Сведение задач на ориентированных графах к паросочетаниям

Подготовил Сивухин Никита. По вопросам пишите на почту sivukhin.work+teach@gmail.com

Разберём решение некоторых задач для ориентированных графов, которые могут встретиться как подзадачи при решении других задач.

Задача 1. *Для* ***ациклического*** *графа $G = (V, E)$ необходимо найти* ***наименьший*** *набор вершинно-непересекающихся простых путей $\{P_i\}$, покрывающих все вершины графа V.*

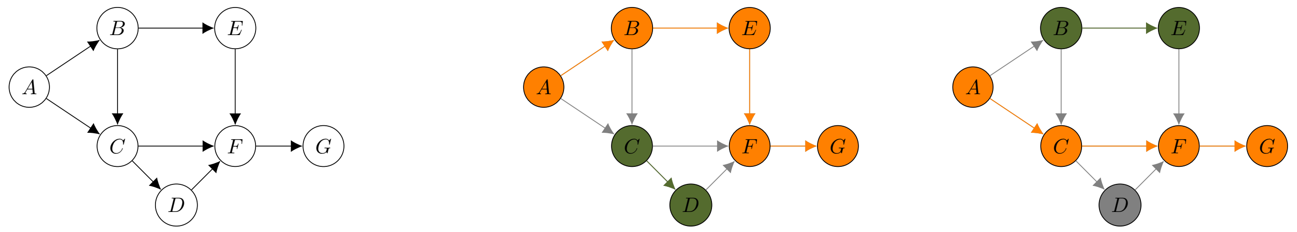

Рис. 1: Пример разбиения ориентированного графа на две и три цепи соответственно:
$\{(A, B, E, F, G), (C, D)\}$ и $\{(A, C, F, G), (B, E), (D)\}$.

Заметим, что в ориентированном графе, построенном на рёбрах из простых путей P, все исходящая и входящая степени всех вершин не превосходит единицы (потому что иначе пара путей пересклись бы по вершине со степенью больше одного). Таким образом можно построить вспомогательный **неориентированный** граф $H = (V_{in}, V_{out}, E')$, где каждой вершине v будет соответствовать пара вершин v_{in} и v_{out}, а каждому ориентированнму ребру (a, b) — **неориентированное** ребро (a_{out}, b_{in}).

Несложно показать, что любому набору вершинно-непересекающихся путей в графе G соответствует паросочетание в графе H, так как каждая вершина имеет исходящую и входяющую степени не более единицы, то никакая пара рёбер двудольного графа не имеет общих вершин.

Обратное соответствие также верно, так как любому паросочетанию в графе H соответствует подграф $G' \subseteq G$ в котором входящая и исходящая степень любой вершины не более единицы. Так как граф G **ацикличный**, то подграф G' представляет собой набор простых циклов (если граф G будет содержать циклы, то паросочетание в H необязательно соответствует только простым путям, так как оно также может порождать циклы).

Таким образом между паросочетаниями в H и наборами покрывающих путей в G существует биекция. Осталось заметить, что для графа из n вершин набору из $p = |P|$ путей соответствует паросочетание размера $n - c$, а значит максимальному паросочетанию соответствует минимальный набор из цепей.

В итоге задача 1 сводится к задаче поиска наибольшего паросочетания в двудольном графе.

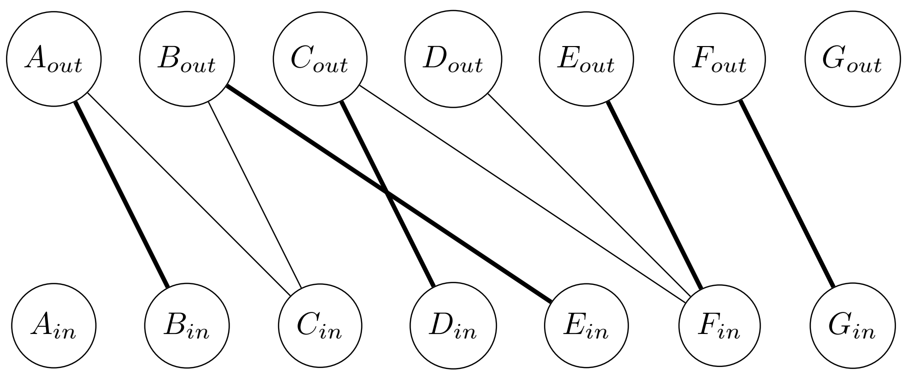

Рис. 2: Граф H построенный для примера на рисунке 1 и наибольшее паросочетание в нём, соответствующее минимальному набору путей P

Бинарные отношения. Частично упорядоченные множества

Введем дополнительный математический аппарат из дискретной математики, чтобы описать другое сведение. Для него нам понадобится рассмотреть понятие бинарного отношения и вытекающие из него определения.

Бинарным отношением ρ, определённое на конечных множествах X и Y называется некоторое подмножество $\rho \subseteq X \times Y$, где $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ — декартово произведение пары множеств. Обычно бинарное отношение определяется на элементах одного множества, в случае чего $X = Y$ и $\rho \subseteq X^2$. Если некоторая пара (x, y) входит в отношение ρ, то общепринятой является запись $x\rho y$.

Для классификации бинарных отношений используют набор свойств, самые популярные из которых перечислены ниже:

- Рефлексивность $\forall x \in X : x\rho x$
- Антирефлексивность $\forall x \in X : \neg(x\rho x)$
- Симметричность $\forall x, y \in X : (x\rho y) \Rightarrow (y\rho x)$
- Антисимметричность $\forall x, y \in X : (x\rho y \wedge y\rho x) \Rightarrow x = y$
- Транзитивность $\forall x, y, z \in X : (x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow x\rho z$
- Полнота $\forall x, y \in X : x\rho y \vee y\rho x$

Любому бинарному отношению над множеством X можно поставить в соответствие ориентированный граф $G = (X, \rho)$, где множество рёбер состоит их всех элементов отношения.

Замечание 1. *Заметим, что симметричное отношение задает неориентированный граф, а антирефлексивное — граф без петель.*

Определение 1. *Бинарное отношение является отношением* ***нестрогого частичного порядка*** *($\preceq$), если оно удовлятворяет свойствам* ***рефлексивности****,* ***антисимметричности*** *и* ***транзитивности****.*

Определение 2. *Бинарное отношение является отношением* ***строгого частичного порядка*** *($\prec$), если оно удовлятворяет свойствам* ***антирефлексивности*** *и* ***транзитивности****.*

Отношение строгого порядка $\prec$ может быть получено из отношения нестрогого порядка $\preceq$, если в строгом порядке будут только элементы (a, b), для которых верно $a \preceq b \wedge a \neq b$.

В контексте отношения порядка $\prec$ пару несравнимых между собой элементов a, b (т.е. $(a, b) \notin \prec$ $\wedge (b, a) \notin \prec$) обозначают как $a \parallel b$.

Отношения частичного порядка часто появляются в разнообразных областях:

- Отношение делимости пары числе $a \mid b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : ak = b$ является отношением частичного порядка
- Отношение достижимости между вершинами $(u \rightsquigarrow v)$ в ориентированном графе $G = (V, E)$ является отношением частичного порядка
- Векторные часы, применяющиеся в области распределённых алгоритмов, задают отношение частичного порядка для упорядочивания событий в системе
- Отношение включения определённое на множествах является частичным порядком

	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	0	1	0	1	0	1	0
3	0	1	0	0	1	0	0	1
4	0	0	1	0	0	0	1	0
5	0	0	0	1	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0	0
7	0	0	0	0	0	1	0	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0
9	0	0	0	0	0	0	0	1

	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	0	1	0	1	0	1	0
3	0	0	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0

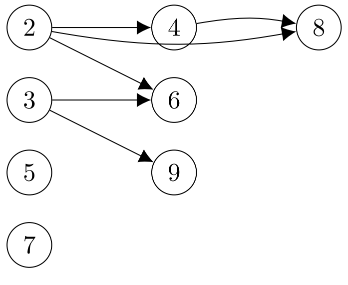

Рис. 3: Отношение нестрогого и строгого порядка для отношения делимости на числах $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и граф, соответствующий отношению строгого порядка

Теорема Дилуорса (Dilworth's theorem)

Определение 3. *Цепью для строгого отношения частичного порядка $\prec$ называется последовательность элементов $x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_k$*

Определение 4. *Антицепью для строгого отношения частичного порядка $\prec$ называется набор попарно несравнимых элементов $X = \{x_1, x_2 \ldots x_k\}$ (т.е. $\forall x_i, x_j \in X, x_i \neq x_j : x_i \parallel x_j$)*

Пусть для некоторого отношения строгого порядка $\prec$ над конечным множеством V построено множество цепей C, покрывающие все элементы множества V. Тогда несложно заметить, что $|C|$ **не меньше** чем размер любой антицепи A, так как каждая цепь из P содержит не более одного элемента из A.

Таким образом, для любой антицепи A и множества цепей P, покрывающих все элементы V, верно, что $|A| \leq |C|$.

Теорема 1 (Дилуорс(Dilworth) 1950)**.** *Для отношения $\prec$ определённого на конечном множестве V, размер наибольшей антицепи равен минимальному количеству цепей, необходимых для покрытия всех элементов множества V.*

Доказательство. Обозначим граф, соответствующий отношению ρ как G.

Из замечания выше следует, что максимальный размер антицепи $a(G)$ является нижней границей для минимального количества $p(G)$ покрывающих V цепей: $a(G) \leq c(G)$. Осталось показать, что существует антицепь такого же размера, как набор покрывающих цепей, что будет являться доказательством теоремы.

Построим вспомогательный граф H для графа G также, как для задачи о покрытии графа минимальным числом вершинно-непересекающихся путей: $H = (\{v_{in}, v_{out} \mid v \in G\}, \{\{a_{out}, b_{in}\} \mid (a, b) \in G\})$.

Рассмотрим **максимальное** паросочетание M в H и соответствующее ему **минимальное** вершинное покрытие C размером $m = |M| = |C|$.

Несложно показать, что для любой пары вершин v_{in}, v_{out} верно, что хотя бы одно из них **не принадлежит** C. Действительно допустим что это не так и $v_{in}, v_{out} \in C$ для некоторого $v \in V$. Так как граф строгого отношения не содержит петель, то пара вершин принадлежит двум разным рёбрам максимального паросочетания M, то есть существует пара вершин a_{out} и b_{in} таких, что $\{a_{out}, v_{in}\}, \{v_{out}, b_{in}\} \in M$. Наличие этих двух рёбер эквивалентно тому, что $a \prec v$ и $v \prec b$, но отсюда по свойству транзитивности следует, что $a \prec b$, но тогда ребро $\{a_{out}, b_{in}\}$ оказалось непокрытым, так как в минимальном вершинном покрытии C каждое ребро максимального паросочетания M содержит ровно одну вершину из покрытия C.

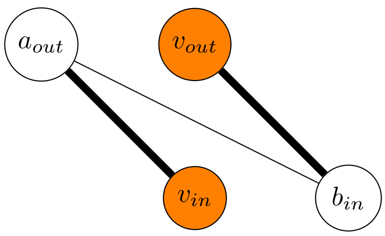

Рис. 4: **Невозможная** ситуация для минимального вершинного покрытия C, так как ребро $\{a_{out}, b_{in}\}$ осталось непокрытым ($a \prec v \prec b$)

Таким образом, в нашем графе есть ровно $n - m$ пар вершин $I = \{v_{in}^1, v_{out}^1, v_{in}^2, v_{out}^2, \ldots, v_{in}^{n-m}, v_{out}^{n-m}\}$ не пересекающихся с вершинным покрытие C. Заметим, что никакие вершины из этих пар не соединены ребром в графе H (так как иначе они были бы не покрыты вершинным покрытием), а значит каждая пара соответствующих вершин $\{v^1, v^2, \ldots, v^{n-m}\}$ в графе G является несравнимой.

Таким образом паросочетание M порождает покрытие из $n-m$ путей для графа G, а соответствующее M вершинное покрытие C порождает антицепь размера $n - m$, что доказывает утверждение теоремы, что $a(G) = c(G)$. $\square$

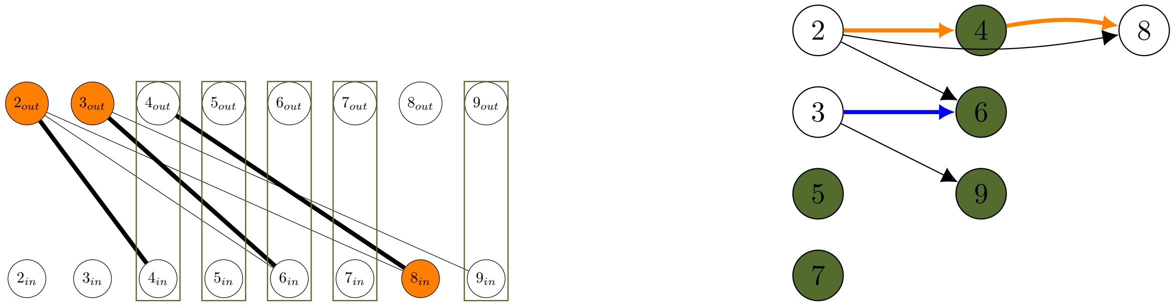

Рис. 5: Граф H, паросочетание M и вершинное покрытие C для отношения делимости на множестве $[2 \ldots 9]$. Зелёным цветом изображены элементы одной из наибольших антицепей: $\{4, 5, 6, 7, 9\}$