

Смежные паросочетанию задачи и их решение для двудольных графов.

Задачи для практики

Подготовил Сивухин Никита. По вопросам пишите на почту sivukhin.work+teach@gmail.com

1. Покажите, что граф $G = (V, E)$ является двудольным тогда и только тогда, когда $\alpha(H) \geq \frac{1}{2}|H|$ для любого подмножества вершин $H \subseteq V$.
2. (I) Обозначим за Δ максимальную степень вершины в графе $G = (V, E)$. Покажите, что в любом двудольном графе существует паросочетание размера не менее $\frac{|E|}{\Delta}$.
3. (I) Для двудольного графа $G = (X, Y, E)$ постройте алгоритм нахождения множества $S \subseteq X$ такого, что $H(S) = |S| - |N(S)|$ максимально, где $N(S)$ — это множество всех соседей вершин из S . Чему равно максимальное значение $H(S)$ для графа G ?
4. (I) Постройте алгоритм классификации вершин (А — принадлежит всем наименьшим вершинным покрытиям, Н — не принадлежит ни одному наименьшему вершинному покрытию, Е — иначе) в двудольном графе $G = (X, Y, E)$ при заданном наибольшем паросочетании M за время $O(V + E)$.
5. Постройте граф с максимально возможным отношением $\frac{\tau(G)}{\nu(G)} = \alpha$. Чему равно α ?
6. Таблица $n \times n$ заполнена **неотрицательными** числами так, что сумма в каждой строке и каждом столбце равна 1 (иными словами, таблица задает дважды стохастическую матрицу). Докажите, что можно выбрать n ячеек с **положительными** числами так, чтобы в каждой строке и в каждой колонке будет выбрано ровно одна ячейка

0.2	0.5	0.3	0
0.1	0.5	0	0.4
0	0	0.4	0.6
0.7	0	0.3	0

7. Докажите, что любую дважды стохастическую матрицу Q можно представить в виде суммы $Q = c_1 P_1 + c_2 P_2 + \dots + c_k P_k$, где P_i — некоторая матрица перестановки, т.е. бинарная (0/1) матрица где в каждой строке и в каждом столбце находится ровно один единичный элемент.