Практика №8 по курсу «Дискретная математика»
«Рекуррентные соотношения»

Группы ФТ-203

Формально, рекуррентная формула определяется как соотношение вида $f(n) = F(n, f(n-1), f(n-2), \ldots, f(n-p))$, то есть n-й член последовательности выражается через p предыдущих и номер n.

Решение формулы называется некоторый замкнутый вид для выражения очередного члена $f(n) = G(n)$, зависящий только от n.

Задание 1. Найдите выражение для элементов последовательности $f(n)$, заданных рекуррентным соотношением:

$$
\begin{aligned}
&f(n) = f(n-1) + f(n-2) + \cdots + f(0)\\
&f(0) = 1
\end{aligned}
$$

В общем случае рекуррентные соотношения не решаются, поэтому нужно рассматривать более узкий класс рекуррент. Так, существует следующие способы классификации рекуррентных соотношений:

- **Порядок** соотношения: $f(n) = F(n, f(n-1), f(n-2), \ldots, f(n-k))$ — соотношение k-го порядка;
- **Линейность** соотношения: $f(n) = a_1(n) \cdot f(n-1) + a_2(n) \cdot f(n-2) + \cdots a_k(n) \cdot f(n-k) + a(n)$;
- **Однородность** соотношения: $f(n) = F(f(n-1), f(n-2), \ldots, f(n-k))$;

Отдельно стоит рассмотреть максимально ограниченный класс рекуррент, а именно **линейные однородные** рекуррентные соотношения k-го порядка с **постоянными коэффициентами**. Данные рекурренты имеют следующую форму:

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \cdots + a_k f(n-k)$$

Ясно, что без начальных значений для k первых элементов $(f(0), f(1), \ldots, f(k-1))$ данное соотношение имеет бесконечное число решений (каждое из которых будет порождаться собственным инициализирующим вектором для первых значений функции f), поэтому формула для $f(n)$ представляет собой некоторое пространство решений, а имеет независимые переменные.

$f(n) = (C_{1,1} + \cdots + C_{1,m_1} n^{m_1 - 1})\lambda_1^n + \cdots + (C_{s,1} + \cdots + C_{s,m_s} n^{m_s - 1})\lambda_s^n$, где λ_i — это корни хар. многочлена: $\lambda^k = a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-2} + \cdots + a_k$

Задание 2. Решите рекуррентное соотношение в общем виде: $f(n) = 5f(n-1) - 6f(n-2)$.

Задание 3. Найдите выражение для последовательности заданной рекуррентным соотношением $f(n) = 4f(n-1) + 3f(n-2) - 18f(n-3)$ при условии, что $f(0) = f(1) = f(2) = 1$.

Посмотрим на более естественные задачи, если так можно сказать:

Задание 4. Какова вероятность того, что среди n бросков честной монеты никогда не встретится двух орлов подряд?

Задание 5 (Gambler's Ruin Problem)**.** Пусть A и B играют в игру, в каждом раунде которой либо A выигрывает один доллар у B с вероятностью p, либо B выигрывает один доллар у A с вероятностью $1-p$. Игра заканчивается, когда у одного из игроков кончаются деньги. Определите вероятность выигрыша игрока A, если в начале игры у A было c долларов, а у B — $n-c$.

Научимся избавляться от неоднородности:

Задание 6. Решите рекуррентное соотношение в общем виде: $f(n) = 4f(n-1) - 4f(n-2) - 5n + 2$.

Задание 7. Найдите формулу для a_n и b_n заданных соотношениями: $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$ и $b_n = -a_{n-1} + 4b_{n-1}$, если $a_0 = 0, b_0 = 1$.

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Решите рекуррентное соотношение $f(n) = \frac{1+f(n-1)}{f(n-2)}$ при $f(0) = \alpha, f(1) = \beta$ (числа α, β таковы, что все члены последовательности определены).

Задание 2. Сайгонская башня во всем похожа на Ханойскую, но три стержня расположены по кругу, и переносить диск можно только на следующий стержень по часовой стрелке. Составьте рекуррентные соотношения для числа шагов, необходимого для перемещения n дисков (а) на следующий стержень (б) на предыдущий стержень.