Смежные паросочетанию задачи и их решение для двудольных графов

Подготовил Сивухин Никита. По вопросам пишите на почту sivukhin.work+teach@gmail.com

Смежные задачи

Для графа $G = (V, E)$ рассмотрим следующие часто встречающиеся оптимизационные задачи:

- Максимальное назвисимое множество (*maximum independent set*) — наибольшее по размеру подмножество вершин $I \subseteq V$ такое, что каждая пара вершин $v, u \in I$ не связана ребром $\{v, u\} \notin E$.
  Максимальный размер I обозначается как $\alpha(G)$

- Минимальное вершинное покрытие (*minimum vertex cover*) — наименьшее по размеру подмножество вершин $C \subseteq V$ такое, что для каждого ребра $e \in E$ существует вершина $v \in C$ инцидентная e.
  Минимальный размер C обозначается как $\tau(G)$

- Максимальное паросочетание (*maximum matching*) — наибольшее по размеру подмножество рёбер $M \subseteq E$ такое, что каждая пара рёбер $e_1, e_2 \in M$ не имеет общих вершин.
  Максимальный размер M обозначается как $\nu(G)$

- Минимальное рёберное покрытие (*minimum edge cover*) — наименьшее по размеру подмножество рёбер $B \subseteq E$ такое, что для каждой вершины $v \in V$ существует ребро $e \in B$ инцидентное v.
  Минимальный размер B обозначается как $\rho(G)$

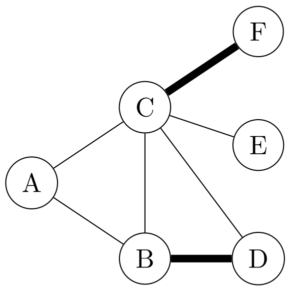

Рис. 1: Наибольшее паросочетание ($\nu(G) = 2$)

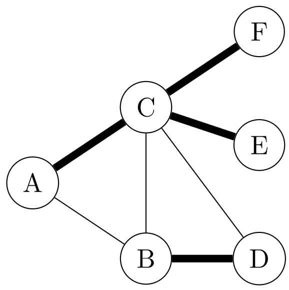

Рис. 2: Наименьшее рёберное покрытие ($\rho(G) = 4$)

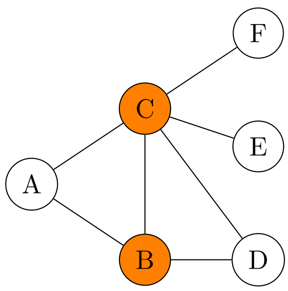

Рис. 3: Наименьшее вершинное покрытие ($\tau(G) = 2$)

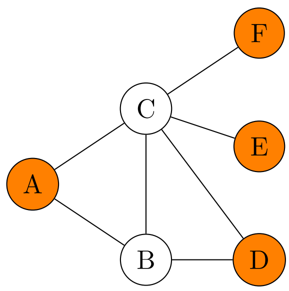

Рис. 4: Наибольшее независимое множество ($\alpha(G) = 4$)

Замечание 1. *Для любого графа $G = (V, E)$ верно, что $\nu(G) \le \tau(G)$*

Теорема 1 (Первое тождество Галлаи)**.** *Для любого графа $G = (V, E)$ верно, что $\alpha(G) + \tau(G) = |V|$*

Доказательство. Несложно показать, что $\tau(G) \le |V| - \alpha(G)$, так как дополнение $\overline{I}$ к любому независимому множеству $I \subseteq V$ является корректным вершинным покрытием (если существует ребро $\{u, v\} \in E$ такое, что $u, v \notin \overline{I}$, то $u, v \in I$, что невозможно по определению).

Аналогично, $\alpha(G) \ge |V| - \tau(G)$, так как дополнение $\overline{C}$ к любому вершинному покрытию $C \subseteq V$ является корректным независимым множеством. □

Теорема 2 (Второе тождество Галлаи)**.** *Для любого графа $G = (V, E)$ без изолированных вершин верно, что $\nu(G) + \rho(G) = |V|$.*

Доказательство. Несложно показать, что $\nu(G) \geq |V| - \rho(G)$. Заметим, что рёбра наименьшего рёберного покрытия B образуют граф без циклов (иначе можно было бы уменьшить множество) — то есть лес из деревьев. Количество компонент связности в таком графе $G = (V, B)$ равно $|V| - \rho(G)$, а также все компоненты связности содержат хотя бы **2** вершины. Тогда если взять из каждой компоненты по одному ребру, то получится корректное паросочетание, а значит $\nu(G) \geq |V| - \rho(G)$.

Также покажем, что $\rho(G) \leq |V| - \nu(G)$. Паросочетание M покрывает $2\nu(G)$ вершин V_M, значит $|V| - 2\nu(G)$ вершин осталось непокрытыми. Заметим, что непокрытые вершины $V \setminus V_M$ образуют независимое множество, так как если между ними было бы ребро, то им можно расширить паросочетание M. Тогда, так как в графе нет изолированных вершин, можно взять произвольное ребро для каждой вершины из $V \setminus V_M$, получив таким образом корректное рёберное покрытие, имеющее размер $\nu(G) + (|V| - 2\nu(G)) = |V| - \nu(G)$, а значит $\rho(G) \leq |V| - \nu(G)$. $\square$

Замечание 2. *Доказательство второго тождества Галлаи содержит алгоритм построения минимального рёберного покрытия по максимальному паросочетанию*

Удивительным образом, для случая двудольных графов $G = (X, Y, E)$ можно доказать строгое равенство $\tau(G) = \nu(G)$.

Для доказательства рассмотрим декомпозицию вершин двудольного графа $G = (X, Y, E)$ на множества X^+, X^-, Y^+, Y^-, порождённую паросочетанием M. Для этого оринтируем рёбра графа в соответствие с паросочетанием M (для $\{x, y\} \in M$ ориентация в сторону $y \to x$, для $\{x, y\} \notin M$ — наоборот в $x \to y$) и построим множество V^+ из всех вершин достижимых из **ненасыщенных** вершин доли X. Тогда определим $X^+ = X \cap V^+$, $Y^+ = Y \cap V^+$, $X^- = X \setminus X^+$, $Y^- = Y \setminus Y^+$.

Замечание 3. *Заметим, что для построения декомпозиции используется тот же граф с наведённой ориентацией G_M, что используется для поиска M-чередующейся цепи. Поэтому декомпозиция является естественным продолжением алгоритма построения паросочетания, где после нахождения наибольшего паросочетания нужно запустить аналогичный поиск в глубину из всех ненасыщенных вершин, который в итоге посетит все вершины из множества V^+.*

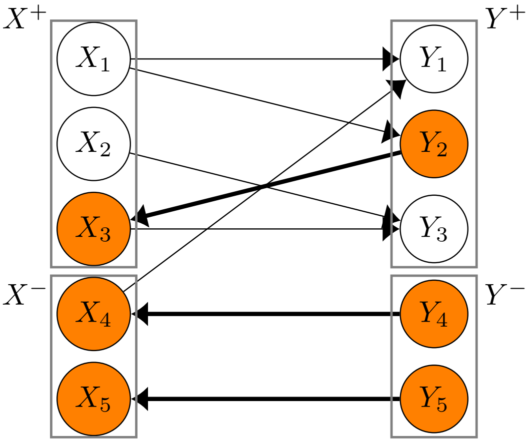

Рис. 5: Декомпозиция вершин двудольного графа
Насыщенные вершины окрашены в оранжевый цвет

Если исходное паросочетание M являлось наибольшим, то построенная декомпозиция обладает некоторыми интересными свойствами:

1. Все вершины из X^- являются насыщенными (по построению)

2. Все вершины из Y^+ являются насыщенными (иначе в графе существовала бы M-чередующаяся цепь)

3. В графе нет ориентированных рёбер в сторону $X^+ \to Y^-$ и $Y^+ \to X^-$ (иначе конечная вершина ребра должна была быть в множестве V)

4. В графе нет рёбер в сторону $Y^- \to X^+$

   В данном случае вершина из X является насыщенной, а значит попасть в неё в рамках нашего построения можно было только по ребру из паросочетанием, следовательно вершина из Y тоже должна была быть посещённой

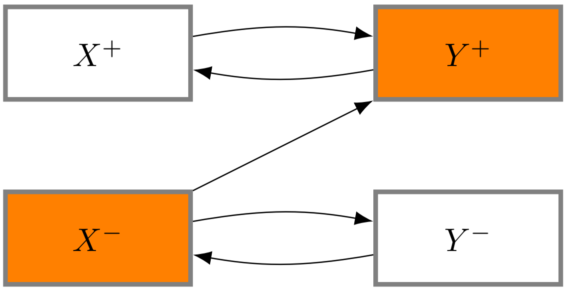

Рис. 6: Структура рёбер для декомпозиции относительно **наибольшего** паросочетания M
Оранжевым выделены компоненты, **полностью** состоящие из насыщенных вершин

Теорема 3 (Теорема Кёнига-Эгервари)**.** *Для двудольного графа $G = (X, Y, E)$ верно, что размер наибольшего паросочетания равен размеру наименьшего вершинного покрытия*

Доказательство. Из свойств (3) и (4) следует, что множество $C = X^- \cup Y^+$ является корректным вершинным покрытием.

Заметим также, что из свойств (1) и (2) следует, что C состоит только из насыщенных вершин, причем так как рёбер между компонентами X^+ и Y^- нет, то любое ребро из M содержит ровно одну вершин из C, а значит $|C| = |M|$.

Таким образом $\tau(G) \le \nu(G)$, но так как $\nu(G) \le \tau(G)$, то $\nu(G) = \tau(G)$. $\square$

Замечание 4. *Из теоремы Кёнига-Эгервари следует, что в графе $G = (X, Y, E)$ для любого оптимального паросочетания $M \subseteq E$ и оптимального вершинного покрытия $C \subseteq V$ верно, что каждое ребро $e \in M$ содержит ровно одну вершину $v \in C$*