1. Кольцо. Примеры колец. Замкнутость кольца по отношению к операциям объединения и разности. Алгебра. Утверждение о замкнутости алгебры относительно дополнения и объединения. Теорема о существовании и единственности минимального кольца, порожденного системой множеств.

Пусть задано непустое множество X, $P(X)$ — семейство всех его подмножеств.
Определение 2.1. Непустое семейство $K \subset P(X)$ называют **кольцом подмножеств**, если для любых $A, B \in K$ выполнены условия: $A \triangle B \in K$, $A \cap B \in K$.
Утверждение 2.1. Пусть $K \subset P(X)$ — кольцо. Тогда для любых $A, B \in K$ выполняются включения: $A \cup B \in K$, $A \setminus B \in K$.
Доказательство. Для любых множеств A и B справедливы равенства: $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$ и $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$. Поскольку кольцо замкнуто относительно симметрической разности и пересечения, то $A \cup B \in K$ и $A \setminus B \in K$. □

Утверждение 2.2. Пусть непустая система $K \subset P(X)$ обладает свойствами: 1) для любого $A \in K$ выполнено $X \setminus A \in K$; 2) для любых $A, B \in K$ выполнено $A \cup B \in K$. Тогда K является **алгеброй**.
Доказательство. Из условий (1) и (2) получаем: $X = A \cup (X \setminus A) \in K$. Далее: $A \cap B = X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) \in K$, $A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in K$, $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \in K$. Таким образом, K — кольцо, содержащее X, то есть алгебра. □
Определение 2.3. Кольцо множеств называется **σ-кольцом**, если оно вместе с каждой последовательностью множеств $A_1, A_2, \ldots$ содержит их счётное объединение, то есть $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in K$.
Определение 2.4. **σ-алгеброй** называется σ-кольцо с единицей.

Теорема 2.1. Для любой непустой системы множеств $S \subset P(X)$ существует единственное минимальное кольцо $K(S)$, содержащее S, то есть такое, что: 1) $S \subset K(S)$; 2) для любого кольца K, содержащего S, выполнено $K(S) \subset K$.
Доказательство. Существование хотя бы одного кольца, содержащего S, очевидно: например, $P(X)$. Рассмотрим множество $M = \bigcup_{A \in S} A$ и кольцо $P(M)$ всех подмножеств M. Пусть $\Sigma = \{K : K \subset P(M),\ S \subset K,\ K \text{ — кольцо}\}$. Положим $K(S) = \bigcap_{K \in \Sigma} K$. Докажем, что $K(S)$ — искомое минимальное кольцо. Во-первых, пересечение любого семейства колец является кольцом (проверка замкнутости относительно $\triangle$ и $\cap$ очевидна). Следовательно, $K(S)$ — кольцо. Во-вторых, $S \subset K(S)$, так как S содержится в каждом кольце из Σ. Наконец, если K' — произвольное кольцо, содержащее S, то $K' \cap P(M)$ является кольцом из Σ, значит $K(S) \subset K' \cap P(M) \subset K'$. Единственность минимального кольца очевидна. □

2. Полукольцо. Примеры полуколец. Лемма о пополнении частичного разбиения до полного элементами полукольца. Теорема о структуре кольца, минимального над заданным полукольцом.

Пусть X — непустое множество, $P(X)$ — семейство всех его подмножеств.
Определение 2.5. Непустая система $S \subset P(X)$ называется **полукольцом**, если: 1) $\varnothing \in S$; 2) для любых $A, B \in S$ выполнено $A \cap B \in S$; 3) для любых $A, B \in S$ существует конечная система попарно непересекающихся множеств $C_1, \ldots, C_n \in S$ такая, что $A \setminus B = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$.
Лемма 2.1. Пусть S — полукольцо, $A \in S$, и $A_1, \ldots, A_n \in S$ — попарно непересекающиеся множества, содержащиеся в A. Тогда систему $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ можно дополнить множествами $A_{n+1}, \ldots, A_m \in S$ до конечного разложения $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, причём $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$.
Доказательство. Индукция по n. При $n = 1$ утверждение следует из определения полукольца: существуют $C_1, \ldots, C_k \in S$ такие, что $A \setminus A_1 = \bigcup_{j=1}^{k} C_j$, причём множества C_j попарно не пересекаются и не пересекаются с A_1. Тогда $A = A_1 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_k$ — искомое разложение. Предположим, утверждение верно для $n = k$. Докажем для $n = k + 1$. По предположению индукции существует разложение $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k \cup B_1 \cup \cdots \cup B_l$, где все множества в правой части попарно не пересекаются и принадлежат S. Рассмотрим множество A_{k+1}. Для каждого $j = 1, \ldots, l$ множество $B_j \cap A_{k+1}$ принадлежит S (по замкнутости относительно пересечения). Тогда, по определению полукольца, существуют $D_{j1}, \ldots, D_{jr_j} \in S$, попарно непересекающиеся, такие, что $B_j \setminus A_{k+1} = \bigcup_{s=1}^{r_j} D_{js}$. При этом $B_j = (B_j \cap A_{k+1}) \cup D_{j1} \cup \cdots \cup D_{jr_j}$, и все компоненты не пересекаются. Заметим, что $B_j \cap A_{k+1} \subset A_{k+1}$ и не пересекается с другими A_i при $i \leq k$. Теперь заменим в разложении множества B_j на $B_j \cap A_{k+1}, D_{j1}, \ldots, D_{jr_j}$. После проведения такой замены для всех j получим разложение A, в котором все множества попарно не пересекаются, принадлежат S, и среди них присутствуют $A_1, \ldots, A_{k+1}$. Таким образом, шаг индукции завершён. □

Теорема 2.2. Пусть $S \subset P(X)$ — полукольцо. Тогда минимальное кольцо $K(S)$, порождённое S, состоит в точности из всех множеств, представимых в виде конечных объединений попарно непересекающихся элементов из S, то есть

$$K(S) = \left\{ A : A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ A_i \in S,\ A_i \cap A_j = \varnothing \text{ при } i \neq j \right\}.$$

Доказательство. Обозначим через R систему всех таких конечных объединений. Покажем, что R — кольцо. 1) Пусть $A, B \in R$. Тогда $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$, где $A_i, B_j \in S$ и внутри каждого объединения множества попарно не пересекаются. Тогда $A \cap B = \bigcup_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} (A_i \cap B_j)$. Каждое $A_i \cap B_j \in S$ (по замкнутости полукольца относительно пересечения), и эти множества попарно не пересекаются (так как не пересекаются A_i между собой и B_j между собой). Следовательно, $A \cap B \in R$. 2) Покажем, что $A \setminus B \in R$. Имеем:

$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j \right) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{m} (A_i \setminus B_j).$$

Для каждого i рассмотрим множества $A_i \setminus B_j$. По определению полукольца, каждое $A_i \setminus B_j$ представляется как конечное объединение непересекающихся элементов из S. Затем, применяя лемму, можно показать, что пересечение $\bigcap_{j=1}^{m} (A_i \setminus B_j)$ также допускает представление в виде конечного объединения непересекающихся элементов из S. Объединяя такие представления для всех i, получим, что $A \setminus B \in R$. 3) Поскольку кольцо замкнуто относительно симметрической разности и пересечения, а также объединения (как следствие), то R действительно является кольцом. Очевидно, что $S \subset R$. Если K — любое кольцо, содержащее S, то оно должно содержать все конечные объединения элементов из S, то есть $R \subset K$. Следовательно, $R = K(S)$. □

3. Мера. Примеры мер. Свойства монотонности и субтрактивности меры.

Определение 3.1. Пусть на некотором множестве X задано полукольцо $S \subset P(X)$. Будем говорить, что на S задана **мера**, если каждому элементу $A \in S$ поставлено в соответствие вещественное число $m(A) \in \mathbb{R}$ и при этом выполнены следующие условия: 1) $m(A) \geq 0$ (неотрицательность); 2) если $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, где $A_i \in S$ и множества A_i попарно не пересекаются, то $m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$ (конечная аддитивность). Таким образом, мера первоначально определяется только на полукольце множеств.

Пример 3.1. На числовой прямой $\mathbb{R}$ рассмотрим полукольцо $S = \{[a, b) \mid -\infty < a < b < +\infty\}$ и определим меру $m([a, b)) = b - a$. Длина полуинтервала удовлетворяет аксиомам меры. **Пример 3.2.** На $\mathbb{R}^2$ рассмотрим полукольцо S, состоящее из «полуоткрытых» прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат: $P = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$, где $a_i < b_i$. Тогда площадь прямоугольника $m(P) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ удовлетворяет аксиомам меры.

Определение 3.2. Мера m, заданная на полукольце $S \subset P(X)$, называется **счётно-аддитивной** (или **σ-аддитивной**), если для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots \in S$ такой, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$, выполнено равенство $m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$.

Свойство 3.1 (Монотонность). Если $A, B \in K$ и $A \subset B$, то $m(A) \leq m(B)$.

Доказательство. Поскольку $B = A \cup (B \setminus A)$ и $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$, причём $B \setminus A \in K$ (кольцо замкнуто относительно разности), то по аддитивности меры $m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \geq m(A)$, так как $m(B \setminus A) \geq 0$. □

Свойство 3.2 (Субтрактивность меры). Если $A, B \in K$, $A \subset B$ и $m(A) < \infty$, то $m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$.

Доказательство. Из равенства $m(B) = m(A) + m(B \setminus A)$ следует искомая формула, поскольку все величины конечны. □

4. Свойства меры: мера объединения, симметрической разности, оценка модуля разности мер множеств, оценка меры симметрической разности двух множеств, счетная полуаддитивность меры.

Свойство 3.4 (Включение–исключение для двух множеств). Если $A, B \in K$, то $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

Доказательство. Запишем $A \cup B$ как объединение непересекающихся множеств: $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap$

$B) \cup (B \setminus A)$. Тогда по аддитивности $m(A \cup B) = m(A \setminus B) + m(A \cap B) + m(B \setminus A)$. С другой стороны, $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, откуда $m(A) = m(A \setminus B) + m(A \cap B)$. Аналогично, $m(B) = m(B \setminus A) + m(A \cap B)$. Выражая $m(A \setminus B)$ и $m(B \setminus A)$ и подставляя в первое равенство, получаем требуемую формулу. $\square$

Свойство 3.5 (Мера симметрической разности). Если $A, B \in K$, то $m(A \triangle B) = m(A) + m(B) - 2m(A \cap B)$. **Доказательство.** Так как $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ и множества не пересекаются, то $m(A \triangle B) = m(A \setminus B) + m(B \setminus A)$. Используя равенства $m(A \setminus B) = m(A) - m(A \cap B)$ и $m(B \setminus A) = m(B) - m(A \cap B)$ (которые справедливы, если мера конечна, либо в общем случае с осторожностью), получаем искомую формулу. $\square$

Свойство 3.6 (Неравенство для разности мер). Если $A, B \in K$, то $|m(A) - m(B)| \leq m(A \triangle B)$. **Доказательство.** Заметим, что $A \subset B \cup (A \triangle B)$, откуда по монотонности и полуаддитивности $m(A) \leq m(B) + m(A \triangle B)$. Аналогично, $B \subset A \cup (A \triangle B)$, поэтому $m(B) \leq m(A) + m(A \triangle B)$. Из этих двух неравенств следует требуемое. $\square$

Свойство 3.7 (Неравенство треугольника для симметрической разности). Если $A, B, C \in K$, то $m(A \triangle B) \leq m(A \triangle C) + m(C \triangle B)$. **Доказательство.** Используем включение $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$. Действительно, если $x \in A \triangle B$, то x принадлежит ровно одному из множеств A и B. Если $x \in C$, то $x \notin B$ (иначе x принадлежал бы обоим A и B), значит, $x \in C \triangle B$. Если же $x \notin C$, то $x \in A \triangle C$. Таким образом, включение доказано. Тогда по монотонности и полуаддитивности $m(A \triangle B) \leq m((A \triangle C) \cup (C \triangle B)) \leq m(A \triangle C) + m(C \triangle B)$. $\square$

Свойство 3.8 (Счётная полуаддитивность). Пусть мера m является σ-аддитивной на кольце K. Если $A_1, A_2, \ldots \in K$ (могут пересекаться!!!) и $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in K$, то $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$. **Доказательство.** Построим последовательность попарно непересекающихся множеств $B_k \in K$ следующим образом: $B_1 = A_1$, $B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$ для $k \geq 2$. Так как кольцо замкнуто относительно конечных объединений и разностей, то $B_k \in K$. Кроме того, $B_k \subset A_k$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$. В силу σ-аддитивности меры $m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$, где неравенство следует из монотонности ($m(B_k) \leq m(A_k)$). $\square$

5. Теорема о счетной аддитивности полуинтервальной меры. Пример не sigma-аддитивной меры на числовой прямой. Примеры sigma-аддитивных мер.

Теорема 3.1 (3.1). Длина полуинтервала, определённая на полукольце $S = \{[a, b) \subset \mathbb{R}\}$ формулой $m([a, b)) = b - a$, является σ-аддитивной мерой.

Доказательство. Пусть $A = [a, b) \in S$ и $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A_i = [a_i, b_i) \in S$ и множества A_i попарно не пересекаются. Требуется доказать, что $b - a = \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)$. 1. Доказательство неравенства $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \leq b - a$. Для любого натурального n имеем $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset A$, и так как мера аддитивна для конечных объединений, то $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) = m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq m(A) = b - a$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \leq b - a$. Ряд с неотрицательными членами сходится. 2. Доказательство неравенства $b - a \leq \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Для каждого полуинтервала $A_i = [a_i, b_i)$ построим интервал $B_i = (a_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, b_i)$, так что $A_i \subset B_i$. Также вместо полуинтервала A рассмотрим отрезок $B = [a, b - \frac{\varepsilon}{2}] \subset A$. Тогда $B \subset A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Таким образом, отрезок B покрыт системой открытых интервалов $\{B_i\}$. По лемме Гейне–Бореля из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие: существуют индексы $i_1, \ldots, i_k$ такие, что $B \subset \bigcup_{j=1}^{k} B_{i_j}$. Тогда длина отрезка B не превосходит суммы длин интервалов этого конечного покрытия: $b - a - \frac{\varepsilon}{2} = |B| \leq \sum_{j=1}^{k} |B_{i_j}| = \sum_{j=1}^{k}(b_{i_j} - a_{i_j} + \frac{\varepsilon}{2^{i_j+1}}) \leq \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$. Поскольку $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \frac{\varepsilon}{2}$, получаем $b - a - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) + \frac{\varepsilon}{2}$, откуда $b - a \leq \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) + \varepsilon$. В силу произвольности ε заключаем, что $b - a \leq \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)$. Из двух доказанных неравенств следует равенство (3.1), что и доказывает σ-аддитивность длины. $\square$

Пример 3.5. Пусть x_0 — фиксированная точка множества X. Для любого множества $A \subset X$ положим $\delta_{x_0}(A) = 1$, если $x_0 \in A$, и $\delta_{x_0}(A) = 0$, если $x_0 \notin A$. Эта мера, называемая **мерой Дирака** (или единичной массой в точке x_0), является σ-аддитивной на $S = P(X)$.

6. Продолжение меры. Теорема о продолжении меры, заданной на полукольце, на минимальное кольцо. Следствие о сохранении свойства продолжения меры

Определение 4.1. Пусть m — мера, заданная на полукольце S, и пусть K — кольцо, содержащее S (т.е. $S \subset K$). Мера μ, заданная на K, называется **продолжением меры** m, если для любого множества $A \in S$ выполняется равенство $\mu(A) = m(A)$.

Теорема 4.1. Пусть m — мера на полукольце $S \subset P(X)$ и $K(S)$ — минимальное кольцо, порождённое S.

Тогда на $K(S)$ существует единственная мера μ, являющаяся продолжением меры m.
Доказательство. Доказательство разобьём на три этапа: построение продолжения, проверка корректности построения и проверка аксиом меры. 1. *Построение.Доказательство ЕДИНСТВЕННОСТИ (если продолжение существует)* В силу теоремы о структуре минимального кольца, порождённого полукольцом (теорема 2.2), каждое множество $A \in K(S)$ допускает представление в виде конечного объединения попарно непересекающихся элементов из S: $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, где $A_i \in S$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Если на $K(S)$ существует продолжение μ меры m, то в силу аддитивности должно выполняться: $\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)(1)$. Это равенство задаёт явную формулу для продолжения, если оно существует. Таким образом, продолжение, если оно существует, единственно. 2. *Корректность.* Покажем, что формула (1) задаёт функцию $\mu : K(S) \to [0, +\infty]$ корректно, т.е. значение $\mu(A)$ не зависит от выбора разбиения множества A на попарно непересекающиеся элементы из S. Пусть $A \in K(S)$ имеет два разложения: $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$, где $A_i, B_j \in S$ и внутри каждого разложения множества попарно не пересекаются. Рассмотрим множества $C_{ij} = A_i \cap B_j$. Так как S — полукольцо, то $C_{ij} \in S$. Для каждого фиксированного i множества $\{C_{ij}\}_{j=1}^{m}$ попарно не пересекаются и $A_i = \bigcup_{j=1}^{m} C_{ij}$. Аналогично, для каждого фиксированного j множества $\{C_{ij}\}_{i=1}^{n}$ попарно не пересекаются и $B_j = \bigcup_{i=1}^{n} C_{ij}$. Тогда, используя конечную аддитивность меры m на S, получаем: $\sum_{i=1}^{n} m(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m(C_{ij}) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} m(C_{ij}) = \sum_{j=1}^{m} m(B_j)$. Таким образом, значение $\mu(A)$ не зависит от выбора разложения, и функция μ определена корректно. 3. *Проверка аксиом меры.* • Неотрицательность: по определению, $\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \geq 0$, так как $m(A_i) \geq 0$. • Аддитивность: пусть $A, B \in K(S)$ и $A \cap B = \varnothing$. Тогда существуют разложения $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$, где $A_i, B_j \in S$ и множества внутри каждого объединения попарно не пересекаются. Поскольку A и B не пересекаются, объединение $A \cup B$ можно представить как $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup \bigcup_{j=1}^{m} B_j$, где все множества попарно не пересекаются. Тогда по определению μ: $\mu(A \cup B) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) + \sum_{j=1}^{m} m(B_j) = \mu(A) + \mu(B)$. Это доказывает конечную аддитивность μ. Более того, если $A_1, \ldots, A_k \in K(S)$ попарно не пересекаются, то аналогичным образом можно показать, что $\mu(\bigcup_{p=1}^{k} A_p) = \sum_{p=1}^{k} \mu(A_p)$. Таким образом, μ — мера на $K(S)$, которая по построению совпадает с m на S. Единственность уже обоснована на этапе построения. Теорема доказана. □

7. Множество меры нуль. Примеры множеств меры нуль. Непрерывность сверху (снизу) меры на полукольце. Теорема о связи счетной аддитивности и непрерывности меры.

Определение 4.2. Пусть на кольце $K \subset P(X)$ задана σ-аддитивная мера μ. Множество $A \subset X$ (не обязательно принадлежащее K) называется множеством меры нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечный или счётный набор множеств $E_i \in K$, покрывающий A (т.е. $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$), такой что $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) < \varepsilon$.
Определение 5.1 (Непрерывность снизу). Меру m, заданную на кольце K, называют непрерывной снизу, если для любой возрастающей последовательности множеств $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, такой что $A_n \in K$ и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in K$, выполняется равенство $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m(A)$. Обозначение: $A_n \uparrow A$.
Определение 5.2 (Непрерывность сверху). Меру m, заданную на кольце K, называют непрерывной сверху, если для любой убывающей последовательности множеств $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, такой что $A_n \in K$, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in K$ и $m(A_1) < \infty$, выполняется равенство $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m(A)$. Обозначение: $A_n \downarrow A$. Условие $m(A_1) < \infty$ гарантирует, что все меры конечны (в силу монотонности) и разности $m(A_n) - m(A)$ имеют смысл.
Теорема 5.1. Мера m, заданная на кольце K, является счётно-аддитивной тогда и только тогда, когда она непрерывна снизу. Кроме того, если мера счётно-аддитивна и $A_n \downarrow A$ с $m(A_1) < \infty$, то она непрерывна сверху.
Доказательство. Доказательство разбиваем на две части: необходимость и достаточность. **Необходимость.** Предположим, что мера m счётно-аддитивна на кольце K. Докажем непрерывность снизу. Пусть $A_n \uparrow A$, где $A_n, A \in K$. Построим последовательность попарно непересекающихся множеств: $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ для $n \geq 2$. Так как K — кольцо, то $B_n \in K$. Кроме того, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$. В силу счётной аддитивности имеем $m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n)$. С другой стороны, для любого $n \geq 1$ выполнено $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$, поэтому $m(A_n) = \sum_{k=1}^{n} m(B_k)$. Таким образом, частичные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} m(B_k)$ равны $m(A_n)$, и сходимость ряда влечёт $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) = m(A)$. Значит, мера непрерывна снизу. Теперь докажем непрерывность сверху при дополнительном условии конечности меры первого множества. Пусть $A_n \downarrow A$, $A_n, A \in K$ и $m(A_1) < \infty$. Рассмотрим возрастающую последовательность множеств $B_n = A_1 \setminus A_n$. Так как A_n убывает, то B_n возрастает. Кроме того, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A_1 \setminus A$. По только что доказанному свойству непрерывности снизу для последовательности $B_n \uparrow (A_1 \setminus A)$ имеем $\lim_{n\to\infty} m(B_n) = m(A_1 \setminus A)$. Но $m(B_n) = m(A_1) - m(A_n)$ и $m(A_1 \setminus A) = m(A_1) - m(A)$. Следовательно,

$\lim_{n\to\infty}(m(A_1)-m(A_n)) = m(A_1)-m(A)$, откуда $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m(A)$. Таким образом, мера непрерывна сверху. **Достаточность**. Предположим теперь, что мера m непрерывна снизу. Докажем её счётную аддитивность. Пусть $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность попарно непересекающихся множеств из K таких, что $B = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i \in K$. Определим возрастающую последовательность множеств $A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \in K$. Очевидно, $A_n \uparrow B$. По условию непрерывности снизу имеем $\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m(B)$. Но $m(A_n) = \sum_{i=1}^{n} m(B_i)$ в силу конечной аддитивности меры. Поэтому $m(B) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i)$, что и означает счётную аддитивность меры m. $\square$

8. Внешняя мера. Утверждение о внешней мере. Свойства внешней меры: мера элементов кольца, неотрицательность, монотонность.

Пусть на алгебре K задана σ-аддитивная мера m. Определим на системе всех подмножеств множества X функцию μ^*, которая каждому множеству $A \subset X$ ставит в соответствие число $\mu^*(A)$ по следующему правилу. Так как $X \in K$, то для любого множества A существует его покрытие элементами алгебры K (например, $A_1 = X$, $A_i = \varnothing$ при $i \geq 2$). Вычислим меру такого покрытия и возьмём точную нижнюю грань по всевозможным покрытиям.

ОпределениеВнешней мерой множества $A \subset X$ называется число $\mu^*(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i$ $K\}$.

Теорема 6.1. Внешняя мера μ^*, заданная на $P(X)$, является продолжением меры m с алгебры K, то есть для любого множества $A \in K$ выполняется равенство $\mu^*(A) = m(A)$. **Доказательство.** Пусть $A \in K$. С одной стороны, рассмотрим покрытие $A_1 = A$, $A_i = \varnothing$ при $i \geq 2$. Тогда $\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) = m(A)$. С другой стороны, пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — произвольное покрытие множества A элементами из K, то есть $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Поскольку мера m σ-аддитивна на алгебре K, она обладает свойством счётной полуаддитивности: $m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$. Таким образом, $m(A)$ является нижней границей для сумм $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ по всем покрытиям. Следовательно, $m(A) \leq \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in K\} = \mu^*(A)$. Из двух неравенств получаем $\mu^*(A) = m(A)$.

Свойство 6.1 (Совпадение с мерой на алгебре). Если $A \in K$, то $\mu^*(A) = m(A)$.

Свойство 6.2 (Неотрицательность). Для любого множества $A \subset X$ выполнено $\mu^*(A) \geq 0$, а также $\mu^*(\varnothing) = 0$. Действительно, по определению внешняя мера есть инфимум неотрицательных чисел, поэтому $\mu^*(A) \geq 0$.

Свойство 6.3 (Монотонность). Если $A, B \subset X$ и $A \subseteq B$, то $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Действительно, любое покрытие множества B элементами из K является также покрытием для A. Поэтому множество сумм, по которому берётся инфимум для $\mu^*(A)$, содержит множество сумм для $\mu^*(B)$. Следовательно, инфимум для A не превосходит инфимума для B, то есть $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

9. Свойства внешней меры: счетная полуаддитивность, оценка модуля разности мер, оценка меры симметрической разности двух множеств. Внутренняя мера. Соотношение внутренней и внешней меры одного и того же множества.

Свойство 6.4 (Счётная полуаддитивность). Для любой последовательности множеств $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ выполняется неравенство $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i)$. Доказательство. Если ряд справа расходится, то неравенство очевидно. Предположим, что ряд сходится. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению внешней меры для каждого i существует покрытие $\{A_{ij}\}_{j=1}^{\infty}$ множества B_i элементами из K такое, что $\sum_{j=1}^{\infty} m(A_{ij}) \leq \mu^*(B_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$. Объединение всех этих покрытий образует покрытие множества $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Тогда по определению внешней меры имеем $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} m(A_{ij}) \leq \sum_{i=1}^{\infty}(\mu^*(B_i)+\frac{\varepsilon}{2^i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i) + \varepsilon$. Так как ε произвольно, получаем требуемое неравенство.

Свойство 6.5 (Неравенство для разности внешних мер). Для любых множеств $A, B \subset X$ выполняется $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \triangle B)$. Доказательство. Заметим, что $A \subset B \cup (A \triangle B)$. По свойствам монотонности и счётной полуаддитивности имеем $\mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B)$. Аналогично, $B \subset A \cup (A \triangle B)$, откуда $\mu^*(B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(A \triangle B)$. Из этих двух неравенств следует требуемое.

Свойство 6.6 (Неравенство треугольника для симметрической разности). Для любых множеств $A, B, C \subset X$ выполняется $\mu^*(A \triangle B) \leq \mu^*(A \triangle C) + \mu^*(C \triangle B)$. Доказательство. Используем включение $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$. Действительно, если $x \in A \triangle B$, то x принадлежит ровно одному из множеств A и B. Если $x \in C$, то $x \notin B$, значит $x \in C \triangle B$. Если же $x \notin C$, то $x \in A \triangle C$. Таким образом, включение доказано. Тогда по монотонности и счётной полуаддитивности имеем $\mu^*(A \triangle B) \leq \mu^*((A \triangle C) \cup (C \triangle B)) \leq \mu^*(A \triangle C) + \mu^*(C \triangle B)$.

Определение 6.2. Внутренней мерой множества $A \subset X$ называется число $\mu_*(A) = m(X) - \mu^*(X \setminus A)$.
Свойство 6.7 (Связь внутренней и внешней мер). Для любого множества $A \subset X$ выполняется неравенство $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$. Доказательство. Запишем очевидное равенство $X = A \cup (X \setminus A)$. Применяя свойство счётной полуаддитивности внешней меры, получаем $m(X) = \mu^*(X) \leq \mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A)$. Отсюда $m(X) - \mu^*(X \setminus A) \leq \mu^*(A)$. Но левая часть равна $\mu_*(A)$ по определению. Таким образом, $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$.

10. Множество, измеримое по Лебегу относительно меры. Измеримость по Лебегу множеств меры нуль. Критерий измеримости. Следствие о мере симметрической разности с измеримым множеством.

Пусть X — произвольное множество, $K \subset P(X)$ — алгебра его подмножеств, на которой задана σ-аддитивная конечная мера m (т.е. $m(X) < \infty$). Для каждого множества $A \subset X$ определена внешняя мера μ^*.
Определение 7.1. Множество $A \subset X$ называется измеримым по Лебегу относительно меры m, если для него выполнено равенство $\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X)$.
Упражнение 7.1. Доказать, что множество A измеримо тогда и только тогда, когда $\mu^*(A) = \mu_*(A)$, где $\mu_*(A) = m(X) - \mu^*(X \setminus A)$ — внутренняя мера. Совокупность всех измеримых по Лебегу множеств обозначим через Σ.
Пример 7.1. Покажем, что любое множество меры нуль измеримо по Лебегу и $\mu(A) = 0$. Действительно, если A — множество меры нуль, то для любого $\varepsilon > 0$ существует система множеств $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, $A_i \in K$, такая что $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) < \varepsilon$. Тогда по определению внешней меры $\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) < \varepsilon$, откуда $\mu^*(A) = 0$. Внутренняя мера $\mu_*(A) = m(X) - \mu^*(X \setminus A) \leq m(X)$, но также $\mu_*(A) \geq 0$. Однако из неравенства $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$ и равенства $\mu^*(A) = 0$ следует $\mu_*(A) = 0$. Таким образом, $\mu^*(A) = \mu_*(A) = 0$, и по упражнению 7.1 множество A измеримо. Если множество A измеримо, то его мерой полагают внешнюю меру, т.е. $\mu(A) = \mu^*(A)$.
Теорема 7.1 (Критерий измеримости). Пусть задано множество X и алгебра K с σ-аддитивной конечной мерой m. Тогда для любого множества $A \subset X$ следующие утверждения эквивалентны: 1) A измеримо по Лебегу относительно меры m; 2) Для любого $\varepsilon > 0$ существует элементарное множество $B \in K$ такое, что $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$. **Доказательство.** Докажем импликацию 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть A измеримо, т.е. выполнено $\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X)$. По определению внешней меры для любого $\varepsilon > 0$ существуют покрытия: — Для A: найдётся система множеств $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, $B_i \in K$, такая что $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) < \mu^*(A) + \varepsilon/3$. — Для $X \setminus A$: найдётся система множеств $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$, $C_i \in K$, такая что $X \setminus A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} m(C_i) < \mu^*(X \setminus A) + \varepsilon/3$. Выберем N достаточно большим, чтобы $\sum_{i=N+1}^{\infty} m(B_i) < \varepsilon/3$. Положим $B = \bigcup_{i=1}^{N} B_i \in K$. Тогда $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. — Для $A \setminus B$: имеем $A \setminus B \subset \bigcup_{i=N+1}^{\infty} B_i$, откуда $\mu^*(A \setminus B) < \varepsilon/3$. — Для $B \setminus A$: имеем $B \setminus A = B \cap (X \setminus A) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(B \cap C_i)$, откуда $\mu^*(B \setminus A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(B \cap C_i)$. Используя разложение $C_i = (C_i \setminus B) \cup (B \cap C_i)$ и оценки для $\sum m(B_i)$ и $\sum m(C_i)$, получаем $\mu^*(B \setminus A) < 2\varepsilon/3$. Таким образом, $\mu^*(A \triangle B) \leq \mu^*(A \setminus B) + \mu^*(B \setminus A) < \varepsilon$. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) доказана. Теперь докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существует $B \in K$ такое, что $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$. Так как $B \in K$, то $\mu^*(B) = m(B)$ и $\mu^*(X \setminus B) = m(X \setminus B)$, причём $m(B) + m(X \setminus B) = m(X)$. Используя свойство внешней меры $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \triangle B)$ и аналогичное для дополнений, получаем $|\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) - m(X)| < 2\varepsilon$. В силу произвольности ε заключаем, что $\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(X)$, т.е. множество A измеримо.

11. Теорема о структуре множества измеримых по Лебегу множеств. Следствие об измеримости счетного пересечения множеств.

Теорема 7.2. Совокупность Σ измеримых по Лебегу множеств образует σ-алгебру множеств, содержащую исходную алгебру K. **Доказательство.** Сначала докажем, что Σ — алгебра. 1. Заметим, что в определении измеримости множества A и $X \setminus A$ участвуют симметрично, поэтому если $A \in \Sigma$, то и $X \setminus A \in \Sigma$. 2. Пусть $A_1, A_2 \in \Sigma$. По теореме 7.1 для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множества $B_1, B_2 \in K$ такие, что $\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\mu^*(A_2 \triangle B_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $B = B_1 \cup B_2 \in K$. Тогда $(A_1 \cup A_2) \triangle B \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$, откуда $\mu^*((A_1 \cup A_2) \triangle B) \leq \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon$. Следовательно, $A_1 \cup A_2 \in \Sigma$. 3. Так как $A_1 \cap A_2 = X \setminus ((X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2))$, то из уже доказанного следует, что пересечение двух измеримых множеств измеримо. 4. Разность $A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap (X \setminus A_2)$ также измерима. Таким образом, Σ — алгебра. Теперь докажем, что Σ — σ-алгебра. Для этого достаточно показать, что счётное объединение измеримых множеств измеримо. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Sigma$. Без ограничения общности можно считать, что множества A_i

попарно не пересекаются (иначе можно перейти к последовательности $B_1 = A_1$, $B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$, которая состоит из попарно непересекающихся измеримых множеств, и $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$). Обозначим $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Так как для любого конечного n множество $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ измеримо (как конечное объединение измеримых), то по свойству монотонности внешней меры (которое верно и на Σ, так как внешняя мера совпадает с мерой на измеримых множествах) имеем: $\mu^*(A) \geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i)$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $\mu^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$. Ряд справа сходится, так как его частичные суммы ограничены сверху числом $\mu^*(A) \leq m(X) < \infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что $\sum_{i=N+1}^{\infty} \mu^*(A_i) < \varepsilon$. Рассмотрим множество $C = \bigcup_{i=1}^{N} A_i \in \Sigma$. Тогда $\mu^*(A \triangle C) = \mu^*\left(\bigcup_{i=N+1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} \mu^*(A_i) < \varepsilon$. По следствию 7.1 (или непосредственно по теореме 7.1, так как $C \in \Sigma$ и существует $B \in K$, близкое к C) множество A измеримо. Таким образом, Σ — σ-алгебра. Наконец, покажем, что $K \subset \Sigma$. Если $A \in K$, то по теореме 6.1 $\mu^*(A) = m(A)$ и $\mu^*(X \setminus A) = m(X \setminus A)$, откуда $\mu^*(A) + \mu^*(X \setminus A) = m(A) + m(X \setminus A) = m(X)$. Следовательно, $A \in \Sigma$.
Следствие 7.2. Счётное пересечение измеримых множеств измеримо. **Доказательство.** Это следует из того, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty}(X \setminus A_i)$, а Σ — σ

12. Теорема о свойстве сужения внешней меры на класс измеримых множеств. Полная мера. sigma-конечная мера. Измеримость относительно sigma-конечной меры.

Теорема 7.3. Сужение внешней меры μ^* на класс измеримых множеств Σ задаёт счётно-аддитивную меру μ, т.е. $\mu(A) = \mu^*(A)$ для всех $A \in \Sigma$. **Доказательство.** Сначала докажем конечную аддитивность. Пусть $A_1, A_2 \in \Sigma$ и $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. По теореме 7.1 для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множества $B_1, B_2 \in K$ такие, что $\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon$, $\mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon$. Положим $B = B_1 \cup B_2 \in K$. Тогда $\mu^*(A \triangle B) \leq \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2) < 2\varepsilon$, где $A = A_1 \cup A_2$. Используя свойство 6.5 внешней меры, получаем $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \triangle B) < 2\varepsilon$. Так как B_1 и B_2 могут пересекаться, вычислим меру B: $\mu(B) = m(B) = m(B_1) + m(B_2) - m(B_1 \cap B_2)$. Заметим, что $B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$, поэтому $m(B_1 \cap B_2) \leq \mu^*(B_1 \cap B_2) \leq \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2) < 2\varepsilon$. Кроме того, снова используя свойство 6.5, имеем $|\mu^*(A_1) - m(B_1)| \leq \mu^*(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon$, $|\mu^*(A_2) - m(B_2)| < \varepsilon$. Подставляя эти оценки в формулу для $m(B)$, получаем $\mu^*(B) = m(B) > \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 3\varepsilon$. Тогда из предыдущей оценки следует $\mu^*(A) > \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 5\varepsilon$. В силу произвольности ε получаем $\mu^*(A) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$. С другой стороны, по свойству счётной полуаддитивности внешней меры имеем $\mu^*(A) \leq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$. Таким образом, $\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$. Итак, конечная аддитивность доказана. Теперь докажем счётную аддитивность. Пусть $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность попарно непересекающихся множеств из Σ, и $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Для любого конечного n из конечной аддитивности и монотонности следует: $\mu^*(A) \geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i)$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $\mu^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$. С другой стороны, по свойству счётной полуаддитивности внешней меры, $\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$. Из этих двух неравенств следует равенство: $\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$. Таким образом, мера $\mu = \mu^*|_{\Sigma}$ счётно-аддитивна.
Определение 7.2. Мера m, заданная на алгебре K, называется *полной*, если из условия $m(A) = 0$ следует, что любое подмножество $B \subset A$ принадлежит K и $m(B) = 0$.
Определение 7.3. Мера μ, заданная на кольце $K \subset \mathcal{P}(X)$, называется *sigma-конечной*, если существует последовательность множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A_n \in K$, такая, что $\mu(A_n) < \infty$ для всех n и $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. **Определение 7.4.** Пусть мера μ на алгебре K sigma-конечна. Множество $A \subset X$ называется *измеримым*, если для каждого n множество $A \cap X_n$ измеримо относительно сужения меры на X_n, где $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — разложение X на попарно непересекающиеся множества конечной меры. При этом полагают $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap X_n)$.

13. Измеримость по Лебегу, если X – полуинтервал. Утверждения о мере Лебега одноточечного множества, мере Лебега не более чем счетного ограниченного множества, мере Лебега ограниченного промежутка, об измеримости по Лебегу любого открытого или замкнутого множества и любого ограниченного борелевского множества. Пример несчетного множества меры нуль.

Определение. Множество A называется измеримым по Лебегу на $[a, b)$, если выполнено равенство $\mu^*(A) + \mu^*([a, b) \setminus A) = b - a$.
Утверждение 8.1. Множество, состоящее из одной точки, измеримо, и его мера равна нулю. **Доказательство.** Пусть $A = \{a\}$. Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим покрытие $[a, a + \varepsilon)$. Тогда $\mu^*(\{a\}) \leq \varepsilon$, откуда $\mu^*(\{a\}) = 0$. Следовательно, $\{a\}$ — множество меры нуль, а значит измеримо и $\mu(\{a\}) = 0$.

Утверждение 8.2. Всякое не более чем счётное ограниченное множество точек прямой измеримо, и его мера равна нулю. **Доказательство.** Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. Тогда $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{a_i\}$. По утверждению 8.1 каждое $\{a_i\}$ измеримо и имеет меру нуль. Так как класс измеримых множеств является σ-алгеброй, то A измеримо. По счётной аддитивности меры $\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(\{a_i\}) = 0$.
Утверждение 8.3. Любой ограниченный промежуток (интервал, полуинтервал, отрезок) измерим, и его мера равна его длине. **Доказательство.** Для полуинтервала $[\alpha, \beta)$ это следует из построения, так как он принадлежит исходному полукольцу S. Для отрезка $[\alpha, \beta]$ заметим, что $[\alpha, \beta] = [\alpha, \beta) \cup \{\beta\}$, и так как $\{\beta\}$ имеет меру нуль, то $\mu([\alpha, \beta]) = \mu([\alpha, \beta)) + \mu(\{\beta\}) = (\beta - \alpha) + 0 = \beta - \alpha$. Для интервала (α, β) имеем $(\alpha, \beta) = [\alpha, \beta) \setminus \{\alpha\}$, откуда $\mu((\alpha, \beta)) = \mu([\alpha, \beta)) - \mu(\{\alpha\}) = (\beta - \alpha) - 0 = \beta - \alpha$. Аналогично рассматриваются случаи полуинтервалов вида $(\alpha, \beta]$.
Утверждение 8.4. Любое ограниченное открытое или замкнутое множество измеримо по Лебегу. **Доказательство.** Известно, что всякое ограниченное открытое множество $G \subset \mathbb{R}$ является объединением не более чем счётного числа попарно непересекающихся интервалов: $G = \bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i, \beta_i)$ (это следует, например, из того, что каждая точка открытого множества содержится в некотором максимальном интервале, и таких интервалов не более чем счётно). По утверждению 8.3 каждый интервал измерим, поэтому G как счётное объединение измеримых множеств измеримо. Пусть теперь F — ограниченное замкнутое множество. Выберем интервал $(\alpha, \beta) \supset F$. Тогда множество $G = (\alpha, \beta) \setminus F$ открыто (как разность открытого и замкнутого), следовательно измеримо. Тогда $F = (\alpha, \beta) \setminus G$ измеримо как разность двух измеримых множеств.

14. Пример неизмеримого по Лебегу множества. Измеримость по Лебегу неограниченных множеств. Замечание об измеримости произвольного множества числовой прямой. Пример неограниченного измеримого по Лебегу множества. Теорема о sigma-конечности меры, определенной на sigma-алгебре всех измеримых по Лебегу множеств (без док-ва).

Определение 8.1 (Измеримость неограниченного множества). Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется измеримым по Лебегу, если для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ ограниченное множество $A \cap [-n, n)$ измеримо по Лебегу (в смысле меры на ограниченном промежутке). Мерой Лебега множества A называется предел (возможно, бесконечный) $\mu(A) = \lim_{n\to\infty}\mu\big(A \cap [-n, n)\big)$. **Замечание 8.1.** Альтернативный подход: представим $\mathbb{R}$ в виде объединения попарно непересекающихся полуинтервалов единичной длины $\mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty}[n, n+1)$. Тогда множество $A \subset \mathbb{R}$ измеримо тогда и только тогда, когда для каждого n измеримо множество $A_n = A \cap [n, n+1)$ (относительно меры Лебега на этом отрезке). При этом $\mu(A) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mu(A_n)$, где, если ряд расходится, то полагают $\mu(A) = \infty$. **Пример 8.3.** Рассмотрим неограниченное множество $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}\big(n,\ n + \frac{1}{3^n}\big)$. Оно измеримо, так как каждое $A_n = A \cap [n, n+1) = (n, n + \frac{1}{3^n})$ измеримо. Его мера равна $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$. **Теорема 8.1.** Совокупность Σ всех измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}$ является σ-алгеброй; μ является σ-конечной мерой на этой σ-алгебре.

15. Скачок функции. Утверждение об оценке суммы скачков неубывающей функции на отрезке. Утверждение о множестве точек разрыва монотонно неубывающей на отрезке функции

Пусть $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ — монотонно неубывающая функция. Тогда в любой точке $x_0 \in (a, b)$ существуют односторонние пределы: $F(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0-}F(x) = \sup\{F(x) : a \le x < x_0\}$, $F(x_0 + 0) = \lim_{x\to x_0+}F(x) = \inf\{F(x) : x_0 < x \le b\}$. В точках a и b существуют соответственно $F(a + 0)$ и $F(b - 0)$. Очевидно, что $F(x_0 - 0) \le F(x_0) \le F(x_0 + 0)$. Если $F(x_0 - 0) = F(x_0 + 0)$, то функция непрерывна в точке x_0. В противном случае точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода.* Разность $\Delta F(x_0) = F(x_0 + 0) - F(x_0 - 0)$ называется *скачком функции* в точке x_0. Для концов отрезка полагают $\Delta F(a) = F(a + 0) - F(a)$, $\Delta F(b) = F(b) - F(b - 0)$. Если $F(x_0) = F(x_0 - 0)$, то функция называется *непрерывной слева* в точке x_0; если $F(x_0) = F(x_0 + 0)$, то *непрерывной справа.*
Утверждение 9.1. Пусть F — неубывающая функция на отрезке $[a, b]$ и $c_1, \dots, c_n$ — любые точки этого отрезка. Тогда $\sum_{i=1}^{n}\Delta F(c_i) \le F(b) - F(a)$. **Доказательство.** Не ограничивая общности, будем считать, что точки занумерованы в порядке возрастания и $c_1 = a$, $c_n = b$. Тогда $\sum_{k=1}^{n}\Delta F(c_k) = F(a + 0) - F(a) + F(c_2 + 0) - F(c_2 - 0) + \dots + \Delta F(c_{n-1} + 0) - \Delta F(c_{n-1} - 0) + F(b) - F(b - 0)$. Сгруппировав слагаемые в правой части, получим $\sum_{k=1}^{n}\Delta F(c_k) = -F(a) + (F(a + 0) - F(c_2 - 0)) + \dots + (F(c_{n-1} + 0) - F(b - 0)) +$

$F(b)$. Поскольку F неубывающая функция, то все разности в скобках неположительны, откуда и следует требуемое неравенство.

Утверждение 9.2. Множество точек разрыва монотонно неубывающей на отрезке $[a,b]$ функции не более чем счётно. **Доказательство.** Для каждого натурального k рассмотрим множество $M_k = \{x \in [a,b] : \Delta F(x) \geq \frac{1}{k}\}$. Из утверждения 9.1 следует, что в множестве M_k не более $k(F(b) - F(a))$ точек, т.е. M_k конечно. Поскольку каждая точка разрыва принадлежит некоторому M_k (скачок положителен), то множество всех точек разрыва есть объединение счётного семейства конечных множеств $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$, а значит, не более чем счётно.

16. Производные числа Дини. Пример. Утверждение о производной монотонно неубывающей на отрезке функции (без док-ва). Функция скачков.

Введём понятие производных чисел Дини. Для этого рассмотрим предел отношения $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ при $x \to x_0$. Данный предел может не существовать, но всегда существуют конечные или бесконечные верхние и нижние пределы: $\Lambda_{\text{пр}} = \limsup_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Величина $\Lambda_{\text{пр}}$, определяемая этим соотношением, называется правым верхним производным числом. Аналогично, $\lambda_{\text{пр}} = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\Lambda_{\text{лев}} = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lambda_{\text{лев}} = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Здесь $\lambda_{\text{пр}}$ — нижнее правое производное число, $\Lambda_{\text{лев}}$ — верхнее левое, а $\lambda_{\text{лев}}$ — нижнее левое производные числа. Ясно, что всегда $\lambda_{\text{пр}} \leq \Lambda_{\text{пр}},\ \lambda_{\text{лев}} \leq \Lambda_{\text{лев}}$.

Утверждение 9.3. Монотонно неубывающая на отрезке $[a,b]$ функция имеет почти всюду (относительно меры Лебега) конечную производную.

Важным классом монотонных функций являются функции скачков. Пусть задано конечное или счётное множество точек $\{x_n\} \subset [a,b]$ и соответствующие положительные числа h_n такие, что ряд $\sum h_n$ сходится. Определим функцию $F(x) = \sum_{x_n<x} h_n$, где сумма берётся по всем индексам n, для которых $x_n < x$. Дополнительно полагаем $F(a) = 0$ (если ни одна точка x_n не меньше a, то сумма пустая, т.е. равна 0). Функция F монотонно неубывающая, ограниченная (поскольку ряд сходится) и непрерывная слева в каждой точке. Точками разрыва функции F являются именно точки x_n, причём скачок в точке x_n равен h_n: $\Delta F(x_n) = F(x_n+0) - F(x_n-0) = h_n$. Такая функция называется функцией скачков.

17. Утверждение о представлении монотонной неубывающей функции непрерывной слева (без док-ва). Теорема – критерий sigma-аддитивности меры Лебега-Стилтьеса на полукольце, порожденном системой полуинтервалов.

Утверждение 9.4 (Разложение монотонной функции). Всякую монотонно неубывающую непрерывную слева функцию F на отрезке $[a,b]$ можно единственным образом представить в виде суммы непрерывной монотонно неубывающей функции F_c и функции скачков F_d: $F(x) = F_c(x) + F_d(x)$.

Теорема 9.1. Пусть $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ — монотонно неубывающая ограниченная функция. Мера m_F, определённая на полукольце S полуинтервалов $[\alpha,\beta) \subset [a,b)$ формулой $m_F([\alpha,\beta)) = F(\beta) - F(\alpha)$, является σ-аддитивной тогда и только тогда, когда функция F непрерывна слева на $(a,b]$. **Доказательство.** Необходимость. Предположим, что m_F σ-аддитивна, но функция F имеет разрыв слева в некоторой точке $x_0 \in (a,b]$, т.е. $F(x_0-0) < F(x_0)$. Рассмотрим полуинтервал $A = [x_0,x_0)$ (вырожденный, мера нуль) и последовательность полуинтервалов $A_n = [x_0 - \frac{1}{n}, x_0)$. Тогда $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (x_0-1, x_0)$ (если выбрать достаточно большие n), но это объединение не покрывает точку x_0. Однако для σ-аддитивности важно, чтобы можно было представить полуинтервал $[x_0-1,x_0)$ как счётное объединение непересекающихся полуинтервалов, включая A_n. Более аккуратно: рассмотрим полуинтервал $[\alpha,x_0)$, где $\alpha < x_0$. Зафиксируем возрастающую последовательность $\alpha_n \uparrow x_0$. Тогда $[\alpha,x_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[\alpha_n,\alpha_{n+1}) \cup [\alpha,\alpha_1)$, если $\alpha_1 > \alpha$. По σ-аддитивности должно выполняться $F(x_0) - F(\alpha) = \sum_n (F(\alpha_{n+1}) - F(\alpha_n)) + (F(\alpha_1) - F(\alpha))$. Переходя к пределу при $\alpha_n \uparrow x_0$, получаем $F(x_0) - F(\alpha) = F(x_0-) - F(\alpha)$, откуда $F(x_0) = F(x_0-)$. Таким образом, необходимость доказана. Достаточность. Предположим, что F непрерывна слева. Докажем, что мера m_F σ-аддитивна. Пусть полуинтервал $A = [\alpha,\beta)$ представлен в виде счётного объединения непересекающихся полуинтервалов $A_i = [\alpha_i,\beta_i)$, т.е. $[\alpha,\beta) = \bigcup_{i=1}^{\infty}[\alpha_i,\beta_i)$. Требуется доказать, что $F(\beta) - F(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty}(F(\beta_i) - F(\alpha_i))$. Для любого конечного n имеем $\bigcup_{i=1}^{n}[\alpha_i,\beta_i) \subset [\alpha,\beta)$, поэтому в силу монотонности и конечной аддитивности меры $\sum_{i=1}^{n}(F(\beta_i) - F(\alpha_i)) \leq F(\beta) - F(\alpha)$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $\sum_{i=1}^{\infty}(F(\beta_i) - F(\alpha_i)) \leq F(\beta) - F(\alpha)$. Теперь докажем обратное неравенство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности слева функции F в точке β найдётся $\delta > 0$ такое, что $0 < \beta - \beta' < \delta$ влечёт $F(\beta) - F(\beta') < 2\varepsilon$. Выберем β' так, что $\alpha < \beta' < \beta$ и $F(\beta) - F(\beta') < 2\varepsilon$. Для каждого полуинтервала $[\alpha_i, \beta_i)$ в силу непрерывности слева в точке β_i (если $\beta_i < b$) или в точке α_i можно подобрать числа $\alpha_i' < \alpha_i$ и $\beta_i' > \beta_i$ (если $\beta_i < b$) такие, что $F(\alpha_i) - F(\alpha_i') < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$, $F(\beta_i') - F(\beta_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$. Тогда интервалы (α_i', β_i') покрывают полуинтервал $[\alpha, \beta')$: $[\alpha, \beta') \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}[\alpha_i, \beta_i) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i', \beta_i')$. По лемме Гейне–Бореля из этого открытого покрытия отрезка $[\alpha, \beta']$ можно выделить конечное подпокрытие. Пусть это будут интервалы $(\alpha_{i_1'}', \beta_{i_1'}'), \ldots, (\alpha_{i_k'}', \beta_{i_k'}')$. Тогда $[\alpha, \beta'] \subset \bigcup_{j=1}^{k}(\alpha_{i_j'}', \beta_{i_j'}')$. Оценим длину отрезка $[\alpha, \beta']$ через сумму длин покрывающих интервалов, но с учётом функции F. А именно, используя монотонность F, имеем $F(\beta') - F(\alpha) \leq \sum_{j=1}^{k}(F(\beta_{i_j'}') - F(\alpha_{i_j'}'))$. Каждое слагаемое оценим как $F(\beta_{i_j'}') - F(\alpha_{i_j'}') \leq (F(\beta_{i_j}) - F(\alpha_{i_j})) + \frac{\varepsilon}{2^{i_j}}$. Следовательно, $F(\beta') - F(\alpha) \leq \sum_{j=1}^{k}(F(\beta_{i_j}) - F(\alpha_{i_j})) + \sum_{j=1}^{k}\frac{\varepsilon}{2^{i_j}} \leq \sum_{i=1}^{\infty}(F(\beta_i) - F(\alpha_i)) + \varepsilon$. Учитывая, что $F(\beta) - F(\beta') < 2\varepsilon$, получаем $F(\beta) - F(\alpha) < \sum_{i=1}^{\infty}(F(\beta_i) - F(\alpha_i)) + \frac{3}{2}\varepsilon$. В силу произвольности ε имеем $F(\beta) - F(\alpha) \leq \sum_{i=1}^{\infty}(F(\beta_i) - F(\alpha_i))$. Таким образом, доказано равенство, что и завершает доказательство σ-аддитивности.

18. Свойства подмножеств множества $X = [a, b)$, измеримых относительно меры Лебега- Стилтьеса: одноточечного множества, произвольного промежутка, борелевского множества. Замечания о конечной и sigma-конечных мерах Лебега-Стилтьеса на R.

Теорема 9.1. Пусть $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ — монотонно неубывающая, ограниченная, непрерывная слева функция. Тогда мера m_F на полукольце S является σ-аддитивной. По теореме 9.1 её можно продолжить на минимальное кольцо $K(S)$, а затем, используя конструкцию внешней меры, на σ-алгебру измеримых по Лебегу–Стилтьесу множеств. А именно, для любого множества $A \subset [a, b)$ определим внешнюю меру: $\mu_F^*(A) = \inf\left(\sum_{i=1}^{\infty}(F(\beta_i) - F(\alpha_i)) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}[\alpha_i, \beta_i), [\alpha_i, \beta_i) \in S\right)$. Множество A называется измеримым по Лебегу–Стилтьесу (относительно функции F), если $\mu_F^*(A) + \mu_F^*([a, b) \setminus A) = F(b) - F(a)$. Класс всех таких множеств обозначим через Σ_F. На Σ_F функция $\mu_F = \mu_F^*|_{\Sigma_F}$ является σ-аддитивной мерой, называемой мерой Лебега–Стилтьеса, порождённой функцией F.
Свойство 9.1. Всякое одноточечное множество $\{x\} \subset [a, b)$ измеримо, и $\mu_F(\{x\}) = \Delta F(x) = F(x + 0) - F(x)$. *Доказательство.* Заметим, что $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}[x, x + \frac{1}{n}]$ (для достаточно больших n, чтобы $x + \frac{1}{n} < b$). Полуинтервалы $[x, x + \frac{1}{n}]$ образуют убывающую последовательность, и их пересечение есть $\{x\}$. Поскольку мера μ_F σ-аддитивна, она непрерывна сверху. Поэтому $\mu_F(\{x\}) = \lim_{n\to\infty}\mu_F([x, x + \frac{1}{n}]) = \lim_{n\to\infty}(F(x + \frac{1}{n}) - F(x)) = F(x + 0) - F(x)$.
Свойство 9.2. Любой промежуток (интервал, полуинтервал, отрезок), лежащий в $[a, b)$, измерим относительно меры μ_F. *Доказательство.* Для полуинтервала $[\alpha, \beta)$ это следует из построения. Для других типов промежутков используем представления: $[\alpha, \beta] = [\alpha, \beta) \cup \{\beta\}$, $(\alpha, \beta) = [\alpha, \beta) \setminus \{\alpha\}$, $(\alpha, \beta] = [\alpha, \beta) \setminus \{\alpha\} \cup \{\beta\}$, и тот факт, что класс измеримых множеств является σ-алгеброй.
Свойство 9.3. Любое борелевское подмножество полуинтервала $[a, b)$ измеримо относительно меры μ_F. *Доказательство.* Борелевская σ-алгебра $B([a, b))$ порождается всеми интервалами. По свойству 9.2 все интервалы измеримы, следовательно, $B([a, b)) \subset \Sigma_F$.
Замечание 9.1. Пусть теперь $X = \mathbb{R}$, а $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — монотонно неубывающая, ограниченная, непрерывная слева функция. Существуют пределы $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty}F(x)$, $F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty}F(x)$. Тогда, аналогично предыдущему, можно построить конечную меру Лебега–Стилтьеса на всей числовой прямой. Для этого в качестве полукольца берутся все полуинтервалы $[\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, и мера определяется той же формулой $m_F([\alpha, \beta)) = F(\beta) - F(\alpha)$. После построения внешней меры и класса измеримых множеств получаем σ-аддитивную меру μ_F на σ-алгебре Σ_F, причём $\mu_F(\mathbb{R}) = F(+\infty) - F(-\infty) < \infty$.

19. Мера, абсолютно непрерывная относительно другой меры. Лемма – критерий абсолютной непрерывности одной меры относительно другой.

Определение 10.1. Пусть μ и ν — две σ-аддитивные меры, заданные на одной и той же σ-алгебре Σ измеримых подмножеств множества X. Мера ν называется абсолютно непрерывной относительно меры μ, если из того, что $\mu(A) = 0$, следует, что $\nu(A) = 0$.
Лемма 10.1. Пусть μ и ν — две σ-аддитивные меры, заданные на одной и той же σ-алгебре Σ измеримых подмножеств множества X. Мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $A \in \Sigma$ с $\mu(A) < \delta$ справедливо неравенство $\nu(A) < \varepsilon$. **Доказательство.** Необходимость. Предположим, что мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ, но условие леммы не выполняется, т.е. существует $\varepsilon_0 > 0$, что какое бы $\delta_k = 2^{-k}$ мы ни

взяли, найдётся измеримое множество $A_k \in \Sigma$, для которого $\mu(A_k) < 2^{-k}$, а $\nu(A_k) \geq \varepsilon_0$. Рассмотрим убывающую последовательность измеримых множеств $U_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k$, для которой $\mu(U_n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n} = \delta_n$, тогда по предположению $\nu(U_n) \geq \nu(A_{n+1}) \geq \varepsilon_0$. Обозначим через $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, тогда в силу непрерывности сверху σ-аддитивной меры имеем $\mu(U) = \lim_{n\to\infty} \mu(U_n) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$, но $\nu(U) = \lim_{n\to\infty} \nu(U_n) \geq \lim_{n\to\infty} \nu(A_{n+1}) \geq \varepsilon_0$. Последнее соотношение противоречит абсолютной непрерывности ν относительно μ, поскольку $\mu(U) = 0$, а $\nu(U) \geq \varepsilon_0 > 0$. Достаточность. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $\mu(A) < \delta$ следует $\nu(A) < \varepsilon$. Если $\mu(A) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ выполнено $\mu(A) = 0 < \delta$, откуда $\nu(A) < \varepsilon$. В силу произвольности ε получаем $\nu(A) = 0$.

20. Абсолютная непрерывность функции на отрезке. Свойства абсолютно непрерывных функций на отрезке.

Определение 10.2. Функция $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ называется абсолютно непрерывной на отрезке $[a,b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой конечной или счётной системы попарно непересекающихся интервалов $(a_i, b_i) \subset [a,b]$, для которой $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) < \delta$, выполняется неравенство $\sum_{i=1}^{\infty} |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon$.
Утверждение 10.1. Всякая абсолютно непрерывная функция является непрерывной и равномерно непрерывной. *Доказательство.* Возьмём в определении только один интервал (a_1, b_1). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что из $|b_1 - a_1| < \delta$ следует $|F(b_1) - F(a_1)| < \varepsilon$. Это означает равномерную непрерывность, а следовательно, и непрерывность функции F.
Утверждение 10.2. Класс абсолютно непрерывных функций, заданных на отрезке $[a,b]$, замкнут относительно алгебраических операций. *Доказательство.* Рассмотрим, например, случай произведения двух абсолютно непрерывных функций $f(x), g(x)$. Пусть (a_i, b_i) — система попарно непересекающихся интервалов на отрезке $[a,b]$. Имеем $\sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i)g(b_i) - f(a_i)g(a_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i)g(b_i) - f(b_i)g(a_i)| + \sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i)g(a_i) - f(a_i)g(a_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i)|\,|g(b_i) - g(a_i)| + \sum_{i=1}^{\infty} |g(a_i)|\,|f(b_i) - f(a_i)|$. Пусть $\alpha = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$, $\beta = \max_{x\in[a,b]} |g(x)$ Тогда $\sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i)g(b_i) - f(a_i)g(a_i)| \leq \alpha \sum_{i=1}^{\infty} |g(b_i) - g(a_i)| + \beta \sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i) - f(a_i)|$. Для любого $\varepsilon > 0$ в силу абсолютной непрерывности f и g найдутся $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $\sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i) - f(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2\beta}$ при $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) < \delta_1$, и $\sum_{i=1}^{\infty} |g(b_i) - g(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2\alpha}$ при $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) < \delta_2$. Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда при $\sum(b_i - a_i) < \delta$ получим $\sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i)g(b_i) - f(a_i)g(a_i)| < \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{2\alpha} + \beta \cdot \frac{\varepsilon}{2\beta} = \varepsilon$. Случаи суммы и разности доказываются

21. Теорема -критерий абсолютной непрерывности меры Лебега-Стилтьеса относительно меры Лебега. Пример – канторова лестница.

Теорема 10.1. Пусть на σ-алгебре борелевских множеств $B([a,b])$ задана мера μ_F, порождённая функцией $F(x)$. Мера μ_F абсолютно непрерывна относительно меры Лебега μ тогда и только тогда, когда функция $F(x)$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$. **Доказательство.** Необходимость. Пусть мера μ_F абсолютно непрерывна относительно меры μ. Тогда по лемме для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $\mu(A) < \delta$, то $\mu_F(A) < \varepsilon$ для любого множества $A \in B([a,b])$. Возьмём систему попарно непересекающихся интервалов $(a_i, b_i) \subset [a,b]$ такую, что $\sum(b_i - a_i) < \delta$. Положим $A = \bigcup_i (a_i, b_i)$. Тогда $\mu(A) = \sum(b_i - a_i) < \delta$, следовательно, $\mu_F(A) < \varepsilon$. Но $\mu_F(A) = \sum_i (F(b_i) - F(a_i))$ (так как F неубывающая, разности неотрицательны). Поэтому $\sum_i (F(b_i) - F(a_i)) < \varepsilon$, что означает абсолютную непрерывность функции F. Достаточность. Пусть F — абсолютно непрерывная функция и для $A \in B([a,b])$ выполнено $\mu(A) = 0$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем по нему $\delta > 0$ из условия абсолютной непрерывности функции F. Воспользуемся определением множества меры нуль и покроем A счётной системой интервалов $(\alpha_i, \beta_i) \subset [a,b]$ так, что $A \subset \bigcup_i (\alpha_i, \beta_i)$ и $\sum_i (\beta_i - \alpha_i) < \frac{\delta}{2}$. Для каждого интервала (α_i, β_i) построим интервал $B_i = (\alpha_i - 2^{-(i+1)}\delta, \beta_i)$. Тогда $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i =: B$. Множество B открыто и, следовательно, его можно представить как объединение попарно непересекающихся интервалов, т.е. $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$ и при этом $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) = \mu(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty}(\beta_i - \alpha_i) + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-(i+1)}\delta < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$. Из выбора δ получаем, что $\sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$. Так как F неубывающая, то $|F(b_k) - F(a_k)| = F(b_k) - F(a_k)$. Следовательно, $\mu_F(A) \leq \mu_F(B) = \sum_{k=1}^{\infty}(F(b_k) - F(a_k)) < \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что $\mu_F(A) = 0$. По определению это означает абсолютную непрерывность меры μ_F относительно меры μ.
Пример 10.1 (Канторова лестница). На отрезке $[0,1]$ построим последовательность функций $F_n(x)$ следующим образом: $F_1(x) = 0$ при $x = 0$, $F_1(x) = 1$ при $x = 1$, $F_1(x) = \frac{1}{2}$ если $x \in (1/3, 2/3)$, а на оставшихся отрезках $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$ доопределим линейно. Для $F_2(x)$ имеем: $F_2(x) = \frac{1}{2}$ если $x \in (1/3, 2/3)$, $F_2(x) = \frac{1}{4}$ если $x \in (1/9, 2/9)$, $F_2(x) = \frac{3}{4}$ если $x \in (7/9, 8/9)$, $F_2(0) = 0$, $F_2(1) = 1$, с линейным доопределением на остальных частях. Вообще, на n-ом шаге $F_n(x) = 0$ при $x = 0$, $F_n(x) = 1$ при $x = 1$, а если

$x \in I_k^n$, где I_k^n — k-ый слева интервал, выброшенный при построении канторова множества на n-ом шаге, то $F_n(x) = (2k-1)/2^n$. В остальных точках $F_n(x)$ доопределяется линейной интерполяцией. Последовательность $F_n(x)$ сходится равномерно к неубывающей функции $F(x)$, называемой канторовой лестницей. Функция $F(x)$ постоянна на каждом из интервалов дополнения канторова множества, т.е. на множестве $G = [0,1] \setminus K$, где K — канторово множество. Так как $\mu(G) = 1$, то $\mu_F(G) = 0$. Точки роста функции F — это канторово множество K, причём $\mu(K) = 0$, но $\mu_F(K) = 1$. Действительно, на каждом шаге построения канторову множеству соответствуют скачки функции, сумма которых равна 1. Согласно теореме, мера μ_F, порождённая канторовой лестницей, не является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега μ, поэтому $F(x)$ не является абсолютно непрерывной

22. Измеримая функция. Лемма о необходимом и достаточном условии измеримости. Примеры: функция Дирихле, характеристическая функция измеримого множества, функция скачков.

Множество X, на котором задана некоторая σ-алгебра его измеримых подмножеств Σ, называется измеримым пространством и обозначается (X, Σ). Измеримое пространство, на котором задана мера, называется пространством с мерой и обозначается (X, Σ, μ). Иногда пространство с мерой мы будем обозначать просто X. В дальнейшем мы будем предполагать, что μ — σ-аддитивная полная мера.
Определение 11.1. Пусть X — пространство с мерой. Действительная функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется измеримой, если для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $A_c = \{x : f(x) < c\}$ измеримо (здесь $\mathbb{R}$ — расширенная числовая прямая). Комплекснозначная функция $g + ih$ измерима, если измеримы её действительная и мнимая части.
Лемма 11.1. Числовая функция $f : X \to \mathbb{R}$ измерима тогда и только тогда, когда для любого $c \in \mathbb{R}$ измеримо одно из множеств $\{x : f(x) \le c\}$, $\{x : f(x) > c\}$, $\{x : f(x) \ge c\}$. *Доказательство.* Необходимость. Пусть функция f измерима. Тогда при любом $c \in \mathbb{R}$ и при любом $n \in \mathbb{N}$ измеримы множества $\{x : f(x) < c + 1/n\}$. Нетрудно показать, что $\{x : f(x) \le c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x : f(x) < c + 1/n\}$. Действительно, если $x \in \{x : f(x) \le c\}$, то $f(x) < c + 1/n$ при любом $n \in \mathbb{N}$, откуда x принадлежит правой части. Обратно, если x принадлежит правой части, то $f(x) < c + 1/n$ для всех n, значит $f(x) \le c$. Множество в левой части измеримо как пересечение измеримых множеств. Далее, $\{x : f(x) > c\} = X \setminus \{x : f(x) \le c\}$, $\{x : f(x) \ge c\} = X \setminus \{x : f(x) < c\}$. Достаточность. Пусть, например, множество $\{x : f(x) \le c\}$ измеримо. Тогда можно показать, что $\{x : f(x) < c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x : f(x) \le c - 1/n\}$. Аналогично проверяется достаточность двух других условий.
Пример 11.2 (Функция Дирихле). Рассмотрим функцию Дирихле $D(x) = 0$, если x иррационально, и $D(x) = 1$, если x рационально. Тогда при $c > 1$ множество $A_c = \{x : D(x) < c\} = \mathbb{R}$; при $0 < c \le 1$ $A_c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; а при $c \le 0$ $A_c = \varnothing$. Каждое из множеств A_c измеримо на $\mathbb{R}$.
Пример 11.3. Пусть $\chi_A(x)$ — характеристическая функция измеримого множества $A \subset X$, т.е. $\chi_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $\chi_A(x) = 0$, если $x \notin A$. В этом случае $A_c = \varnothing$ при $c \le 0$; $A_c = X \setminus A$ при $0 < c \le 1$; $A_c = X$ при $c > 1$. Следовательно, неизмеримой является характеристическая функция неизмеримого множества.

23. Теорема об измеримости композиции измеримых функций. Замечание о непрерывности одной из функций композиции. Эквивалентность измеримых функций. Лемма об измеримости функции, эквивалентной измеримой функции. Эквивалентность функции Дирихле. Теорема об арифметических операциях над измеримыми функциями.

Теорема 11.1. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — измеримая функция. Тогда для любой измеримой функции $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ их композиция $h = g \circ f$ также измерима на X.
Доказательство. Покажем, что для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $\{x : h(x) < c\}$ измеримо. Действительно, $\{x : h(x) < c\} = h^{-1}((-\infty, c)) = f^{-1}(g^{-1}((-\infty, c)))$. Поскольку g измерима, то $A = g^{-1}((-\infty, c)) \in B(\mathbb{R})$, откуда, в силу измеримости f, находим, что $\{x : h(x) < c\} = f^{-1}(A) \in \Sigma$. **Замечание 11.1.** Доказанная теорема применима, в частности, в том случае, когда функция g является непрерывной, поскольку каждая непрерывная функция измерима. Отметим, однако, что если g измерима, f непрерывна, то композиция $f \circ g$ может оказаться неизмеримой. Будем говорить, что две определённые на множестве X функции эквивалентны, если они равны между собой почти всюду, т.е. равны для всех $x \in X$ за исключением, быть может, точек, принадлежащих множеству нулевой меры.

Лемма 11.2. Функция $f(x)$, определённая на множестве X и эквивалентная на нём измеримой функции $g(x)$, также измерима. **Доказательство.** Из определения эквивалентности вытекает, что множества $\{x : f(x) < c\}$ и $\{x : g(x) < c\}$ могут отличаться друг от друга лишь на множестве меры нуль.
Пример 11.5. На числовой прямой функция Дирихле $D(x)$ эквивалентна функции, тождественно равной нулю. Замена функции на её эквивалентную широко используется в теории интегрирования. Покажем, что множество измеримых функций замкнуто относительно алгебраических операций над измеримыми функциями.
Теорема 11.2. Пусть (X, Σ, μ) — пространство с мерой и $f, g : X \to \mathbb{R}$ — измеримые функции. Тогда функции $\alpha f + \beta g$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, $f \cdot g$, f/g (при условии, что $g(x) \neq 0$ на X) измеримы.

24. Сходимость в пространстве измеримых функций: равномерная, точечная, почти всюду, по мере. Теорема о пределе последовательности измеримых функций. Следствия.

Одним из свойств пространства измеримых функций является замкнутость относительно предельного перехода. Будем считать, что на измеримом пространстве (X, Σ) задана σ-аддитивная полная конечная мера μ. Рассмотрим различные виды сходимости последовательности измеримых функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ на пространстве с мерой X.
12.1 Равномерная сходимость. Последовательность измеримых функций f_n сходится к функции f равномерно, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_ε такой, что для всех $n > n_\varepsilon$ выполнено $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Равномерная сходимость обозначается так: $f_n \rightrightarrows f$.
12.2 Точечная сходимость. Последовательность f_n сходится к функции f точечно, если для любого $x \in X$ $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$.
12.3 Сходимость почти всюду. Последовательность f_n сходится к f почти всюду ($f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$), если $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ для всех точек x, за исключением, быть может, тех x, которые принадлежат множеству меры нуль.
12.4 Сходимость по мере. Сходимость по мере последовательности измеримых функций f_n к измеримой функции f обозначается $f_n \xrightarrow{\mu} f$ и означает, что для любого $\varepsilon > 0$ мера множества $A_n(\varepsilon) = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Очевидно, что из равномерной сходимости следует сходимость точечная, а из точечной — сходимость почти всюду.
Теорема 12.1. Пусть (X, Σ, μ) — пространство с мерой и $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых функций. Если f_n сходится к функции f в каждой точке $x \in X$, то функция f измерима. **Доказательство.** Пусть для каждого $x \in X$ $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$. Покажем, что функция f измерима, т.е. для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $A_c = \{x : f(x) < c\}$ измеримо. Предварительно докажем равенство

$$A_c = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x : f_n(x) < c - \tfrac{1}{m}\}.$$

Действительно, пусть $x \in A_c$, тогда $f(x) < c$. Это означает, что при некотором $m \in \mathbb{N}$ $f(x) < c - \frac{1}{m}$. Тогда существует номер k такой, что для всех $n \geq k$ выполняется $f_n(x) < c - \frac{1}{m}$. А это означает, что x принадлежит правой части. Наоборот, пусть x принадлежит правой части. Тогда найдётся $m \in \mathbb{N}$, что для всех достаточно больших n (начиная с некоторого k) $f_n(x) < c - \frac{1}{m}$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем $f(x) \leq c - \frac{1}{m}$, откуда $f(x) < c$, что означает $x \in A_c$. Множество $\{x : f_n(x) < c - \frac{1}{m}\}$ измеримо в силу измеримости последовательности (f_n), а так как семейство измеримых множеств Σ является σ-алгеброй, то измеримо множество в правой части и, следовательно, A_c, что означает измеримость f.
Следствие 12.1. Если последовательность измеримых функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к f равномерно, то f измерима. **Доказательство.** Всякая равномерно сходящаяся последовательность сходится поточечно, поэтому можно воспользоваться теоремой.

25. Теорема Лебега о сходимости последовательности измеримых функций на пространстве с полной конечной sigma-аддитивной мерой. Пример последовательности на пространстве с sigma-конечной мерой, когда сходимость по мере отсутствует. Пример последовательности, сходящейся по мере, но не сходящейся ни в одной точке.

Выясним связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду, если $\mu(X) < \infty$.
Теорема 12.2 (Лебега). Пусть (X, Σ, μ) — пространство с полной конечной σ-аддитивной мерой и пусть последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ измеримых функций сходится к функции f почти всюду. Тогда она сходится к той же самой предельной функции и по мере. **Доказательство.** Пусть $A_n(\varepsilon) = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Положим $B_n(\varepsilon) = \bigcup_{k \geq n} A_k(\varepsilon)$. Очевидно, что при каждом фиксированном ε $B_1(\varepsilon) \supset B_2(\varepsilon) \supset \cdots \supset B_n(\varepsilon) \supset \cdots$, т.е. последовательность $B_n(\varepsilon)$ убывает. Пусть $B(\varepsilon) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n(\varepsilon)$. Если $x \in B(\varepsilon)$, то $x \in B_n(\varepsilon)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно, $x \in A_n(\varepsilon)$ для бесконечно многих номеров $n \in \mathbb{N}$. Но тогда последовательность $f_n(x)$ не сходится к $f(x)$. Поэтому x принадлежит множеству точек расходимости, которое имеет нулевую меру, т.е. $\mu(B(\varepsilon)) = 0$. С другой стороны, учитывая свойство непрерывности сверху σ-аддитивной меры μ, имеем $0 = \mu(B(\varepsilon)) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n(\varepsilon))$. Так как $\mu(A_n(\varepsilon)) \leq \mu(B_n(\varepsilon))$, то отсюда вытекает $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n(\varepsilon)) = 0$. Это означает, что $f_n \xrightarrow{\mu} f$.
Пример 12.1. Рассмотрим числовую прямую как пространство с σ-конечной мерой. Представим её в виде $\mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [n, n+1)$. Рассмотрим последовательность $f_n(x) = \chi_{[n,n+1)}(x)$. Очевидно, что $f_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, а значит, и почти всюду. В то же время при $\varepsilon \in (0,1)$ имеем $\mu(A_n(\varepsilon)) = \mu(\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - 0| \geq \varepsilon\}) = \mu([n, n+1)) = 1 \not\to 0$. Следовательно, сходимость по мере отсутствует.

26. Теорема Рисса о подпоследовательности функций, сходящейся по мере. Замечание в случае sigma-конечной меры.

Теорема 12.3 (Рисс). Пусть (X, Σ, μ) — пространство с полной σ-аддитивной мерой и пусть последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ измеримых функций сходится по мере к функции f. Тогда из этой последовательности можно выделить подпоследовательность $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся к f почти всюду. **Доказательство.** Поскольку $f_n \xrightarrow{\mu} f$, то для любого $\varepsilon > 0$ имеем $\lim_{n\to\infty} \mu\{x : |f_n - f| \geq \varepsilon\} = 0$. Выберем последовательности положительных чисел $\varepsilon_k \downarrow 0$ и $\alpha_k > 0$ такие, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сходится. Тогда найдётся номер $n_1 \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $n \geq n_1$ выполняется $\mu\{x : |f_n - f| \geq \varepsilon_1\} < \alpha_1$. Аналогично, существует $n_2 > n_1$, что для всех $n \geq n_2$ $\mu\{x : |f_n - f| \geq \varepsilon_2\} < \alpha_2$. Продолжая этот процесс, мы для любого k найдём $n_k > n_{k-1}$, и при этом будет выполняться для всех $n \geq n_k$ условие $\mu\{x : |f_n - f| \geq \varepsilon_k\} < \alpha_k$. Таким образом, строится подпоследовательность $(f_{n_k}) \subset (f_n)$. Покажем, что она сходится к f почти всюду. Обозначим $B_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} \{x : |f_{n_k} - f| \geq \varepsilon_k\}$. Последовательность B_m измеримых множеств является убывающей, поэтому $B = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$. В силу непрерывности сверху меры (поскольку мера конечна) имеем $\mu(B) = \lim_{m\to\infty} \mu(B_m)$. Но $\mu(B_m) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu(\{x : |f_{n_k} - f| \geq \varepsilon_k\}) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k$. Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сходится, то его остаток стремится к нулю, т.е. $\mu(B_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Поэтому $\mu(B) = 0$. Рассмотрим $x_0 \in X \setminus B$. Тогда существует m_0 такое, что $x_0 \notin B_{m_0}$, значит для любого $k \geq m_0$ выполняется $|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon_k$. Поскольку $\varepsilon_k \to 0$, получаем $f_{n_k}(x_0) \to f(x_0)$. Таким образом, $f_{n_k} \to f$ на множестве $X \setminus B$, мера которого равна мере всего X, т.е. почти всюду.
Замечание 12.1. Теорема Рисса остаётся справедливой в случае σ-конечной меры на X.

27. Теорема Егорова о возможности перехода поточечной сходимости в равномерную. Замечание для случая sigma-конечной меры и соответствующий пример. Теорема Лузина (без док-ва).

Теорема 13.1 (Егоров). Пусть (X, Σ, μ) — пространство с конечной мерой и пусть последовательность измеримых функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится почти всюду на X к измеримой функции f. Тогда для любого $\delta > 0$ найдётся такое измеримое множество $X_\delta \subset X$, что: 1) $\mu(X \setminus X_\delta) < \delta$; 2) на множестве X_δ последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно. **Доказательство.** По теореме 12.1 заключаем, что функция $f(x)$ измерима. Обозначим через $X_n^m = \bigcap_{k \geq n} \{x : |f_k(x) - f(x)| < 1/m\}$. Это множество обладает тем свойством, что при фиксированных n и m выполняется $|f_k(x) - f(x)| < 1/m$ для всех $k \geq n$, и, кроме того, оно измеримо. Зафиксируем m, тогда множества X_n^m образуют возрастающую последовательность $X_1^m \subset X_2^m \subset \cdots$, и поэтому можно ввести в рассмотрение измеримое множество $X^m = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n^m$. Учитывая непрерывность

сверху σ-аддитивной меры μ, имеем $\mu(X^m) = \lim_{n\to\infty} \mu(X^m_n)$. Из определения предела вытекает, что для каждого m и любого $\delta > 0$ найдётся такой номер $n_0(m)$, что $\mu(X \setminus X^m_{n_0(m)}) < \delta$. На множестве $X^m_{n_0(m)}$ выполняется равномерная сходимость $f_n \to f$. Таким образом, утверждение доказано.
Теорема 13.2 (Лузин). Для того, чтобы функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, была измеримой, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала такая непрерывная функция $g(x)$, что $\mu(\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$

28. Простые функции. Теорема – критерий простоты функции. Теорема о замкнутости множества простых функций относительно алгебраических операций. Теорема о существовании равномерно сходящейся последовательности для измеримой функции.

Для построения интеграла Лебега нам понадобится класс функций, замкнутый относительно алгебраических операций, называемых простыми. Пусть (X, Σ, μ) — пространство с σ-аддитивной полной конечной мерой.
Определение 14.1. Измеримая функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется простой, если она принимает конечное или счётное число различных значений. Пусть $A_k = \{x \in X : f(x) = y_k\}$, тогда $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и функция $f(x)$ может быть записана в виде линейной комбинации характеристических функций:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \chi_{A_k}(x).$$

Теорема 14.1. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ является простой тогда и только тогда, когда $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где множества A_k измеримы и $f(x)$ принимает постоянное значение y_k на множестве A_k. **Доказательство.** Необходимость. Пусть f — простая функция, тогда f измерима и поэтому измеримы все множества A_k, так как $A_k = \{x \in X : f(x) = y_k\} = \{x : f(x) \leq y_k\} \setminus \{x : f(x) < y_k\}$, и справедливо представление $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Достаточность. Пусть справедливо представление $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и все A_k измеримы, тогда для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $A_c = \{x : f(x) < c\} = \bigcup_{y_k<c} A_k$, т.е. A_c является объединением измеримых множеств.
Теорема 14.2. Множество простых функций, заданных на измеримом пространстве X, замкнуто относительно алгебраических операций. **Доказательство.** Пусть $f, g : X \to \mathbb{R}$ — простые функции и $A_k = \{x : f(x) = y_k\}$, $B_j = \{x : g(x) = z_j\}$. Тогда $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Рассмотрим для любых k и j множества $C_{kj} = A_k \cap B_j$, которые измеримы и обладают тем свойством, что $X = \bigcup_{k,j} C_{kj}$. Тогда на каждом C_{kj} функции f и g постоянны, следовательно, их сумма, разность, произведение и частное (если знаменатель не обращается в ноль) также постоянны на C_{kj}. Поэтому алгебраические комбинации простых функций являются простыми функциями.
Теорема 14.3. Для любой измеримой функции $f : X \to \mathbb{R}$ существует равномерно сходящаяся к ней последовательность простых функций. **Доказательство.** Пусть $f(x)$ — измеримая функция. Положим $f_n(x) = \frac{k}{n}$, если $\frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}$, где $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $A^n_k = \{x \in X : \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}\}$, тогда A^n_k измеримы при любых $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ и поэтому (f_n) — последовательность простых функций. Кроме того, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \to 0$, а это означает, что последовательность $f_n \rightrightarrows f$

29. Суммируемость по мере (интегрируемой по Лебегу) простых функций. Лемма об интеграле от простой функции. Пример простой функции с условно сходящимся рядом.

Определим интеграл Лебега вначале от простых функций. Пусть $f(x)$ — простая функция, принимающая не более чем счётное число различных значений $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ на множествах $A_k = \{x : f(x) = y_k\}$. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k)$.
Определение 14.2. Простая функция f, принимающая значения y_k на множествах A_k, $k = 1, 2, \ldots$, называется суммируемой (по мере μ) или интегрируемой по Лебегу на X, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k)$ сходится абсолютно. Если функция f суммируема, то сумма ряда называется интегралом Лебега от функции f по множеству X, т.е. $\int_X f(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k)$.
Лемма 14.1. Пусть $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ и пусть на каждом B_i функция принимает значение c_i. Тогда $\int_X f(x)\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu(B_i)$, причём функция f суммируема на X тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \mu(B_i)$ сходится

абсолютно. **Доказательство.** Пусть $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и $A_k = \{x \in X : f(x) = y_k\}$, где все y_k различны. Тогда множества A_k являются объединением тех B_i, для которых $c_i = y_k$. Значит $\sum_k y_k \mu(A_k) = \sum_k y_k \left(\sum_{i:c_i=y_k} \mu(B_i)\right) = \sum_i c_i \mu(B_i)$. Так как мера неотрицательна, то ряды сходятся или расходятся одновременно. В случае абсолютной сходимости справедливо равенство.

30. Свойства интеграла Лебега от простых функций: линейность, ограниченность по модулю.

Установим некоторые свойства интеграла Лебега от простых функций.
Свойство 14.1. $\int_X (f(x) + g(x))\, d\mu = \int_X f(x)\, d\mu + \int_X g(x)\, d\mu$, причём из существования интегралов в правой части следует существование интеграла в левой. **Доказательство.** Пусть $A_i = \{x : f(x) = f_i\}$ и $B_j = \{x : g(x) = g_j\}$. Тогда $\int_X f(x)\, d\mu = \sum_i f_i \mu(A_i)$, $\int_X g(x)\, d\mu = \sum_j g_j \mu(B_j)$. Рассмотрим $\int_X (f(x) + g(x))\, d\mu = \sum_i \sum_j (f_i + g_j)\mu(C_{ij})$, где $C_{ij} = A_i \cap B_j$. Но $\mu(A_i) = \sum_j \mu(A_i \cap B_j)$, $\mu(B_j) = \sum_i \mu(A_i \cap B_j)$. Из абсолютной сходимости рядов вытекает абсолютная сходимость ряда для суммы и требуемое равенство.
Свойство 14.3. Ограниченная на множестве X простая функция f интегрируема, причём если $|f(x)| \leq M$ на X, то $\left|\int_X f(x)\, d\mu\right| \leq M\mu(X)$. **Доказательство.** Рассмотрим цепочку неравенств. Если простая функция ограничена, то $\int_X f(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| \mu(A_k) \leq M \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = M \cdot \mu(X)$. А это означает суммируемость f

31. Функции, суммируемые по мере (интегрируемые по Лебегу). Корректность определения.

Пусть (X, Σ, μ) — пространство с σ-аддитивной полной конечной мерой и $f : X \to \mathbb{R}$ — измеримая функция. **Определение 15.1.** Назовём измеримую функцию f суммируемой по мере μ (или интегрируемой по Лебегу) на X, если существует последовательность простых суммируемых на X функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, равномерно сходящаяся к f. Интегралом Лебега суммируемой функции f на множестве X называется предел интегралов Лебега от простых суммируемых функций f_n: $\int_X f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu$.
Это определение корректно, если выполнены следующие условия: 1) предел для любой равномерно сходящейся последовательности простых суммируемых на X функций существует; 2) этот предел при заданной функции f не зависит от выбора последовательности $(f_n)_{n=1}^{\infty}$; 3) для простых функций определение совпадает с данным ранее. Все эти условия выполняются. Действительно, рассмотрим последовательность $(I_n)_{n=1}^{\infty}$, где $I_n = \int_X f_n(x)\, d\mu$, тогда $|I_n - I_m| = \int_X f_n(x)\, d\mu - \int_X f_m(x)\, d\mu = \int_X (f_n(x) - f_m(x))\, d\mu \leq \int_X |f_n(x) - f_m(x)|\, d\mu \leq \mu(X) \cdot \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| \to 0$ при $n, m \to \infty$, так как $\mu(X) < \infty$ и всякая равномерно сходящаяся последовательность является фундаментальной. Следовательно, числовая последовательность (I_n) является фундаментальной и поэтому имеет предел. Для проверки второго условия рассмотрим две последовательности $f_n, g_n \in S(X, \mu)$ такие, что $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows f$ при $n \to \infty$, тогда $|f_n - g_n| \leq |f_n - f| + |g_n - f| < \varepsilon/\mu(X)$. Значит, $\int_X f_n\, d\mu - \int_X g_n\, d\mu \leq \int_X |f_n - g_n|\, d\mu < \varepsilon$. Для доказательства справедливости третьего условия достаточно рассмотреть последовательность, в которой $f_n = f$ для всех n

32. Формула вычисления интеграла Лебега от измеримых функций. Обоснование. Пример вычисления интеграла Лебега от функции.

Формула вычисления интеграла Лебега от измеримых функций. Интеграл Лебега от измеримой функции f может быть вычислен по формуле интегральных сумм Лебега: $\int_X f(x)\, d\mu = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_k \xi_k\, \mu(\{x \in X : y_k \leq f(x) \leq y_{k+1}\})$. Это выражение называется интегральной суммой Лебега. Здесь T — разбиение области значений функции на интервалы $[y_k, y_{k+1}]$, ξ_k — произвольная точка внутри интервала, а μ — мера множества, где функция принимает значения из этого интервала.
Обоснование. Для каждого разбиения определяются верхняя и нижняя суммы Лебега: $S(T) = \sum_k y_{k+1}\mu(A_k)$ $s(T) = \sum_k y_k \mu(A_k)$, где $A_k = \{x \in X : y_k \leq f(x) \leq y_{k+1}\}$. Если функция f суммируема, то ряды $S(T)$ и $s(T)$ сходятся, причём выполняется неравенство $s(T) \leq \int_X f(x)\, d\mu \leq S(T)$. При измельчении разбиения ($\lambda(T) \to 0$) верхняя и нижняя суммы стремятся к одному и тому же пределу: $\int_X f(x)\, d\mu = \lim_{\lambda(T)\to 0} S(T) = \lim_{\lambda(T)\to 0} s(T)$. Таким образом, интеграл Лебега корректно определяется через предел интегральных сумм.

33. Свойства интеграла Лебега по множеству конечной меры: интеграл от единичной функции, линейность, интегрируемость ограниченной функции, интеграл от неотрицательной функции, интегрируемость ограниченной по модулю функции (частные случаи).

Обозначим через $L(X,\mu)$ множество интегрируемых по Лебегу функций. Рассмотрим основные свойства интеграла Лебега по множеству конечной меры.
Свойство 15.1. Пусть $A \subset X$ — измеримое множество. Тогда $\int_A 1\,d\mu = \mu(A)$. *Доказательство.* Действительно, $\int_A 1\,d\mu = \int_X 1 \cdot \chi_A(x)\,d\mu = \mu(A)$.
Свойство 15.2. Пусть f, g — суммируемые функции, тогда для любых скаляров $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ суммируемой является функция $\alpha f + \beta g$ и справедливо равенство $\int_X (\alpha f(x) + \beta g(x))\,d\mu = \alpha \int_X f(x)\,d\mu + \beta \int_X g(x)\,d\mu$. *Доказательство.* Пусть $f_n, g_n \in S(X,\mu)$ и $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$. Тогда $\alpha f_n + \beta g_n \in S(X,\mu)$ и $\alpha f_n + \beta g_n \rightrightarrows \alpha f + \beta g$ при $n \to \infty$. В равенстве $\alpha \int_X f_n(x)\,d\mu + \beta \int_X g_n(x)\,d\mu = \int_X (\alpha f_n + \beta g_n)\,d\mu$ перейдём к пределу при $n \to \infty$ и получим требуемое равенство.
Свойство 15.3. Ограниченная измеримая функция f суммируема на X. *Доказательство.* Это свойство доказано выше.
Свойство 15.4. Пусть f — суммируемая и удовлетворяет условию $f(x) \geq 0$, тогда $\int_X f(x)\,d\mu \geq 0$. *Доказательство.* Пусть f является простой, т.е. $f(x) = y_k$, $x \in A_k = \{x \in X : f(x) = y_k\}$. Если $y_k \geq 0$, то $\sum_{k=1}^{\infty} y_k \mu(A_k) \geq 0$, т.е. неравенство справедливо. Если f — произвольная суммируемая функция, то последовательность $f_n(x) = k/n$, $x \in \{x \in X : k/n \leq f(x) < (k+1)/n\}$, принимает также неотрицательные значения, т.е. $f_n(x) \geq 0$ для всех $x \in X$. Поэтому $\int_X f_n(x)\,d\mu \geq 0$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим доказываемое неравенство.
Свойство 15.5. Пусть f — измерима, а φ — такая суммируемая на X функция, что $|f| \leq \varphi$, тогда f также суммируема. *Доказательство.* Пусть f, φ — простые функции. Тогда $X = \bigcup_k A_k$ и на A_k функции f и φ принимают соответственно значения y_k и z_k, для которых справедливо неравенство $|y_k| \leq z_k$. Рассмотрим ряды $\int_X f(x)\,d\mu = \sum_k y_k \mu(A_k) \leq \sum_k |y_k| \mu(A_k) \leq \sum_k z_k \mu(A_k)$. Из приведённой цепочки неравенств вытекает, что ряд для функции f мажорируется абсолютно сходящимся рядом и, значит, сам абсолютно сходится. В общем случае это свойство доказывается предельным

34. Свойства интеграла Лебега по множеству конечной меры: аддитивность, суммируемость функции и ее модуля. Существенная ограниченность функции. Существенная верхняя грань функции.

Свойство 1. Аддитивность по множествам. Для любого измеримого множества $A \subset X$ выполняется равенство $\int_A f(x)\,d\mu + \int_{X \setminus A} f(x)\,d\mu = \int_X f(x)\,d\mu$. Доказательство. $\int_A f(x)\,d\mu = \int_X f(x)\chi_A(x)\,d\mu$, $\int_{X \setminus A} f(x)\,d\mu = \int_X f(x)\chi_{X \setminus A}(x)\,d\mu$. Так как $\chi_A + \chi_{X \setminus A} = 1$, получаем требуемое равенство.
Свойство 2. Линейность (аддитивность по функциям). Если $f, g \in L(X,\mu)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\int_X (\alpha f(x) + \beta g(x))\,d\mu = \alpha \int_X f(x)\,d\mu + \beta \int_X g(x)\,d\mu$. Доказательство. Для простых функций линейность следует из определения. Для общих функций берём последовательности простых $f_n \to f$, $g_n \to g$ равномерно. Тогда $\alpha f_n + \beta g_n \to \alpha f + \beta g$, и переходом к пределу получаем равенство.
Свойство 3. Суммируемость функции и её модуля. Если f суммируема, то и $|f|$ суммируема, причём $\left|\int_X f(x)\,d\mu\right| \leq \int_X |f(x)|\,d\mu$. Доказательство. Для простых функций: $|\sum_k y_k \mu(A_k)| \leq \sum_k |y_k| \mu(A_k)$. В общем случае — через предельный переход от простых функций.
Свойство 4. Существенная ограниченность функции. Функция f называется существенно ограниченной, если существует $M > 0$, такое что $|f(x)| \leq M$ почти всюду. Тогда $\int_X |f(x)|\,d\mu \leq M\mu(X) < \infty$, и f суммируема. Доказательство. Так как $|f(x)| \leq M$ вне множества меры нуль, то интеграл от $|f|$ не превосходит $M\mu(X)$.
Свойство 5. Существенная верхняя грань функции. $\operatorname{ess\,sup} f = \inf\{M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M \text{ почти всюду}\}$. Это минимальная константа, ограничивающая функцию сверху вне множества меры нуль. Аналогично определяется $\operatorname{ess\,inf} f$. Доказательство. По определению множества меры нуль не влияют на значение интеграла. Поэтому верхняя грань функции рассматривается «с существенностью» — то есть игнорируя исключительные точки меры нуль.

35. Свойства интеграла Лебега по множеству конечной меры: свойство подынтегральной функции, если интеграл нулевой. Лемма (неравенство Чебышева). Пример функции, интегрируемой по Лебегу, но не интегрируемой по Риману. Пример функции, эквивалентной простой функции, и вычисление от нее интеграла.

Свойство 15.9. Если $\int_X |f(x)|\,d\mu = 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду на X. Доказательство. Для доказательства используем неравенство Чебышева.
Лемма 15.1 (неравенство Чебышева). Пусть f — суммируемая функция, причём $f(x) \geq 0$, $c > 0$, и пусть $A_c = \{x : f(x) \geq c\}$. Тогда справедливо неравенство $\mu(A_c) \leq \frac{1}{c}\int_X f(x)\,d\mu$. Доказательство леммы. $\int_X f(x)\,d\mu = \int_{A_c} f(x)\,d\mu + \int_{X\setminus A_c} f(x)\,d\mu \geq \int_{A_c} f(x)\,d\mu \geq c\mu(A_c)$, откуда следует требуемое неравенство. Доказательство свойства 15.9. Обозначим $A_n = \{x : |f(x)| > 1/n\}$. Тогда $A_0 = \{x : |f(x)| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Докажем, что $\mu(A_0) = 0$. По неравенству Чебышева имеем $\mu(A_n) \leq \frac{1}{1/n}\int_X |f(x)|\,d\mu = 0$. Следовательно, $\mu(A_0) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) = 0$, то есть $\mu(A_0) = 0$.
Пример 15.2. Вычислим интеграл Лебега от функции $f(x) = x^3$ при $x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q}$ и $f(x) = 1 - x$ при $x \in [0,1]\cap\mathbb{Q}$. Функция $f(x)$ не интегрируема по Риману, поскольку она разрывна в каждой точке. Однако по мере Лебега f эквивалентна функции $g(x) = x^3$ на $[0,1]$. Действительно, $\mu(\{x \in [0,1] : f(x) \neq g(x)\}) = \mu([0,1]\cap\mathbb{Q}) = 0$. По свойству эквивалентности имеем $\int_{[0,1]} f(x)\,d\mu = \int_{[0,1]} g(x)\,d\mu = \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$.

36. Интеграл Лебега как функция множества. Теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Теорема о sigma-аддитивности интеграла Лебега (без док-ва). Следствие о суммируемости на подмножестве.

Зафиксируем суммируемую функцию f и будем рассматривать интеграл Лебега как функцию множества $A \subset X$, т.е. $\nu(A) = \int_A f\,d\mu$. Очевидно, что $\nu(\varnothing) = 0$.
Теорема 16.1 (Абсолютная непрерывность интеграла). Если $f(x)$ суммируема на множестве A, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\int_E f(x)\,d\mu < \varepsilon$ для всякого измеримого множества $E \subset A$ такого, что $\mu(E) < \delta$. *Доказательство.* Пусть сначала f — простая функция, т.е. $f(x) = y_k$, если $x \in A_k = \{x \in A : f(x) = y_k\}$ и $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Тогда $\int_A f(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} y_k\mu(A_k)$, причём ряд справа сходится абсолютно. Из условия абсолютной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $N(\varepsilon)$ такой, что $\sum_{k=N+1}^{\infty}|y_k|\mu(A_k) < \varepsilon/2$. Построим множество $B = \bigcup_{k=N(\varepsilon)+1}^{\infty} A_k$, которое измеримо. На множестве $A\setminus B$ функция f принимает конечное число значений, поэтому она ограничена. Пусть $c = \max_{1\leq k\leq N(\varepsilon)}|y_k| = \max_{x\in A\setminus B}|f(x)|$. Выберем $\delta < \varepsilon/(2c)$. Пусть $E \subset A$ и $\mu(E) < \delta$, тогда с учётом предыдущих оценок имеем $|\nu(E)| = \int_E f(x)\,d\mu = \int_{E\cap B} f(x)\,d\mu + \int_{(A\setminus B)\cap E} f(x)\,d\mu \leq \int_{E\cap B}|f|\,d\mu + \int_{(A\setminus B)\cap E}|f|\,d\mu \leq \varepsilon/2 + c\delta \leq \varepsilon$. Пусть теперь f — произвольная суммируемая функция. Тогда найдётся простая функция g, такая что $\int_A |f(x) - g(x)|\,d\mu < \varepsilon/2$. Для простой функции g, как только что доказано, существует $\delta > 0$ такое, что если $\mu(E) < \delta$, то $\int_E g(x)\,d\mu < \varepsilon/2$. Тогда для любого измеримого $E \subset A$ с $\mu(E) < \delta$ получаем $\int_E f(x)\,d\mu \leq \int_E g(x)\,d\mu + \int_E |f(x) - g(x)|\,d\mu < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.
Теорема 16.2 (sigma-аддитивность интеграла Лебега). Пусть f — суммируемая функция на множестве A и пусть $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где A_k, $k = 1, 2, \ldots$ — измеримые множества. Тогда f суммируема на каждом A_k и $\int_A f(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k} f(x)\,d\mu$, причём ряд справа сходится абсолютно.
Следствие 16.1. Если f суммируема на измеримом множестве A, то f суммируема на любом подмножестве $B \subset A$.

37. Теорема о суммируемости функции на разбиении (без док-ва).

Теорема 16.3. Пусть измеримое множество $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и на каждом A_k функция f суммируема, причём ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k}|f(x)|\,d\mu$ сходится. Тогда функция f суммируема на A и выполняется равенство $\int_A f(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k} f(x)\,d\mu$

38. Свойства интеграла Лебега как функции множества (без док-ва).

Пусть f — неотрицательная функция, суммируемая на пространстве X по мере μ. Рассмотрим функцию $\nu(A) = \int_A f(x)\,d\mu$, которая определена для всех измеримых подмножеств $A \subset X$. Тогда интеграл Лебега как функция множества обладает следующими свойствами: **Нулевое множество.** $\nu(\varnothing)=0$. **Аддитивность.** Если $A, B \subset X$ измеримы и $A \cap B = \varnothing$, то $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$. **Абсолютная непрерывность.** Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\mu(E) < \delta$, то $|\nu(E)| < \varepsilon$. **σ-аддитивность.** Если $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, где множества A_k измеримы и попарно не пересекаются, то $\nu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$, причём ряд справа сходится абсолютно. **Монотонность.** Если $A \subset B$, то $|\nu(A)| \leq |\nu(B)|$. **Суммируемость на подмножестве.** Если f суммируема на A, то она суммируема и на любом подмножестве $B \subset A$.

39. Теорема Лебега о пределе ограниченной последовательности измеримых функций (без док-ва). Следствие.

Теорема 17.1 (Лебег). Пусть (X, Σ, μ) — пространство с мерой. Если последовательность измеримых функций $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится почти всюду к функции $f(x)$ и при этом существует суммируемая функция φ, такая что для всех n выполняется неравенство $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ почти всюду, то f — суммируемая функция и $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu = \int_X f(x)\, d\mu$.
Следствие 17.1. Пусть последовательность $f_n(x) \to f(x)$ почти всюду и существует константа $M > 0$, такая что $|f_n(x)| \leq M$ почти всюду для всех n, тогда справедливо равенство $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu = \int_X f(x)\, d\mu$.

40. Теорема Беппо Леви (без док-ва). Следствие (без док-ва). Замечание.

Теорема 17.2 (Б. Леви). Пусть (X, Σ, μ) — пространство с мерой и $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$ — монотонно возрастающая последовательность суммируемых функций, и пусть существует константа $C > 0$, такая что $\int_X f_n(x)\, d\mu \leq C$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда почти всюду существует конечный предел $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, причём f — суммируемая функция и выполняется равенство $\int_X f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu$.
Следствие 17.2. Пусть $\varphi_n(x)$ — последовательность неотрицательных суммируемых функций и пусть числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X \varphi_n(x)\, d\mu$ сходится. Тогда почти всюду на X сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$, то есть $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$, и выполняется равенство $\int_X \varphi(x)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \varphi_n(x)\, d\mu$.

41. Теорема Фату (без док-ва). Замечание.

Теорема 17.3 (Фату). Пусть (X, Σ, μ) — пространство с мерой и $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных суммируемых функций на множестве X, обладающая свойствами: $f_n(x) \to f(x)$ почти всюду на X и $\int_X f_n(x)\, d\mu \leq C$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда f суммируема и выполняется неравенство $\int_X f(x)\, d\mu \leq C$.
Замечание 17.2. Если последовательность f_n удовлетворяет условиям теоремы Фату, то нельзя утверждать, что $\int_X f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu$

42. Суммируемость измеримой функции, заданной на множестве с хуевой-конечной мерой. Замечание.

Определение 17.1. Измеримая функция f, заданная на множестве с σ-конечной мерой μ, называется суммируемой на X, если она суммируема на каждом A_n и предел $\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f(x)\, d\mu$ существует, конечен и не зависит от выбора последовательности A_n. Этот предел называется интегралом Лебега от функции f и обозначается так $\int_X f(x)\, d\mu$. Как было показано выше, множество X с σ-конечной мерой может быть представлено в виде счётного объединения попарно непересекающихся множеств X_k, т.е. $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$, где $\mu(X_k) < \infty$. В этом случае измеримая функция называется суммируемой на X, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} |f(x)|\, d\mu$ сходится. Интегралом Лебега функции f называется сумма ряда $\int_X f(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} f(x)\, d\mu$.
Замечание 17.3. Определение интеграла от простой функции остаётся справедливым и в пространстве с σ-конечной мерой, однако для суммируемости простой функции необходимо, чтобы каждое отличное от нуля постоянное значение она принимала на множестве конечной меры.

43. Теорема о суммируемости функции при условии существования интеграла Римана (без док-ва).

Теорема 1.18.1. Если для функции, заданной на отрезке $[a, b]$, существует собственный интеграл Римана

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

то эта функция суммируема и выполняется равенство

$$\int_{[a,b]} f(x)\,d\mu = \int_a^b f(x)\,dx.$$

44. Абсолютная сходимость несобственного интеграла. Теорема – необходимое и достаточное условие абсолютной сходимости интеграла Римана II рода (без док-ва).

Несобственный интеграл Римана называют *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$.
Теорема 18.1. Для абсолютной сходимости несобственного интеграла Римана II рода $\int_a^b f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы f была суммируемой на $[a, b]$. При выполнении любого из этих условий имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,d\mu.$$

45. Теорема - необходимое и достаточное условие абсолютной сходимости интеграла Римана I рода (без док-ва).

Теорема 1.18.3. Для абсолютной сходимости несобственного интеграла Римана I рода необходимо и достаточно, чтобы функция f была суммируема на $[a, +\infty)$. При выполнении любого из этих условий имеет место равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{[a,+\infty)} f(x)\,d\mu.$$

46. Интеграл Лебега-Стилтьеса.

Определение.

$$\int f\,dg = \int f\,d\mu_g,$$

где μ_g — мера Лебега–Стилтьеса, порождённая функцией g.