Домашняя контрольная работа №2 по курсу «Теория алгоритмов» «Вычислительная сложность»

Группы ФТ-301, ФТ-302

Решения присылать на почту `sivukhin.nikita@yandex.ru` с темой `ТАЛГ 2020. {Группа}. КР 2.`
Срок сдачи решений — `28.12.20 16:00 ЕКБ`

1. Назовём машину Тьюринга M «забывчивой», если траектория движения её каретки не зависит от содержания входной ленты, а зависит только от длины входа (то есть для любого входа длины n позиция каретки после i-го шага M будет всегда одинаковой — $pos_n(i)$). Докажите, что для любой «правильной» функции $T : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, если $\mathcal{L} \in \mathtt{DTIME}(T(n))$, то существует «забывчивая» машина Тьюринга, распознающая язык $\mathcal{L}$ за время $O(T(n)^2)$.

2. Докажите, что множество языков $\mathtt{P}$ замкнуто относительно применения звезды Клини. Напомним, что $\mathcal{L}^0 = \{\varepsilon\}, \mathcal{L}^i = \{wv \mid w \in \mathcal{L}^{i-1} \wedge v \in \mathcal{L}\}$, $\mathcal{L}^* = \cup_{i \geq 0} \mathcal{L}^i$, а $\mathtt{P}^* = \{\mathcal{L}^* \mid \mathcal{L} \in \mathtt{P}\}$.

3. Рассмотрим задачу подсчёта количества блоков из букв a в строке вида $a^{i_1}\#a^{i_2}\#\cdots\#a^{i_k}, i_j > 0$ (для входа $aaa\#a\#aa\#a\#aaa$ ответом машины Тьюринга является число $5 = 101_2$, записанное в двоичной системе счисления).

   - Покажите, что существует машина Тьюринга с двумя лентами, которая решает данную задачу за время $O(n)$, где n — это длина входа
   - Покажите, что существует машина Тьюринга с одной лентой, которая решает данную задачу за время $O(n \log n)$

4. Пусть $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathtt{NP} \cap \mathtt{co\text{-}NP}$. Покажите, что симметрическая разность этих языков также принадлежит пересечению классов, т.е. $\mathtt{L}_1 \oplus \mathtt{L}_2 = \{x \mid x$ принадлежит ровно одному из множеств $\mathtt{L}_1, \mathtt{L}_2\} \in \mathtt{NP} \cap \mathtt{co\text{-}NP}$.