Практика №2 по курсу «Дискретная математика»
«Отношения порядка»

Группы ФТ-203

Бинарное отношение $\rho \subseteq A^2$ называется отношением порядка, если оно является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным.

Частично упорядоченное множество представляет собой пару из множетсва A и определённого на нём отношения порядка $\preceq$.

Для компактного изображения отношения порядка удобно рассматривать производное отношение — отношение покрытия: $a \lhd b \Leftrightarrow a \preceq b, a \neq b, \forall c : (a \preceq c \preceq b) \Rightarrow c \in \{a, b\}$.

Рассмотрим ЧУМ $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ с отношением делимости:

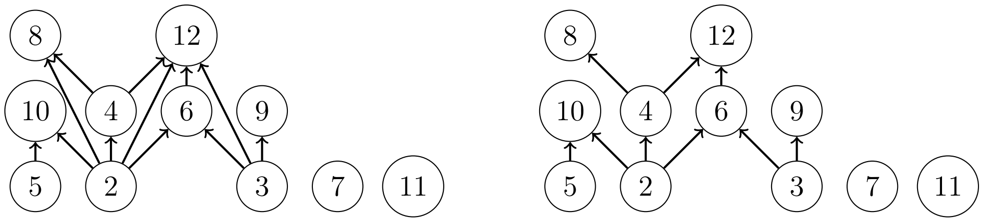

Рис. 1: слева — граф отношения порядка; справа — диаграмма Хассе отношения покрытия

Задание 1. Построить диаграмму частично упорядоченного множества $\langle 2^{\{a,b,c\}}, \subseteq \rangle$.

Линейным порядком называется частично упорядоченное множество $\langle A, \preceq \rangle$, где нет несравнимых элементов, то есть для любой пары $a, b \in A$ верно, что $a \preceq b$ или $b \preceq a$.

Тривиальным примером является линейный порядок $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$. Можно также ввести линейный порядок для менее тривиальных множеств, например для $\langle \mathbb{N}^2, \preceq \rangle$: $(a, b) \preceq (c, d) \Leftrightarrow (a \leq c) \vee (a = c \wedge b \leq d)$.

Вопрос 2. Как задать линейный порядок на множестве $\cup_{i=1}^{\infty} \mathbb{N}^i$?

Будем говорить, что частичный порядок $\langle A, \preceq_2 \rangle$ продолжает частичный порядок $\langle A, \preceq_1 \rangle$, если $\preceq_1 \subseteq \preceq_2$. Рассмотрим тогда множество $E(\langle A, \preceq \rangle) = \{\langle A, \preceq' \rangle$ — линейный порядок $| \preceq \subseteq \preceq' \}$ — множество линейных порядков, продолжающих заданный частичный порядок. Из лекций известно, что $E(\langle A, \preceq \rangle) \neq \varnothing$.

Вопрос 3. Вычислите размер множеств $E(\langle A, \varnothing \rangle)$ и $E(\langle A, \{(a_i, a_j) \in A^2 \mid i \leq j\} \rangle)$

Докажем следующее любопытное утверждение:

Задание 4. Докажите, что $\bigcap_{\langle A, \preceq' \rangle \in E(\langle A, \preceq \rangle)} \preceq' = \preceq$, другими словами — пересечение всех линейных продолжений частичного порядка равно самому частичному порядку.

Задание 5. Найдите все линейные порядки, являющиеся продолжением частичных порядков, заданных диаграммами на рисунке:

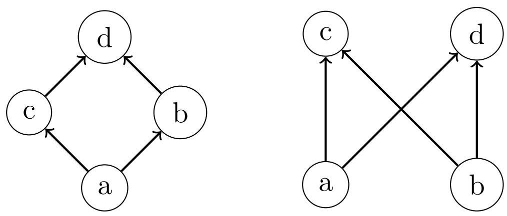

Рис. 2: частичные порядки

Биекция $f : A_1 \mapsto A_2$ является изоморфизмом ЧУМ-ов $(A_1, \preceq_1)$ и $(A_2, \preceq_2)$, если:

$$a \preceq_1 b \Leftrightarrow f(a) \preceq_2 f(b) \text{ для любых } a, b \in A_1$$

Построим изоморфизм между ЧУМ-ов: $\langle 2^{\{a,b,c\}}, \subseteq \rangle, \langle \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}, | \rangle$:

$$f : 2^{\{a,b,c\}} \mapsto \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}, f(X) = 2^{[a \in X]} 3^{[b \in X]} 5^{[c \in X]}$$

Несложно показать, что для любой пары подмножеств $X \subseteq Y \subseteq 2^{\{a,b,c\}}$ верно, что $f(X) \mid f(Y)$, поэтому f является изоморфизмом.

Вопрос 6. Проверьте изоморфность следующих пар ЧУМ-ов:

- $\langle \{3,4,5,6,7\}, | \rangle$ и $\langle \{4,5,6,7,8\}, | \rangle$;
- $\langle \{3,4,5,6,7\}, | \rangle$ и $\langle \{5,6,7,8,9\}, | \rangle$.

Изоморфизм не меняет структуру частичного упорядоченного множество. Так, например, изоморфизм сохраняет минимальные и наименьший элементы множества:

- $a \in A$ является минимальным элементом ЧУМ-а $\langle A, \preceq \rangle$, если $\forall b \in A : b \preceq a \Rightarrow b = a$;
- $a \in A$ является наименьшим элементом ЧУМ-а $\langle A, \preceq \rangle$, если $\forall b \in A : a \preceq b$.

Вопрос 7. Можно ли построить изоморфизм между ЧУМ-ами $\langle [0,1], \leq \rangle$ и $\langle (0,1), \leq \rangle$?

Частично упорядоченные множества можно комбинировать, получая новые ЧУМ-ы. Рассмотрим следующие операции для пары непересекающихся чумов ($A_1 \cap A_2 = \varnothing$):

- Объединение $\langle A_1 \cup A_2, \preceq \rangle = \langle A_1, \preceq_1 \rangle \cup \langle A_2, \preceq_2 \rangle$, где $a \preceq b \Leftrightarrow (a, b \in A_1 \wedge a \preceq_1 b) \vee (a, b \in A_2 \wedge a \preceq_2 b)$
- Сумма $\langle A_1 \cup A_2, \preceq \rangle = \langle A_1, \preceq_1 \rangle \oplus \langle A_2, \preceq_2 \rangle$, где $a \preceq b \Leftrightarrow (a, b \in A_1 \wedge a \preceq_1 b) \vee (a, b \in A_2 \wedge a \preceq_2 b) \vee (a \in A_1 \wedge b \in A_2)$
- Произведение $\langle A_1 \times A_2, \preceq \rangle = \langle A_1, \preceq_1 \rangle \times \langle A_2, \preceq_2 \rangle$, где $(a, b) \preceq (c, d) \Leftrightarrow a \preceq_1 c \wedge b \preceq_2 d$

Для начала изучим перечисленные выше операции на примерах:

Задание 8. Обозначим за **1** единственное частично упорядоченное множество из одного элемента. Найдем множества, заданные следующими выражениями:

- $C_3 = \mathbf{1} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}$
- $C_n = \mathbf{1} \oplus \cdots \oplus \mathbf{1}$
- $B = (\mathbf{1} \oplus \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1} \cup \mathbf{1})$
- $X = C_2 \times C_3$
- $Y = C_3 \times B$

Теперь докажем общие свойства данных операций:

Задание 9. Свойства:

1. Коммутативность произведения: $\langle A_1, \preceq_1 \rangle \times \langle A_2, \preceq_2 \rangle \cong \langle A_2, \preceq_2 \rangle \times \langle A_1, \preceq_1 \rangle$;
2. Ассоциативность объединения:$(\langle A_1, \preceq_1 \rangle \cup \langle A_2, \preceq_2 \rangle) \cup \langle A_3, \preceq_3 \rangle \cong \langle A_1, \preceq_1 \rangle \cup (\langle A_2, \preceq_2 \rangle \cup \langle A_3, \preceq_3 \rangle)$;
3. Ассоциативность суммы:$(\langle A_1, \preceq_1 \rangle \oplus \langle A_2, \preceq_2 \rangle) \oplus \langle A_3, \preceq_3 \rangle \cong \langle A_1, \preceq_1 \rangle \oplus (\langle A_2, \preceq_2 \rangle \oplus \langle A_3, \preceq_3 \rangle)$;
4. Выполняется ли свойство дистрибутивности относительно произведения и суммы?

Частично упорядоченное множество $\langle A, \succeq \rangle$ называется двойственным к ЧУМ-у $\langle A, \preceq \rangle$, если $\succeq = (\preceq)^{-1}$. ЧУМ называется самодвойственным, если $\langle A, \preceq \rangle$ и $\langle A, \succeq \rangle$ изоморфны.

Задание 10. Изобразите попарно неизоморфные диаграммы следующих ЧУМ-ов и найдите среди них пары двойственных и самодвойственные ЧУМ-ы:

a ЧУМ-ы над множеством из 3 элементов;

b ЧУМ-ы над множеством из 4 элементов.

Задания для самостоятельного решения

Отправлять решения на почту с темой письма: `%НОМЕР ГРУППЫ%.%ФИО%.%Практика 2%`

Задание 1. Обозначим через $\mathcal{E}(X)$ множество всех отношений эквивалентности на множестве X. Постройте диаграмму частично упорядоченного множества $\langle \mathcal{E}(X), \subseteq \rangle$ для случаев $|X| = 3, |X| = 4$.

Задание 2. Найдите все ЧУМ-ы из задания 10.b, которые не могут быть представлены в виде последовательности операций суммы и объединения над ЧУМ-ами **1**. Для каждого такого ЧУМ-а приведите доказательство невозможности построения.
Бонус: приведите явное выражение построения для всех остальных чумов из задания 10.b.

Задание 3. Когда произведение двух линейных порядков тоже будет линейным порядком?

Задание 4. Докажите, что для произвольных частично упорядоченных множеств $\langle A, \preceq_1 \rangle, \langle B, \preceq_2 \rangle, \langle C, \preceq_3 \rangle$ верно, что $\langle A, \preceq_1 \rangle \times (\langle B, \preceq_2 \rangle \cup \langle C, \preceq_3 \rangle) \cong (\langle A, \preceq_1 \rangle \times \langle B, \preceq_2 \rangle) \cup (\langle A, \preceq_1 \rangle \times \langle C, \preceq_3 \rangle)$