Практика №1 по курсу «Дискретная математика» «Бинарные отношения и матрицы»

Группы ФТ-203

Бинарным отношением ρ между множествами A и B называется произвольное подмножество $\rho \subseteq A\times B$. Основной список свойств бинарного отношения ρ между элементами множества M:

- рефлексивность: $\forall x \in M : x\rho x$,
- антирефлексивность: $\forall x \in M : \neg(x\rho x)$,
- симметричность: $\forall x, y \in M : (x\rho y) \Rightarrow y\rho x$,
- антисимметричность: $\forall x, y \in M : (x\rho y \wedge y\rho x) \Rightarrow x = y$,
- транзитивность: $\forall x, y, z \in M : (x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow x\rho z$,
- полнота: $\forall x, y \in M : x\rho y \vee y\rho x$

Вопрос 1. Бинарное отношение ρ над M называется ассиметричным, если $\forall x, y \in M : \neg(x\rho y) \Rightarrow y\rho x$. В чем отличие антисимметричных отношений от асимметричных? Правда ли, что произвольное антисимметричное отношение является ассиметричным? А наоборот?

Выделяют некоторые полезные наборы свойств, которые часто встречаются для бинарных отношений:

- рефлексивное, симметричное, транзитивное отношение — отношение эквивалентности
- рефлексивное, антисимметричное, транзитивное отношение — отношение порядка
- антирефлексивное, антисимметричное, транзитивное отношение — отношение строгого порядка
- полное, антисимметричное, транзитивное отношение — отношение линейного порядка

Задание 2. Исследуем несколько отношений на наличие перечисленных выше свойств:

1. $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, x\rho y \Leftrightarrow x \leq y$,
2. $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, x\rho y \Leftrightarrow x|y$,
3. $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, x\rho y \Leftrightarrow 4|(y - x)$
4. $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, x\rho y \Leftrightarrow |x - y| < 4$
5. $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, x\rho y \Leftrightarrow gcd(x, y) = 1$
6. $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, x\rho y \Leftrightarrow gcd(x, y) \neq 1$
7. $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, x\rho y \Leftrightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{Z}$

Вопрос 3. Сколько существует рефлексивных, симметричных, транзитивных и **полных** отношений над множеством из n элементов?

Обратным отношением к $\rho \subseteq M^2$ называется отношение $\rho^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \rho\}$.

Определим также композицию бинарных отношений $\alpha \subseteq A \times B$ и $\beta \subseteq B \times C$ как отношенение $\gamma = \alpha\beta = \{(x, z) \mid \exists y : (x, y) \in \alpha \wedge (y, z) \in \beta\}$.

Разберём определённые операции над бинарными отношениями на примере следующей задачи:

Задание 4. По отношению ρ найти бинарные отношения $\rho^{-1}, \rho^2, \rho\rho^{-1}, \rho^{-1}\rho$:

- $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y|x\}$

Матрицей бинарного отношения ρ на элементах конечного множества $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ называется бинарная матрица M_ρ такая, что $M_\rho[i, j] = 1 \Leftrightarrow (a_i, a_j) \in \rho$. Матрица построена над кольцом с элементами $\{0, 1\}$, где в качестве сложения используется операция $\max\{a, b\}$, а в качестве умножение — $\min\{a, b\}$ (или же логическое ИЛИ и логическое И, что эквивалентно).

Некоторые свойства бинарного отношения ρ с матрицей M_ρ имеют естественную интерпретацию в матричном виде:

1. рефлексивность — на диагонали стоят только единицы ($tr(M_\rho) = n$),
2. антирефлексивность — на диагонали стоят только нули ($tr(M_\rho) = 0$),

3. симметричность — $M_\rho = M_\rho^t$,

4. матрица обратного отношения ρ^{-1} — транспонированная матрица M_ρ^{-1},

5. матрица композции отношений α, β — произведение соответствующих бинарных матриц $M_\alpha \cdot M_\beta$.

Задание 5. Представим в матричном виде несколько простых бинарных отношений:

1. $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, x\rho y \Leftrightarrow xy > 0$,

2. $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, x\rho y \Leftrightarrow xy = y^2$

А также проверим на истинность следующие общие утверждения:

1. Для любой пары отношений α, β на M верно, что $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}, \alpha^{-1}$,

2. Для любых отношений α, β, γ на M верно, что $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$,

3. Для любой пары отношений α, β на M верно, что $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Помимо теоретико-множественной и матричной интерпретаций бинарных отношений, существует также графовая интерпретация. Так, любому бинарному отношению ρ над множеством M можно поставить в соответствие ориентированный граф (орграф) $G_\rho = (V, E)$, где $V = M$ и $E = \rho$. Каждая из интерпретаций имеет свои преимущества и в зависимости от ситуации является более подходящей для решения конкретной задачи.

Вопрос 6. Назовём отношение ρ функциональным, если существует такая функция $f : M \mapsto M$, что $\rho = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}$. Охарактеризиуйте класс функциональных отношений используя графовую интерпретацию.

Оператором замыкания на M называется функция $Cl : 2^M \mapsto 2^M$ удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $X \subseteq Cl(X)$ — экстенсивность,

2. $X \subseteq Y \Rightarrow Cl(X) \subseteq Cl(Y)$ — монотонность,

3. $Cl(Cl(X)) = Cl(x)$ — идемпотентность

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. По отношению ρ найти бинарные отношения $\rho^{-1}, \rho^2, \rho\rho^{-1}, \rho^{-1}\rho$:

1. $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = x^2\}$

2. $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$

3. $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x \leq 2y\}$

Задание 2. Пусть M — некоторое множество, $\delta_M = \{(a, a) \mid a \in M\}, \alpha \subseteq M^2$. Доказать, что следующие высказывания равносильны:

1. α антисимметрично и $\alpha \cap \alpha^{-1} \subseteq \delta_M$

2. α линейно и $\alpha \cup \alpha^{-1} = M^2$

Задание 3. Верно ли, что ни одна пара из трёх свойств — рефлексивность, сииметричность, транзитивность — не влечёт третье?

Задание 4. Пусть $M = \{1, 2, 3, \ldots, 25\}, \alpha = \{(x, y) \in M^2 \mid \exists k, l \in \mathbb{N} : x^k = y^l\}$. Доказать, что α — отношение эквивалентности и построить соответствующее разбиение.