Міністерство освіти та науки України

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Звіт

до лабораторної роботи №2:

«Сіткові методи розв’язання граничних задач»

студентки 4-го курсу

факультету комп’ютерних наук

та кібернетики

групи ОМ-4

Рабійчук Тетяни

м. Київ

Постановка задач

Знайти наближений розв'язок задачі методом апроксимації інтегральної тотожності. Видати вектор нев'язки.

Теоретична частина

Метод апроксимації інтегральної тотожності
(метод суматорних тотожностей)

Для розв'язку задачі:

$$Lu=-\frac{d}{dx}(k(x)\frac{du(x)}{dx})+p(x)\frac{du(x)}{dx}+q(x)u(x)=f(x), a<x<b \quad (1)$$

$$-k(x)\frac{du(x)}{dx}+\alpha_1 u(x)=\mu_1, x=a \quad (2)$$

$$k(x)\frac{du(x)}{dx}+\alpha_2 u(x)=\mu_2, x=b \quad (3)$$

Застосуємо інтегральну тотожність:

$$\int_a^b (k(x)\frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx}+p(x)\frac{du(x)}{dx}v(x)+q(x)u(x)v(x)-f(x)v(x))dx+ \\ +\sigma_1 v(a)u(a)+\sigma_2 v(b)u(b)-\mu_1 v(a)-\mu_2 v(b) \quad (4)$$

Де $v(x)$ - довільна неперервна при $a\le x\le b$ функція , що має інтегровану в $L_2[a,b]$ похідну.

Побудуємо на рівномірній сітці :

$$\overline{\omega_h}=\{x_i=ih, i=\overline{0,n}, h=(b-a)/n\} \quad (5)$$

яка апроксимує інтегральну тотожність (4) суматорною тотожністю для сіткових функцій. З (4) маємо:

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(k(x)\frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx}+p(x)\frac{du(x)}{dx}v(x)+q(x)u(x)v(x)-f(x)v(x)\right)dx+ \\ +\alpha_1 v(a)u(a)+\alpha_2 v(b)u(b)-\mu_1 v(a)-\mu_2 v(b) \tag{6}$$

Апроксимуємо відповідні інтеграли і перейдемо до тотожності для сіткових функцій:

$$\sum_{i=1}^{n} hk_{i-\frac{1}{2}}u_{\bar{x},i}v_{\bar{x},i}+\sum_{i=1}^{n} h\,p_{i-\frac{1}{2}}u_{\bar{x},i}\frac{v_i+v_{i-1}}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} h\,q_i v_i y_i+\overline{\alpha_1}\,y_0 v_0+\overline{\alpha_2}\,y_n v_n-\overline{\mu_1}\,v_0-\overline{\mu_2}\,v_n=\sum_{i=1}^{n-1} h \tag{7}$$

Де v_i - довільна сіткова функція і

$$\begin{aligned}\overline{\alpha_1}&=\alpha_1+0.5\,h\,q_0\\ \overline{\alpha_2}&=\alpha_2+0.5\,h\,q_n\\ \overline{\mu_1}&=\mu_1+0.5\,h\,f_0\\ \overline{\mu_2}&=\mu_2+0.5\,h\,f_n\end{aligned} \tag{8}$$

Розглянемо систему наступних сіткових функцій:

$$\phi_j(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{j-1}}{h}, \text{ for } x_{j-1}\le x\le x_j\\ \dfrac{x_{j+1}-x}{h}, \text{ for } x_j\le x\le x_{j+1}\\ 0, \text{ for } x\notin[x_{j-1},x_{j+1}]\end{cases}, j=\overline{1,n}$$

$$\phi_0(x)=\begin{cases}\dfrac{x_1-x}{h}, \text{ for } x\, 0\le x\le x_1\\ 0, \text{ for } x\ge x_1\end{cases} \tag{9}$$

$$\phi_n(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{n-1}}{h}, \text{ for } x_{n-1}\le x\le x_n\\ 0, \text{ for } x<x_{n-1}\end{cases}$$

З відповідними похідними:

$$(\phi_j(x))_{\bar{x},j}=\frac{\phi_j(x_j)-\phi_j(x_{j-1})}{h}=\frac{1}{h},j=\overline{1,n}$$
$$(\phi_j(x))_{\bar{x},j+1}=-\frac{1}{h},j=\overline{1,n},i=\overline{1,n} \quad (10)$$

Тепер розглянемо (7), де в якості сіткової функції v_i візьмемо $\phi_j, j=\overline{0,n}$. Оскільки ми дивимось значення ϕ_j у вузлах сітки, то ненульове значення вона прийме лише при $i=j$. Отримаємо наступну систему алгебраїчних рівнянь відносно y_i :

$$-k_{1-\frac{1}{2}}y_{\bar{x},1}+0.5hp_{1-\frac{1}{2}}y_{\bar{x},1}+\overline{\alpha_1}y_0=\overline{\mu_1}$$
$$k_{i-\frac{1}{2}}y_{\bar{x},i}-k_{i+\frac{1}{2}}y_{\bar{x},i+1}+0.5hp_{i-\frac{1}{2}}y_{\bar{x},i}+0.5hp_{i+\frac{1}{2}}y_{\bar{x},i+1}+hq_iy_i=hf_i,i=\overline{1,n-1} \quad (11)$$
$$k_{n-\frac{1}{2}}y_{\bar{x},n}+0.5hp_{n-\frac{1}{2}}y_{\bar{x},n}+\overline{\alpha_2}y_n=\overline{\mu_2}$$

Розписавши різніцеву похідну та згрупувавши доданки отримаємо:

$$y_0\left[\frac{k_{1-\frac{1}{2}}}{h}-\frac{p_{1-\frac{1}{2}}}{2}+\overline{\alpha_1}\right]+y_1\left[-\frac{k_{1-\frac{1}{2}}}{h}+\frac{p_{1-\frac{1}{2}}}{2}\right]=\overline{\mu_1}$$
$$y_i-1\left[-\frac{k_{i-\frac{1}{2}}}{h}-\frac{p_{i-\frac{1}{2}}}{2}+\overline{\alpha_1}\right]+y_i\left[\frac{k_{i-\frac{1}{2}}}{h}+\frac{k_{i+\frac{1}{2}}}{h}+\frac{p_{i-\frac{1}{2}}}{2}-\frac{p_{i+\frac{1}{2}}}{2}+hq_i\right]+y_{i+1}\left[-\frac{k_{i+\frac{1}{2}}}{h}+\frac{p_{i+\frac{1}{2}}}{2}\right]=hf_i,i= \quad (12)$$
$$y_{n-1}\left[-\frac{k_{n-\frac{1}{2}}}{h}-\frac{p_{n-\frac{1}{2}}}{2}\right]+y_n\left[\frac{k_{n-\frac{1}{2}}}{h}+\frac{p_{n-\frac{1}{2}}}{2}+\overline{\alpha_2}\right]=\overline{\mu_2}$$

Розв’язуючи цю систему знаходимо сітковий розв’язок.

Практична частина

Маємо наступну крайову задачу:

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)+p(x)\frac{du}{dx}+q(x)u=f(x), a<x<b \tag{13}$$

$$-k(x)\frac{du}{dx}+\alpha_1 u(x)=\mu_1, x=a \tag{14}$$

$$k(x)\frac{du}{dx}+\alpha_2 u(x)=\mu_2, x=b \tag{15}$$

$$\alpha_1>0, \alpha_2>0$$

де :

$k(x)=k_1\sin(k_2 x)+k_3, k(x)>0$

$p(x)=p_1\cos(p_2 x)+p_3$

$q(x)=q_1\sin(q_2 x)+q_3, q(x)\geq 0$

Точний розв'язок: $u(x)=m_1\sin(m_2 x)+m_3$

Початкові значення параметрів наступні:

початкова кількість координатних функцій $n=5$

$a=0, b=3, m_1=3, m_2=1, m_3=2, m_4=2, m_5=1$

$k_3=1, p_1=2, p_2=2, p_3=1, q_1=0, q_2=2, q_3=1, k_1=2, k_2=2, \alpha_1=1, \alpha_2=3$

Кількість точок сітки n = 1000.

Відповідно значення сіткової функції, розв'язку, та модуль різниці:

1.99976307 2.00000000 0.00023693

2.04476277 2.04499831 0.00023555

2.08975234 2.08998650 0.00023416

2.13472166 2.13495444 0.00023278

2.17966063 2.17989202 0.00023139

2.22455911 2.22478912 0.00023001

....

4.08439363 4.08401481 0.00037882

4.05178385 4.05141186 0.00037199

4.01871264	4.01834735	0.00036529
3.98518744	3.98482873	0.00035871
3.95121577	3.95086352	0.00035225