Міністерство освіти та науки України

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Звіт

до лабораторної роботи №3:

«Розв’язування одновимірного рівняння теплопровідності»

студентки 4-го курсу

факультету комп’ютерних наук

та кібернетики

групи ОМ-4

Рабійчук Тетяни

м. Київ

Постановка задачі

Варіант 8

Довгий мідний вал діаметром 12 см., що мав початкову температуру 20° було поміщено у піч з температурою 820°. Визначити температуру на поверхні стрержня, коли температура в центрі вала сягне 800°. Визначити час нагрівання. Фізичні характеристики такі:

$$\rho = 8900\frac{кг}{м^3}, c = 380\frac{Дж}{кг\cdot K}, \gamma = 365\frac{Вт}{м^2\cdot K}, \lambda = 398\frac{Вт}{м\cdot K} \tag{1}$$

Теоретична частина

В області $\bar{\Omega} = \{a \le x \le b, 0 \le t \le T\}$ знайти розв'язок одновимірного нестаціонарного рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x,t)u + f(x,t), u = u(x,t), x \in (a,b), t > 0 \tag{2}$$

з початковою умовою:

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{3}$$

та крайовими умовами:

$$\alpha_1 k(a,t)\frac{\partial u(a,t)}{\partial x} = \beta_1 u(a,t) - \mu_1(t) \tag{4}$$

$$-\alpha_2 k(b,t)\frac{\partial u(b,t)}{\partial x} = \beta_2 u(b,t) - \mu_2(t) \tag{5}$$

де $k(x,t), q(x,t), f(x,t), u_0(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$ - задані функції; $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ - задані невід'ємні сталі. І мають місце нерівності:

$0 < k_0 \le k(x,t) \le k_1; q(x,t) \ge 0; \alpha_k^2 + \beta_k^2 \ne 0, k = 1, 2$

m = 0 – декартова система координат;

m = 1 – циліндрична система координат;

m = 2 – сферична система координат.

Розглянемо різницеві методи розв’язання задачі (2)-(5). Введемо сітку:

$$
\begin{gathered}
\omega_{h,\tau}=\omega_h\times\omega_\tau \\
\omega_h=\left\{x_i=a+ih,\, h=\frac{b-a}{N},\, i=0,1,\ldots,N\right\} \\
\omega_\tau=\left\{t_j=j\tau,\, \tau=\frac{T}{M},\, j=0,1,\ldots,M\right\} \\
y_{ij}=y(x_i,t_j)=y_i^j
\end{gathered}
\tag{6}
$$

За допомогою інтегро-інтерполяційного методу апроксимуємо задачу (2) - (5) з ваговими коефіцієнтами:

$$\widetilde{x_i^m}\, y_{t,i}^j=\sigma\left(\widetilde{p}\, y_x^{j+1}\right)_{\bar{x},i}-\sigma\,\widetilde{x_i^m}\,\bar{q}_i\, y_i^{j+1}+(1-\sigma)\left(\widetilde{p}\, y_x^j\right)_{\bar{x},i}-(1-\sigma)\,\widetilde{x_i^m}\,\bar{q}_i\, y_i^j+\widetilde{x_i^m}\,\bar{f}_i,\, i=1,2,\ldots,N-1 \tag{7}$$

$$y_i^0=u_0(x_i),\, i=0,1,\ldots,N \tag{8}$$

$$
\begin{gathered}
\sigma\alpha_1\widetilde{p}_1\, y_{\bar{x},1}^{j+1}+(1-\sigma)\alpha_1\widetilde{p}_1\, y_{\bar{x},1}^j=x_0^m\beta_1\sigma\, y_0^{j+1}+(1-\sigma)\,x_0^m\beta_1\, y_0^{j+1}-x_0^m\,\bar{\mu}_1+0.5h\alpha_1\widetilde{x_0^m}\, y_{t,0}^j-0.5 \\
\times\left(\bar{f}_0-\sigma\,\bar{q}_0\, y_0^{j+1}-(1-\sigma)\,\bar{q}_0\, y_0^j\right)
\end{gathered}
\tag{9}
$$

$$
\begin{gathered}
-\sigma\alpha_2\widetilde{p}_N\, y_{\bar{x},N}^{j+1}-(1-\sigma)\alpha_2\widetilde{p}_N\, y_{\bar{x},N}^j=\sigma\, x_N^m\beta_2\, y_N^{j+1}+(1-\sigma)\beta_2\, x_N^m\, y_N^j-x_N^m\,\bar{\mu}_2+0.5h\alpha_2\widetilde{x_N^m}\, y_{t,N}^j- \\
\times\left(\widetilde{f}_N-\sigma\,\bar{q}_N\, y_N^{j+1}-(1-\sigma)\,\bar{q}_N\, y_N^j\right)
\end{gathered}
\tag{10}
$$

де:

$$
\begin{gathered}
\widetilde{x_0^m}=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_1} x^m\,dx;\ \widetilde{x_N^m}=\frac{1}{h}\int_{x_{N-1}}^{x_N} x^m\,dx;\ \widetilde{x_i^m}=\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} x^m\,dx,\, i=1,2,\ldots,N-1 \\
\widetilde{p}_i=x_{i-0.5}\overline{k_{i-0.5}},\, i=1,2,\ldots,N \\
\overline{S_i}=s_i^{j+\sigma}=s(x_i,t_j+\tau\sigma),\, i=0,1,\ldots,N,\, j=0,1,\ldots,M-1
\end{gathered}
$$

при $\sigma=0$ маємо явну схему, при $\sigma=1$ - схему з випередженням (повністю неявну схему), при $\sigma=0.5$ - схему Кранка — Ніколсона на шаблоні з 6-ти вузлів. Розпишемо рівняння системи підставивши вирази для різницевих похідних:

$$\widetilde{x_i^m}\left[\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau}\right]=\tau\sigma\frac{1}{h}\left[\frac{\widetilde{p_{i+1}}(y_{i+1}^{j+1}-y_i^{j+1})}{h}-\frac{\widetilde{p}_i(y_i^{j+1}-y_{i-1}^{j+1})}{h}\right]-$$
$$-\tau\sigma\widetilde{x_i^m}\bar{q}_i y_i^{j+1}+\tau(1-\sigma)\frac{1}{h}\left[\frac{\widetilde{p_{i+1}}(y_{i+1}^j-y_i^j)}{h}-\frac{\widetilde{p}_i(y_i^j-y_{i-1}^j)}{h}\right]-\tau(1-\sigma)\widetilde{x_i^m}\bar{q}_i y_i^j+\tau\widetilde{x_i^m}\bar{f}_i$$

Домножимо на τ і перенесемо все що на (j+1)-му ярусі вправо, а на j-му ярусі — вліво. Отримаємо:

$$y_{i+1}^{j+1}\left[\frac{\tau\sigma}{h^2}\widetilde{p_{i+1}}\right]+y_i^{j+1}\left[-\widetilde{x_i^m}-\tau\sigma\widetilde{x_i^m}\bar{q}_i-\left[\frac{\tau\sigma}{h^2}\widetilde{p_{i+1}}+\frac{\tau\sigma}{h^2}\widetilde{p}_i\right]\right]+y_{i-1}^{j+1}\left[\frac{\tau\sigma}{h^2}\widetilde{p}_i\right]=$$
$$=-\widetilde{x_i^m}y_i^j-\frac{\tau(1-\sigma)}{h^2}(\widetilde{p_{i+1}}(y_{i+1}^j-y_i^j)-\widetilde{p}_i(y_i^j-y_{i-1}^j))+\tau(1-\sigma)\widetilde{x_i^m}\bar{q}_i y_i^j-\tau\widetilde{x_i^m}\bar{f}_i, i=\overline{1,N-1},$$
$$j=\overline{1,M} \qquad (11)$$

Позначимо:

$$y_i^{j+1}=v_i, y_{i+1}^{j+1}=v_{i+1}, y_{i-1}^{j+1}=v_{i-1} \qquad (12)$$

Для крайових умов:

$$y_1^{j+1}\left[\frac{\tau\sigma}{h^2}\alpha_1\widetilde{p}_1\right]+y_0^{j+1}\left[\frac{-\tau\sigma}{h^2}\alpha_1\widetilde{p}_1-\frac{\sigma\tau}{h}\beta_1 x_0^m-0.5\alpha_1\widetilde{x_0^m}-0.5\sigma\tau\alpha_1\widetilde{x_0^m}\bar{q}_0\right.$$
$$=-(1-\sigma)\frac{\tau}{h^2}\alpha_1\widetilde{p}_1(y_1^j-y_0^j)+(1-\sigma)\frac{\tau}{h}\beta_1 x_0^m y_0^j-\frac{\tau}{h}x_0^m\bar{\mu}_1-0.5\alpha_1\widetilde{x_0^m}y_0^j-0.5\tau\alpha_1\widetilde{x_0^m}\bar{f}_0+(1- \qquad (13)$$

$$y_N^{j+1}\left[-\sigma\frac{\tau}{h^2}\alpha_2\widetilde{p}_N-\sigma\frac{\tau}{h}x_N^m\beta_2-0.5\alpha_2\widetilde{x_N^m}-0.5\sigma\tau\alpha_2\widetilde{x_N^m}\bar{q}_N\right]+y_{N-1}^{j+1}\left[\frac{\sigma\tau}{h^2}\alpha_2\widetilde{p}_N\right]=$$
$$=(1-\sigma)\frac{\tau}{h^2}\alpha_2\widetilde{p}_N(y_N^j-y_{N-1}^j)+\frac{\tau}{h}(1-\sigma)x_N^m\beta_2 y_N^j-\frac{\tau}{h}x_N^m\bar{\mu}_2-0.5\alpha_2\widetilde{x_N^m}y_N^j+ \qquad (14)$$
$$+(1-\sigma)0.5\tau\alpha_2\widetilde{x_N^m}\bar{q}_N y_N^j-0.5\tau\alpha_2\widetilde{x_N^m}\bar{f}_N$$

Позначимо:

$$b_0=\left[\frac{\tau\sigma}{h^2}\alpha_1\widetilde{p}_1\right]$$

$$c_0=\left[\frac{-\tau\sigma}{h^2}\alpha_1\widetilde{p}_1-\frac{\sigma\tau}{h}\beta_1 x_0^m-0.5\alpha_1\widetilde{x_0^m}-0.5\sigma\tau\alpha_1\widetilde{x_0^m}\bar{q}_0\right]$$

$$\phi_0=-(1-\sigma)\frac{\tau}{h^2}\alpha_1\widetilde{p}_1(y_1^j-y_0^j)+(1-\sigma)\frac{\tau}{h}\beta_1 x_0^m y_0^j-\frac{\tau}{h}x_0^m\bar{\mu}_1-0.5\alpha_1\widetilde{x_0^m}y_0^j-0.5\tau\alpha_1\widetilde{x_0^m}\bar{f}_0+($$

$$b_i=\left[\frac{\tau\sigma}{h^2}\widetilde{p_{i+1}}\right]$$

$$c_i=\left[-\widetilde{x_i^m}-\tau\sigma\widetilde{x_i^m}\bar{q}_i-\left[\frac{\tau\sigma}{h^2}\widetilde{p_{i+1}}+\frac{\tau\sigma}{h^2}\widetilde{p}_i\right]\right]$$

$$d_i=\left[\frac{\tau\sigma}{h^2}\widetilde{p}_i\right] \tag{15}$$

$$\phi_i=-\widetilde{x_i^m}y_i^j-\frac{\tau(1-\sigma)}{h^2}(\widetilde{p_{i+1}}(y_{i+1}^j-y_i^j)-\widetilde{p}_i(y_i^j-y_{i-1}^j))+\tau(1-\sigma)\widetilde{x_i^m}\bar{q}_i y_i^j-\tau\widetilde{x_i^m}\bar{f}_i,$$

$$j=\overline{1,M}$$

$$c_N=[-\sigma\frac{\tau}{h^2}\alpha_2\widetilde{p}_N-\sigma\frac{\tau}{h}x_N^m\beta_2-0.5\alpha_2\widetilde{x_N^m}-0.5\sigma\tau\alpha_2\widetilde{x_N^m}\bar{q}_N \text{¿}]$$

$$d_N=\left[\frac{\sigma\tau}{h^2}\alpha_2\widetilde{p}_N\right]$$

$$\phi_N=(1-\sigma)\frac{\tau}{h^2}\alpha_2\widetilde{p}_N(y_N^j-y_{N-1}^j)+\frac{\tau}{h}(1-\sigma)x_N^m\beta_2 y_N^j-\frac{\tau}{h}x_N^m\bar{\mu}_2-0.5\alpha_2\widetilde{x_N^m}$$

$$+(1-\sigma)0.5\tau\alpha_2\widetilde{x_N^m}\bar{q}_N y_N^j-0.5\tau\alpha_2\widetilde{x_N^m}\bar{f}_N$$

Отже, ми отримали СЛАР з тридіагональною матрицею, яку розв’язуємо методом прогонки:

$$\begin{cases} c_0 v_0+b_0 v_1=\phi_0 \\ d_i v_{i-1}+c_i v_i+b_i v_{i+1}=\phi_i,\, i=\overline{1,N-1} \\ d_N v_{N-1}+c_N v_N=\phi_N \end{cases} \tag{16}$$

Практична частина

Оскільки довжина валу набагато більша за діаметр, то можна вважати циліндр нескінченно довгим. Запишемо рівняння в циліндричних координатах. Оскільки циліндр нескінченно довгий, то розподіл температур не залежить від координати z. Крім того з симетричності температура також не залежить від кута ϕ.

У СІ:

радіус: 0,06 м; початкова температура : 293.15 К; температура печі: 1093.15 К; кінцева температура центру: 1073.15 К.

Тоді рівняння, що описує процес нагрівання циліндру в циліндричних координатах:

$$c\rho\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\lambda}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right),x\in(0,0.06),t>0 \tag{17}$$

$$u(x,0)=u_0=293.15 \tag{18}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0 \tag{19}$$

$$-\lambda\frac{\partial u(0.06,t)}{\partial x}=\gamma(u-1093.15) \tag{20}$$

Позначимо: $u_0=293.15, u_{env}=1093.15, R=0.06$
Введемо безрозмірні змінні :

$$v(x,t)=\frac{u(x,t)-u_{env}}{u_0-u_{env}} \tag{21}$$

Тоді:

$$u(x,t)=u_{env}+(u_0-u_{env})v(x,t) \tag{22}$$

Тоді:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial v}{\partial x}\right),a^2=\frac{\lambda}{c\rho},0<x<R,t>0 \tag{23}$$

Поділимо обидві частини на $\frac{a^2}{R^2}$:

$$\frac{\partial v}{\partial(a^2t/R^2)}=\frac{1}{(x/R)}\frac{\partial}{\partial(x/R)}\left((x/R)\frac{\partial v}{\partial(x/R)}\right),a^2=\frac{\lambda}{c\rho},0<x<R,t>0 \tag{24}$$

Введемо нові змінні:

$x_1=\frac{x}{R}$ - безрозмірна координата, $0<x_1<1$

$t_1 = \frac{a^2 t}{R}$ - безрозмірний час

Тоді у безрозмірних змінних задача виглядатиме наступним чином:

$$\frac{\partial v}{\partial t_1} = \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} \right), x_1 \in (0,1), t_1 > 0 \qquad (25)$$

$$\frac{\partial v(0,t_1)}{\partial x_1} = 0 \qquad (26)$$

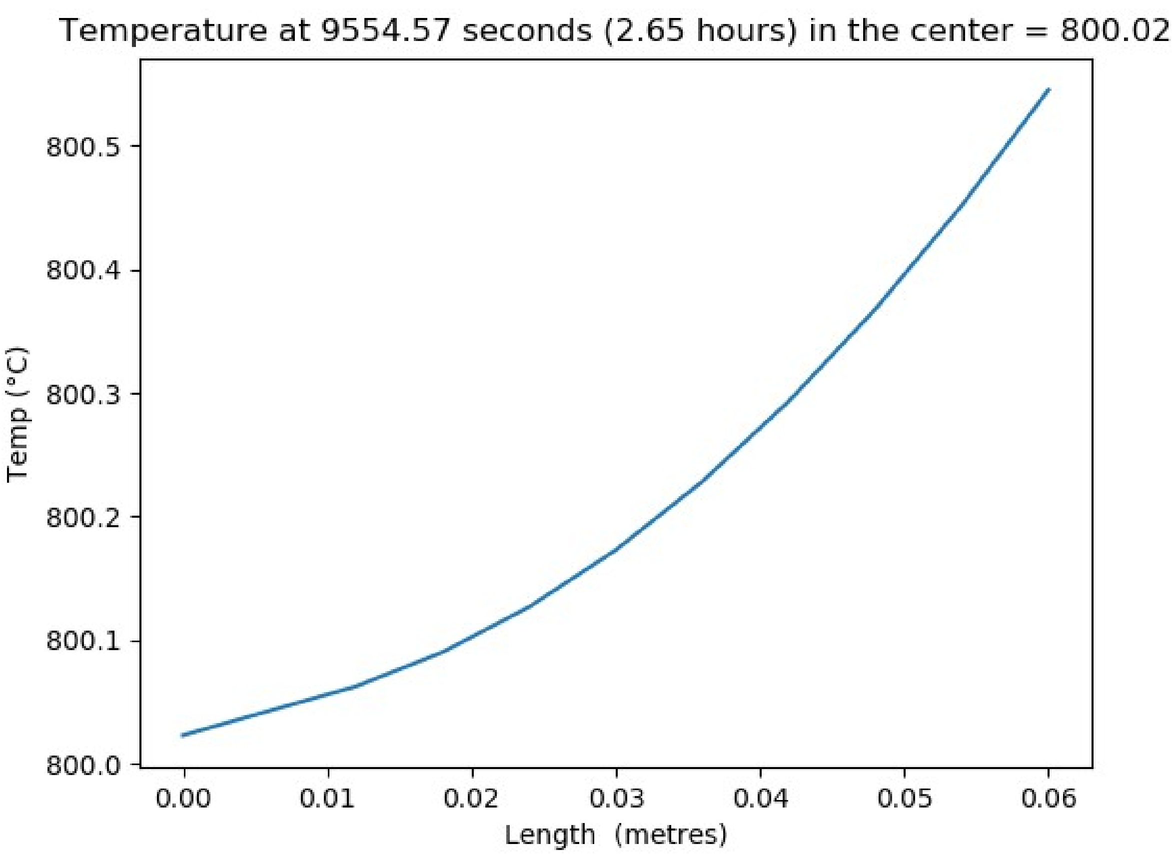
$$\frac{\partial v(1,t_1)}{\partial x_1} + \gamma_1 v(1,t_1) = 0, \gamma_1 = \frac{\gamma R}{\lambda} \qquad (27)$$

$$v(x_1, 0) = 1 \qquad (28)$$

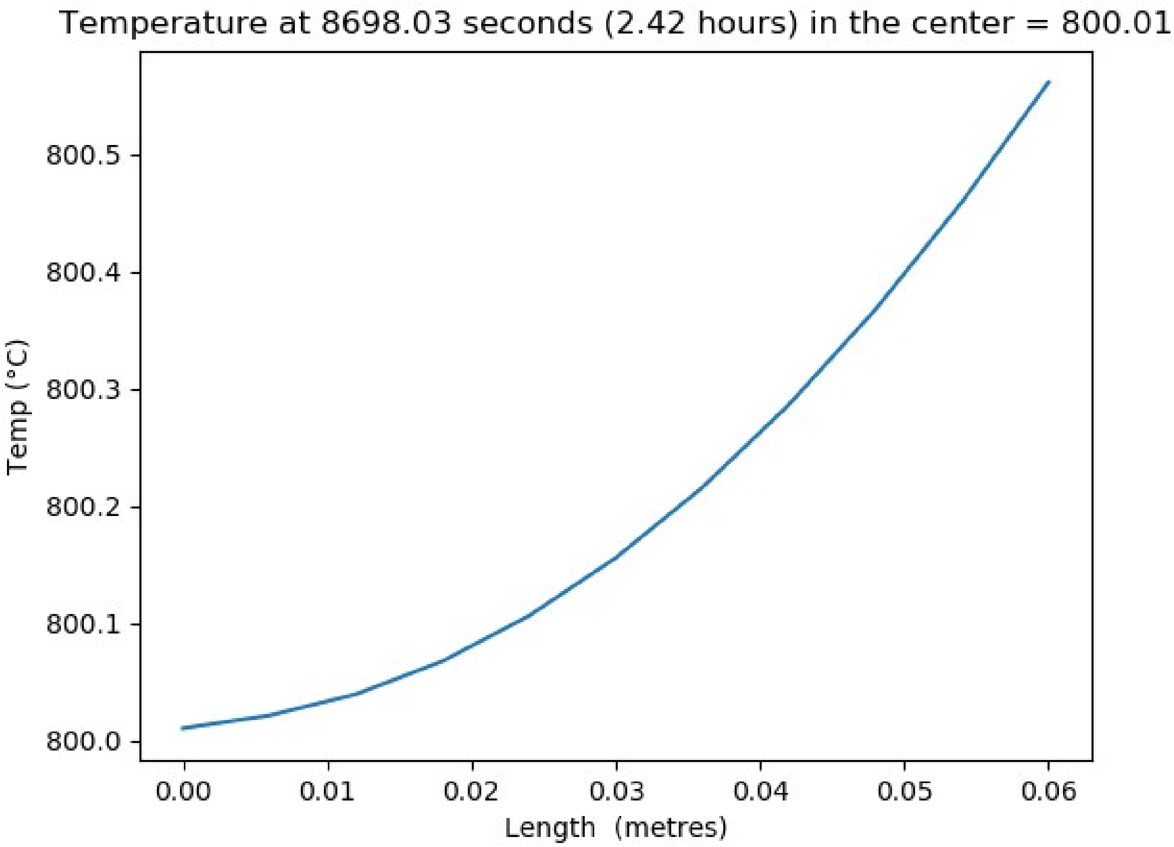
Перепишемо рівняння для коефіцієнтів тридіагональної матриці різницевої апроксимації задачі (25)-(28):

$$b_0 = \tau \frac{\sigma}{h^2} \alpha_1 x_{0.5}$$
$$c_0 = -\alpha_1 0.5 h \left[\frac{\tau \sigma}{h^2} + 0.5 \right]$$
$$\phi_0 = -(1-\sigma) \frac{\tau}{h^2} \alpha_1 0.5 h (y_1^j - y_0^j) - 0.5 \alpha_1 h y_0^j$$
$$b_i = \frac{\tau \sigma}{h^2} x_{i+0.5}$$
$$c_i = -(x_{i+1} + x_{i-1})(0.5 + \frac{\tau \sigma}{h^2})$$
$$d_i = \frac{\tau \sigma}{h^2} \alpha_1 x_{0.5}$$
$$\phi_i = -0.5(x_{i+1} + x_{i-1}) y_i^j - \frac{\tau(1-\sigma)}{h^2} (x_{i+0.5}(y_{i+1}^j - y_i^j) - x_{i-0.5}(y_i^j - y_{i-1}^j)), i = \overline{1, N-1}, \qquad (29)$$
$$j = \overline{1, M}$$
$$c_N = -\frac{\sigma \tau}{h^2} \alpha_2 (1 - 0.5h) - \frac{\sigma \tau \beta_2}{h} - 0.5 \alpha_2 0.5 (2-h)$$
$$d_N = \frac{\sigma \tau \alpha_2 (1 - 0.5h)}{h^2}$$
$$\phi_N = \frac{(1-\sigma) \tau \alpha_2 (1-0.5h)(y_N^j - y_{N-1}^j)}{h^2} + \frac{\tau (1-\sigma) \beta_2 y_N^j}{h} - 0.5 \alpha_2 0.5 (2-h) y_N^j$$

Для $\sigma = 1$:



Для $\sigma = 0.5$:



Temperature at 8698.03 seconds (2.42 hours) in the center = 800.01
Temp (°C)
800.0
800.1
800.2
800.3
800.4
800.5
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
Length (metres)