пусть $x \in A_c$, тогда $f(x) < c$. Это означает, что при некотором $m \in \mathbb{N}$ $f(x) < c - 1/m$. Тогда существует номер k такой, что для всех $n \geq k$ выполняется $f_n(x) < c - 1/m$. А это означает, что x принадлежит правой части (12.1).

Наоборот, пусть x принадлежит правой части (12.1). Тогда найдется $m \in \mathbb{N}$, что для всех достаточно больших n (начиная с некоторого k) $f_n(x) < c - 1/m$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем $f(x) \leq c - 1/m$, откуда $f(x) < c$, что означает $x \in A_c$.

Множество $\{x : f_n(x) < c - 1/m\}$ измеримо в силу измеримости последовательности (f_n), а так как семейство измеримых множеств Σ является σ-алгеброй, то измеримо множество в правой части (12.1) и, следовательно, A_c, что означает измеримость f. □

Следствие 12.1. *Если последовательность измеримых функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к f равномерно, то f измерима.*

Доказательство. Всякая равномерно сходящаяся последовательность сходится поточечно, поэтому можно воспользоваться теоремой. □

Следствие 12.2. *Если последовательность измеримых функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к f почти всюду, то предельная функция измерима.*

Доказательство. Пусть на $X_0 \subset X$ последовательность $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ и $\mu(X \setminus X_0) = 0$. Тогда

$$\{x : f(x) < c\} = \big(\{x : f(x) < c\} \cap X_0\big) \cup \big(\{x : f(x) < c\} \cap (X \setminus X_0)\big).$$

Первое множество измеримо, поскольку на множестве X_0 последовательность f_n сходится поточечно. Второе слагаемое является подмножеством множества меры нуль. Оно измеримо в силу полноты меры. □

Следствие 12.3. *Существует разрывная на отрезке $[a, b]$ функция, которая не является пределом почти всюду сходящейся последовательности непрерывных функций.*

В качестве такой функции можно взять неизмеримую функцию.

Выясним связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду, если $\mu(X) < \infty$.

Теорема 12.2 (Лебега)**.** *Пусть (X, Σ, μ) – пространство с полной конечной σ-аддитивной мерой и пусть последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ измеримых функций сходится к функции f почти всюду. Тогда она сходится к той же самой предельной функции и по мере.*

Доказательство. Пусть

$$A_n(\varepsilon) = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Положим

$$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{k \geq n} A_k(\varepsilon).$$

Очевидно, что при каждом фиксированном ε

$$B_1(\varepsilon) \supset B_2(\varepsilon) \supset \dots \supset B_n(\varepsilon) \supset \dots,$$

т. е. последовательность $B_n(\varepsilon)$ убывает. Пусть

$$B(\varepsilon) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n(\varepsilon).$$

Если $x \in B(\varepsilon)$, то $x \in B_n(\varepsilon)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно, $x \in A_n(\varepsilon)$ для бесконечно многих номеров $n \in \mathbb{N}$. Но тогда последовательность $f_n(x)$ не сходится к $f(x)$. Поэтому x принадлежит множеству точек расходимости, которое имеет нулевую меру, т. е. $\mu(B(\varepsilon)) = 0$. С другой стороны, учитывая свойство непрерывности сверху σ-аддитивной меры μ, имеем

$$0 = \mu(B(\varepsilon)) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n(\varepsilon)). \tag{12.2}$$

Так как $\mu(A_n(\varepsilon)) \leq \mu(B_n(\varepsilon))$, то из (12.2) вытекает

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n(\varepsilon)) = 0.$$

Это означает, что $f_n \xrightarrow{\mu} f$. □

Теорема Лебега не справедлива в пространстве с σ-конечной мерой.

Пример 12.1. *Рассмотрим числовую прямую как пространство с σ-конечной мерой. Представим её в виде $\mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty}[n, n+1)$. Рассмотрим последовательность*

$$f_n(x) = \chi_{[n,n+1)}(x).$$

Очевидно, что $f_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, а значит, и почти всюду. В то же время при $\varepsilon \in (0, 1)$ имеем

$$\mu(A_n(\varepsilon)) = \mu\left(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - 0| \geq \varepsilon\}\right) = \mu([n, n+1)) = 1 \not\to 0.$$

Следовательно, сходимость по мере отсутствует.

Теорема 12.2 не допускает обращения. Приведём пример сходящейся по мере последовательности, расходящейся в каждой точке.

Пример 12.2. *На полуинтервале $X = [0, 1]$ с мерой Лебега μ зададим для каждого $k \in \mathbb{N}$ систему k функций $f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)}$ следующим образом:*

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right), \\ 0, & x \notin \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right), \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{12.3}$$

Систему функций (12.3) занумеруем подряд в одну последовательность $(g_n)_{n=1}^{\infty}$, положив $g_n(x) = f_i^{(k)}(x)$, где $n = \frac{k(k-1)}{2} + i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Последовательность g_n сходится по мере к нулю. Действительно, при $\varepsilon > 1$ все множества $A_n(\varepsilon) = \{x : |g_n| \geq \varepsilon\}$ пусты и их мера равна нулю; если же $\varepsilon \leq 1$, то

$$\mu(A_n(\varepsilon)) = \mu\left(\left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right)\right) = \frac{1}{k} \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$

Покажем теперь, что последовательность g_n расходится в каждой точке. Пусть $x_0 \in [0, 1]$, тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ найдётся полуинтервал $\left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right)$, в котором находится x_0, поэтому $f_i^{(k)}(x_0) = 1$. Это значит, что у последовательности g_n бесконечно много членов равны 1 (по одному для каждого k), и также бесконечно много членов равны 0 (поскольку для каждого k только один полуинтервал даёт значение 1, а остальные $k-1$ дают 0). Следовательно, последовательность $g_n(x_0)$ не сходится.

Теорема 12.3 (Рисс)**.** *Пусть (X, Σ, μ) – пространство с полной σ-аддитивной мерой и пусть последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ измеримых функций сходится по мере к функции f. Тогда из этой последовательности можно выделить подпоследовательность $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся к f почти всюду.*

Доказательство. Поскольку $f_n \xrightarrow{\mu} f$, то для любого $\varepsilon > 0$ имеем $\lim_{n\to\infty} \mu\{x : |f_n - f| \geq \varepsilon\} = 0$. Выберем последовательности положительных чисел $\varepsilon_k \downarrow 0$ и $\alpha_k > 0$ такие, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сходится. Тогда найдётся номер $n_1 \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $n \geq n_1$

$$\mu\{x : |f_n - f| \geq \varepsilon_1\} < \alpha_1.$$

Аналогично, существует $n_2 > n_1$, что для всех $n \geq n_2$

$$\mu\{x : |f_n - f| \geq \varepsilon_2\} < \alpha_2.$$

Продолжая этот процесс, мы для любого k найдём $n_k > n_{k-1}$, и при этом будет выполняться для всех $n \geq n_k$

$$\mu\{x : |f_n - f| \geq \varepsilon_k\} < \alpha_k.$$

Таким образом, строится подпоследовательность $(f_{n_k}) \subset (f_n)$. Покажем, что она сходится к f почти всюду. Обозначим

$$B_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} \{x : |f_{n_k} - f| \geq \varepsilon_k\}.$$

Последовательность B_m измеримых множеств является убывающей, поэтому

$$B = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m.$$

В силу непрерывности сверху меры (поскольку мера конечна) имеем

$$\mu(B) = \lim_{m\to\infty} \mu(B_m).$$

Но

$$\mu(B_m) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu(\{x : |f_{n_k} - f| \geq \varepsilon_k\}) = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k.$$

Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сходится, то его остаток стремится к нулю, т. е.

$$\mu(B_m) \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Поэтому $\mu(B) = 0$.

Рассмотрим $x_0 \in X \setminus B$. Тогда существует m_0 такое, что $x_0 \notin B_{m_0}$, значит для любого $k \geq m_0$

$$|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon_k.$$

Поскольку $\varepsilon_k \to 0$, получаем $f_{n_k}(x_0) \to f(x_0)$. Таким образом, $f_{n_k} \to f$ на множестве $X \setminus B$, мера которого равна мере всего X, т. е. почти всюду. □

Замечание 12.1. *Теорема Рисса остаётся справедливой в случае σ-конечной меры на X.*

13 Теорема Егорова

В параграфе [12] мы установили связь между типами сходимости последовательности измеримых функций. Выяснили, что из равномерной сходимости в пространстве X с $\mu(X) < \infty$ вытекают все оставшиеся типы сходимостей.

В классическом математическом анализе равномерная сходимость играет важную роль в теории дифференцирования и интегрирования. Следующая теорема устанавливает связь между понятиями сходимости почти всюду и равномерной сходимости для последовательности измеримых функций.

Теорема 13.1 (Егоров)**.** *. Пусть (X, Σ, μ) — пространство с конечной мерой и пусть последовательность измеримых функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится почти всюду на X к измеримой функции f. Тогда для любого $\delta > 0$ найдется такое измеримое множество $X_\delta \subset X$, что:*

Доказательство. 1. $\mu(X \setminus X_\delta) < \delta$;

2. на множестве X_δ последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно.

Доказательство.

По теореме 12.1 заключаем, что функция $f(x)$ измерима. Обозначим через

$$X_m^n = \bigcap_{k \geq n} \left\{ x : |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \right\}.$$

Это множество обладает тем свойством, что при фиксированных n и m выполняется $|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$ для всех $k \geq n$, и, кроме того, оно измеримо.

Зафиксируем m, тогда множества X_m^n образуют возрастающую последовательность $X_m^1 \subset X_m^2 \subset \ldots$, и поэтому можно ввести в рассмотрение измеримое множество

$$X^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_m^n.$$

Учитывая непрерывность сверху σ-аддитивной меры μ, имеем

$$\mu(X^m) = \lim_{n \to \infty} \mu(X_m^n).$$

Из определения предела вытекает, что для каждого m и любого $\delta > 0$ найдется такой номер $n_0(m)$, что

$$\mu\left(X^m \setminus X_m^{n_0(m)}\right) < \frac{\delta}{2^m}$$

для всех $n \geq n_0(m)$.

Положим

$$X_\delta = \bigcap_{m=1}^{\infty} X_m^{n_0(m)}$$

и покажем, что оно является искомым.

Во-первых,

$$X \setminus X_\delta = X \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} X_m^{n_0(m)} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(X \setminus X_m^{n_0(m)}\right).$$

Поэтому

$$\mu(X \setminus X_\delta) \leq \mu(X \setminus X^m) + \mu(X^m \setminus X_\delta).$$

Учитывая, что

$$X^m \setminus X_\delta = X^m \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} X_m^{n_0(m)} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(X^m \setminus X_m^{n_0(m)}\right),$$

получим

$$\mu(X^m \setminus X_\delta) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu\left(X^m \setminus X_m^{n_0(m)}\right) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^m} = \delta,$$

а $\mu(X \setminus X^m) = 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Действительно, если $x_0 \in X \setminus X^m$, то существует такое $k \in \mathbb{N}$, для которого $|f_k(x_0) - f(x_0)| > 1/m$, т.е. $f_n(x_0)$ не сходится к $f(x_0)$. По условию $f_n \to f$ почти всюду, значит, сходимость отсутствует на множестве меры нуль. Поэтому $\mu(X \setminus X_\delta) < \delta$.

Во-вторых, на множестве X_δ последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно. Это сразу вытекает из того, что если $x \in X_\delta$, то для любого $m \in \mathbb{N}$ $|f_n(x) - f(x)| < 1/m$ при $n > n_0(m)$, что и означает равномерную сходимость. $\square$

Замечание 13.1. *Теорема Егорова не имеет места в случае* ***бесконечной*** *меры.*

Пример 13.1. *Пусть $X = \mathbb{N}$, алгебра $\mathcal{K} = \mathcal{P}(X)$, $\mu(k) = 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим возрастающую последовательность множеств*

$$A_n = \{1, 2, \ldots, n\} \quad c \quad \mu(A_n) = n < \infty,$$

тогда $\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Пусть

$$f_n(x) = \chi_{A_n}(x),$$

т.е. $f_n(k) = 1$ для всех $k \leq n$ и $f_n(x) = 0$ в остальных случаях. Ясно, что

$$f_n(x) \to 1$$

почти всюду. Возьмем $0 < \delta < 1$, тогда из условия

$$\mu(X \setminus X_\delta) < \delta$$

вытекает, что множество X_δ, при условии его существования, должно совпадать с $\mathbb{N}$, поскольку мера принимает лишь целочисленные значения. Однако на всем $\mathbb{N}$ равномерной сходимости нет.

Мы показывали, что всякая непрерывная функция измерима. Естественно поставить вопрос, насколько класс измеримых функций шире класса непрерывных функций на множестве $X \subset \mathbb{R}$ с $\mu(X) < \infty$. Следующая теорема, установленная Н.Н. Лузиным, показывает, что эти классы в определенном смысле близки.

Теорема 13.2 (Лузин)**.** *. Для того, чтобы функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, была измеримой, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала такая непрерывная функция $g(x)$, что*

$$\mu\left(\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}\right) < \varepsilon.$$

14 Простые функции и интеграл Лебега от простых функций

Для построения интеграла Лебега нам понадобится класс функций, замкнутый относительно алгебраических операций, называемых простыми.

Пусть (X, Σ, μ) — пространство с σ-аддитивной полной конечной мерой.

Определение 14.1. *Измеримая функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется* ***простой****, если она принимает конечное или счётное число различных значений.*

Пусть $A_k = \{x \in X : f(x) = y_k\}$, тогда $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и функция $f(x)$ может быть записана в виде линейной комбинации характеристических функций

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \chi_{A_k}(x). \tag{14.1}$$

Структура простых функций описывается следующим образом.

Теорема 14.1. *Функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ является простой тогда и только тогда, когда $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где множества A_k измеримы и $f(x)$ принимает постоянное значение y_k на множестве A_k.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть f — простая функция, тогда f измерима и поэтому измеримы все множества A_k, так как

$$A_k = \{x \in X : f(x) = y_k\} = \{x : f(x) \le y_k\} \setminus \{x : f(x) < y_k\}$$

и справедливо представление

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Достаточность. Пусть справедливо представление $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и все A_k измеримы, тогда для любого $c \in \mathbb{R}$

$$A_c = \{x : f(x) < c\} = \bigcup_{y_k < c} A_k,$$

т. е. A_c является объединением измеримых множеств. □

Примером простой функции является функция Дирихле, характеристическая функция измеримого множества.

Теорема 14.2. *Множество простых функций, заданных на измеримом пространстве X, замкнуто относительно алгебраических операций.*

Доказательство. Пусть $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — простые функции и $A_k = \{x : f(x) = y_k\}, B_j = \{x : g(x) = z_j\}$. Тогда

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j.$$

Рассмотрим для любых k и j множества $C_{kj} = A_k \cap B_j$, которые измеримы и обладают тем свойством, что

$$X = \bigcup_{k,j} C_{kj}.$$

Тогда на каждом C_{kj} функции f и g постоянны, следовательно, их сумма, разность, произведение и частное (если знаменатель не обращается в ноль) также постоянны на C_{kj}. Поэтому алгебраические комбинации простых функций являются простыми функциями. □

Использование простых функций в построении интеграла Лебега основано на следующей теореме.

Теорема 14.3. *Для любой измеримой функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ существует равномерно сходящаяся к ней последовательность простых функций.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ — измеримая функция. Положим

$$f_n(x) = \frac{k}{n}, \quad \text{если } \frac{k}{n} \le f(x) < \frac{k+1}{n},$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots$. Пусть

$$A_n^k = \left\{ x \in X : \frac{k}{n} \le f(x) < \frac{k+1}{n} \right\},$$

тогда A_n^k измеримы при любых $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ и поэтому (f_n) — последовательность простых функций. Кроме того,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \to 0,$$

а это означает, что последовательность $f_n \rightrightarrows f$. □

Основная идея построения интеграла Лебега состоит в том, что здесь, в отличие от интеграла Римана, точки x группируются не по признаку их близости на оси OX, а по признаку близости значений функции в этих точках. Это сразу же позволяет распространить понятие интеграла Лебега на очень широкий класс функций. Кроме того, интеграл Лебега вводится одинаково для функций, заданных на любых пространствах с мерой, а интеграл Римана вводится сначала для функций одной переменной, а затем уже с соответствующими изменениями переносится на случай нескольких переменных. Для функций же на абстрактных пространствах с мерой интеграл Римана вообще не имеет смысла.

14.1 Интеграл Лебега от простых функций

Определим интеграл Лебега вначале от простых функций.

Пусть $f(x)$ — простая функция, принимающая не более чем счётное число различных значений $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ на множествах $A_k = \{x : f(x) = y_k\}$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k). \tag{14.2}$$

Определение 14.2. *Простая функция f, принимающая значения y_k на множествах $A_k, k = 1, 2, \ldots$, называется **суммируемой** (по мере μ) или **интегрируемой по Лебегу** на X, если ряд (14.2) сходится абсолютно. Если функция f суммируема, то сумма ряда (14.2) называется **интегралом Лебега** от функции f по множеству X, т. е.*

$$\int_X f(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k). \tag{14.3}$$

Требование абсолютной сходимости возникает потому, что члены ряда (множества A_k) нумеруются произвольно и сумма ряда может меняться при перестановке членов ряда.

В данном определении все y_k различны. Однако от этого требования можно отказаться.

Лемма 14.1. *Пусть $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ и пусть на каждом B_i функция принимает значение c_i. Тогда*

$$\int_X f(x)\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu(B_i), \tag{14.4}$$

причём функция f суммируема на X тогда и только тогда, когда ряд (14.4) сходится абсолютно.

Доказательство. Пусть $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и $A_k = \{x \in X : f(x) = y_k\}$, где все y_k различны. Тогда множества A_k являются объединением тех B_i, для которых $c_i = y_k$. Значит

$$\sum_k y_k \mu(A_k) = \sum_k y_k \left(\sum_{c_i = y_k} \mu(B_i) \right) = \sum_i c_i \mu(B_i). \tag{14.5}$$

Так как мера неотрицательна, то ряды в (14.5) сходятся или расходятся одновременно. В случае абсолютной сходимости рядов (14.5) справедливо равенство (14.4). □

Пример 14.1. *Рассмотрим функцию*

$$f(x) = (-1)^n \cdot n, \quad x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Данная функция является простой неограниченной функцией на полуинтервале $[0,1)$. *Составим ряд (14.2)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu\left(\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n \cdot \frac{1}{n(n+1)}.$$

Данный ряд не сходится абсолютно, поэтому функция f *не суммируема на полуинтервале* $[0,1)$.

Установим некоторые свойства интеграла Лебега от простых функций.

Свойство 14.1.

$$\int_X (f(x)+g(x))\,d\mu = \int_X f(x)\,d\mu + \int_X g(x)\,d\mu,$$

причём из существования интегралов в правой части следует существование интеграла в левой.

Доказательство. Пусть $A_i = \{x : f(x) = f_i\}$ и $B_j = \{x : g(x) = g_j\}$. Тогда

$$\int_X f(x)\,d\mu = \sum_i f_i \mu(A_i), \quad \int_X g(x)\,d\mu = \sum_j g_j \mu(B_j). \tag{14.6}$$

Рассмотрим

$$\int_X (f(x)+g(x))\,d\mu = \sum_i \sum_j (f_i + g_j)\mu(C_{ij}),$$

где $C_{ij} = A_i \cap B_j$. Но

$$\mu(A_i) = \sum_j \mu(A_i \cap B_j), \quad \mu(B_j) = \sum_i \mu(A_i \cap B_j).$$

Из абсолютной сходимости рядов (14.6) вытекает абсолютная сходимость ряда для суммы и требуемое равенство. $\square$

Свойство 14.2. *Для любой постоянной* α

$$\int_X \alpha f(x)\,d\mu = \alpha \int_X f(x)\,d\mu,$$

причём из существования интеграла в правой части следует существование интеграла в левой части.

Свойство 14.3. *Ограниченная на множестве* X *простая функция* f *интегрируема, причём, если* $|f(x)| \le M$ *на* X, *то*

$$\left|\int_X f(x)\,d\mu\right| \le M\mu(X).$$

Доказательство. Рассмотрим цепочку неравенств. Если простая функция ограничена, то

$$\left|\int_X f(x)\,d\mu\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|\mu(A_k) \le M \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = M \cdot \mu(X).$$

А это означает суммируемость f. $\square$

Множество простых суммируемых по мере μ функций обозначается $S(X,\mu)$. Это векторное пространство.

15 Интеграл Лебега на множестве конечной меры

Пусть (X, Σ, μ) — пространство с σ-аддитивной полной конечной мерой и $f : X \to \mathbb{R}$ — измеримая функция.

Определение 15.1. *Назовём измеримую функцию f* ***суммируемой по мере*** *μ (или* ***интегрируемой по Лебегу****) на X, если существует последовательность простых суммируемых на X функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, равномерно сходящаяся к f.* ***Интегралом Лебега*** *суммируемой функции f на множестве X называется предел интегралов Лебега от простых суммируемых функций f_n:*

$$\int_X f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu. \tag{15.1}$$

Это определение корректно, если выполнены следующие условия:

1. Предел для любой равномерно сходящейся последовательности простых суммируемых на X функций существует.

2. Этот предел при заданной функции f не зависит от выбора последовательности $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

3. Для простых функций определение совпадает с данным ранее.

Все эти условия выполняются. Действительно, рассмотрим последовательность $(I_n)_{n=1}^{\infty}$, где $I_n = \int_X f_n(x)\, d\mu$, тогда

$$\begin{aligned} |I_n - I_m| &= \left| \int_X f_n(x)\, d\mu - \int_X f_m(x)\, d\mu \right| = \left| \int_X (f_n(x) - f_m(x))\, d\mu \right| \\ &\le \int_X |f_n(x) - f_m(x)|\, d\mu \le \mu(X) \cdot \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0, \end{aligned}$$

так как $\mu(X) < \infty$ и всякая равномерно сходящаяся последовательность является фундаментальной.

Следовательно, числовая последовательность (I_n) является фундаментальной, и поэтому имеет предел.

Для проверки второго условия рассмотрим две последовательности $f_n, g_n \in S(X, \mu)$ такие, что $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows f$ при $n \to \infty$, тогда $|f_n - g_n| \le |f_n - f| + |g_n - f| < \varepsilon/\mu(X)$. Значит,

$$\left| \int_X f_n\, d\mu - \int_X g_n\, d\mu \right| \le \int_X |f_n - g_n|\, d\mu < \varepsilon.$$

Для доказательства справедливости третьего условия достаточно рассмотреть последовательность, в которой f_n равна f для всех n.

Пусть $\mu(X) < \infty$ и f — суммируемая функция на X. Рассмотрим разбиение оси OY: $T = \{y_k\}$, где $y_k \le f(x) \le y_{k+1}$ с диаметром $\lambda(T) = \sup_k |y_{k+1} - y_k|$. Пусть ξ_k — набор точек, удовлетворяющих условию $\xi_k \in [y_k, y_{k+1}]$. Покажем, что интеграл Лебега от функции f может быть вычислен по формуле

$$\int_X f(x)\, d\mu = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_k \xi_k\, \mu(\{x \in X : y_k \le f(x) \le y_{k+1}\}). \tag{15.2}$$

Выражение (15.2) называется интегральной суммой Лебега.

Определим для каждого разбиения верхнюю и нижнюю суммы Лебега:

$$S(T) = \sum_k y_{k+1}\mu(A_k), \quad s(T) = \sum_k y_k\mu(A_k), \tag{15.3}$$

где $A_k = \{x \in X : y_k \leq f(x) \leq y_{k+1}\}$. Покажем, что если функция f суммируема, то $S(T)$ и $s(T)$ в (15.3) сходятся, причём, поскольку

$$s(T) \leq \int_X f(x)\,d\mu \leq S(T),$$

то

$$\int_X f(x)\,d\mu = \lim_{\lambda(T)\to 0} S(T) = \lim_{\lambda(T)\to 0} s(T). \tag{15.4}$$

Действительно, если f суммируема, то, согласно (15.1), найдётся последовательность $f_n \in S(X,\mu)$ такая, что $f_n \rightrightarrows f$. Согласно теореме 14.3, последовательность f_n может быть построена так:

$$f_n(x) = \frac{k}{n}, \quad \text{если } \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}, \tag{15.5}$$

либо

$$f_n(x) = \frac{k+1}{n}, \quad \text{если } \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}. \tag{15.6}$$

С учётом (15.5), (15.6), y_k можно выбирать так, чтобы $|y_k - k/n| \to 0$ и $|y_{k+1} - (k+1)/n| \to 0$ для всех k. Тогда ряды (15.3) будут сходиться. Учитывая оценку

$$|S(T) - s(T)| \leq \lambda(T)\mu(X), \tag{15.7}$$

видим, что

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} S(T) = \lim_{\lambda(T)\to 0} s(T).$$

Формула (15.2) для интегральных сумм Лебега позволяет описать отличие в определении интеграла Римана и интеграла Лебега. В обоих определениях (в случае $f(x) > 0$) понятие интеграла связано с площадью фигуры, лежащей между графиком функции $f(x)$ и осью OX. Для подсчёта площади фигура разбивается на более простые части, для которых площадь вычисляется приближённо. При составлении интегральных сумм Римана (сумм Дарбу) отрезок $[a,b] = X$ разбивается на части точками $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, в каждой части выбирается точка ξ_k и составляется сумма

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Такое приближение оправдано тогда, когда значения функции f на всяком отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ близки к $f(\xi_k)$, $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Это справедливо для непрерывных функций.

При составлении интегральных сумм Лебега выделяются множества A_k и на них функция f заменяется на $\xi_k \in [y_k, y_{k+1}]$, т. е. разбиение производится по признаку близости значений функции. В интегральных суммах Римана разбиение производится по признаку близости точек на оси OX, при этом значения функции будут близки в силу непрерывности функции.

Пример 15.1. *Вычислим по определению*

$$\int_{[0,1]} x^2\,d\mu.$$

Функция $f(x) = x^2$ является непрерывной, поэтому она измерима и ограничена. Всякая измеримая ограниченная функция суммируема. Действительно, рассмотрим последовательность простых функций $f_n(x) = \frac{k}{n}$, где $|k| \le n \sup_{x\in X} |f(x)| \le nM$, $M = \sup_{x\in X} |f(x)|$, которая равномерно сходится к $f(x)$ и является суммируемой.

Таким образом, $f(x) = x^2$ на отрезке $[0,1]$ суммируема. Пусть

$$f_n(x) = y_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2,$$

когда $x \in A_k = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)\right) = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$, $k = 0, \dots, n-1$. Тогда

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} f(x)\,d\mu &= \int_{[0,1]} x^2\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} y_k \mu(A_k) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\int_{[0,1]} x^2\,d\mu = \frac{1}{3}.$$

Отметим, что данная функция интегрируема и по Риману.

Обозначим через $\mathcal{L}(X,\mu)$ множество интегрируемых по Лебегу функций.

Рассмотрим основные свойства интеграла Лебега по множеству конечной меры.

Свойство 15.1. *Пусть $A \subset X$ — измеримое множество. Тогда*

$$\int_A 1\,d\mu = \mu(A). \tag{15.8}$$

Доказательство. Действительно,

$$\int_A 1\,d\mu = \int_X 1 \cdot \chi_A(x)\,d\mu = \mu(A). \quad \square$$

$\square$

Свойство 15.2. *Пусть f, g — суммируемые функции, тогда для любых скаляров $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ суммируемой является функция $\alpha f + \beta g$ и справедливо равенство*

$$\int_X (\alpha f(x) + \beta g(x))\,d\mu = \alpha \int_X f(x)\,d\mu + \beta \int_X g(x)\,d\mu. \tag{15.9}$$

Доказательство. Пусть $f_n, g_n \in S(X,\mu)$ и $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$. Тогда $\alpha f_n + \beta g_n \in S(X,\mu)$ и $\alpha f_n + \beta g_n \rightrightarrows \alpha f + \beta g$ при $n \to \infty$. В равенстве

$$\alpha \int_X f_n(x)\,d\mu + \beta \int_X g_n(x)\,d\mu = \int_X (\alpha f_n + \beta g_n)\,d\mu$$

перейдём к пределу при $n \to \infty$ и получим (15.9). $\square$

Свойство 15.3. *Ограниченная измеримая функция f суммируема на X.*

Доказательство. Это свойство доказано выше. □

Свойство 15.4. *Пусть f — суммируемая и удовлетворяет условию $f(x) \geq 0$, тогда*

$$\int_X f(x)\, d\mu \geq 0. \tag{15.10}$$

Доказательство. Пусть f является простой, т. е. $f(x) = y_k$, $x \in A_k = \{x \in X : f(x) = y_k\}$. Если $y_k \geq 0$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k) \geq 0,$$

т. е. (15.10) справедливо.

Если f — произвольная суммируемая функция, то последовательность

$$f_n(x) = \frac{k}{n}, \quad x \in \left\{ x \in X : \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n} \right\},$$

принимает также неотрицательные значения, т. е. $f_n(x) \geq 0$ для всех $x \in X$. Поэтому

$$\int_X f_n(x)\, d\mu \geq 0.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим доказываемое неравенство (15.10). □

Из свойства 15.4 вытекают следующие следствия:

(a) Если f_1, f_2 — суммируемые функции и $f_1(x) \geq f_2(x)$, то

$$\int_X f_1(x)\, d\mu \geq \int_X f_2(x)\, d\mu. \tag{15.11}$$

(b) Если f — суммируемая функция и $m \leq f(x) \leq M$, то

$$m\mu(X) \leq \int_X f(x)\, d\mu \leq M\mu(X). \tag{15.12}$$

Свойство 15.5. *Пусть f — измерима, а φ такая суммируемая на X функция, что $|f| \leq \varphi$, тогда f также суммируема.*

Доказательство. Пусть f, φ — простые функции. Тогда $X = \bigcup_k A_k$ и на A_k функции f и φ принимают соответственно значения y_k и z_k, для которых справедливо неравенство $|y_k| \leq z_k$. Рассмотрим ряды

$$\int_X f(x)\, d\mu = \sum_k y_k \mu(A_k) \leq \sum_k |y_k| \mu(A_k) \leq \sum_k z_k \mu(A_k).$$

Из приведённой цепочки неравенств вытекает, что ряд для функции f мажорируется абсолютно сходящимся рядом и, значит, сам абсолютно сходится. В общем случае это свойство доказывается предельным переходом. □

В частности справедливо:

(a) Если $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$, где f_1, f_2 — суммируемые, а f — измеримая функция, то f будет суммируемой.

(b) Пусть f — суммируемая функция, а g — ограниченная измеримая функция такая, что $|g(x)| \leq c$. Тогда функция $f \cdot g$ суммируема, причём

$$\left|\int_X fg\,d\mu\right| \leq c\int_X |f|\,d\mu. \tag{15.13}$$

Свойство 15.6 (Аддитивность интеграла)**.** *Если f суммируема на X и $A, B \subset X$ — измеримые множества, $A \cap B = \emptyset$, то f суммируема на A и на B и справедливо равенство*

$$\int_{A\cup B} f(x)\,d\mu = \int_A f(x)\,d\mu + \int_B f(x)\,d\mu. \tag{15.14}$$

Доказательство. Это свойство называется аддитивностью интеграла Лебега. Пусть f суммируема на X. Тогда

$$\begin{aligned}\int_{A\cup B} f(x)\,d\mu &= \int_X f(x)\chi_{A\cup B}(x)\,d\mu = \int_X f(x)(\chi_A(x) + \chi_B(x))\,d\mu \\ &= \int_X f(x)\chi_A(x)\,d\mu + \int_X f(x)\chi_B(x)\,d\mu = \int_A f(x)\,d\mu + \int_B f(x)\,d\mu.\end{aligned}$$

В данной цепочке использовано то, что $A \cap B = \emptyset$, поэтому $\chi_A(x) + \chi_B(x) = \chi_{A\cup B}(x)$. □

Свойство 15.7. *Функции f и $|f|$ суммируемы либо не суммируемы одновременно, причём справедлива оценка*

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu. \tag{15.15}$$

Доказательство. Обозначим $I_1 = \int_X f\,d\mu$, $I_2 = \int_X |f|\,d\mu$. Если I_2 существует, то, учитывая, что $|f| \leq |f|$, применяя свойство 15.5, получим существование I_1. Пусть f суммируема, т. е. существует I_1. Тогда, если f простая, то I_2 существует по определению. В общем случае свойство доказывается предельным переходом. □

Свойство 15.8. *Если $\mu(A) = 0$, то*

$$\int_A f(x)\,d\mu = 0.$$

Доказательство. Для простых функций это свойство очевидно, а для произвольных получается предельным переходом. □

(a) Если $f(x) = 0$ почти всюду на X, то

$$\int_X f(x)\,d\mu = 0.$$

Доказательство. Пусть A — множество меры нуль, вне которого $f(x) = 0$, тогда

$$\int_X f(x)\,d\mu = \int_A f(x)\,d\mu + \int_{X\setminus A} 0 \cdot d\mu = 0.$$

□

(b) Если $f(x)$ и $g(x)$ суммируемы и равны почти всюду, то

$$\int_X f(x)\,d\mu = \int_X g(x)\,d\mu.$$

Последнее соотношение позволяет рассматривать неравенства, возникающие почти всюду. В этом случае может идти речь о функциях измеримых и ограниченных почти всюду.

Определение 15.2. *Назовём измеримую функцию f на X* ***существенно ограниченной****, если $\exists c > 0$, что $|f(x)| \le c$ почти всюду на X. Наименьшая из таких констант (докажите её существование) называется* ***существенной верхней гранью*** *функции f и обозначается*

$$\operatorname{ess\,sup} |f(x)|.$$

Свойство 15.9. *Если $\int_X |f(x)|\, d\mu = 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду на X.*

Для доказательства данного свойства используем неравенство Чебышева.

Лемма 15.1 (Неравенство Чебышева)**.** *Пусть f — суммируемая, причём $f(x) \ge 0$, $c > 0$, и пусть $A_c = \{x : f(x) \ge c\}$. Тогда справедливо неравенство Чебышева:*

$$\mu(A_c) \le \frac{1}{c} \int_X f(x)\, d\mu. \tag{15.16}$$

Доказательство леммы.

$$\int_X f(x)\, d\mu = \int_{A_c} f(x)\, d\mu + \int_{X \setminus A_c} f(x)\, d\mu \ge \int_{A_c} f(x)\, d\mu \ge c\mu(A_c).$$

Откуда следует (15.16). □

Доказательство свойства 15.9. Обозначим через

$$A_n = \left\{ x : |f(x)| > \frac{1}{n} \right\}.$$

Тогда

$$A_0 = \{x : |f(x)| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Докажем, что $\mu(A_0) = 0$. По неравенству Чебышева имеем

$$\mu(A_n) \le \frac{1}{1/n} \int_X |f(x)|\, d\mu = 0.$$

Значит,

$$\mu(A_0) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0,$$

т. е. $\mu(A_0) = 0$. □

Пример 15.2. *Вычислим интеграл Лебега от функции*

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}; \\ 1 - x, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Прежде всего заметим, что функция $f(x)$ не интегрируема по Риману, поскольку она разрывна в каждой точке. Однако по мере Лебега f эквивалентна функции g, которая в каждой точке отрезка $[0,1]$ равна x^3. Действительно,

$$\mu(\{x \in [0,1] : f(x) \ne g(x)\}) = \mu([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 0.$$

По свойству 15.8(a)

$$\int_{[0,1]} f(x)\, d\mu = \int_{[0,1]} g(x)\, d\mu = \int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{4}.$$

Пример 15.3. *Вычислим интеграл Лебега от функции f, заданной на отрезке $[0,1]$ следующим образом*

$$f(x) = \begin{cases} 2^n, & x \in \left[\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{1}{3^n}\right), \quad n = 1, 2, \dots; \\ e^x, & x \in K; \\ x^2+1, & x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right], \end{cases}$$

где K — канторово множество.

Поскольку $\mu(K) = 0$, то $f \sim g$, где

$$g(x) = \begin{cases} 2^n, & x \in \left[\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{1}{3^n}\right), \quad n = 1, 2, \dots; \\ x^2+1, & x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

Значит,

$$I = \int_{[0,1]} f(x)\, d\mu = \int_{[0,1]} g(x)\, d\mu = \int_{[0,1/3]} g(x)\, d\mu + \int_{[1/3,1]} g(x)\, d\mu = I_1 + I_2.$$

На $[0,1/3)$ функция g простая, поэтому

$$I_1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}.$$

$$I_2 = \int_{1/3}^{1} (x^2+1)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_{1/3}^{1} = \left(\frac{1}{3} + 1\right) - \left(\frac{1}{81} + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} - \frac{28}{81} = \frac{108-28}{81} = \frac{80}{81}.$$

Таким образом,

$$I = \frac{4}{3} + \frac{80}{81} = \frac{108+80}{81} = \frac{188}{81}.$$

16 Абсолютная непрерывность и σ-аддитивность интеграла Лебега

В предыдущем параграфе мы рассмотрели свойства интеграла Лебега по фиксированному множеству, за исключением свойств 15.6. А сейчас зафиксируем суммируемую функцию f и будем рассматривать интеграл Лебега как функцию множества $A \subset X$, т.е.

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu. \tag{16.1}$$

Очевидно, что $\nu(\emptyset) = 0$.

Теорема 16.1 (Абсолютная непрерывность интеграла)**.** *Если $f(x)$ – суммируемая на множестве A функция, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$, такое что*

$$\left| \int_E f(x)\, d\mu \right| < \varepsilon$$

для всякого измеримого множества $E \subset A$ такого, что $\mu(E) < \delta$.

Доказательство. Пусть сначала f – простая функция, т. е. $f(x) = y_k$, если $x \in A_k = \{x \in A : f(x) = y_k\}$ и $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Тогда

$$\int_A f(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k), \tag{16.2}$$

причём ряд справа сходится абсолютно. Из условия абсолютной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |y_k|\mu(A_k) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{16.3}$$

Построим множество $B = \bigcup_{k=N(\varepsilon)+1}^{\infty} A_k$, которое измеримо. На множестве $A \setminus B$ функция f будет принимать конечное число значений, поэтому будет ограниченной. Пусть

$$c = \max_{1 \le k \le N(\varepsilon)} |y_k| = \max_{x \in A \setminus B} |f(x)|. \tag{16.4}$$

Выберем $\delta < \varepsilon/(2c)$. Пусть $E \subset A$ и $\mu(E) < \delta$, тогда с учетом (16.2)–(16.4) имеем

$$\begin{aligned}
|\nu(E)| = \left|\int_E f(x)\,d\mu\right| &= \left|\int_{E\cap B} f(x)\,d\mu + \int_{(A\setminus B)\cap E} f(x)\,d\mu\right| \\
&\le \int_{E\cap B} |f|\,d\mu + \int_{(A\setminus B)\cap E} |f|\,d\mu \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + c\delta \le \varepsilon.
\end{aligned}$$

Пусть теперь f – произвольная суммируемая функция. Тогда найдется такая простая функция g, что

$$\int_A |f(x) - g(x)|\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для простой функции g, как только что доказано, существует $\delta > 0$ такое, что если $\mu(E) < \delta$, то

$$\left|\int_E g(x)\,d\mu\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для любого измеримого $E \subset A$ с $\mu(E) < \delta$ получаем

$$\begin{aligned}
\left|\int_E f(x)\,d\mu\right| &\le \left|\int_E g(x)\,d\mu\right| + \int_E |f(x) - g(x)|\,d\mu \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Теорема 16.2 (σ-аддитивность интеграла Лебега)**.** *Пусть f – суммируемая функция на множестве A и пусть $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где A_k, $k = 1, 2, \ldots$ – измеримые множества. Тогда f суммируема на каждом A_k и*

$$\int_A f(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f(x)\,d\mu, \tag{16.5}$$

причём ряд справа сходится абсолютно.

Следствие 16.1. *Если f суммируема на измеримом множестве A, то f суммируема на любом подмножестве $B \subset A$.*

Справедлива и обратная теорема к теореме 16.2.

Теорема 16.3. *Пусть измеримое множество $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и на каждом A_k функция f суммируема, причём ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |f(x)|\, d\mu \tag{16.8}$$

сходится. Тогда функция f суммируема на A и

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f(x)\, d\mu.$$

Установленные свойства интеграла как функции множества приводят к следующему результату. Пусть f – неотрицательная функция, суммируемая на пространстве X по мере μ. Рассмотрим функцию

$$\nu(A) = \int_A f(x)\, d\mu,$$

которая определена для всех измеримых подмножеств $A \subset X$, причём

1. $\nu(A) \geq 0$, $\nu(\emptyset) = 0$;
2. Если $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то $\nu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$;
3. Если $\mu(A) < \delta$, то $|\nu(A)| < \varepsilon$.

Иными словами, интеграл от неотрицательной функции обладает как функция множества всеми свойствами σ-аддитивной меры. Эта мера определена на той же σ-алгебре, что и мера μ.

17 Предельный переход под знаком интеграла Лебега

Особенно заметны преимущества интеграла Лебега над интегралом Римана, когда мы имеем дело с предельным переходом. В случае интеграла Римана перемена порядка операций интегрирования и перехода к пределу возможна лишь в случае равномерной сходимости последовательности подынтегральных функций. В случае интеграла Лебега такие требования можно ослабить. В основе таких требований лежат три теоремы, на рассмотрении которых мы сейчас остановимся.

Теорема 17.1 (Лебег)**.** *Пусть (X, Σ, μ) — пространство с мерой. Если последовательность измеримых функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится почти всюду к функции $f(x)$ и при этом существует суммируемая функция φ, такая что для всех n $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ почти всюду, то f — суммируемая функция и*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu = \int_X f(x)\, d\mu. \tag{17.1}$$

Следствие 17.1. *Пусть последовательность $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ почти всюду и существует константа $M > 0$, такая что $|f_n(x)| \leq M$ почти всюду для всех n, тогда справедливо равенство (17.1).*

Теорема 17.2 (Б. Леви). *Пусть (X, Σ, μ) — пространство с мерой и $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots$ — монотонно возрастающая последовательность суммируемых функций и пусть существует такая константа $C > 0$, что*

$$\int_X f_n(x)\, d\mu \le C \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}. \tag{17.4}$$

Тогда почти всюду существует конечный предел

- $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$;
- f *— суммируемая функция;*
- $\int_X f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu$.

Следствие 17.2. *Пусть $\varphi_n(x)$ — последовательность неотрицательных суммируемых функций и пусть числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X \varphi_n(x)\, d\mu \tag{17.5}$$

сходится. Тогда почти всюду на X сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$, т. е.

- $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$;
- $\int_X \varphi(x)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \varphi_n(x)\, d\mu$.

Замечание 17.1. *Если условие неотрицательности φ_n не выполнено, то необходимо потребовать, чтобы ряд (**??**) сходился абсолютно.*

Следствие 17.2 дает возможность почленно интегрировать ряд из суммируемых функций при определенных условиях, который сходится почти всюду.

Пример 17.1. *Вычислим $\int_{[0,1]} x^{-1/2}\, d\mu$ по теореме 17.2. Для этого построим монотонно неубывающую последовательность суммируемых функций*

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{-1/2}, & \text{при } 1/n \le x \le 1, \\ 0, & \text{при } 0 < x < 1/n. \end{cases}$$

Тогда f_n — монотонно возрастающая последовательность суммируемых функций, предел которой почти всюду равен $x^{-1/2}$, кроме того

$$\int_{[0,1]} f_n(x)\, d\mu = \int_{1/n}^{1} x^{-1/2}\, dx = 2 - \frac{2}{\sqrt{n}} \le 2.$$

Поэтому

$$\int_{[0,1]} x^{-1/2}\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 2.$$

Упражнение 17.1. *Показать, что теорема 17.2 является следствием теоремы 17.1.*

Теорема 17.3 (Фату). *Пусть (X, Σ, μ) — пространство с мерой и $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных суммируемых функций на множестве X, обладающая свойствами:*

- $f_n(x) \to f(x)$ *почти всюду на X;*
- $\int_X f_n(x)\, d\mu \le C$ *для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Тогда

- *f суммируема;*
- *$\int_X f(x)\,d\mu \le C$.*

Замечание 17.2. *Если последовательность f_n удовлетворяет условиям теоремы Фату, то нельзя утверждать, что*

$$\int_X f(x)\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\,d\mu.$$

Пример 17.2. *Пусть*

$$f_n(x) = \begin{cases} n - n^2 x, & \text{при } 0 \le x \le 1/n, \\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

На $[0,1]$ $f_n(x) \to 0$ *поточечно и*

$$\int_{[0,1]} f_n(x)\,d\mu = \frac{1}{2},$$

но

$$0 = \int_{[0,1]} f(x)\,d\mu \ne \lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n(x)\,d\mu = \frac{1}{2}.$$

В общих чертах остановимся на интеграле Лебега по множеству с σ-конечной мерой. В этом случае можно рассматривать интеграл Лебега на всей числовой прямой $\mathbb{R}$.

Пусть X — пространство с σ-конечной мерой. По определению σ-конечной меры существует неубывающая последовательность измеримых множеств $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, для которых $\mu(A_n) < +\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Определение 17.1. *Измеримая функция f, заданная на множестве с σ-конечной мерой μ, называется **суммируемой** на X, если она суммируема на каждом A_n и предел*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f(x)\,d\mu$$

существует, конечен и не зависит от выбора последовательности A_n. Этот предел называется интегралом Лебега от функции f и обозначается так

$$\int_X f(x)\,d\mu.$$

Как было показано выше, множество X с σ-конечной мерой может быть представлено в виде счетного объединения попарно непересекающихся множеств X_k, т. е.

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k, \quad \mu(X_k) < \infty.$$

В этом случае измеримая функция называется суммируемой на X, если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{X_k} |f(x)|\,d\mu$$

сходится. Интегралом Лебега функции f называется сумма ряда

$$\int_X f(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{X_k} f(x)\,d\mu.$$

Замечание 17.3. *Определение интеграла от простой функции остается справедливым и в пространстве с σ-конечной мерой, однако для суммируемости простой функции необходимо, чтобы каждое отличное от нуля постоянное значение она принимала на множестве конечной меры.*

Все свойства, установленные для интегралов Лебега по множеству конечной меры, остаются справедливыми и по множеству σ-конечной меры, включая теоремы о предельном переходе. Однако ограниченная измеримая функция может оказаться не суммируемой. В частности, отличная от нуля константа не суммируема на $\mathbb{R}$.

Пример 17.3. *Пусть $X = [0, \infty)$. Вычислим*

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \int_X e^{-nx} x^{-1/2}\, d\mu.$$

Рассмотрим последовательность $f_n(x) = e^{-nx}x^{-1/2}$, $|f_n(x)| \le \varphi(x)$ почти всюду для всех $n \in \mathbb{N}$, где $\varphi(x) = e^{-x}x^{-1/2}$. Функция $\varphi(x)$ интегрируема на X. Учитывая, что $f_n(x) \to 0$ почти всюду, воспользуемся теоремой Лебега о предельном переходе 17.1. Получим

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_X e^{-nx} x^{-1/2}\, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} e^{-nx} x^{-1/2}\, d\mu = 0.$$

18 Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана

Для простоты изложения рассмотрим эту связь в одномерном случае.

Пусть функция f неограничена на полуинтервале $[a, b]$ и интегрируема по Риману на любом промежутке $[a, b-\varepsilon]$. В этом случае речь идет о несобственном интеграле Римана II рода, который определяется по формуле

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx, \tag{18.10}$$

если предел существует и конечен. Несобственный интеграл Римана называют абсолютно сходящимся, если сходится интеграл

$$\int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Теорема 18.1. *Для абсолютной сходимости несобственного интеграла Римана II рода*

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

необходимо и достаточно, чтобы f была суммируемой на $[a, b]$. При выполнении любого из этих условий имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{[a,b]} f(x)\, d\mu. \tag{18.11}$$

Рассмотрим интегрирование по множеству бесконечной меры. Пусть функция определена на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, b]$. Тогда несобственный интеграл Римана по промежутку $[a, +\infty)$ определяется как предел

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\, dx. \tag{18.12}$$

Если предел в (18.12) конечен, то несобственный интеграл называют **сходящимся**; его называют абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$.

Теорема 18.2. *Для абсолютной сходимости несобственного интеграла Римана I рода необходимо и достаточно, чтобы функция f была суммируема на $[a, +\infty)$. При выполнении любого из этих условий имеет место равенство*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{[a,+\infty)} f(x)\,d\mu.$$

Пример 18.1. *Выясним, суммируема ли на отрезке $[0, 1]$ функция*

$$f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}.$$

Из теоремы 18.1 вытекает, что f суммируема, если сходится абсолютно несобственный интеграл Римана II рода от функции f. Покажем, что этот интеграл расходится. Сделаем замену переменной $y = 1/x$, тогда $dx = -dy/y^2$, и

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\left|\sin\frac{1}{x}\right|\,dx = \int_{+\infty}^1 \frac{1}{1/y}\,|\sin y|\left(-\frac{dy}{y^2}\right) = \int_1^\infty \frac{|\sin y|}{y}\,dy.$$

Оценим интеграл снизу:

$$\int_1^\infty \frac{|\sin y|}{y}\,dy > \int_1^\infty \frac{\sin^2 y}{y}\,dy = \int_1^\infty \frac{1-\cos 2y}{2y}\,dy = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{dy}{y} - \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos 2y}{y}\,dy = I_1 + I_2.$$

Интеграл I_1 расходится, а интеграл I_2 сходится по признаку Дирихле. Следовательно, интеграл $\int_1^\infty \frac{|\sin y|}{y}\,dy$ расходится, а значит, функция f не суммируема по Лебегу на отрезке $[0, 1]$.