Réseaux Bayésiens Quantiques $\leftrightarrow QBN$

Amara Mohamed Rayan,Siwar Sraieb,Olexender[1]

19 février 2023

1. encadré par Mr Pierre Henri Willemin

Table des matières

Introduction

Nous parleront ici des $r$eseaux bayesiens quantiques mais pour celà nous devons definir quesqu'un reseau bayesien , dans quelle mesure peut on parler de quantique pour enfin definir les reseaux bayesiens quantiques

1 Réseaux Bayésiens

Dans la vie de tous les jours, vous devez souvent prendre des décisions sous incertitudes. Par exemple, avez-vous intérêt à remplir le réservoir d'essence de votre voiture ou bien à acheter un billet de train ou d'avion tout de suite ou serait-il plus judicieux d'attendre un peu que les prix baissent ? Faut-il investir en bourse maintenant ou non ? Afin de prendre les bonnes décisions dans ce type de situation, il est impératif de bien en mesurer les risques, ce qui revient à bien estimer les incertitudes sur toutes les conséquences possibles de ces décisions.

Depuis leur introduction par Judea Pearl en 1988, les réseaux bayésiens sont devenus un outil extrêmement populaire en intelligence artificielle pour modéliser ces incertitudes et pour les exploiter dans la prise de décision. Plus précisément, ils permettent de représenter de manière très compacte sur ordinateur des probabilités et ils fournissent les clefs pour calculer efficacement celles utiles à la prise de décision.

1.1 Définition

En informatique et en statistique, un réseau bayésien est un modèle graphique probabiliste représentant un ensemble de variables aléatoires sous la forme d'un graphe orienté acyclique. Intuitivement, un réseau bayésien est à la fois :

1. un modèle de représentation des connaissances ;
2. une « machine à calculer » des probabilités conditionnelles
3. une base pour des systèmes d'aide à la décision1

Pour un domaine donné (par exemple médical1), on décrit les relations causales entre variables d'intérêt par un graphe. Dans ce graphe, les relations de cause à effet entre les variables ne sont pas déterministes, mais probabilisées. Ainsi, l'observation d'une cause ou de plusieurs causes n'entraîne pas systématiquement l'effet ou les effets qui en dépendent, mais modifie seulement la probabilité de les observer.

L'intérêt particulier des réseaux bayésiens est de tenir compte simultanément de connaissances a priori d'experts (dans le graphe) et de l'expérience contenue dans les données.

Les réseaux bayésiens sont surtout utilisés pour le diagnostic (médical et industriel), l'analyse de risques, la détection des spams et le data mining

Intuition

Un exemple dans la modélisation des risques

Un opérateur travaillant sur une machine risque de se blesser s'il l'utilise mal. Ce risque dépend de l'expérience de l'opérateur et de la complexité de la machine. « Expérience » et « Complexité » sont deux facteurs déterminants de ce risque (fig. 1).

Bien sûr, ces facteurs ne permettent pas de créer un modèle déterministe. Quand bien même l'opérateur serait expérimenté et la machine simple, un accident reste possible. D'autres facteurs peuvent jouer : l'opérateur peut être fatigué, dérangé, etc. La survenance du risque est toujours aléatoire, mais la probabilité de survenance dépend des facteurs identifiés.

Définition formelle

Loi de probabilité jointe

Il existe plusieurs façons de définir un réseau bayésien. La plus simple exprime la loi de probabilité jointe sur l'ensemble des variables aléatoires modélisées dans le réseau. Un réseau bayésien est un graphe orienté acyclique G = (V, E) avec V l'ensemble des nœuds du réseau et E l'ensemble des arcs. À chaque nœud x appartenant à V du graphe est associé la distribution de probabilité conditionnelle suivante :

$\mathrm{P}(\mathrm{x} \mid \mathrm{pa}(\mathrm{x}))$ où pa(x) représente les parents immédiats de x dans V L'ensemble V est donc un ensemble discret de variables aléatoires. Chaque nœud de V est conditionnellement indépendant de ses non-descendants, étant donné ses parents immédiats. Il est ainsi possible de factoriser les distributions de probabilité conditionnelles sur l'ensemble des variables en en faisant le produit : /par Ce résultat est parfois noté JPD, pour distribution de probabilité jointe. Cette définition peut être retrouvée dans l'article Bayesian Networks : A Model of Self-Activated Memory for Evidential Reasoning, où Judea Pearl introduit le terme « réseau bayésien »4.

Dans l'exemple donné figure 1, la probabilité jointe est égale à :

1.2 Inférence

L'inférence dans un réseau bayésien est le calcul des probabilités a posteriori dans le réseau, étant donné des nouvelles informations observées. Il s'agit d'un problème de calcul car, grâce aux opérations sur les probabilités et au théorème de Bayes, toutes les probabilités a posteriori possibles dans un réseau peuvent être calculées9. Ainsi, étant donné un ensemble d'évidences (de variables instanciées) Y, le problème de l'inférence dans G=(V, E) est de calculer

Si Y est vide (aucune évidence), cela revient à calculer P(X). Intuitivement, il s'agit de répondre à une question de probabilité sur le réseau.

Bien que le problème d'inférence dépende de la complexité du réseau (plus la topologie du réseau est simple, plus l'inférence est facile), il a été montré par G. F. Cooper en 1987 que dans le cas général, il s'agit d'un problème NP-difficile. Par ailleurs, Dagum et Luby ont également montré en 1993 que trouver une approximation d'un problème d'inférence dans un réseau bayésien est également NP-difficile. À la suite de ces résultats, deux grandes catégories d'algorithmes d'inférence viennent naturellement : les algorithmes d'inférence exacte, qui calculent les probabilités a posteriori généralement en temps exponentiel, et les heuristiques qui fournissent plutôt une approximation des distributions a posteriori, mais avec une complexité computationnelle moindre12. Plus rigoureusement, les algorithmes d'inférence exacte fournissent un résultat et la preuve que le résultat est exact, tandis que les heuristiques fournissent un résultat sans preuve de sa qualité (c'est-à-dire que selon les instances, une heuristique peut aussi bien trouver la solution exacte qu'une approximation très grossière).

La classification du problème d'inférence comme NP-difficile est donc un résultat primordial. Pour établir sa preuve, Cooper considère le problème général P(X=x)>0 : la probabilité que la variable X prenne la valeur x est-elle supérieure à zéro dans un réseau bayésien ? Il s'agit d'un problème de décision (la réponse est oui ou non). Cooper montre tout d'abord que si le problème P(X=x)>0 est NP-complet, alors P(X=x) est NP-difficile, et donc le problème de l'inférence dans les réseaux bayésiens est NP-difficile. Pour prouver la NP-complétude de P(X=x)>0, il réduit polynomialement le problème 3-SAT (un problème NP-complet classique) au problème P(X=x)>0 : premièrement, il montre que la construction d'un réseau bayésien à partir d'une instance de 3-SAT, notée C, peut être faite avec une complexité polynomiale ; ensuite, il montre que C est satisfaite si et seulement si P(X=x)>0 est vrai. Il en résulte que P(X=x)>0 est NP-complet.

2 Probabilité Quantique

Cet article vise à introduire la théorie des probabilités quantiques. Il est rédigé dans l'optique d'être lisible pour un lecteur ayant des connaissances de base sur les espaces de Hilbert. À vrai dire, j'apprends cette théorie en ce moment, et en quelque sorte ce sont mes notes personnelles sur le sujet. Pour cette raison, il est susceptible d'être modifié à tout moment.

2.1 Loi de probabilité quantique

L'expression de l'espérance du résultat de la mesure de A lorsque le système est dans l'état | : E(A)=,A(),

montre clairement qu'elle est linéaire en A, à l'instar d'une espérance en probabilités classiques.

Si on applique cette formule au projecteur Pk=PVk (avec les notations de l'encadré sur le principe de Born), qui est un opérateur auto-adjoint, on trouve (du fait que P=P2 lorsque P est un projecteur) E(Pk)=Pk|2, la probabilité que "A se réalise en k" dans le principe de Born.

Cela suggère de considérer que le sous-espace Vk est un événement qui se confond avec l'événement "A se réalise en k", et que le projecteur sur un sous-espace est l'analogue de l'indicatrice d'un événement : Pr(A se réalise en k)=Pr(Vk)=E(Pk).

Oublions maintenant le principe de Born et montrons comment on peut le retrouver, concernant ses deux premiers points, lorsqu'on part de () comme principe. Si l'on considère E(A) comme l'analogue de l'espérance de la variable aléatoire A (lorsque le système est dans l'état quantique |), alors suivant cette analogie on définit la transformée de Fourier de A comme la fonction de la variable tR E(eitA)=,eitA

L'opérateur eitA est toujours bien défini lorsque A est auto-adjoint et il est lui-même auto-adjoint. On peut alors vérifier que (voir Meyer, 1995) ,eitA=keitkPk|2 et ceci est exactement la transformée de Fourier de la loi donnée dans le principe de Born, celle qui assigne la probabilité Pk|2 à k.

2.2 Variables aléatoires non-commutatives

Si on effectue deux mesures successives, la probabilité du résultat obtenu dépend généralement de l'ordre dans lequel les mesures sont effectuées, du fait que le système change d'état après une mesure.

En effet, considérons deux observables A et B et leur décomposition spectrale : AB=1P1++rPr,=1Q1++sQs.

Soit l'état du système. La mesure de A révèle k avec probabilité Pk2, et dans ce cas l'état de système saute en Pk/Pk. Si on effectue ensuite la mesure de B il faut appliquer le principe de Born à l'état courant du système. On obtient :

Pr(A révèle k puis B révèle l)=Pk2QlPk2Pk2=QlPk2.

De même, lorsqu'on mesure d'abord B, on obtient :

Pr(B révèle l puis A révèle k)=PkQl2.

On obtient la même probabilité lorsque Pk et Ql commutent. Ceci est le cas lorsque A et B commutent. En effet, le théorème de décomposition spectrale implique que pour toute fonction polynomiale g, on a

g(A)=g(1)P1++g(r)Pr,

et par conséquent Pk est une fonction polynomiale de A. De même, Ql est une fonction polynomiale de B, et donc Pk et Ql commutent si A et B commutent.

3 Réseaux Bayésiens Quantique

Merci de faire abstraction du contenu tout ceci a juste eté fait pour le squelette du document

Conclusion

en conclusion j'aimerai s raconter une petite anecdote assez philosophique sur l'ethique de notre sujet
un ami à moi m'a demandé ce que c'etait un reseaux bayesiens jlui ait expliqué vulguairement sque cetait et notament le rapport avec l'aide à la decision ce à quoi il a repondu que c'etait nulle car on ne deviens plus soi meme. vous qui avez regarder cette presentation etes vous d'accord avec lui et sinon que pourrais vous lui repondre
personellement j'ai dit que ce qu'il affirmait n'avait pas de sens car c'est pas qu'on ne deviens plus soit meme c'est juste qu'on devient *LA* meilleure version de soi meme car en effet

> *nous ne faisons aucun choix c'est nos choix qui font de nous ce qu'on est*

et aprés tout ; celà ne nuit en rien à notre liberte car le choix d'y faire appel reste le notre
sur ce on vous remercie de votre attention et esperions avoir eté assez convaiquants

A Annexe 1

Anexe 1

B Annexe 2

Anexe 2