Практика №7 по курсу «Дискретная математика» «Асимптотический анализ.»

Группы ФТ-203

Одной из основных целей асимптотического анализа является выявление основных свойств скорости роста функции в пределе и сравнение их между собой.

В асимптотическом анализе используется два следующих ключевых обозначения: «O»-большое и «o»-малое. Данные операторы определяют некоторый класс функций, ведущих себя особым образом:

- $g(x) \in O(f(x)) \Leftrightarrow$ если существует такая константа $C > 0$, что для всех $x > N_0$ верно неравенство $|g(x)| \leq C|f(x)|$;
- $g(x) \in \Omega(f(x)) \Leftrightarrow f(x) \in O(g(x))$;
- $g(x) \in \Theta(f(x)) \Leftrightarrow f(x) \in O(g(x)) \wedge f(x) \in \Omega(g(x))$;
- $g(x) \in o(f(x)) \Leftrightarrow$ если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N_ε, что для любого $x > N_\varepsilon$ верно $|g(x)| < \varepsilon|g(x)|$;
- $g(x) \in \omega(f(x)) \Leftrightarrow f(x) \in o(g(x))$;

Часто в записи заменяют символ принадлежности множеству на знак равенство, таким образом записи $x^3 + x = O(x^4)$ и $x^3 + x \in O(x^4)$ эквивалентны.

Задание 1. Докажите асимптотические утверждения

- $\log n^x \in O(\log n)$ для любой константы $x > 0$;
- $\log n \in o(n^x)$ для любой константы $x > 0$;
- $n^x \in O(2^n)$ для любой константы $x > 0$;
- $\log^x n \in o(n)$ для любой константы $x > 0$.

Существует правила комбинации асимптотических оценок. Достаточно полезными и простыми являются правила суммы и произведения:

Замечание 2 (Правило суммы)**.** Если $f_1 = O(g_1)$ и $f_2 = O(g_2)$, то $f_1 + f_2 = O(g_1 + g_2)$

Замечание 3 (Правило произведения)**.** Если $f_1 = O(g_1)$ и $f_2 = O(g_2)$, то $f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$

Немного менее тривиальными, но не менее полезными, являются следующие правила:

Задание 4 (Правило экспонирования)**.** Есил $f(n) \in O(g(n))$ и $g(n) = f(n) + \omega(1)$, то $2^{f(n)} \in O(2^{g(n)})$

Задание 5 (Правило логарифмирования)**.** Если $f(n) \in O(g(n))$ и $g(n) = \omega(1)$, то $\log f(n) \in O(\log g(n))$

Задание 6. Упорядочите функции от самых медленно растущих к самым быстро растущим (т.е. $f(n)$ должно идти левее $g(n)$, если $f(n) \in o(g(n))$):

$$\sqrt{2}^{\log_2 n}, n^2, \left(\frac{3}{2}\right)^n, n^3, \log n^2, \log^2 n, 2^n, \log\log n, \log n$$

Основная задача комбинаторики состоит в подсчете количества объектов, построенных по определённым правилам. К сожалению, задача точного подсчёта очень часто не имеет решения, а в тех случаях, когда получается вывести точную формулу, ей обычно неудобно пользоваться для больших значений параметра. В этом случае асимптотический анализ величин позволяет выразить основные характеристики роста значений через простые функции.

Задание 7. Покажите, что $\binom{n}{k} \in \Theta(n^k)$ для фиксированной констатны k (для всех $n \geq 2k$)

Для упрощения асиматотических выражений часто пригождается пара трюков:

Замечание 8 (Трюк №1)**. Факторизация через мажорирующую часть**
Рассмотрим функцию $f(n) = \log(\log n + \log\log n)$. Так как $\log\log n = o(\log n)$, то можно выразить выражение под логарифмом как произведение мажорирующей части на некоторый остаток:

$$\log(\log n + \log\log n) = \log\left(\log n(1 + \frac{\log\log n}{\log n})\right)$$

Преобразовывая логарифм произведения получаем: $f(n) = \log\log n + \log\left(1 + \frac{\log\log n}{\log n}\right)$. Так как $\log\log n = o(\log n)$, то $f(n) = \log\log n + o(1)$ (здесь мы пользуемся фактом, что $\log(1 + o(1)) = o(1)$).

Замечание 9 (Трюк №2)**. Логарифмирование выражения**
Рассмотрим функцию $f(n) = (\log n + \log\log n)^{1/\sqrt{\log\log n}}$. Рассмотрим логарифм этой функции:

$$\log f(n) = \frac{\log(\log n + \log\log n)}{\sqrt{\log\log n}}$$

Числитель был рассмотрен ранее, а значит $\log f(n) = \frac{\log\log n + o(1)}{\sqrt{\log\log n}} = \sqrt{\log\log n} + o(1)$.
Тогда $f(n) = e^{\sqrt{\log\log n} + o(1)}$.

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Определите функцию в выражении $\binom{3n}{n} = f(n)\Big(1 + o(1)\Big)$ пользуясь формулой Стирлинга:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n\Big(1 + o(1)\Big)$$

Задание 2. Сравните функции $n^{\log n}$ и $(\log n)^n$

Задание 3. Сравните функции $n^{\log\log\log n}$ и $(\log n)!$