Паросочетания в графах. Задачи для практики

Подготовил Сивухин Никита. По вопросам пишите на почту sivukhin.work+teach@gmail.com

1. Покажите, что дерево имеет не более одного «совершенного» паросочетания

2. **(I)** Постройте пример графа с паросочетанием M, в котором поиск в глубину не сможет найти M-чередующуюся цепь. Более конкретно, необходимо построить такой пример, что процедура `find_augmenting_path` не найдет M чередующуюся цепь в графе относительно паросочетания `match`

```cpp
bool dfs(int v, vector<vector<int>> &g, vector<int> &match, vector<int> &used) {
  if (used[v]) {
    return false;
  }
  used[v] = 1;
  for (int to : edges[v]) {
    if (match[to] == -1 || dfs(match[to], match, used)) {
      return true;
    }
  }
  return false;
}

bool find_augmenting_path(vector<vector<int>> &g, vector<int> &match) {
  auto used = vectro<int>(g.size(), 0);
  for (int v = 0; v < (int)g.size(); v++) {
    if (match[v] == -1 && dfs(v, g, match, used)) {
      return true;
    }
  }
  return false;
}
```

3. **(I)** Докажите обобщение теоремы Холла: в любом **двудвольном** графе $G = (X, Y, E)$ наибольшее паросочетание имеет размер не менее чем $|X| - \max_{S \subseteq X}\{|S| - |N(S)|\}$

4. Постройте оптимальную стратегию для игроков в следующей игре: в графе $G = (V, E)$ (**необязательно** двудольном) игроки по очереди выбирают **различные** вершины $v_0, v_1, v_k, \ldots$ так, что для $i \geq 0$ верно, что между v_i и v_{i+1} есть ребро. Игрок, который не может сделать ход — проигрывает

5. **(I)** Граф называется k-регулярным ($k > 0$), если степень каждой вершин равна k. Докажите, что в любом **двудольном** k-регулярном графе существует **совершенное** паросочетание

6. Постройте экспоненциальный алгоритм поиска наибольшего паросочетания в **произвольном** графе $G = (V, E)$:
   - За время $O(2^n n(n + m))$
   - За время $O(2^n m)$
   - Вероятностный алгоритм, который находит ответ за время $O(2^{n/2} n^2 m)$ с высокой вероятностью?

7. **(I)** Постройте алгоритм нахождения паросочетания наибольшего веса в **двудольном** графе $G = (L, R, E)$, где каждой вершине левой доли сопоставлен некоторый вес $c_v(\ell_i)$, а вес ребра $e_i = \{\ell_i, r_i\}$ задается как вес вершины левой доли $c_e(e_i) = c_v(\ell_i)$.

8. Докажите, что в любом простом графе (без кратных ребер и петель; **необязательно** двудольном) с **минимальной** степенью вершины k существует паросочетание размера хотя бы $\min\{k, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$

9. Докажите, что в любом простом графе (без кратных ребер и петель; **необязательно** двудольном) с E рёбрами и максимальной степенью вершины Δ существует паросочетание размера хотя бы $\frac{E}{2\Delta}$

10. **(*)** Пусть для **двудольного** графа $G = (X, Y, E)$ верно, что степень каждой вершины из X нечётна, а также любые две вершины $v, u \in X$ имеют **чётное** число общих соседей: $|N(v) \cap N(u)| \equiv_2 0$. Докажите, что существует паросочетание насыщающее все вершины из X