UNIVERSITY OF TUNIS EL MANAR

FACULTE DES SCIENCES DE TUNIS

Mémoire de Master

Spécialité : Mathématiques

Titre :

Principes d'incertitude associés à la transformation de Fourier à fenêtre

Soutenu le 07 Octobre 2017
par

Hkimi Siwar

Membres du Jury :

Atallah Baraket Amel	Professeur	Président
Brahim Kamel	Maître de conférences	Examinateur
Omri Slim	Maître de conférences	Directeur de mémoire

DEDICACES

A l'âme de mon grand père, l'homme qui m'a appris dès l'enfance, que le vrai pouvoir c'est d'arriver jusqu'au bout de mes rêves, et de viser loin sans peur,
A ma grand mère qui a toujours été à mes côtés, qui m'a élevé avec l'amour d'apprendre
A ma mère, ma source de force, de tendresse et de gentillesse, la femme qui m'a tout donné et qui a tout sacrifié pour faire du moi ce que je suis aujourd'hui,
A mon père qui m'a aidé de bien comprendre la vie,
A ma petite soeur Rania,
Aux souvenirs de mes deux oncles Mokhtar et Mohammed,
A mon oncle Abd lahfidh,
A mon oncle Mounir et ses enfants Rayen et Mariem,
A mon oncle Najib ainsi que ses enfants Iyed et Assil,
A ma tante Kmar,
A toute ma famille et tous mes amis A tous ceux qui m'ont donné la force de continuer Je vous dédie ce travail.

Je vous aime tous et je vous porterai toujours dans mon âme et dans mon coeur.
♡

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord mon directeur de mémoire de master monsieur Slim Omri, pour sa patience, et surtout pour sa confiance, ses remarques et ses conseils, sa disponibilité et sa bienveillance. Qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde gratitude.

Je voudrais également remercier les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer mon travail.

Je tiens aussi à remercier monsieur Lakhdar Rachdi ainsi que tout les enseignants du département pour leur soutien inestimable.

A tous mes enseignants qui m'ont initié aux valeurs authentiques, en signe d'un profond respect et d'un profond amour, merci à vous tous.

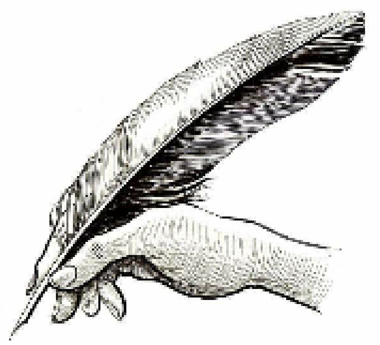

Table des matières

"L'analyse mathématique peut encore saisir les lois des phénomènes. Elle nous les rend présents et mesurables, et semble être une faculté de la raison humaine destiné à suppléer à la brièveté de la vie et à l'imperfection des sens. Et ce qui est plus remarquable encore, elle suit la même marche dans l'étude de tous les phénomènes. Elle les interprète par le même langage, comme pour attester l'unicité et la simplicité de l'univers"

- Joseph Fourier, 1822 -

Introduction

Le terme "principe d'incertitude" ou "principe d'indétermination" est apparu pour la première fois en 1927 en mécanique quantique quand Werner Heisenberg [16] a établi pour la première fois qu'il existait une limite à la précision avec laquelle on souhaite déterminer les grandeurs de deux caractéristiques complémentaires d'une particule à grande vitesse. Ces caractéristiques complémentaires pouvant être la position et la quantité de mouvement de la particule. Heisenberg a ainsi montré qu'on ne peut pas déterminer simultanément et avec une précision arbitraire la position et la quantité de mouvement d'une telle particule. En d'autres termes

Werner Heisenberg
Prix Nobel de Physique

"Plus on est précis dans la détermination de la position d'une particule, moins on l'est sur la détermination de sa quantité de mouvement et vice versa."

La formulation théorique de ce principe a été établi en 1928, reliant ainsi l'écart type de la position σ_x et l'écart type de la quantité de mouvement σ_p par l'inégalité suivante

$$\sigma_x \sigma_p \geqslant \frac{h}{4\pi},$$

où h désigne la constante de Planck.

Plus tard, Pauli et Weyl ont donné la version mathématique de ce principe en montrant que pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|xf\|_{2,d}\|y\widehat{f}\|_{2,d} \geqslant \frac{d}{2}\|f\|_{2,d},$$

où $\widehat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}^d,\ \widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle x|y\rangle} d\mu_d(x),$$

et μ_d désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ définie par $d\mu_d(x) = \dfrac{dx}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}$.

Ainsi, en analyse harmonique, les principes d'incertitude stipulent de manière générale qu'une fonction et sa transformée de Fourier ne peuvent pas être localisées simultanément et aussi précisément qu'on souhaite. Durant ces dernières décennies, plusieurs auteurs ont établi plusieurs principes d'incertitude en interprétant de différantes manières l'incertitude et la localisation [12, 15], nous nous contentons ici de citer quelques exemples. L'inégalité de Heisenberg montre qu'une fonction et sa transformée de Fourier ne peuvent pas toutes les deux être simultanément concentrées autour de zéro, ou plus généralement autour de deux points donnés. Dans le même contexte, Faris [9] et Price [27, 28] ont montré que cela reste vrai y compris au voisinage de plusieurs points donnés. Dans un autre contexte, Hardy [14] a étudié la décroissance à l'infinie d'une fonction et sa transformée de Fourier en montrant que pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $ab > \dfrac{1}{4}$, on a

$$\text{si} \quad \begin{cases} \|fe^{a|\cdot|^2}\|_{\infty,d} < +\infty \\ \|\widehat{f}e^{b|\cdot|^2}\|_{\infty,d} < +\infty \end{cases} \quad \text{alors} \quad f = 0.$$

D'autres auteurs se sont intéressés à étudier les supports respectifs d'une fonction et sa transformée de Fourier. Dans ce contexte, Donoho et Starck [8] ont montré qu'étant donné deux parties mesurables S et T de $\mathbb{R}^d$ et étant donné deux réels $\varepsilon_S, \varepsilon_T > 0$ et une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, si $\|\chi_{S^c}f\|_{2,d} \leqslant \varepsilon_S\|f\|_{2,d}$ et $\|\chi_{T^c}\widehat{f}\|_{2,d} \leqslant \varepsilon_T\|f\|_{2,d}$, alors

$$\mu_d(S)\mu_d(T) \geqslant (1 - \varepsilon_S - \varepsilon_T)^2.$$

Benedicks [3] d'un autre côté, a montré que pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, si f et $\widehat{f}$ sont à supports de mesures finies, alors $f = 0$.

Amrein et Berthier [1] ont par ailleurs établi une version plus forte du théorème de Benedicks, en montrant que pour toutes parties S et Σ de $\mathbb{R}^d$ de mesures finies, il existe une constante positive $C(S,\Sigma)$ telle que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|f\|_{2,d}^2 \leqslant C(S,\Sigma)\left(\|\chi_{S^c}f\|_{2,d}^2 + \|\chi_{\Sigma^c}\widehat{f}\|_{2,d}^2\right).$$

Plus tard, Nazarov [26] a établi qu'en dimension 1, cette constante $C(S,\Sigma)$ est de la forme $C(S,\Sigma) = C_0 e^{C_0 \mu_1(S)\mu_1(\Sigma)}$ où C_0 est une constante explicite indépendante de S et de Σ. Cela montre que $C(S,\Sigma)$ dépend uniquement des mesures de S et de Σ et non pas de leurs structures ensemblistes ou topologiques. Jaming [20] a généralisé ce résultat en multidimension en montrant dans ce cas que la constante de Nazarov dépenderait d'une grandeur liée à la géométrie de l'espace.

Certains auteurs à l'instar de Beckner [2] ou Hörmander [18] ont de leur côté étudié l'incertitude en terme d'intégrabilité d'une fonction et de sa transformée de Fourier. En effet, en 1975, Beckner [2] a établi plusieurs principes d'incertitude dont le principe d'incertitude en terme d'entropie stipulant que pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|f\|_{2,d} = 1$, on a

$$\mathscr{E}(|f|^2) + \mathscr{E}(\widehat{|f|^2}) \geqslant d(1-\ln 2),$$

où l'entropie d'une mesure de probabilité ρ est définie par [29]

$$\mathscr{E}(\rho) = -\int_{\mathbb{R}^d} \ln(\rho)(x)\rho(x)d\mu_d(x).$$

Quand à Hörmander, il a établi en 1991 sur une idée de Beurling [4], que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ vérifiant

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |f(x)||\widehat{f}(y)|e^{|xy|}d\mu_d(x)d\mu_d(y) < +\infty,$$

alors, $f = 0$. Ce résultat a été généralisé plus tard en 2003 par Bonami, Demage et Jaming [6] en un principe d'incertitude quantitatif plus fort impliquant notamment les principe de Morgan, Hardy et Gelfand-Shilov.

En théorie du signal, la transformée de Fourier d'un signal donné, représente l'ensemble ainsi que les amplitudes des fréquences du signal appelé aussi le spectre du signal. Cependant, l'un des problèmes majeurs que pose la transformation de Fourier, est que cette représentation fréquentielle est globale et ne donne aucune localisation temporelle. En effet, le spectre du signal nous donne l'ensemble des fréquences qui composent le signal avec leur amplitudes respectives, mais ne nous indique rien sur les localisations temporelles de ses fréquences. Existent-elles au début du signal ? à la fin ? sur toute la durée ?. La transformation de Fourier n'est pas capable de répondre à cette question. On dit alors qu'elle perd la localisation. La notion de représentations temps-fréquence a donc été imaginée dans le but de palier à ce problème et de décrire la composition fréquentielle d'un signal sans renoncer à la localisation temporelle des fréquences qu'il contient. Une telle représentation doit contenir nécessairement et simultanément la variable temporelle et la variable fréquentielle dans un espace dit l'espace temps-fréquence.

Dennis Gabor
Prix Nobel de Physique

La représentation temps-fréquence la plus simple a été introduite par Gabor et s'appelle la transformation de Fourier à fenêtre (TFF) ou encore transformation de Gabor. Il existe bien entendue d'autres représentations temps-fréquence à l'instar de la fonction ambiguïté radar ou la transformation de Wigner qui sont étroitement liées à la transformation de Fourier à fenêtre. Cependant, les dernières décennies ont vu apparaître une nouvelle représentation temps-fréquence plus adaptée à un certains types de signaux, dite transformation en ondelettes dont les applications en théorie du signal et en traitement d'images sont nombreuses et intéréssantes mais dépassent le cadre de notre travail. Dans ce mémoire, on optera pour la notation $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ pour désigner l'espace temps fréquence et ce dont le but de mettre en exègue la variable temporelle et la variable fréquentielle. Soit $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ une fonction non nulle dite "fenêtre", alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ la transformée de Fourier de f à fenêtre g est définie par

$$\forall (x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d,\ \mathscr{V}_g(f)(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g(t-x)}e^{-i\langle \omega | t\rangle} d\mu_d(t).$$

Au vu de cette définition, il est évident que le choix de la fenêtre dépend du signal à étudier. En effet, si le signal à analyser est non stationnaire, l'idée de la TFF est de découper ce signal en fractions supposées stationnaires au moyen d'une fenêtre g, où l'indice x représente le positionnement temporel de cette fenêtre et donc le positionnement du spectre correspondant, comme le montre la figure suivante

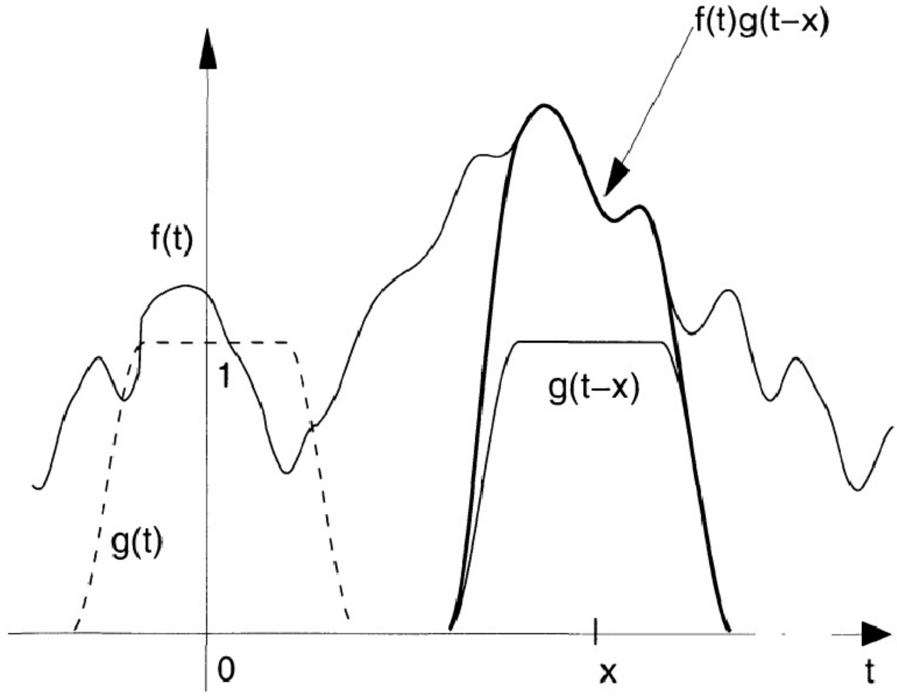

FIGURE 1 – Transformée de Fourier à fenêtre

Ce traitement fait l'hypothèse de stationnarité durant la durée de la fenêtre g quelle que soit la partie du signal considérée. Par conséquent, la longueur de la fenêtre est choisie pour respecter cette hypothèse car ce choix influence directement les propriétés de résolution de la composition. Ainsi plus la fenêtre g est petite, plus la résolution temporelle est meilleure mais plus la résolution fréquentielle est mauvaise. Si une haute résolution fréquentielle est nécessaire alors une longue fenêtre temporelle g sera utilisée et il sera difficile de respecter les hypothèses de stationnarité.

Il existe dans la littérature plusieurs fenêtres connues adaptées à l'étude de signaux particuliers. La plus simple étant l'indicatrice $g = \chi_{[0,T]}$. On cite également la fenêtre triangulaire dite de Bartlett, la fenêtre de Hann, la fenêtre de Hamming, la fenêtre de Blackman, ou encore la fenêtre de Gauss.

En analyse temps fréquence, un principe d'incertitude stipule donc qu'une transformée de Fourier à fenêtre ne peut pas être localisée simultanément en temps et en fréquence avec une précision arbitraire. À l'instar de la transformation de Fourier classique, il existe pour la transformation de Fourier à fenêtre plusieurs formulations de l'incertitude. En effet, ces dernières années plusieurs auteurs se sont intéressés à établir des principes d'incertitude pour la TFF, notamment Lamouchi et Omri [23, 24] ont montré un théorème de dispersion de Shapiro pour la TFF, Gröchening et Zimmerman [13] ont montré une version $L^\infty - L^\infty$ du théorème de Hardy ainsi que le principe d'incertitude de Benedicks pour la TFF. On cite également Wilkzock [30], Bonami, Jaming et Demange [6, 19], ou encore Fernández et Galbis [10] qui ont établi d'autres principes d'incertitude associés à la transformation de Fourier à fenêtre.

Dans ce mémoire, on se propose dans le premier chapitre d'étudier l'analyse harmonique de la transformation de Fourier à fenêtre et d'établir notamment un théorème de Plancherel et deux formules d'inversion. Dans le deuxième chapitre, on se propose d'établir certains principes d'incertitude associés à la TFF, le premier principe étant le principe d'incertitude de Lieb [25], donné par le résultat suivant

Théorème 1 – Lieb Soient g une fonction fenêtre et $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $f \neq 0$. Soient $\mathscr{U}$ une partie mesurable de $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ et $\varepsilon \geqslant 0$. Si $\mathscr{V}_g(f)$ est ε-concentrée dans $\mathscr{U}$ alors pour tout $p > 2$, on a

$$\mu_{2d}(\mathscr{U}) \geqslant (1-\varepsilon^2)^{\frac{p}{p-2}} \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2d}{p-2}}.$$

En particulier,

$$\mu_{2d}(\mathscr{U}) \geqslant 2^d (1-\varepsilon^2)^2.$$

Dans le même contexte, celui des principes d'incertitude étudiant le support de la transformation de Fourier à fenêtre, on a établi le principe d'incertitude de Benedicks pour cette transformation. Un principe qui a été montré séparément par Jansen [21], Gröchening et Zimmerman [13], Jaming [19] et Wilczok [30] et qui est formulé par le thérorème suivant

Théorème 2 – Benedicks pour la TFF Soit g une fonction fenêtre et $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Si $\mu_{2d}(Supp\mathcal{V}_g(f)) < +\infty$, alors $f = 0$.

Le théorème de Benedicks nous a permis par la suite d'établir le théorme d'Amrein-Berthier pour la transformation de Fourier à fenêtre suivant

Théorème 3 – Amrein-Berthier pour la TFF Soit $\Sigma \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ une partie mesurable de mesure finie, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour toutes $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$, on a

$$\|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d} \leqslant C\|\chi_{\Sigma^c}\mathcal{V}_g(f)\|_{2,2d}.$$

Par la suite, on s'est intéressé au principe d'incertitude de Beckner en terme d'entropie pour la transformation de Fourier à fenêtre et en utilisant l'inégalité de Lieb, on a montré le résultat suivant, établi par Lamouchi et Omri [24]

Théorème 4 – Beckner pour la TFF Soit g une fonction fenêtre. Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\mathcal{E}\left(\left|\mathcal{V}_g(f)\right|^2\right) \geqslant \|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2\left(d - \ln(\|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2)\right).$$

Dans la partie qui a suivie on a établi plusieurs inégalités de Heisenberg associées à la transformation de Fourier à fenêtre. Ces résultats ont été obtenus par Wilczok [30], et sont donnés par les théorèmes suivants

Théorème 5 – Heisenberg en ω pour la TFF Soit g une fonction fenêtre. Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|\omega\mathcal{V}_g(f)\|_{2,2d}\|xf\|_{2,d} \geqslant \frac{1}{2}\|g\|_{2,d}\|f\|_{2,d}^2.$$

Théorème 6 – Heisenberg en x pour la TFF Soit g une fonction fenêtre. Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|x\mathcal{V}_g(f)\|_{2,2d}\|y\hat{f}\|_{2,d} \geqslant \frac{1}{2}\|g\|_{2,d}\|f\|_{2,d}^2.$$

Corollaire 1 Soit g une fonction fenêtre. Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|\omega \mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d} \|x\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d} \|y\hat{f}\|_{2,d} \|xf\|_{2,d} \geqslant \frac{1}{4}\|g\|_{2,d}^2 \|f\|_{2,d}^4.$$

Dans la continuité des inégalités de Heisenberg, on a également généralisé le principe d'incertitude local à la transformation de Fourier à fenêtre, résultat établi par Lamouchi et Omri [24]. Plus précisement, on a montré le théorème suivant

Théorème 7 – Price pour la TFF Soit ξ, p deux réels positifs tels que $0 < \xi < d$ et $p \geqslant 1$, alors il existe une constante positive $M_{\xi,p}$ telle que pour toute fonction fenêtre g, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et pour tout sous ensemble Σ de $\mathbb{R}^{2d}$ de mesure finie, on a

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} &|\chi_\Sigma(x,\omega)\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^p d\mu_{2d}(x,\omega) \\ &\leqslant M_{\xi,p}\left(\mu_{2d}(\Sigma)\right)^{\frac{1}{(p+1)}} \||(x,\omega)|^\xi \mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}^{\frac{2pd}{(d+\xi)(p+1)}} \|f\|_{2,d}^{p-\frac{2pd}{(d+\xi)(p+1)}} \|g\|_{2,d}^{p-\frac{2pd}{(d+\xi)(p+1)}}.\end{aligned}$$

L'avant dernière partie de ce chapitre a été consacrée au théorème de Hardy pour la transformation de Fourier à fenêtre dont la version infini-infini a été établie par Gröchening et Zimmerman [13]. On a alors montré le théorème suivant

Théorème 8 – Hardy pour la TFF Soient $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ [a] et $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ [b] telles que $g \neq 0$. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $ab \geqslant \frac{1}{4}$ et $\varphi_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ par

$$\varphi_{a,b}(x,\omega) = e^{-\frac{a|x|^2 + b|\omega|^2}{2}}.$$

Si $\mathscr{V}_g(f) = \mathscr{O}\left(\varphi_{a,b}\right)$, alors
i)Si $ab > \frac{1}{4}$, alors $f = 0$.
2i)Si $ab = \frac{1}{4}$ et $\mathscr{V}_g(f) \neq 0$, alors il existe $(\zeta_0, z_0) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall (x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d,\ \mathscr{V}_g(f)(x,\omega) = \alpha e^{i\langle \zeta_0 - \frac{\omega}{2}|x\rangle} e^{-i\langle \omega | z_0\rangle} e^{-\frac{|x|^2+|\omega|^2}{4}},$$

et f et g sont de la forme $e^{-\frac{a}{2}|t|^2}$.

---

a. On désigne par $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ l'espace de Schwartz des fonctions f de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées.
b. On désigne par $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'espace des distributions tempérées sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Dans la dernière partie de ce chapitre on a établi un analogue du théorème de Beurling pour la transformation de Fourier à fenêtre. Ce résultat a été établi et amélioré par Bonami, Demange et Jaming [6, 7]. En effet, on a le résultat suivant

Théorème 9 – Hörmander-Beurling pour la TFF Soit g une fonction fenêtre et $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Si

$$\iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)| e^{\frac{|x|^2+|\omega|^2}{2}} d\mu_{2d}(x,\omega) < +\infty,$$

alors $f = 0$.

1.Transformation de Fourier à fenêtre

1.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 1.1.1 – Transformée de Fourier à fenêtre Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$. On appelle transformée de Fourier de f à fenêtre g l'application $\mathscr{V}_g(f)$ définie sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ par

$$\mathscr{V}_g(f)(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g(t-x)}e^{-i\langle\omega|t\rangle}d\mu_d(t), \tag{1.1}$$

où $\langle .|.\rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$ défini par

$$\forall\omega = (\omega_1,\dots,\omega_d), t = (t_1,\dots,t_d) \in \mathbb{R}^d,\ \langle\omega|t\rangle = \sum_{k=1}^{d} \omega_k t_k,$$

et $d\mu_d$ désigne la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{R}^d$ définie par $d\mu_d(t) = \dfrac{dt}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}$.

On note par $\|.\|_{p,d}$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, (respectivement par $\|.\|_{p,2d}$) la norme définie sur $L^p(\mathbb{R}^d)$, (respectivement sur $L^p(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$) par

$$\|f\|_{p,d} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p d\mu_d(x)\right)^{\frac{1}{p}},$$

et

$$\|f\|_{\infty,d} = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|.$$

Proposition 1.1.1 Pour tous $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$, $\mathscr{V}_g(f) \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$ et on a

$$\|\mathscr{V}_g(f)\|_{\infty,2d} \leqslant \|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d}. \tag{1.2}$$

Démonstration. Soient $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$

$$\begin{aligned}
|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g(t-x)}e^{-i\langle\omega|t\rangle} d\mu_d(t) \right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)||g(t-x)|\, d\mu_d(t) \\
&\leqslant \|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\|\mathscr{V}_g(f)\|_{\infty,2d} \leqslant \|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d}.$$

■

■ **Exemple 1.1** Soit $a,b > 0$ et soit f et g les fonctions de $L^2(\mathbb{R}^d)$ définies sur $\mathbb{R}^d$ par $f(x) = e^{-a|x|^2}$ et $g(x) = e^{-b|x|^2}$. Alors on a pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_g(f)(x,\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-a|t|^2} e^{-b|t-x|^2} e^{-i\langle\omega|t\rangle} d\mu_d(t) \\
&= e^{-b|x|^2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-(a+b)\left(|t|^2 - 2\langle t|\frac{bx}{a+b}\rangle\right)} e^{-i\langle\omega|t\rangle} d\mu_d(t) \\
&= e^{-b|x|^2} e^{\frac{b^2}{a+b}|x|^2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-(a+b)|t-\frac{bx}{a+b}|^2} e^{-i\langle\omega|t\rangle} d\mu_d(t) \\
&= e^{\frac{-ab}{a+b}|x|^2} e^{-i\langle\omega|\frac{bx}{a+b}\rangle} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-(a+b)|u|^2} e^{-i\langle\omega|u\rangle} d\mu_d(u) \\
&= \frac{1}{(2(a+b))^{\frac{d}{2}}} e^{-i\frac{b}{a+b}\langle\omega|x\rangle} e^{\frac{-ab}{a+b}|x|^2} e^{-\frac{|\omega|^2}{4(a+b)}}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_g(f)(x,\omega) = \frac{1}{(2(a+b))^{\frac{d}{2}}} e^{-i\langle\omega|\frac{bx}{a+b}\rangle} e^{\frac{-ab}{a+b}|x|^2} e^{-\frac{|\omega|^2}{4(a+b)}}.}$$

■

■ **Exemple 1.2** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ et soit h_n, $n \in \mathbb{N}$, les fonctions d'Hermite définies sur $\mathbb{R}$ par

$$h_n(x) = \left(2^n n! \sqrt{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{1.3}$$

où H_n sont les polynômes d'Hermite définis sur $\mathbb{R}$ par la formule de Rodriguez suivante

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $(x, \omega) \in \mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_g(h_n)(x,\omega) &= \int_{\mathbb{R}} h_n(t) \overline{g(t-x)} e^{-i\omega t} d\mu_1(t) \\
&= (-1)^n \left(2^n n! \sqrt{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{(t-x)^2}{2}} e^{-i\omega t} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \\
&= (-1)^n \frac{\left(2^n n! \sqrt{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{(x-i\omega)t} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2} dt \\
&= \frac{\left(2^n n! \sqrt{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (x-i\omega)^n \int_{\mathbb{R}} e^{(x-i\omega)t} e^{-t^2} dt \\
&= \frac{\left(2^n n! \sqrt{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (x-i\omega)^n \int_{\mathbb{R}} e^{-(t^2-tx)} e^{-it\omega} dt \\
&= \frac{\left(2^n n! \sqrt{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} (x-i\omega)^n \int_{\mathbb{R}} e^{-(t-\frac{x}{2})^2} e^{-it\omega} dt \\
&= \frac{\left(2^n n! \sqrt{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} (x-i\omega)^n e^{-\frac{i}{2}x\omega} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} e^{-iy\omega} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}} (x-i\omega)^n e^{-\frac{i}{2}x\omega} e^{-\frac{x^2}{4}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{V}_g(h_n)(x,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}} (x-i\omega)^n e^{-\frac{i}{2}x\omega} e^{-\frac{x^2}{4}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}.}$$

■

■ **Exemple 1.3** Soit h_α, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, les fonctions d'Hermite à plusieurs variables définies sur $\mathbb{R}^d$ par

$$h_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_d) = h_{\alpha_1}(x_1) h_{\alpha_2}(x_2) \dots h_{\alpha_{d}(x_d)},$$

où h_{α_i}, $1 \leqslant i \leqslant d$, désignent les fonctions d'Hermite à une variable définies par la Relation (1.3). Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ par $g(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et en utilisant le théorème de Fubini on obtient pour tout $(x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_g(h_\alpha)(x, \omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} h_\alpha(t) \overline{g(t-x)} e^{-i\langle \omega | t \rangle} d\mu_d(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} h_{\alpha_1}(t_1) \dots h_{\alpha_d}(t_d) e^{\frac{-|t-x|^2}{2}} e^{-i\langle \omega | t \rangle} d\mu_d(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} h_{\alpha_1}(t_1) \dots h_{\alpha_d}(t_d) e^{\frac{-(t_1-x_1)^2 - \dots - (t_d - x_d)^2}{2}} e^{-i(\omega_1 t_1 + \dots + \omega_d t_d)} \frac{dt_1 \dots dt_d}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} h_{\alpha_1}(t_1) e^{\frac{-(t_1-x_1)^2}{2}} e^{-i\omega_1 t_1} \dots h_{\alpha_d}(t_d) e^{\frac{-(t_d-x_d)^2}{2}} e^{-i\omega_d t_d} \frac{dt_1 \dots dt_d}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \\
&= \prod_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} h_{\alpha_j}(t_j) e^{\frac{-(t_j-x_j)^2}{2}} e^{-i\omega_j t_j} \frac{dt_j}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \prod_{j=1}^{d} \mathcal{V}_{g_j}(h_{\alpha_j})(x_j, \omega_j),
\end{aligned}$$

où $g_j(t) = e^{-\frac{t_j^2}{2}}$. Donc, d'après l'Exemple (1.2), on a pour tout $(x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$

$$\mathcal{V}_g(h_\alpha)(x, \omega) = \frac{1}{2^{\frac{|\alpha|+d}{2}} \pi^{\frac{d}{4}} \sqrt{\alpha!}} \prod_{j=1}^{d} (x_j - i\omega_j)^{\alpha_j} e^{-\frac{i}{2}\langle x | \omega \rangle} e^{-\frac{|x|^2 + |\omega|^2}{4}},$$

où $|\alpha| = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j$.

$$\boxed{\mathcal{V}_g(h_\alpha)(x, \omega) = \frac{1}{2^{\frac{|\alpha|+d}{2}} \pi^{\frac{d}{4}} \sqrt{\alpha!}} (x - i\omega)^\alpha e^{-\frac{i}{2}\langle x | \omega \rangle} e^{-\frac{|x|^2 + |\omega|^2}{4}}.}$$

■

Dans la suite on note $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.2 – Opérateur de translation Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, l'opérateur de translation T_x est défini sur $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}^d,\ T_x(h)(t) = h(t-x).$$

Définition 1.1.3 – Opérateur de modulation Pour tout $\omega \in \mathbb{R}^d$, l'opérateur de modulation M_ω est défini sur $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}^d,\ M_\omega(h)(t) = e^{i\langle \omega | t\rangle} h(t).$$

Proposition 1.1.2 Pour tout $p \in [1, +\infty]$ et pour tous $x, \omega \in \mathbb{R}^d$, les opérateurs T_x et M_ω sont bornés de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dans lui même. De plus, pour tout $h \in L^p(\mathbb{R}^d)$,
on a

$$\|T_x(h)\|_{p,d} = \|M_\omega(h)\|_{p,d} = \|h\|_{p,d}.$$

Démonstration. Soit $x, \omega \in \mathbb{R}^d$. On a
► Si $p \in [1, +\infty[$, alors pour tout $h \in L^p(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\|T_x(h)\|_{p,d}^p = \int_{\mathbb{R}^d} |h(t-x)|^p d\mu_d(t) = \int_{\mathbb{R}^d} |h(y)|^p d\mu_d(y) = \|h\|_{p,d}^p.$$

De la même manière, pour tout $h \in L^p(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\|M_\omega(h)\|_{p,d}^p = \int_{\mathbb{R}^d} |e^{i\langle \omega | t\rangle} h(t)|^p d\mu_d(t) = \int_{\mathbb{R}^d} |h(t)|^p d\mu_d(t) = \|h\|_{p,d}^p.$$

► Si $p = +\infty$, alors pour tout $h \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\|T_x(h)\|_{\infty,d} = \sup_{t \in \mathbb{R}^d} |h(t-x)| = \sup_{t \in \mathbb{R}^d} |h(t)| = \|h\|_{\infty,d}.$$

D'une manière analogue, pour tout $h \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\|M_\omega(h)\|_{\infty,d} = \sup_{t \in \mathbb{R}^d} |e^{i\langle \omega | t\rangle} h(t)| = \sup_{t \in \mathbb{R}^d} |h(t)| = \|h\|_{\infty,d}.$$

■

Proposition 1.1.3 Pour tout $p \in [1,+\infty[$ et pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on a
$i)$ $\lim\limits_{x\to 0} \|T_x(f)-f\|_{p,d} = 0.$
$2i)$ $\lim\limits_{\omega\to 0} \|M_\omega(f)-f\|_{p,d} = 0.$

Démonstration. $i)$ On considère l'ensemble $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ à supports compacts et soit $g \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R}^d)$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $T_x(g) \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R}^d)$ et par suite d'après le théorème de convergence dominée, on en déduit que

$$\lim_{x\to 0} \|T_x(g)-g\|_{p,d}^p = \int_{\mathbb{R}^d} |\lim_{x\to 0} T_x(g)(y)-g(y)|^p d\mu_d(y) = 0.$$

En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $|x| \leqslant \eta$, $\|T_x(g)-g\|_{p,d} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$, comme $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ (Voir [11]), alors il existe $g \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|f-g\|_{p,d} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ et par suite pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $|x| \leqslant \eta$, on a d'après l'inégalité de Minkowski

$$\begin{aligned}
\|T_x(f)-f\|_{p,d} &= \|T_x(f)-T_x(g)+T_x(g)-g+g-f\|_{p,d} \\
&\leqslant \|T_x(f)-T_x(g)\|_{p,d} + \|T_x(g)-g\|_{p,d} + \|g-f\|_{p,d} \\
&\leqslant \|T_x(f-g)\|_{p,d} + \|T_x(g)-g\|_{p,d} + \|g-f\|_{p,d} \\
&\leqslant 2\|f-g\|_{p,d} + \|T_x(g)-g\|_{p,d} \\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

$2i)$ De la même façon, soit $g \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R}^d)$ alors pour tout $\omega \in \mathbb{R}^d$, $M_\omega(g) \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R}^d)$ et par suite d'après le théorème de convergence dominée, on en déduit que

$$\lim_{\omega\to 0} \|M_\omega(g)-g\|_{p,d}^p = \int_{\mathbb{R}^d} |\lim_{\omega\to 0} M_\omega(g)(y)-g(y)|^p d\mu_d(y) = 0.$$

En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $\omega \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $|\omega| \leqslant \eta$, $\|M_\omega(g)-g\|_{p,d} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$, comme $\mathscr{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, alors il existe $g \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|f-g\|_{p,d} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Alors pour tout $\omega \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $|\omega| \leqslant \eta$, on a

$$\begin{aligned}
\|M_\omega(f)-f\|_{p,d} &= \|M_\omega(f)-M_\omega(g)+M_\omega(g)-g+g-f\|_{p,d} \\
&\leqslant \|M_\omega(f)-M_\omega(g)\|_{p,d} + \|M_\omega(g)-g\|_{p,d} + \|g-f\|_{p,d} \\
&\leqslant \|M_\omega(f-g)\|_{p,d} + \|M_\omega(g)-g\|_{p,d} + \|g-f\|_{p,d} \\
&\leqslant 2\|f-g\|_{p,d} + \|M_\omega(g)-g\|_{p,d} \\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

Corollaire 1.1.4 – Continuité uniforme de la TFF Soit g une fonction fenêtre. Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\mathscr{V}_g(f)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$.

Démonstration. Si $f = 0$ le résultat est évident. Supposons que $f \neq 0$, alors pour tous $(x,\omega),(y,\lambda) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega) - \mathscr{V}_g(f)(y,\lambda)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g(t-x)}e^{-i\langle t|\omega\rangle} - f(t)\overline{g(t-y)}e^{-i\langle t|\lambda\rangle}d\mu_d(t)\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g(t-x)}e^{-i\langle t|\omega\rangle} - f(t)\overline{g(t-y)}e^{-i\langle t|\omega\rangle} + f(t)\overline{g(t-y)}e^{-i\langle t|\omega\rangle} - f(t)\overline{g(t-y)}e^{-i\langle t|\lambda\rangle}d\mu_d(t)\right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)||g(t-x)-g(t-y)|d\mu_d(t) + \int_{\mathbb{R}^d} |g(t-y)||e^{i\langle t|\omega\rangle}f(t) - e^{i\langle t|\lambda\rangle}f(t)|d\mu_d(t) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)||T_x(g)(t)-T_y(g)(t)|d\mu_d(t) + \int_{\mathbb{R}^d} |g(t-y)||M_\omega(f)(t) - M_\lambda(f)(t)|d\mu_d(t) \\
&\leqslant \|f\|_{2,d}\|T_x(g)-T_y(g)\|_{2,d} + \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(t-y)|^2 d\mu_d(t)\right)^{\frac{1}{2}} \|M_\omega(f)-M_\lambda(f)\|_{2,d} \\
&\leqslant \|f\|_{2,d}\|T_{x-y}(g)-g\|_{2,d} + \|g\|_{2,d}\|M_{\omega-\lambda}(f)-f\|_{2,d}.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, on sait alors d'après la Proposition 1.1.3 qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $(x,\omega),(y,\lambda) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ vérifiant $|x-y| \leqslant \eta$, $|\omega - \lambda| \leqslant \eta$, on a $\|T_{x-y}(g)-g\|_{2,d} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2\|f\|_{2,d}}$ et $\|M_{\omega-\lambda}(f)-f\|_{2,d} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2\|g\|_{2,d}}$. Ainsi pour tous $(x,\omega),(y,\lambda) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ vérifiant $|(x,\omega)-(y,\lambda)| \leqslant \eta$, on a

$$\left|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega) - \mathscr{V}_g(f)(y,\lambda)\right| \leqslant \|f\|_{2,d}\|T_{x-y}(g)-g\|_{2,d} + \|g\|_{2,d}\|M_{\omega-\lambda}(f)-f\|_{2,d} \leqslant \varepsilon,$$

ce qui prouve que $\mathscr{V}_g(f)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$. ■

Proposition 1.1.5 Pour tous $x,\omega,t \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$(T_x M_\omega h)(t) = e^{-i\langle\omega|x\rangle}(M_\omega T_x h)(t). \tag{1.4}$$

Démonstration. Soient $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $x,\omega \in \mathbb{R}^d$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\begin{aligned}
(T_x M_\omega h)(t) &= (M_\omega h)(t-x) \\
&= e^{i\langle\omega|t-x\rangle}h(t-x) \\
&= e^{-i\langle\omega|x\rangle}e^{i\langle\omega|t\rangle}T_x(h)(t) \\
&= e^{-i\langle\omega|x\rangle}(M_\omega T_x h)(t).
\end{aligned}$$

■

Proposition 1.1.6 Soit g une fonction fenêtre. Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, on a

$$\mathscr{V}_g(f)(x,\omega) = \widehat{(f\overline{T_x g})}(\omega). \tag{1.5}$$

Démonstration. On a pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$,

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_g(f)(x,\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g(t-x)}e^{-i\langle\omega|t\rangle}d\mu_d(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{T_x g(t)}e^{-i\langle\omega|t\rangle}d\mu_d(t) \\
&= \widehat{(f\overline{T_x g})}(\omega).
\end{aligned}$$

■

Dans la suite, on désigne par $\langle\ |\ \rangle_{\mathbb{R}^d}$ respectivement $\langle\ |\ \rangle_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}$ les produits scalaires canoniques sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$ définies par

$$\forall h_1, h_2 \in L^2(\mathbb{R}^d),\ \langle h_1|h_2\rangle_{\mathbb{R}^d} = \int_{\mathbb{R}^d} h_1(t)\overline{h_2(t)}d\mu_d(t),$$

et

$$\forall h_1, h_2 \in L^2(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}^d}),\ \langle h_1|h_2\rangle_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} = \int_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} h_1(x,\omega)\overline{h_2(x,\omega)}d\mu_{2d}(x,\omega).$$

Proposition 1.1.7 Soit g une fonction fenêtre. Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, on a

$$\mathscr{V}_g(f)(x,\omega) = \langle f|M_\omega T_x g\rangle_{\mathbb{R}^d}. \tag{1.6}$$

Démonstration. On a pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$,

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_g(f)(x,\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g(t-x)}e^{-i\langle\omega|t\rangle}d\mu_d(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{(M_\omega T_x g)(t)}d\mu_d(t) \\
&= \langle f|M_\omega T_x g\rangle_{\mathbb{R}^d}.
\end{aligned}$$

■

Proposition 1.1.8 Soit g une foncttion fenêtre. Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, on a

$$\mathcal{V}_g(f)(x,\omega) = e^{-i\langle\omega|x\rangle}(f * {}^{a}M_\omega\check{\bar{g}})(x),$$

où $\check{g}(x) = g(-x)$.

a. Le produit de convolution de deux fonctions mesurables f et g définies sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qu'on note $f*g$, est défini sur $\mathbb{R}^d$ par $f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)d\mu_d(t)$.

Démonstration. On a pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_g(f)(x,\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g(t-x)}e^{-i\langle\omega|t\rangle}d\mu_d(t)\\
&= e^{-i\langle\omega|x\rangle}\int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{\check{g}(x-t)}e^{i\langle\omega|x-t\rangle}d\mu_d(t)\\
&= e^{-i\langle\omega|x\rangle}\int_{\mathbb{R}^d} f(t)(M_\omega\check{\bar{g}})(x-t)d\mu_d(t)\\
&= e^{-i\langle\omega|x\rangle}(f*M_\omega\check{\bar{g}})(x).
\end{aligned}$$

■

Proposition 1.1.9 Soit g une foncttion fenêtre. Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et pour tous $x,y,\omega,\lambda \in \mathbb{R}^d$, on a
$i)$ $\mathcal{V}_g(T_yf)(x,\omega) = e^{-i\langle\omega|y\rangle}\mathcal{V}_g(f)(x-y,\omega)$.
$2i)$ $\mathcal{V}_g(M_\lambda f)(x,\omega) = \mathcal{V}_g(f)(x,\omega-\lambda)$.

Démonstration. Pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, on a
$i)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_g(T_yf)(x,\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} (T_yf)(t)\overline{g(t-x)}e^{-i<\omega|t>}d\mu_d(t)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(t-y)\overline{g(t-x)}e^{-i<\omega|t>}d\mu_d(t)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(u)\overline{g(u+y-x)}e^{-i<\omega|u+y>}d\mu_d(u)\\
&= e^{-i<\omega|y>}\int_{\mathbb{R}^d} f(u)\overline{g(u-(x-y))}e^{-i<\omega|u>}d\mu_d(u)\\
&= e^{-i<\omega|y>}\mathcal{V}_g(f)(x-y,\omega),
\end{aligned}$$

$2i)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_g(M_\lambda f)(x,\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} (M_\lambda f)(t)\overline{g(t-x)}e^{-i<\omega|t>}d\mu_d(t)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<\lambda|t>} f(t)\overline{g(t-x)}e^{-i<\omega|t>}d\mu_d(t)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g(t-x)}e^{-i<\omega-\lambda|t>}d\mu_d(t)\\ &= \mathscr{V}_g(f)(x,\omega-\lambda).\end{aligned}$$

■

Proposition 1.1.10 Soit g une fonction fenêtre. Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et pour tous $x,y,\omega,\lambda \in \mathbb{R}^d$, on a
$i)$ $\mathscr{V}_g(M_\lambda T_y f)(x,\omega) = e^{-i\langle \omega-\lambda|y\rangle}\mathscr{V}_g(f)(x-y,\omega-\lambda)$.
$2i)$ $\mathscr{V}_g(T_y M_\lambda f)(x,\omega) = e^{-i\langle \omega|y\rangle}\mathscr{V}_g(f)(x-y,\omega-\lambda)$.
$3i)$ $\mathscr{V}_g(T_y M_\lambda f)(x,\omega) = e^{-i\langle \lambda|y\rangle}\mathscr{V}_g(M_\lambda T_y f)(x,\omega)$.

Démonstration. D'après la Proposition 1.1.9, on a pour tous $y,\lambda \in \mathbb{R}^d$
$i)$

$$\begin{aligned}\forall (x,\omega)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d,\ \mathscr{V}_g(M_\lambda T_y f)(x,\omega) &= \mathscr{V}_g(T_y f)(x,\omega-\lambda)\\ &= e^{-i\langle\omega-\lambda|y\rangle}\mathscr{V}_g(f)(x-y,\omega-\lambda).\end{aligned}$$

$2i)$

$$\begin{aligned}\forall (x,\omega)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d,\ \mathscr{V}_g(T_y M_\lambda f)(x,\omega) &= e^{-i\langle\omega|y\rangle}\mathscr{V}_g(M_\lambda f)(x-y,\omega)\\ &= e^{-i\langle\omega|y\rangle}\mathscr{V}_g(f)(x-y,\omega-\lambda).\end{aligned}$$

En combinant $i)$ et $2i)$, on obtient $3i)$

$$\begin{aligned}\forall (x,\omega)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d,\ \mathscr{V}_g(T_y M_\lambda f)(x,\omega) &= e^{-i\langle\omega|y\rangle}\mathscr{V}_g(f)(x-y,\omega-\lambda)\\ &= e^{-i\langle\omega|y\rangle}e^{i\langle\omega-\lambda|y\rangle}\mathscr{V}_g(M_\lambda T_y f)(x,\omega)\\ &= e^{-i\langle\lambda|y\rangle}\mathscr{V}_g(M_\lambda T_y f)(x,\omega).\end{aligned}$$

■

Proposition 1.1.11 Soit g une fonction fenêtre. Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et pour tous $x,y,z,\omega,\lambda,\xi \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\mathscr{V}_{M_\xi T_z g}(M_\lambda T_y f)(x,\omega) = e^{i\langle x|\xi\rangle}e^{-i\langle y|\omega-\lambda+\xi\rangle}\mathscr{V}_g(f)(x-y+z,\omega-\lambda+\xi). \tag{1.7}$$

Démonstration. Soient $y,z,\lambda,\xi \in \mathbb{R}^d$, alors pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{M_\xi T_z g}(M_\lambda T_y f)(x,\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} (M_\lambda T_y f)(u)\overline{T_x(M_\xi T_z g)(u)}e^{-i\langle \omega|u\rangle} d\mu_d(u) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \lambda|u\rangle} f(u-y)\overline{e^{i\langle \xi|u-x\rangle} g(u-x-z)}e^{-i\langle \omega|u\rangle} d\mu_d(u) \\
&= e^{i\langle x|\xi\rangle} \int_{\mathbb{R}^d} f(u-y)\overline{g(u-(x+z))}e^{-i\langle u|\omega-\lambda+\xi\rangle} d\mu_d(u) \\
&= e^{i\langle x|\xi\rangle} \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g(t+y-(x+z))}e^{-i\langle t+y|\omega-\lambda+\xi\rangle} d\mu_d(t) \\
&= e^{i\langle x|\xi\rangle} e^{-i\langle y|\omega-\lambda+\xi\rangle} \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g(t-(x-y+z))}e^{-i\langle t|\omega-\lambda+\xi\rangle} d\mu_d(t) \\
&= e^{i\langle x|\xi\rangle} e^{-i\langle y|\omega-\lambda+\xi\rangle} \mathcal{V}_g(f)(x-y+z,\omega-\lambda+\xi).
\end{aligned}$$

■

Définition 1.1.4 – Dilaté d'une fonction Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $\lambda > 0$, la dilaté de f est définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$f_\lambda(x) = \lambda^{\frac{d}{2}} f(\lambda x).$$

Proposition 1.1.12 Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $\lambda > 0$, $f_\lambda \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et on a

$$\|f_\lambda\|_{2,d} = \|f\|_{2,d}.$$

Autrement dit, la dilatation $\delta_\lambda : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d),\ f \longmapsto \delta_\lambda(f) = f_\lambda$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui même.

Démonstration. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $\lambda > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |f_\lambda(x)|^2 d\mu_d(x) &= \lambda^d \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda x)|^2 d\mu_d(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |f(u)|^2 d\mu_d(u) \\
&= \|f\|_{2,d}^2.
\end{aligned}$$

■

Proposition 1.1.13 Soit g une fonctiion fenêtre. Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et pour tous $a, b > 0$ et $(x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, on a

$$\mathscr{V}_{g_b}(f_a)(x, \omega) = \mathscr{V}_{g_{\frac{b}{a}}}(f)(abx, \frac{\omega}{a}).$$

En particulier, si $a = b = \lambda$ on obtient

$$\mathscr{V}_{g_\lambda}(f_\lambda)(x, \omega) = \mathscr{V}_g(f)(\lambda x, \frac{\omega}{\lambda}). \tag{1.8}$$

Démonstration. Pour tous $a, b > 0$ et pour tout $(x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, on a

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_{g_b}(f_a)(x, \omega) &= (ab)^{\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(at)\overline{g(bt - bx)} e^{-i\langle \omega | t \rangle} d\mu_d(t) \\
&= \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(u) \overline{g\left(\frac{b}{a}(u - abx)\right)} e^{-i\langle \frac{\omega}{a} | u \rangle} d\mu_d(u) \\
&= \mathscr{V}_{g_{\frac{b}{a}}}(f)(abx, \frac{\omega}{a}).
\end{aligned}$$

■

Proposition 1.1.14 – Commutation. Soit g une fonctiion fenêtre. Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $(x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, on a

$$\mathscr{V}_f(g)(x, \omega) = e^{-i\langle \omega | x \rangle} \overline{\mathscr{V}_g(f)(-x, -\omega)}. \tag{1.9}$$

Démonstration. Pour tout $(x, \omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, on a

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_f(g)(x, \omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} g(t)\overline{f(t - x)} e^{-i\langle \omega | t \rangle} d\mu_d(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(u)} g(u + x) e^{-i\langle \omega | u + x \rangle} d\mu_d(u) \\
&= e^{-i\langle \omega | x \rangle} \overline{\int_{\mathbb{R}^d} f(u)\overline{g(u + x)} e^{-i\langle -\omega | u \rangle} d\mu_d(u)} \\
&= e^{-i\langle \omega | x \rangle} \overline{\mathscr{V}_g(f)(-x, -\omega)}.
\end{aligned}$$

■

Proposition 1.1.15 Soit g une fonctiion fenêtre. Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, on a

$$\mathscr{V}_g(f)(x,\omega) = e^{-i\langle\omega|x\rangle}\mathscr{V}_{\hat{g}}(\hat{f})(\omega,-x). \tag{1.10}$$

Démonstration. Soit $g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, alors d'après la Relation (1.6) et la formule de Parseval, on a pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_g(f)(x,\omega) &= \langle f|M_\omega T_x g\rangle_{\mathbb{R}^d}\\ &= \langle \hat{f}|\widehat{M_\omega T_x g}\rangle_{\mathbb{R}^d}.\end{aligned}$$

Or, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned}\widehat{M_\omega T_x g}(y) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle\omega|t\rangle} g(t-x)e^{-i\langle y|t\rangle}d\mu_d(t)\\ &= e^{i\langle\omega|x\rangle}e^{-i\langle y|x\rangle}\int_{\mathbb{R}^d} g(u)e^{-i\langle y-\omega|u\rangle}d\mu_d(u)\\ &= e^{i\langle\omega-y|x\rangle}\hat{g}(y-\omega)\\ &= T_\omega M_{-x}\hat{g}(y),\end{aligned}$$

d'où, d'après la Relation (1.4), on obtient

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_g(f)(x,\omega) &= \langle \hat{f}|\widehat{M_\omega T_x g}\rangle_{\mathbb{R}^d}\\ &= \langle \hat{f}|T_\omega M_{-x}\hat{g}\rangle_{\mathbb{R}^d}\\ &= e^{-i\langle\omega|x\rangle}\langle \hat{f}|M_{-x}T_\omega\hat{g}\rangle_{\mathbb{R}^d}\\ &= e^{-i\langle\omega|x\rangle}\mathscr{V}_{\hat{g}}(\hat{f})(\omega,-x).\end{aligned}$$

Soit $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Comme $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, alors il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers g dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Par suite, on en déduit que pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, on a

$$\begin{aligned}\left|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega) - \mathscr{V}_{g_n}(f)(x,\omega)\right| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)||g(t-x)-g_n(t-x)|d\mu_d(t)\\ &\leqslant \|f\|_{2,d}\|g-g_n\|_{2,d}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathscr{V}_{g_n}(f)(x,\omega) = \mathscr{V}_g(f)(x,\omega),$$

autrement dit la suite $(\mathscr{V}_{g_n}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathscr{V}_g(f)$. De la même manière, comme $(\hat{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\hat{g}$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, alors la suite $(\mathscr{V}_{\hat{g}_n}(\hat{f}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathscr{V}_{\hat{g}}(\hat{f})$. ■

1.2 Théorème de Parseval et formule d'inversion

Théorème 1.2.1 – Orthogonalité Soit g_1, g_2 deux fonctions fenêtres. Alors pour tous $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a $\mathscr{V}_{g_1}(f_1), \mathscr{V}_{g_2}(f_2) \in L^2(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$ et

$$\langle \mathscr{V}_{g_1}(f_1) | \mathscr{V}_{g_2}(f_2)\rangle_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} = \langle f_1 | f_2\rangle_{\mathbb{R}^d} \overline{\langle g_1 | g_2\rangle_{\mathbb{R}^d}}. \tag{1.11}$$

Démonstration. On suppose que $g_1, g_2 \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$. On sait alors, par interpolation, que $g_1, g_2 \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$. Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a $f_1 \overline{T_x g_1}$, $f_2 \overline{T_x g_2} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et par conséquent, en utilisant le théorème de Fubini ainsi que la Relation (1.5), on en déduit que

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} \left|\mathscr{V}_{g_1}(f_1)(x,\omega)\right|^2 d\mu_d(x) d\mu_d(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \widehat{(f_1 \overline{T_x g_1})}(\omega) \right|^2 d\mu_d(\omega) \right) d\mu_d(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| f_1(t) \overline{T_x g_1(t)} \right|^2 d\mu_d(t) \right) d\mu_d(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(t)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \overline{T_x g_1(t)} \right|^2 d\mu_d(x) \right) d\mu_d(t) \\
&= \|f_1\|_{2,d}^2 \|g_1\|_{2,d}^2.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{V}_{g_1}(f_1) \in L^2(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$ et il en est de même pour $\mathscr{V}_{g_2}(f_2)$. Par ailleurs, en utilisant le théorème de Parseval on obtient

$$\begin{aligned}
\langle \mathscr{V}_{g_1}(f_1) | \mathscr{V}_{g_2}(f_2)\rangle_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} &= \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} \mathscr{V}_{g_1}(f_1)(x,\omega) \overline{\mathscr{V}_{g_2}(f_2)(x,\omega)} d\mu_d(x) d\mu_d(\omega) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} \widehat{(f_1 \overline{T_x g_1})}(\omega) \overline{\widehat{(f_2 \overline{T_x g_2})}(\omega)} d\mu_d(x) d\mu_d(\omega) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f_1(t) \overline{g_1(t-x) f_2(t)} g_2(t-x) d\mu_d(t) \right) d\mu_d(x).
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $f_1 \overline{f_2} \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_d(t))$ et $\overline{g_1} g_2 \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_d(x))$ et par suite d'après le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
\langle \mathscr{V}_{g_1}(f_1) | \mathscr{V}_{g_2}(f_2)\rangle_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} &= \int_{\mathbb{R}^d} f_1(t) \overline{f_2(t)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \overline{g_1(t-x)} g_2(t-x) d\mu_d(x) \right) d\mu_d(t) \\
&= \langle f_1 | f_2\rangle_{\mathbb{R}^d} \overline{\langle g_1 | g_2\rangle}_{\mathbb{R}^d}. \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

Soit ϕ l'application définie sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ par

$$\phi(g) = \langle f_1 | f_2\rangle_{\mathbb{R}^d} \overline{\langle g_1 | g\rangle}_{\mathbb{R}^d}.$$

Alors ϕ est linéaire et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que pour toute $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ on a

$$|\phi(g)| \leqslant \|f_1\|_{2,d} \|f_2\|_{2,d} \|g_1\|_{2,d} \|g\|_{2,d} = c\|g\|_{2,d}.$$

En particulier, ϕ est une forme linéaire bornée sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs, soit ψ la forme linéaire définie sur $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ par

$$\psi(g) = \langle \mathscr{V}_{g_1}(f_1) | \mathscr{V}_g(f_2)\rangle_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d}.$$

Alors, pour tout $g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\begin{aligned}
|\psi(g)| &= |\langle \mathscr{V}_{g_1}(f_1) | \mathscr{V}_g(f_2)\rangle_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d}| \\
&= |\langle f_1 | f_2\rangle_{\mathbb{R}^d} \overline{\langle g_1 | g_2\rangle_{\mathbb{R}^d}}| \\
&\leqslant \|f_1\|_{2,d}\|f_2\|_{2,d}\|g_1\|_{2,d}\|g\|_{2,d}.
\end{aligned}$$

Cela montre que ψ est une forme linéaire bornée sur $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soit $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, comme $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, alors il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers g dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Comme ψ est bornée sur $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ on a

$$|\psi(g_n) - \psi(g_m)| = |\psi(g_n - g_m)| \leqslant C\|g_n - g_m\|_{2,d}.$$

En particulier, la suite $(\psi(g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$, elle est donc convergente. On pose $\psi(g)$ sa limite. On peut alors montrer que cette limite est indépendante du choix de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par ailleurs, rappelons que ϕ est bornée sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et que d'après la Relation (1.12), ϕ et ψ coincident sur $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Par conséquent,

$$\psi(g) = \lim_{n\to+\infty} \psi(g_n) = \lim_{n\to+\infty} \phi(g_n) = \phi(g).$$

■

Théorème 1.2.2 – Formule de Plancherel Soit g une fonction fenêtre. Alors, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d} = \|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d}. \tag{1.13}$$

En particulier, $\mathscr{V}_g$ est un opérateur linéaire borné de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$. De plus, si $\|g\|_{2,d} = 1$, alors l'opérateur $\mathscr{V}_g$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$.

Démonstration. Il suffit de prendre $f_1 = f_2 = f$ et $g_1 = g_2 = g$ dans la Relation (1.11). ■

Corollaire 1.2.3 Soit g_1, g_2 deux fonctions fenêtres. Alors pour tous $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $(y, \eta) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, on a

$$\left(\widehat{\mathscr{V}_{g_1}(f_1)\overline{\mathscr{V}_{g_2}(f_2)}}\right)(y,\eta) = \left(\mathscr{V}_{f_2}(f_1)\overline{\mathscr{V}_{g_2}(g_1)}\right)(-\eta, y). \tag{1.14}$$

Démonstration. On a, d'après la Relation (1.13) (Plancherel), $\mathscr{V}_{g_1}(f_1), \mathscr{V}_{g_2}(f_2) \in L^2(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$ et par suite d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\mathscr{V}_{g_1}(f_1)\mathscr{V}_{g_2}(f_2)$ est visiblement dans $L^1(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$. De plus, en se servant des Relations (1.6) et (1.7), on obtient pour tout $(y,\eta) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$

$$
\begin{aligned}
\left(\widehat{\mathscr{V}_{g_1}(f_1)\overline{\mathscr{V}_{g_2}(f_2)}}\right)(y,\eta) &= \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} \mathscr{V}_{g_1}(f_1)(x,\omega)\overline{\mathscr{V}_{g_2}(f_2)(x,\omega)e^{i(\langle x|y\rangle + \langle \omega|\eta\rangle)}}d\mu_{2d}(x,\omega) \\
&= \langle \mathscr{V}_{g_1}(f_1) | \mathscr{V}_{M_yT_{-\eta}g_2}(M_yT_{-\eta}f_2)\rangle_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} \\
&= \langle f_1 | M_yT_{-\eta}f_2\rangle_{\mathbb{R}^d} \overline{\langle g_1 | M_yT_{-\eta}g_2\rangle}_{\mathbb{R}^d} \\
&= \left(\mathscr{V}_{f_2}(f_1)\overline{\mathscr{V}_{g_2}(g_1)}\right)(-\eta, y).
\end{aligned}
$$

■

La Relation (1.2) ainsi que la Relation (1.13) (Plancherel) permettent de prolonger la transformation de Fourier à fenêtre à tous les $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \geqslant 2$. Pour cela, on rappelle le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin suivant [11]

Théorème 1.2.4 – Riesz-Thorin Soit $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, +\infty]$ et soit

$$T : L^{p_0}(\mathbb{R}^d) + L^{p_1}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^{q_0}(\mathbb{R}^d) + L^{q_1}(\mathbb{R}^d),$$

un opérateur linéaire. Si $T : L^{p_0}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^{q_0}(\mathbb{R}^d)$ est borné de norme M_0 et $T : L^{p_1}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^{q_1}(\mathbb{R}^d)$ est borné de norme M_1, alors pour tout $\theta \in [0,1]$ l'opérateur T se prolonge en un opérateur borné de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dans $L^q(\mathbb{R}^d)$ de norme $M \leqslant M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}$, où $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$ et $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1}$.

Corollaire 1.2.5 Soit g une fonction fenêtre. Alors, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, l'opérateur $\mathscr{V}_g$ est borné de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$ pour tout $p \geqslant 2$. De plus, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|\mathscr{V}_g(f)\|_{p,2d} \leqslant \|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d}.$$

Démonstration. D'après la Relation (1.2), l'opérateur $\mathscr{V}_g$ est borné de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$. D'une autre part, d'après la Relation (1.13) (Plancherel), l'opérateur $\mathscr{V}_g$ est également borné de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$. Ainsi, d'après le Théorème de Riesz-Thorin 1.2.4, l'opérateur $\mathscr{V}_g$ est borné de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$ pour tout $p \geqslant 2$ et on a

$$\|\mathscr{V}_g(f)\|_{p,2d} \leqslant \|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d}.$$

■

Le Corollaire 1.2.5 a permis de montrer qu'une fois la fenêtre g est fixé, la transformation de Fourier à fenêtre $\mathscr{V}_g$ se prolonge en un opérateur borné de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$ pour tout $p \geqslant 2$. Cependant, l'estimation de sa norme obtenue par l'interpolation de Riesz-Thorin n'est pas optimale. Dans la suite, on se propose d'améliorer cette estimation. Pour cela, on rappelle le résultat important suivant sur les approximations de l'identité.

Dans une algèbre normée commutative $(A, +, \times, .)$ non unitaire, une approximation de l'identité est une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A vérifiant

$$\forall b \in A, \lim_{n\to+\infty} a_n \times b = b.$$

L'idée est donc de caractériser les approximations de l'identité dans l'algèbre de convolution $(L^1(\mathbb{R}^d), +, *, .)$. Pour cela, on a le théorème important suivant [11]

Théorème 1.2.6 – Approximation de l'identité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ une fonction positive telle que $\|\varphi\|_{1,d} = 1$, et soit φ_n, $n \in \mathbb{N}$, les fonctions définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \varphi_n(x) = n^d \varphi(nx),$$

alors la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'identité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Plus généralement, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1, +\infty[$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n * f - f\|_{p,d} = 0.$$

Corollaire 1.2.7 – Approximation de l'identité de Gauss La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \varphi_n(x) = 2^{\frac{d}{2}} n^d e^{-n^2|x|^2},$$

est une approximation de l'identité de $L^1(\mathbb{R}^d)$, dite l'approximation de Gauss.

Démonstration. Il suffit de vérifier que

$$\int_{\mathbb{R}^d} 2^{\frac{d}{2}} e^{-|x|^2} d\mu_d(x) = 1.$$

■

Proposition 1.2.8 – Transformée de Fourier d'une Gaussienne. Soit $a > 0$ et soit ψ_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ par $\psi_a(x) = e^{-a|x|^2}$. Alors, $\psi_a \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et on a

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \; \widehat{\psi_a}(y) = \frac{e^{-\frac{|y|^2}{4a}}}{(2a)^{\frac{d}{2}}}. \tag{1.15}$$

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour $d = 1$. En calculant $\widehat{\psi_a}'$, on en déduit que $\widehat{\psi_a}$ satisfait l'équation différentielle suivante

$$u' + \frac{y}{2a}u = 0.$$

Par conséquent, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \; \widehat{\psi_a}(y) = Ce^{-\frac{y^2}{4a}}.$$

D'un autre côté,

$$C = \widehat{\psi_a}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ay^2} d\mu_1(y) = 2\int_0^{+\infty} e^{-ay^2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

■

Lemme 1.2.9 Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, si $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ alors $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $f = F^{-1}(\widehat{f})$ où F désigne la transformation de Fourier Plancherel.

Démonstration. On considère l'approximation de l'identité de Gauss $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par le Corollaire 1.2.7. On sait alors que, pour tout $p \in [1, +\infty[$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n * f - f\|_{p,d} = 0.$$

En particulier, il existe une sous suite $(\varphi_{\sigma(n)} * f)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f presque partout. Par ailleurs, comme $\varphi_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi_n * f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ et par suite d'après la Relation (1.15), on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; F(\varphi_{\sigma(n)} * f) = \widehat{\varphi_{\sigma(n)} * f} = \widehat{\varphi_{\sigma(n)}}\widehat{f} = e^{-\frac{|.|^2}{4\sigma(n)^2}}\widehat{f}.$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; \varphi_{\sigma(n)} * f = F^{-1}(e^{-\frac{|.|^2}{4\sigma(n)^2}}\widehat{f}).$$

Comme F est un opérateur borné, on en déduit que

$$f = \lim_{n\to+\infty} \varphi_{\sigma(n)} * f = \lim_{n\to+\infty} F^{-1}(e^{-\frac{|.|^2}{4\sigma(n)^2}}\widehat{f}) = F^{-1}(\lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{|.|^2}{4\sigma(n)^2}}\widehat{f}) = F^{-1}(\widehat{f}).$$

■

Théorème 1.2.10 – Inégalité de Lieb Soit g une fonction fenêtre. Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $p \geqslant 2$, on a

$$\|\mathscr{V}_g(f)\|_{p,2d} \leqslant (\frac{2}{p})^{\frac{d}{p}} \|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d}. \tag{1.16}$$

Démonstration. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $f\overline{T_x g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs, d'après la Relation (1.13) (Plancherel), $\mathscr{V}_g(f) \in L^2(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$. En particulier, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathscr{V}_g(f)(x,.) = \widehat{f\overline{T_x g}} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et par suite d'après le Lemme 1.2.9, on en déduit que $f\overline{T_x g} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Cela implique que $f\overline{T_x g} \in L^q(\mathbb{R}^d)$, où q est l'exposant conjugué [1] de p, $p \geqslant 2$. En utilisant le théorème de Hausdorff-Young, on en déduit que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^p d\mu_d(\omega)\right)^{1/p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{(f\overline{T_x g})}(\omega)|^p d\mu_d(\omega)\right)^{1/p} \\
&\leqslant A_q^d (\int_{\mathbb{R}^d} |(f\overline{T_x g})(y)|^q d\mu_d(y))^{1/q} \\
&= A_q^d (\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^q |g(y-x)|^q d\mu_d(y))^{1/q} \\
&= A_q^d (|f|^q * |\check{g}|^q(x))^{1/q},
\end{aligned}$$

où $A_q = (q^{1/q} p^{-1/p})^{1/2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{V}_g(f)\|_{p,2d} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^p d\mu_d(x)\right) d\mu_d(\omega)\right)^{1/p} \\
&\leqslant A_q^d \left(\int_{\mathbb{R}^d} (|f|^q * |\check{g}|^q(x))^{p/q} d\mu_d(x)\right)^{1/p} \\
&= A_q^d \||f|^q * |\check{g}|^q\|_{p/q,d}^{1/q}.
\end{aligned}$$

Soit $s = \dfrac{2}{q}$, $t = \dfrac{p}{q}$ et s' (respectivement t') l'exposant conjugué de s (respectivement de t), alors $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s} = 1 + \dfrac{1}{t}$, et par suite comme $|f|^q$, $|\check{g}|^q \in L^s(\mathbb{R}^d)$ et en utilisant l'inégalité de Young on en déduit que

$$\||f|^q * |\check{g}|^q\|_{t,d} \leqslant A_s^{2d} A_{t'}^d \||f|^q\|_{s,d} \||\check{g}|^q\|_{s,d}.$$

Cependant, $\||f|^q\|_{s,d} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^{q.2/q} d\mu_d(x)\right)^{q/2} = \|f\|_{2,d}^q$ et $\||\check{g}|^q\|_{s,d} = \|g\|_{2,d}^q$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{V}_g(f)\|_{p,2d} &\leqslant A_q^d (A_s^{2d} A_{t'}^d \|f\|_{2,d}^q \|g\|_{2,d}^q)^{1/q} \\
&= A_q^d A_s^{2d/q} A_{t'}^{d/q} \|f\|_{2,d} \|g\|_{2,d}.
\end{aligned}$$

1. Deux réels $1 \leqslant p,q \leqslant +\infty$ sont dit des exposants conjugués si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Or,

$$
\begin{aligned}
(A_q^d A_s^{2d/q} A_{t'}^{d/q})^{2q/d} &= (\frac{q^{1/q}}{p^{1/p}})^q (\frac{s^{1/s}}{s'^{1/s'}})^2 (\frac{t'^{1/t'}}{t^{1/t}}) \\
&= (\frac{q}{p^{q/p}}) \frac{s^{2/s}}{s'^{s'}} \frac{t'^{1/t'}}{t^{1/t}} \\
&= (\frac{q}{p^{1/t}}) \frac{s^{1+1/t}}{s'^{1/t'}} \frac{t'^{1/t'}}{t^{1/t}} \\
&= qs(\frac{s}{pt})^{1/t} (\frac{t'}{s'})^{1/t'} \\
&= 2(\frac{2}{p^2})^{q/p} 2^{1/t'} \\
&= 2(\frac{2}{p^2})^{1/t} 2^{1/t-1} \\
&= (\frac{2}{p})^{2q/p},
\end{aligned}
$$

ce qui permet de conclure que

$$
\|\mathscr{V}_g(f)\|_{p,2d} \leqslant (\frac{2}{p})^{\frac{d}{p}} \|f\|_{2,d} \|g\|_{2,d}.
$$

■

Théorème 1.2.11 – Formule d'inversion au sens faible Soit g une fonction fenêtre. Alors, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et pour tous $h, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $\langle \gamma | g \rangle_{\mathbb{R}^d} \neq 0$, on a

$$
\langle f | h \rangle_{\mathbb{R}^d} = \frac{1}{\langle \gamma | g \rangle_{\mathbb{R}^d}} \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} \mathscr{V}_g(f)(x, \omega) \overline{\mathscr{V}_\gamma(h)(x, \omega)} d\mu_d(x) d\mu_d(\omega). \tag{1.17}
$$

En particulier, pour $\gamma = g$ on a

$$
\langle f | h \rangle_{\mathbb{R}^d} = \frac{1}{\|g\|_{2,d}^2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} \mathscr{V}_g(f)(x, \omega) \overline{\mathscr{V}_g(h)(x, \omega)} d\mu_d(x) d\mu_d(\omega). \tag{1.18}
$$

Démonstration. La preuve est une conséquence immédiate de la Relation d'orthogonalité (1.11). En effet, pour tous $h, \gamma \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\langle \gamma | g \rangle_{\mathbb{R}^d}} \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} \mathscr{V}_g(f)(x, \omega) \overline{\mathscr{V}_\gamma(h)(x, \omega)} d\mu_d(x) d\mu_d(\omega) &= \frac{1}{\langle \gamma | g \rangle_{\mathbb{R}^d}} \langle \mathscr{V}_g(f) | \mathscr{V}_\gamma(h) \rangle_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} \\
&= \langle f | h \rangle_{\mathbb{R}^d}.
\end{aligned}
$$

■

Corollaire 1.2.12 – Injectivité de la TFF Soit g une fonction fenêtre. Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, si $\mathscr{V}_g(f) = 0$, alors $f = 0$.

Démonstration. Supposons que $\mathscr{V}_g(f) = 0$, alors d'après la Relation (1.18), on en déduit que

$$\forall h \in L^2(\mathbb{R}^d),\ \langle f|h\rangle_{\mathbb{R}^d} = 0,$$

et par suite $f = 0$. ■

Théorème 1.2.13 – Formule d'inversion dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ Soient $f, g, \gamma \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telles que $\langle g|\gamma\rangle_{\mathbb{R}^d} \neq 0$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}^d,\ f(t) = \frac{1}{\langle \gamma|g\rangle_{\mathbb{R}^d}} \iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} \mathscr{V}_g(f)(x,\omega) M_\omega(T_x(\gamma))(t)\, d\mu_{2d}(x,\omega). \tag{1.19}$$

En particulier, pour $\gamma = g$ on a

$$\forall t \in \mathbb{R}^d,\ f(t) = \frac{1}{\|g\|_{2,d}^2} \iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} \mathscr{V}_g(f)(x,\omega) M_\omega(T_x(g))(t)\, d\mu_{2d}(x,\omega). \tag{1.20}$$

Démonstration. Comme $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $T_x(g) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et donc $fT_x(g) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Par suite, d'après la Relation (1.5) et en utilisant le théorème de Fubini ainsi que la formule d'inversion de la transformation de Fourier sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\langle \gamma|g\rangle_{\mathbb{R}^d}} \iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} \mathscr{V}_g(f)(x,\omega) M_\omega(T_x(\gamma))(t)\, d\mu_{2d}(x,\omega)\\
&\qquad = \frac{1}{\langle \gamma|g\rangle_{\mathbb{R}^d}} \iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} \widehat{f\overline{T_x(g)}}(\omega) M_\omega(T_x(\gamma))(t)\, d\mu_{2d}(x,\omega)\\
&\qquad = \frac{1}{\langle \gamma|g\rangle_{\mathbb{R}^d}} \int_{\mathbb{R}^d} (T_x(\gamma))(t) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f\overline{T_x(g)}}(\omega) e^{i\langle t|\omega\rangle} d\mu_d(\omega) \right) d\mu_d(x)\\
&\qquad = \frac{1}{\langle \gamma|g\rangle_{\mathbb{R}^d}} f(t) \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(t-x)\overline{g(t-x)}\, d\mu_d(x)\\
&\qquad = \frac{f(t)}{\langle \gamma|g\rangle_{\mathbb{R}^d}} \langle \gamma|g\rangle_{\mathbb{R}^d}\\
&\qquad = f(t).
\end{aligned}$$

■

Lemme 1.2.14 Soit $h \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ une fonction vérifiant

$$\forall y \in \mathbb{R}^d,\ \hat{h}(y) \neq 0,$$

alors l'ensemble $\Omega_h = \left\{ T_x(\check{h}) \mid x \in \mathbb{R}^d \right\}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, où $\check{h}$ est la reflexion de h définie par $\check{h}(x) = h(-x)$.

Démonstration. Soit $\phi \in (\Omega_h)^{\perp}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} T_x(\check{h})(t)\overline{\phi}(t)d\mu_d(t) = 0,$$

et par suite $\int_{\mathbb{R}^d} h(x-t)\overline{\phi}(t)d\mu_d(t) = 0$. En d'autres termes, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a $h * \overline{\phi}(x) = 0$. Par suite, $h * \overline{\phi} = 0$, en particulier $\widehat{h * \overline{\phi}} = 0$ et donc

$$\forall y \in \mathbb{R}^d,\ \widehat{h}(y)\widehat{\overline{\phi}}(y) = 0.$$

Comme $\widehat{h}(y) \neq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, on en déduit que $\overline{\phi}(y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ et donc $\phi = 0$. ■

Corollaire 1.2.15 Soit $a > 0$, $\varphi_a(x) = e^{-a|x|^2}$ et $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $g \neq 0$, alors il existe $z_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $\langle g|T_{z_0}(\varphi_a)\rangle \neq 0$

Démonstration. D'après la Relation (1.15), on a

$$\forall y \in \mathbb{R}^d,\ \widehat{\varphi_a}(y) = \frac{e^{-\frac{|y|^2}{4a}}}{(2a)^{\frac{d}{2}}} \neq 0,$$

et par suite d'après le Lemme 1.2.14, on en déduit qu'il existe $z_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $\langle T_{z_0}(\varphi_a)|g\rangle \neq 0$. ■

Théorème 1.2.16 Soit $a, b > 0$ et soit $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$. Alors, il existe $C, k \in \mathbb{C}$ et $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^d$ tels que

$$\forall (x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d,\ \mathscr{V}_g(f)(x,\omega) = Ce^{ik\langle\omega|x\rangle}e^{i\langle\alpha|x\rangle}e^{i\langle\beta|\omega\rangle}e^{-a|x-\gamma|^2-b|\omega-\delta|^2},$$

si et seulement si il existe $k', k'' \in \mathbb{C}$ et $\alpha', \alpha'', x_0, y_0 \in \mathbb{R}^d$ et $\beta', \beta'' > 0$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}^d,\ f(t) = k'e^{i\langle\alpha'|t\rangle}e^{-\beta'|t-x_0|^2},$$

et

$$\forall t \in \mathbb{R}^d,\ g(t) = k''e^{i\langle\alpha''|t\rangle}e^{-\beta''|t-y_0|^2}.$$

Démonstration. $\triangleright$ On a $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$, alors d'après le Corollaire 1.2.15, il existe $z_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $C_0 = \langle g | T_{z_0}(e^{-|.|^2}) \rangle_{\mathbb{R}^d} \neq 0$, et donc d'après la Relation (1.19) on a

$$\begin{aligned}
f(t) &= C_0 \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} \mathscr{V}_g(f)(x,\omega) e^{i\langle \omega | t \rangle} T_x(T_{z_0} e^{-|t|^2}) d\mu_{2d}(x,\omega) \\
&= C \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} e^{-a|x-\gamma|^2 - b|\omega-\delta|^2} e^{-|t-z_0-x|^2} e^{ik\langle \omega | x \rangle} e^{i\langle \alpha | x \rangle} e^{i\langle \beta | \omega \rangle} e^{i\langle \omega | t \rangle} d\mu_{2d}(x,\omega) \\
&= C e^{-|t-z_0|^2} \int_{\widehat{\mathbb{R}}^d} e^{-b|\omega|^2} e^{2b\langle \omega | \delta \rangle} e^{i\langle \omega | t+\beta \rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(a+1)|x|^2} e^{2\langle x | t+a\gamma - z_0 \rangle} e^{i\langle x | k\omega + \alpha \rangle} d\mu_d(x) \right) d\mu_d(\omega),
\end{aligned}$$

or,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(a+1)|x|^2} e^{2\langle x | t+a\gamma-z_0 \rangle} e^{i\langle x | k\omega+\alpha \rangle} d\mu_d(x) \\
&= e^{\frac{|t+a\gamma-z_0|^2}{a+1}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-(a+1)|x - \frac{t+a\gamma-z_0}{a+1}|^2} e^{i\langle k\omega+\alpha | x \rangle} d\mu_d(x) \\
&= e^{\frac{|t+a\gamma-z_0|^2}{a+1}} e^{i\langle \alpha + k\omega | \frac{t+a\gamma-z_0}{a+1} \rangle} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-(a+1)|u|^2} e^{i\langle k\omega+\alpha | u \rangle} d\mu_d(u) \\
&= C e^{\frac{|t+a\gamma-z_0|^2}{a+1}} e^{-\frac{|k\omega+\alpha|^2}{4(a+1)}} e^{i\langle \alpha + k\omega | \frac{t+a\gamma-z_0}{a+1} \rangle}, \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}
f(t) &= C e^{-\frac{a}{a+1}|t-z_0|^2} e^{i\langle t | \frac{\alpha}{a+1} \rangle} e^{\frac{2a}{a+1}\langle t | \gamma \rangle} \int_{\widehat{\mathbb{R}}^d} e^{-\frac{4b(a+1)+k^2}{4(a+1)}|\omega - \frac{4b\delta(a+1)-k\alpha}{4b(a+1)+k^2}|^2} e^{i\langle \omega | (\frac{a+1+k}{a+1})t + \frac{k(a\gamma-z_0)}{a+1} + \beta \rangle} d\mu_d(\omega) \\
&= C e^{-\frac{a}{a+1}|t-z_0|^2} e^{i\langle t | \frac{\alpha}{a+1} \rangle} e^{\frac{2a}{a+1}\langle t | \gamma \rangle} e^{\langle \frac{(4b\delta(a+1)-k\alpha)(a+1+k)}{(4b(a+1)+k^2)(a+1)} | t \rangle} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{4b(a+1)+k^2}{4(a+1)}|u|^2} e^{i\langle u | (\frac{a+1+k}{a+1})t + \frac{k(a\gamma-z_0)}{a+1} + \beta \rangle} d\mu_d(u) \\
&= C e^{-\frac{a}{a+1}|t-z_0|^2} e^{i\langle t | \frac{\alpha}{a+1} \rangle} e^{\frac{2a}{a+1}\langle t | \gamma \rangle} e^{\langle \frac{(4b\delta(a+1)-k\alpha)(a+1+k)}{(4b(a+1)+k^2)(a+1)} | t \rangle} e^{-\frac{(a+1+k)^2}{(a+1)(4b(a+1)+k^2)}|t|^2} \\
&= C e^{-\frac{4ab(a+1)+k^2a+(a+1+k)^2}{(a+1)(4b(a+1)+k^2)}|t - \frac{a(\gamma-z_0)(4b(a+1)+k^2)+(a+1+k)(4b\delta(a+1)-k\alpha)}{2(4ab(a+1)+k^2a+(a+1+k)^2)}|^2} e^{i\langle t | \frac{\alpha}{a+1} \rangle}.
\end{aligned}$$

D'une manière analogue et comme $f \neq 0$, alors d'après le Corollaire 1.2.15, il existe $z_1 \in \mathbb{R}^d$ tel que $C_1 = \langle g | T_{z_1}(e^{-|.|^2}) \rangle_{\mathbb{R}^d} \neq 0$. Par suite, d'après la Relation (1.9) ainsi que la Relation (1.19) on a

$$\begin{aligned}
g(t) &= C_1 \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} \mathscr{V}_f(g)(x,\omega) e^{i\langle \omega | t \rangle} T_x(T_{z_0}(e^{-|t|^2}))(t) d\mu_{2d}(x,\omega) \\
&= C_1 \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} e^{-i\langle \omega | x \rangle} \overline{\mathscr{V}_g(f)(-x,-\omega)} e^{i\langle \omega | t \rangle} e^{-|t-z_1-x|^2} d\mu_{2d}(x,\omega) \\
&= CC_1 \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} e^{-ik\langle \omega | x \rangle} e^{i\langle \alpha | x \rangle} e^{i\langle \beta | \omega \rangle} e^{-a|x+\gamma|^2 - b|\omega+\delta|^2} e^{-|t-z_1-x|^2} e^{-i\langle \omega | x-t \rangle} d\mu_{2d}(x,\omega) \\
&= C e^{-|t-z_1|^2} \int_{\widehat{\mathbb{R}}^d} e^{-a|\omega+\delta|^2} e^{i\langle \omega | t+\beta \rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(a+1)|x|^2} e^{2\langle x | t-z_1-a\gamma \rangle} e^{i\langle x | \alpha - k\omega \rangle} d\mu_d(x) \right) d\mu_d(\omega),
\end{aligned}$$

or, d'après la Relation (1.21), on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(a+1)|x|^2} e^{2\langle x | t-z_1-a\gamma \rangle} e^{i\langle x | \alpha-k\omega \rangle} d\mu_d(x) = C e^{\frac{|t-a\gamma-z_1|^2}{a+1}} e^{-\frac{|\alpha-k\omega|^2}{4(a+1)}} e^{i\langle \alpha-k\omega | \frac{t-a\gamma-z_1}{a+1} \rangle},$$

et par suite

$$
\begin{aligned}
g(t) &= Ce^{-\frac{a}{a+1}|t-z_1|^2} e^{i\langle t|\frac{\alpha}{a+1}\rangle} \int_{\widehat{\mathbb{R}}^d} e^{-\frac{k^2+4a(a+1)}{4(a+1)}|\omega|^2} e^{-2\langle \omega|\frac{4(a+1)a\delta-k\alpha}{4(a+1)}\rangle} e^{-i\langle \omega|\frac{k(t-a\gamma-z_1)}{a+1}\rangle} d\mu_d(\omega) \\
&= Ce^{-\frac{a}{a+1}|t-z_1|^2} e^{i\langle t|\frac{\alpha}{a+1}\rangle} \int_{\widehat{\mathbb{R}}^d} e^{-\frac{k^2+4a(a+1)}{4(a+1)}|\omega+\frac{4a\delta(a+1)-k\alpha}{k^2+4a(a+1)}|^2} e^{-i\langle \omega|\frac{k(t-a\gamma-z_1)}{a+1}\rangle} d\mu_d(\omega) \\
&= Ce^{-\frac{a}{a+1}|t-z_1|^2} e^{i\langle t|\frac{\alpha}{a+1}\rangle} e^{i\langle \frac{k(4a\delta(a+1)-k\alpha)}{(a+1)(k^2+4a(a+1))}|t\rangle} \int_{\widehat{\mathbb{R}}^d} e^{-\frac{k^2+4a(a+1)}{4(a+1)}|u|^2} e^{-i\langle u|\frac{k(t-a\gamma-z_1)}{a+1}\rangle} d\mu_d(\omega) \\
&= Ce^{-\frac{a}{a+1}|t-z_1|^2} e^{i\langle t|\frac{\alpha}{a+1}\rangle} e^{i\langle \frac{k(4a\delta(a+1)-k\alpha)}{(a+1)(k^2+4a(a+1))}|t\rangle} e^{-\frac{|k(t-a\gamma-z_1)|^2}{(a+1)(k^2+4a(a+1))}} \\
&= Ce^{-\frac{a(k^2+4a(a+1))+k^2}{(a+1)(k^2+4a(a+1))}|t-z_1+\frac{ka\gamma}{a(k^2+4a(a+1))+k^2}|^2} e^{i\langle \frac{k(4a\delta(a+1)-k\alpha)}{(a+1)(k^2+4a(a+1))}+\frac{\alpha}{a+1}|t\rangle}.
\end{aligned}
$$

$\triangleright$ Si on a pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, $f(t) = k' e^{-i\langle \alpha'|t\rangle} e^{-\beta'|t-x_0|^2}$ et $g(t) = k'' e^{-i\langle \alpha''|t\rangle} e^{-\beta''|t-y_0|^2}$, alors pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\mathscr{V}_g(f)(x,\omega) &= k'k'' \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \alpha'|t\rangle} e^{-\beta'|t-x_0|^2} e^{-i\langle \alpha''|t-x\rangle} e^{-\beta''|t-x-y_0|^2} e^{-i\langle \omega|t\rangle} d\mu_d(t) \\
&= k'k'' e^{-\beta'|x_0|^2} e^{-\beta''|x+y_0|^2} e^{i\langle \alpha''|x\rangle} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-(\beta'+\beta'')|t|^2} e^{2\langle t|\beta' x_0+\beta''(x+y_0)\rangle} e^{-i\langle t|\alpha'+\alpha''+\omega\rangle} d\mu_d(t) \\
&= k'k'' e^{-\beta'|x_0|^2} e^{-\beta''|x+y_0|^2} e^{\frac{|\beta' x_0+\beta''(x+y_0)|^2}{\beta'+\beta''}} e^{i\langle \alpha''|x\rangle} \\
&\times \int_{\mathbb{R}^d} e^{-(\beta'+\beta'')|t-\frac{\beta' x_0+\beta''(x+y_0)}{\beta'+\beta''}|^2} e^{-i\langle t|\alpha'+\alpha''+\omega\rangle} d\mu_d(t) \\
&= k'k'' e^{-\beta'|x_0|^2} e^{-\beta''|x+y_0|^2} e^{\frac{|\beta' x_0+\beta''(x+y_0)|^2}{\beta'+\beta''}} e^{i\langle \alpha''|x\rangle} e^{i\langle \frac{\beta' x_0+\beta''(x+y_0)}{\beta'+\beta''}|\alpha'+\alpha''+\omega\rangle} \\
&\times \int_{\mathbb{R}^d} e^{-(\beta'+\beta'')|u|^2} e^{-i\langle u|\alpha'+\alpha''+\omega\rangle} d\mu_d(u) \\
&= k'k'' \frac{e^{-\frac{|\alpha'+\alpha''+\omega|^2}{4(\beta'+\beta'')}}}{(2(\beta'+\beta''))^{\frac{d}{2}}} e^{-\beta'|x_0|^2} e^{-\beta''|x+y_0|^2} e^{\frac{|\beta' x_0+\beta''(x+y_0)|^2}{\beta'+\beta''}} e^{i\langle \alpha''|x\rangle} e^{i\langle \frac{\beta' x_0+\beta''(x+y_0)}{\beta'+\beta''}|\alpha'+\alpha''+\omega\rangle} \\
&= Ce^{-\frac{|\alpha'+\alpha''+\omega|^2}{4(\beta'+\beta'')}} e^{-\beta''|x+y_0|^2} e^{\frac{|\beta' x_0+\beta''(x+y_0)|^2}{\beta'+\beta''}} e^{i\langle \alpha''|x\rangle} e^{i\langle \frac{\beta' x_0+\beta''(x+y_0)}{\beta'+\beta''}|\alpha'+\alpha''+\omega\rangle} \\
&= Ce^{-\frac{|\alpha'+\alpha''+\omega|^2}{4(\beta'+\beta'')}} e^{-\frac{\beta'\beta''}{\beta'+\beta''}|x+y_0-x_0|^2} e^{i\langle x|\alpha''+\frac{\beta''}{\beta'+\beta''}(\alpha'+\alpha'')\rangle} e^{i\langle \omega|\frac{\beta' x_0+\beta'' y_0}{\beta'+\beta''}\rangle} e^{i\frac{\beta''}{\beta'+\beta''}\langle x|\omega\rangle}.
\end{aligned}
$$

ce qui achève la démonstration. $\blacksquare$

Définition 1.2.1 – Fonction ambiguïté radar Soient $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$. On appelle fonction ambiguïté radar de f et g l'application $\mathscr{A}(f,g)$ définie sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ par

$$\mathscr{A}(f,g)(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t+\frac{x}{2})\overline{g(t-\frac{x}{2})}e^{-i\langle t|\omega\rangle}d\mu_d(t).$$

Proposition 1.2.17 Soient $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$, alors pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, on a

$$\mathscr{A}(f,g)(x,\omega) = e^{\frac{i}{2}\langle x|\omega\rangle}\mathscr{V}_g(f)(x,\omega). \tag{1.22}$$

En particulier,

$$|\mathscr{A}(f,g)(x,\omega)| = |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|.$$

***Démonstration*.** Soient $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$. En faisant un changement de variables, on obtient

$$\begin{aligned}\forall (x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d,\ \mathscr{A}(f,g)(x,\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t+\frac{x}{2})\overline{g(t-\frac{x}{2})}e^{-i\langle t|\omega\rangle}d\mu_d(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(u)\overline{g(u-x)}e^{-i\langle u-\frac{x}{2}|\omega\rangle}d\mu_d(u) \\ &= e^{\frac{i}{2}\langle x|\omega\rangle}\int_{\mathbb{R}^d} f(u)\overline{g(u-x)}e^{-i\langle u|\omega\rangle}d\mu_d(u) \\ &= e^{\frac{i}{2}\langle x|\omega\rangle}\mathscr{V}_g(f)(x,\omega),\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Définition 1.2.2 – Transformation de Wigner Soient $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$. On appelle la transformée de Wigner de f et g l'application $\mathscr{W}(f,g)$ définie sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ par

$$\mathscr{W}(f,g)(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x+\frac{t}{2})\overline{g(x-\frac{t}{2})}e^{-i\langle t|\omega\rangle}d\mu_d(t).$$

Proposition 1.2.18 Soient $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$, alors pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ on a,

$$\mathscr{W}(f,g)(x,\omega) = 2^d e^{2i\langle x|\omega\rangle}\mathscr{V}_{\check{g}}(f)(2x,2\omega). \tag{1.23}$$

En particulier,

$$|\mathscr{W}(f,g)(x,\omega)| = 2^d|\mathscr{V}_{\check{g}}(f)(2x,2\omega)|.$$

Démonstration. En utilisant un changement de variables, on obtient

$$\begin{aligned}
\forall (x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d,\ \mathscr{W}(f,g)(x,\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x+\frac{t}{2})\overline{g(x-\frac{t}{2})}e^{-i\langle t|\omega\rangle}d\mu_d(t)\\
&= 2^d e^{2i\langle x|\omega\rangle}\int_{\mathbb{R}^d} f(u)\overline{g(-u+2x)}e^{-2i\langle u|\omega\rangle}d\mu_d(u)\\
&= 2^d e^{2i\langle x|\omega\rangle}\mathscr{V}_{\check{g}}(f)(2x,2\omega).
\end{aligned}$$

■

2. Principes d'incertitude associés à la TFF

En analyse harmonique, plusieurs principes d'incertitude se sont intéréssés à étudier les supports respectifs d'une fonction f et de sa transformée de Fourier. Ces principes nous montrent en général que l'essentiel des supports d'une fonction f et de sa transformée de Fourier ne peuvent pas être concentrés dans des intervalles arbitrairement petits. Dans ce contexte, il existe dans la litérature plusieurs résultats importants dont le théorème de Donoho-Starck [8], le théorème de Benedicks [3] et le théorème de Amrein-Berthier [1]. Dans la suite, on se propose d'établir une généralisation de ces trois résultats pour la TFF.

2.1 Principe d'incertitude de Lieb

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, ε un réel strictement positif et $\mathscr{T}$ une partie mesurable de $\mathbb{R}^d$. On dit que f est ε-concentrée dans $\mathscr{T}$ si

$$\|\chi_{\mathscr{T}^c} f\|_{2,d} \leqslant \varepsilon \|f\|_{2,d}.$$

En 1989, Donoho et Starck [8] ont montré le résultat suivant

Théorème 2.1.1 – Donoho-Starck Soient $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, ε, δ deux réels strictement positifs. Soient $\mathscr{T}$ et $\mathscr{W}$ deux parties mesurables de $\mathbb{R}^d$. Si f est ε-concentrée dans $\mathscr{T}$ et $\widehat{f}$ est δ-concentrée dans $\mathscr{W}$, alors

$$\mu_d(\mathscr{T})\mu_d(\mathscr{W}) \geqslant (1-\varepsilon-\delta)^2.$$

On se propose dans ce paragraphe, en utilisant l'inégalité de Lieb (1.16), de généraliser le résultat à la TFF. Ce résultat a été montré par Lieb [25] et a été généralisé par Boggiatto, Carypis et Oliaro [5].

Théorème 2.1.2 – Principe d'incertitude de Lieb Soit g une fonction fenêtre et $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, telle que $f \neq 0$. Soit $\mathscr{U}$ une partie mesurable de $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ et $\varepsilon \geqslant 0$. Si $\mathscr{V}_g(f)$ est ε-concentrée dans $\mathscr{U}$ alors pour tout $p > 2$ on a

$$\mu_{2d}(\mathscr{U}) \geqslant (1-\varepsilon^2)^{\frac{p}{p-2}} \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2d}{p-2}}. \tag{2.1}$$

En particulier,

$$\mu_{2d}(\mathscr{U}) \geqslant 2^d(1-\varepsilon^2)^2.$$

Démonstration. On a $\mathscr{V}_g(f)$ est ε-concentrée dans $\mathscr{U}$, c'est à dire

$$\|\chi_{\mathscr{U}^c}\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d} \leqslant \varepsilon \|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d}.$$

Or, d'après la Relation (1.13) (Plancherel), on a $\|\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d} = \|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d}$ et donc

$$\|\chi_{\mathscr{U}}\mathscr{V}_g(f)\|^2_{2,2d} = \|\mathscr{V}_g(f)\|^2_{2,2d} - \|\chi_{\mathscr{U}^c}\mathscr{V}_g(f)\|^2_{2,2d} \geqslant \|f\|^2_{2,d}\|g\|^2_{2,d}(1-\varepsilon^2). \tag{2.2}$$

Par ailleurs, en appliquant l'inégalité de Hölder pour les exposants conjugués $\frac{p}{2}$ et $\frac{p}{p-2}$, avec $p > 2$, on en déduit que

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} \chi_{\mathscr{U}}(x,\omega)|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2 d\mu_{2d}(x,\omega) \leqslant \|\mathscr{V}_g(f)\|^2_{p,2d} \left(\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} \chi_{\mathscr{U}}(x,\omega)^{\frac{p}{p-2}} d\mu_{2d}(x,\omega)\right)^{\frac{p-2}{p}}.$$

En utilisant maintenant la Relation (1.16) (Lieb) ainsi que la Relation (2.2), on obtient

$$\|f\|^2_{2,d}\|g\|^2_{2,d}(1-\varepsilon^2) \leqslant \left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{2d}{p}} \|f\|^2_{2,d}\|g\|^2_{2,d}\mu_{2d}(\mathscr{U})^{\frac{p-2}{p}},$$

et par suite

$$1-\varepsilon^2 \leqslant \left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{2d}{p}} \mu_{2d}(\mathscr{U})^{\frac{p-2}{p}},$$

d'où,

$$\mu_{2d}(\mathscr{U}) \geqslant (1-\varepsilon^2)^{\frac{p}{p-2}} \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2d}{p-2}}.$$

En particulier, pour $p = 4$, on obtient

$$\mu_{2d}(\mathscr{U}) \geqslant 2^d(1-\varepsilon^2)^2.$$

■

Théorème 2.1.3 Soient $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, telles que $f \neq 0$ et $g \neq 0$. Soient $\mathscr{U} \subseteq \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ une partie mesurable et $\varepsilon \geqslant 0$. Si $\mathscr{A}(f,g)$ est ε-concentrée dans $\mathscr{U}$ alors

$$\forall p > 2,\ \mu_{2d}(\mathscr{U}) \geqslant (1-\varepsilon^2)^{\frac{p}{p-2}} \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2d}{p-2}}.$$

En particulier,

$$\mu_{2d}(\mathscr{U}) \geqslant 2^d(1-\varepsilon^2)^2.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \|\chi_{\mathscr{U}}\mathscr{A}(f,g)\|_{2,2d}^2 &= \iint_{\mathscr{U}} |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2\, d\mu_{2d}(x,\omega) \\ &= \|\chi_{\mathscr{U}}\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|\chi_{\mathscr{U}}\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d} \geqslant \|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2(1-\varepsilon^2),$$

et par suite d'après le Théorème 2.1.2, on en déduit que

$$\mu_{2d}(\mathscr{U}) \geqslant (1-\varepsilon^2)^{\frac{p}{p-2}} \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2d}{p-2}}.$$

Pour $p=4$,

$$\mu_{2d}(\mathscr{U}) \geqslant 2^d(1-\varepsilon^2)^2.$$

■

Lemme 2.1.4 Soit $\mathscr{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ et $\mathscr{V} = \{cx \mid x \in \mathscr{U}, c > 0\}$, alors

$$\mu_d(\mathscr{V}) = c^d \mu_d(\mathscr{U}).$$

Démonstration. On a

$$\mu_d(\mathscr{V}) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\mathscr{V}}(x)d\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\mathscr{U}}(\frac{x}{c})d\mu_d(x) = c^d \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\mathscr{U}}(y)d\mu_d(y) = c^d\mu_d(\mathscr{U}).$$

■

Théorème 2.1.5 Soient $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, telles que $f \neq 0$ et $g \neq 0$. Soient $\mathscr{U} \subseteq \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ une partie mesurable et $\varepsilon \geqslant 0$. Si $\mathscr{W}(f,g)$ est ε-concentrée dans $\mathscr{U}$ alors

$$\forall p > 2,\ \mu_{2d}(\mathscr{U}) \geqslant \frac{1}{2^{2d}}(1-\varepsilon^2)^{\frac{p}{p-2}} \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2d}{p-2}}.$$

En particulier,

$$\mu_{2d}(\mathscr{U}) \geqslant \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{2^d}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\|\chi_{\mathscr{U}}\mathscr{W}(f,g)\|_{2,2d}^2 &= \iint_{\mathscr{U}} |\mathscr{W}(f,g)(x,\omega)|^2\, d\mu_{2d}(x,\omega)\\ &= 2^{2d}\iint_{\mathscr{U}} \left|\mathscr{V}_{\check{g}}(f)(2x,2\omega)\right|^2 d\mu_{2d}(x,\omega)\\ &= \iint_{\mathscr{T}} \left|\mathscr{V}_{\check{g}}(f)(y,\lambda)\right|^2 d\mu_{2d}(y,\lambda)\\ &= \|\chi_{\mathscr{T}}\mathscr{V}_{\check{g}}(f)\|_{2,2d}^2\end{aligned}$$

où

$$\mathscr{T} = \left\{(y,\lambda)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d \mid (\frac{y}{2},\frac{\lambda}{2})\in\mathscr{U}\right\} = \left\{(2x,2\omega)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d \mid (x,\omega)\in\mathscr{U}\right\}.$$

Ainsi, $\mathscr{V}_{\check{g}}(f)$ est ε-concentrée dans $\mathscr{T}$ et par suite $\|\chi_{\mathscr{T}}\mathscr{V}_{\check{g}}(f)\|_{2,2d}^2 \geqslant \|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2(1-\varepsilon^2)$, et donc d'après la Relation (2.1), on en déduit que $\mu_{2d}(\mathscr{T}) \geqslant (1-\varepsilon^2)^{\frac{p}{p-2}}\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2d}{p-2}}$. Or, d'après le Lemme 2.1.4, on a $\mu_{2d}(\mathscr{T}) = 2^{2d}\mu_{2d}(\mathscr{U})$ et par suite

$$\mu_{2d}(\mathscr{U}) \geqslant \frac{1}{2^{2d}}(1-\varepsilon^2)^{\frac{p}{p-2}}\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2d}{p-2}}.$$

Pour $p=4$, on obtient

$$\mu_{2d}(\mathscr{U}) \geqslant \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{2^d}.$$

■

Corollaire 2.1.6 Soient $f,g\in L^2(\mathbb{R}^d)$, telles que $\|f\|_{2,d} = \|g\|_{2,d} = 1$, alors

$$\mu_{2d}\left(Supp^{a}(\mathscr{V}_g(f))\right) \geqslant \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2d}{p-2}}. \tag{2.3}$$

En particulier,

$$\mu_{2d}\left(Supp\mathscr{V}_g(f)\right) \geqslant e^d.$$

[a] Le support d'une fonction continue est l'adhérence de l'ensemble des points en lesquels la fonction ne s'annule pas.

Démonstration. D'après la Relation (1.13) (Plancherel), on a

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} \chi_{Supp(\mathscr{V}_g(f))}(x,\omega)|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2 d\mu_{2d}(x,\omega) = \iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2 d\mu_{2d}(x,\omega) = 1.$$

Comme $\|\chi_{Supp(\mathscr{V}_g(f))^c}\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d} \leqslant \|\chi_{Supp(\mathscr{V}_g(f))}\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}$ donc $\mathscr{V}_g(f)$ est $1-$concentrée dans $supp(\mathscr{V}_g(f))$ et par suite en appliquant la Relation (2.1) pour $\varepsilon = 0$, on obtient pour tout $p > 2$

$$\mu_{2d}\left(Supp(\mathscr{V}_g(f))\right) \geqslant \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2d}{p-2}}.$$

En particulier,

$$\mu_{2d}\left(Supp(\mathscr{V}_g(f))\right) \geqslant \lim_{p\to 2^+} \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2d}{p-2}} = e^d.$$

■

Corollaire 2.1.7 Soient $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, telles que $\|f\|_{2,d} = \|g\|_{2,d} = 1$, alors

$$\mu_{2d}\left(Supp(\mathscr{A}(f,g))\right) \geqslant \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2d}{p-2}}.$$

En particulier,

$$\mu_{2d}\left(Supp\mathscr{A}(f,g)\right) \geqslant e^d.$$

Démonstration. D'après la Relation (1.22), on a $Supp(\mathscr{A}(f,g)) = Supp(\mathscr{V}_g(f))$ et donc la Relation (2.3) achève la démonstration. ■

Corollaire 2.1.8 Soient $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, telles que $\|f\|_{2,d} = \|g\|_{2,d} = 1$, alors

$$\mu_{2d}\left(Supp(\mathscr{W}(f,g))\right) \geqslant \frac{1}{2^{2d}}\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2d}{p-2}}.$$

En particulier,

$$\mu_{2d}\left(Supp\mathscr{W}(f,g)\right) \geqslant \frac{1}{2^{2d}}e^d.$$

Démonstration. Soit $(x,\omega) \in Supp(\mathscr{W}(f,g))$ alors $\mathscr{V}_{\check{g}}(f)(2x,2\omega) \neq 0$. Par suite et d'après le Lemme 2.1.4, on a

$$\mu_{2d}\left(Supp(\mathscr{W}(f,g))\right) = \frac{1}{2^{2d}}\mu_{2d}\left(Supp(\mathscr{V}_{\check{g}}(f))\right).$$

Or d'après la Relation (2.3),

$$\mu_{2d}\left(Supp(\mathscr{V}_{\check{g}}(f))\right) \geqslant \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2d}{p-2}},$$

d'où,

$$\mu_{2d}\left(Supp(\mathscr{W}(f,g))\right) \geqslant \frac{1}{2^{2d}}\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2d}{p-2}}.$$

■

2.2 Principe d'incertitude de Benedicks et Amrein-Berthier

En analyse harmonique, une paire (S,Σ) de parties mesurables de $\mathbb{R}^d$ est dite faiblement annihilante dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, si pour toute $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{cases} Supp(f) \subset S \\ Supp(\widehat{f}) \subset \Sigma \end{cases} \implies f = 0.$$

Il existe dans la littérature plusieurs paires faiblement annihilantes connues. En effet, si S et Σ sont deux parties compactes de $\mathbb{R}^d$, alors la paire (S,Σ) est faiblement annihilante. Cela peut s'expliquer facilement du fait que si f est à support inclus dans un compact, sa tranformée de Fourier $\widehat{f}$ est analytique sur $\mathbb{C}^d$, comme $\widehat{f}$ est également à support inclus dans un compact, le théorème de Liouville permet alors de conclure que $f = 0$. Plus gńŕalement, si S est bornée et $Supp(f) \subset S$, alors $\widehat{f}$ est analytique sur $\mathbb{C}^d$ et par suite si $Supp(\widehat{f}) \subset \Sigma$ et $int(\Sigma^c) \neq \varnothing$, alors le théorème de prolongement analytique permet de conclure que $f = 0$. Ainsi, si S est bornée et $int(\Sigma^c) \neq \varnothing$ alors (S,Σ) est une paire faiblement annihilante. En 1985, Benedicks [3] a montré, avec une preuve très élégante reposant sur la formule sommatoire de Poisson, que si S et Σ sont de mesure finies alors (S,Σ) est une paire faiblement annihilante.

Une autre notion importante en analyse harmonique est celle des paires fortement annihilantes. En effet, une paire (S,Σ) de parties mesurables de $\mathbb{R}^d$ est dite fortement annihilante s'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que pour toute $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|f\|_{2,d}^2 \leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\chi_{S^c}(x) f(x)|^2 d\mu_d(x) + \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_{\Sigma^c}(y)\widehat{f}(y)|^2 d\mu_d(y)\right).$$

Il est alors évident que toute paire fortement annihilante est nécessairement faiblement annihilante. Dans la littérature, caractériser les paires fortement annihilantes reste une question difficile. Cependant, en 1977 Amrein et Berthier [1] ont montré que si S et Σ sont de mesure finie alors (S,Σ) est une paire fortement annihilante. En 1993, Nazarov [26] a montré, qu'en dimension 1, la constante du théorème de Amrein-Berthier peut s'écrire sous la forme $C = C_0 e^{C_0 \mu(S)\mu(\Sigma)}$ où C_0 est une constante numérique explicite. Cela montre que la constante C dépend uniquement des mesures des parties S et Σ et non pas de leurs structures ensemblistes. En 2001, Kovrijkine [22] a caractérisé les parties Σ formant avec une partie compacte S une paire fortement annihilante.

Le but de ce paragraphe est d'établir un théorème de Benedicks et un théorème de Amrein-Berthier pour la TFF.

Lemme 2.2.1 Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, telles que $g \neq 0$. Soit $\mathscr{F}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ par

$$\mathscr{F}(x,\omega) = e^{i\langle x|\omega\rangle}\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)\mathscr{V}_g(f)(-x,-\omega).$$

Alors $\mathscr{F} \in L^1(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$ et on a pour tout $(y,\eta) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$

$$\hat{\mathscr{F}}(y,\eta) = \mathscr{F}(-\eta, y). \tag{2.4}$$

Démonstration. D'après la Relation (1.9) (Commutation) on sait que pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, on a

$$\mathscr{V}_f(g)(x,\omega) = e^{-i\langle\omega|x\rangle}\overline{\mathscr{V}_g(f)(-x,-\omega)},$$

et par suite on a pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$

$$\mathscr{F}(x,\omega) = (\mathscr{V}_g(f)\overline{\mathscr{V}_f(g)})(x,\omega).$$

En utilisant maintenant la Relation (1.14), on en déduit que pour tout $(y,\eta) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$

$$\begin{aligned}\hat{\mathscr{F}}(y,\eta) &= (\widehat{\mathscr{V}_g(f)\overline{\mathscr{V}_f(g)}})(y,\eta)\\ &= (\mathscr{V}_g(f)\overline{\mathscr{V}_f(g)})(-\eta,y)\\ &= \mathscr{F}(-\eta,y).\end{aligned}$$

■

Lemme 2.2.2 Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$. Pour tous $z, \xi \in \mathbb{R}^d$, on définit sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ la fonction $\phi_{(z,\xi)}$ par

$$\phi_{(z,\xi)}(x,\omega) = e^{i(\langle\omega|x\rangle + 2\langle z|\xi\rangle)}\mathscr{V}_g(f)(x-z,\omega-\xi)\mathscr{V}_g(f)(-x-z,-\omega-\xi). \tag{2.5}$$

Alors, pour tous $z, \xi \in \mathbb{R}^d$, $\phi_{(z,\xi)} \in L^1(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$ et on a

$$\forall (y,\eta) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d,\ \hat{\phi}_{(z,\xi)}(y,\eta) = \phi_{(z,\xi)}(-\eta,y). \tag{2.6}$$

Démonstration. D'après la Proposition 1.1.10 on obtient pour tous $z, \xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\forall (x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d,\ \ \phi_{(z,\xi)}(x,\omega) = e^{i\langle\omega|x\rangle}\mathscr{V}_g(M_\xi T_z f)(x,\omega)\mathscr{V}_g(M_\xi T_z f)(-x,-\omega),$$

et par suite la Relation (2.4) donne

$$\forall (y,\eta) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d,\ \ \hat{\phi}_{(z,\xi)}(y,\eta) = \phi_{(z,\xi)}(-\eta,y).$$

■

Théorème 2.2.3 – Benedicks por la TFF Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$. Si $\mu_{2d}(Supp\mathscr{V}_g(f)) < +\infty$, alors $f = 0$.

Démonstration. Soit $(z,\xi) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$. On considère la fonction $\phi_{(z,\xi)}$ définie dans la Relation (2.5). Comme $\mathscr{V}_g(f)$ est à support de mesure finie, alors $\phi_{(z,\xi)}$ est également à support de mesure finie. Par ailleurs, d'après la Relation (2.6) on a

$$\forall (y,\eta) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d, \ \hat{\phi}_{(z,\xi)}(y,\eta) = \phi_{(z,\xi)}(-\eta,y),$$

et par suite $\hat{\phi}_{(z,\xi)}$ est aussi à support de mesure finie. Cela implique, d'après le théorème de Benedicks pour la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, que pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, $\phi_{(z,\xi)}(x,\omega) = 0$, en particulier, $\phi_{(z,\xi)}(0,0) = e^{i\langle \xi | z\rangle}\left(\mathscr{V}_g(f)(-z,-\xi)\right)^2 = 0$ et donc $\mathscr{V}_g(f) = 0$. La Relation (1.18) permet alors de conclure que $f = 0$. ■

Théorème 2.2.4 Soient $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$. Si $\mu_{2d}(Supp\mathscr{A}(f,g)) < +\infty$, alors $f = 0$.

Démonstration. On a d'après la Relation (1.22), $Supp(\mathscr{A}(f,g)) = Supp(\mathscr{V}_g(f))$ et donc d'après le Théorème 2.2.3, $f = 0$. ■

Théorème 2.2.5 Soient $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$. Si $\mu_{2d}(Supp\mathscr{W}(f,g)) < +\infty$, alors $f = 0$.

Démonstration. On a d'après la Relation (1.23), $Supp(\mathscr{W}(f,g)) = Supp(\mathscr{V}_g(f))$ et donc d'après le Théorème 2.2.3, $f = 0$. ■

Définition 2.2.1 – Noyau reproduisant Soit H un espace de Hilbert de fonctions définies sur un ensemble E non vide à valeurs dans $\mathbb{C}$ muni du produit scalaire $\langle \, | \, \rangle_H$. Soit $\mathscr{K}$ une fonction définie sur $E \times E$ à valeur dans $\mathbb{C}$. On dit que $\mathscr{K}$ est un noyau reproduisant pour H, si
i) Pour tout $y \in E$, la fonction $x \longmapsto \mathscr{K}(x,y) \in H$.
ii) Pour tout $f \in H$ et pour tout $y \in E$, $f(y) = \langle \mathscr{K}(.,y) | f \rangle_H$.

Lemme 2.2.6 Soit $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $g \neq 0$, alors $\mathscr{V}_g(L^2(\mathbb{R}^d))$ est un espace de Hilbert à noyau reproduisant $\mathscr{K}_g$ donné par pour tous $(y,\lambda),(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$

$$\mathscr{K}_g((y,\lambda),(x,\omega)) = \frac{1}{\|g\|_{2,d}^2} \mathscr{V}_g(M_\omega T_x g)(y,\lambda).$$

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que la suite $(\mathscr{V}_g(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. D'après la Relation (1.13) (Plancherel), on a pour tout $n,m\in\mathbb{N}$

$$\|\mathscr{V}_g(f_n)-\mathscr{V}_g(f_m)\|_{2,2d}=\|\mathscr{V}_g(f_n-f_m)\|_{2,2d}=\|g\|_{2,d}\|f_n-f_m\|_{2,d},$$

et par suite comme le suite $(\mathscr{V}_g(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il en est de même pour la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En particulier, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ vers une fonction f. Or, une fois de plus d'après la Relation (1.13), on a

$$\|\mathscr{V}_g(f_n)-\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}=\|g\|_{2,d}\|f_n-f\|_{2,d}.$$

Par conséquent, la suite $(\mathscr{V}_g(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d)$ vers $\mathscr{V}_g(f)\in\mathscr{V}_g(L^2(\mathbb{R}^d))$. Ainsi, $\mathscr{V}_g(L^2(\mathbb{R}^d))$ est un espace de Hilbert.

On a pour tous $(y,\lambda),(x,\omega)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d$,

$$\mathscr{K}_g((y,\lambda),(x,\omega))=\mathscr{V}_g\left(M_\omega T_x\frac{g}{\|g\|_{2,d}^2}\right)(y,\lambda),$$

donc, pour tout $(x,\omega)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d$, $(y,\lambda)\mapsto\mathscr{K}_g(f)((.,.),(y,\lambda))\in\mathscr{V}_g\left(L^2(\mathbb{R}^d)\right)$. De plus, d'après les Relations (1.11) et (1.6) on obtient pour tous $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $(x,\omega)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d$

$$\begin{aligned}\langle\mathscr{V}_g(f)|\mathscr{K}_g((.,.),(x,\omega))\rangle_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}&=\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}\mathscr{V}_g(f)(y,\lambda)\overline{\mathscr{K}_g((y,\lambda),(x,\omega))}d\mu_{2d}(y,\lambda)\\&=\frac{1}{\|g\|_{2,d}^2}\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}\mathscr{V}_g(f)(y,\lambda)\overline{\mathscr{V}_g\left(M_\omega T_x g\right)(y,\lambda)}d\mu_{2d}(y,\lambda)\\&=\int_{\mathbb{R}^d}f(t)\overline{g(t-x)e^{i\langle\omega|t\rangle}}d\mu_d(t)\\&=\mathscr{V}_g(f)(x,\omega).\end{aligned}$$

■

Remarque 2.2.7 Le fait que $\mathscr{V}_g(L^2(\mathbb{R}^d))$ soit un sous espace de Hilbert de $L^2(\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d)$ montre en particulier que

$$L^2(\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d)=\mathscr{V}_g(L^2(\mathbb{R}^d))\oplus^\perp\left(\mathscr{V}_g(L^2(\mathbb{R}^d))\right)^\perp,$$

et permet par conséquent de définir la projection orthogonale p_g de $L^2(\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d)$ sur $\mathscr{V}_g(L^2(\mathbb{R}^d))$.

Théorème 2.2.8 Soit H un espace de Hilbert de fonctions, définies sur un ensemble E non vide à valeurs dans $\mathbb{C}$ et soit F un sous espace de Hilbert de H à noyau reproduisant $\mathscr{K}$. Alors, pour toute $f \in H$ on a

$$\forall y \in E,\ \langle f | \mathscr{K}(.,y)\rangle_H = \mathscr{P}_F(f)(y),$$

où $\mathscr{P}_F$ est la projection orthogonale de H sur le sous espace de Hilbert F.

Démonstration. On a $\mathscr{H} = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$, alors pour tout $f \in \mathscr{H}$, on a

$$f = \mathscr{P}_F(f) + \mathscr{P}_{F^{\perp}}(f),$$

et par suite, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$

$$\langle f | \mathscr{K}(.,y)\rangle_{\mathscr{H}} = \langle \mathscr{P}_F(f) | \mathscr{K}(.,y)\rangle_{\mathscr{H}} + \langle \mathscr{P}_{F^{\perp}}(f) | \mathscr{K}(.,y)\rangle_{\mathscr{H}} = \mathscr{P}_F(f)(y).$$

■

Les opérateurs compacts ont été introduits par Hilbert sous le nom d'opérateurs complétement continus lors de l'étude des opérateurs intégraux. On rappelle qu'un endomorphisme A défini sur un espace de Hilbert H est dit compact si pour tout sous-ensemble $K \subset H$ borné, $A(K)$ est relativement compact c'est à dire $\overline{A(K)}$ est une partie compacte de H.

Par ailleurs, étant donné un espace de Hilbert séparable [1] H et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H, on sait alors que pour tout $A \in \mathscr{L}(H)$ le nombre (fini ou infini)

$$\|A\|_{HS}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \|Ae_n\|^2,$$

est indépendant du choix de la base. Dans le cas où $\|A\|_{HS} < +\infty$, on dit que A est un opérateur de Hilbert-Schmidt de H et $\|A\|_{HS}$ est sa norme de Hilbert-Schmidt. On sait par ailleurs que tout opérateur de Hilbert-Schmidt sur un espace de Hilbert séparable est un opérateur compact.

Soit (X,τ,ν) un espace mesuré et $k \in L^2(X^2,\tau^2,d\nu\otimes\nu)$ alors pour tout $f \in L^2(X)$ la fonction

$$K(f)(x) = \int_X f(y)k(x,y)d\nu(y),$$

est définie pour presque tout $x \in X$ et appartient à $L^2(X)$. De plus l'application K qui à f associe $K(f)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(X)$ vérifiant

$$\|K\|_{HS} = \iint_{X\times X} |k(x,y)|^2 \, d\nu\otimes\nu(x,y).$$

1. Un espace topologique est dit séparable s'il admet une partie dénombrable dense.

Proposition 2.2.9 Soit $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $g \neq 0$ et soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ une partie mesurable de mesure finie. Soit $\mathscr{P}_g$ la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$ sur l'espace de Hilbert $\mathscr{V}_g(L^2(\mathbb{R}^d))$ et $\mathscr{P}_\Sigma$ la projection orthogonale définie sur $L^2(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$ par $\mathscr{P}_\Sigma F = \chi_\Sigma F$. Alors $\mathscr{P}_\Sigma \mathscr{P}_g$ est un opérateur compact.

Démonstration. D'après le Lemme 2.2.6 on en déduit que pour toute $F \in L^2(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$ et pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, on a

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_\Sigma \mathscr{P}_g(F)(x,\omega) &= \chi_\Sigma(x,\omega)\mathscr{P}_g(F)(x,\omega)\\ &= \chi_\Sigma(x,\omega)\langle F|\mathscr{K}_g((.,.),(x,\omega))\rangle_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}\\ &= \iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} \chi_\Sigma(x,\omega)F(y,\lambda)\overline{\mathscr{K}_g((y,\lambda),(x,\omega))}d\mu_{2d}(y,\lambda).\end{aligned}$$

En particulier, $\mathscr{P}_\Sigma \mathscr{P}_g$ est un opérateur intégral à noyau $\mathscr{N}_{g,\Sigma}$ défini sur $\left(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d\right)^2$ par

$$\mathscr{N}_{g,\Sigma}((y,\lambda),(x,\omega)) = \chi_\Sigma(x,\omega)\overline{\mathscr{K}_g((y,\lambda),(x,\omega))}.$$

Par ailleurs, en utilisant la Relation (1.13) (Plancherel), on en déduit que pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ on a

$$\begin{aligned}\|\mathscr{K}_g((.,.),(x,\omega))\|_{2,2d}^2 &= \frac{1}{\|g\|_{2,d}^4}\|\mathscr{V}_g\left(g(.-x)e^{i\langle\omega|.\rangle}\right)\|_{2,2d}^2\\ &= \frac{1}{\|g\|_{2,d}^4}\|g\|_{2,d}^2\int_{\mathbb{R}^d}\left|g(t-x)e^{i\langle\omega|t\rangle}\right|^2 d\mu_d(t) = 1. \qquad (2.7)\end{aligned}$$

Maintenant en utilisant la Relation (2.7) ainsi que le théorème de Fubini, on en déduit que

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}\left|\mathscr{N}_{g,\Sigma}((y,\lambda),(x,\omega))\right|^2 d\mu_{2d}(x,\omega)d\mu_{2d}(y,\lambda)\\ &= \iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}\chi_\Sigma(x,\omega)d\mu_{2d}(x,\omega)\\ &= \mu_{2d}(\Sigma). \qquad (2.8)\end{aligned}$$

Par conséquent, l'opérateur $\mathscr{P}_\Sigma \mathscr{P}_g$ est de Hilbert-Schmidt en particulier il est compact. ■

Lemme 2.2.10 Soit H un espace de Hilbert et F et G deux sous espaces fermés de H. Soit P et Q respectivement les projections orthogonales sur F et G. On note respectivement $P^\perp = \mathrm{Id}_H - P$ et $Q^\perp = \mathrm{Id}_H - Q$. Alors $\|PQ\| < 1$ si et seulement si, il existe $C \geqslant 0$ telle que

$$\forall x \in H,\ \|x\| \leqslant C(\|P^\perp(x)\| + \|Q^\perp(x)\|). \qquad (2.9)$$

Démonstration. $\triangleright$ Supposons que $\|PQ\| < 1$, comme $\mathrm{Id}_H = P + P^\perp$, alors

$$\forall x \in H,\ \|Q(x)\|^2 = \|PQ(x)\|^2 + \|P^\perp Q(x)\|^2. \tag{2.10}$$

D'une autre part, on a

$$\forall x \in H,\ \|PQ(x)\|^2 = \|PQ^2(x)\|^2 \leqslant \|PQ\|^2 \|Q(x)\|^2. \tag{2.11}$$

Ainsi en combinant les Relations (2.10) et (2.11), on en déduit que pour tout $x \in H$

$$\|P^\perp Q(x)\|^2 = \|Q(x)\|^2 - \|PQ(x)\|^2 \geqslant \|Q(x)\|^2 - \|PQ\|^2\|Q(x)\|^2 = \left(1 - \|PQ\|^2\right)\|Q(x)\|^2,$$

et par suite

$$\forall x \in H,\ \|Q(x)\|^2 \leqslant \frac{\|P^\perp Q(x)\|^2}{1 - \|PQ\|^2}. \tag{2.12}$$

La Relation (2.12) implique en particulier que pour tout $x \in H$, on a

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \|Q(x) + Q^\perp(x)\| \\
&\leqslant \|Q(x)\| + \|Q^\perp(x)\| \\
&\leqslant \frac{\|P^\perp Q(x)\|}{\sqrt{1 - \|PQ\|^2}} + \|Q^\perp(x)\| \\
&= \frac{\|P^\perp(\mathrm{Id}_H - Q^\perp)(x)\|}{\sqrt{1 - \|PQ\|^2}} + \|Q^\perp(x)\| \\
&\leqslant \frac{\|P^\perp(x)\| + \|P^\perp Q^\perp(x)\|}{\sqrt{1 - \|PQ\|^2}} + \|Q^\perp(x)\| \\
&\leqslant \frac{\|P^\perp(x)\|}{\sqrt{1 - \|PQ\|^2}} + \frac{\|Q^\perp(x)\|}{\sqrt{1 - \|PQ\|^2}} + \|Q^\perp(x)\| \\
&\leqslant \frac{1 + \sqrt{1 - \|PQ\|^2}}{\sqrt{1 - \|PQ\|^2}} \left(\|P^\perp(x)\| + \|Q^\perp(x)\|\right).
\end{aligned}$$

$\triangleright$ Réciproquement, supposons qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout $x \in H$, on a

$$\|x\| \leqslant C(\|P^\perp(x)\| + \|Q^\perp(x)\|).$$

Alors pour tout $x \in H$, on a

$$\|P^\perp Q(x)\| \geqslant \frac{\|Q(x)\|}{C}. \tag{2.13}$$

Remarquons que dans la Relation (2.13) on a nécessairement $C > 1$, par ailleurs d'après les Relations (2.9), (2.10) et (2.13), on en déduit que pour tout $x \in H$

$$\begin{aligned}
\|Q(x)\|^2 &= \|P^\perp Q(x)\|^2 + \|PQ(x)\|^2 \\
&\geqslant \frac{\|Q(x)\|^2}{C^2} + \|PQ(x)\|^2 \\
&\geqslant \frac{\|Q(x)\|^2}{C^2} + \|PQ^2(x)\|^2
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in H,\ \|PQ^2(x)\| \leqslant \left(1 - \frac{1}{C^2}\right)\|Q(x)\|,$$

et par suite

$$\|PQ\| \leqslant \sqrt{1 - \frac{1}{C^2}} < 1.$$

■

Théorème 2.2.11 – Amrein-Berthier Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ une partie mesurable de mesure finie, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction fenêtre g et pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d} \leqslant C\|\chi_{\Sigma^c}\mathcal{V}_g(f)\|_{2,2d}. \tag{2.14}$$

Démonstration. Soit $\mathscr{P}_g$ la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$ sur l'espace de Hilbert $\mathcal{V}_g(L^2(\mathbb{R}^d))$ et $\mathscr{P}_\Sigma$ la projection orthogonale définie sur $L^2(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$ par $\mathscr{P}_\Sigma F = \chi_\Sigma F$, alors pour toute $F \in L^2(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$, on a

$$\|\mathscr{P}_\Sigma\mathscr{P}_g(F)\|_{2,2d} \leqslant \|\mathscr{P}_g(F)\|_{2,2d} \leqslant \|F\|_{2,2d},$$

et donc $\|\mathscr{P}_\Sigma\mathscr{P}_g\| \leqslant 1$. Par ailleurs, on sait d'après la Proposition 2.2.9 que l'opérateur $\mathscr{P}_\Sigma\mathscr{P}_g$ est compact, et par suite il existe $F \in L^2(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$ telle que $\|F\|_{2,2d} = 1$ et $\|\mathscr{P}_\Sigma\mathscr{P}_g\| = \|\mathscr{P}_\Sigma\mathscr{P}_g(F)\|_{2,2d}$. Supposons que $\|\mathscr{P}_\Sigma\mathscr{P}_g\| = 1$, alors

$$1 = \|\mathscr{P}_\Sigma\mathscr{P}_g\| = \|\mathscr{P}_\Sigma\mathscr{P}_g(F)\|_{2,2d} \leqslant \|\mathscr{P}_g(F)\|_{2,2d} \leqslant \|F\|_{2,2d} = 1. \tag{2.15}$$

La Relation (2.15) implique en particulier que $\mathscr{P}_g(F) = \mathscr{P}_\Sigma(F) = F$, or $\mathscr{P}_g(F) = F$ signifie qu'il existe $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $f \neq 0$ telle que $F = \mathcal{V}_g(f)$. D'une autre part, $\mathscr{P}_\Sigma(F) = F$ signifie que $Supp(F) \subset \Sigma$. Ainsi, il existe $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $f \neq 0$ telle que $Supp(\mathcal{V}_g(f)) \subset \Sigma$. Comme $\mu_{2d}(\Sigma) < +\infty$, cela contredit le Théorème 2.2.3 et montre que $\|\mathscr{P}_\Sigma\mathscr{P}_g\| < 1$. Par suite, d'après le Lemme 2.2.10, on en déduit qu'il existe $C > 0$ telle que pour toute $F \in L^2(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$, on a

$$\|F\|_{2,2d} \leqslant C\left(\|\mathscr{P}_g^\perp(F)\|_{2,2d} + \|\mathscr{P}_\Sigma^\perp(F)\|_{2,2d}\right),$$

où $\mathscr{P}_g^\perp = \mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)} - \mathscr{P}_g$ et $\mathscr{P}_\Sigma^\perp = \mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)} - \mathscr{P}_\Sigma = \mathscr{P}_{\Sigma^c}$. En particulier en utilisant la Relation (1.13) (Plancherel), on en déduit que pour toutes $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$ on a

$$\|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d} = \|\mathcal{V}_g(f)\|_{2,2d} \leqslant C\left(\|\mathscr{P}_g^\perp(\mathcal{V}_g(f))\|_{2,2d} + \|\mathscr{P}_\Sigma^\perp(\mathcal{V}_g(f))\|_{2,2d}\right).$$

Comme $\mathcal{V}_g(f) \in \mathcal{V}_g(L^2(\mathbb{R}^d))$, alors $\mathscr{P}_g^\perp(\mathcal{V}_g(f)) = 0$, et donc

$$\|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d} \leqslant C\|\chi_{\Sigma^c}\mathcal{V}_g(f)\|_{2,2d}.$$

■

Théorème 2.2.12 Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ une partie mesurable de mesure finie, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ avec $g \neq 0$ on a

$$\|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d} \leqslant C\|\chi_{\Sigma^c}\mathscr{A}(f,g)\|_{2,2d}.$$

Démonstration. D'après la Relation (1.22), on a $\|\chi_{\Sigma^c}\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d} = \|\chi_{\Sigma^c}\mathscr{A}(f,g)\|_{2,2d}$ et donc d'après la Relation (2.14) on obtient

$$\|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d} \leqslant C\|\chi_{\Sigma^c}\mathscr{A}(f,g)\|_{2,2d}.$$

■

Théorème 2.2.13 Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ une partie mesurable de mesure finie, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ avec $g \neq 0$ on a

$$\|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d} \leqslant C\|\chi_{\Sigma^c}\mathscr{W}(f,g)\|_{2,2d}.$$

Démonstration. D'après la Relation (1.23), on a

$$\begin{aligned}
\|\chi_{\Sigma^c}\mathscr{W}(f,g)\|_{2,2d}^2 &= \iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} |\chi_{\Sigma^c}(x,\omega)2^d\mathscr{V}_{\breve{g}}(f)(2x,2\omega)|^2 d\mu_{2d}(x,\omega) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} |\chi_{\Sigma^c}(\frac{y}{2},\frac{\lambda}{2})\mathscr{V}_{\breve{g}}(f)(y,\lambda)|^2 d\mu_{2d}(y,\lambda) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} |\chi_{\mathscr{T}^c}(y,\lambda)\mathscr{V}_{\breve{g}}(f)(y,\lambda)|^2 d\mu_{2d}(y,\lambda) \\
&= \|\chi_{\mathscr{T}^c}\mathscr{V}_{\breve{g}}(f)\|_{2,2d},
\end{aligned}$$

où

$$\mathscr{T} = \left\{(y,\lambda) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d \mid (\frac{y}{2},\frac{\lambda}{2}) \in \Sigma\right\} = \left\{(2x,2\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d \mid (x,\omega) \in \Sigma\right\}.$$

Or donc d'après la Relation (2.14), il existe $C > 0$ telle que

$$\|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d} \leqslant C\|\chi_{\mathscr{T}^c}\mathscr{V}_{\breve{g}}(f)\|_{2,2d}.$$

Par suite

$$\|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d} \leqslant C\|\chi_{\Sigma^c}\mathscr{W}(f,g)\|_{2,2d}.$$

■

2.3 Principe d'incertitude de Beckner en terme d'entropie

En théorie de signal, la notion d'entropie a été introduite pour la première fois en 1948 par Claude Shannon [29] dans le but de quantifier les données délivrées par une source d'informations. Un signal X à n symboles étant considéré comme une variable aléatoire discrète, Shanon a définie son entropie par

$$\mathscr{E}(X) = -\sum_{i=1}^{n} P(X=i)\ln(P(X=i)).$$

Cette définition de l'entropie montre que plus les symboles sont équiprobables et plus l'entropie est algébriquement grande et inversement plus le signal est redondant (c'est à dire livrant par exemple un seul et même symbole au détriment des autres) et plus l'entropie est algébriquement petite. Dans le cas où on cherche à transmettre une quantité continue suivant des lois de probabilité sur $\mathbb{R}$ et par analogie avec le cas discret, l'entropie d'une distribution de probabilité ρ est donnée par

$$\mathscr{E}(\rho) = -\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\ln(\rho(x))d\mu_1(x).$$

Par analogie au cas discret, la définition précédente montre que plus f décroit lentement et d'une façon régulière à l'infinie et plus son entropie est algébriquement grande. D'une autre part, si f est une densité de probabilité sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et comme la transformée de Fourier Plancherel est un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R}^d)$ sur lui même, on en déduit que $\widehat{f}$ est également une densité de probabilité sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Par suite, $|f|^2$ et $|\widehat{f}|^2$ sont des densités de probabilité sur $L^1(\mathbb{R}^d)$. Il était donc naturel, dans un but de localiser l'incertitude de f et de sa transformée de Fourier, de montrer que leur entropies ne sont pas aléatoirement indépendantes. En 1960 Hirshmann [17] a montré que pour une densité de probabilité f sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\mathscr{E}(|f|^2) + \mathscr{E}(|\widehat{f}|^2) \geqslant 0.$$

En 1975 après avoir démontrer le théorème de Hausdorff-Young, Beckner [2] a utilisé ce théorème pour montrer que pour une densité de probabilité f sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\mathscr{E}(|f|^2) + \mathscr{E}(|\widehat{f}|^2) \geqslant d(1-\ln 2).$$

Le but de ce paragraphe est de généraliser ce résultat à la TFF.

Définition 2.3.1 – Entropie Soit ρ une densité de probabilité définie sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$. On définit l'entropie de ρ par

$$\mathscr{E}(\rho) = -\iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} \ln(\rho(x,\omega))\rho(x,\omega)d\mu_{2d}(x,\omega),$$

à condition que l'intégrale soit bien définie.

Théorème 2.3.1 – Principe d'incertitude de Beckner en terme d'entropie Soient $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$. Alors,

$$\mathscr{E}\left(\left|\mathscr{V}_g(f)\right|^2\right) \geqslant \|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2(d - \ln(\|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2)), \tag{2.16}$$

avec égalité lorsque $f(x) = (4a)^{\frac{d}{4}}e^{-a|x|^2}$ et $g(x) = (4b)^{\frac{d}{4}}e^{-b|x|^2}$ où $a,b > 0$.

Démonstration. Supposons que $\|f\|_{2,d} = \|g\|_{2,d} = 1$, alors d'après la Relation (1.2), on a

$$\|\mathscr{V}_g(f)\|_{\infty,2d} \leqslant \|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d} = 1,$$

ce qui donne que $\ln(|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2) \leqslant 0$ et donc $\mathscr{E}(|\mathscr{V}_g(f)|^2) \geqslant 0$. Remarquons que si $\mathscr{E}(|\mathscr{V}_g(f)|^2) = +\infty$, alors la Relation (2.16) est triviale. Supposons dans la suite que $\mathscr{E}(|\mathscr{V}_g(f)|^2) < +\infty$. Soit $0 < x < 1$ et h_x la fonction définie sur $]2,3]$ par

$$h_x(p) = \frac{x^p - x^2}{p-2}.$$

Pour tout $0 < x < 1$, la fonction $p \mapsto h_x(p)$ est dérivable sur $]2,3]$ dont la dérivée est donnée par

$$\frac{dh_x}{dp}(p) = \frac{(p-2)x^p\ln(x) - x^p + x^2}{(p-2)^2}.$$

Le signe de $\dfrac{dh_x}{dp}$ est le même que celui de la fonction $k_x(p) = (p-2)x^p\ln(x) - x^p + x^2$. Pour tout $0 < x < 1$, la fonction k_x est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]2,3]$, dont la dérivée est

$$\frac{dk_x}{dp}(p) = (p-2)(\ln x)^2 x^p.$$

On a pour tout $0 < x < 1$, $\frac{dk_x}{dp}(p)$ est positive sur $]2,3]$, alors k_x est croissante sur $]2,3]$. Comme, pour tout $0 < x < 1$, $\lim\limits_{p\to 2^+} k_x(p) = k_x(2) = 0$ donc k_x est positive ce qui implique que $\frac{dh_x}{dp}$ est positive aussi sur $]2,3]$ et par suite $p \mapsto h_x(p)$ est croissante sur $]2,3]$.
En particulier,

$$\forall p \in]2,3],\ x^2\ln x = \lim_{p\to 2^+} h_x(p) \leqslant \frac{x^p - x^2}{p-2},$$

et donc

$$\forall p \in]2,3],\ 0 \leqslant \frac{x^2 - x^p}{p-2} \leqslant -x^2\ln x. \tag{2.17}$$

En fait, l'Inégalité (2.17) reste vraie pour $x=0$ et pour $x=1$. Ainsi, pour tout $0 \leqslant x \leqslant 1$ on a

$$\forall p \in]2,3],\ 0 \leqslant \frac{x^2 - x^p}{p-2} \leqslant -x^2 \ln x.$$

Comme pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, on a $0 \leqslant |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2 \leqslant 1$, on obtient alors pour tout $p \in]2,3]$

$$0 \leqslant \frac{|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2 - |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^p}{p-2} \leqslant -|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2 \ln(|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|). \tag{2.18}$$

Soit maintenant la fonction φ définie sur $[2,+\infty[$ par

$$\varphi(p) = \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^p d\mu_{2d}(x,\omega) - \left(\frac{2}{p}\right)^d.$$

D'après la Relation (1.16) (Lieb), on sait que pour tout $2 \leqslant p < +\infty$, $\mathscr{V}_g(f) \in L^p(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$ et on a

$$\iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^p d\mu_{2d}(x,\omega) \leqslant \left(\frac{2}{p}\right)^d \|f\|_{2,d}^p \|g\|_{2,d}^p = \left(\frac{2}{p}\right)^d,$$

ce qui implique que $\varphi(p) \leqslant 0$ pour tout $p \in [2,+\infty[$. Par ailleurs, d'après la Relation (1.13) (Plancherel), on a

$$\begin{aligned}
\varphi(2) &= \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2 d\mu_{2d}(x,\omega) - 1 \\
&= \|\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}^2 - 1 \\
&= \|f\|_{2,d}^2 \|g\|_{2,d}^2 - 1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\left(\dfrac{d\varphi}{dp}\right)_{p=2^+} \leqslant 0$ pourvu que cette dérivée soit bien définie. D'un autre côté, on a pour tout $p \in]2,3]$ et pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$

$$\left| \frac{|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^p - |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2}{p-2} \right| \leqslant |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2 \ln(|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|),$$

ce qui donne que

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} \left| \frac{|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^p - |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2}{p-2} \right| d\mu_{2d}(x,\omega) \\
&\leqslant \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2 \ln(|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|) d\mu_{2d}(x,\omega) \\
&= -\frac{1}{2}\mathscr{E}(|\mathscr{V}_g(f)|^2) \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

De plus, pour tout $p \in]3,+\infty[$ et pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, on a

$$\left| \frac{|\mathcal{V}_g(f)(x,\omega)|^p - |\mathcal{V}_g(f)(x,\omega)|^2}{p-2} \right| \leqslant 2|\mathcal{V}_g(f)(x,\omega)|^2,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} \left| \frac{|\mathcal{V}_g(f)(x,\omega)|^p - |\mathcal{V}_g(f)(x,\omega)|^2}{p-2} \right| d\mu_{2d}(x,\omega) &\leqslant 2\|\mathcal{V}_g(f)\|_{2,2d}^2 \\ &= 2 < +\infty.\end{aligned}$$

Donc d'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d}{dp} \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} |\mathcal{V}_g(f)(x,\omega)|^p d\mu_{2d}(x,\omega) \right)_{p=2^+} \\ &= \lim_{p\to 2^+} \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} \frac{|\mathcal{V}_g(f)(x,\omega)|^p - |\mathcal{V}_g(f)(x,\omega)|^2}{p-2} d\mu_{2d}(x,\omega) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} \lim_{p\to 2^+} \frac{|\mathcal{V}_g(f)(x,\omega)|^p - |\mathcal{V}_g(f)(x,\omega)|^2}{p-2} d\mu_{2d}(x,\omega) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} \ln(|\mathcal{V}_g(f)(x,\omega)|)|\mathcal{V}_g(f)(x,\omega)|^2 d\mu_{2d}(x,\omega) \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} \ln(|\mathcal{V}_g(f)(x,\omega)|^2)|\mathcal{V}_g(f)(x,\omega)|^2 d\mu_{2d}(x,\omega) \\ &= -\frac{1}{2}\mathscr{E}(|\mathcal{V}_g(f)|^2),\end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)_{p=2^+} &= \left(\frac{d}{dp} \left(\iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} |\mathcal{V}_g(f)(x,\omega)|^p d\mu_{2d}(x,\omega) - (\frac{2}{p})^d \right) \right)_{p=2^+} \\ &= -\frac{1}{2}\mathscr{E}(|\mathcal{V}_g(f)|^2) + \frac{d}{2},\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\mathscr{E}(|\mathcal{V}_g(f)|^2) \geqslant d.$$

Si $f = 0$, alors la Relation (2.16) est vraie. Supposons que $f \neq 0$ et posons $\phi = \frac{f}{\|f\|_{2,d}}$ et $\psi = \frac{g}{\|g\|_{2,d}}$ alors on a $\|\phi\|_{2,d} = \|\psi\|_{2,d} = 1$ et $\mathscr{E}(|\mathcal{V}_\psi \phi|^2) \geqslant d$. Or,

$$\mathcal{V}_\psi(\phi) = \frac{\mathcal{V}_g(f)}{\|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d}},$$

et donc en utilisant la Relation (1.13) (Plancherel) ainsi que le théorème de Fubini on obtient

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(|\mathscr{V}_\psi(\phi)|^2) &= -\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}\left(\ln(|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2) - \ln(\|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2)\right)\frac{|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2}{\|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2}d\mu_{2d}(x,\omega)\\
&= \frac{\mathscr{E}(|\mathscr{V}_g(f)|^2) + \ln(\|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2)\|\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}^2}{\|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2}\\
&= \frac{\mathscr{E}(|\mathscr{V}_g(f)|^2)}{\|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2} + \ln(\|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2)\\
&\geqslant d,
\end{aligned}$$

et par suite

$$\mathscr{E}\left(\left|\mathscr{V}_g(f)\right|^2\right) \geqslant \|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2\left(d - \ln(\|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2)\right),$$

d'où le résultat.

Soit maintenant $f(x) = (4a)^{\frac{d}{4}}e^{-a|x|^2}$ et $g(x) = (4b)^{\frac{d}{4}}e^{-b|x|^2}$ avec $a, b > 0$. Alors, $\|f\|_{2,d} = \|g\|_{2,d} = 1$ et on a, d'après la Relation (1.1),

$$\forall (x,\omega) \in \mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d,\ |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2 = \frac{(4ab)^{\frac{d}{2}}}{(a+b)^d}e^{\frac{-2ab}{a+b}|x|^2}e^{-\frac{|\omega|^2}{2(a+b)}}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(|\mathscr{V}_g(f)|^2) &= -\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}\ln(|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2)|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2 d\mu_{2d}(x,\omega)\\
&= -\frac{(4ab)^{\frac{d}{2}}}{(a+b)^d}\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}\ln\Big(\frac{(4ab)^{\frac{d}{2}}}{(a+b)^d}e^{\frac{-2ab}{a+b}|x|^2}e^{-\frac{|\omega|^2}{2(a+b)}}\Big)e^{\frac{-2ab}{a+b}|x|^2}e^{-\frac{|\omega|^2}{2(a+b)}}d\mu_{2d}(x,\omega)\\
&= -\frac{(4ab)^{\frac{d}{2}}}{(a+b)^d}\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}\left(\ln\Big(\frac{(4ab)^{\frac{d}{2}}}{(a+b)^d}\Big) - \frac{2ab}{a+b}|x|^2 - \frac{|\omega|^2}{2(a+b)}\right)e^{\frac{-2ab}{a+b}|x|^2}e^{-\frac{|\omega|^2}{2(a+b)}}d\mu_{2d}(x,\omega).
\end{aligned}$$

En utilisant la mesure superficielle sur la sphère, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} e^{-\frac{2ab}{a+b}|x|^2}e^{-\frac{|\omega|^2}{2(a+b)}}d\mu_{2d}(x,\omega)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{2ab}{a+b}|x|^2}d\mu_d(x)\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|\omega|^2}{2(a+b)}}d\mu_d(\omega)\\
&= \frac{\sigma_d^2}{(2\pi)^d}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{2ab}{a+b}r^2}r^{d-1}dr\int_0^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2(a+b)}}s^{d-1}ds\\
&= \frac{2^{2-d}}{\Gamma(\frac{d}{2})^2}\int_0^{+\infty} e^{-u}\Big(\frac{a+b}{2ab}\Big)^{\frac{d}{2}}\frac{du}{2\sqrt{u}}\int_0^{+\infty} e^{-v}(2(a+b)v)^{\frac{d-1}{2}}\sqrt{\frac{a+b}{2v}}dv\\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})^2}\left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right)^d\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{\frac{d}{2}-1}du\int_0^{+\infty} e^{-v}v^{\frac{d}{2}-1}dv\\
&= \left(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right)^d, \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

où σ_d désigne la mesure superficielle de la sphère S^{d-1}. De plus,

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} |x|^2 e^{\frac{-2ab}{a+b}|x|^2} e^{-\frac{|\omega|^2}{2(a+b)}} d\mu_{2d}(x,\omega)\\
&= \frac{2^{2-d}}{\Gamma(\frac{d}{2})^2}\int_0^{+\infty} r^{d+1} e^{-\frac{2ab}{a+b}r^2} dr \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2(a+b)}} s^{d-1} ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2})^2}\frac{(a+b)^{d+1}}{2^{d+1}(ab)^{\frac{d}{2}+1}}\int_0^{+\infty} u^{\frac{d}{2}} e^{-u} du \int_0^{+\infty} e^{-v} v^{\frac{d}{2}-1} dv\\
&= \frac{(a+b)^{d+1}}{2^{d+1}(ab)^{\frac{d}{2}+1}}\frac{\Gamma(1+\frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})^2}\\
&= \frac{d}{2^{d+2}}\frac{(a+b)^{d+1}}{(ab)^{\frac{d}{2}+1}},
\end{aligned}\tag{2.20}$$

et

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} |\omega|^2 e^{\frac{-2ab}{a+b}|x|^2} e^{-\frac{|\omega|^2}{2(a+b)}} d\mu_{2d}(x,\omega)\\
&= \frac{2^{2-d}}{\Gamma(\frac{d}{2})^2}\int_0^{+\infty} s^{d+1} e^{-\frac{s^2}{2(a+b)}} ds \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2abr^2}{a+b}} r^{d-1} dr\\
&= 2^{1-d}\frac{(a+b)^{d+1}}{(ab)^{\frac{d}{2}}\Gamma(\frac{d}{2})^2}\int_0^{+\infty} u^{\frac{d}{2}} e^{-u} du \int_0^{+\infty} v^{\frac{d}{2}-1} e^{-v} dv\\
&= 2^{1-d}\frac{(a+b)^{d+1}}{(ab)^{\frac{d}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})^2}\\
&= \frac{d}{2^d}\frac{(a+b)^{d+1}}{(ab)^{\frac{d}{2}}}.
\end{aligned}\tag{2.21}$$

Par suite, d'après les Relations (2.19), (2.20) et (2.21) on obtient

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(|\mathscr{V}_g(f)|^2) &= -\frac{(4ab)^{\frac{d}{2}}}{(a+b)^d}\left(\ln\left(\frac{(4ab)^{\frac{d}{2}}}{(a+b)^d}\right)\frac{(a+b)^d}{(4ab)^{\frac{d}{2}}} - \frac{d(a+b)^d}{2^d(ab)^{\frac{d}{2}}}\right)\\
&= d - \ln\left(\frac{(2\sqrt{ab})^d}{(a+b)^d}\right)\\
&= d\left(1 - \ln(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b})\right).
\end{aligned}$$

En particulier, $\mathscr{E}(|\mathscr{V}_g(f)|^2) = d$ si et seulement si $a = b$. ■

Théorème 2.3.2 Soient $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$. Alors,

$$\mathscr{E}\left(|\mathscr{A}(f,g)|^2\right) \geqslant \|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2(d-\ln(\|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2)).$$

Démonstration. D'après la Relation (1.22) on a

$$\mathscr{E}\left(|\mathscr{A}(f,g)|^2\right) = \mathscr{E}\left(|\mathscr{V}_g(f)|^2\right),$$

et par suite d'après la Relation (2.16), on obtient

$$\mathscr{E}\left(|\mathscr{A}(f,g)|^2\right) \geqslant \|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2(d-\ln(\|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2)).$$

■

Théorème 2.3.3 Soient $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$. Alors,

$$\mathscr{E}\left(|\mathscr{W}(f,g)|^2\right) \geqslant \|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2\left(d-\ln(2^{2d}\|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2)\right).$$

Démonstration. En se servant du théorème de Fubini et de la Relation (1.13) (Plancherel) ainsi que la Relation (1.23), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}\left(|\mathscr{W}(f,g)|^2\right) &= -2^{2d}\iint_{\mathbb{R}^{2d}} \ln\left(2^{2d}|\mathscr{V}_{\check{g}}(f)(2x,2\omega)|^2\right)|\mathscr{V}_{\check{g}}(f)(2x,2\omega)|^2 d\mu_{2d}(x,\omega)\\
&= -\iint_{\mathbb{R}^{2d}} \ln\left(2^{2d}|\mathscr{V}_{\check{g}}(f)(y,\lambda)|^2\right)|\mathscr{V}_{\check{g}}(f)(y,\lambda)|^2 d\mu_{2d}(y,\lambda)\\
&= -\ln(2^{2d})\|\mathscr{V}_{\check{g}}(f)\|_{2,2d}^2 + \mathscr{E}\left(|\mathscr{V}_{\check{g}}(f)|^2\right)\\
&\geqslant -\ln(2^{2d})\|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2 + \|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2(d-\ln(\|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2))\\
&\geqslant \|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2\left(d-\ln(\|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2)-\ln(2^{2d})\right)\\
&\geqslant \|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2\left(d-\ln(2^{2d}\|f\|_{2,d}^2\|g\|_{2,d}^2)\right).
\end{aligned}$$

■

2.4 Principe d'incertitude de Heisenberg

Le principe d'incertitude de Heisenberg a été formulé pour la première fois en 1927 en mécanique quantique par Werner Heisenberg [16]. Il stipulait qu'on ne peut pas localiser avec autant de précision que l'on souhaite simultanément la position et la quantité de mouvement d'une particule. Ainsi, plus on est précis sur la position d'une particule moins on l'est sur sa quantité de mouvement et vice versa. Ce principe est formulé par l'inégalité suivante dite inégalité de Heisenberg, reliant l'écart type de position σ_x et celui de la quantité de mouvemant σ_p, on a alors

$$\sigma_x \sigma_p \geqslant \frac{h}{4\pi},$$

où h désigne la constante de Plank. En 1928 Pauli et Weyl ont établi la formulation mathématique du principe de Heisenberg. En effet, pour une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\|f\|_{2,1} = 1$, on appelle moyenne de f

$$\mu(f) = \int_{\mathbb{R}} x|f(x)| d\mu_1(x).$$

La dispersion de f est alors donnée par

$$\Delta(f) = \left(\int_{\mathbb{R}} (t - \mu(f))^2 |f(t)|^2 d\mu_1(t) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pauli et Weyl ont alors montré que pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\|f\|_{2,1} = 1$, on a

$$\Delta(f)\Delta(\widehat{f}) \geqslant \frac{1}{4}.$$

Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $f \in L^2(\mathbb{R})$ et que $\mu(f) = 0$, ainsi le principe de Heisenberg s'exprime par le théorème suivant

Théorème 2.4.1 – Inégalité de Heisenberg Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|xf\|_{2,d} \|y\hat{f}\|_{2,d} \geqslant \frac{1}{2} \|f\|_{2,d}^2. \tag{2.22}$$

Le but de ce paragraphe est de généraliser l'inégalité de Heisenberg à la transformée de Fourier à fenêtre.

Théorème 2.4.2 – Principe d'incertitude de Heisenberg en ω pour la TFF Soit g une fonction fenêtre. Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|\omega \mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}\|xf\|_{2,d} \geqslant \frac{1}{2}\|g\|_{2,d}\|f\|_{2,d}^2. \tag{2.23}$$

Démonstration. L'inégalité étant évidente si $\|\omega \mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d} = +\infty$ ou $\|xf\|_{2,d} = +\infty$. On suppose dans la suite que $\|\omega \mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d} < +\infty$ et $\|xf\|_{2,d} < +\infty$. D'après le Théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
\|g\|_{2,d}^2\|xf\|_{2,d}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^2 d\mu_d(x) \int_{\mathbb{R}^d} |t|^2|f(t)|^2 d\mu_d(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |g(t-x)|^2 d\mu_d(x) \int_{\mathbb{R}^d} |t|^2|f(t)|^2 d\mu_d(t) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} |t|^2|g(t-x)|^2|f(t)|^2 d\mu_{2d}(x,t) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} |t|^2|(f\overline{T_x g})(t)|^2 d\mu_{2d}(x,t).
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $f\overline{T_x g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs, d'après la Relation (1.13) (Plancherel), $\mathscr{V}_g(f) \in L^2(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$, en particulier pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathscr{V}_g(f)(x,.) = \widehat{f\overline{T_x g}} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et par suite d'après le Lemme 1.2.9, on en déduit que $f\overline{T_x g} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, ainsi pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$(f\overline{T_x g})(t) = \mathscr{F}_\omega^{-1}\left(\mathscr{V}_g(f)(x,.)\right)(t),$$

d'où

$$\|g\|_{2,d}^2\|xf\|_{2,d}^2 = \iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} |t|^2|\mathscr{F}_\omega^{-1}(\mathscr{V}_g(f)(x,.))(t)|^2 d\mu_{2d}(t,x).$$

Or, d'après la Relation (2.22) (Inégalité de Heisenberg), on a pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^d} |t|^2|\mathscr{F}_\omega^{-1}(\mathscr{V}_g(f)(x,.))(t)|^2 d\mu_d(t)\right)^{1/2} &\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\omega|^2|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2 d\mu_d(\omega)\right)^{1/2} \\
&\geqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2 d\mu_d(\omega).
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après la Relation (1.13) (Plancherel), on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |t|^2|\mathscr{F}_\omega^{-1}(\mathscr{V}_g(f)(x,.))(t)|^2 d\mu_d(t)\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\omega|^2|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2 d\mu_d(\omega)\right)^{1/2} \geqslant \frac{1}{2}\|g\|_{2,d}^2\|f\|_{2,d}^2 \tag{2.24}$$

En intégrant maintenant par rapport à x et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
&\|\omega \mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}\|g\|_{2,d}\|xf\|_{2,d}\\
&= \left(\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} |\omega|^2|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2 d\mu_{2d}(x,\omega)\right)^{1/2}\left(\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} |t|^2|\mathscr{F}_\omega^{-1}(\mathscr{V}_g(f)(x,.))(t)|^2 d\mu_{2d}(x,t)\right)^{1/2}\\
&\geqslant \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\omega|^2|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2 d\mu_d(\omega)\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |t|^2|\mathscr{F}_\omega^{-1}(\mathscr{V}_g(f)(x,.))(t)|^2 d\mu_d(t)\right)^{1/2} d\mu_d(x)\\
&\geqslant \frac{1}{2}\|g\|_{2,d}^2\|f\|_{2,d}^2.
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\|\omega \mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}\|xf\|_{2,d} \geqslant \frac{1}{2}\|g\|_{2,d}\|f\|_{2,d}^2.$$

■

Théorème 2.4.3 Soient $f,g\in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g\neq 0$, alors

$$\|\omega \mathscr{A}(f,g)\|_{2,2d}\|xf\|_{2,d} \geqslant \frac{1}{2}\|g\|_{2,d}\|f\|_{2,d}^2. \tag{2.25}$$

Démonstration. On a d'après la Relation (1.22), $\|\omega \mathscr{A}(f,g)\|_{2,2d} = \|\omega \mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}$, et donc d'après la Relation (2.23), on obtient

$$\|\omega \mathscr{A}(f,g)\|_{2,2d}\|xf\|_{2,d} \geqslant \frac{1}{2}\|g\|_{2,d}\|f\|_{2,d}^2.$$

■

Théorème 2.4.4 Soient $f,g\in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g\neq 0$, alors

$$\|\omega \mathscr{W}(f,g)\|_{2,2d}\|xf\|_{2,d} \geqslant \frac{1}{4}\|g\|_{2,d}\|f\|_{2,d}^2. \tag{2.26}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\|\omega \mathscr{W}(f,g)\|_{2,2d}^2 &= 2^{2d}\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} |\omega|^2|\mathscr{V}_{\breve{g}}(f)(2x,2\omega)|^2 d\mu_{2d}(x,\omega)\\
&= \frac{1}{4}\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} |\lambda|^2|\mathscr{V}_{\breve{g}}(f)(y,\lambda)|^2 d\mu_{2d}(y,\lambda)\\
&= \frac{1}{4}\|\lambda \mathscr{V}_{\breve{g}}(f)\|_{2,2d}^2,
\end{aligned}$$

par suite d'après la Relation (2.23), on obtient

$$\begin{aligned}
\|\omega \mathscr{W}(f,g)\|_{2,2d}\|xf\|_{2,d} &= \frac{1}{2}\|\omega \mathscr{V}_{\breve{g}}(f)\|_{2,2d}\|xf\|_{2,d}\\
&\geqslant \frac{1}{4}\|g\|_{2,d}\|f\|_{2,d}^2.
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.4.5 – Principe d'incertitude de Heisenberg en x Soit g une fonction fenêtre. Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|x\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}\|y\hat{f}\|_{2,d} \geqslant \frac{1}{2}\|g\|_{2,d}\|f\|_{2,d}^2. \tag{2.27}$$

Démonstration. Si $\|x\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d} = +\infty$ ou $\|y\hat{f}\|_{2,d} = +\infty$, alors l'inégalité est triviale. On suppose donc qu'elles sont finies. On a d'après la formule de Plancherel et le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
&\|g\|_{2,d}^2\|y\hat{f}\|_{2,d}^2 = \|\hat{g}\|_{2,d}^2\|y\hat{f}\|_{2,d}^2\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{g}(\omega)|^2 d\mu_d(\omega) \int_{\mathbb{R}^d} |y|^2|\hat{f}(y)|^2 d\mu_d(y)\\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{g}(y-\omega)|^2 d\mu_d(\omega) \int_{\mathbb{R}^d} |y|^2|\hat{f}(y)|^2 d\mu_d(y)\\
&= \iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} |y|^2|\hat{g}(y-\omega)|^2|\hat{f}(y)|^2 d\mu_{2d}(y,\omega)\\
&= \iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} |y|^2|(\hat{f}\overline{T_\omega\hat{g}})(y)|^2 d\mu_{2d}(y,\omega),
\end{aligned}$$

comme d'après la Relation (1.5)

$$\mathscr{V}_{\hat{g}}(\hat{f})(\omega,x) = \widehat{(\hat{f}\overline{T_\omega\hat{g}})}(x),$$

alors pour tout $\omega \in \mathbb{R}^d$, on a

$$(\hat{f}\overline{T_\omega\hat{g}})(t) = \mathscr{F}_x^{-1}(\mathscr{V}_{\hat{g}}(\hat{f})(\omega,.))(t).$$

Or, d'après la Relation (1.10) on a

$$\mathscr{V}_g(f)(x,\omega) = e^{-i\langle\omega|x\rangle}\mathscr{V}_{\hat{g}}(\hat{f})(\omega,-x),$$

alors

$$(\hat{f}\overline{T_\omega\hat{g}})(t) = \mathscr{F}_x^{-1}(e^{i\langle\omega|.\rangle}\mathscr{V}_g(f)(-.,\omega))(t),$$

par suite,

$$\|g\|_{2,d}^2\|y\hat{f}\|_{2,d}^2 = \iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} y^2|\mathscr{F}_\omega^{-1}(e^{i\langle\omega|x\rangle}\mathscr{V}_g(f)(-x,\omega))(y)|^2 d\mu_{2d}(y,\omega).$$

Or, d'après la Relation (2.22) (Inégalité de Heisenberg), on a pour tout $\omega \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2|\mathscr{V}_g(f)(-x,\omega)|^2 d\mu_d(x)\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |y|^2|\mathscr{F}_\omega^{-1}(e^{i\langle\omega|x\rangle}\mathscr{V}_g(f)(-x,\omega))(y)|^2 d\mu_d(y)\right)^{1/2}\\
&\geqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\mathscr{V}_g(f)(-x,\omega)|^2 d\mu_d(x).
\end{aligned}$$

En faisant un changement de variable, on obtient

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d}|x|^2|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2d\mu_d(x)\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|y|^2|\mathscr{F}_\omega^{-1}(e^{-i\langle\omega|x\rangle}\mathscr{V}_g(f)(x,\omega))(y)|^2d\mu_d(y)\right)^{1/2}$$
$$\geqslant\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2d\mu_d(x).$$

En intégrant par rapport à ω puis en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la Relation (1.13) (Plancherel), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left(\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}|x|^2|\mathscr{V}_g(f)(-x,\omega)|^2d\mu_{2d}(x,\omega)\right)^{1/2}\|g\|_{2,d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|y|^2|\hat{f}(y)|^2d\mu_d(y)\right)^{1/2}\\
&=\left(\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}|x|^2|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2d\mu_{2d}(x,\omega)\right)^{1/2}\|g\|_{2,d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|y|^2|\hat{f}(y)|^2d\mu_d(y)\right)^{1/2}\\
&=\left(\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}|x|^2|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2d\mu_{2d}(x,\omega)\right)^{1/2}\\
&\times\left(\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}|y|^2|\mathscr{F}_\omega^{-1}(e^{-i\langle\omega|x\rangle}\mathscr{V}_g(f)(x,\omega))(y)|^2d\mu_{2d}(x,y)\right)^{1/2}\\
&\geqslant\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|x|^2|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2d\mu_d(\omega)\right)^{1/2}\\
&\times\left(\int_{\mathbb{R}^d}|y|^2|\mathscr{F}_\omega^{-1}(e^{-i\langle\omega|x\rangle}\mathscr{V}_g(f)(x,\omega))(y)|^2d\mu_d(y)\right)^{1/2}d\mu_d(x)\\
&\geqslant\frac{1}{2}\|g\|_{2,d}^2\|f\|_{2,d}^2.
\end{aligned}$$

On divise par $\|g\|_{2,d}$ et on obtient

$$\|x\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}\|y\hat{f}\|_{2,d}\geqslant\frac{1}{2}\|g\|_{2,d}\|f\|_{2,d}^2.$$

■

Théorème 2.4.6 Soient $f,g\in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g\neq 0$. On a

$$\|x\mathscr{A}(f,g)\|_{2,2d}\|y\hat{f}\|_{2,d}\geqslant\frac{1}{2}\|g\|_{2,d}\|f\|_{2,d}^2. \tag{2.28}$$

***Démonstration*.** D'après la Relation (1.22), on a

$$\|x\mathscr{A}(f,g)\|_{2,2d} = \|x\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}.$$

Alors, d'après la Relation (2.27) on obtient

$$\|x\mathscr{A}(f,g)\|_{2,2d}\|y\hat{f}\|_{2,d} \geqslant \frac{1}{2}\|g\|_{2,d}\|f\|_{2,d}^2.$$

■

Théorème 2.4.7 Soient $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$. On a

$$\|x\mathscr{W}(f,g)\|_{2,2d}\|y\hat{f}\|_{2,d} \geqslant \frac{1}{4}\|g\|_{2,d}\|f\|_{2,d}^2. \tag{2.29}$$

***Démonstration*.** D'après la Relation (1.23), on a

$$\begin{aligned}\|x\mathscr{W}(f,g)\|_{2,2d}^2 &= \iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} |2^d x\mathscr{V}_{\breve{g}}(f)(2x,2\omega)|^2 d\mu_{2d}(x,\omega)\\ &= \frac{1}{4}\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} |y\mathscr{V}_{\breve{g}}(f)(y,\lambda)|^2 d\mu_{2d}(y,\lambda)\\ &= \frac{1}{4}\|x\mathscr{V}_{\breve{g}}(f)\|_{2,2d}^2.\end{aligned}$$

Alors, d'après la Relation (2.27) on obtient

$$\|x\mathscr{W}(f,g)\|_{2,2d}\|y\hat{f}\|_{2,d} \geqslant \frac{1}{4}\|g\|_{2,d}\|f\|_{2,d}^2.$$

■

Corollaire 2.4.8 – Principe d'incertitude de Heisenberg en x et ω Soit g une fonction fenêtre. Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|\omega\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}\|x\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}\|y\hat{f}\|_{2,d}\|xf\|_{2,d} \geqslant \frac{1}{4}\|g\|_{2,d}^2\|f\|_{2,d}^4. \tag{2.30}$$

Démonstration. D'après la Relation (2.23) ainsi que la Relation (2.27), on a

$$\|\omega\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}\|xf\|_{2,d} \geqslant \frac{1}{2}\|g\|_{2,d}\|f\|_{2,d}^2.$$

et

$$\|x\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}\|y\hat{f}\|_{2,d} \geqslant \frac{1}{2}\|g\|_{2,d}\|f\|_{2,d}^2$$

donc

$$\|\omega\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}\|x\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}\|y\hat{f}\|_{2,d}\|xf\|_{2,d} \geqslant \frac{1}{4}\|g\|_{2,d}^2\|f\|_{2,d}^4.$$

■

Corollaire 2.4.9 Soient $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$. On a

$$\|\omega\mathscr{A}(f,g)\|_{2,2d}\|x\mathscr{A}(f,g)\|_{2,2d}\|y\hat{f}\|_{2,d}\|xf\|_{2,d} \geqslant \frac{1}{4}\|g\|_{2,d}^2\|f\|_{2,d}^4.$$

Démonstration. En combinant les Relations (2.25) et (2.28) on obtient

$$\|\omega\mathscr{A}(f,g)\|_{2,2d}\|x\mathscr{A}(f,g)\|_{2,2d}\|y\hat{f}\|_{2,d}\|xf\|_{2,d} \geqslant \frac{1}{4}\|g\|_{2,d}^2\|f\|_{2,d}^4.$$

■

Corollaire 2.4.10 Soient $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$. On a

$$\|\omega\mathscr{W}(f,g)\|_{2,2d}\|x\mathscr{W}(f,g)\|_{2,2d}\|y\hat{f}\|_{2,d}\|xf\|_{2,d} \geqslant \frac{1}{16}\|g\|_{2,d}^2\|f\|_{2,d}^4.$$

Démonstration. En se servant des Relations (2.26) et (2.29) on obtient

$$\|\omega\mathscr{W}(f,g)\|_{2,2d}\|x\mathscr{W}(f,g)\|_{2,2d}\|y\hat{f}\|_{2,d}\|xf\|_{2,d} \geqslant \frac{1}{16}\|g\|_{2,d}^2\|f\|_{2,d}^4.$$

■

2.5 Principe d'incertitude local de Price

Le principe d'incertitude de Heisenberg établi précédément montre que la transformation de Fourier à fenêtre ne peut pas être concentrée autour de l'origine dans le plan temps-fréquence mais ne précise pas si ce résultat reste vrai au alentour de plusieurs points dispersés du plan temps-fréquence. Le principe d'incertitude suivant, dit principe local de Price, répond négativement à la question.

Théorème 2.5.1 – Principe d'incertitude de Price Soit ξ, p deux réels positifs tels que $0 < \xi < d$ et $p \geqslant 1$, alors il existe une constante positive $M_{\xi,p}$ telle que pour toute fonction fenêtre g, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et pour tout sous ensemble Σ de $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ de mesure finie, on a

$$\|\chi_\Sigma \mathscr{V}_g(f)\|_{p,2d}^{p(p+1)} \leqslant M_{\xi,p}^{p+1} \mu_{2d}(\Sigma) \||(x,\omega)|^\xi \mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}^{\frac{2pd}{d+\xi}} \left(\|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d}\right)^{p(p-\frac{d-\xi}{d+\xi})}. \tag{2.31}$$

Démonstration. Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $\|f\|_{2,d} = \|g\|_{2,d} = 1$. Alors, pour tout réel positif s, on a

$$\|\chi_\Sigma \mathscr{V}_g(f)\|_{p,2d} \leqslant \|\mathscr{V}_g(f)\chi_{\mathscr{B}_s\cap\Sigma}\|_{p,2d} + \|\mathscr{V}_g(f)\chi_{\mathscr{B}_s^c\cap\Sigma}\|_{p,2d},$$

où $\mathscr{B}_s$ est la boule de $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ de rayon s. Toutefois, d'après l'inégalité de Hölder et la Relation (1.2), on obtient pour tout $0 < \xi < d$

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{V}_g(f)\chi_{\mathscr{B}_s\cap\Sigma}\|_{p,2d} &= \left(\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^p \chi_{\mathscr{B}_s}(x,\omega)\chi_\Sigma(x,\omega)d\mu_{2d}(x,\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \|\mathscr{V}_g(f)\|_{\infty,2d}^{\frac{p}{p+1}} \left(\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^{\frac{p}{p+1}} \chi_{\mathscr{B}_s}(x,\omega)\chi_\Sigma(x,\omega)d\mu_{2d}(x,\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \mu_{2d}(\Sigma)^{\frac{1}{p(p+1)}} \|\mathscr{V}_g(f)\chi_{\mathscr{B}_s}\|_{1,2d}^{\frac{1}{p+1}} \\
&\leqslant \mu_{2d}(\Sigma)^{\frac{1}{p(p+1)}} \||(x,\omega)|^\xi \mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}^{\frac{1}{p+1}} \||(x,\omega)|^{-\xi}\chi_{\mathscr{B}_s}\|_{2,2d}^{\frac{1}{p+1}} \\
&\leqslant \frac{\mu_{2d}(\Sigma)^{\frac{1}{p(p+1)}}}{(2^d\Gamma(d)(d-\xi))^{\frac{1}{2(p+1)}}} \||(x,\omega)|^\xi \mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}^{\frac{1}{p+1}} s^{\frac{d-\xi}{p+1}}.
\end{aligned}$$

D'autre part, de même par l'inégalité de Hölder et la Relation (1.2), on conclut que

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{V}_g(f)\chi_{\mathscr{B}_s^c\cap\Sigma}\|_{p,2d} &\leqslant \|\mathscr{V}_g(f)\|_{\infty,2d}^{\frac{p-1}{p+1}} \left(\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^{\frac{2p}{p+1}} \chi_{\mathscr{B}_s^c}(x,\omega)\chi_\Sigma(x,\omega)d\mu_{2d}(x,\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \mu_{2d}(\Sigma)^{\frac{1}{p(p+1)}} \left(\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^2 \chi_{\mathscr{B}_s^c}(x,\omega)d\mu_{2d}(x,\omega)\right)^{\frac{1}{p+1}} \\
&\leqslant \mu_{2d}(\Sigma)^{\frac{1}{p(p+1)}} \||(x,\omega)|^\xi \mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}^{\frac{2}{p+1}} s^{-\frac{2\xi}{p+1}}.
\end{aligned}$$

En conséquent,

$$\left(\iint_{\Sigma}|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^p d\mu_{2d}(x,\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \mu_{2d}(\Sigma)^{\frac{1}{p(p+1)}}\||(x,\omega)|^{\xi}\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}^{\frac{1}{p+1}}$$
$$\times\left(\frac{s^{\frac{d-\xi}{p+1}}}{(2^d\Gamma(d)(d-\xi))^{\frac{1}{2(p+1)}}}+\||(x,\omega)|^{\xi}\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}^{\frac{1}{p+1}}s^{-\frac{2\xi}{p+1}}\right).$$

En particulier, l'inégalité est vraie pour

$$s_0=\left(\frac{2\xi\||(x,\omega)|^{\xi}\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}^{\frac{1}{p+1}}(2^d\Gamma(d)(d-\xi))^{\frac{1}{2(p+1)}}}{d-\xi}\right)^{\frac{p+1}{d+\xi}},$$

et ainsi

$$\left(\iint_{\Sigma}|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|^p d\mu_{2d}(x,\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \mu_{2d}(\Sigma)^{\frac{1}{p(p+1)}}\||(x,\omega)|^{\xi}\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}^{\frac{2d}{(d+\xi)(p+1)}}$$
$$\times\left(\frac{d+\xi}{2^{\frac{\xi(d+2p+2)}{(d+\xi)(p+1)}}\xi^{\frac{2\xi}{d+\xi}}\Gamma(d)^{\frac{\xi}{(d+\xi)(p+1)}}(d-\xi)^{\frac{d-\xi}{d+\xi}+\frac{\xi}{(d+\xi)(p+1)}}}\right).$$

La preuve est achevée en appliquant l'inégalité précédente à $\dfrac{f}{\|f\|_{2,d}}$ et $\dfrac{g}{\|g\|_{2,d}}$ pour toutes fonctions non nulles $f,g\in L^2(\mathbb{R}^d)$. ■

Théorème 2.5.2 Soit ξ,p deux réels positifs tels que $0<\xi<d$ et $p\geqslant 1$, alors il existe une constante positive $M_{\xi,p}$ telle que pour toute fonction $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ et pour tout ensemble Σ de mesure finie dans $\mathbb{R}^{2d}$, on a

$$\|\chi_{\Sigma}\mathscr{A}(f,g)\|_{p,2d}^{p(p+1)}\leqslant M_{\xi,p}^{p+1}\mu_{2d}(\Sigma)\||(x,\omega)|^{\xi}\mathscr{A}(f,g)\|_{2,2d}^{\frac{2pd}{d+\xi}}\left(\|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d}\right)^{p(p-\frac{d-\xi}{d+\xi})}.$$

Démonstration. On a d'après la Relation (1.22), $|\mathscr{A}(f,g)(x,\omega)|=|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|$, alors

$$\|\chi_{\Sigma}\mathscr{A}(f,g)\|_{p,2d}=\|\chi_{\Sigma}\mathscr{V}_g(f)\|_{p,2d}$$

et

$$\||(x,\omega)|^{\xi}\mathscr{A}(f,g)\|_{2,2d}=\||(x,\omega)|^{\xi}\mathscr{V}_g(f)\|_{2,2d}.$$

D'où, d'après la Relation (2.31), on obtient

$$\|\chi_{\Sigma}\mathscr{A}(f,g)\|_{p,2d}^{p(p+1)}\leqslant M_{\xi,p}^{p+1}\mu_{2d}(\Sigma)\||(x,\omega)|^{\xi}\mathscr{A}(f,g)\|_{2,2d}^{\frac{2pd}{d+\xi}}\left(\|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d}\right)^{p(p-\frac{d-\xi}{d+\xi})}.$$

■

Théorème 2.5.3 Soit ξ, p deux réels positifs tels que $0 < \xi < d$ et $p \geqslant 1$, alors il existe une constante positive $N_{\xi,p}$ telle que pour toute fonction fenêtre g, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et pour tout sous ensemble Σ de $\mathbb{R}^{2d}$ de mesure finie, on a

$$\|\chi_\Sigma \mathscr{W}(f,g)\|_{p,2d}^{p(p+1)} \leqslant N_{\xi,p}^{p+1} \mu_{2d}(\Sigma) \||(x,\omega)|^\xi \mathscr{W}(f,g)\|_{2,2d}^{\frac{2pd}{(d+\xi)}} \left(\|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d}\right)^{p(p-\frac{d-\xi}{d+\xi})}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\|\chi_\Sigma \mathscr{W}(f,g)\|_{p,2d}^p &= 2^{dp} \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} |\chi_\Sigma(x,\omega) \mathscr{V}_{\check{g}}(f)(2x,2\omega)|^p d\mu_{2d}(x,\omega) \\
&= 2^{d(p-2)} \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} |\chi_T(y,\lambda) \mathscr{V}_{\check{g}}(f)(y,\lambda)|^p d\mu_{2d}(y,\lambda) \\
&= 2^{d(p-2)} \|\chi_T \mathscr{V}_{\check{g}}(f)\|_{p,2d}^p,
\end{aligned}$$

où

$$T = \left\{(y,\lambda) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d \mid (\frac{y}{2}, \frac{\lambda}{2}) \in \Sigma\right\} = \left\{(2x,2\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d \mid (x,\omega) \in \Sigma\right\}.$$

Alors, d'après la Relation (2.31) on obtient

$$\begin{aligned}
\|\chi_\Sigma \mathscr{W}(f,g)\|_{p,2d}^{p(p+1)} &\leqslant 2^{d(p-2)(p+1)} M_{\xi,p}^{p+1} \mu_{2d}(T) \||(x,\omega)|^\xi \mathscr{V}_{\check{g}}(f)\|_{2,2d}^{\frac{2pd}{d+\xi}} \left(\|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d}\right)^{p(p-\frac{d-\xi}{d+\xi})} \\
&\leqslant 2^{d(p-2)(p+1)} 2^{2d} M_{\xi,p}^{p+1} \mu_{2d}(\Sigma) \||(x,\omega)|^\xi \mathscr{V}_{\check{g}}(f)\|_{2,2d}^{\frac{2pd}{d+\xi}} \left(\|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d}\right)^{p(p-\frac{d-\xi}{d+\xi})}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\||(x,\omega)|^\xi \mathscr{V}_{\check{g}}(f)\|_{2,2d}^2 &= \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} |(x,\omega)|^{2\xi} |\mathscr{V}_{\check{g}}(f)(x,\omega)|^2 d\mu_{2d}(x,\omega) \\
&= 2^{2d} \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} |(2y,2\lambda)|^{2\xi} |\mathscr{V}_{\check{g}}(f)(2y,2\lambda)|^2 d\mu_{2d}(y,\lambda) \\
&= 2^{2\xi} \||(x,\omega)|^\xi |\mathscr{W}(f,g)\|_{2,2d}^2,
\end{aligned}$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned}
\|\chi_\Sigma \mathscr{W}(f,g)\|_{p,2d}^{p(p+1)} &\leqslant 2^{d(p-2)(2+1)} 2^{2d} 2^{\frac{2pd\xi}{d+\xi}} M_{\xi,p}^{p+1} \mu_{2d}(\Sigma) \||(x,\omega)|^\xi \mathscr{W}(f,g)\|_{2,2d}^{\frac{2pd}{d+\xi}} \left(\|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d}\right)^{p(p-\frac{d-\xi}{d+\xi})} \\
&= N_{\xi,p}^{p+1} \mu_{2d}(\Sigma) \||(x,\omega)|^\xi \mathscr{W}(f,g)\|_{2,2d}^{\frac{2pd}{(d+\xi)}} \left(\|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d}\right)^{p(p-\frac{d-\xi}{d+\xi})}.
\end{aligned}$$

■

2.6 Principe d'incertitude de Hardy

Le principe d'incertitude de Hardy est l'un des plus importants principes d'incertitude en analyse harmonique. La version infinie-infinie de ce principe a été démontrée par Hardy [14] en 1930 et elle est donnée par le théorème suivant

Théorème 2.6.1 – Hardy Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $ab \geqslant \frac{1}{4}$. Si

$$\begin{cases} \|fe^{a|.|^2}\|_{\infty,d} < +\infty \\ \|\widehat{f}e^{b|.|^2}\|_{\infty,d} < +\infty \end{cases} \tag{2.32}$$

alors
$i)$ Si $ab > \frac{1}{4}$, alors $f = 0$.
$2i)$ Si $ab = \frac{1}{4}$, alors il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^d,\ f(x) = ke^{\frac{-a|x|^2}{2}}$.

Le but de ce paragraphe est de généraliser ce résultat à la Transormée de Fourier à fenêtre, résultat établi par Gröchening et Zimmerman [13]. Dans la suite pour tout $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, on désigne par

$$x^\alpha = \prod_{k=1}^{d} x_k^{\alpha_k}.$$

Par ailleurs, pour tout multi indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, on désigne par $\alpha!$ le multi factoriel défini par

$$\alpha! = \prod_{k=1}^{d} \alpha_k!.$$

On définit sur $\mathbb{N}^d$ un ordre partiel par

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d),\ \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d,\ \alpha \leqslant \beta, \quad \text{si et seulement si} \quad \alpha_k \leqslant \beta_k,\ \forall 1 \leqslant k \leqslant d.$$

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ tels que $\alpha \leqslant \beta$ le coefficient multimonial C_α^β est défini par

$$C_\alpha^\beta = \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!} = \prod_{k=1}^{d} \frac{\alpha_k!}{(\alpha_k-\beta_k)!\beta_k!} = \prod_{k=1}^{d} C_{\alpha_k}^{\beta_k}.$$

On sait alors que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ (x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leqslant \alpha} C_\alpha^\beta x^\beta y^{\alpha-\beta}.$$

Définition 2.6.1 – Opérateurs de multiplication et de différentiation sur $\mathbb{R}^d$
i) Pour tout $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d$, l'opérateur de multiplication X^β est défini sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \ \left(X^\beta f\right)(x) = x^\beta f(x) = \left(\prod_{k=1}^{d} x_k^{\beta_k}\right) f(x).$$

2*i*) Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, l'opérateur differentiel D^α est défini sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ par

$$D^\alpha(f) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

où $|\alpha| = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k$.

Lemme 2.6.2 Soit $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ on a

$$X^\beta D^\alpha (M_\omega T_x g) = \sum_{\delta \leq \beta} \sum_{\gamma \leq \alpha} C_\beta^\delta C_\alpha^\gamma x^\delta (i\omega)^\gamma M_\omega T_x \left(X^{\beta-\delta} D^{\alpha-\gamma} g\right).$$

Démonstration. D'après la formule du Binôme, on a pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$ et pour tous $x, t \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}\left(X^\beta T_x g\right)(t) &= t^\beta g(t-x) \\ &= ((t+x)-x)^\beta g(t-x) \\ &= T_x\left((.+x)^\beta g\right)(t).\end{aligned}$$

Or pour tout $s \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\left((.+x)^\beta g\right)(s) = (s+x)^\beta g(s) = \sum_{\gamma \leqslant \beta} C_\beta^\gamma x^\gamma s^{\beta-\gamma} g(s) = \sum_{\gamma \leqslant \beta} C_\beta^\gamma x^\gamma \left(X^{\beta-\gamma} g\right)(s),$$

et par suite

$$\left(X^\beta T_x g\right)(t) = T_x\left(\sum_{\gamma \leqslant \beta} C_\beta^\gamma x^\gamma \left(X^{\beta-\gamma} g\right)\right)(t) = \sum_{\gamma \leqslant \beta} C_\beta^\gamma x^\gamma T_x \left(X^{\beta-\gamma} g\right)(t). \tag{2.33}$$

D'après la formule de Leibniz, on a pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et pour tous $t, \omega \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}(D^\alpha M_\omega g)(t) &= D^\alpha\left(e^{i\langle \omega | . \rangle} g\right)(t) \\ &= \sum_{\gamma \leqslant \alpha} C_\alpha^\gamma \left(D^\gamma e^{i\langle \omega | . \rangle}\right)(t) \left(D^{\alpha-\gamma} g\right)(t),\end{aligned}$$

et donc

$$(D^\alpha M_\omega g)(t) = \left(\sum_{\gamma \leqslant \alpha} C_\alpha^\gamma i^{|\gamma|} \omega^\gamma M_\omega D^{\alpha-\gamma} g\right)(t). \tag{2.34}$$

Finalement, en combinant les Relations (2.33) et (2.34), on obtient que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$,

$$\begin{aligned} X^\beta\left(D^\alpha M_\omega(T_x g)\right) &= X^\beta\left(\sum_{\gamma\leqslant\alpha} C_\alpha^\gamma (i\omega)^\gamma M_\omega D^{\alpha-\gamma}(T_x g)\right) \\ &= \sum_{\gamma\leqslant\alpha} C_\alpha^\gamma i^{|\gamma|}\omega^\gamma M_\omega\left(X^\beta T_x(D^{\alpha-\gamma}g)\right) \\ &= \sum_{\gamma\leqslant\alpha} C_\alpha^\gamma i^{|\gamma|}\omega^\gamma M_\omega\left(\sum_{\delta\leqslant\beta} C_\beta^\delta x^\delta T_x X^{\beta-\delta}(D^{\alpha-\gamma}g)\right) \\ &= \sum_{\delta\leqslant\beta}\sum_{\gamma\leqslant\alpha} C_\beta^\delta C_\alpha^\gamma x^\delta i^{|\gamma|}\omega^\gamma M_\omega T_x\left(X^{\beta-\delta}D^{\alpha-\gamma}g\right). \end{aligned}$$

■

Proposition 2.6.3 Soit $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $F : \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d \to \mathbb{C}$ une fonction à décroissance rapide. Alors, la fonction f définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}^d,\ f(t) = \iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} F(x,\omega)(M_\omega T_x g)(t)\,d\mu_{2d}(x,\omega)$$

est un élément de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Comme F est à décroissance rapide alors pour tous $\delta, \gamma \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\|X^\delta W^\gamma F\|_{\infty,2d} < +\infty,$$

en particulier il existe une constante C_{2d+1} telle que

$$\forall (x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d,\ |F(x,\omega)| \leqslant \frac{C_{2d+1}}{(1+|(x,\omega)|)^{2d+1}},$$

et par suite pour tout $t \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} |F(x,\omega)(M_\omega T_x g)(t)|\,d\mu_{2d}(x,\omega) &\leqslant C_{2d+1}\|g\|_{\infty,d}\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d} \frac{d\mu_{2d}(x,\omega)}{(1+|(x,\omega)|)^{2d+1}} \\ &\leqslant C_{2d+1}\|g\|_{\infty,d}\,\sigma_{2d}(S^{2d-1})\int_0^{+\infty}\frac{\rho^{2d-1}d\rho}{(1+\rho)^{2d+1}} < +\infty \end{aligned}$$

où σ_{2d} désigne la mesure superficielle de la sphère S^{2d-1}. Ainsi la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}^d$. Par ailleurs, pour tous $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ la fonction $t \mapsto F(x,\omega)(M_\omega T_x g)(t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$, et en vertu de la Relation (2.34), on sait que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\begin{aligned}\forall (x,\omega)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d,\ |D^\alpha(F(x,\omega)M_\omega T_x g)(t)| &= |F(x,\omega)|\,|D^\alpha(M_\omega T_x g)(t)|\\ &= |F(x,\omega)|\left|\sum_{\gamma\leqslant\alpha} C_\alpha^\gamma i^{|\gamma|}\omega^\gamma M_\omega D^{\alpha-\gamma}(g)(t-x)\right|\\ &\leqslant |F(x,\omega)|\sum_{\gamma\leqslant\alpha}\|D^{\alpha-\gamma}(g)\|_{\infty,d}|C_\alpha^\gamma\omega^\gamma|\\ &\leqslant \left(\sup_{\gamma\leqslant\alpha}\|D^{\alpha-\gamma}(g)\|_{\infty,d}\right)|F(x,\omega)|\sum_{\gamma\leqslant\alpha}C_\alpha^\gamma|\omega|^{|\gamma|}\\ &\leqslant C\left(\sup_{\gamma\leqslant\alpha}\|D^{\alpha-\gamma}(g)\|_{\infty,d}\right)|F(x,\omega)||(x,\omega)|^{|\alpha|}.\end{aligned}$$

Comme F est à décroissance rapide, on en déduit que

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}|F(x,\omega)||(x,\omega)|^{|\alpha|}d\mu_{2d}(x,\omega)<+\infty,$$

et par suite $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^d$, on a

$$\forall t\in\mathbb{R}^d,\ D^\alpha f(t)=\sum_{\gamma\leqslant\alpha}C_\alpha^\gamma i^{|\gamma|}\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}F(x,\omega)\omega^\gamma e^{i\langle t|\omega\rangle}D^{\alpha-\gamma}(g)(t-x)d\mu_{2d}(x,\omega) \tag{2.35}$$

en particulier pour tous $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^d$, on a

$$\begin{aligned}\|X^\beta D^\alpha f\|_{\infty,d} &\leqslant \sum_{\delta\leqslant\beta}\sum_{\gamma\leqslant\alpha}C_\alpha^\gamma C_\beta^\delta\|X^{\beta-\delta}D^{\alpha-\gamma}g\|_{\infty,d}\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}|F(x,\omega)||x^\delta||\omega^\gamma|d\mu_{2d}(x,\omega),\\ &\leqslant C\left(\sup_{\substack{\gamma\leqslant\alpha\\ \delta\leqslant\beta}}\|X^{\beta-\delta}D^{\alpha-\gamma}g\|_{\infty,d}\right)\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}|F(x,\omega)||(x,\omega)|^{|\delta|+|\gamma|}d\mu_{2d}(x,\omega)\\ &<+\infty,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. ■

Lemme 2.6.4 Pour toutes $f,g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, la fonction F définie sur $\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d$ par

$$F(x,t)=f(t)\overline{g(t-x)},$$

appartient à $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d)$.

Démonstration. Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ par $\phi(x,t) = f(t)$, alors ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}\phi}{\partial x^\alpha \partial t^\beta}(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq (0,\dots,0) \\ \dfrac{d^{|\beta|}f}{dt^\beta}(t) & \text{si } \alpha = (0,\dots,0) \end{cases}$$

De la même manière soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ par $\psi(x,t) = \overline{g(t-x)}$, alors ψ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}\psi}{\partial x^\alpha \partial t^\beta}(x,t) = (-1)^{|\alpha|} \left(\frac{d^{|\alpha|+|\beta|}\overline{g}}{dz^{|\alpha|+|\beta|}} \right)(t-x).$$

Il s'en suit alors que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$. Par ailleurs, pour tous $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\begin{aligned}
\forall (x,t) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d,\ \left| x^\delta t^\gamma \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}F}{\partial x^\alpha \partial t^\beta}(x,t) \right| &= \left| x^\delta t^\gamma \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}\phi\psi}{\partial x^\alpha \partial t^\beta}(x,t) \right| \\
&= \left| x^\delta t^\gamma \sum_{\alpha' \leqslant \alpha} \sum_{\beta' \leqslant \beta} C_\alpha^{\alpha'} C_\beta^{\beta'} \frac{\partial^{|\alpha'|+|\beta'|}\psi}{\partial x^{\alpha'} \partial t^{\beta'}}(x,t) \frac{\partial^{|\alpha-\alpha'|+|\beta-\beta'|}\phi}{\partial x^{\alpha-\alpha'} \partial t^{\beta-\beta'}}(x,t) \right| \\
&= \left| x^\delta t^\gamma \sum_{\beta' \leqslant \beta} C_\beta^{\beta'} (-1)^{|\alpha|} \frac{d^{|\alpha|+|\beta'|}\overline{g}}{dx^\alpha dt^{\beta'}}(t-x) \frac{d^{|\beta-\beta'|}f}{dt^{\beta-\beta'}}(t) \right| \\
&\leqslant C \sup_{\beta' \leqslant \beta} \left(\|X^\delta D^{\alpha+\beta'} g\|_{\infty,d} \|T^\gamma D^{\beta'} f\|_{\infty,d} \right) \\
&< +\infty,
\end{aligned}$$

et donc $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$. ∎

Lemme 2.6.5 Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$ et soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ par

$$F(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,t) e^{-i\langle t|\omega\rangle} d\mu_d(t).$$

Alors $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$.

Démonstration. Pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, $(x,\omega) \mapsto f(x,t)e^{-i\langle t|\omega\rangle}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$. De plus, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\forall (x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d, \quad \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}(f(t,.)e^{-i\langle t|.\rangle})}{\partial x^\alpha \partial^\beta \omega}(x,\omega) \right| = \left| t^\beta \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x,t) \right| \leqslant \frac{\| t^\beta (1+|t|)^{d+1} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x,t) \|_{\infty,d}}{(1+|t|)^{d+1}}.$$

Comme $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu_d(t)}{(1+|t|)^{d+1}} < +\infty$, on en déduit que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$. Par ailleurs, pour tous $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\begin{aligned}
\forall (x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d, \quad \left| (i)^{|\beta|} x^\delta \omega^\gamma \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} F}{\partial x^\alpha \partial^\beta \omega}(x,\omega) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} x^\delta \omega^\gamma t^\beta \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x,t) e^{-i\langle t|\omega\rangle} d\mu_d(t) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^d} x^\delta t^\beta \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x,t) \frac{\partial^{|\gamma|}(e^{-i\langle .|\omega\rangle})}{\partial t^\gamma}(t) d\mu_d(t) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^d} x^\delta t^\beta \frac{\partial^{|\alpha|+|\gamma|} f}{\partial x^\alpha \partial t^\gamma}(x,t) e^{-i\langle t|\omega\rangle} d\mu_d(t) \right| \\
&\leqslant \| x^\delta t^\beta (1+|t|)^{d+1} f \|_{\infty,d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu_d(t)}{(1+|t|)^{d+1}} \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

et donc $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$. ■

Théorème 2.6.6 Soient $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes
$i)$ $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.
$2i)$ $\mathscr{V}_g(f) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$.
$3i)$ L'application $\mathscr{V}_g(f)$ est à décroissance rapide.

Démonstration. $i) \Rightarrow 2i)$ Comme $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, alors d'après le Lemme 2.6.4 la fonction F définie sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ par

$$F(x,t) = f(t)\overline{g(t-x)},$$

appartient à $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$. Or, comme

$$\forall (x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d, \ \mathscr{V}_g(f)(x,\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} F(x,t) e^{-i\langle t|\omega\rangle} d\mu_d(t),$$

le Lemme 2.6.5 implique que $\mathscr{V}_g(f) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d)$.
$2i) \Rightarrow 3i)$ Cela découle directement de la définition de l'espace de Schwartz.
$3i) \Rightarrow i)$ On sait d'après la Relation (1.18) que

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \ f(t) = \frac{1}{\|g\|_{2,d}^2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} \mathscr{V}_g(f)(x,\omega) M_\omega T_x(g)(t) d\mu_{2d}(x,\omega),$$

et par suite d'après la Proposition 2.6.3, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. ■

Lemme 2.6.7 La solution continue de l'équation fonctionnelle suivante

$$f(x+y)-2f(x)+f(x-y)=0,$$

est donnée sur $\mathbb{R}^d$ par $f(x)=\langle a|x\rangle+c$, où $a\in\mathbb{C}^d$ et $c\in\mathbb{C}$.

Démonstration. Voir [13]. ■

Théorème 2.6.8 Soient $f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telles que $g\neq 0$ et $\mathscr{V}_g(f)\neq 0$. On suppose qu'il existe $C>0$ tel que

$$\forall(x,\omega)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d,\ |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|\leqslant Ce^{-\frac{|x|^2+|\omega|^2}{4}}, \tag{2.36}$$

alors, il existe $\alpha\in\mathbb{C}$ et $(z_0,\zeta_0)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d$ tels que

$$\forall(x,\omega)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d,\ \mathscr{V}_g(f)(x,\omega)=\alpha e^{i\langle\zeta_0-\frac{\omega}{2}|x\rangle}e^{-i\langle\omega|z_0\rangle}e^{-\frac{|x|^2+|\omega|^2}{4}},$$

et f et g sont de la forme $e^{i\langle\zeta_0|t\rangle}e^{-\frac{1}{2}|t-z_0|^2}$.

Démonstration. D'après l'hypothèse, il existe $C>0$ tel que

$$\forall(x,\omega)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d,\ |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|\leqslant Ce^{-\frac{|x|^2+|\omega|^2}{4}},$$

or on sait que la fonction $(x,\omega)\to e^{-\frac{|x|^2+|\omega|^2}{4}}$ est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d)$, en particulier, elle est à décroissance rapide et donc $\mathscr{V}_g(f)$ l'est aussi. Alors, d'après le Théorème 2.6.6, on a $\mathscr{V}_g(f)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d)$ et $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Soit, maintenant, $(z,\zeta)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d$, on considère la fonction $\phi_{(z,\zeta)}$ définie dans la Relation (2.5) par

$$\forall(x,\omega)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d,\ \phi_{(z,\xi)}(x,\omega)=e^{i(\langle\omega|x\rangle+2\langle z|\xi\rangle)}\mathscr{V}_g(f)(x-z,\omega-\xi)\mathscr{V}_g(f)(-x-z,-\omega-\xi).$$

Alors, d'après l'hypothèse, il existe $C>0$ tel que

$$\begin{aligned}\forall(x,\omega)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d,\ |\phi_{(z,\zeta)}(x,\omega)|&\leqslant Ce^{-\frac{|x-z|^2+|\omega-\zeta|^2}{4}}e^{-\frac{|x+z|^2+|\omega+\zeta|^2}{4}}\\&\leqslant Ce^{-\frac{|x|^2+|z|^2+|\omega|^2+|\zeta|^2}{2}}\\&=C_{(z,\zeta)}e^{-\frac{|x|^2+|\omega|^2}{2}}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après la Relation (2.6), on a

$$\forall(y,\eta)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d,\ \hat{\phi}_{(z,\zeta)}(y,\eta)=\phi_{(z,\zeta)}(-\eta,y),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\forall(y,\eta)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d,\ |\hat{\phi}_{(z,\zeta)}(y,\eta)|&=|\phi_{(z,\zeta)}(-\eta,y)|\\&\leqslant C_{(z,\zeta)}e^{-\frac{|y|^2+|\eta|^2}{2}}.\end{aligned}$$

Donc, d'après le Théorème 2.6.1, il existe $C'_{(z,\zeta)} > 0$ tel que

$$\forall (x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d,\ \phi_{(z,\zeta)}(x,\omega) = C'_{(z,\zeta)} e^{-\frac{|x|^2+|\omega|^2}{4}}. \tag{2.37}$$

Pour $(x,\omega) = (0,0)$, on obtient

$$\phi_{(z,\zeta)}(0,0) = C'_{(z,\zeta)} = e^{2i\langle \zeta | z\rangle} \left(\mathscr{V}_g(f)(-z,-\zeta)\right)^2. \tag{2.38}$$

Comme $\mathscr{V}_g(f) \neq 0$, alors il existe en particulier $(z,\zeta) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ tels que

$$|C'_{(z,\zeta)}| = |\mathscr{V}_g(f)(-z,-\zeta)|^2 \neq 0.$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}\forall (x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d,\ |\phi_{(z,\zeta)}(x,\omega)| &= |\mathscr{V}_g(f)(x-z,\omega-\zeta)||\mathscr{V}_g(f)(-x-z,-\omega-\zeta)| \\ &= |C'_{(z,\zeta)}| e^{-\frac{|x|^2+|\omega|^2}{4}} \neq 0.\end{aligned}$$

En particulier, pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, $\mathscr{V}_g(f)(x,\omega) \neq 0$. Comme $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ est simplement connexe et $\mathscr{V}_g(f)$ est une application analytique et ne s'annulle pas sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, alors il existe une branche logarithmique Φ de $\mathscr{V}_g(f)$ définie sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ par

$$\Phi(x,\omega) = \log(\mathscr{V}_g(f)(-x,-\omega)).$$

La fonction Φ est bien définie et analytique de $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ dans $\mathbb{C}$. Ensuite, les Relations (2.5), (2.37) et (2.38) donnent

$$\left(\mathscr{V}_g(f)(-z,-\zeta)\right)^2 e^{-\frac{|x|^2+|\omega|^2}{2}} = e^{i\langle \omega | x\rangle} \mathscr{V}_g(f)(x-z,\omega-\zeta)\mathscr{V}_g(f)(-x-z,-\omega-\zeta).$$

Donc,

$$2\Phi(z,\zeta) - \frac{|x|^2+|\omega|^2}{2} = i\langle \omega | x\rangle + \Phi(z-x,\zeta-\omega) + \Phi(x+z,\omega+\zeta) + 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

En prenant $(x,\omega) = (0,0)$, on obtient

$$2\Phi(z,\zeta) = 2\Phi(z,\zeta) + 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

ce qui donne $k = 0$ et par suite

$$\Phi((z,\zeta)+(x,\omega)) - 2\Phi(z,\zeta) + \Phi((z,\zeta)-(x,\omega)) = -\frac{|x|^2+|\omega|^2}{2} - i\langle \omega | x\rangle.$$

C'est une équation fonctionnelle dont une solution particulière est donnée par

$$\Phi_0(x,\omega) = -\frac{|x|^2+|\omega|^2}{4} - \frac{i}{2}\langle \omega | x\rangle,$$

et donc d'après le Lemme 2.6.7

$$\Phi(x,\omega) = -\frac{|x|^2+|\omega|^2}{4} - \frac{i}{2}\langle \omega | x\rangle + \langle a | x\rangle + \langle b | \omega\rangle + c.$$

où $a,b\in\mathbb{C}^d$ et $c\in\mathbb{C}$. Par suite,

$$\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)=\alpha e^{-\frac{|x|^2+|\omega|^2}{4}-\frac{i}{2}\langle\omega|x\rangle-\langle a|x\rangle-\langle b|\omega\rangle},\ \alpha>0,$$

et donc

$$|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|=|\alpha|e^{-\frac{|x|^2+|\omega|^2}{4}-\langle\Re(a)|x\rangle-\langle\Re(b)|\omega\rangle}.$$

Or, la Relation (2.36) est vraie si et seulement si $\Re(a)=\Re(b)=0$. En prenant $a=-i\zeta_0$ et $b=iz_0$, où $z_0,\zeta_0\in\mathbb{R}^d$, on obtient

$$\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)=\alpha e^{i\langle\zeta_0-\frac{\omega}{2}|x\rangle}e^{-i\langle\omega|z_0\rangle}e^{-\frac{|x|^2+|\omega|^2}{4}}.$$

D'après le Théorème 1.2.16, on obtient que f et g sont de la forme $e^{i\langle\zeta_0|t\rangle}e^{-\frac{1}{2}|t-z_0|^2}$. ■

Théorème 2.6.9 – Principe d'incertitude de Hardy pour la TFF Soient $f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telles que $g\neq 0$ et soit $a,b\in\mathbb{R}_+$ tels que $ab\geqslant\dfrac{1}{4}$ et $\varphi_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d$ par

$$\varphi_{a,b}(x,\omega)=e^{-\frac{a|x|^2+b|\omega|^2}{2}}.$$

Si $\mathscr{V}_g(f)=\mathscr{O}\left(\varphi_{a,b}\right)$, alors

i)Si $ab>\dfrac{1}{4}$, alors $f=0$.

$2i$)Si $ab=\dfrac{1}{4}$ et $\mathscr{V}_g(f)\neq 0$, alors il existe $(\zeta_0,z_0)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d$ et $\alpha\in\mathbb{C}$ tels que

$$\forall(x,\omega)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d,\ \mathscr{V}_g(f)(x,\omega)=\alpha e^{i\langle\zeta_0-\frac{\omega}{2}|x\rangle}e^{-i\langle\omega|z_0\rangle}e^{-\frac{|x|^2+|\omega|^2}{4}},$$

et f et g sont de la forme $e^{-\frac{a}{2}|t|^2}$.

Démonstration. i) On suppose que $\mathscr{V}_g(f)\neq 0$.On pose $\lambda=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}}$, on obtient alors

$$|\mathscr{V}_{g_\lambda}(f_\lambda)(x,\omega)|=Ce^{-\frac{|x|^2+|\omega|^2}{4}},$$

et donc $|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|=Ce^{-\frac{1}{2}\left(\frac{|x|^2}{2\lambda^2}+\frac{\lambda^2|\omega|^2}{2}\right)}$, ce qui contredit le fait que $ab>\frac{1}{4}$. Alors, $\mathscr{V}_g(f)=0$ et comme $\mathscr{V}_g(f)$ est à décroissance rapide alors $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et donc on peut utiliser la Relation (1.20), qui implique que $f=0$.

$2i$) On reprend $\lambda=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}}$ du cas i). D'après l'hypothèse et la Relation (1.8), on a

$$\begin{aligned}\forall(x,\omega)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d,\ \mathscr{V}_{g_\lambda}(f_\lambda)(x,\omega)&=\mathscr{V}_g(f)(\lambda x,\frac{\omega}{\lambda})\\&=\mathscr{O}(e^{-\frac{1}{2}(a\lambda^2|x|^2+b\frac{|\omega|^2}{\lambda^2})})\\&=\mathscr{O}(e^{-\frac{\sqrt{ab}}{2}(|x|^2+|\omega|^2)})\\&=\mathscr{O}(e^{-\frac{|x|^2+|\omega|^2}{4}}).\end{aligned}$$

Il s'ensuit du Théorème 2.6.8 qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$, $(z_0, \zeta_0) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ tels que

$$\forall (x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d,\ \mathscr{V}_g(f)(\lambda x, \frac{\omega}{\lambda}) = \alpha e^{i\langle \zeta_0 - \frac{\omega}{2} | x\rangle} e^{-i\langle \omega | z_0\rangle} e^{-\frac{|x|^2+|\omega|^2}{4}},$$

d'où ,

$$\forall (x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d,\ \mathscr{V}_g(f)(x,\omega) = \alpha e^{i\langle \frac{\zeta_0}{\sqrt{2}b^{1/4}} | x\rangle} e^{-\frac{i}{2}\langle \omega | x\rangle} e^{-i\frac{a^{1/4}}{\sqrt{2}}\langle x | z_0\rangle} e^{-\frac{1}{4\sqrt{2}}(\frac{|x|^2}{b^{1/4}} + \frac{|\omega|^2}{a^{1/4}})}.$$

■

Théorème 2.6.10 Soient $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$ et soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $ab \geqslant \frac{1}{4}$ et φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ par

$$\varphi(x,\omega) = e^{-\frac{a|x|^2+b|\omega|^2}{2}}.$$

Si $\mathscr{A}(f,g) = \mathscr{O}(\varphi)$, alors

$i)$Si $ab > \frac{1}{4}$, alors $f = 0$.

$2i)$Si $ab = \frac{1}{4}$ et $\mathscr{A}(f,g) \neq 0$, alors il existe $(\zeta_0, z_0) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall (x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d,\ \mathscr{A}(f,g)(x,\omega) = \alpha e^{i\langle \zeta_0 | x\rangle} e^{-i\langle \omega | z_0\rangle} e^{-\frac{|x|^2+|\omega|^2}{4}}.$$

Théorème 2.6.11 Soient $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$ et soit $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $ab \geqslant \frac{1}{4}$ et φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ par

$$\varphi(x,\omega) = e^{-2a|x|^2-2b|\omega|^2}.$$

Si $\mathscr{W}(f,g) = \mathscr{O}(\varphi)$, alors

$i)$ Si $ab > \frac{1}{4}$, alors $f = 0$.

$2i)$Si $ab = \frac{1}{4}$ et $\mathscr{W}(f,g) \neq 0$, alors il existe $(\zeta_0, z_0) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall (x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d,\ \mathscr{W}(f,g)(x,\omega) = 2^d \alpha e^{2i\langle \zeta_0 | x\rangle} e^{-2i\langle \omega | z_0\rangle} e^{-|x|^2-|\omega|^2}.$$

2.7 Principe d'incertitude de Beurling

Parmi les plus importants principes d'incertitude qualitatifs établis ces dernières années, on retrouve le célèbre principe de Hörmander-Beurling, ce théorème est apparu pour la première fois sans preuve dans l'oeuvre de Beurling [4] et a été démontré des années plus tard en 1991 par Hörmander [18]. Ce principe d'incertitude est donné par le théorème suivant

Théorème 2.7.1 – Hörmander-Beurling Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Si

$$\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |f(x)||\widehat{f}(y)|e^{|xy|}dxdy < +\infty,$$

alors $f = 0$.

Dans la suite on se propose de généraliser le téorème de Hörmander-Beurling à la transformation de Fourier à fenêtre, plus précisément on a le résultat suivant

Théorème 2.7.2 – Principe d'incertitude de Hörmander-Beurling pour la TFF Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$. Si

$$\iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|e^{\frac{|x|^2+|\omega|^2}{2}} d\mu_{2d}(x,\omega) < +\infty, \tag{2.39}$$

alors $f = 0$.

***Démonstration*.** Pour tout $(z,\zeta) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$, soit $\phi_{(z,\xi)}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ par la Relation (2.5), à savoir

$$\forall (x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d,\ \phi_{(z,\xi)}(x,\omega) = e^{i(\langle\omega|x\rangle + 2\langle z|\xi\rangle)}\mathscr{V}_g(f)(x-z,\omega-\xi)\mathscr{V}_g(f)(-x-z,-\omega-\xi).$$

Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$ par

$$\psi(z,\xi) = \left(\iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} |\phi_{(z,\xi)}(x,\omega)\widehat{\phi_{(z,\xi)}}(y,\lambda)|e^{|x|^2+|\omega|^2}e^{|y|^2+|\lambda|^2}d\mu_{2d}(x,\omega)d\mu_{2d}(y,\lambda)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On sait alors d'après la Relation (2.6) que

$$\forall (y,\lambda) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d,\ \hat{\phi}_{(z,\xi)}(y,\lambda) = \phi_{(z,\xi)}(-\lambda,y),$$

et par suite pour tout $(z,\xi)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d$, on a

$$\begin{aligned}
\psi(z,\xi) &= \left(\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}|\phi_{(z,\xi)}(x,\omega)\phi_{(z,\xi)}(-\lambda,y)|e^{|x|^2+|\omega|^2}e^{|y|^2+|\lambda|^2}d\mu_{2d}(x,\omega)d\mu_{2d}(y,\lambda)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}|\phi_{(z,\xi)}(x,\omega)|e^{|x|^2+|\omega|^2}d\mu_{2d}(x,\omega)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}\phi_{(z,\xi)}(-\lambda,y)|e^{|y|^2+|\lambda|^2}d\mu_{2d}(y,\lambda)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}|\phi_{(z,\xi)}(x,\omega)|e^{|x|^2+|\omega|^2}d\mu_{2d}(x,\omega)\\
&= e^{-(|z|^2+|\xi|^2)}\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}|\mathscr{V}_g(f)(x-z,\omega-\xi)\mathscr{V}_g(f)(-x-z,-\omega-\xi)|e^{|x|^2+|\omega|^2}e^{|z|^2+|\xi|^2}d\mu_{2d}(x,\omega)\\
&= e^{-(|z|^2+|\xi|^2)}\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}|\mathscr{V}_g(f)(x-z,\omega-\xi)\mathscr{V}_g(f)(-x-z,-\omega-\xi)|e^{\frac{|x-z|^2+|\omega-\xi|^2}{2}}e^{\frac{|-x-z|^2+|-\omega-\xi|^2}{2}}d\mu_{2d}(x,\omega)
\end{aligned}$$

Posant $\theta(x,\omega)=|\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|e^{\frac{|x|^2+|\omega|^2}{2}}$, alors d'après la Relation (2.39), on en déduit que $\theta\in L^1(\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d)$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
\psi(z,\xi) &= e^{-(|z|^2+|\xi|^2)}\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}\theta(x-z,\omega-\xi)\theta(-x-z,-\omega-\xi)d\mu_{2d}(x,\omega)\\
&= e^{-(|z|^2+|\xi|^2)}\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}\theta(y,\lambda)\theta(-y-2z,-\lambda-2\xi)d\mu_{2d}(y,\lambda)
\end{aligned}$$

et par suite

$$\psi(z,\xi)=e^{-(|z|^2+|\xi|^2)}\theta*\theta(-2z,-2\xi). \tag{2.40}$$

Comme $\theta\in L^1(\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d)$, alors $\theta*\theta\in L^1(\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d)$ et par suite $\psi(z,\xi)<+\infty$ pour presque tout $(z,\xi)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d$, autrement dit pour presque tout $(z,\xi)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d$,

$$\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}\iint_{\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d}|\phi_{(z,\xi)}(x,\omega)||\widehat{\phi_{(z,\xi)}}(y,\lambda)|e^{|x|^2+|\omega|^2}e^{|y|^2+|\lambda|^2}d\mu_{2d}(x,\omega)d\mu_{2d}(y,\lambda)<+\infty.$$

Par conséquent, en appliquant le Théorème 2.7.1, on en déduit que pour presque tout $(z,\xi),(x,\omega)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d$, $\phi_{(z,\xi)}(x,\omega)=0$ en particulier

$$|\phi_{(z,\xi)}(x,\omega)|=|\mathscr{V}_g(f)(x-z,\omega-\xi)\mathscr{V}_g(f)(-x-z,-\omega-\xi)|=0.$$

Comme l'application $((x,\omega),(z,\xi))\longmapsto|\phi_{(z,\xi)}(x,\omega)|=|\mathscr{V}_g(f)(x-z,\omega-\xi)\mathscr{V}_g(f)(-x-z,-\omega-\xi)|$ est continue, on en déduit que pour tout $(z,\xi),(x,\omega)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d$, $|\phi_{(z,\xi)}(x,\omega)|=0$ et donc

$$\forall(z,\xi)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d,\ |\phi_{(z,\xi)}(0,0)=\mathscr{V}_g(f)(-z,-\xi)|^2=0,$$

en particulier

$$\forall(z,\xi)\in\mathbb{R}^d\times\widehat{\mathbb{R}}^d,\ \mathscr{V}_g(f)(-z,-\xi)=0,$$

cela signifie que $\mathscr{V}_g(f)=0$, le Corollaire 1.2.12 permet alors de conclure que $f=0$. ■

Théorème 2.7.3 Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$. Si

$$\iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} |\mathscr{A}(f,g)(x,\omega)| e^{\frac{|x|^2+|\omega|^2}{2}} d\mu_{2d}(x,\omega) < +\infty,$$

alors $f = 0$.

Démonstration. D'après la Relation (1.22), on a pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$,

$$|\mathscr{A}(f,g)(x,\omega)| = |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)|,$$

par suite

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} |\mathscr{A}(f,g)(x,\omega)| e^{\frac{|x|^2+|\omega|^2}{2}} d\mu_{2d}(x,\omega) &= \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} |\mathscr{V}_g(f)(x,\omega)| e^{\frac{|x|^2+|\omega|^2}{2}} d\mu_{2d}(x,\omega) \\ &< +\infty,\end{aligned}$$

alors d'après le Théorème 2.7.2, on obtient $f = 0$. ■

Théorème 2.7.4 Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $g \neq 0$. Si

$$\iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} |\mathscr{W}(f,g)(x,\omega)| e^{2(|x|^2+|\omega|^2)} d\mu_{2d}(x,\omega) < +\infty,$$

alors $f = 0$.

Démonstration. D'après la Relation (1.23), on a pour tout $(x,\omega) \in \mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d$,

$$|\mathscr{W}(f,g)(x,\omega)| = 2^d |\mathscr{V}_{\breve{g}}(f)(2x,2\omega)|,$$

par suite

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} |\mathscr{W}(f,g)(x,\omega)| e^{2(|x|^2+|\omega|^2)} d\mu_{2d}(x,\omega) &= 2^d \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} |\mathscr{V}_{\breve{g}}(f)(2x,2\omega)| e^{2(|x|^2+|\omega|^2)} d\mu_{2d}(x,\omega) \\ &= \frac{1}{2^d} \iint_{\mathbb{R}^d \times \widehat{\mathbb{R}}^d} |\mathscr{V}_{\breve{g}}(f)(y,\lambda)| e^{\frac{|y|^2+|\lambda|^2}{2}} d\mu_{2d}(y,\lambda) \\ &< +\infty,\end{aligned}$$

alors d'après le Théorème 2.7.2, on obtient $f = 0$. ■

Annexes

A1 Inégalité de Hölder

Soit $p, q \in [1, +\infty]$ deux exposants conjugués. Alors pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|fg\|_{1,d} \leqslant \|f\|_{p,d}\|g\|_{q,d}.$$

A2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|fg\|_{1,d} \leqslant \|f\|_{2,d}\|g\|_{2,d}.$$

A3 Inégalité de Minkowski

Pour tout $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ et pour tout $f, g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|f+g\|_{p,d} \leqslant \|f\|_{p,d} + \|g\|_{p,d}.$$

A4 Théorème

Pour tout $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, l'espace $L^p(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Banach. En particulier, pour $p = 2$, l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ muni du produit scalaire

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^d),\ \langle f|g\rangle_{\mathbb{R}^d} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}d\mu_d(x),$$

est un espace de Hilbert.

A5 Inégalité de Hausdorff-Young

Pour tout $1 < p \leqslant 2$, la transformation de Fourier se prolonge en un opérateur borné de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dans $L^q(\mathbb{R}^d)$ où q est l'exposant conjugué de p. De plus, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|\hat{f}\|_{q,d} \leqslant A_p^d \|f\|_{p,d},$$

où $A_p = \left(\frac{p^{\frac{1}{p}}}{q^{\frac{1}{q}}}\right)^{1/2}$.

A6 Inégalité de Young

Soit $1 \leqslant p, q, r \leqslant +\infty$, tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ et soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ et on a

$$\|f * g\|_{r,d} \leqslant \left(A_p A_q A_{r'}\right)^d \|f\|_{p,d} \|g\|_{q,d},$$

où r' est l'exposant conjugué de r.

A7 Théorème de convergence dominée

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables d'un espace mesuré (E, τ, μ) à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Si la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur E et s'il existe une fonction g positive et intégrable telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in E,\ |f_n(x)| \leqslant g(x),$$

alors f est intégrable et on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E |f_n(x) - f(x)| d\mu(x) = 0.$$

En particulier,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E f_n(x) d\mu(x) = \int_E f(x) d\mu(x).$$

Bibliographie

[1] W. O. Amrein and A. M. Berthier. On support properties of lp-functions and their fourier transforms. *J. Funct. Anal.*, 24 :258–267, 1977.

[2] W. Beckner. Inequalities in fourier analysis on rn. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 72 :638–641, 1975.

[3] M. Benedicks. On fourier transforms of functions supported on sets of finite lebesgue measure. *J. Math.Anal. Appl.*, 106 :180–183, 1985.

[4] A. Beurling and L. Carleson. *The Collected Works of Arne Beurling : Complex analysis*. Contemporary mathematicians. Birkhäuser, 1989.

[5] Paolo Boggiatto, Evanthia Carypis, and Alessandro Oliaro. Two aspects of the donoho–stark uncertainty principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 434(2) :1489–1503, 2016.

[6] Aline Bonami, Bruno Demange, Philippe Jaming, et al. Hermite functions and uncertainty principles for the fourier and the windowed fourier transforms. *Revista Matemática Iberoamericana*, 19(1) :23–55, 2003.

[7] Bruno Demange. Uncertainty principles for the ambiguity function. *Journal of the London Mathematical Society*, 72(3) :717–730, 2005.

[8] D. L. Donoho and P. B. Stark. Uncertainty principles and signal recovery. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 49 :906–931, 1989.

[9] W. G. Faris. Inequalities and uncertainty principles. *J. Math. Phys.*, 19 :461–466, 1978.

[10] C. Fernández and A. Galbis. Annihilating sets for the short time fourier transform. *Advances in Mathematics*, 224(5) :1904–1926, 2010.

[11] G. B. Folland. *Real analysis : modern techniques and their applications*. John Wiley and Sons, 2013.

[12] G. B. Folland and A. Sitaram. The uncertainty principle : A mathematical survey. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 3(3) :207–238, 1997.

[13] K. Gröchenig and G. Zimmermann. Hardy's theorem and the short-time fourier transform of schwartz functions. *Journal of the London Mathematical Society*, 63(1) :205–214, 2001.

[14] G. H. Hardy. A theorem concerning fourier transforms. *J. London Math. Soc*, 8 :227–231, 1933.

[15] V. Havin and B. Jöricke. *The uncertainty principle in harmonic analysis*, volume 24. Berlin : Springer Verlag, 1994.

[16] W. Heisenberg. *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*, volume 43. Zeit. Physik, 1927.

[17] I. I. Hirschman. A note on entropy. *American journal of mathematics*, 79(1) :152–156, 1957.

[18] Lars Hörmander. A uniqueness theorem of beurling for fourier transform pairs. *Arkiv för Matematik*, 29(1) :237–240, 1991.

[19] P. Jaming. Principe d'incertitude qualitatif et reconstruction de phase pour la transformée de wigner. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 327(3) :249–254, 1998.

[20] Philippe Jaming. Nazarov's uncertainty principles in higher dimension. *Journal of Approximation Theory*, 149(1) :30–41, 2007.

[21] AJEM Janssen. Proof of a conjecture on the supports of wigner distributions. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 4(6) :723–726, 1998.

[22] O. Kovrijkine. Some results related to the logvinenko-sereda theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 129(10) :3037–3047, 2001.

[23] H. Lamouchi and S. Omri. Time-frequency localization for the short time fourier transform. *Integral Transforms and Special Functions*, 27(1) :43–54, 2016.

[24] H. Lamouchi and S. Omri. Quantitative uncertainty principles for the short time fourier transform and the radar ambiguity function. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 48(1) :147–161, 2017.

[25] Elliott H Lieb. Integral bounds for radar ambiguity functions and wigner distributions. In *Inequalities*, pages 625–630. Springer, 2002.

[26] F. L. Nazarov. Local estimates for exponential polynomials and their applications to inequalities of the uncertainty principle type. *Algebra i analiz*, 5(4) :3–66, 1993.

[27] J. F. Price. Inequalities and local uncertainty principles. *J. Math. Phys.*, 24 :1711–1714, 1983.

[28] J. F. Price. Sharp local uncertainty inequalities. *Studia Math.*, 85 :37–45, 1987.

[29] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *ACM SIGMOBILE Mobile Computing and Communications Review*, 5(1) :3–55, 2001.

[30] E. Wilczok. New uncertainty principles for the continuous gabor transform and the continuous wavelet transform. *Documenta Mathematica*, 5 :201–226, 2000.

Index