Рёберная покраска двудольных графов

Подготовил Сивухин Никита. По вопросам пишите на почту sivukhin.work+teach@gmail.com

Разберём задачу рёберной покраски графа, формулирующуяся следующим образом:

Задача 1 (рёберная покраска графа)**.** *Для неориентированного графа без петель $G = (V, E)$ необходимо назначить цвета рёбрам $c : E \mapsto C$ таким образом, чтобы любой паре инцидентных рёбер $e_1, e_2 \in E, e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$ были назначены разные цвета $c(e_1) \neq c(e_2)$.*

Для корректной раскраски графа G будем говорить, что цвет x *свободен* в вершине v, если ни одно ребро цвета x **не инцидентно** вершине v. Если же вершине инцидентно ребро цвета x, то будет говорить, что цвет x *занят* в вершине v.

Задача оптимальной рёберной раскраски заключается в нахождении назначения цветов, исользуя множество C минимально возможного размера. Оптимальный размер множества C называется **хроматическим индексом** и может обозначаться в литературе как $\chi_1(G)$ (нужно не путать *хрометический индекс* с *хроматическим числом* графа, которое определяется как минимальное число цветов необходимое для корректной расскраски вершин графа и обозначается как $\chi(G)$ или $\chi_0(G)$).

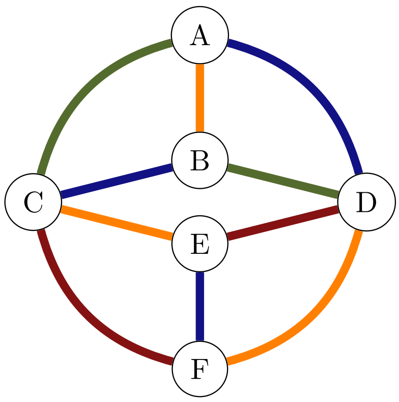

Рис. 1: Оптимальная рёберная покраска графа G в 4 цвета ($\chi_1(G) = 4$)

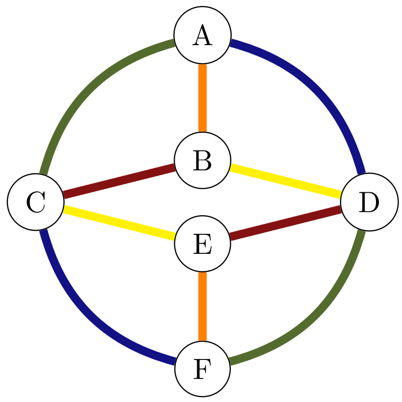

Рис. 2: Корректная рёберная покраска графа G в 5 цветов (жёлтый цвет — дополнительный)

Замечание 1. *Если обозначить за $\Delta(G)$ — максимальную степень вершины в графе, то $\chi_1(G) \geq \Delta(G)$, потому что все рёбра инцидентные вершине с максимальной степенью должны быть разноцветными.*

Покажем, что рёбра любого графа всегда можно покрасить в $2\Delta(G) - 1$. Для этого будем жадным образом назначать цвета рёбрам графа в некотором порядке. На очередной итерации, цвет ребра $e = \{x, y\}$ определяется как произвольный цвет $c \in [1 \ldots 2\Delta - 1]$, который не занят уже покрашенными рёбрам вершин x и y. Так как степень каждой вершины не больше Δ, то покрашенных соседей для вершин x и y не больше чем $2\Delta - 2$, а значит среди множества из $2\Delta - 1$ цветов всегда найдется хотя бы один свободный.

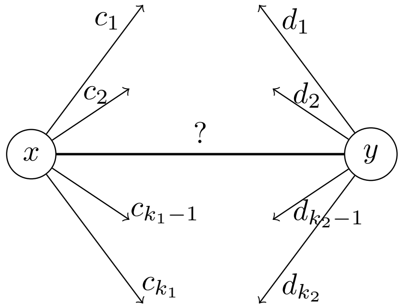

Рис. 3: Очередная итерация жадного алгоритма. Так как $k_1, k_2 \leq \Delta - 1$, то $k_1 + k_2 \leq 2\Delta - 2 < 2\Delta - 1$ и хотя бы один цвет из $2\Delta - 1$ свободен

Рёберная покраска двудольных графов

Несложно показать, что для двудольного графа *хроматический индекс* всегда равен $\Delta(G)$.

Лемма 1. *Рёбра любого k-регулярного двудольного графа $G = (X, Y, E)$ (возможно с кратными рёбрами) можно представить как объединение из k паросочетаний*

Доказательство. Известным фактом является утверждение, что в любом регулярном двудольном графе существует **совершенное** паросочетание: $|M| = |X| = |Y|$ (его можно легко вывести из теоремы Холла). Тогда можно доказать лемму по индукции: для $k = 1$ утверждение верно, а шаг индукции можно произвести, если удалить рёбра произвольного совершенного паросочетания и свести таким образом задачу к $(k-1)$-регулярному графу. □

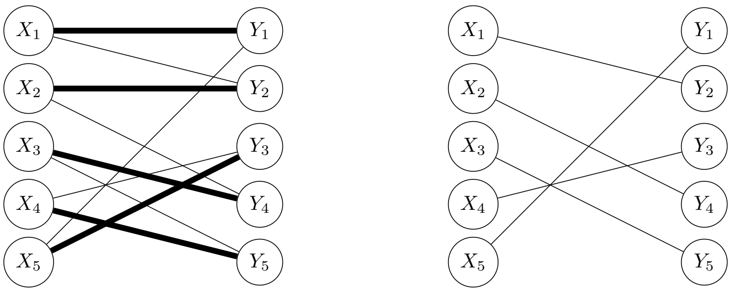

Рис. 4: Совершенное паросочетание в 2-регулярном графе и сведение задачи к $(k-1) = 1$ регулярному графу

Сведём теперь задачу о рёберной покраске в двудольном графе к рёберной покраске в двудольном k-регулярном графе:

Лемма 2. *Любой двудольный граф $G = (X, Y, E)$ с максимальной степенью вершины Δ можно достроить до Δ-регулярного двудольного графа $G = (X \cup X', Y \cup Y', E \cup E')$ (возможно с кратными рёбрами) путём добавления вершин и рёбер.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $|X| \leq |Y|$. Тогда, в первую очередь добавим в граф $|Y| - |X|$ вершин (X'), чтобы доли были одинакового размера.

Теперь покажем, что любой двудольный граф с долями одинакового размера и максимальной степенью вершины Δ можно достроить до Δ-регулярного. Пусть n — количество вершин в каждой доле, а e — количество рёбер в графе. Тогда, проведём индукцию по количеству рёбер в графе. Если $e = n\Delta$, то граф уже является Δ-регулярным (так как все степени вершин не превосходят Δ), а если $e < n\Delta$, то в каждой доле найдется хотя бы одна вершина со степенью меньше Δ: $x \in X \cup X', y \in Y, \max\{\Delta(x), \Delta(y)\} < \Delta(G) \Rightarrow$ можно добавить в граф ребро $\{x, y\} \in E'$ и произвести индуктивный шаг. □

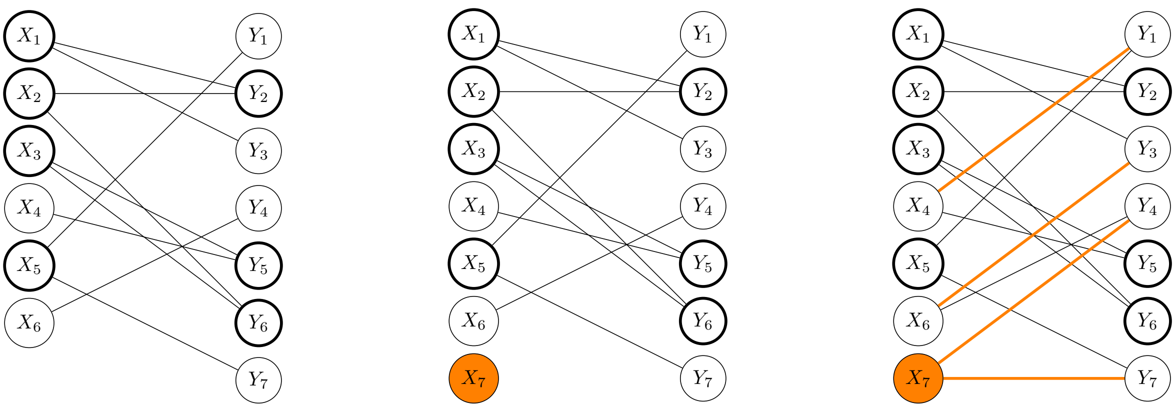

Рис. 5: Процесс достраивания графа G с $\Delta = 2$ до 2 регулярного графа: сначал добавляется вершина X_7, после чего соединяются рёбрами вершины с $d(v) < \Delta$

Таким образом из лемм 1 и 2 следует, что любой двудольный граф с $\Delta(G)$ можно достроить до $\Delta(G)$-регулярного, для которого всегда можно найти разбиение рёбер на $\Delta(G)$ паросочетаний — т.е. корректную рёберную покраску в $\Delta(G)$ цветов.

Достроить двудольный граф до регулярного можно за время $O(\Delta n)$, а найти Δ совершенных паросочетаний после этого за время $O(\Delta n^2 \Delta) = O(n^2 \Delta^2) = O(n^4)$.

Рёберная покраска двудольного графа за $O(n^3)$

Существует элегантный алгоритм покраски двудольного графа за $O(n^3)$, для краткого описания которого понадобиться ввести новые понятия.

Для пары различных цветов $a, b \in C, a \neq b$ и графа с корректной рёберной покраской $G = (V, E), c : E \mapsto C$, рассмотрим подграф, состоящий только из рёбер покрашенных в цвета a или b: $G_{ab} = (V, \{e \mid c(e) \in \{a, b\}\})$. Так как степень каждой вершины не превосходит 2, то граф G_{ab} состоит из набора цепочек и циклов чётной длины (так как цвета рёбер вдоль любого пути должны чередоваться). Связную компоненту без циклов в графе G_{ab} будем называть ab-путём (т.е. максимальный по включению путь, который нельзя расширить рёбрами с какого-либо из концов).

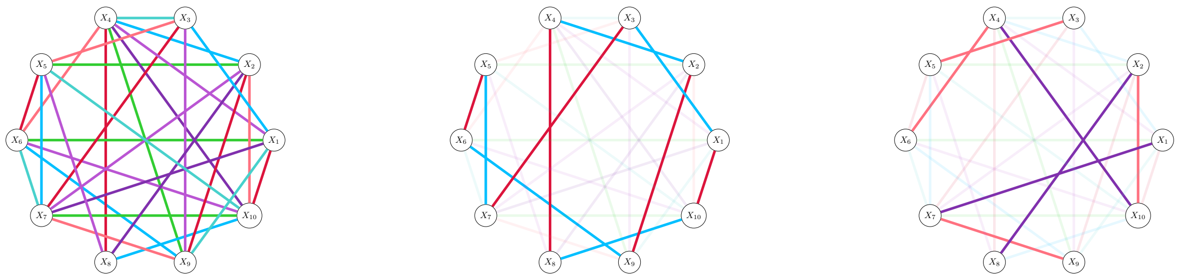

Рис. 6: Пример графа с правильной раскраской и подграфов относительно двух пар разных цветов: G_{12} и G_{34} В первом случае граф состоит из одного чётного цикла, во втором — из трёх ab-путей.

Для ab-пути (т.е. максимальной по включению ациклической компоненты графа G_{ab}) определим операцию *инвертирования* как смена цветов всех рёбер пути на противоположный. Другими словами, инвертирование ab-пути $P_{ab} = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}\}$ задает новую раскраску c_{ab} следующим образом:

$$c'(e) = \begin{cases} c(e), & \texttt{если } e \notin P \\ b, & \texttt{если } e \in P \wedge c(e) = a \\ a, & \texttt{если } e \in P \wedge c(e) = b \end{cases}$$

Лемма 3. *В результате инвертирования любого ab-пути $P_{ab} = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}\}$ в корректно покрашенном графе $G = (V, E)$ получается корректная покраска.*

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что ребра инцидентные каждой вершине будут разноцветными после операции инвертирования. Понятно, что корректность могла нарушиться только для вершин пути P. Заметим, что для всех внутренних вершин $v_2, v_3, \dots, v_{k-1}$ множество использованных цветов не изменилось (так как до и после инвертирования данным вершинам было инцидентно по одному ребру цветов a и b). Осталось заметить, что если ребро $\{v_1, v_2\}$ имело цвет a, то для вершины v_1 нет инцидентного ребра цвета b (иначе мы могли бы расширить данный путь и P_{ab} не являлся бы компонентной связности графа G_{ab}), а значит в результате инвертирование не могло образоваться одноцветных рёбер инцидентных v_1. Аналогичные рассуждения можно провести для противоположного конца пути v_k. □

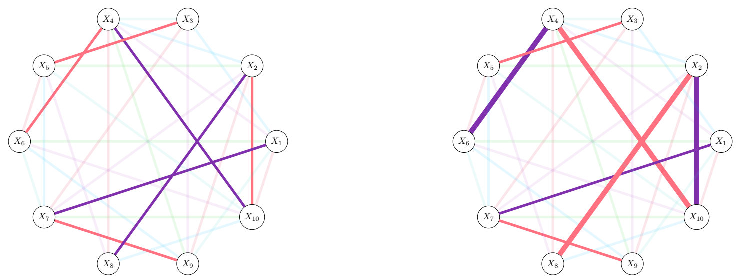

Рис. 7: Операция инвертирования вдоль одного пути $\{\{X_6, X_4\}, \{X_4, X_{10}\}, \{X_{10}, X_2\}, \{X_2, X_8\}\}$

Пользуясь леммой 3 можно построить алгоритм покраски рёбер двудольного графа за кубическое время. Для этого будем рассматривать рёбра графа по порядку и определять цвет для каждого ребра по очереди, попутно перекрашивая уже обработанные рёбра, чтобы сохранить корректность покраски.

Рассмотрим очередное ребро $e_i = \{x, y\}, x \in X, y \in Y$ графа $G = (X, Y, E)$. Так как степень вершин x, y не превосходит Δ, то среди Δ цветов $[1 \dots \Delta]$ существует пара a, b таких, что a — свободен для вершины x, а b — для вершины y.

Если цвет b также разрешён в вершине x, то текущее ребро можно покрасить в цвет b без нарушения свойств покраски.

В противном случае, существует ребро $\{x, v_0\}$ цвета b, а значит ab-путь $P_{ab} = \{\{x, v_0\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}\}$, начинающийся в вершине x, содержит хотя бы одно ребро (вершина x обязательно является концом некоторого пути в G_{ab}, так как степень вершины не более 1). В таком случае применим операцию инвертирования относительно пути P_{ab}, в результате чего цвет b станет свободным в вершине x. Заметим, что вершина y не может принадлежать пути P_{ab}, потому что она должна быть противоположным концом пути (так как её степень в графе G_{ab} не более одного), но так как цвета начинают чередование с b, то у конца ab-пути, заканчивающегося в правой доле, цвет b будет занят, а в вершине y он свободен.

Таким образом после инвертирования пути покраска c' уже рассмотренных рёбер будет корректна, а для вершин x и y цвет b будет являться свободным, а значит в него можно покрасить очередное ребро e_i.

Если поддерживать `hash-map[(v, c)]` рёбер определенного цвета c, инцидентных вершине v, то построить путь P_{ab} на каждой итерации можно за время $O(|V|)$, а значит итоговая асимптотика алгоритма будет $O(|V||E|)$, что эквивалентно $O(n^3)$ для случая плотных графов.

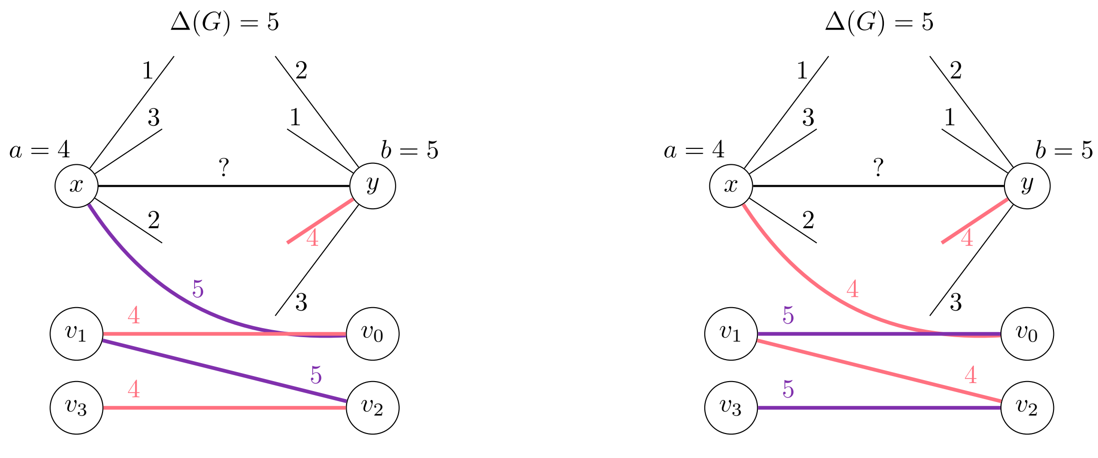

Рис. 8: Итерация работы алгоритма покраски. После чередования P_{ab} цвет $b = 5$ стал свободным в вершине x

Теорема Визинга

Удивительным результатом является теорема Визинга, которая доказывает верхнюю границу на *хроматический индекс* любого графа:

Теорема 1 (Визинг, 1964)**.** *Для любого неориентированного графа* ***без кратных рёбер*** *существует рёберная покраска в* $\Delta(G) + 1$ *цвет.*

Для доказательства данной теоремы рассмотрим вспомогательный объект — «веер» $\langle f \dots w_l \rangle$ относительно вершины x в графе $G = (V, E)$ с частично определённое покраской $c : E \mapsto C \cup \{\perp\}$.

Для последовательности вершин $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ будет обозначать следующую вершину за v в последовательности как v^+ (например, для последовательности вершин (a, b, d, e, c), вершина b^+ обозначает вершину d).

«Веером» $\langle f \dots w_l \rangle$ называется **непустая** последовательность $(f, w_1, w_2, \dots, w_\ell)$ **различных** соседей вершины x таких, что:

F1 Ребро $\{x, f\}$ — не покрашено

F2 Если ребро $\{x, u^+\}$ имеет цвет c, то данный цвет свободен для предыдущей вершины веера u

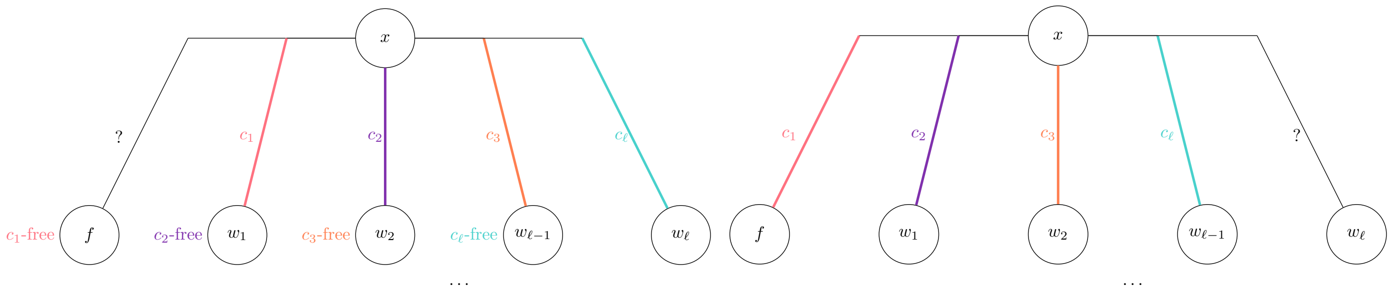

Рис. 9: Веер относительно вершины x и его «поворот»

Из определения веера можно определить операцию *«поворота»*, где цвета рёбер циклически сдвигаются на один влево, и таким образом каждое ребро $\{x, w\}$ получает цвет ребра $c(\{x, w^+\})$, а ребро $\{x, w_\ell\}$ становится непокрашеным. Из свойства веера F2 видно, что данная операция оставляет частичную покраску рёбер корректной.

Алгоритм начинает свою работу с полностью непокрашенного графа и постепенно определеяет один из $\Delta + 1$ доступных цветов для непокрашенных рёбер. Общая структура алгоритма выглядит следующим образом:

1. Рассмотрим произвольную вершину x для которой есть хотя бы одно непокрашенное ребро
2. Пусть $\langle f \dots w_\ell \rangle$ — это произвольный максимальный по включению «веер» относительно вершины x
3. Пусть a — свободный цвет для вершины x, а b — свободный цвет для вершины w_ℓ (**важно**, что мы красим граф в $\Delta + 1$ цвет — в таком случае для любой вершины всегда есть хотя бы один свободный цвет)
4. Инвертируем ab-путь начинающийся в x
5. Пусть w — вершина такая, что $w \in \langle f \dots w_l \rangle$ и $\langle f \dots w \rangle$ является веером, где цвет b свободен для вершины w
6. Повернём «веер» $\langle f \dots w \rangle$ и покрасим ребро $\{x, w\}$ в цвет b

Для доказательства корректности алгоритма достаточно показать, что на шаге (5) всегда найдется вершина w обладающая необходимыми свойствами.

Для этого рассмотрим 3 случая:

1. Все рёбра, соединяющие x и вершины «веера» $\langle f, w_\ell \rangle$, имеют цвет отличный от b

   Так как «веер» максимальный по включению, то в этом случае все ребра инцидентные x имеют цвет отличный от b (иначе «веер» можно было бы расширить). В таком случае вершина x является как a так и b свободной, поэотому ab-путь состоит из одной вершины (x) и положив $w = w_\ell$ мы получим, что алгоритм произведет «поворот» оригинального веера и покрасит $\{x, w_\ell\}$ в цвет b.

2. В «веере» есть вершина v^+ такая, что ребро $\{x, v^+\}$ цвета b и ab-путь из x **не содержит** v

   В этом случае можно показать, что $\langle f, v\rangle$ будет являться корректным «веером», а так как $\{x, v^+\}$ имеет цвет b, то этот цвет свободен в v по определению. Значит, положив $w = v$, можно выполнить дальнешие шаги алгоритма.

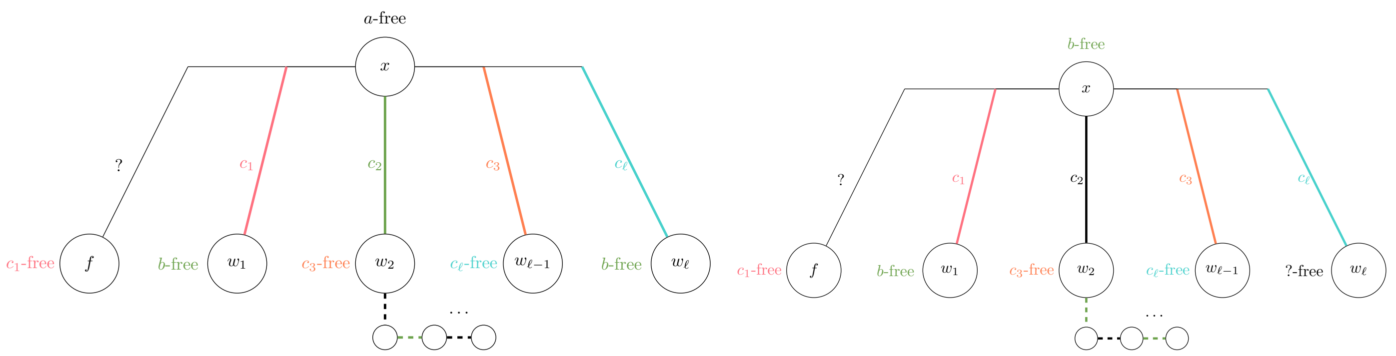

Рис. 10: Инвертирование пути ($v^+ = w_2, v = w_1$). Так как v не содержится в пути — то её можно использовать для финального «веера». Последняя вершина «веера» w_ℓ после чередования могла поменять свой набор цветов и использовать её нельзя

3. В «веере» есть вершина v^+ такая, что ребро $\{x, v^+\}$ цвета b и ab-путь из x **содержит** v

   Так как вершина v является свободной от цвета b, то она является конечной вершиной любого ab-пути. Заметим, что вершина w_ℓ также должна быть конечной вершиной, а значит в данном случае она не содержится в ab-пути, а значит её можно выбрать для продолжения алгоритма как $w = w_\ell$.

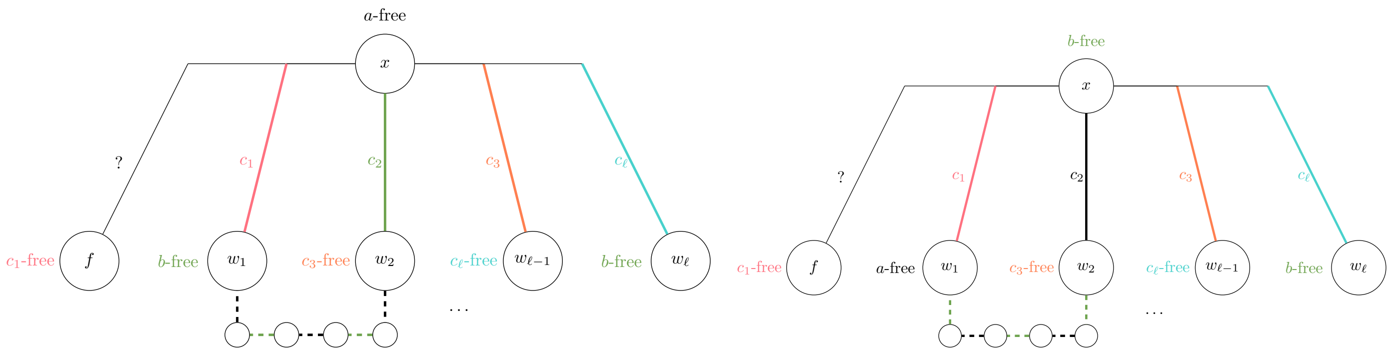

Рис. 11: Инвертирование пути ($v^+ = w_2, v = w_1$). Так как w_ℓ не содержится в пути — то её можно использовать для финального «веера».

Таким образом, данный алгоритм конструктивно окрашивает рёбра графа в $\Delta + 1$ цвет. Если искать максимальный по включению «веер» наивно на каждой итерации за квадрат, то итоговый алгоритм будет иметь асимптотику $O(|V|^2|E|)$.

Ссылки

- Рёберная раскраска в двудольном графе за время $O(\sqrt{n}m \log n)$: Using Euler Partitions to Edge Color Bipartite Multigraphs
- Рёберная раскраска в двудольном графе за время $O(m \log m)$ (статья всего на 2 страницы!): A simple algorithm for edge-coloring bipartite multigraphs
- Доказательство теоремы Визинга: A Constructive Proof of Vizing's Theorem