Сведение задач на ориентированных графах к паросочетаниям. Задачи для практики

Подготовил Сивухин Никита. По вопросам пишите на почту sivukhin.work+teach@gmail.com

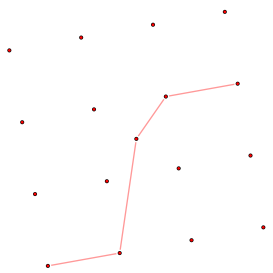
1. Докажите, что длина максимальной цепи $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ в частичном порядке $\prec$ равна минимальному количеству антицепей $\{A_1, A_2, \dots A_k\}$, покрывающих все элементы частично упорядоченного множества

2. Постройте алгоритм нахождения минимального покрытия частично упорядоченного множества антицепями за время $O(n^2)$

3. Докажите, что любая перестановка букв английского алфавита (26 букв) содержит **подпоследовательность** длиной хотя бы **6** букв в прямом или обратном порядке алфавита.

   Например, для перестановки `[g s q j n p i m e l c u y r v f x d h a o b k t z w]` существует подпоследовательность `[c d h k t w]` в прямом порядке алфавита и подпоследовательность `[s r o k]` обратном порядке

4. Докажите, что для любого множества из $rs + 1$ точки на плоскости $(p_1, p_2, \dots, p_{rs+1})$ найдется либо ломаная из r отрезков с положнительным наклоном $(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r},\ slope(p_{i_j}, p_{i_{j+1}}) > 0)$, либо ломаная из s отрезков с отрицательным наклоном $(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_r},\ slope(p_{i_j}, p_{i_{j+1}}) < 0)$



5. Рассмотрим n элементное множество и семейство подмножеств этого множества: $\mathcal{F} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$. Докажите, что если для любой пары $i \neq j$ верно, что $S_i \not\subseteq S_j$, то $k \leq C^n_{\lfloor n/2 \rfloor}$

6. Постройте алгоритм, который находит максимальную цепь в частичном порядке за время $O(n^2)$

7. Пусть в частичном порядке $\prec$ размер максимальной антицепи равен d. Покажите, что жадный алгоритм построения покрытия порядка цепями, выбирающий на каждом шагу цепь максимальной длины, построит ответа размера не более чем $O(d \log n)$.