Практика №1 по курсу «Дискретная математика»
«Мощность множества. Кардинальные числа»

Группы ФТ-203

Множества A и B равомощны, если между существует биективное отображение $f : A \mapsto B$. Вспомним, что отображение называется биективным, если оно одновременно является инъективным и сюръективным:

- $f : A \mapsto B$ — инъективно, если $\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 : f(a_1) \neq f(a_2)$;
- $f : A \mapsto B$ — сюръективно, если $\forall b \in B\ \exists a \in A : f(a) = b$.

Вопрос 1. Докажите, что для любой сюръективной функции $f : A \mapsto B$ существует функция $h : B \mapsto A$ такая, что $f \circ h = id$ (h — правая обратная функция, $\forall x : id(x) = x$).

Вопрос 2. Докажите, что для любой инъективной функции $f : A \mapsto B$ существует левая обратная функция $h : B \mapsto A$ такая, что $h \circ f = id$ (h — левая обратная функция, $\forall x : id(x) = x$).

Аксиоматизация теории множеств необходима для того, чтобы построить достаточно крепкий фундамент перед тем, как изучать бесконечные множества. Главная (и в некотором смысле единственная) система аксиом ZFC состоит из следующих утверждений, записывающихся на языке логики первого порядка:

1. Аксиома объёмности (равенство множеств);
2. Аксиома пустого множества;
3. Аксиома бесконечности (существование множества натуральных чисел);
4. Аксиома пары (существование множества $\{A, B\}$);
5. Аксиома объединения (можно сконструировать объединение всех элементов множества);
6. Схема преобразования/выделения (образ множества под действием функции — тоже множество);
7. Аксиома существования булеана;
8. Аксиома регулярности (не существует такого множества A, что $A \in A$);
9. Аксиома выбора (для множества A можно определить f на его элементах так, что $\forall B \in A : f(B) \in B$).

Вопрос 3. Необходима ли аксиома выбора, чтобы выбрать один элемент из множества $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \mathcal{N}\}$?

Вопрос 4. Необходима ли аксиома выбора, чтобы выбрать один элемент из каждого элемента бесконечного множества $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, ..., \{2i + 1, 2i + 1\}, ...\}$?

Вопрос 5. Есть ли существенная разница между доказательстами первых двух заданий?

Отношение равномощности является отношение эквивалентности (рефлексивно, симметрично, транзитивно), поэтому множества разделяются на классы эквивалентности по мощности. Каждому классу можно назначить уникальную метку, которое называется **кардинальным** числом.

Начало последовательности совпадает с множеством $\mathbb{Z}^+$, после чего идет минимальное кардинальное число, соответствующее минимальному по мощности бесконечному множеству — $\aleph_0$.

Задание 6. Определите мощность множества $\bigcup_{k=1}^{\infty}(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k)$, где $X_i = \{1, 2, \ldots, i\}$.

Задание 7. Докажите, что декартово произведение конечного числа счётных множест счётно.

Задание 8. Докажите, что множество рациональных чисел счётно ($|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$).

Часто для доказательства равенства мощностей бесконечных множеств сложно установить непосредственное биективное отображение между множествами. В таких случаях удобно пользоваться теоремой Бернштейна-Кантора:

Теорема 9. Биекция между множествами A и B существует тогда и только тогда, когда существуют инъекции из A и B и из B в A.

Вопрос 10. Докажите, что $|[0, 1]^2| = |\mathbb{R}^2|$.

Помимо кардинала $\aleph_0$, соответствующего счетному множеству, существуют другие бесконечные кардиналы, что напрямую следует из теоремы Кантора о булеане:

Теорема 11. Для любого множества A верно, что $|A| < |2^A|$.

Лемма 12. $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$.

Задание 13. Докажите, что для бесконечного множества A и не более чем счётного множества B верно утверждение, что $|A| = |A \cup B|$.

Задание 14. Докажите, что объединение двух континуальных множеств континуально.

Задание 15. Докажите, что множество всех непрерывных на $\mathbb{R}$ функций континуально.

На кардинальных числах можно определить операцию возведения в степень $Z = X^Y$ так, что кардинал Z соответствует мощности множеству всех функций из множества Y на множество X.

Задание 16. Докажите, что множество $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ континуально.

Задание 17. Докажите, что множество $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ более чем континуально.

Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Найти мощность множества всех перестановок множества $\mathbb{N}$ (перестановка π — биективное отображение $\mathbb{N}$ само на себя).

Задание 2. Найти мощность множества всех монотонных функций на действительной прямой.

Задание 3. Докажите, что мощность множества точек разрыва монотонной функции на $\mathbb{R}$ не более чем счётно.

Бонусные задачи:

Задание 4. Докажите, что $|\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}| = 2^{(2^{\aleph_0})}$.

Задание 5. Докажите, что $|\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}| = 2^{\aleph_0}$.