Міністерство освіти та науки України

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Звіт

до лабораторної роботи №1:

«Методи розв’язання граничних задач»

студентки 4-го курсу

факультету комп’ютерних наук та кібернетики

групи ОМ-4

Рабійчук Тетяни

м. Київ

Постановка задач

Знайти наближений розв'язок задачі проекційним та варіаційним методами: методом Бубнова- Гальоркіна та методом найменших квадратів. Видати вектор нев'язки. Зобразити точний і знайдений розв'язки.

Теоретична частина

Метод Бубнова — Гальоркіна

Є проекційним методом розв'язання краєвої задачі. Розглянемо задачу:

$$Au=f \qquad (1)$$

Де $A:E\to F$ - лінійний оператор, заданий на гільбертових просторах E,F. Оберемо систему лінійно незалежних функцій, що є замкненою (оскільки у методі Бубнова-Гальоркіна системи координатних і проекційних функцій співпадають) $\phi_i, i=\overline{1,n}\in D(A)\in E$. І розглянемо лінійну оболонку, побудовану на цій системі: $E_n: L(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n)$. У відповідність задачі (1) ставиться задача знаходження u_n:

$$P_n(Au_n-f)=0, u_n\in E_n \qquad (2)$$

Розв'язок задачі (2) шукатимемо у вигляді:

$$u_n=\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i \qquad (3)$$

Лема 1: $\forall\phi\in E: P_n\phi=0\Leftrightarrow(\phi,\phi_j)=0, j=\overline{1,n}$

Тоді виходячи з леми 1 задачу (2) можна переписати як:

$$(Au_n-f,\phi_j)=0, j=\overline{1,n} \qquad (4)$$

Підставивши (3) в (4) і скориставшись лінійністю оператора A отримуємо СЛАР для знаходження коефіцієнтів $c_i, i=\overline{1,n}$:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(A\phi_i,\phi_j)=(f,\phi_j), j=\overline{1,n} \qquad (5)$$

Метод найменших квадратів

Є методом варіаційного типу. Розглянемо задачу:

$$Au=f \tag{6}$$

де $A:H\to H, H$ - гільбертів. Розглянемо функціонал:

$$\Phi(u)=G(u,u)-2l(u)+C \tag{7}$$

де $G(u,v)$ - додатньо визначена білінійна симетрична форма, $l(u)$ - лінійний функціонал, C - деяка стала.

Якщо існує єдиний розв'язок задачі (6) і оператор A - обмежений, то задача зводЗ иться до мінімізації наступного функціоналу:

$$\Phi(u)=\|Au-f\|^2 \tag{8}$$

Маємо: $\Phi(u)=(Au,Au)-2(f,Au)+\|f\|^2$. Отже, $G(u,v)=(Au,Av),l(u)=(f,Au),C=\|f\|^2$. Розв'язок шукатимемо у вигляді (3), $\phi_i, i=\overline{1,n}\in D(A)\in H$ - повна замкнена система лінійно незалежний функцій.

<u>Теорема 1.</u> Нехай $\hat{u}\in D(G)$ - елемент на якому досягається inf функціоналу $\Phi(u)$. Тоді виконуються умови:

$$G(\hat{u},v)=l(v),\forall v\in D(G) \tag{9}$$

$$\Phi(\hat{u}+v)=\Phi(\hat{u})+G(u,v),\forall v\in D(G) \tag{10}$$

З умови (9) отримуємо систему для знаходження коефіцієнтів $c_i, i=\overline{1,n}$:

$$\sum_{i=1}^{n}(A\phi_i, A\phi_j)c_i=(f,A\phi_j), j=\overline{1,n} \tag{11}$$

<u>Теорема 2.</u> Якщо система $A\phi_i, i=\overline{1,n}$ - повна та $\exists M=const$: $\|u\|\le M\|Au\|$, то $u_n\to u, n\to\infty$ в H .

Практична частина

Маємо наступну крайову задачу:

$$-\frac{d}{dx}(k(x)\frac{du}{dx})+p(x)\frac{du}{dx}+q(x)u=f(x),a<x<b \qquad (12)$$

$$-k(x)\frac{du}{dx}+\alpha_1 u(x)=\mu_1, x=a \qquad (13)$$

$$k(x)\frac{du}{dx}+\alpha_2 u(x)=\mu_2, x=b \qquad (14)$$

$$\alpha_1>0, \alpha_2>0$$

де :

$k(x)=k_1\sin(k_2 x)+k_3, k(x)>0$

$p(x)=p_1\cos(p_2 x)+p_3$

$q(x)=q_1\sin(q_2 x)+q_3, q(x)\geq 0$

Точний розв’язок: $u(x)=m_1\sin(m_2 x)+m_3$

Початкові значення параметрів наступні:

початкова кількість координатних функцій $n=5$

$a=0, b=3, m_1=3, m_2=1, m_3=2, m_4=2, m_5=1$

$k_3=1, p_1=2, p_2=2, p_3=1, q_1=0, q_2=2, q_3=1, k_1=2, k_2=2, \alpha_1=1, \alpha_2=3$

В першу чергу зводимо задачу до однорідних крайових умов. Для цього представимо:

$$u(x)=v(x)+\psi(x) \qquad (15)$$

Де функція $\psi(x)$ буде задовольняти неоднорідним крайовим умовам (4), (14). Звідки випливає, що функція $v(x)$ буде задовольняти однорідним крайовим умовам:

$$-k(x)\frac{dv}{dx}+\alpha_1 v(x)=0 \qquad (16)$$

$$k(x)\frac{dv}{dx}+\alpha_2 v(x)=0 \quad (17)$$

Подамо $\psi(x)$ як:

$$\psi(x)=Ax+B \quad (18)$$

Та знайдемо константи , підставивши $\psi(x)$ в крайові умови (13), (14). Отримаємо наступну систему відносно невідомих коефіцієнтів:

$$A(\alpha_1 x-k(x))+\alpha_1 B=\mu_1, x=a \quad (19)$$

$$A(\alpha_2 x+k(x))+\alpha_2 B=\mu_2, x=b \quad (20)$$

Розв'язавши її при заданих вище параметрах отримуємо:

$A=0.7201749337259356, B=-0.27982506627406445$

З наступним вектором нев'язки:

$\vec{r}=[0.0000000e+00, 4.4408921e-16]$

Тоді

$$v(x)=u(x)-\psi(x) \quad (21)$$

задовольнятиме наступну систему:

$$-\frac{d}{dx}(k(x)\frac{dv}{dx})+p(x)\frac{dv}{dx}+q(x)v(x)=f_1(x) \quad (22)$$

$$-k(x)\frac{dv}{dx}+\alpha_1 v(x)=0, x=a \quad (23)$$

$$k(x)\frac{dv}{dx}+\alpha_2 v(x)=0, x=b \quad (24)$$

де $f_1(x)=f(x)-A\phi(x)$, де A - диференційний оператор системи:

$$A=-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{d}{dx}\right)+p(x)\frac{d}{dx}+q(x) \tag{25}$$

Метод Бубнова-Гальоркіна

(21) будемо шукати у вигляді:

$$v(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x) \tag{26}$$

У методі Бубнова — Гальоркіна координатна і проекційна системи співпадають. В якості системи координатних функцій оберемо:

$$\begin{gathered}\phi_1(x)=(x-a)^2(x-C)\\ \phi_2(x)=(b-x)^2(x-D)\\ \phi_i(x)=(x-a)^{i-1}(b-x)^2, i=\overline{3,n}\end{gathered} \tag{27}$$

Ми хочемо щоб функція, яка задовольняє крайовим умовам (23), (24) представлялась як лінійна комбінація системи функцій (27). Бачимо, що $\phi_i, i\geq 3$ задовольняють обидві крайові умови одночасно. ϕ_1 задовольняє крайову умову (23), а ϕ_2 задовольняє крайову умову (24). Таким чином нам треба підібрати константу C , так щоб ϕ_1 задовольняла крайову умову (24) і константу D так щоб ϕ_2 задовольняла крайову умову (23). Отримуємо:

$$\begin{gathered}C=b+\frac{k(b)(b-a)}{2k(b)+\alpha_2(b-a)}\\ \\ D=a-\frac{k(a)(b-a)}{2k(a)+\alpha_1(b-a)}\end{gathered} \tag{28}$$

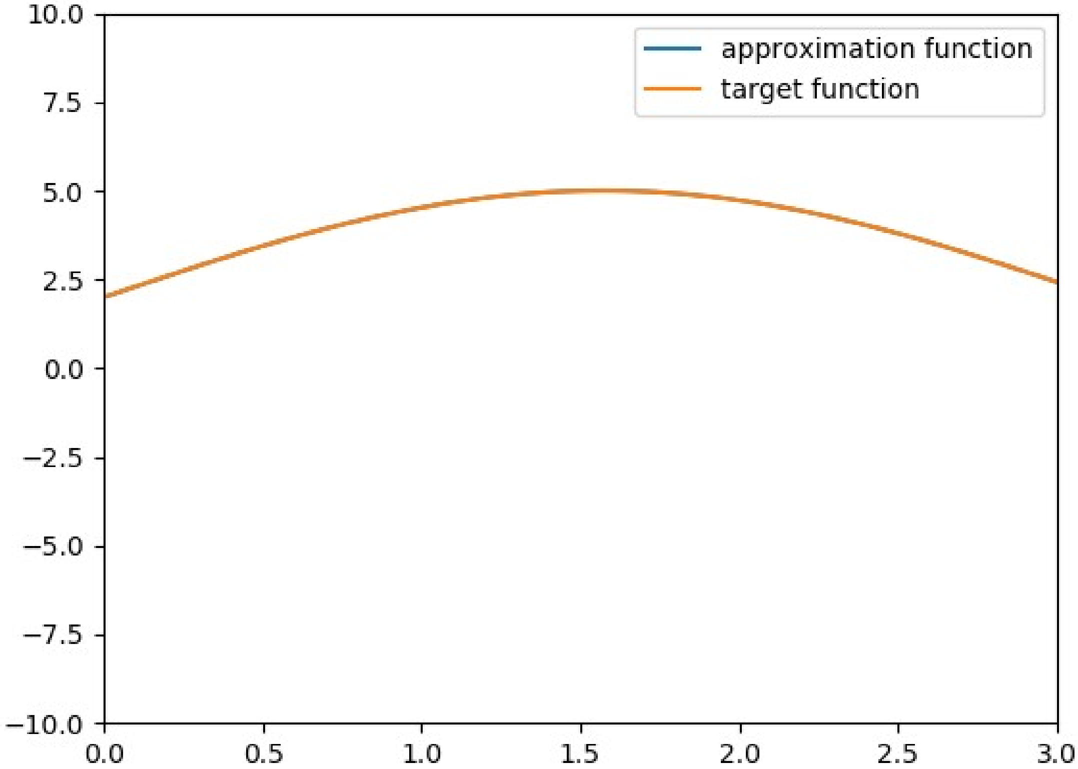
В результаті обчислень отримуємо: $C=3.133926507051428, D=-0.6$.

Розв’язуючи систему (5) знаходимо невідомі коефіцієнти. Вектор нев’язки:

$$R=MC-F=[7.10542736\text{e-}15, 0.00000000\text{e+}00, 0.00000000\text{e+}00, -1.42108547\text{e-}14, 0.00000000\text{e+}00]$$

де $M=(A\phi_i,\phi_j), i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n}$, $C=(c_i), i=\overline{1,n}$, $F=((f,\phi_j)), j=\overline{1,n}$.

Графіки точного і наближеного розв’язку:



Метод найменших квадратів

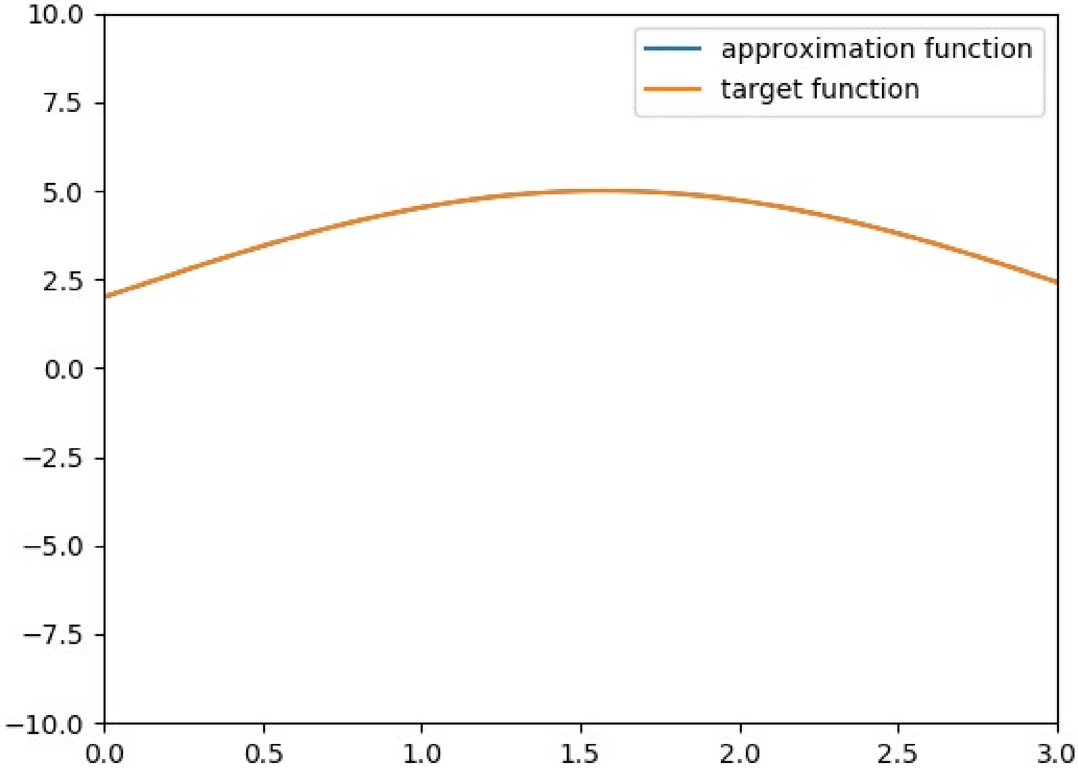
У якості системи координатних функцій було обрано систему (27) з відповідними константами (28). Розв’язуючи систему (11) знаходимо константи представлення (26).

Вектор нев’язки:

$$R = MC - F = [-5.68434189\text{e-}14, 0.00000000\text{e+}00, 0.00000000\text{e+}00, 1.13686838\text{e-}13, 1.70530257\text{e-}13]$$

де $M = (A\phi_i, A\phi_j), i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$, $C = (c_i), i = \overline{1,n}$, $F = ((f, A\phi_j)), j = \overline{1,n}$.

Графік точного і наближеного розв’язку:


approximation function
target function
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
−7.5
−10.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0