

Автономная некоммерческая образовательная организация  
высшего образования  
«Научно-технологический университет «Сириус»

**П.В. Сивцев**

**AniFEM++, конечно-элементное расширение  
платформы INMOST и его приложения**

Учебное пособие

Якутск  
2023

УДК 539.37:519.6(075.8)

ББК 22.311я73

С34

Утверждено учебно-методическим ...

**Рецензенты:**

*И.И. Иванов*

*И.И. Иванов*

Сивцев, П.В.

**Выходные данные**

В учебном пособии представлено численное решение задач, связанных с расчетом напряженно-деформированного состояния твердых тел. Рассматриваются различные математические модели механики твердого деформируемого тела, зависящие от свойств исследуемого объекта, среди них модели изотропных и анизотропных тел, термоупругости и пластичности. Вычислительный алгоритм решения задач механики твердого деформируемого тела базируется на использовании метода конечных элементов.

Книга рассчитана на студентов университетов и вузов, обучающихся по специальности "Прикладная математика" и специалистов по вычислительной математике и математическому моделированию.

УДК 539.37:519.6(075.8)

ББК 22.311я73

©Сивцев П.В., 2023

©Северо-Восточный федеральный  
университет, 2023

ISBN 978-5-7513-3524-3

---

## Оглавление

<i>Предисловие</i>	5
<i>Введение</i>	8
<b>Часть I. Механика деформируемого твердого тела</b>	10
<b>1. Основы механики деформируемого твердого тела</b>	12
1.1. Механика сплошной среды	12
1.2. Деформация	14
1.3. Тензорный анализ	15
1.4. Основные параметры	17
<b>2. Задача линейной упругости</b>	21
2.1. Основное уравнение	21
2.2. Закон Гука	22
2.3. Граничные условия	24
2.4. Анизотропное тело	26
<b>Часть II. Вычислительная платформа Anifem++</b>	29
<b>3. Описание AniFem++</b>	31
3.1. Квадратурные формулы	31
3.2. Конечные элементы	31
<b>4. Построение и генерация сеток</b>	35
4.1. Программа Gmsh	35
4.2. Процесс создания геометрии	36
4.3. Создание сетки	43
4.4. Другие возможности Gmsh	47
<b>Часть III. Прикладные задачи</b>	54
<b>5. Трехточечный изгиб железобетонного блока</b>	56

5.1.	Постановка задачи	56
5.2.	Математическая модель	57
5.3.	Объект исследования	59
5.4.	Исследование сингулярностей решений	61
5.5.	Численное усреднение упругих параметров	64
5.6.	Напряженно-деформированное состояние железобетонного блока	73
<b>6.</b>	<b>Расчет деформации деревянной доски</b>	75
6.1.	Постановка задачи	75
6.2.	Математическая модель древесины	77
6.3.	Объект исследования	79
6.4.	Численное решение	80
<b>7.</b>	<b>Тепловое расширение керамической подложки</b>	86
7.1.	Постановка задачи	87
7.2.	Вычислительный алгоритм	88
7.3.	Объект исследования	89
7.4.	Численное исследование вида технологических отверстий	95
<i>Список литературы</i>		102

---

## Предисловие

Задачи механики сплошной среды представляют собой очень важную и актуальную составляющую современных прикладных задач в целом. Среди них обширные классы задач, которые посвящены движению и взаимодействию жидких, газообразных и деформируемых твердых тел. Также, помимо материальных тел, раздел механики сплошной среды рассматривает всевозможные поля: электромагнитные, гравитационные и другие. Как следует из названия, в рамках механики сплошной среды тело рассматривается не в виде дискретных точек, а в качестве непрерывной сплошной области. При более близком рассмотрении можно выделить, например, следующие задачи: фильтрация, турбулентное и ламинарное течение жидкости и газа, звуковые колебания, распространение вибраций, покой в состоянии равновесия и движение твердых деформируемых тел. Для каждой задачи есть свой набор характеристик, в рамках которых можно достаточно точно описать явление. Такими характеристиками являются: поля скоростей, давления, температуры, перемещений, напряжения и т.д. Описание этих характеристик задается уравнениями, которые в итоге связывают механическое явление с математическим аппаратом. Особое внимание заслуживают, например, такие уравнения как: уравнение Навье-Стокса, уравнение Ламе, уравнение Maxwella и др. Таким образом, механика сплошной среды связывает в себе механику и математику, представляя научный интерес как со стороны составления систем уравнений описывающих множество прикладных задач, так и стороны разработки методов для решения составленных уравнений.

За последний век бурное развитие техники неизбежно выдвинуло перед механикой деформируемого твердого тела множество разнообразных задач, связанных с применением традиционных материалов в экстремальных условиях – высоких температур и давлений, внедрением новых материалов – сплавов, композитов, высокопрочных волокон. В следствии чего появилась необходимость в рассмотрении большого ряда моделей деформируемого тела, широко применять в инженерных расчетах теории термоупругости, пороупругости, пластичности, вязкоупругости и механики разрушения.

Задачи теории упругости включают в себя расчет деформаций и напряжений твердого тела под действием силового или теплового внешнего воздействия. При исследовании напряженно-деформированного состояния твердых тел в прикладной теории упругости используются идеализированные предпо-

ложени. Одним из таких предположений является свойство идеальной упругости. Идеально упругое тело отличается тем, что оно описывается теорией линейной упругости, или другими словами, при воздействии на него внешних сил возникают напряжения и деформации имеющие линейную зависимость. Более того, тело, описываемое линейной теорией упругости, после снятия внешних сил восстанавливает свою первоначальную форму и размер. Такая идеализация справедлива для большинства реальных объектов, но только при условии малой величины деформаций. Однако, в случае когда деформации достигают некоторых пределов, зависимость между деформациями и напряжениями становится существенно нелинейной. И при дальнейшем увеличении напряжения возрастает погрешность решения при использовании модели линейной упругости. Для описания больших деформаций используются специализированные теории пластичности, теория трещин и другие нелинейные модели упругости.

Круг задач расчета напряженно-деформированного состояния диктуется практическими запросами и постоянно расширяется. Некоторые из этих задач еще ждут своего решения. Важной задачей промышленности является уменьшение веса изделий массового производства, которое может привести к значительной экономии. Этого можно достичь лишь в результате тщательного анализа их напряженного состояния. Также такой анализ необходим при решении целого ряда технических задач. Знание подробной картины распределения напряжений особенно важно для правильного конструирования быстроходных двигателей внутреннего сгорания, паровых и газовых турбин, самолетов, морских кораблей, роботов и других машин и сооружений.

При росте требований в части точности расчета напряженно-деформированного состояния необходимо учитывать большее количество факторов, таких как температурное расширение, поровое давление, анизотропия исследуемого материала и нелинейное поведение металлов в пластическом течении. Специалист по прикладному математическому моделированию помимо сложных физических моделей должен чувствовать задачу. В обязательном порядке должны быть выполнены проверки по сходимости решения задачи при последовательном измельчении сетки. Знание задачи также должно проявляться при выборе параметров исследования - от методов генерации сетки до предобуславливатель и решателей систем линейных алгебраических уравнений.

Одной из основных задач современного машиностроения является обоснование ресурса оборудования и систем инженерных объектов на стадии их проектирования, оценка выработанного и прогноз остаточного ресурса конструктивных узлов в процессе эксплуатации объектов. Для решения этой задачи используется усталостная теория износа, которая имеет свое основание в виде задач расчета напряженно-деформированного состояния.

Структура книги выполнена таким образом, чтобы изучение материала было максимально удобным при последовательном прочтении книги. В начале дается краткое описание основных моделей механики деформируемого твердого тела. После чего идет описание вычислительного алгоритма. Алгоритм численного моделирования представлен с оптимальной, на мой взгляд, программной реализацией, с использованием вычислительной платформы для решения урав-

нений в частных производных FEniCS, с открытым программным кодом. Для создания и генерации сетки используется программа Gmsh, а для постобработки программа Paraview. Последний раздел книги включает примеры расчетов прикладных задач, которые выполнялись мной совместно с учеными из разных ВУЗов и институтов России, а также с профессором экспериментатором из Польши.

Это переиздание моего первого учебного пособия по истечении пяти лет. Основной материал базируется на материалах моей кандидатской диссертации. Меня часто посещала мысль о написании своего учебного пособия и когда представилась возможность публикации книги, я с радостью воспользовался ею. С благодарностью приму любые конструктивные замечания по книге. Надеюсь, что книга найдет своего читателя и будет вызывать только положительные эмоции от прочтения.

*П.В. Сивцев  
Якутск, март 2023г.*

---

## Введение

В современном мире у исследователя имеется два классических метода познания мира - теория, эксперимент, а также относительно новый метод - вычислительный эксперимент, или другими словами математическое моделирование. Если теория и эксперимент стоят у истоков научной деятельности человечества, то вычислительный эксперимент в современном понимании связан с появлением компьютеров. Математическое моделирование по своей природе основывается на теории и в некотором плане служит альтернативой эксперименту, таким образом, объединяя их в себе, не является ни тем ни другим.

Математической моделью называют представление поведения реальных устройств и объектов посредством математических выражений. Процесс создания математической модели связан с анализом данных, полученных при наблюдении за объектом. После создания математическая модель должна пройти апробацию, затем должны быть обозначены ограничения применения созданной модели. Апробация модели заключается в сравнении поведения реального объекта с симуляцией. На основе множества сравнений должны быть обозначены ограничения применимости созданной модели.

Роль вычислительного эксперимента в современном мире нельзя недооценивать. С применением компьютерного моделирования темпы развития науки вышли на новый уровень. Был произведен научный прорыв в области энергетики и освоении космоса. Благодаря математическому моделированию у нас есть возможность прогнозирования погоды на неделю вперед, причем с достаточно хорошей точностью. Вычислительный эксперимент позволяет строить визуализацию объектов, предсказывая их поведение. Математическое моделирование стало частью современного общества, охватывая технические, социальные и экономические сферы жизнедеятельности.

Математическое моделирование в силу своей непосредственной связи с теорией и экспериментом, заключает в себе преимущества обоих методов познания. Моделирование, подобно теории, позволяет быстро и без существенных затрат исследовать явление или процесс. Проведенное исследование в своей глубине и полноте описания может быть схоже с экспериментальным. Точность описания явления математической моделью порой ограничивается лишь доступной вычислительной мощностью.

Современное математическое моделирование состоит из математического описания явления через аналитическое выражение или уравнение или систе-

мы уравнений в частных производных с добавлением граничных и начальных условий. Отметим исключительную важность аналитических методов, ввиду их простоты и полноты описания явлений, в которых они могут быть применены. Однако, в преобладающем большинстве прикладных задач невозмож но выразить решение аналитически. В таком случае применяются численные методы, которые преобразуют уравнения в частных производных в систему линейных алгебраических уравнений, которая с помощью определенных методов разрешается посредством использования компьютерных вычислительных систем.

Научные вычисления начинаются с написания алгебраических, дифференциальных или интегральных уравнений которые описывают явление. К этому шагу нужно подходить с особой тщательностью, ввиду того, что все последующие операции напрямую зависят от уравнений. Функциональные соотношения должны в полной мере описывать интересующую исследователя составляющую явления, не выходя при этом за пределы разрешимости с точки зрения численных методов и, главное, необходимо учитывать тот факт, что полученная вычислительная реализация ограничивается мощностью используемой ЭВМ.

Главной задачей численных методов является замена интегральных и дифференциальных членов на разностные выражения дискретных значений искомой функции. Таким образом, первым шагом применения численных методов является переход к конечномерному аналогу, или другими словами, переход от непрерывной функции к её дискретному аналогу. После проектирования исходной задачи на дискретную область и замены интегральных и дифференциальных уравнений разностными выражениями мы в итоге получим систему линейных алгебраических уравнений, для решения которых и используются ресурсы ЭВМ.

## **Часть I.**

---

### **Механика деформируемого твердого тела**

1. Основы механики деформируемого твердого тела
  - Механика сплошной среды
  - Деформация
  - Тензорный анализ
  - Основные параметры
2. Задача линейной упругости
  - Основное уравнение
  - Закон Гука
  - Граничные условия
  - Анизотропное тело
3. Совместные задачи
  - Термоупругость
  - Пороупругость
  - Уравнение Био
4. Нелинейные модели пластиичности
  - Пластиичность
  - Теория пластического течения
  - Упрочнение и эффект Баушингера
  - Вычислительный алгоритм

Механика деформируемого твердого тела является разделом механики сплошных сред. Это означает, что в рассматриваемые в этой книге объекты считаются сплошными, непрерывно заполняющими пространство. Другими словами, пренебрегается молекулярное строение тела, за счет того что их линейные размеры и размеры дискретизации значительно больше межмолекулярного расстояния.

В рамках механики сплошной среды, движение в пространстве описывается не координатами и скоростями отдельных частиц, а векторными и скалярными полями. Помимо рассмотрения деформируемого твердого тела механика сплошной среды включает задачи связанные с описанием состояния жидкостей и газов.

Как известно, деформируемые твердые тела меняют свои размеры и форму под действием внешних сил. В них возникают внутренние напряжения и деформации, величина и распределение которых зависят от нагрузки и геометрической формы тел. Для описания этой зависимости используются различные математические модели механики твердого деформируемого тела.

Общим для большинства задач механики твердого деформируемого тела являются понятия перемещений, деформаций и напряжений. И для их описания отлично подходит тензорный анализ, позволяя записывать огромные выражения в компактном виде. С другой стороны, само понимание тензорного исчисления помогает лучше понять природу описываемых величин.

В зависимости от постановки задачи, основой теории является уравнение равновесия или уравнение движения, которое дополняется условиями на поверхности тела и зависимостями между перемещениями, деформациями и напряжениями. В этот раздел входит описание основных задач твердого деформируемого тела. Среди них задачи линейной упругости изотропного и анизотропного тела. На примере базовой модели вводятся основные уравнения и граничные условия для краевых задач. После чего рассматриваются совместные задачи, на примере задач термо- и пороупругости. И наконец, в последнем разделе представлена модель пластичности с описанием алгоритма решения нелинейных задач.

# **1.**

---

## **Основы механики деформируемого твердого тела**

Дается краткое описание механики сплошной среды, разделом которой является механика деформируемого твердого тела. Вводятся основные понятия механики деформируемого твердого тела и применяемого тензорного анализа.

### **1.1. Механика сплошной среды**

Механика сплошной среды – это часть механики, в рамках которой рассматриваются движения газообразных, жидких и деформируемых твердых тел. К механике сплошной среды также относится рассмотрение особых сред, имеющих полями. Речь идет об электромагнитном поле, поле излучений, гравитации и др.

Из названия следует, что механика сплошной среды, в отличии от теоретической механики, рассматривает не движение системы дискретных материальных точек или абсолютно твердого тела, а материальных тел, которые заполняют пространство непрерывно, сплошным образом. Отличие абсолютно твердого тела и деформируемого в том, что расстояние между отдельными точками деформируемого тела может меняться с течением времени. Это, очевидно, также относится и к жидкостям и газам.

Необходимость в механике сплошной среды объясняется тем, что человек не может ответить на все практические вопросы о движении деформируемых тел на основе одних лишь наблюдений. Например, человек с легкостью может ответить на вопросы как сохранить тепло внутри помещения, как защитить себя от ветра и дождя, но в то же самое время проектирование небоскребов, обшивки космической ракеты возможно только на основе специальных знаний. Также сложно определить водяное сопротивление корабля, как и воздушное сопротивление самолета.

Однако не стоит считать, что все индустриальное производство связано с полным всесторонним исследованием поведения получаемого продукта и что все детали могут быть проанализированы до начала производства. Без опыта инженеров, их интуиции и таланта не был бы возможен полет человека в космос. Отметим также, что прогресс в строительстве зданий, речного и морского транспорта шел задолго до изучения механики.

В этом плане место механики сплошной среды и вытекающего из нее численного математического моделирования, в моем скромном понимании, состоит

в замене дорогостоящих и сложных полевых экспериментов компьютерными вычислениями. При этом главным преимуществом научных исследований и компьютерных симуляций состоит в предсказании поведения объектов на долгий промежуток времени, что позволяет избежать материальные и моральные расходы.

### ***Модель теплопроводности***

Рассмотрим вкратце модель теплопроводности твердого тела. Если различные части тела имеют различное значение температуры, то тепло будет передаваться от горячих частей к холодным. Переход тепла осуществляется тремя разными способами:

1. Теплопроводность, в результате которого тепло передается через само тело;
2. Конвекция, в результате которого тепло передается посредством относительного движения нагретых частиц;
3. Передача тепла излучением, при котором перенос тепла происходит за счет электромагнитного излучения.

Конвекция и излучение имеют первостепенную роль в теплопередаче в жидкостях и газах, когда как для твердого тела конвекция отсутствует, а излучением можно пренебречь.

Рассмотрим подробнее эффект теплопроводности в твердых телах. Пусть у нас есть тело  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с внутренним тепловым источником, объемная мощность которого равна  $Q$  нужно определить распределение температуры  $T$ . Для этого необходимо разрешить дифференциальное уравнение теплопроводности 1.1

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad}(T)) + Q, \quad (1.1)$$

где  $c$  – теплоемкость,  $\rho$  – плотность,  $k$  – теплопроводность тела.

При решении краевой задачи теплопроводности имеют место четыре основных вида граничных условий (на границах  $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_e = \partial\Omega$ )

1. Граничное условие первого рода  $T(x) = T_0, x \in \Gamma_1$ ;
2. Граничное условие второго рода  $\frac{\partial T(x)}{\partial n} = q_n, x \in \Gamma_2$ ;
3. Граничное условие третьего рода  $\frac{\partial T(x)}{\partial n} = \alpha(T(x) - T_0), x \in \Gamma_3$ ;
4. Естественное граничное условие  $\frac{\partial T(x)}{\partial n} = 0, x \in \Gamma_e$ , означающее отсутствие теплового потока через границу  $\Gamma_e$ .

Примером граничного условия второго рода может служить тепловой поток, приходящий от удаленного источника. В качестве граничного условия третьего рода может выступать теплообмен с окружающим воздухом, жидкостью в трубах и т.д. Граничное условие третьего рода очень хорошо подходит для описания реальных явлений, когда как граничное условие первого рода является предельным случаем граничного условия третьего рода, в котором значение коэффициента теплообмена  $\alpha$  бесконечно велико.

## 1.2. Деформация

Понятие деформации определяет большой раздел механики, который посвящен деформируемому твердому телу. В этом разделе вкратце определим понятие деформации.

Опыт показывает, что твердое тело под действием внешних воздействий изменяет свою форму. Под внешним воздействием считаются нагрузки, массовые силы, нагревание или охлаждение тела.

### **Вектор перемещения**

Рассмотрим упругое тело, которое в некоторый момент времени  $t = t_0$  занимало в евклидовом пространстве область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  и находилось в естественном недеформированном состоянии. Пусть положение каждой точки этой области определяется радиус-вектором  $\mathbf{r} \equiv (x_1, x_2, x_3)$  в декартовой системе координат. Под действием внешних нагрузок тело деформировалось и заняло область  $\Omega'$ . При этом точка  $T$  области  $\Omega$ , с координатами  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  переместилась в точку  $T'$  в области  $\Omega'$  с координатами  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ , как показано на рис. 1.1

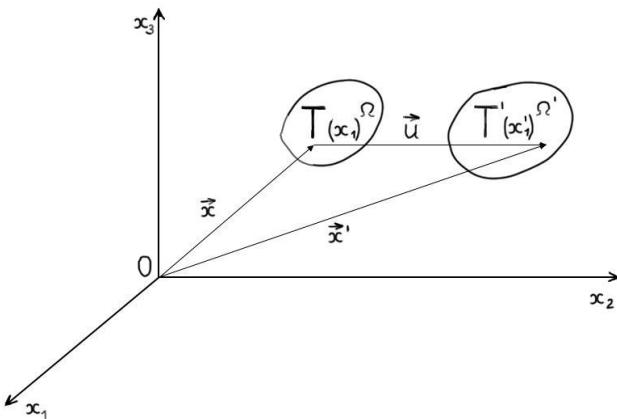


Рисунок 1.1 – Вектор перемещения

Вектором перемещения  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  (или деформации) точки  $T$ , называется разница между вектором положения точки в момент времени  $t$  и начальным положением точки:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}' - \mathbf{x}. \quad (1.2)$$

### 1.3. Тензорный анализ

Для описания других параметров механики деформируемого твердого тела необходимо иметь представление о тензора и тензорных полей.

В общем случае определение тензора выглядит следующим образом: тензор  $\mathbf{X}$  валентности  $(r, s)$  – это геометрический объект, который представляется  $(n+m)$ -мерным массивом  $\mathbf{X}_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n}$  вещественных чисел, удовлетворяющий правилам преобразования (1.3) и (1.4).

$$\mathbf{X}_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} = \sum_{k_1=1}^3 \dots \sum_{l_m=1}^3 S_{k_1}^{i_1} \dots S_{k_n}^{i_n} T_{l_1}^{j_1} \dots T_{l_m}^{j_m} \hat{\mathbf{X}}_{l_1 \dots l_m}^{k_1 \dots k_n}, \quad (1.3)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} = \sum_{k_1=1}^3 \dots \sum_{l_m=1}^3 T_{k_1}^{i_1} \dots T_{k_n}^{i_n} S_{l_1}^{j_1} \dots S_{l_m}^{j_m} \mathbf{X}_{l_1 \dots l_m}^{k_1 \dots k_n}, \quad (1.4)$$

здесь  $T$  и  $S$  – матрицы преобразования координат.

Обозначение тензора с верхними и нижними индексами соответствует понятию контравариантности и ковариантности. Далее мы не будем пользоваться такими обозначениями, так как будем считать что все вычисления проводятся в ортонормированном базисе и ковариантный и контравариантный базисы совпадают.

Тензорные поля – это, по аналогии с определением скалярного или векторного поля, тензороносные функции от координат, которые при изменении системы координат преобразуются по правилам преобразования тензора в зависимости от их ранга. Отметим, что скаляры и вектора – это частные случаи тензора. Об этом далее.

#### **Ранг тензора**

Дадим описание тензоров нулевого, первого, второго и четвертого ранга. Описание тензоров других рангов в этой главе не понадобится и будет ясно интуитивно.

Примером тензора нулевого порядка может служить значение температуры в определенной точке тела. Соответственно, распределение температуры в теле может быть описано тензорным полем нулевого ранга. Другими словами, тензор нулевого ранга – это скаляр.

$$\text{Tens}_0 = a_0$$

При преобразовании системы координат это значение тензора нулевого порядка не меняется, он инвариантен. Это высказывание уже не справедливо для тензора первого порядка, примером которого может быть значение перемещения в точке тела, ведь тензор первого ранга это вектор.

А как меняется векторное поле при преобразовании системы координат? Рассмотрим вектор перемещения в трехмерном пространстве. Само поле никак

не изменится, а изменятся лишь 3 компоненты вектора. Они будут соответствовать значениям разложения вектора перемещения в новом базисе.

$$\text{Tens}_1 = (a_1, a_2, a_3)$$

Определение тензора второго ранга дать довольно трудно. Каждый автор делает это по своему. Один из способов определения тензора второго ранга следующий: *тензор второго ранга это линейный оператор, который отображает векторное пространство в векторное пространство*. По своим свойствам тензор второго ранга аналогичен матрице. И при замене координат к нему нужно применить матрицу преобразования дважды.

$$\text{Tens}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

В свою очередь тензор четвертого ранга это четырехмерная матрица, которую довольно таки сложно представить. В рамках нашего курса тензор четвертого ранга можно определить следующим образом: *тензор четвертого ранга это линейный оператор, который отображает пространство тензоров второго ранга в пространство векторов второго ранга*.

### *Двойное скалярное произведение*

Скалярное произведение тензоров второго ранга выглядит как матричное произведение двух матриц и в результате получается тензор второго ранга:

$$C = A \cdot B, \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} b_{jk}.$$

В результате двойного скалярного произведения тензоров второго ранга мы получаем скаляр, значение которого равно сумме поэлементного произведения компонент умножаемых тензоров:

$$A : B = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} b_{ij}.$$

Соответственно, при двойном скалярном произведении тензора четвертого ранга и тензора второго ранга мы получаем тензор второго ранга:

$$C = A : B, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_{ijkl} b_{kl}.$$

### **Правило Эйнштейна (свертки)**

Для удобства в тензорном анализе два повторяющихся индекса в выражении с тензорами обозначают суммирование по этому индексу. Например, это можно заметить при свертке тензора:

$$a_{kk} = \sum_{k=1}^3 a_{kk} = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Также это встречается при умножении тензоров:

$$a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^3 a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}.$$

## **1.4. Основные параметры**

Описание задач механики деформируемого твердого тела дается через тензоры деформации и напряжения.

### **Тензор деформации**

При деформировании тела меняются положения точек и вместе с тем расстояния между ними. Рассмотрим две бесконечно близкие друг к другу точки. Если радиус-вектор, соединявший эти точки до деформации был  $dx_i$ , то в деформированном теле радиус-вектор между этими двумя точками будет равен  $dx_i + du_i$ , что следует из определения вектора перемещений (1.2). Расстояние между этими точками до деформации тела была равна

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2},$$

а после деформации стала равна

$$dl' = \sqrt{dx'_1^2 + dx'_2^2 + dx'_3^2}.$$

Что согласно правилу написания сумм может быть переписано как

$$dl^2 = dx_i^2, dl'^2 = dx'_i^2 = (dx_i + du_i)^2.$$

Далее, используя представление полного дифференциала через частные  $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$ , получим следующее выражение для  $dl'^2$  в виде

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l.$$

Так как во втором члене перестановка индексов  $i$  и  $k$  ничего не меняет, мы можем этот член переписать в симметричном виде

$$\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k.$$

В третьем члене поменяем местами индексы  $i$  и  $l$ . Тогда получим

$$dl'^2 = dl^2 + 2\varepsilon_{ik}dx_idx_k, \quad (1.5)$$

где

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \quad (1.6)$$

Эти выражения определяют изменение элемента длины при деформации тела. А фигурирующий в выражении тензор  $\varepsilon_{ik}$  называется **тензором деформации**, и по своему определению – он симметричен:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}.$$

В большинстве рассматриваемых нами задачах все деформации являются малыми, и членом второго порядка малости в выражении для тензора деформации (1.6) можно пренебречь. Таким образом, выражение для **тензора малых деформаций** выглядит как

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (1.7)$$

## *Напряжения*

При деформации тела расположение молекул внутри нее меняется, и тело выводится из положения равновесия, в котором оно находилось до деформации. Как результат возникают силы, которые стараются вернуть тело в исходную форму. Эти силы называются внутренними напряжениями. Отсюда следует, что в недеформированном теле внутренние напряжения отсутствуют.

Выделим в теле бесконечно малый квадрат, стороны которого параллельны осям координат и рассмотрим общую силу, действующую на него. С одной стороны, суммарная сила может быть описана в виде интеграла действующих на него сил объемных  $\mathbf{F}$

$$\int F dV.$$

С другой стороны, внутренние силы компенсируются воздействием других частей тела. А те, в свою очередь, передаются между отдельными частями тела через поверхности, которые их соединяют. Следовательно, суммарная сила должна быть представлена в виде интеграла по поверхности. А как нам известно из векторного анализа, чтобы интеграл скаляра по области был равен интегралу по поверхности, этот скаляр должен быть дивергенцией некоторого вектора. Но в нашем случае рассматривается не скаляр, а вектор. Поэтому внутренние силы должны описываться тензором второго ранга  $\sigma_{ik}$ , который называется **тензором напряжения**. Тензор напряжения имеет 9 компонентов

в трехмерном пространстве и может представлен в следующем виде

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Диагональные элементы тензора носят название нормальных напряжения, а вне диагональные тангенциальных. Схематично эти компоненты представлены на рис. 1.2

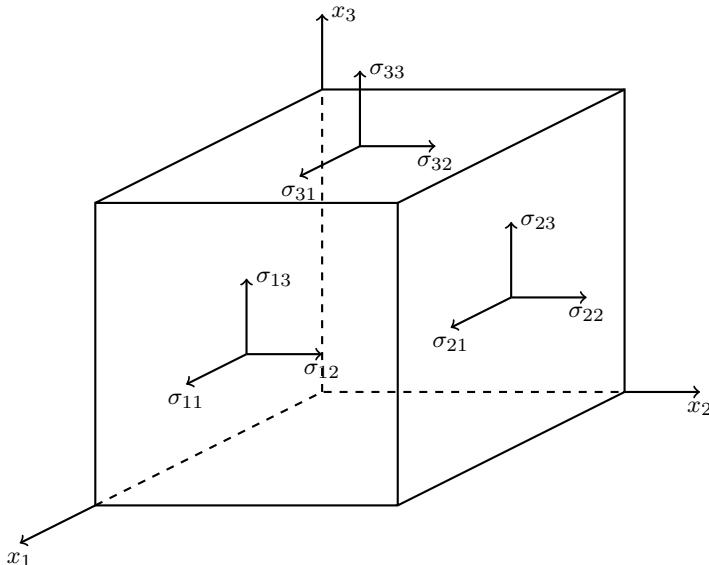


Рисунок 1.2 – Иллюстрация тензора напряжений

Обозначим через  $\mathbf{P}$  вектор внешних сил, действующих на единицу площади поверхности тела. В равновесии эта сила должна компенсироваться внутренним напряжением. Исходя из этого, между вектором  $\mathbf{P}$  и компонентами тензора напряжений справедливо следующее выражение

$$P_i = \sigma_{ij} n_j,$$

где  $n_j$  - компоненты локального вектора нормали, поверхности в точке приложения внешней силы  $P$ .

При любом нагружении можно найти такую систему координат, в которой у локального тензора напряжений будут отсутствовать тангенциальные элементы. В такой системе координат тензор напряжения будет описываться

тремя диагональными компонентами  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , которые носят название главных напряжений.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

### Контрольные вопросы

1. В чем отличие абсолютно твердого тела и деформируемого твердого тела?
2. Как осуществляется переход тепла в твердых телах?
3. Как определяется вектор перемещения?
4. Как определяется тензор малых деформаций?
5. Сколько компонент у тензора напряжения в двумерном пространстве?

## 2.

---

### Задача линейной упругости

Линейная упругость обладает одной из самых успешных теорий в математической физике. В теории линейной упругости рассматриваются состояния сплошных тел, которые обретают исходное положение после снятия сил вызвавших конечные деформации. Описание малых деформаций многих материалов посредством теории линейной упругости является незаменимой. Также отметим важную роль линейной теории упругости при расчете прочностных характеристик различных материалов.

Первые попытки формулировки математической теории упругости, в котором тело рассматривалось в виде непрерывного макроскопического объекта относится к первой половине 18 века. Свой вклад в классическую теорию внесли такие великие ученые, как *Р. Гук*, *Г. Ламе*, *О. Л. Коши*, *С. Д. Пуассон*, *Д. Г. Стокс*, *А. Навье*, *А. Ж. К. Барре де Сен-Венан* и другие. Классической имеется теория упругости рассматривающая малые деформации, которые могут быть приняты линейными относительно приложенных сил согласно идеализированному закону Гука.

#### 2.1. Основное уравнение

Основное уравнение, вокруг которого строится теория упругости, это уравнение движения или равновесия. В рамках учебного пособия рассматриваются стационарные и квазистационарные задачи упругости, поэтому основной акцент делается на уравнение равновесия.

#### Уравнение движения

Рассмотрим задачу расчета напряженно-деформированного состояния линейно упругого изотропного тела в трехмерной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с границей Г. Вычислительный алгоритм для двумерного случая строится по аналогии. Уравнение линейной упругости в общем виде записывается как

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{f} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}), \quad (2.1)$$

где  $\rho$  - плотность тела,  $\mathbf{f}$  - поле (внешних) объемных сил. Это уравнение (2.1) носит название уравнения движения.

### **Уравнение равновесия**

Модель стационарной задачи линейной упругости описывается уравнением равновесия в перемещениях  $\mathbf{u}$ :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = -\mathbf{f}. \quad (2.2)$$

Применение уравнения равновесия оправдано в очевидном случае рассмотрения системы с установившимися деформациями так и при рассмотрении квазистационарных задач, в которых деформирование происходит намного быстрее чем другие процессы. Последний случай справедлив, например, при рассмотрении совместных задач термоупругости, в которых скорость диффузионной теплопроводности значительно медленнее скоростей деформации, и для каждого момента времени мы можем считать напряженно-деформированное состояние установленвшимся.

## **2.2. Закон Гука**

В так называемой классической теории упругости ограничиваются в соответствии с большинством практических приложений малыми (бесконечно малыми) деформациями и берут за основу линейно-упругое поведение материалов согласно обобщенному закону Гука.

Закон Гука является основным уравнением теории линейной упругости, которая задает линейную зависимость тензоров деформации и напряжения. Для изотропного тела эта зависимость описывается как

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \lambda\varepsilon_v \mathbf{I}, \quad (2.3)$$

где  $\mathbb{C}$  - тензор упругости четвертого порядка,  $\boldsymbol{\varepsilon}_v$  - объемная деформация, которая равна следу матрицы тензора деформации.

В дальнейшем будем использовать обозначение для тензора малых деформаций через градиенты, которое выражается как

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \mathbf{u} + \operatorname{grad}^T \mathbf{u}), \quad (2.4)$$

### **Модуль Юнга, коэффициент Пуассона**

В уравнении, описывающем закон Гука (2.3) для изотропного тела, присутствуют обозначения  $\lambda$ ,  $\mu$ , которые носят коэффициенты Ламе, определяющие упругие свойства материалов. Большая часть применяемых в технике упругих тел обладает одинаковыми упругими свойствами во всех направлениях. Такие тела называются изотропными.

Для описания связи между тензором напряжения и тензором деформации в случае изотропного тела требуется всего два параметра. Это может быть как пара коэффициентов Ламе, так и более классические параметры: модуль Юнга

$E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{2\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Модуль Юнга описывает сопротивляемость материала одноосному сжатию, а коэффициент Пуассона – за перенос продольного сжатия в поперечное растяжение, и наоборот, продольного растяжения в поперечное сжатие.

Математические модели изотропного тела лежат в основе большинства приложений теории линейной упругости. С точки зрения математического моделирования более практическим является использование параметров Ламе, которые предоставляют более компактную запись зависимости между тензором напряжения и тензором деформации.

### Обозначения Фойгта

Также отметим удобство записи закона Гука в обозначениях Фойгта для исследования анизотропных тел, при котором тензора второго порядка представляются в виде векторов, которые имеют по 6 независимых элементов. В случае трехмерной задачи в обозначениях Фойгта тензор деформации, напряжения и упругости принимают следующий вид

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon},$$

где  $\mathbb{C}$  — тензор упругости, который имеет вид:

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1323} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2323} \end{pmatrix}.$$

В случае изотропного тела тензор упругости четвертого порядка в обозначениях Фойгта выглядит в следующем виде:

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

### 2.3. Границные условия

Для решения краевой задачи упругости соответственно задаются различные граничные условия первого и второго рода. Граничные условия первого рода задают определенное значение перемещения и, таким образом, фиксируют тело на границе Дирихле. Физический смысл условия первого рода интуитивно понятен, и в качестве примера могут выступать различные крепления, опоры и преграждения. Граничные условия второго рода задают значение нормального напряжения на границе Неймана. Примером условия второго рода для задачи упругости может быть давление пресса, веса дома, высвобожденные внутренние напряжения и т.д.

Опишем математически граничные условия первого и второго рода, на границах  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  соответственно. Условие первого рода состоит в задании определенного перемещения

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \tag{2.5}$$

а условие второго рода в задании нормального напряжения

$$\sigma \mathbf{n} = \sigma_n, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \tag{2.6}$$

где  $\mathbf{n}$  - единичный вектор внешней нормали к поверхности.

В качестве примера граничного условия второго рода для задачи упругости может выступать давление разного рода. Это может быть давление другого тела, давление сжатой жидкости или газа. В зависимости от природы давления, мы имеем равномерное или неравномерное распределение граничного условия по соответствующей границе.

На границах тела могут быть заданы условия первого рода, второго рода или могут быть заданы смешанные условия (например, рис. 2.1).

В реальных прикладных задачах задаются преимущественно смешанные граничные условия.

#### **Жесткое препятствие**

Очевидным примером граничного условия первого рода может служить жесткое крепление тела. Менее очевидным граничным условием может быть

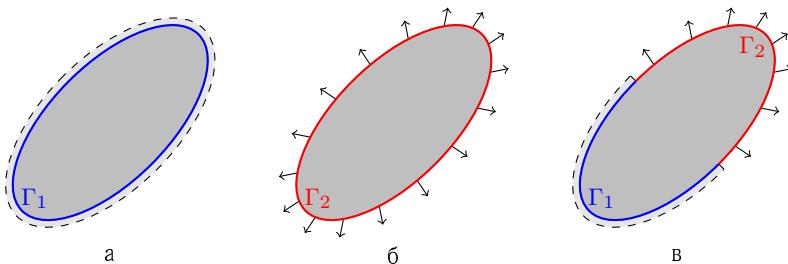


Рисунок 2.1 – Примеры граничных условий: а – первого рода, б – второго рода, в – смешанные

жесткое препятствие тела, которое ограничивает деформации некоторой границы тела вдоль определенной оси координат. Иллюстрация жесткого препятствия представлена на рис. 2.2. Само условие фиксирования движения задается

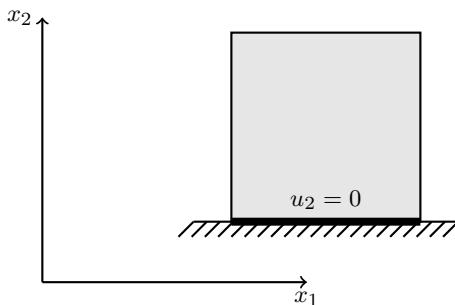


Рисунок 2.2 – Пример граничного условия первого рода: жесткое препятствие в виде уравнения (2.7).

$$u_2 = 0, \quad x \in \Gamma_1. \quad (2.7)$$

### ***Условие симметрии***

В качестве жесткого препятствия может служить часть тела для другой части тела, а именно в случае осевой симметрии – две зеркально идентичные части тела при симметричном нагружении будут деформироваться таким образом, что в поверхности соприкосновения двух симметричных частей будут отсутствовать деформации вдоль оси симметрии. Иллюстрация этого эффекта

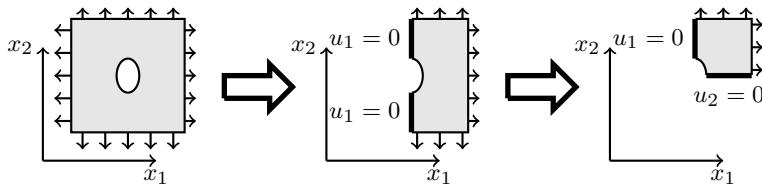


Рисунок 2.3 – Пример граничного условия первого рода: условие симметрии

представлено на рис. 2.3. Этот факт активно используется исследователями для значительного уменьшения сложности задачи рассмотрением решения задачи на половине, четверти или восьмой части исходной задачи при наличии одной, двух и трех взаимно-перпендикулярных осей симметрии, соответственно.

## 2.4. Анизотропное тело

В современных конструкциях наряду с материалами, принимаемых за однородные и изотропные, в производстве используются и анизотропные материалы, отличительной особенностью которых является резкое различие упругих свойств для разных направлений.

Главной сложностью при моделировании анизотропного материала в сравнении с изотропным является большее количество параметров, определяющих связь между тензором напряжений и тензором деформаций. При моделировании этой связи можно воспользоваться обозначением Фойгта, при котором тензоры напряжений и деформаций второго порядка представляются в виде векторов, а тензор упругости четвертого порядка, определяющий связь между ними, представляется в виде матрицы. Такое обозначение не только уменьшает запись, но и облегчает восприятие анизотропии.

### *Естественные анизотропные тела*

Примером анизотропного материала может служить натуральная древесина; общеизвестно, что модуль упругости древесины при растяжении вдоль волокон значительно больше соответствующего модуля при растяжении поперек волокон, и что упругие постоянные ее зависят от направления по отношению к древесным волокнам. Также анизотропными являются синтетические материалы, применяемые в самолетостроении, такие как авиа-фанера, текстолит, дельта-древесина и др. Помимо этих материалов анизотропией упругих свойств обладают кристаллы, некоторые горные породы и даже бетон.

### **Искусственные анизотропные тела**

Кроме естественной анизотропии, описанной выше, существует также понятие искусственной или конструкционной анизотропии. Примерами материалов, обладающих таким свойством, могут являться пластиинки или оболочки, выполненные из изотропного материала, которым придана форма волнистости или укрепленные дополнительными прочными волокнами (армирование). В армированных материалах армирующий компонент обладает значительно более высокой прочностью и жесткостью, чем связующий. В качестве распространенного в технике примера можно выделить высокопрочные стеклопластики, в которых армирующим материалом являются тонкие волокна стекла, а связующим – пластик.

### **Закон Гука для ортотропного тела**

Особым случаем анизотропного материала является ортотропный материал. Тело, обладающее тремя ортогональными плоскостями упругой симметрии в каждой точке, называется ортогонально-анизотропным или, короче, ортотропным. Понятие ортотропности применяется при приближенном моделировании древесины. Предположение об ортотропности применительно к элементарному объему древесины является идеализированной расчетной схемой, при котором тремя ортогональными плоскостями симметрии являются плоскости перпендикулярные тангенциальному направлению, радиальному направлению и направлению волокон. Такое предположение значительно упрощает математическое моделирование ортотропного тела за счет уменьшения независимых ненулевых параметров тензора упругости.

Соотношение между тензором напряжений  $\sigma$  и тензором деформации  $\varepsilon$  для ортотропного тела выглядит как

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\mu_{21}\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\mu_{31}\sigma_{33}}{E_3}, \\ \varepsilon_{22} &= -\frac{\mu_{12}\sigma_{11}}{E_1} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\mu_{32}\sigma_{33}}{E_3}, \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\mu_{13}\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\mu_{23}\sigma_{22}}{E_2} + \frac{\sigma_{33}}{E_3}, \\ \gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G_{12}}, \quad \gamma_{13} = \frac{\tau_{13}}{G_{13}}, \quad \gamma_{23} = \frac{\tau_{23}}{G_{23}},\end{aligned}\tag{2.8}$$

где  $E_1, E_2, E_3$  - соответствующие осям модули Юнга,  $G_{ij}$  ( $G_{ij} = G_{ji}$ ),  $\mu_{ij}$  ( $\mu_{ij} \neq \mu_{ji}$ ) - модули сдвига и коэффициенты Пуассона, соответственно. Таким образом, для ортотропного тела определяется целых 12 упругих постоянных вместо 2 для изотропного.

Для удобства записи, система уравнений (6.2) может быть переписана в обозначениях Фойгта:

$$\sigma(x) = \mathbb{C}\varepsilon(x)$$

где

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

является симметричной матрицей со следующими компонентами

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \mu_{32}\mu_{23}}{\Delta E_2 E_3}, & C_{22} &= \frac{1 - \mu_{31}\mu_{13}}{\Delta E_1 E_3}, & C_{33} &= \frac{1 - \mu_{12}\mu_{21}}{\Delta E_1 E_2}, \\ C_{12} &= \frac{\mu_{21} + \mu_{31}\mu_{23}}{\Delta E_2 E_3}, & C_{13} &= \frac{\mu_{31} + \mu_{21}\mu_{32}}{\Delta E_2 E_3}, & C_{23} &= \frac{\mu_{12} + \mu_{12}\mu_{31}}{\Delta E_1 E_3}, \\ C_{44} &= G_{12}, & C_{55} &= G_{23}, & C_{66} &= G_{31}, \end{aligned}$$

здесь  $\Delta$  – вспомогательный коэффициент, используемый для сокращения записи, который выражается как

$$\Delta = \frac{1 - \mu_{12}\mu_{21} - \mu_{13}\mu_{31} - \mu_{23}\mu_{32} - 2\mu_{21}\mu_{32}\mu_{13}}{E_1 E_2 E_3}.$$

### Контрольные вопросы

1. В чем отличие между уравнением движения и уравнением равновесия?
2. Как выглядит закон Гука для изотропного тела?
3. Как соотносятся между собой модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициенты Ламе?
4. Как можно упростить задачу упругости трехмерного тела, обладающего симметрией по трем осям координат на границе которого задано равномерное граничное условие второго рода?
5. Что такое анизотропное тело?

## **Часть II.**

---

### **Вычислительная платформа AniFem++**

1. Описание возможностей AniFem++
  - Квадратурные формулы
  - Конечные элементы
  - Элементная матрица
  - Вычисление КЭ функции в точке
  - Наложение условий Дирихле
2. Примеры использования
  - Первое знакомство
  - Стационарное уравнение реакции-диффузии
  - Стационарный изгиб балки
  - Стационарное уравнение Стокса
  - Нестационарное уравнение конвекции-диффузии

Данная инструкция состоит из двух частей: в первой части приводится обзор основных элементов и возможностей Anifem++, а вторая часть представлена в виде набора постепенно усложняющихся примеров, которые призваны научить использовать данную библиотеку. Если вы были ранее знакомы с библиотекой Ani3D/AniFem, то можете начинать знакомство сразу с написания кода.

## 3.

---

### Описание AniFem++

Основными элементами библиотеки AniFem++ являются:

- множество квадратурных формул;
- классы с описанием используемых КЭ пространств;
- функции для вычисления элементных матриц;
- функции вычисления КЭ функции в точке;
- функции для наложения граничных условий Дирихле.

Последовательно рассмотрим каждый из этих элементов.

#### 3.1. Квадратурные формулы

Для численной аппроксимации возникающих при КЭ дискретизации интегралов реализованы квадратурные формулы вида  $w^i, \lambda^i_{i=1}^N$ :

$$\int_{S_d} f(x) dx \approx |S_d| \sum_{i=1}^N w^i f \left( \sum_{k=1}^{d+1} \lambda_k^i p_k \right),$$

где  $\lambda$  - барицентрические координаты точки внутри  $d$ -мерного симплекса  $S_d$  с опорными точками  $p_k$ . Формулы реализованы вплоть до 20-го порядка для 1D, 2D и 3D симплексов (для отрезков, треугольников, тетраэдров), имеют узла только внутри симплексов ( $\lambda_k^i > 0$ ) и только положительные веса ( $w^i > 0$ ).

Функции для получения квадратур, см. quadrature\_formulas.h:

```
Iterate
Literal TetraQuadFormula    tetrahedron_quadrature_formulas(int order);
Literal TriangleQuadFormula triangle_quadrature_formulas(int order);
Literal SegmentQuadFormula   segment_quadrature_formulas(int order);
Iterate
```

Ввиду реализации формул целиком через статическую память, вызов этих функций является дешевой операцией.

#### 3.2. Конечные элементы

В рамках AniFem++ конечные элементы имеют 2 вариант реализации: compile-time (через шаблоны) и runtime (через наследование).

Базовые пространства	compile-time представление	runtime представление
piecewise constant, $P_0$	FemFix<FEM_P0>	P0Space
continuous piecewise linear, $P_1$	FemFix<FEM_P1>	P1Space
continuous piecewise quadratic, $P_2$	FemFix<FEM_P2>	P2Space
continuous piecewise cubic, $P_3$	FemFix<FEM_P3>	P3Space
the lowest order Nedelec (edge) finite element	FemFix<FEM_ND0>	ND0Space
the lowest order Raviart-Thomas (face) finite element	FemFix<FEM_RT0>	RT0Space
the Crouzeix-Raviart finite element	FemFix<FEM_CR1>	CR1Space
Bubble subspace, 4-order cell-centred basis function, incomplete space	FemFix<FEM_B4>	BubbleSpace

Операции над пространствами	compile-time пример	runtime пример
определение пространства	using P1Fem = FemFix<FEM_P1>; using P2Fem = FemFix<FEM_P2>	FemSpace P1{P1Space()}, P2{P2Space()}, B4{BubbleSpace()};
декартово произведение, $\times$	FemCom<P1Fem, P2Fem, P1Fem>	P1*P2*P1
возвведение в натуральную степень, $\wedge k$	FemVecT<3, P1Fem>	(P1 $\wedge$ 3)
обогащение пространства, $+$	недоступно	P1+B4

Исходно предоставляется следующий набор КЭ пространств (хотя можно определять и собственные пространства):

Важно отметить что BubbleSpace не является завершенным КЭ пространством а лишь содержит единственную базисную функцию  $\phi = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$  и предоставляется для обогащения других пространств.

Все пространства предоставляют функторы для вычисления действия следующих линейных дифференциальных операторов (если они математически определены) на базисные функции:

Имя оператора	Описание
IDEN	тождественный оператор, $\text{IDEN}(v^h) = v^h$
GRAD	оператор градиента, $\text{GRAD}(v^h) = \nabla v^h$
DIV	оператор дивергенции, $\text{DIV}(v^h) = \operatorname{div} v^h$
CURL	оператор ротора, $\text{CURL}(v^h) = \operatorname{rot} v^h$
DUDX	частная производная в x-направлении, $\text{DUDX}(v^h) = \partial v^h / \partial x$
DUDY	частная производная в y-направлении, $\text{DUDY}(v^h) = \partial v^h / \partial y$
DUDZ	частная производная в z-направлении, $\text{DUDZ}(v^h) = \partial v^h / \partial z$

Также в runtime режиме у класса FemSpace есть метод

```
Iterate  void evalBasisFunctions(const Expr& lmb, const Expr& grad_lmb, std::vector<Expr>& phi);
```

который можно использовать для символьного вычисления действия любых линейных дифференциальных операторов на элементные базисные функции.

Конечные элементы в ApiFem++ представлены следующим набором:

- функторы для вычисления действия дифференциальных операторов на множество элементных базисных функций КЭ пространства,  $\text{Op}(\phi)$ ;
- отображение элементных степеней свободы на элементы тетраэдра DofMap;
- функции интерполяции гладких функций на отдельные степени свободы,  $I_i(f)$  или степени свободы, лежащие на определенной части тетраэдра,  $I_g(f)$ .

Операции над про- странствами UFem	compile-time пример	runtime пример
получить функтор $Op(\phi)$ , в примерах $Op = \text{GRAD}$	Operator<GRAD, UFem>	UFem.getOP(GRAD)
получить DofMap	Dof<UFem>::Map()	UFem.dofMap()
вычислить $I_i(f)$	Dof<UFem>::interpolate( f, dof_vals, idof_on_tet)	UFem.interpolateOnDOF(tetra, f, dof_vals, idof_on_tet, wmem)
вычислить $I_g(f)$	interpolateByDOFs<UFem>( f, dof_vals, tet_part)	UFem.interpolateByDOFs(tetra, f, dof_vals, tet_part, wmem)

## 4.

---

### Построение и генерация сеток

Первым шагом при численном решении уравнений является покрытие области задачи вычислительной сеткой. При дискретизации области встает вопрос о зависимости величины ячеек разбиения области и точности решения полученной с применением определенной сетки. Для большинства задач предполагается, что уменьшение размера ячеек сетки приводит к увеличению точности решения задачи. Но это справедливо не для всех задач. Существуют задачи с сингулярностью, для которых решение задачи может не сходиться к точному решению при уменьшении локального размера сетки, а в некоторых случаях даже расходиться. В большинстве случаев это связано с выбором некорректной модели, геометрии или численного метода не приспособленного под особенность задачи.

Отметим также, что для задач, которые сходятся к точному решению при измельчении сетки, не обязательно уменьшать размер сетки на всей области. Если решение задачи имеет участки области, где наблюдается наибольшее отклонение относительно точного решения, то при измельчении сетки только в них мы получим сопоставимое по точности решение задачи при гораздо меньшей нагрузке ЭВМ по сравнению с решением, полученным при равномерном измельчении сетки на всей области. Таким образом, при построении дискретизации уравнений полезно иметь представление о локальных особенностях задачи.

#### 4.1. Программа Gmsh

На своей многолетней практике вычислений мне довелось работать с двумя генераторами сетки ввиду их хорошей совместимостью с вычислительным пакетом FEniCS<sup>1</sup>. Эти программы Netgen<sup>2</sup> и Gmsh<sup>3</sup>. В силу универсальности, хорошей поддержки и большой популярности Gmsh вне конкуренции.

<sup>1</sup> <https://fenicsproject.org/>

<sup>2</sup> <https://ngsolve.org/>

<sup>3</sup> <http://gmsh.info/>

## *Альтернативные программы*

Для создания геометрии и генерации сетки можно воспользоваться встроенным редактором геометрии FEniCS, который может быть внедрен в основной код. Однако при работе с областью, имеющей сложную форму и геометрию, рекомендуется импортировать сетку из специализированных программ по генерации вычислительных сеток, таких как Gmsh и Netgen, которые также являются свободно распространяемыми.

Отличительной особенностью Gmsh является работа с примитивами, такими как точки, линии, поверхности и объемы. Подход Netgen основан на булевых операциях над геометрическими объектами, таких как параллелепипед, шар, эллипсоид, полуплоскости и т. д.

До недавних времен в зависимости от моделируемой геометрии удобнее было пользоваться либо Gmsh, либо Netgen. Сегодня булевые операции доступны и Gmsh при подключении ядра OpenCASCADE<sup>4</sup>. В связи с этим, овладев Gmsh, можно строить сетки любой сложности.

## **4.2. Процесс создания геометрии**

Опишем процесс создания сетки на примере создания геометрии куба с центральным вырезом, заполненным другим материалом, который имеет форму круга с одного конца, и форму эллипса с другого. Схематично геометрия выглядит как на рис. 4.1.

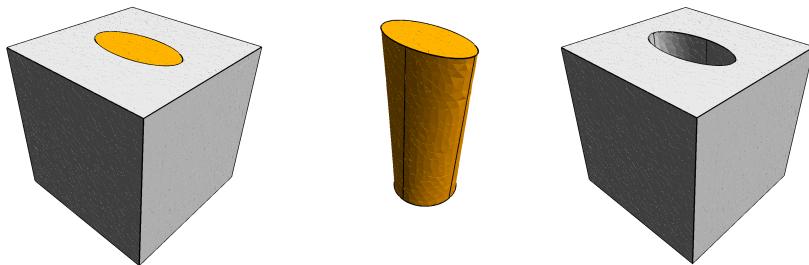


Рисунок 4.1 – Пример геометрии

### *Создание точек*

Для начала зададим переменные для наших параметры: длину стороны куба, радиус кругового выреза, длину большой и малой полуосей эллиптического выреза и параметр локального размера элементов сетки.

<sup>4</sup> <https://www.opencascade.com/>

```

Iterate
literal l = 1;
literal r = 0.2;
literal ls = 0.05;
literal a = 0.3;
literal b = 0.15;
Iterate

```

Синтаксис очень простой – после названия переменной следует символ присваивания и значение переменной. Также важно помнить о точке с запятой в конце каждой строчки, как языке программирования С.

Конечно, можно обойтись без параметров, и писать все значения вручную, но не стоит пренебрегать заданием переменных. Ведь в случае, когда условие задачи поменяется или нужно будет строить схожую сетку с другими размерами, гораздо удобнее менять одно значение переменной, чем менять его везде где он был использован.

### *Создание точек*

После определения переменных можно приступать к созданию точек нашей сетки: это соответственно вершины куба, центры круга и эллипса, а также точки на круге и эллипсе.

```

Iterate
literal Point(1) = {0, 0, 0, ls};
literal Point(2) = {1, 0, 0, ls};
literal Point(3) = {1, 1, 0, ls};
literal Point(4) = {0, 1, 0, ls};
Iterate
literal Point(5) = {1/2, 1/2, 0, ls};
literal Point(6) = {1/2+r, 1/2, 0, ls};
literal Point(7) = {1/2, 1/2+r, 0, ls};
literal Point(8) = {1/2-r, 1/2, 0, ls};
literal Point(9) = {1/2, 1/2-r, 0, ls};
Iterate
literal Point(11) = {0, 0, 1, ls};
literal Point(12) = {1, 0, 1, ls};
literal Point(13) = {1, 1, 1, ls};
literal Point(14) = {0, 1, 1, ls};
Iterate
literal Point(15) = {1/2, 1/2, 1, ls};
literal Point(16) = {1/2+a, 1/2, 1, ls};
literal Point(17) = {1/2, 1/2+b, 1, ls};
literal Point(18) = {1/2-a, 1/2, 1, ls};
literal Point(19) = {1/2, 1/2-b, 1, ls};
Iterate

```

Отметим сразу удобство использования переменных для задания координат наших точек. Синтаксис задания точек следующий:

```

literal Point(*номер точки*) = {*значение координаты x*,  

literal *значение координаты y*, *значение координаты z*,  

literal *локальная величина размеров ячейки сетки*}  

Iterate

```

В итоге получим распределение точек как представлено на рис. 4.2. Пока ни-

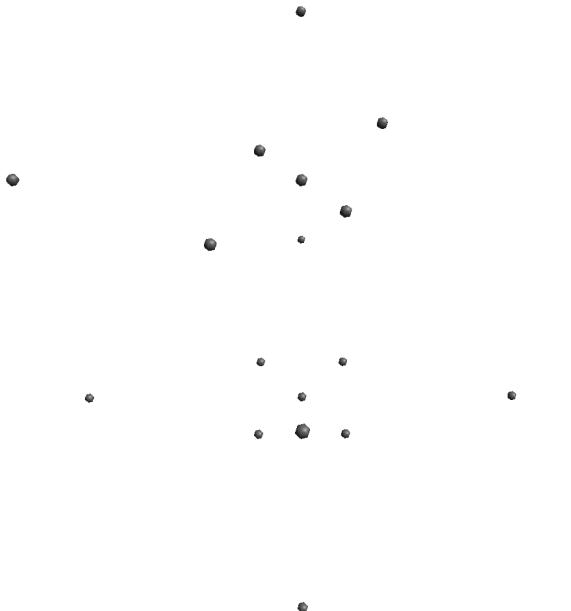


Рисунок 4.2 – Геометрия на этапе создания точек

чего толком не понятно, что мы нарисовали.

### ***Рисование линий и кривых***

Далее нам нужно соединить между собой соответствующие точки: линии граней куба, круговые и эллиптические кривые и линии, соединяющие круг с эллипсом:

```

Iterate
literal Line(1) = {1, 2};
literal Line(2) = {2, 3};
literal Line(3) = {3, 4};
literal Line(4) = {4, 1};
literal

```

```

literal Circle(5) = {6, 5, 7};
literal Circle(6) = {7, 5, 8};
literal Circle(7) = {8, 5, 9};
literal Circle(8) = {9, 5, 6};
literal
literal Line(11) = {11, 12};
literal Line(12) = {12, 13};
literal Line(13) = {13, 14};
literal Line(14) = {14, 11};
literal
literal Ellipse(15) = {16, 15, 16, 17};
literal Ellipse(16) = {17, 15, 18, 18};
literal Ellipse(17) = {18, 15, 18, 19};
literal Ellipse(18) = {19, 15, 16, 16};
literal
literal Line(21) = {1, 11};
literal Line(22) = {2, 12};
literal Line(23) = {3, 13};
literal Line(24) = {4, 14};
literal Line(25) = {6, 16};
literal Line(26) = {7, 17};
literal Line(27) = {8, 18};
literal Line(28) = {9, 19};
literal

```

Синтаксис создания линий следующий:

```

Iterate
literal Line(*номер линии*) = {*номер точки начала линии*,
                                *номер точки конца линии*}
Iterate

```

Заметим, что очередность начала и конца точки имеет значение (подробнее при создании поверхности). Для создания круга и эллипса параметров немного больше. И тут становится понятно – зачем нужны точки по центру.

```

Iterate
literal Circle(*номер кривой*) = {*номер точки начала кривой*,
                                      *номер точки центра кривой*,
                                      *номер точки конца кривой*}
literal Ellipse(*номер кривой*) = {*номер точки начала кривой*,
                                       *номер точки центра кривой*,
                                       *номер точки на большой полуоси эллипса←
                                       *,
                                       *номер точки конца кривой*}
Iterate
Iterate

```

Кривые Circle и Ellipse представляют собой часть фигуры, который занимает сектор в 90 градусов или четверть окружности или эллипса, соответственно. В итоге добавления вышеописанных строк мы получим вид представленный на рис. 4.3.

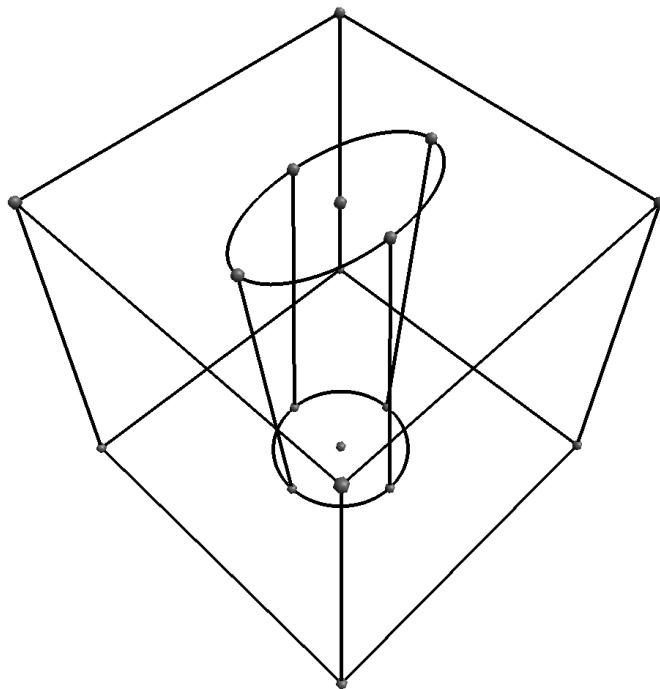


Рисунок 4.3 – Геометрия на этапе создания линий

### ***Объединение кривых в поверхности***

Для создания поверхностей необходимо соединить линии в замкнутые кривые, которые являются границами поверхностей. Используя номера кривых, составляющих внешние грани и грани внутренних вырезов, мы создаем поверхности.

```

Iterate
literal Line Loop(1) = {1, 2, 3, 4};
literal Line Loop(2) = {5, 6, 7, 8};
literal Plane Surface(1) = {1, 2};
literal Plane Surface(2) = {2};
Iterate

```

Первая замкнутая кривая включает номера линий границы нижнего квадрата, вторая – границы круга. Первая поверхность в качестве параметров имеет две кривые, потому что имеет вырез по середине.

```

Iterate
literal Line Loop(3) = {11, 12, 13, 14};
literal Line Loop(4) = {15, 16, 17, 18};
literal Plane Surface(3) = {3, 4};
literal Plane Surface(4) = {4};
Iterate

```

То же самое выполняется для верхней грани тела. В итоге мы получаем поверхности, представленные на рис. 4.4.

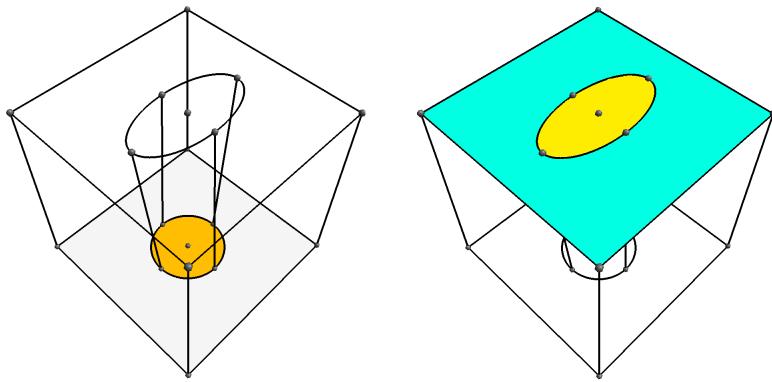


Рисунок 4.4 – Геометрия на этапе создания поверхностей

```

Iterate
literal Line Loop(5) = {1, 22, -11, -21};
literal Plane Surface(5) = {5};
literal Line Loop(6) = {2, 23, -12, -22};
literal Plane Surface(6) = {6};
literal Line Loop(7) = {3, 24, -13, -23};
literal Plane Surface(7) = {7};
literal Line Loop(8) = {4, 21, -14, -24};
literal Plane Surface(8) = {8};
Iterate

```

Строки описывают поверхности по внешним граням куба. Эти грани показаны на рис. 4.6. Обратите внимание на то, что нумерация линий содержит отрицательные числа. Это обуславливается тем, что отрицательные значения присваиваются линиям, имеющим направление противоположное направлению обхода (пример рис. 4.5).

```

Iterate
literal Line Loop(9) = {5, 26, -15, -25};
literal Ruled Surface(9) = {9};
literal Line Loop(10) = {6, 27, -16, -26};
literal Ruled Surface(10) = {10};
Iterate

```

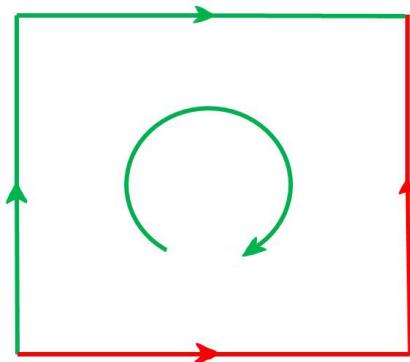


Рисунок 4.5 – Обход линий для создания Line Loop

```
literal Line Loop(11) = {7, 28, -17, -27};  
literal Ruled Surface(11) = {11};  
literal Line Loop(12) = {8, 25, -18, -28};  
literal Ruled Surface(12) = {12};  
iterate
```

Для создания не плоских поверхностей используется функция Ruled Surface. Полученные поверхности представлены на рис. 4.6.

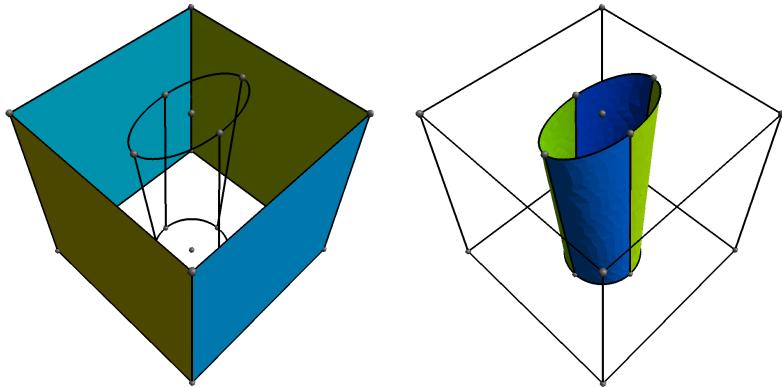


Рисунок 4.6 – Геометрия на этапе создания поверхностей

### ***Создание объема***

Для создания объема необходимо собрать список поверхностей, составляющих границы объема.

```
Iterate
literal Surface Loop(1) = {1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12};
literal Volume(1) = {1};
Iterate Surface Loop(2) = {2, 4, 9, 10, 11, 12};
literal Volume(2) = {2};
Iterate
```

В итоге получим необходимые нами объемы представленные на рис. 4.1.

### ***Определение физических групп***

Для связи нумерации границ и подобластей необходимо определить физические группы. Именно номера физических групп будут использоваться в вычислениях.

```
Iterate
literal Physical Surface(1) = {1, 3};
literal Physical Surface(2) = {2, 4};
literal Physical Surface(3) = {5, 6, 7, 8};
literal
literal Physical Volume(1) = {2};
literal Physical Volume(2) = {1};
Iterate
```

Использование отдельной нумерации физических групп позволяет объединять несколько поверхностей или объемов под одним номером. Полученные физические группы подобластей и границ, представлены на рис. 4.7, 4.2, соответственно.

## **4.3. Создание сетки**

Для создания вычислительной сетки откройте файл внутри **Gmsh**, откройте вкладку **Mesh** и нажмите на **3D**. Должно получится что-то вроде сетки, представленной на рис. 4.9.

### ***Виды генераторов сетки***

Если вы откроете настройки **Options** и вкладку **Mesh**, то вы заметите множество алгоритмов для создания 2D и 3D сеток. Выбор зависит от вас. От себя рекомендую алгоритм **MeshAdapt** для 2D и **Frontal** для 3D. Иногда один лишь правильный выбор алгоритмов генерации сеток позволяет значительно ускорить решение краевой задачи. Пробуйте и сравнивайте различные алгоритмы.

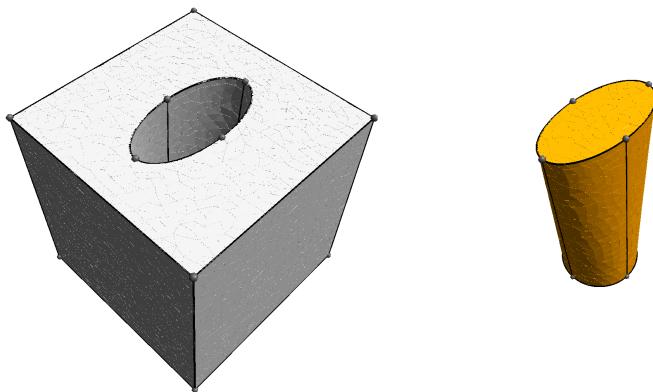


Рисунок 4.7 – Физические группы подобластей

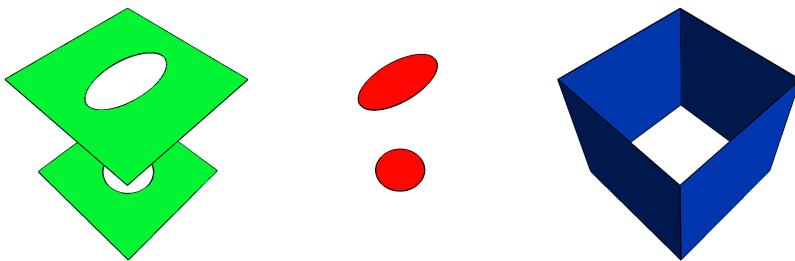


Рисунок 4.8 – Физические группы границ

### *Структурированные сетки*

Не могу припомнить случай когда возникала необходимость в создании структурированных сеток для решения практических задач. Но для тех, кто интересуется, представлю код по созданию структурированной сетки на квадратной области.

Для создания структурированной сетки, представленной на рис. 4.10, необходимо написать следующий код

```
Iterate
literal l = 10;
literal ls = 0.1;
literal
literal Point(1) = {0, 0, 0, ls};
literal Point(2) = {1, 0, 0, ls};
literal Point(3) = {1, 1, 0, ls};
```

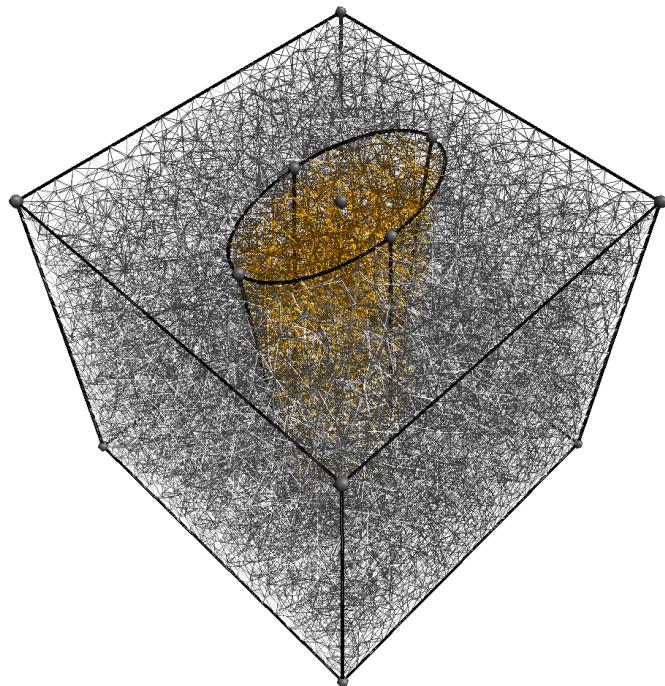


Рисунок 4.9 – Вычислительная сетка

```
Point(4) = {0, 1, 0, 1s};  
Line(1) = {1, 2};  
Line(2) = {2, 3};  
Line(3) = {3, 4};  
Line(4) = {4, 1};  
Line Loop(1) = {1, 2, 3, 4};  
Plane Surface(1) = {1};  
Transfinite Curve {1:4} = 10;  
Transfinite Surface{1};  
Physical Surface(1) = {1};
```

Здесь число после `Transfinite Curve 1:4` означает количество точек в линиях от 1 до 4, равное 10.

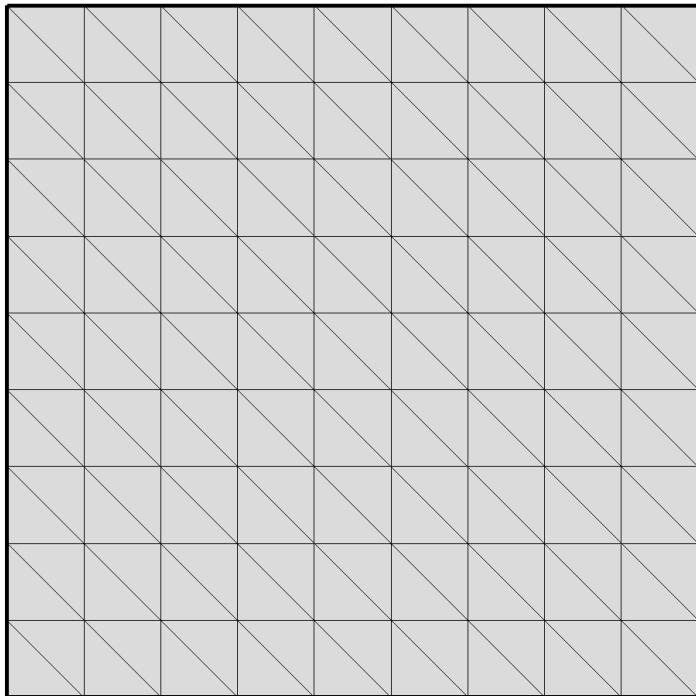


Рисунок 4.10 – Структурированная сетка

#### 4.4. Другие возможности Gmsh

Отметим другие возможности по построению сеток на Gmsh. Для этого рассмотрим пример вычислительной сетки представленной на рис. 4.11.

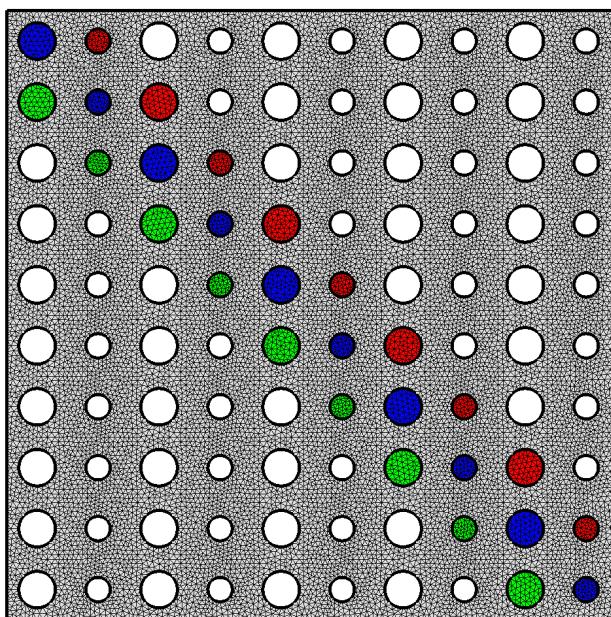


Рисунок 4.11 – Пример вычислительной сетки. Обозначение цветов: серый – физическая область №1, зеленый – №2, синий – №3, красный – №4

Полный код файла сетки выглядит как

```
Iterate
literal l = 10;
literal ls = 0.1;
literal r1 = 0.3;
literal r2 = 0.2;
literal X = 0;
literal Y = 0;
literal R = 0;
Iterate
literal Point(1) = {0, 0, 0, ls};
literal Point(2) = {1, 0, 0, ls};
literal Point(3) = {1, 1, 0, ls};
literal Point(4) = {0, 1, 0, ls};
literal Line(1) = {1, 2};
```

```

literal Line(2) = {2, 3};
literal Line(3) = {3, 4};
literal Line(4) = {4, 1};
literal
literal Line Loop(1) = {1, 2, 3, 4};
literal
literal loops[] = {1};
literal For j In {0:2}
literal   surf^{{j}}[] = {};
literal EndFor
literal
literal Function CircleLoop
literal   cp1 = newp; Point(cp1) = {X, Y, 0, 1s};
literal   cp2 = newp; Point(cp2) = {X+R, Y, 0, 1s};
literal   cp3 = newp; Point(cp3) = {X, Y+R, 0, 1s};
literal   cp4 = newp; Point(cp4) = {X-R, Y, 0, 1s};
literal   cp5 = newp; Point(cp5) = {X, Y-R, 0, 1s};
literal   c11 = newl; Circle(c11) = {cp2, cp1, cp3};
literal   c12 = newl; Circle(c12) = {cp3, cp1, cp4};
literal   c13 = newl; Circle(c13) = {cp4, cp1, cp5};
literal   c14 = newl; Circle(c14) = {cp5, cp1, cp2};
literal   cll = news; Line Loop(cll) = {c11, c12, c13, c14};
literal   loops[] += {cll};
literal   If((i+j+3)%11 < 3)
literal     Plane Surface(cll) = {cll};
literal     surf^{{(i+j+3)%11}}[] += {cll};
literal   EndIf
literal Return
literal
literal For i In {0:9}
literal   For j In {0:9}
literal     X = 0.5 + i;
literal     Y = 0.5 + j;
literal     If(i%2==0)
literal       R = r1;
literal     Else
literal       R = r2;
literal     EndIf
literal     Call CircleLoop;
literal   EndFor
literal EndFor
literal
literal Plane Surface(1) = {loops[]};
literal Physical Surface(1) = {1};
literal For j In {0:2}
literal   Physical Surface(j+2) = {surf^{{j}}[]};
literal EndFor

```

Здесь используются возможности **Gmsh** по созданию и вызову функций, использования циклов и условных операторов. Рассмотрим их подробнее.

## Функции

Создание функции сопровождается вызовом команды `Function`

```
iterate
literal Function CircleLoop
iterate
```

После вызова этой команды начинается наполнение тела создаваемой функции, которое заканчивается вызовом команды `Return`

```
iterate
literal Return
iterate
```

Отметим, что в представленном выше коде в теле функции присутствуют схожие команды `newp`, `newl` и `news`. Эти команды используются для получения нового номера для точки, линии и поверхности, соответственно. Для получения нового не использованного номера для областей вызывается команда `newv`.

Эти команды помогают пользователю не использовать многократно один и тот же номер для обозначения разных объектов. Получаемый номер не какой-то особенный. Как правило он на единицу выше максимального существующего номера, который имеет объект этого же типа (уровня = точка, линия, поверхность, объем).

Для вызова функции необходимо следовать синтаксису `Call + название функции`. В нашем случае

```
iterate
literal Call CircleLoop;
iterate
```

## Циклы, условные операторы

Циклы и условные операторы известны и понятны всем, кто хоть немного знает о программировании. В Gmsh ничего нового в этом плане нет.

Синтаксис для циклов выглядит как

```
iterate
literal For переменная In { начальное значение : конечное значение }
    Тело цикла
literal EndFor
iterate
```

а условного оператора так

```
iterate
literal If(Условие)
```

```

literal   Тело условного оператора при выполнении условия
literal Else
literal   Тело условного оператора при не выполнении условия
literal EndIf
literal

```

Отметим, что при вызове циклов бывает полезно использовать пополняемые списки. Имеются ввиду следующие строчки кода

```

Iterate
literal loops[] = {1};
literal For j In {0:2}
literal   surf^{{j}}[] = {};
literal EndFor
literal
literal ...
literal
literal loops[] += {c11};
literal surf^{{(i+j+3)%11}}[] += {c11};
literal
literal ...
literal
literal Plane Surface(1) = {loops[]};
literal Physical Surface(1) = {1};
literal For j In {0:2}
literal   Physical Surface(j+2) = {surf^{{j}}[]};
literal EndFor
Iterate

```

в которых показано их создание, пополнение и использование.

Здесь цикл

```

Iterate
literal For j In {0:2}
literal   surf^{{j}}[] = {};
literal EndFor
Iterate

```

заменяет запись

```

Iterate
literal surf_0[] = {};
literal surf_1[] = {};
literal surf_2[] = {};
Iterate

```

### Ядро *OpenCASCADE*

С помощью ядра OpenCASCADE получилось за 17 строчек кода создать геометрию симпатичного робота представленного на рис. 4.12.

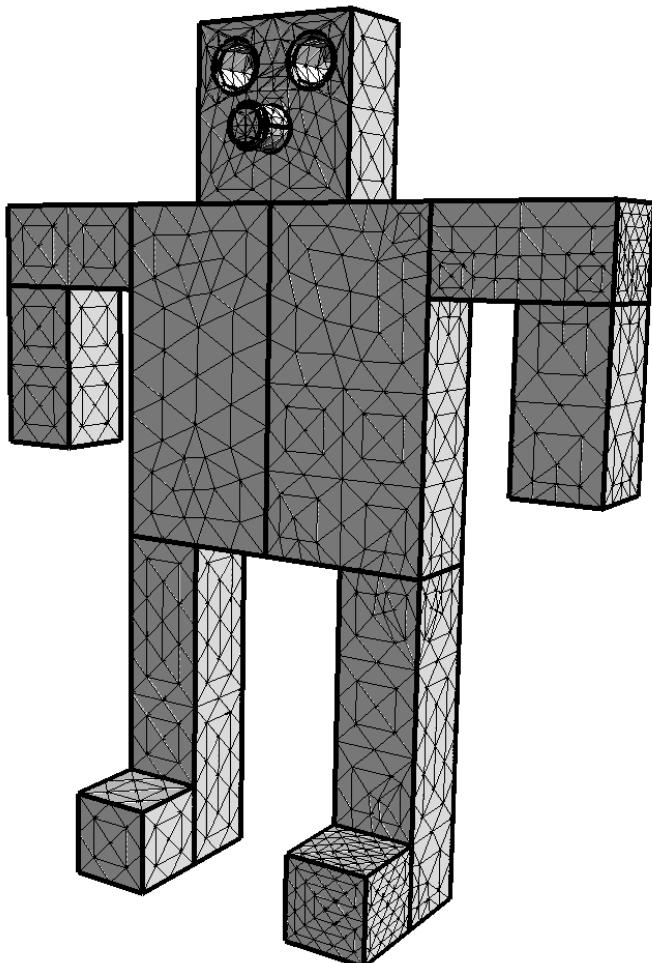


Рисунок 4.12 – Пример вычислительной сетки созданной с помощью ядра OpenCASCADE

Соответствующий код представлен далее

```

Iterate
literal SetFactory( "OpenCASCADE" );
literal
literal Block(1) = {0, 0, 0, 2, 2, 1};
literal Cylinder(2) = {0.5, 1.5, -0.5, 0, 0, 2, 0.25, 2*Pi};
literal Cylinder(3) = {1.5, 1.5, -0.5, 0, 0, 2, 0.25, 2*Pi};
literal Cylinder(4) = {1.0, 0.8, 0.5, 0, 0, 1.0, 0.25, 2*Pi};
literal
literal BooleanDifference{ Volume{1}; Delete; }{ Volume{2}; Volume{3}; ←
literal Delete; }
literal BooleanUnion{ Volume{1}; Delete; }{ Volume{4}; Delete; }
literal
literal radius = DefineNumber[ 0.05, Name "Parameters/radius" ];
literal Fillet{1}{11, 12, 19}{radius}
literal
literal Block(5) = {-1, -4, 0, 2, 4, 1};
literal Block(6) = {-3, -1, 0, 2, 1, 1};
literal Block(7) = {-3, -3, 0, 1, 2, 1};
literal Block(8) = {-1, -8, 0, 1, 4, 1};
literal Block(9) = {-1, -8, 1, 1, 1, 1};
literal
literal BooleanUnion{ Volume{5}; Delete; }{ Volume{6}; Volume{7}; ←
literal Volume{8}; Volume{9}; Delete; }
literal Symmetry {1, 0, 0, -1} {Duplicata { Volume{2}; }}
literal
literal BooleanUnion{ Volume{1}; Delete; }{ Volume{2}; Volume{3}; Delete; }
literal

```

Если рассмотреть подробнее код сетки, то сначала было инициализировано ядро OpenCASCADE, которое позволяет производить булевые операции сложения и вычитания. После чего были созданы объекты, которые друг от друга вычитались и объединялись.

Отметим, что с помощью функции `Fillet` можно скруглить элемент объема возле включенных в список линий.

Для дальнейшего ознакомления прочитайте официальную документацию Gmsh. Там описаны все используемые функции и имеется множество полезных примеров.

### Задания

- Постройте вычислительные сетки для следующих двумерных объектов: круг, квадрат, гексагон.
- Постройте вычислительные сетки для следующих трехмерных объектов: сфера, куб, конус.
- Постройте вычислительную сетку для двумерного объекта с ромбовидными перфорациями, представленного на рис. 4.13.

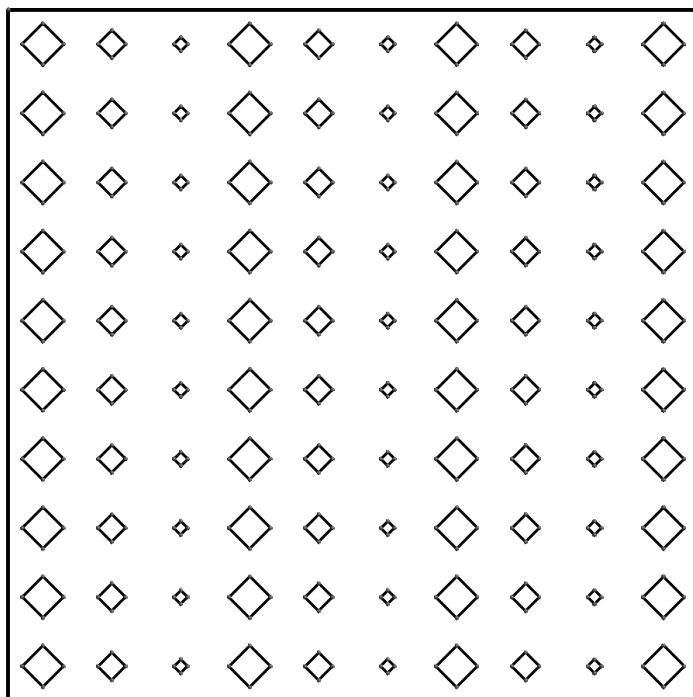


Рисунок 4.13 – Задание

- Постройте вычислительную геометрию стола с четырьмя ножками, используя ядро OpenCASCADE.

## **Часть III.**

---

### **Прикладные задачи**

1. Трехточечный изгиб железобетонного блока
  - Постановка задачи
  - Математическая модель
  - Объект исследования
  - Исследование сингулярностей решений
  - Численное усреднение упругих параметров
  - Напряженно-деформированное состояние железобетонного блока
2. Расчет деформации деревянной доски
  - Постановка задачи
  - Математическая модель древесины
  - Объект исследования
  - Численное решение
3. Тепловое расширение керамической подложки
  - Постановка задачи
  - Вычислительный алгоритм
  - Объект исследования
  - Численное исследование вида технологических отверстий
4. Исследование деформаций грунтового фундамента
  - Постановка задачи
  - Математическая модель
  - Вычислительный алгоритм
  - Напряженно-деформированное состояние грунта

---

В этом разделе рассматривается численное решение прикладных задач расчета напряженно-деформированного состояния. На основе примеров рассмотрены задачи упругости для неоднородного тела, термоупругости, линейной упругости для анизотропного тела и задача пластичности.

Рассматривается численное моделирование задачи линейной упругости неоднородного тела. На примере трехточечного изгиба железобетонного блока приводится вычислительная реализация решения задачи расчета напряженно-деформированного состояния тела, составленного из частей выполненных из различных материалов, имеющих значительные отличия численных значений упругих параметров. Предлагается локальное изменение геометрии для разрешения особенности задачи. На основе решения двумерной задачи расчета напряженно-деформированного состояния бетона с включением стальных фибр демонстрируется возможность численного усреднения упругих параметров.

Далее рассматривается численное моделирование задачи линейной упругости анизотропного тела. Приводится вычислительный алгоритм решения стационарной задачи линейной упругости анизотропного тела на примере деформации деревянной доски под действием внутренних напряжений, возникающих при распиловке древесины. При помощи приведенного алгоритма выполняется верификация эмпирически выведенного соотношения расчета внутренних напряжений Даурской лиственницы, которая составляет значительную часть экспорта древесины Якутии.

После чего рассматривается численное моделирование связанный задачи термоупругости. На примере расчета напряженно-деформированного состояния керамической подложки под действием температурного расширения приводится вычислительный алгоритм численного решения задач термоупругости. На основе алгоритма проводится исследование влияния размеров и вида технологических отверстий на максимальную величину возникающих напряжений с целью минимизации риска возникновения трещин.

И в последней главе рассматривается численное моделирование связанный задачи термоупругопластичности. Приводится вычислительный алгоритм расчета нелинейной задачи упругости в случае идеальной пластичности без учета упрочнения. На примере расчета напряженно-деформированного состояния основания дома под действием теплообмена с атмосферным воздухом и с домом приводится численное решение задачи термоупругопластичности. Исследуется зависимость величины пластических деформаций грунта от степени теплоизоляции дома.

## **5.**

---

### **Трехточечный изгиб железобетонного блока**

Рассматривается численное моделирование задачи линейной упругости неоднородного тела. На примере трехточечного изгиба железобетонного блока приводится численная реализация решения задачи расчета напряженно-деформированного состояния тела, состоящего из частей, выполненных из различных материалов, имеющих значительные отличия численных значений упругих параметров. Предлагается локальное изменение геометрии для разрешения особенности задачи. На основе решения двумерной задачи расчета напряженно-деформированного состояния бетона с включением стальных фибр демонстрируется возможность численного усреднения упругих параметров.

#### **5.1. Постановка задачи**

Вычислительная область может быть поделена на подобласти на основании нескольких факторов, таких как разделение по физическим свойствам материалов, внутренним нагрузкам и т.д. Область может состоять из однородного материала (пространственно независимые свойства) или из неоднородного (свойства материала зависят от пространства).

В этой главе рассмотрим случай, когда тело состоит из нескольких частей, выполненных из разных материалов. На стыке между разными подобластями используется естественное условие идеального контакта, другими словами, равенство перемещения в точках, являющихся общими для подобластей разных материалов. Будем считать, что тело состоит из некоторого однородного материала с включениями, состоящими из других однородных материалов.

В случае, когда включения имеют малые размеры, возникает необходимость в использовании вычислительной сетки с локальными сгущениями, что приводит к увеличению количества ячеек и узлов сетки. Это могут быть как случаи с мелкими объектами, например: камни в грунте, смоляные кармашки в дереве, стальные и полипропиленовые фибры в бетоне; так и с тонкими вытянутыми объектами имеющими длину, сопоставимую с общей геометрией: арматура в бетоне, сваи и трубы в грунте. Также, возникает необходимость в подробной сетке в случае большого количества включений. Таким образом, сложность задачи с подобластями относительно однородных задач может вырасти многократно.

Также, в этой главе рассматривается проблема, которая относится к осо-

бенности решения связанной с геометрией. А именно, расходимость значений напряжения при локальном уменьшении размера сетки в области с особенностью. Предложено решение возникающей проблемы посредством изменения геометрии.

## 5.2. Математическая модель

Рассмотрим математическую модель, описывающую напряженно-деформированное состояние в расчетной области  $\Omega$ , содержащей железобетонную плиту, зажатую между прессом и рельсами

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}. \quad (5.1)$$

Здесь  $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4$ , где  $\Omega_1$  — подобласть стальной арматуры в бетоне,  $\Omega_2$  — бетонная подобласть плиты,  $\Omega_3$  — пресс,  $\Omega_4$  — рельсы.

Уравнение (5.1) дополняется соотношением между тензором напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  и тензором деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \operatorname{grad} \mathbf{u} + \operatorname{grad}^T \mathbf{u} \right),$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) E + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}),$$

где  $E$  — единичный тензор,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  — перемещение тела,  $\lambda, \mu$  — параметры Ламе, которые зависят от подобласти и задаются как

$$\mu = \begin{cases} \mu_1, & \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \mu_2, & \mathbf{x} \in \Omega_2 \\ \mu_3, & \mathbf{x} \in \Omega_3 \\ \mu_4, & \mathbf{x} \in \Omega_4 \end{cases}, \quad \lambda = \begin{cases} \lambda_1, & \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \lambda_2, & \mathbf{x} \in \Omega_2 \\ \lambda_3, & \mathbf{x} \in \Omega_3 \\ \lambda_4, & \mathbf{x} \in \Omega_4 \end{cases}.$$

Для упрощения считается, что арматура, пресс и рельсы выполнены из одинаковой стали и, соответственно,  $\mu_1 = \mu_3 = \mu_4$  и  $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4$ .

Уравнение твердого тела дополняется граничными условиями, которые связаны с поверхностными силами и фиксированными перемещениями. В частности, можно ставить краевое условие первого рода:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \quad (5.2)$$

которое связано с заданием перемещений на границе Дирихле. Отметим также условие второго рода:

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N, \quad (5.3)$$

заключающееся в том, что на заданной части тела действуют поверхностные силы.

Таким образом, особенностью постановки задачи является наличие разрывного коэффициента, имеющего различное значение для каждой подобласти.

Следовательно, вычислительная реализация с применением метода конечных элементов является стандартной.

Для реализации этой модели был использован следующий ufl-файл

```

Iterate
literal    cell = tetrahedron
literal    element = VectorElement("Lagrange", cell, 1)
Iterate
literal    u = TrialFunction(element)
literal    v = TestFunction(element)
literal    f = Constant(cell)
Iterate
literal    mu1     = Constant(cell)
literal    lmbda1 = Constant(cell)
literal    mu2     = Constant(cell)
literal    lmbda2 = Constant(cell)
literal    mu3     = Constant(cell)
literal    lmbda3 = Constant(cell)
literal    mu4     = Constant(cell)
literal    lmbda4 = Constant(cell)
literal    mu5     = Constant(cell)
literal    lmbda5 = Constant(cell)
literal    mu6     = Constant(cell)
literal    lmbda6 = Constant(cell)
Iterate
literal    def epsilon(v):
literal        return 0.5*(grad(v) + grad(v).T)
Iterate
literal    def sigma1(v):
literal        return 2.0*mu1*epsilon(v) \
literal            + lmbda1*tr(epsilon(v))*Identity(v.cell().d)
Iterate
literal    def sigma2(v):
literal        return 2.0*mu2*epsilon(v) \
literal            + lmbda2*tr(epsilon(v))*Identity(v.cell().d)
Iterate
literal    def sigma3(v):
literal        return 2.0*mu3*epsilon(v) \
literal            + lmbda3*tr(epsilon(v))*Identity(v.cell().d)
Iterate
literal    def sigma4(v):
literal        return 2.0*mu4*epsilon(v) \
literal            + lmbda4*tr(epsilon(v))*Identity(v.cell().d)
Iterate
literal    def sigma5(v):
literal        return 2.0*mu5*epsilon(v) \
literal            + lmbda5*tr(epsilon(v))*Identity(v.cell().d)
Iterate
literal    def sigma6(v):
literal        return 2.0*mu6*epsilon(v) \
literal            + lmbda6*tr(epsilon(v))*Identity(v.cell().d)
Iterate
literal    n = FacetNormal(cell)

```

```

literal
literal a = inner(sigma1(u), epsilon(v))*dx(1) \
literal + inner(sigma2(u), epsilon(v))*dx(2) \
literal + inner(sigma3(u), epsilon(v))*dx(3) \
literal + inner(sigma4(u), epsilon(v))*dx(4) \
literal + inner(sigma5(u), epsilon(v))*dx(5) \
literal + inner(sigma6(u), epsilon(v))*dx(6)
literal L = f*inner(n,v)*ds(1)
literal
literal element_s = TensorElement("Discontinuous Lagrange", cell, 0)
literal s = TrialFunction(element_s)
literal w      = TestFunction(element_s)
literal disp   = Coefficient(element)

literal a_s = inner(s, w)*dx(1) + inner(s, w)*dx(2) + inner(s, w)*dx(3) \
literal + inner(s, w)*dx(4) + inner(s, w)*dx(5) + inner(s, w)*dx(6)
literal L_s = inner(sigma1(disp), w)*dx(1) + inner(sigma2(disp), w)*dx(2) \
literal + inner(sigma3(disp), w)*dx(3) + inner(sigma3(disp), w)*dx(4) \
literal + inner(sigma3(disp), w)*dx(5) + inner(sigma3(disp), w)*dx(6)
literal
literal forms = [a, L, a_s, L_s]

```

Безусловно, можно было сократить запись, задав для функции тензора напряжений зависимость от коэффициентов Ламе. После чего добавить задание различные параметры в определении билинейной формы. Однако, основной целью является демонстрация примера задания параметров для тела выполненного из различных материалов, локализованных по отдельным подобластям.

### 5.3. Объект исследования

Объектом исследования являются железобетонные конструкции, представляющие из себя бетонные плиты с внутренним металлическим каркасом. Проведенное моделирование должно дать оценку эффекта добавления таких каркасов на напряженно-деформированное состояние бетонных плит под воздействием внешних поверхностных сил.

Геометрия металлической арматуры и ее расположение внутри бетона представлена на рис. 5.1. Стальные прутья моделировались в виде цилиндров с диаметрами 22, 12 и 8 мм. Геометрия взаимного расположения плиты, рельса и пресса представлена на рис. 5.2. На этом рисунке также выделены границы, на которых задаются граничные условия. На нижней поверхности рельса задается условие первого рода, которое фиксирует основание рельса на месте. А пресс моделируется в виде стального слитка, на верхней поверхности которого задается граничное условие второго рода, определяющее равномерно распределенное вертикальное давление.

Для вышеописанной геометрии были сгенерированы сетки с помощью свободно распространяемого генератора сеток `Gmsh`. Пример построенной сетки представлен на рис. 5.3.

При решении задачи использовались значения параметров Ламе, выведен-

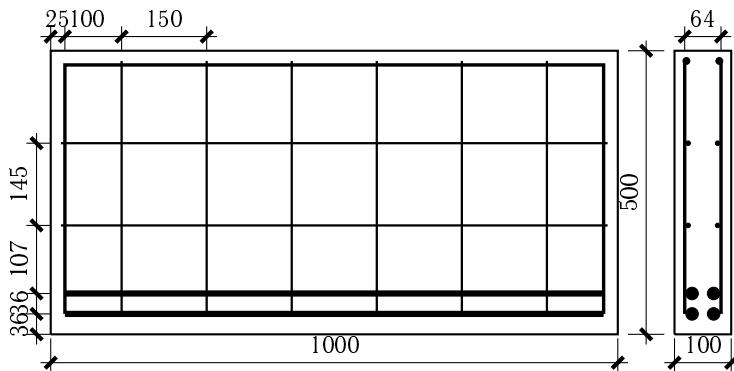


Рисунок 5.1 – Геометрические размеры и расположение стальной арматуры внутри бетона (размеры заданы в миллиметрах)

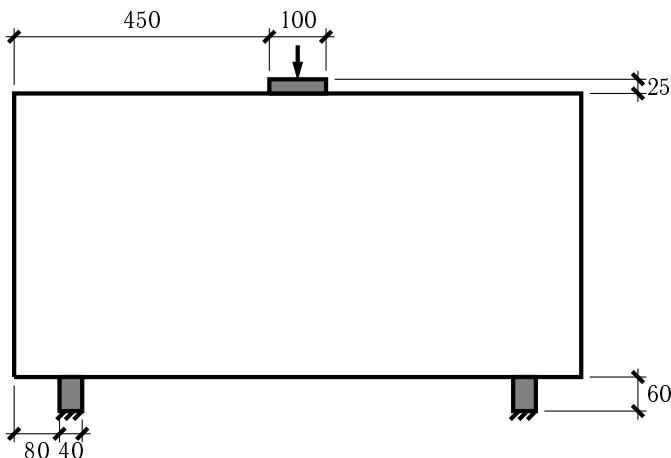


Рисунок 5.2 – Геометрия взаимного расположения плиты, пресса и рельс (размеры заданы в миллиметрах)

ные из табличных данных для модуля Юнга и коэффициента Пуассона для стали и бетона, представленных в табл. 5.1. Значения упругих постоянных для бетона соответствуют цементу с маркировкой СЕМ I 52,5 при соотношении вода/цемент = 1/4.

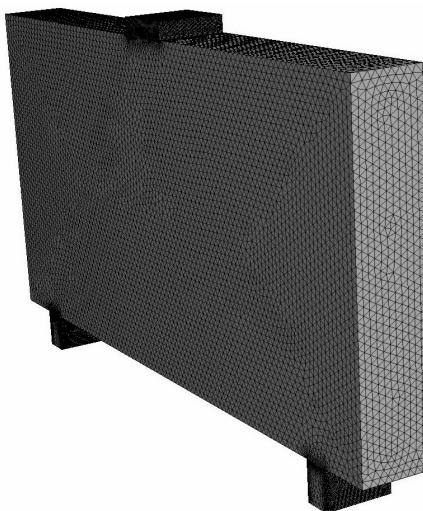


Рисунок 5.3 – Пример сетки для бетонного блока, построенной с использованием программы Netgen

Таблица 5.1 – Параметры упругости материалов составляющих железобетонный блок

Материал	Модуль Юнга, $E$ , ГПа	Коэффициент Пуассона, $\nu$
Бетон	32.7	0.27
Сталь	200	0.30

## 5.4. Исследование сингулярностей решений

Перед непосредственным исследованием решения задачи нужно гарантировать адекватность полученных результатов. С этой целью необходимо провести исследование на сходимость численных результатов при уменьшении локальных размеров сетки в области возможных особенностей. В контексте рассматриваемой задачи необходимо провести подобное исследование в области стыков плиты с рельсами и прессом, а также проверить сходимость решения при уменьшении размеров ячеек сетки в области арматуры.

При рассмотрении тела с ярко выраженным внешним углом меньше 180 градусов, угол представляет собой концентратор напряжения. Что означает стремление напряжения в углу к бесконечности при уменьшении локального размера сетки. Наиболее часто применяемым способом решения этой проблемы является скругление угла с особенностью. Подобное изменение хорошо согла-

суется с геометрией реальных объектов, так как в действительности все углы имеют ненулевой радиус сопряжения.

Для демонстрации эффекта скругления и исследования особенности возле стыка плиты с рельсами и плитой было построено 4 вида геометрий, которые показаны на рис. 5.4. Вариант А является идеализированным приближением, не учитывающим неоднородность поверхности плиты, тогда как варианты В и С не учитывают окружность углов. Вариант D является более близким к реальной геометрии стыка и не содержит концентраторов напряжения.

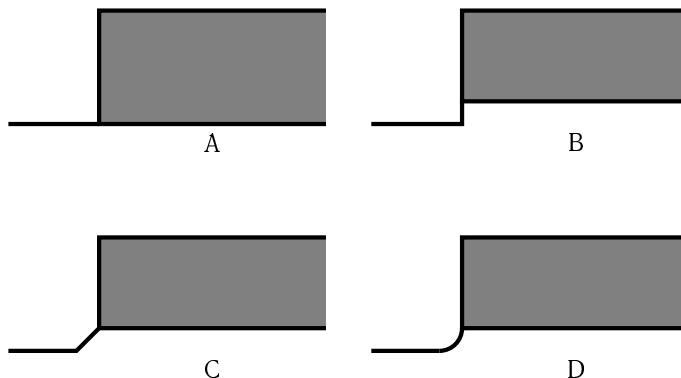


Рисунок 5.4 – Различные варианты моделирования стыка плиты с внешними объектами (серым цветом обозначен пресс)

Для проверки сходимости решения при локальном сгущении сетки было построено по 7 сеток для каждого варианта стыка, каждая из которых соответствует определенным значениям локального размера сетки. Количество ячеек для каждой построенной сетки в зависимости от локального размера сетки представлено в табл. 5.2.

На рис. 5.5 представлены распределения напряжений по Мизесу для различных вариантов стыка. Из этих распределений можно выделить характер концентрированного напряжения в углах для вариантов А, В, С. Тогда как для случая D напряжение равномерно распределено по поверхности окружности.

На рис. 5.6 дана зависимость локального максимального значения напряжения по Мизесу от размера сетки. Можно заметить, что для вариантов А, В и С локальное максимальное значение напряжения по Мизесу стремится к бесконечности. А для геометрии D наблюдается сходимость.

Подобное поведение напряжения для вариантов А, В и С связано с наличием разрыва по перемещениям вдоль горизонтальной линии пересекающей угол (рис. 5.7 – 5.8). Из полученных распределений перемещений можно заметить линейное приближение разрыва около угла стыка для случаев А, В и С, а также сходимость перемещений для варианта D со скругленным углом.

Следовательно, был сделан вывод о том, что геометрия угла стыка D да-

Таблица 5.2 – Зависимость количества ячеек от локального размера ячеек для различных вариантов стыка

Размер ячейки, мм	Количество ячеек			
	A	B	C	D
2	482 986	510 937	522 493	540 039
1.5	511 616	532 953	598 785	612 659
1	547 074	574 825	709 109	725 798
0.8	630 740	644 894	946 023	952 356
0.5	862 093	859 870	1 443 219	1 454 613
0.3	1 213 038	1 191 827	3 313 830	3 262 889
0.2	3 009 850	2 974 961	9 824 629	9 751 344

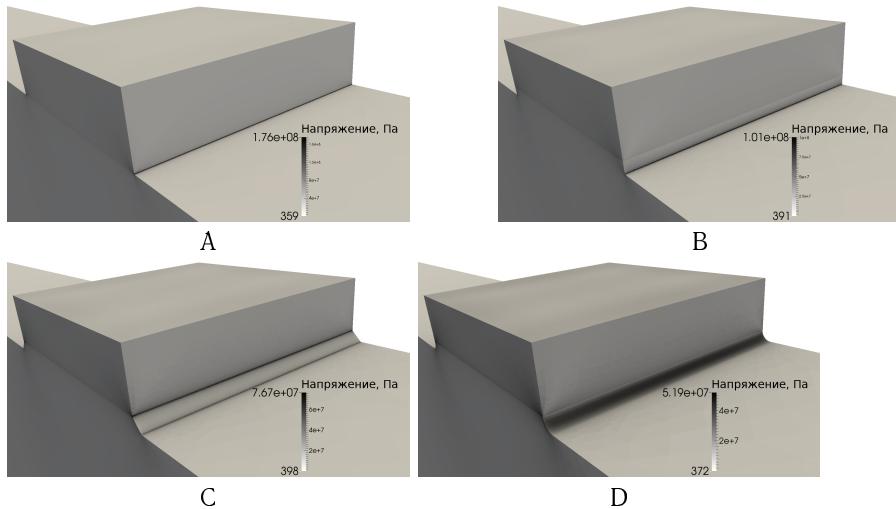


Рисунок 5.5 – Распределение напряжения около стыка для различных вариантов геометрии

ет решение, сходящееся при локальном уменьшении размера ячеек сетки, и, соответственно, такой вариант стыка можно использовать при получении адекватных значений напряжения для рассматриваемой задачи.

Также было проведено исследование сходимости результатов при локальном сгущении сетки в подобласти внутренней арматуры. При этом были получены значения перемещения и напряжения по Мизесу, представленные в табл. 5.3. Из этой таблицы видна сходимость полученных значений перемещения

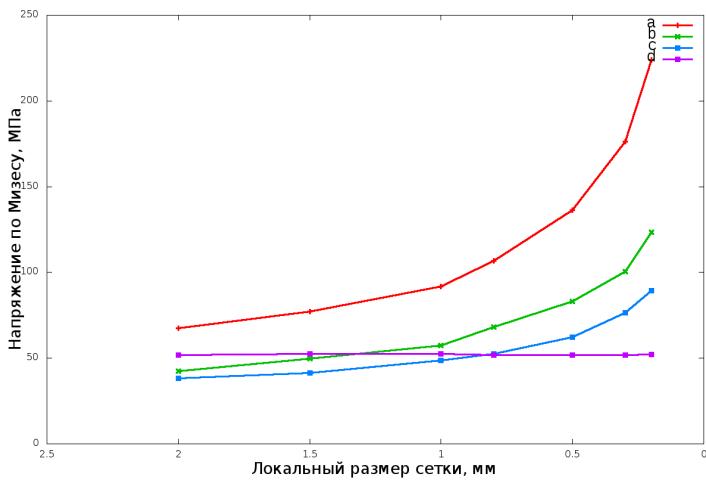


Рисунок 5.6 – Зависимость локального максимального значения от размеры сетки

при сгущении сетки, а также адекватное поведение максимального значения напряжений. Таким образом, был сделан вывод об отсутствии особенностей решения при уменьшении размеров ячеек в арматуре.

Таблица 5.3 – Зависимость решения от локального размера ячеек сетки

Размер, мм	Количество ячеек сетки	Максимальное значение	
		$u_{max}, 10^{-5} \text{м}$	$\sigma_{max}^{Mises}, \text{МПа}$
5	2 035 551	9.461	75.11
3	2 512 003	9.454	75.22
2	3 698 039	9.448	75.06
1.5	7 630 836	9.444	75.00
1	18 473 917	9.441	75.14

## 5.5. Численное усреднение упругих параметров

Помимо армирования бетонных блоков металлическим каркасом улучшение упругих свойств конструкции можно добиться посредством добавления мелких частиц, таких как стальные и полипропиленовые волокна, равномерно по всему объему тела. В общем случае комбинация различных материалов позволяет создавать материалы с низкой стоимостью и высокой устойчивостью

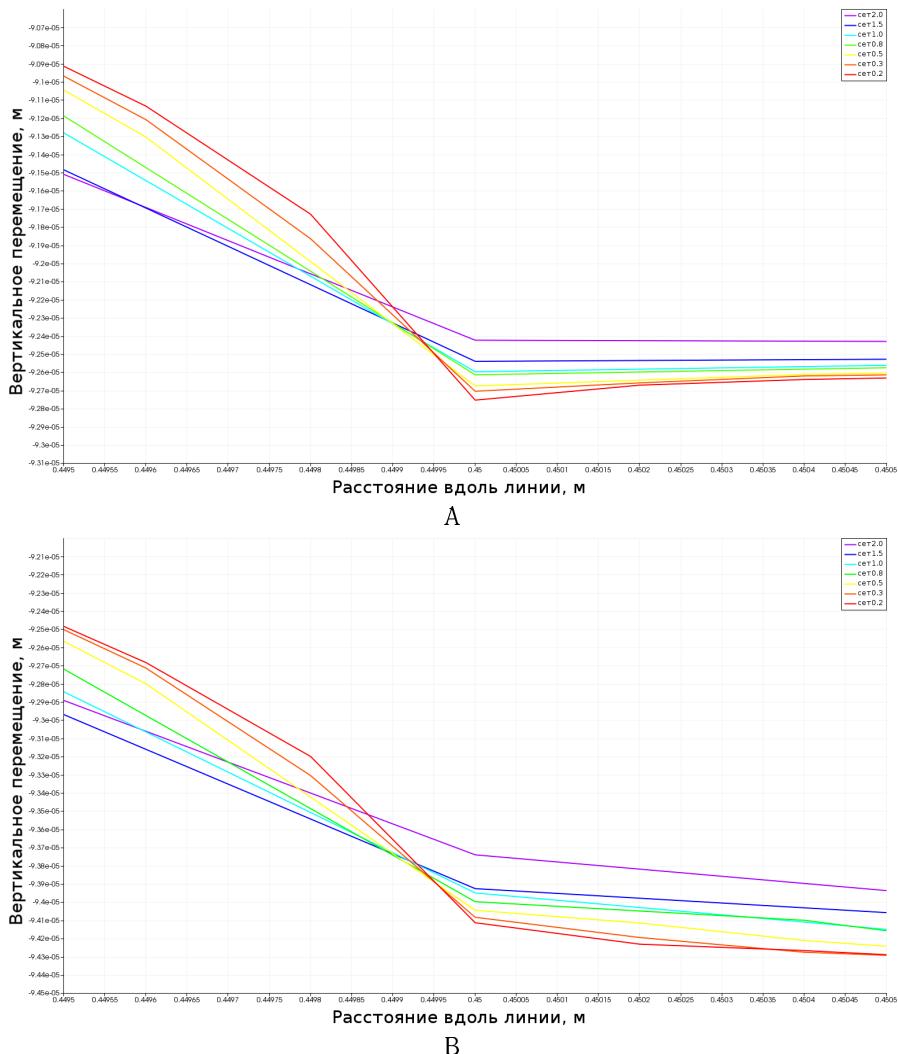


Рисунок 5.7 – Распределения вертикальной составляющей перемещения вдоль горизонтальной линии пересекающей угол стыка для вариантов А и В

как к механическим, так и температурным и химическим воздействиям. Полученные изделия носят название композитных материалов.

При расчете напряженно-деформированного состояния композита возникает необходимость учета измененных свойств материала. При решении задачи с

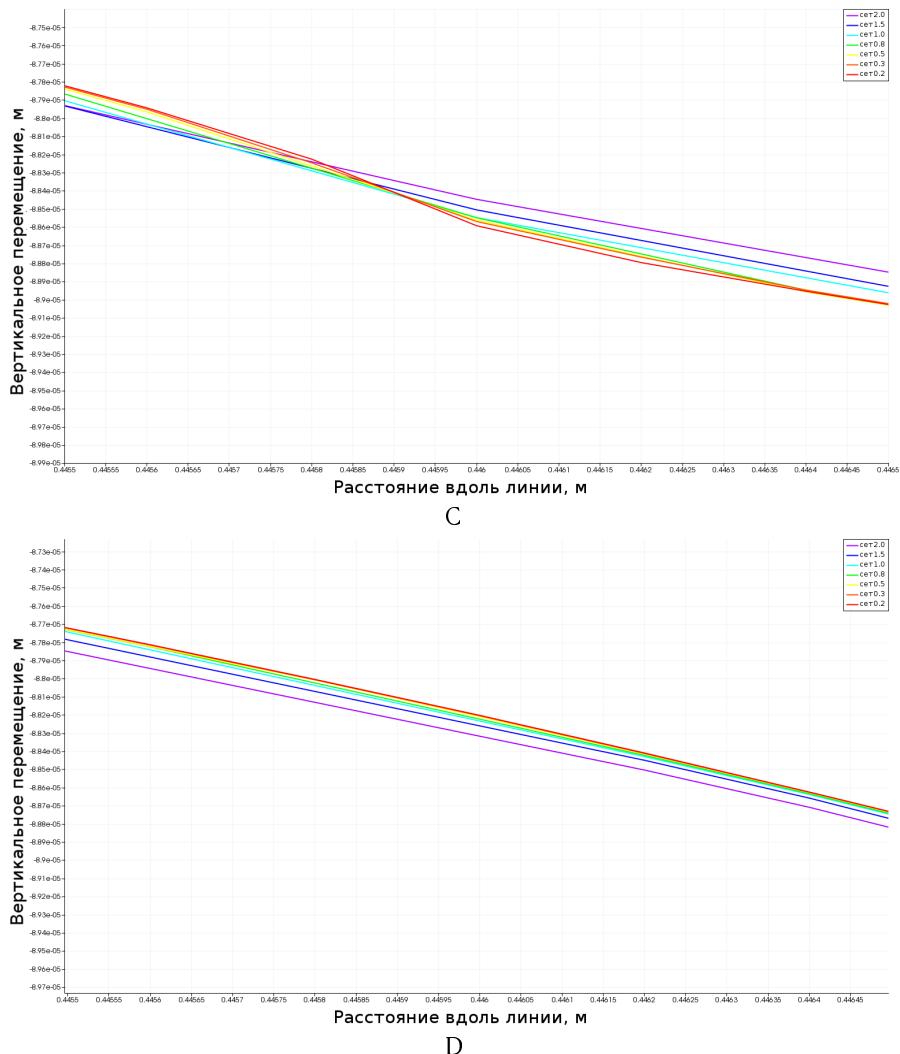


Рисунок 5.8 – Распределения вертикальной составляющей перемещения вдоль горизонтальной линии пересекающей угол стыка для вариантов С и Д

учетом всех включений возрастает вычислительная сложность задачи за счет применения очень подробной сетки. Для некоторого типа подзадач вместо учета всех включений можно обойтись решением задачи на более грубой сетке с использованием эффективных коэффициентов.

Для вычисления эффективных коэффициентов могут быть использованы аналитические или численные методы. Аналитические методы ограничены самыми простыми вариантами геометрий фибр и предназначены для изотропных композитных материалов.

Рассмотрим численное усреднение коэффициентов задачи на отдельном представительном элементе, имеющем аналогичную объемную долю фибр. Полученные эффективные коэффициенты используются для решения полной задачи на грубой сетке. В качестве примера рассмотрим двумерную задачу расчета деформации бетонного блока с включением стальных фибр под действием трехточечного изгиба. Размер блока 2 м на 1 м.

Для генерации геометрии используется алгоритм случайного последовательного заполнения (*random sequential adsorption*) односторонними фибрами с учетом минимального расстояния между ними и периодического заполнения области. Ограничение с минимальным расстоянием между фибрами связано с генерацией адекватной сетки для метода конечных элементов. Фибры генерируются как одинаковые прямоугольники с размером 0.04 м на 0.004 м. Для используемого алгоритма максимальная объемная доля таких фибр приблизительно равна 25%. В качестве примера приведена геометрия области с фибрами на рис. 5.9.

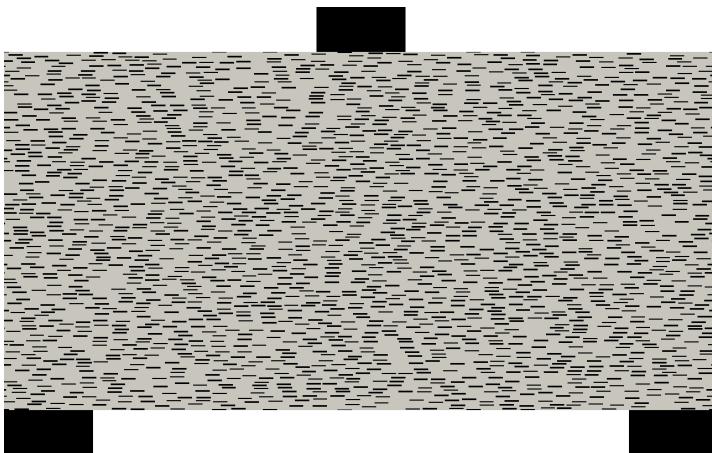


Рисунок 5.9 – Область с фибрами, объемная доля 16%

Для вычисления эффективных коэффициентов используется метод численного усреднения на представительной квадратной области. Основной идеей численного усреднения является нахождение однородной среды эквивалентной исходному композитному материалу. То есть нужно найти, при каких коэффициентах однородной среды она может приблизительно показывать такое же поведение, как и композитный материал. Это означает, что при одинаковых

средних значениях тензора деформации получаем эквивалентные средние значения тензора напряжения.

Используются следующие обозначения для среднего значения функции  $\psi$ :

$$\langle \psi \rangle = \frac{\int_{\omega} \psi d\mathbf{x}}{\int_{\omega} d\mathbf{x}},$$

где  $\omega$  — представительная область. Таким образом, ранее описанное утверждение относительно усредненного коэффициента может быть записано в следующем виде

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{C}^* \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle,$$

где  $\mathbf{C}^*$  — эффективный коэффициент. Для вычисления компонент эффективного коэффициента рассматриваются три задачи со следующими граничными условиями:

1.  $\mathbf{u} = (x_1, 0), \mathbf{x} \in \partial\omega,$
2.  $\mathbf{u} = (0, x_2), \mathbf{x} \in \partial\omega,$
3.  $\mathbf{u} = (0.5x_1, 0.5x_2), \mathbf{x} \in \partial\omega.$

При данных граничных условиях средние значения тензора напряжения определяют соответствующие компоненты эффективного коэффициента

1.  $C_{ij11}^* = \langle \sigma_{ij} \rangle, ij = 11, 22, 12,$
2.  $C_{ij22}^* = \langle \sigma_{ij} \rangle, ij = 11, 22, 12,$
3.  $C_{ij12}^* = \langle \sigma_{ij} \rangle, ij = 11, 22, 12.$

В качестве примера рассматривается бетонный блок с включением одноправленных стальных фибр. Параметры упругости для бетона и стали, а также давление пресса представлены в табл. 5.4.

Таблица 5.4 – Параметры задачи

Символ	Название	Значение	Ед. изм.
$E_1$	модуль Юнга бетона	$4 \cdot 10^{10}$	Па
$\nu_1$	коэффициент Пуассона бетона	0.15	-
$E_2$	модуль Юнга стали	$2 \cdot 10^{11}$	Па
$\nu_2$	коэффициент Пуассона стали	0.3	-
$P$	давление пресса	$10^5$	Па

Погрешность найденного эффективного коэффициента проверяется различий решения однородной задачи на грубой сетке и решения исходной неоднородной задачи на подробной сетке

$$\mathbf{e} = \mathbf{u}_c - \mathbf{u}_f,$$

где  $\mathbf{u}_c$  — решение на грубой сетке,  $\mathbf{u}_f$  — решение на подробной сетке. В

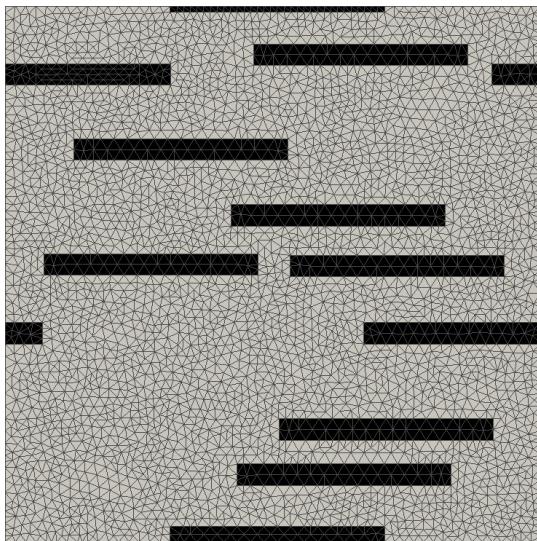


Рисунок 5.10 – Сетка представительной области с размером  $l = 0.1$  и объемной долей фибр  $\varphi = 16\%$

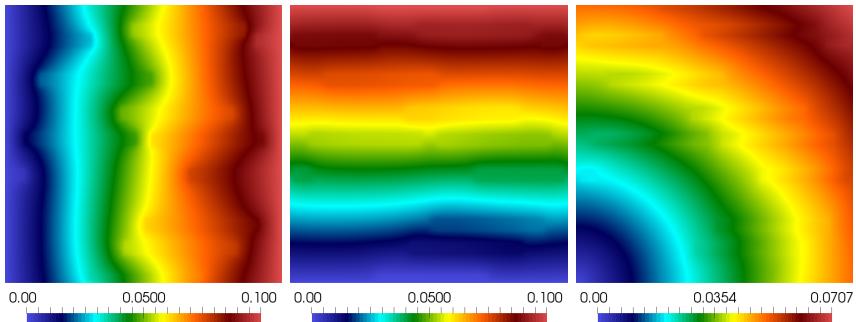


Рисунок 5.11 – Распределения решений задач для определения эффективного коэффициента при  $l = 0.1$  и  $\varphi = 16\%$

качестве величины относительной погрешности возьмем отношение нормы погрешности на норму решения исходной задачи

$$\epsilon = \frac{\|e\|_{L_2}}{\|\mathbf{u}_f\|_{L_2}}.$$

На рис. 5.12-5.13 изображены распределения величины перемещения и модуля тензора деформации исходной мелкой задачи с фибрами. Влияние фибр

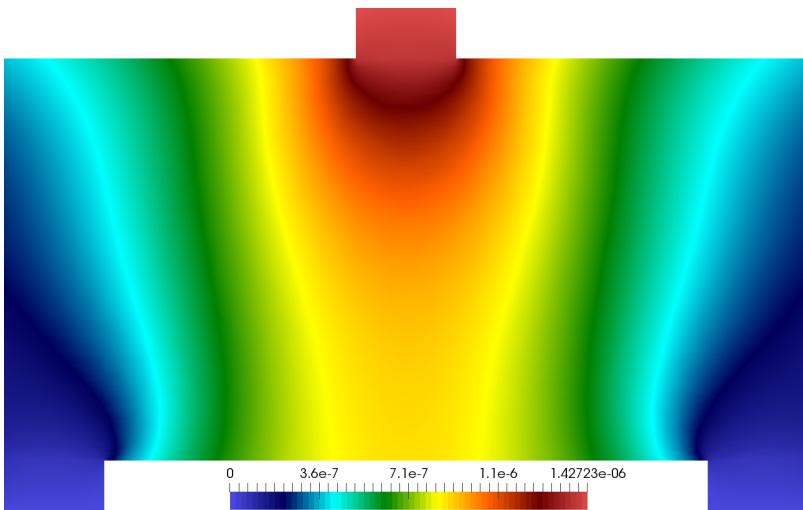


Рисунок 5.12 – Распределение перемещения при  $\varphi = 16\%$

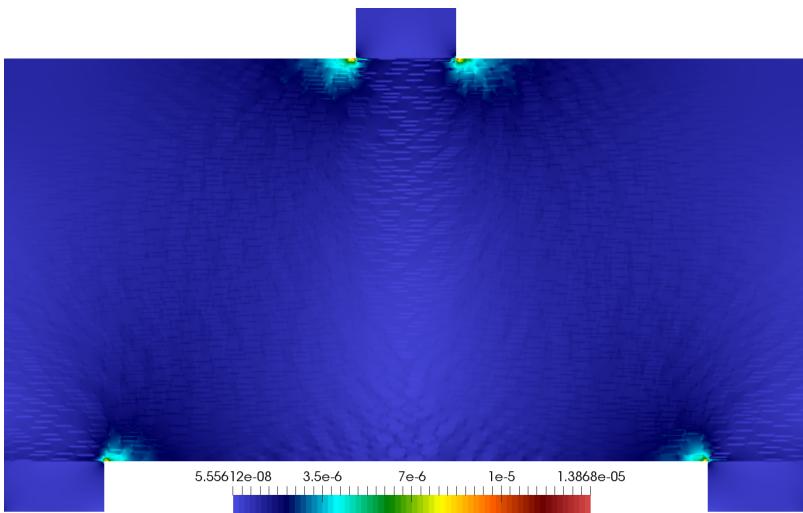
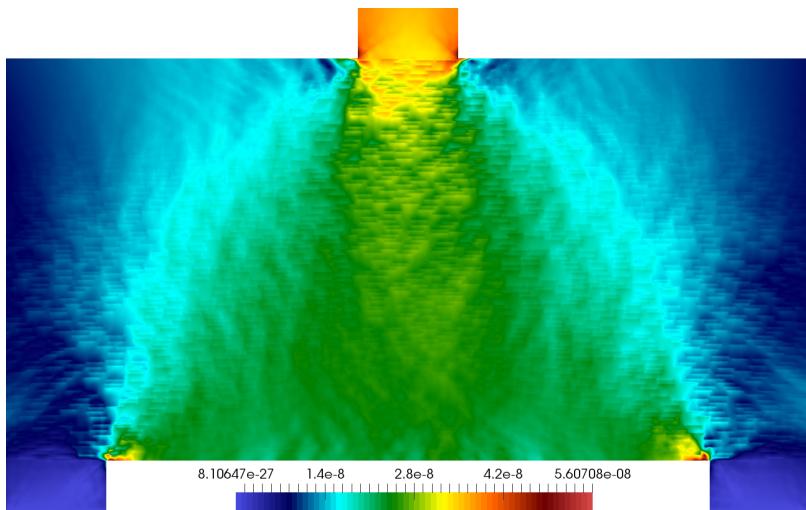


Рисунок 5.13 – Распределение модуля тензора деформации при  $\varphi = 16\%$

визуально не отображается на решении, но на погрешности грубой задачи хорошо замечается отображение фибр (см. рис. 5.14). Основная погрешность при решении задачи с эффективным коэффициентом распределена по всей области,

Рисунок 5.14 – Распределение погрешности при  $\varphi = 16\%$ ,  $l = 0.5$ 

а в областях с большим тензором деформации локализуются максимальные значения погрешности.

Все вычислительные сетки представительных областей и исходной неоднородной задачи имеют приблизительно одинаковые размеры треугольных элементов 0.002 м. Размер треугольного элемента однородной задачи на грубой сетке в 10 раз больше и равна 0.02 м, а количество узлов в среднем в 100 раз меньше. Были рассмотрены 5 различных представительных областей с размерами сторон  $l = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$  м. Объемная доля фибр варьировалась в следующем диапазоне значений  $\varphi = 3.2\%, 6.4\%, 9.6\%, 12.8\%, 16\%, 19.2\%, 22.4\%$ . В табл. 5.5 представлены относительные погрешности для данных значений  $l$  и  $\varphi$ .

Таблица 5.5 – Относительная погрешность  $\epsilon$  при различных объемных долях фибр  $\varphi$  и размерах представительных областей  $l$ 

$l \setminus \varphi$	3.2%	6.4%	9.6%	12.8%	16%	19.2%	22.4%
0.1	0.0219	0.0323	0.0296	0.0324	0.0355	0.0317	0.0290
0.2	0.0233	0.0288	0.0277	0.0271	0.0321	0.0268	0.0227
0.3	0.0229	0.0288	0.0234	0.0253	0.0297	0.0229	0.0193
0.4	0.0228	0.0291	0.0228	0.0239	0.0289	0.0219	0.0176
0.5	0.0223	0.0288	0.0225	0.0229	0.0276	0.0210	0.0170

По результатам проведенных расчетов можно сделать вывод, что относительная погрешность уменьшается при увеличении размера представительной области, но до определенного минимума. Влияние объемной доли фибр на погрешность усредненного решения незначительна. При численном исследовании для рассмотренного диапазона параметров относительная погрешность не превышала 4% и показывала хорошую точность значения эффективного коэффициента.

## 5.6. Напряженно-деформированное состояние железобетонного блока

С целью оценки влияния арматуры в железобетонной конструкции проведен сравнительный анализ упруго-деформированного состояния для бетона с внутренней металлической арматурой и без нее. Анализ был проведен для двух различных наборов параметров, соответствующих бетону СЕМ I 52.5, выполненных при соотношении вода/цемент = 1/4. Параметры упругости из первого набора соответствуют описанию свежего бетона, тогда как второй набор параметров соответствует бетону, подверженному разнородному выщелачиванию. Значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона описанных образцов представлены в табл. 5.6.

Таблица 5.6 – Коэффициенты упругости использованные при решении задачи для различных видов бетона

Материал	Модуль Юнга, $E$ ,	Коэф. Пуассона, $\nu$
Сталь	200	0.30
Бетон СЕМ I 52.5	32.7	0.27
Деградировавший бетон	13.7	0.27

По полученным данным был сделан вывод о том, что использование арматуры усиливает устойчивость конструкции к упругим деформациям. Для сравнения, в табл. 5.7 приведены значения максимальных величин вектора деформации и напряжений по Мизесу в случае реализации решения с арматурой и без нее для нового и деградированного бетона. Отметим, что наличие стального каркаса в новом бетоне уменьшает значения перемещения и напряжения под действием внешних поверхностных сил примерно на 10% и 5%, соответственно. А в случае бетона с ухудшенными характеристиками аналогичный вклад составляет порядка 15% и 7%.

Таблица 5.7 – Максимальные значения перемещения и напряжения для нового и деградированного бетона с внедрением арматуры и без армирования

Материал	Максимальное значение	
	$u_{max}, 10^{-5}$	$\sigma_{max}^{Mizes}$ ,
Бетон СЕМ I 52.5 с арматурой	9.44	75.14
Бетон СЕМ I 52.5 без арматуры	10.32	78.75
Деградировавший бетон с арматурой	20.40	115.51
Деградировавший бетон без арматуры	23.49	121.91

## **Заключение**

- На примере численного решения задачи трехточечного изгиба железобетонного блока приведен алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния неоднородного тела состоящего из различных материалов, имеющих значительные отличия упругих постоянных. Показано положительное влияние локального скругления углов в которых наблюдалась особенность решения.
- При решении двумерной задачи расчета напряженно-деформированного состояния бетона с включением стальных фибр продемонстрирована хорошая точность решения при использовании усредненных упругих параметров, полученных методом гомогенизации.
- По результатам сравнения численного решения по перемещениям и напряжениям для бетона с арматурой и без нее показано положительное влияние внедрения арматуры на бетонную плиту в силу уменьшения максимального значения перемещений и напряжений на плите. При рассмотрении задачи с коэффициентами, соответствующими бетону, подверженному выщелачиванию, влияние наличия арматуры на величину деформаций и напряжений усиливается.

## 6.

---

### Расчет деформации деревянной доски

Рассматривается численное моделирование задачи линейной упругости анизотропного тела. Приводится вычислительный алгоритм решения стационарной задачи линейной упругости анизотропного тела на примере деформации деревянной доски под действием внутренних напряжений, возникающих при распиловке древесины. При помощи приведенного алгоритма выполняется верификация эмпирически выведенного соотношения для расчета внутренних напряжений Даурской лиственницы.

#### 6.1. Постановка задачи

В этой главе рассматриваются особенности математического моделирования расчета напряженно-деформированного состояния анизотропного тела на примере древесины. Рассматриваемая модель является упрощением относительно общей модели анизотропии, так как делается допущение о том, что древесина является ортотропным материалом. Это допущение упрощает математическое моделирование явления анизотропии, при этом сохраняя общее представление относительно сложностей, возникающих при моделировании анизотропии.

Экспорт пиломатериалов хвойных пород требует разработки технологии лесозаготовки для более эффективной добычи древесины. Проблема оптимизации сырья представляет собой максимизацию объема высококачественных пиломатериалов. В этой главе мы рассмотрим упруго-напряженное состояние древесины. Для численного решения мы аппроксимируем нашу систему с использованием метода конечных элементов. В качестве типовой проблемы мы рассматриваем деформации пиломатериалов под действием внутренних напряжений, которые напрямую влияют на качество сырья. Параметры древесины и модель внутренних напряжений соответствуют Даурской лиственнице, которая составляет большую часть экспорта древесины в Якутию. Представлено численное моделирование трехмерной задачи.

Одним из важнейших факторов влияющих на качество пиломатериалов, и соответственно, на их стоимость – является технология раскрова древесины. Схемы раскрова древесины напрямую определяют распределение значения внутреннего напряжения древесины, в последствии и деформации, которые являются одним из аспектов качества пиломатериалов. Таким образом, вы-

бор оптимальной схемы раскroя в зависимости от сорта, радиуса древесины, посредством максимизации ценности итогового сырья является важнейшей задачей. На рис. 6.1 представлены некоторые примеры схем раскroя древесины.

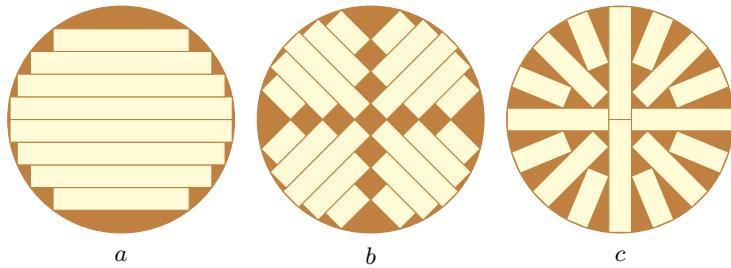


Рисунок 6.1 – Примеры схем раскroя: в развал (a), секторная (b) и сегментная (c)

Для предоставления наиболее робастного метода определения оптимальной схемы раскroя необходимо разработать точную математическую модель, которая может предсказать реальное напряженно-деформированное состояния пиломатериалов. Главной задачей исследования является вычисление максимального значения дугообразного изгиба и изгиба доски в боковом направлении, как вносящих основной вклад в общее значение деформации. Разные типы изгибов доски представлены на рис. 6.2.

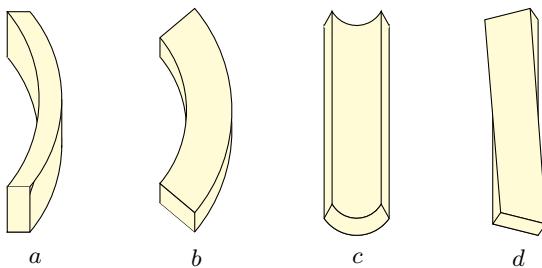


Рисунок 6.2 – Виды изгибов доски: дугообразный изгиб (a), изгиб доски в боковом направлении (b), коробление доски в поперечном направлении (c), кручение (d)

Известно, что для каждого сорта дерева имеется уникальная структура и физические параметры, которые существенно отличаются от сорта к сорту. Таким образом, каждый сорт дерева должен описываться отдельной уникальной математической моделью.

В этой главе мы рассматриваем численное решение задачи с использованием математической модели для лиственницы даурской, которая составляет

большую часть экспорта древесины Якутии. Лиственница даурская относится к хвойным сортам с выраженной ядровой зоной. Ядровая и заболонная части имеют различные физические и механические характеристики. Это определяет вид и распределение внутреннего напряжения во время роста и последующей обработки дерева.

Одной из главных задач исследования является верификация эмпирически выведенного выражения для расчета распределения внутреннего напряжения посредством численного моделирования. Особенности численного алгоритма проиллюстрированы на примере расчетов трехмерной задачи для пиломатериала из даурской лиственницы.

## 6.2. Математическая модель древесины

Рассмотрим математическую модель, описывающую напряженно-деформированное состояние в вычислительной области  $\Omega$ , которая относится к пиломатериалу

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6.1)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  вектор координат. Оси координатной системы задаются таким образом, чтобы каждая ось была параллельна одной стороне доски.

Добавим также соотношение между тензором напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  и тензором деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , которое, в случае дерева, описывается как для ортотропного тела в локально повернутой системе координат  $(r, t, a)$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\sigma_r}{E_r} - \frac{\mu_{tr}\sigma_t}{E_t} - \frac{\mu_{ar}\sigma_a}{E_a}, \\ \varepsilon_t &= -\frac{\mu_{rt}\sigma_r}{E_r} + \frac{\sigma_t}{E_t} - \frac{\mu_{at}\sigma_a}{E_a}, \\ \varepsilon_a &= -\frac{\mu_{ra}\sigma_r}{E_r} - \frac{\mu_{ta}\sigma_t}{E_t} + \frac{\sigma_a}{E_a}, \\ \gamma_{rt} &= \frac{\tau_{rt}}{G_{rt}}, \quad \gamma_{ra} = \frac{\tau_{ra}}{G_{ra}}, \quad \gamma_{ta} = \frac{\tau_{ta}}{G_{ta}}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где  $E_r, E_t, E_a$  - радиальный, тангенциальный и продольный модуль Юнга,  $G_{ij}, \mu_{ij}$  - модули сдвига и коэффициенты Пуассона, соответственно. Таким образом, для ортотропного тела определяется целых 12 упругих постоянных вместо 2 для изотропного.

Для удобства записи системы уравнений (6.2) может быть переписана в обозначениях Фойгта:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$$

где

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

является симметричной матрицей со следующими компонентами

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \mu_{at}\mu_{ta}}{\Delta E_t E_a}, & C_{22} &= \frac{1 - \mu_{ar}\mu_{ra}}{\Delta E_r E_a}, & C_{33} &= \frac{1 - \mu_{rt}\mu_{tr}}{\Delta E_r E_t}, \\ C_{12} &= \frac{\mu_{tr} + \mu_{ar}\mu_{ta}}{\Delta E_t E_a}, & C_{13} &= \frac{\mu_{ar} + \mu_{tr}\mu_{at}}{\Delta E_t E_a}, & C_{23} &= \frac{\mu_{at} + \mu_{rt}\mu_{ar}}{\Delta E_r E_a}, \\ C_{44} &= G_{rt}, & C_{55} &= G_{ra}, & C_{66} &= G_{ta}, \end{aligned}$$

здесь  $\Delta$  – вспомогательный коэффициент, используемый для сокращения записи, который выражается как

$$\Delta = \frac{1 - \mu_{rt}\mu_{tr} - \mu_{ra}\mu_{ar} - \mu_{ta}\mu_{at} - 2\mu_{tr}\mu_{at}\mu_{ra}}{E_r E_t E_a}.$$

Для того, чтобы выполнить вычисления с использованием векторов из декартовой системы координат, нам нужно преобразовать тензор деформации вычисленный из вектора перемещений  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \mathbf{u} + \operatorname{grad}^T \mathbf{u}),$$

используя для каждой точки матрицу перехода, вычисляемый следующим образом

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

здесь  $\cos(\alpha) = \frac{x_1}{r}$  и  $\sin(\alpha) = \frac{x_2}{r}$ .

Этот поворот проиллюстрирован в плоскости, образуемом векторами  $r - t$  на рис. 6.3.

Дополним задачу граничными условиями, отвечающими за поверхностные напряжения и фиксирование по перемещениям. В частности, отметим граничное условие второго рода

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad (6.3)$$

которое определяет распределение внутренних напряжений по всей поверхности пиломатериала. Таким образом, мы имеем дело с чистой задачей Неймана

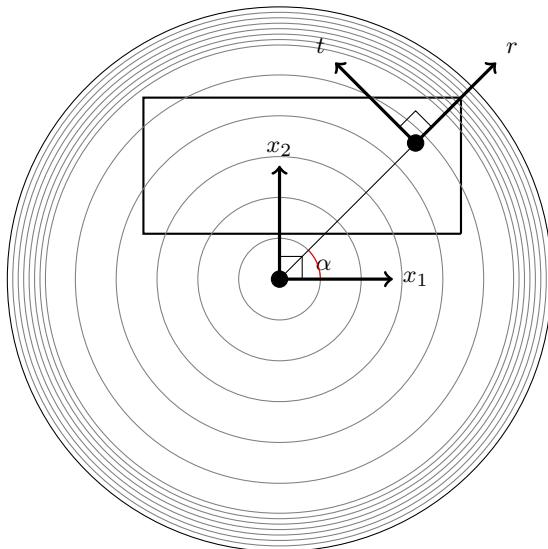


Рисунок 6.3 – Декартова и локальная преобразованная системы координат в плоскости образуемом векторами  $r - t$

(Purge Neumann problem), для решения которого мы задаем следующие граничные условия первого рода на трех точках

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (6.4)$$

которые определяют фиксацию трех определенных точек по 1, 2 и всем осям, соответственно. Такое фиксирование помогает получить единственное решение, убрав случайный сдвиг тела. При этом эти условия не представляют помехи для возникновения любого описанного ранее вида деформации.

### 6.3. Объект исследования

Объектом исследования является деревянная доска из даурской лиственницы с размерами 156мм × 54мм × 5м. Дерево из которого была выпилена доска моделируется в виде конуса. Для даурской лиственницы мы используем параметры представленные в табл. 6.1

Согласно исследованиям В. Н. Глухих, для даурской лиственницы была представлена следующая модель, описывающая распределение внутреннего

напряжения

$$\begin{aligned}\sigma_r(r) &= \sigma_{ta} \ln\left(\frac{r}{R}\right), \\ \sigma_t(r) &= \sigma_{ta} \left(1 + \ln\left(\frac{r}{R}\right)\right), \\ \sigma_a(r) &= \sigma_0 \left(1 - 7\frac{r}{R} - 8\frac{r^{14}}{R^{14}}\right).\end{aligned}$$

Здесь  $\sigma_{ta}, \sigma_0$  - вспомогательные коэффициенты, имеющие определенный порядок, которые еще предстоит выяснить,  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  - радиус определенной точки на поверхности и  $R$  - радиус дерева, который зависит от значения  $x_3$ . При  $x_3 = 0$  мы имеем  $R(0) = R_1$  и  $R(5) = R_2$  на двух концах пиломатериала.

Таблица 6.1 – Приближенные упругие параметры даурской лиственницы

<b>Модуль упругости</b>		
$E_r$ , ГПа	$E_t$ , ГПа	$E_a$ , ГПа
0.7	0.35	11
<b>Модуль сдвига</b>		
$G_{rt}$ , ГПа	$G_{ar}$ , ГПа	$G_{at}$ , ГПа
0.33	1.14	0.71
<b>Коэффициент Пуассона</b>		
$\mu_{tr}$	$\mu_{ar}$	$\mu_{ta}$
0.62	0.56	0.035

Как говорилось ранее, для получения однозначного решения задачи Неймана без случайных смещений, необходимо добавить граничные условия первого рода, которые отвечают за фиксацию трех отдельных точек геометрии по определенным осям. Подобное фиксирование хорошо тем, что обеспечивает единственность решения и не мешает телу деформироваться в трех отдельных осях. Геометрия доски, точки фиксации и оси представлены на рис. 6.4

Точка 1 закреплена по всем трем осям. Точка 2 не может перемещаться по оси  $x_2$ , и точка 3 зафиксирована по осям  $x_1$  и  $x_2$ .

#### 6.4. Численное решение

Для вычислительной реализации описанной математической модели с использованием представленных параметров упругости был использован следующий ufl файл

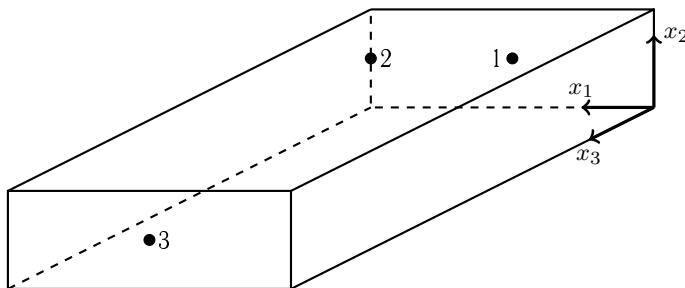


Рисунок 6.4 – Геометрия доски с представленными точками фиксирования

```

literal cell = tetrahedron
literal element = VectorElement("Lagrange", cell, 2)
literal
literal u = TrialFunction(element)
literal v = TestFunction(element)
literal
literal x = cell.x
literal n = cell.n
literal h = Constant(cell)
literal d = Constant(cell)
literal r1 = Constant(cell)
literal r2 = Constant(cell)
literal
literal sigma_ta = Constant(cell)
literal sigma_0 = Constant(cell)
literal
literal # Coefficients
literal E_a = 11e9
literal E_r = 0.7e9
literal E_t = 0.35e9
literal G_ar = 1.14e9
literal G_at = 0.71e9
literal G_rt = 0.33e9
literal mu_tr = 0.62
literal mu_rt = 1.24
literal mu_at = 1.1
literal mu_ta = 0.035
literal mu_ra = 0.036
literal mu_ar = 0.56
literal
literal # Elastic tensor elements
literal D = (1 - mu_tr*mu_rt - mu_at*mu_ta - mu_ra*mu_ar \
literal - 2*mu_tr*mu_ra*mu_at)/(E_a*E_t*E_r)
literal C_11 = (1 - mu_at*mu_ta)/(D*E_a*E_t)
literal C_22 = (1 - mu_ar*mu_ra)/(D*E_a*E_r)
literal C_33 = (1 - mu_tr*mu_rt)/(D*E_r*E_t)
literal C_12 = (mu_tr + mu_ar*mu_ta)/(D*E_a*E_t)
literal C_13 = (mu_ar + mu_tr*mu_at)/(D*E_a*E_t)

```

```

literat C_23 = (mu_at + mu_rt*mu_ar)/(D*E_r*E_a)
literat C_44 = G_rt
literat C_55 = G_ar
literat C_66 = G_at
literat
literat def epsilon(v):
literat     return 0.5*(grad(v) + grad(v).T)
literat
literat def cosx(x):
literat     return ((x[0]-h)/sqrt((x[0]-h)**2+(x[1]+d)**2))
literat
literat def sinx(x):
literat     return ((x[1]+d)/sqrt((x[0]-h)**2+(x[1]+d)**2))
literat
literat def transx(x):
literat     return as_matrix([[cosx(x), -sinx(x), 0],
literat                           [sinx(x),  cosx(x), 0],
literat                           [0,           0,   1]])
literat
literat def eps(u, x, h, d):
literat     return as_vector([(u[0].dx(0)*(x[0]-h)*(x[0]-h) + (u[0].dx(1) \
literat         + u[1].dx(0))*(x[0]-h)*(x[1]+d)\ u[1].dx(1)*(x[1]+d)\ \
literat         *(x[1]+d))/((x[0]-h)*(x[0]-h)+(x[1]+d)*(x[1]+d)) ,
literat         (u[0].dx(0)*(x[1]+d)*(x[1]+d) - (u[0].dx(1) + \
literat         u[1].dx(0))*(x[0]-h)*(x[1]+d) + u[1].dx(1)*(x[0]-h)\ \
literat         *(x[0]-h))/((x[0]-h)*(x[0]-h)+(x[1]+d)*(x[1]+d)) ,
literat         (u[2].dx(2)) ,
literat         (-u[0].dx(0)*(x[0]-h)*(x[1]+d) + (u[0].dx(1) \
literat         + u[1].dx(0))/2*((x[0]-h)*(x[0]-h) - (x[1]+d)*(x[1]+d))\ \
literat         + u[1].dx(1)*(x[0]-h)*(x[1]+d))/((x[0]-h)\ \
literat         *(x[0]-h)+(x[1]+d)*(x[1]+d)) ,
literat         ((u[0].dx(2) + u[2].dx(0))/2*(x[0]-h) + (u[1].dx(2) \
literat         + u[2].dx(1))/2*(x[1]+d))/sqrt((x[0]-h)*(x[0]-h)\ \
literat         +(x[1]+d)*(x[1]+d)) ,
literat         (-(u[0].dx(2) + u[2].dx(0))/2*(x[1]+d) + (u[1].dx(2) \
literat         + u[2].dx(1))/2*(x[0]-h))/sqrt((x[0]-h)*(x[0]-h)\ \
literat         +(x[1]+d)*(x[1]+d)))])
literat
literat def elas(C_11, C_22, C_33, C_12, C_13, C_23, C_44, C_55, C_66):
literat     return as_matrix([[C_11, C_12, C_13, 0, 0, 0],
literat                           [C_12, C_22, C_23, 0, 0, 0],
literat                           [C_13, C_23, C_33, 0, 0, 0],
literat                           [0, 0, 0, C_44, 0, 0],
literat                           [0, 0, 0, 0, C_55, 0],
literat                           [0, 0, 0, 0, 0, C_66]])]
literat
literat def instrx(x, h, d, r1, r2):
literat     return as_matrix([[ -sigma_ta*ln(sqrt((x[0]-h)*(x[0]-h)\ \
literat         + (x[1]+d)*(x[1]+d))/(r1+(r2-r1)/5*x[2])), 0, 0,
literat                           [0, -sigma_ta*(1+ln(sqrt((x[0]-h)*(x[0]-h)\ \
literat         + (x[1]+d)*(x[1]+d))/(r1+(r2-r1)/5*x[2]))), 0,
literat                           [0, 0, sigma_0*(1-8*((x[0]-h)*(x[0]-h)\ \
literat         + (x[1]+d)*(x[1]+d)))*7/((r1+(r2-r1)/5*x[2])*14)\ \
literat         -7*sqrt((x[0]-h)*(x[0]-h) + (x[1]+d)*(x[1]+d))\ \

```

```

literal      /(r1+(r2-r1)/5*x[2])))])
literal
literal def instr(x, h, d, r1, r2):
literal     return transx(x)*instrx(x, h, d, r1, r2)*transx(x).T
literal
literal a = inner(eps(v, x, h, d), dot(elas(C_11, C_22, C_33, C_12,\ 
literal           C_13, C_23, C_44, C_55, C_66), eps(u, x, h, d)))*dx
literal L = inner(v, dot(instr(x, h, d, r1, r2), n))*ds
literal
literal element_s = TensorElement("Discontinuous Lagrange", cell, 0)
literal s = TrialFunction(element_s)
literal w      = TestFunction(element_s)
literal disp   = Coefficient(element)
literal def sigmal(v):
literal     return 2.0*mul1*epsilon(v) +\
literal           lmbda1*tr(epsilon(v))*Identity(v.cell().d)
literal
literal a_s = inner(s, w)*dx
literal L_s = inner(sigmal(disp), w)*dx
literal
literal forms = [a, L, a_s, L_s]

```

Здесь функция `instrx` определяет напряжения роста древесины, которые высвобождаются при распилке. Большую часть кода занимает перевод системы координат с цилиндрической на декартовую.

Заметим, что запись для тензора деформации можно было сократить с использованием матриц перехода. Однако такая реализация требует дополнительных вычислений, что приводит к значительному увеличению времени расчета напряженно-деформированного состояния.

## *Пример решения*

В качестве примера численного решения задачи мы рассмотрим деформацию доски, расположение которой внутри дерева было параллельно оси роста дерева, то есть оси  $a$  и  $x_3$  совпадают. Положение доски внутри дерева в плоскости  $r - t$  показано на рис. 6.5.

Для расчетов мы использовали приближенные по порядку значения  $\sigma_0 = 2$  МПа и  $\sigma_{ta} = 0.1$  МПа. Вычисления были проведены с использованием сетки, представленной на рис. 6.6, размеры ячеек которой являются оптимальными для получения достаточно точных результатов.

При таких значениях было получено распределение перемещения, показанное на рис. 6.7

Как было показано, при расположении доски, показанной на рис. 6.7, мы получили большое значение дугообразного и бокового изгиба. Эти значения согласно ГОСТу 26002-83 относятся к бой категории пиломатериалов и такая древесина не представляет большой ценности, и, вероятно, не будет экспортirоваться. Другие виды деформации, а именно кручение и коробление в поперечном направлении едва заметны.

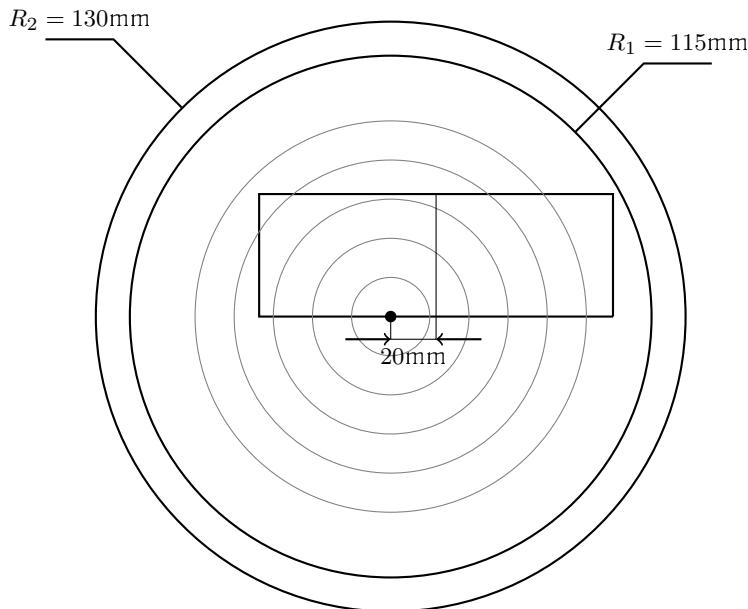


Рисунок 6.5 – Положение доски внутри дерева в плоскости  $r - t$

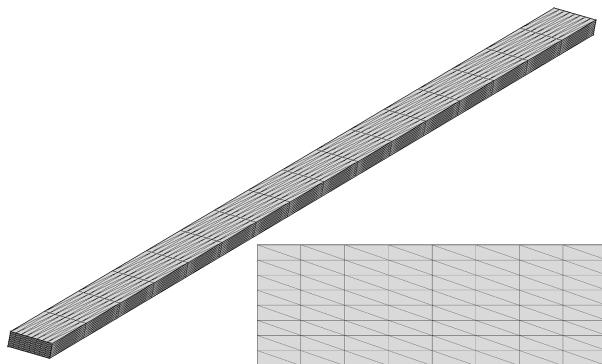


Рисунок 6.6 – Трехмерный и боковой вид вычислительной сетки (1377 вершин, 7560 элементов)

### Заключение

- На примере численного расчета деформаций деревянной доски приведен вычислительный алгоритм задачи линейной упругости анизотропного тела.

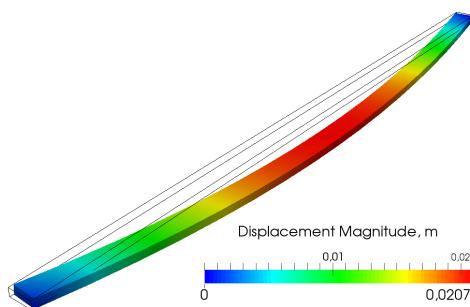


Рисунок 6.7 – Распределение величины вектора перемещения. Фигура деформирована с увеличенным значением перемещения в 10 раз

- В результате верификации эмпирически выведенной формулы для внутренних напряжений при типичных значениях параметров получено адекватное значение дугообразного изгиба.

## 7.

---

### Тепловое расширение керамической подложки

Рассматривается численное моделирование связанный задачи термоупругости. На примере расчета напряженно-деформированного состояния керамической подложки под действием температурного расширения приводится вычислительный алгоритм численного решения задач термоупругости. Проводится исследование влияние размеров и вида технологических отверстий на максимальную величину возникающих напряжений.

При решении прикладных задач расчета напряженно-деформированного состояния сооружений, помимо уравнений упругости, требуется учитывать влияние дополнительных факторов, таких как неравномерное распределение температуры и поровое давление. Соответственно, появляется необходимость в использовании мультифизичных моделей. В условиях строительства в зоне вечной мерзлоты устойчивость здания определяется не только величиной и распределением давления. Также очень важную роль играет фазовое состояние грунта и температурное распределение в целом. Протаивание грунтового основания может привести к серьезным повреждениям элементов конструкции и, в крайних случаях, вызвать разрушение здания.

В целом, при решении задачи термоупругости может оказаться, что влияние температурного расширения не велико, и им можно пренебречь. Но в случае, когда исследователю необходимо получить решение задачи с хорошей точностью, ему нужно будет учитывать и те явления, которые имеют малое влияние на решение задачи. Другими словами, та часть физики, которая должна быть рассмотрена, зависит от желаемых результатов.

Во множестве случаев дополнительные деформации являются следствием термического расширения. Для их исследования используются модели термоупругости. Так же ярким примером мультифизичной задачи упругости являются модели пороупругости, которые применяются в расчете устойчивости нефтяных скважин. В этой главе мы ограничимся моделями термоупругости.

Базовая математическая модель термоупругости включает уравнения теплопроводности и уравнения Ламе в перемещениях. Отметим, что в модели термоупругости уравнения являются связанными. Другими словами, уравнение для перемещений включает объемную силу, которая пропорциональна температурному градиенту, и уравнение теплопроводности включает член, описывающий сжимаемость среды.

В этой главе рассматривается связанный линейная система уравнений для

температуры и перемещений, которые описывают термоупругое напряженно-деформированное состояние тела.

В качестве модельной задачи мы рассматриваем численное решение задачи расчета напряженно-деформированного состояния керамической подложки с металлизацией, которые используются в производстве светодиодных модулей. Также с помощью испытальной модели термоупругости проводится исследование влияния размера, положения и формы технологических дыр на максимальное значение напряжения. По полученным результатам исследования даются рекомендации по оптимальному виду технологических отверстий, которые минимизируют напряжения в подложке, тем самым сокращая вероятность образования трещин.

## 7.1. Постановка задачи

Под действием механического и термического влияния в упругом теле возникают перемещения  $\mathbf{u}$ , деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и напряжения  $\boldsymbol{\sigma}$ . Пусть  $T$  является абсолютной величиной температуры, которая соответствует начальной температуре тела в состоянии равновесия, а  $\theta$  – инкременту температуры. Внешние силы, которые действуют на тело извне считаются за механическое воздействие, когда как под термическим воздействием имеется ввиду теплообмен между телом и окружающей средой, а также поглощение и выделение тепла источниками внутри тела.

Математическая модель термоупругого состояния определяется связанный системой уравнений для перемещения  $\mathbf{u}$  и инкремента температуры  $\theta$  в области  $\Omega$

$$-\operatorname{div}(k \operatorname{grad} \theta) = f. \quad (7.1)$$

$$-\mu\Delta\mathbf{u} - (\lambda + \mu)\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \alpha \operatorname{grad} \theta = 0, \quad (7.2)$$

Здесь  $\mu, \lambda$  - коэффициенты Ламе,  $k$  - коэффициент теплопроводности,  $c$  - объемная теплоемкость,  $\alpha = \alpha_T(3\lambda + 2\mu)$ , где  $\alpha_T$  - коэффициент линейного температурного расширения, а  $\boldsymbol{\varepsilon}$  - тензор деформации:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \mathbf{u} + (\operatorname{grad} \mathbf{u})^T),$$

а  $\boldsymbol{\sigma}$  - тензор напряжений:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon},$$

где  $\mathbf{I}$  обозначает единичный тензор второго ранга.

Также уравнения (7.1), (7.2) дополняются соответствующими граничными условиями первого, второго и третьего рода:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N^u, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D^u, \\ -k \frac{\partial \theta}{\partial n} &= \beta(\theta - \theta_1), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_R^T, \quad \theta = \theta_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D^T, \end{aligned}$$

где  $\partial\Omega = \Gamma_D^u \cup \Gamma_N^u = \Gamma_D^\theta \cup \Gamma_R^\theta$ . Здесь граничные условия для уравнения теплопроводности соответствуют конвективному теплообмену с окружающей средой и фиксированию температуры на границе условиями третьего и первого рода, соответственно.

## 7.2. Вычислительный алгоритм

Для численного решения задачи термоупругости переведем уравнения (7.1), (7.2) к вариационному виду, используя интегрирование по частям и убирая производные второго порядка.

Пусть  $H$  - пространство Соболева для температурного инкремента, построенное на основе гильбертова пространства со следующим скалярным произведением и нормой:

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) dx, \quad \|u\| = (u, u)^{1/2},$$

и  $\mathbf{H} = (L_2(\Omega))^d$  пространство для перемещений, где  $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ .

Далее, допуская, что тестовые функции  $q$  и  $\mathbf{v}$  обращаются в нуль на границах Дирихле  $\Gamma_D^\theta$  и  $\Gamma_D^u$ , соответственно, где решение известно, мы получаем следующую вариационную формулировку: найти  $\theta \in V_\theta$  и  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_u$  такие, что

$$\int_{\Omega} (k \operatorname{grad} \theta, \operatorname{grad} q) dx + \int_{\Omega} f q dx \quad \forall q \in \hat{V}_\theta = 0, \quad (7.3)$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx + \int_{\Omega} \alpha(\operatorname{grad} \theta, \mathbf{v}) dx = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \hat{\mathbf{V}}_u, \quad (7.4)$$

где тестовые пространства  $\hat{V}_\theta$  и  $\hat{\mathbf{V}}_u$  определяются как

$$\hat{V}_\theta = \{q \in H^1(\Omega) : q(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D^\theta\},$$

$$\hat{\mathbf{V}}_u = \{\mathbf{v} \in H^d(\Omega) : \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D^u\},$$

а пробные пространства  $V_\theta$  и  $\mathbf{V}_u$  смешены от тестовых пространств на величину граничного условия первого рода на соответствующих границах:

$$V_\theta = \{q \in H^1(\Omega) : q(\mathbf{x}) = \theta_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D^\theta\},$$

$$\mathbf{V}_u = \{\mathbf{v} \in H^d(\Omega) : \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D^u\}.$$

Далее определим, билинейную и линейные формы:

$$b(\theta, q) = \int_{\Omega} (k \operatorname{grad} \theta, \operatorname{grad} q) dx, \quad l(q) = (f, q) = \int_{\Omega} f q dx,$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx, \quad g(\theta, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \alpha(\operatorname{grad} \theta, \mathbf{v}) dx.$$

После чего задача переформулируется в виде: найти  $\theta \in V_\theta$  и  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_u$ , которые соответствуют следующим соотношениям

$$b(\theta, q) + l(q) = 0 \quad \forall q \in \hat{V}_\theta, \quad (7.5)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + g(\theta, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \hat{\mathbf{V}}_u. \quad (7.6)$$

Отметим, что отдельные части задачи решаются последовательно. Во-первых, мы вычисляем распределение температурного поля из (7.5). Затем, используя найденное распределение температуры, мы разрешаем уравнение для перемещений (7.6). Такая линеаризация позволяет достаточно легко получить решение задачи с приемлемой точностью.

### 7.3. Объект исследования

Объектом исследования являются керамические подложки с металлизацией, которые используются в производстве светодиодных модулей. В процессе создания керамические подложки подвергаются значительному нагреву, вследствие чего возникают существенные напряжения, достаточные для образования трещин около технологических отверстий.

Следовательно, для улучшения процесса создания керамических подложек необходимо провести серию испытаний с изменением геометрии или параметров задачи, чтобы в итоге добиться минимизация упругих напряжений. Испытания, естественно, получаются менее затратными при использовании численных методов.

Подложка имеет длину равную 130 мм, ширину - 72 и толщину 0.635 мм и 0.03 мм керамической и металлической слоев, соответственно. С двух сторон подложка имеет технологические отверстия диаметра 1 и 1.5 мм. Также с керамической части имеются насечки в виде прямоугольной сетки глубиной в 0.2 мм и шириной 0.1 мм. Полная геометрия объекта исследования представлена на рис. 7.1.

Для верификации модели расчета температурного распределения мы используем экспериментальные данные распределения температуры взятые на нескольких точках, лежащих вдоль срединной линии подложки. Границные условия нагрева и охлаждения подложки моделируются граничными условиями третьего рода, которые соответствуют конвекции с окружающим воздухом и металлическими рельсами, на которых лежит подложка. В этом случае тепловой поток моделируется в виде конвекционного теплообмена с сильно нагретым воздухом. Эти граничные условия описываются следующими уравнениями:

$$k \frac{\partial \theta}{\partial n} = \beta_i (\theta - \theta_i), \quad x \in \Gamma_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (7.7)$$

где  $k$  - коэффициент теплопроводности,  $\beta_i$  - коэффициент теплообмена с воздухом при  $i = 1, 4$  и металлом при  $i = 2, 3$ ,  $\theta_i$  - разница температур между  $i$ -й границей и начальной температурой подложки. Соответствующие границы

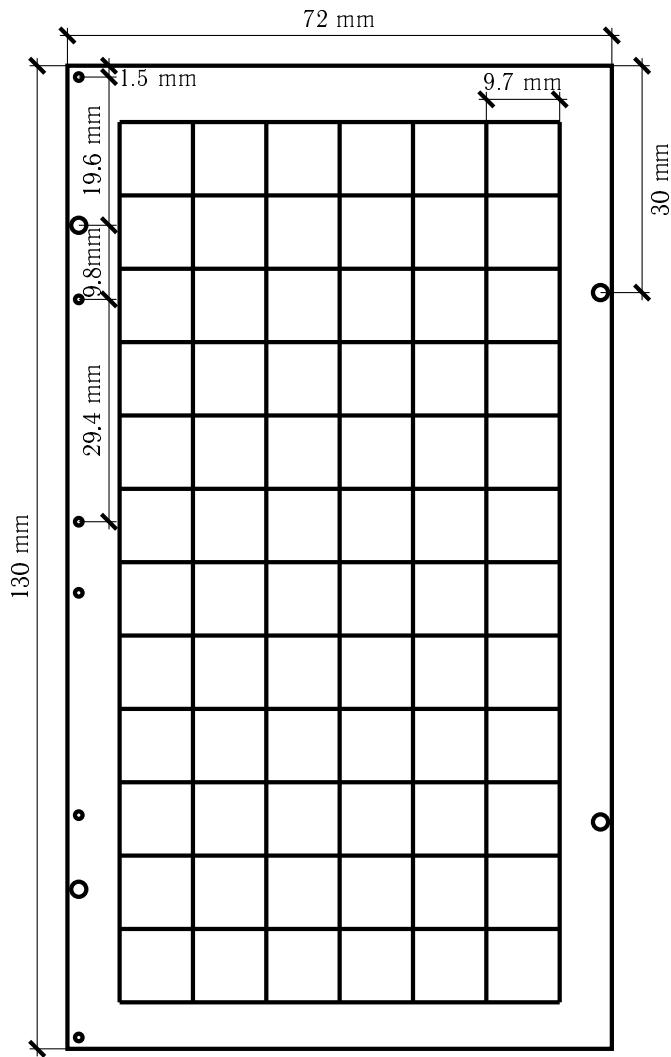


Рисунок 7.1 – Геометрия керамической подложки

теплового потока  $\Gamma_1$ , контакта с рельсами  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  и конвекции с воздухом  $\Gamma_4$ , также области, отвечающие за слои керамики  $\Omega_1$  и металла  $\Omega_2$ , представлены на рис. 7.2.

При решении задачи были использованы следующие значения параметров:  $k = 20 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$  для керамики и  $k = 400 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$  для металлизации,

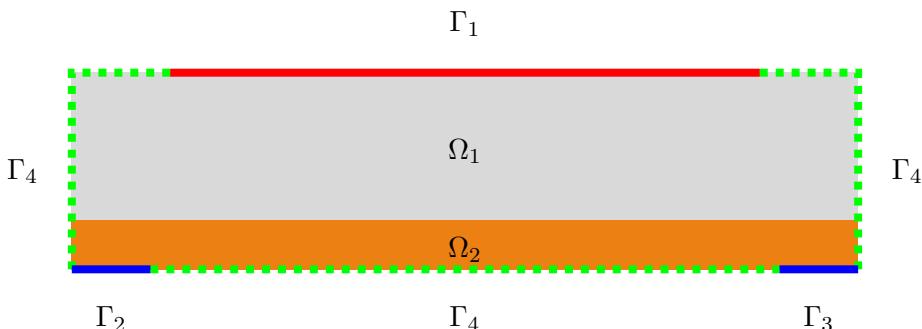


Рисунок 7.2 – Границы и подобласти керамической подложки в разрезе

$\beta_{1,4} = 5 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ,  $\beta_{2,3} = 400 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ,  $\theta_1 = 270 \text{ С}^0$ ,  $\theta_2 = 90 \text{ С}^0$ ,  $\theta_3 = 75 \text{ С}^0$  б  $\theta_4 = 95 \text{ С}^0$ . При использовании этих параметров было получено хорошее соответствие экспериментального и численного значения распределения температуры вдоль срединной линии подложки. На рис. 7.3 представлено сравнение экспериментального и численного распределение температуры вдоль срединной линии.

При численном моделировании здесь были использованы конечные элементы Лагранжа первого порядка для температуры и перемещений. Для решения возникающей СЛАУ использовался прямой метод.

Для численного моделирования задачи термоупругости керамической подложки использовались три сетки, содержащие около 250 000, 450 000 и 1 000 000 тетраэдрических ячеек.

Эти сетки были созданы с использованием программы для построения вычислительных сеток Netgen. В качестве примера, на рис. 7.4 приводится самая подробная вычислительная сетка. Результат численного расчета распределения температуры и напряжения по Мизесу представлены на рис. 7.5 и 7.6, соответственно.

Для решения описанной задачи термоупругости был использован следующий ufl-файл

```

Iterate
literal
literal cell = tetrahedron
literal PT = FiniteElement("CG", cell, 1)
literal PU = VectorElement("CG", cell, 2)
literal PS = TensorElement("CG", cell, 1)
literal
literal # Cuprum
literal muCu = Constant(cell)
literal lmbdaCu = Constant(cell)
literal kCu = Constant(cell)

```

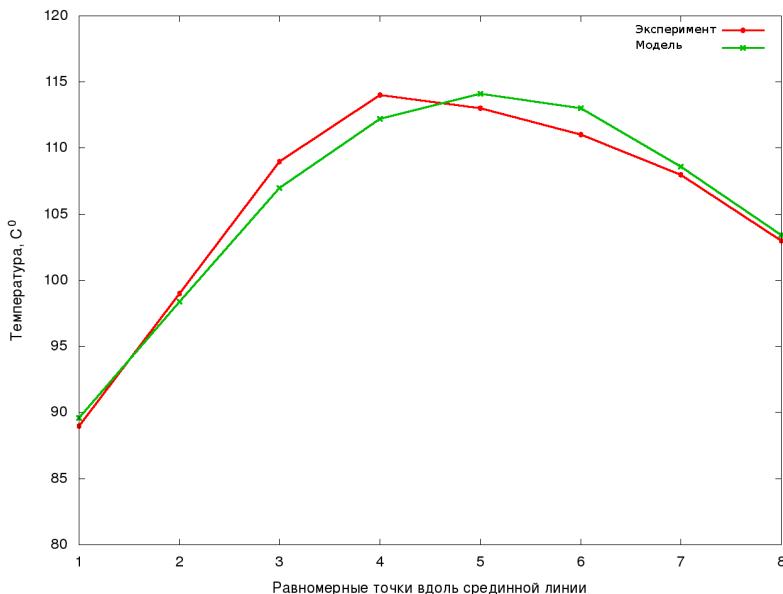


Рисунок 7.3 – Распределение температуры вдоль срединной линии  
(эксперимент, модель)

```

literal betaCu = Constant(cell)
literal
literal # Ceramic
literal muCe    = Constant(cell)
literal lmbdaCe = Constant(cell)
literal kCe     = Constant(cell)
literal betaCe  = Constant(cell)
literal
literal # BC for T
literal alphaAir = Constant(cell)
literal alphaMe  = Constant(cell)
literal Tin      = Constant(cell)
literal TAir     = Constant(cell)
literal THot     = Constant(cell)
literal TMe1     = Constant(cell)
literal TMe2     = Constant(cell)
literal
literal def epsilon(v):
literal   return 0.5*(grad(v) + grad(v).T)
literal
literal def sigma(v, mu, lmbda, T, beta):
literal   return 2.0*mu*epsilon(v)\ 
literal   + lmbda*tr(epsilon(v))*Identity(v.cell().d)\
```

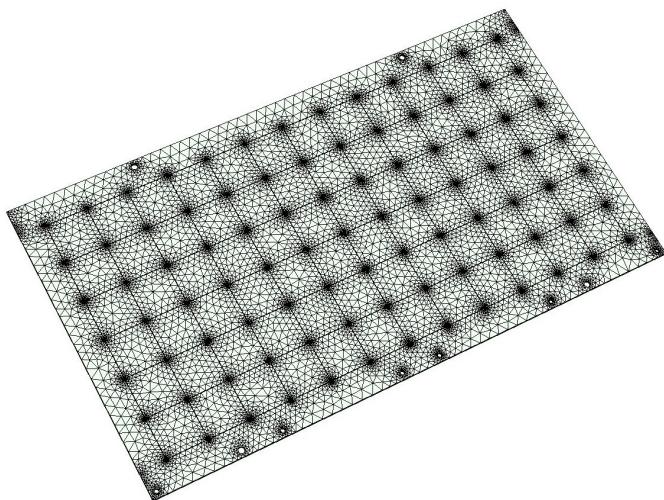


Рисунок 7.4 – Вычислительная сетка для керамической подложки

```

literal      - (lmbda + 2*mu/3) * beta*T*Identity(v.cell().d)

literal # TEMPERATURE
literal T = TrialFunction(PT)
literal q = TestFunction(PT)
literal
literal F_T = inner(kCe*grad(T), grad(q))*dx(1) \
literal + inner(kCu*grad(T), grad(q))*dx(2) \
literal + alphaAir*(T-THot)*q*ds(1) \
literal + alphaMe*(T-TMe1)*q*ds(2) \
literal + alphaMe*(T-TMe2)*q*ds(5) \
literal + alphaAir*(T-TAir)*q*ds(3) \
literal + alphaMe*(T-TMe1)*q*ds(4)
literal
literal
literal # DISPLACEMENT
literal u = TrialFunction(PU)
literal v = TestFunction(PU)
literal
literal Temp = Coefficient(PT)
literal
literal F_u = inner(sigma(u, muCe, lmbdaCe, Temp, betaCe), \
literal epsilon(v))*dx(1) \
literal + inner(sigma(u, muCu, lmbdaCu, Temp, betaCu), \
literal epsilon(v))*dx(2)
literal

```

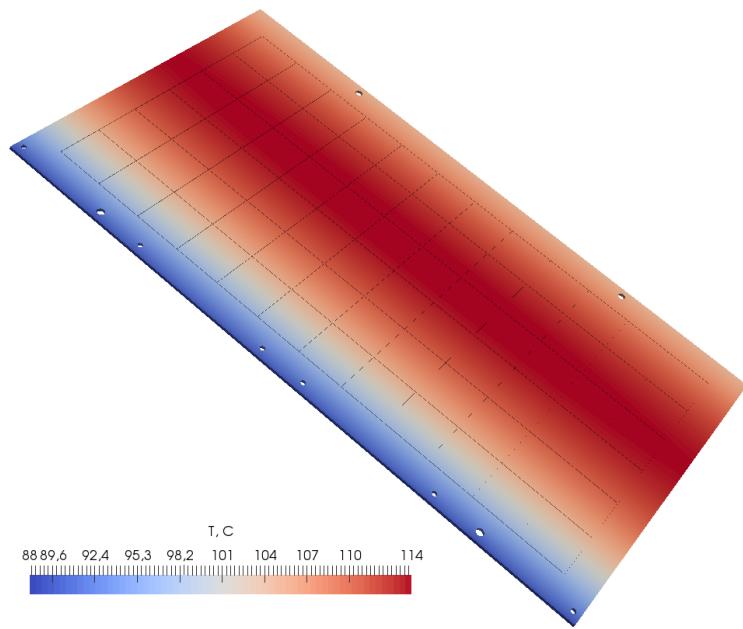


Рисунок 7.5 – Распределение поля температур для керамической подложки

```

literal # STRESS
literal stress = TrialFunction(PS)
literal w      = TestFunction(PS)
literal
literal disp_s = Coefficient(PU)
literal Temp_s = Coefficient(PT)
literal
literal F_s = inner(stress, w)*dx(1) + inner(stress, w)*dx(2) \
- inner(sigma(disp_s, muCe, lmbdaCe, Temp_s, betaCe), w)*dx(1) \
- inner(sigma(disp_s, muCu, lmbdaCu, Temp_s, betaCu), w)*dx(2)
literal
literal a_T = lhs(F_T)
literal L_T = rhs(F_T)
literal a_u = lhs(F_u)
literal L_u = rhs(F_u)
literal a_s = lhs(F_s)
literal L_s = rhs(F_s)
literal forms = [a_T, L_T, a_u, L_u, a_s, L_s]
literal

```

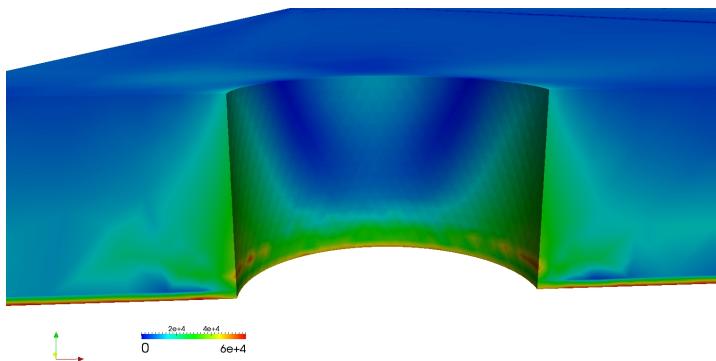


Рисунок 7.6 – Распределение напряжения по Мизесу около технологических отверстий

#### 7.4. Численное исследование вида технологических отверстий

На основе представленного вычислительного алгоритма были проведены параметрические исследования технологических отверстий с целью минимизации возникающих напряжений. При этом варьировались:

- расстояния технологических отверстий от края подложки;
- диаметра технологических отверстий;
- формы технологических отверстий (круг, овал).

Результаты в виде максимальной величины напряжения по Мизесу приводятся для всех отверстий, при нумерации представленной на рис. 7.7.

При изменении расстояния выделена следующая тенденция – чем ближе отверстие к краю подложки, тем больше напряжения и соответственно, наоборот, чем отверстие дальше от края, тем меньше напряжения. Следовательно, при минимизации возникающих напряжений необходимо сместить технологические отверстия в сторону середины подложки.

Зависимость напряжения от расстояния от края подложки для всех отверстий и максимальное значение на керамике представлена в табл. 7.1. Также для наглядности на рис. 7.8 приведены распределения напряжения около отверстия №4.

При вариации диаметра отверстий было установлено, что чем больше диаметр отверстия, тем больше максимальные напряжения по Мизесу, что показано в табл. 7.2. Распределение напряжения по Мизесу для отверстия №4 представлена на рис. 7.9.

И наконец, были исследованы различные формы технологических отверстий при различном соотношении больших и малых полуосей эллипса, отвечающих за форму технологического отверстия. Отмечено, что при вытягивании поперек подложки максимальное значение напряжения по Мизесу увеличива-

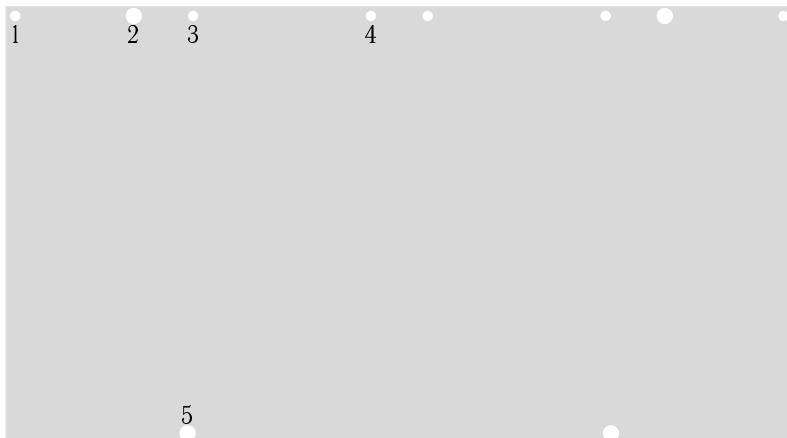


Рисунок 7.7 – Нумерация отверстий керамической подложки

Таблица 7.1 – Зависимость напряжения по Мизесу от расстояния от края подложки для всех отверстий и максимальное значение на керамике

Расстояние, мм	Номер отверстия					Максимум
	1	2	3	4	5	
1.0	32.2	47.2	44.3	52.9	59.5	59.5
1.5	32.8	43.9	44.8	51.6	54.8	54.8
2.0	32.7	40.2	44.8	49.0	47.5	49.0

ется, а при вытягивании вдоль подложки – уменьшается. Распределения напряжения по Мизесу для разных форм технологических отверстий представлены на рис. 7.10 – 7.11.

Зависимость напряжения от соотношения малой и большой полуосей эллипсов для всех отверстий и максимальное значение на керамике представлены в табл. 7.3.

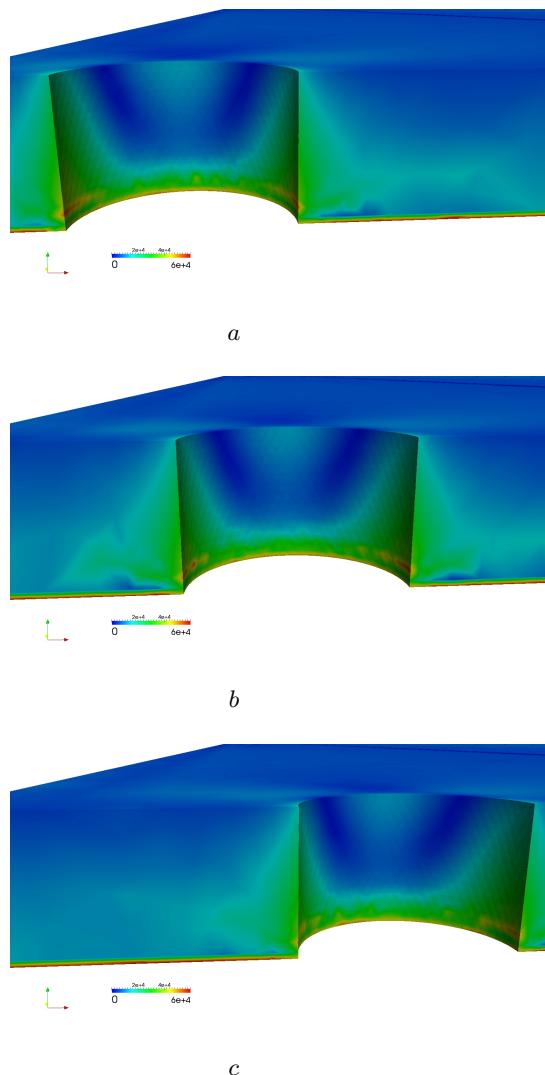


Рисунок 7.8 – Распределение напряжения по Мизесу в области отверстия №4 при расстоянии от края 1.0 мм (*a*), 1.5 мм (*b*) и 2.0 мм (*c*)

Таблица 7.2 – Зависимость напряжения по Мизесу от диаметра для всех отверстий и максимальное значение на керамике

Диаметр, мм	Номер отверстия					Максимум
	1	2	3	4	5	
1.00	30.8	39.2	47.9	47.8	44.4	47.9
1.25	31.5	38.4	44.6	51.6	53.0	53,0
1.50	32.5	39.7	45.3	56.0	52.2	56.0
1.75	37.6	41.3	47.2	57.6	48.2	57.6

Таблица 7.3 – Зависимость напряжения по Мизесу от соотношения малой и большой полуосей эллипсов для всех отверстий и максимальное значение на керамике

Соотношение $r_x/r_y$	Номер отверстия					Максимум
	1	2	3	4	5	
3/2	33.3	54.4	48.6	63.1	62.9	63.1
5/4	38.6	44.6	43.0	51.7	60.5	60,5
1/1	32.9	43.9	45.5	51.6	54.8	54.8
4/5	32.5	41.2	44.9	50.0	51.0	51.0
2/3	33.9	39.5	42.6	43.4	46.8	46.8

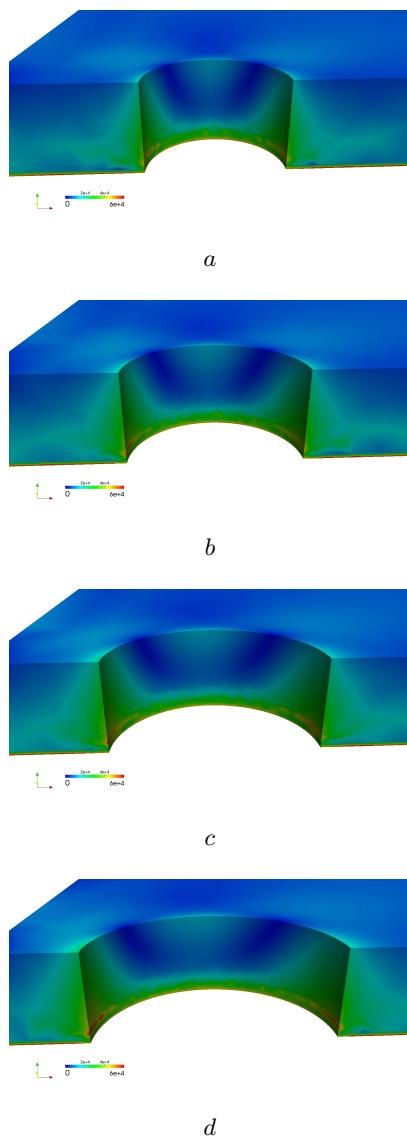


Рисунок 7.9 – Распределение напряжения по Мизесу в области отверстия №4 при диаметре 1.0 мм (*a*), 1.25 мм (*b*), 1.5 мм (*c*), 1.75 мм (*d*)

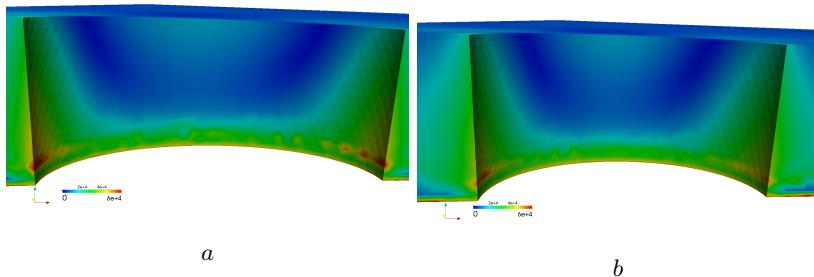


Рисунок 7.10 – Распределение напряжения по Мизесу в области отверстия №4 при  $r_x = 1.50$  мм (*a*),  $1.25$  мм (*b*) и  $r_y = 1.00$  мм

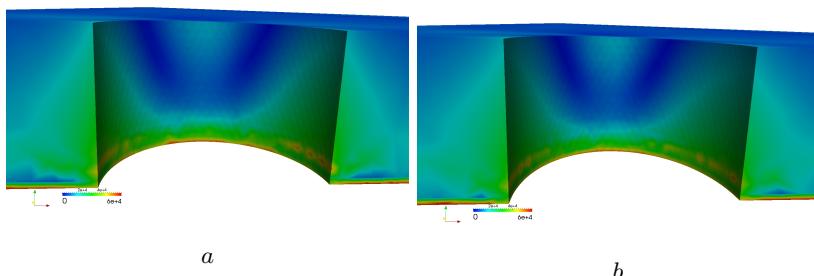


Рисунок 7.11 – Распределение напряжения по Мизесу в области отверстия №4 при  $r_y = 1.25$  мм (*a*),  $1.50$  мм (*b*) и  $r_x = 1.00$  мм

### **Заключение**

- Для расчета напряженно-деформированного состояния керамической подложки с металлизацией под действием теплового потока разработан вычислительный алгоритм задачи термоупругости.
- По результатам параметрического исследования даны следующие рекомендации по изменению геометрии и расположению технологических отверстий с целью уменьшения напряжения по Мизесу и вытекающему из этого увеличения прочности изделия:
  - увеличить расстояния технологических отверстий от края подложки;
  - уменьшить диаметры технологических отверстий;
  - сделать отверстия эллиптической формы с большой полуосью, лежащей вдоль длинной стороны подложки.

---

## Список литературы

- [1] *Barber, J. R.*. Elasticity / J. R. Barber. — Springer, 1992.
- [2] *Borja, R. I.* Plasticity: modeling & computation / R. I. Borja. — Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] *Brezzi, F.* Mixed and hybrid finite element methods / F. Brezzi, M. Fortin. — Springer Science & Business Media, 2012.
- [4] *Cheng, A. H. -D.* Poroelasticity / A. H. -D. Cheng. — Springer, 2016.
- [5] *de Souza Neto, E. A.* Computational methods for plasticity: theory and applications / E. A. de Souza Neto, D. Peric, D. R. J. Owen. — John Wiley & Sons, 2011.
- [6] *Ding, H.* Elasticity of transversely isotropic materials / H. Ding, W. Chen, L. Zhang. — Springer Science & Business Media, 2006.
- [7] *Logg, A.* Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method: The FEniCS Book / A. Logg, K.A. Mardal, G. Wells. — Springer, 2012.
- [8] *Nowacki, W.* Dynamic problems of thermoelasticity / W. Nowacki. — Springer Science & Business Media, 1975.
- [9] *Simo, J. C.* Computational inelasticity / J. C. Simo, T. J. R. Hughes. — Springer Science & Business Media, 2006.
- [10] *Smith, I.M.* Programming the Finite Element Method / I.M. Smith, D.V. Griffiths, L. Margetts. — Wiley, 2013.
- [11] *Strang, G.* Introduction to applied mathematics / G. Strang. — Wellesley-Cambridge Press Wellesley, MA, 1986.
- [12] *Voigt, W.* Lehrbuch der kristallphysik (mit ausschluss der kristalloptik) / W. Voigt. — Springer-Verlag, 2014.
- [13] *Wang, H. F.* Theory of linear poroelasticity / H. F. Wang. — Princeton University Press Princeton, 2000.
- [14] *Zienkiewicz O. C.* The finite element method / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, O. C. Zienkiewicz et al.. — McGraw-hill London, 1977.
- [15] *Амензаде, Ю. А.* Теория упругости / Ю. А. Амензаде. — Москва: Высшая школа, 1976.
- [16] *Ашкенази, Е. К.* Анизотропия конструкционных материалов / Е. К. Ашкенази, Э. В. Ганов. — Ленинград: Машиностроение, 1980.
- [17] *Вабищевич, П. Н.* Численное моделирование / П. Н. Вабищевич. — Москва: Издательство Московского книверситета, 1993.
- [18] *Ильин, В. П.* Методы и технологии конечных элементов / В. П. Ильин. — ИВМиМГ СО РАН, 2007.
- [19] *Карслоу, Г..* Теплопроводность твердых тел:пер. с англ. / Г. Карслоу, Д. Егер. — Наука, 1964.
- [20] *Ландау, Л. Д..* Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — Наука, 1965.
- [21] *Лехницкий, С. Г..* Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. — Наука, 1977.
- [22] *Лурье, А. И..* Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. — Наука, 1980.

- [23] *Марчук, Г. И.. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук.* — Наука, 1980.
- [24] *Работнов, Ю. Н.. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов.* — Наука, 1988.
- [25] *Самарский, А. А.. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич.* — Либроком, 2009.
- [26] *Самарский, А. А. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов.* — Москва: Физматлит, 2005.
- [27] *Седов, Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов.* — Наука, 1970.
- [28] *Страуструп, Бъерн. Язык программирования C++ / Бъерн Страуструп.* — Москва: Бином, 2011.
- [29] *Хан, Х.. Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения / Х. Хан.* — Мир, 1988.

**Учебное издание**

**Сивцев** Петр Васильевич

**AniFEM++, конечно-элементное расширение платформы  
INMOST  
и его приложения**

Учебное пособие

Компьютерная верстка *П.В. Сивцев*

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать – .23 Формат 60x84/16.

Печать цифровая. Печ.л. 10.25. Уч.-изд. л. 10.5. Тираж 50 экз. Заказ № 170

---

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии