

第十二讲 立体几何与特殊几何问题

🔗 立体几何之表面积：

相关公式在第 11 讲

例题 1（2022 国考）

一个圆柱体零件的高为 1，其圆形底面上的内接正方形边长正好也为 1。现将圆柱体零件切割 4 次，得到棱长为 1 的正方体，则切去部分的总表面积为多少？

- A. $\sqrt{2}(\pi + 2)$ B. $2\sqrt{2}(\pi - 2)$
C. $(\sqrt{2} + 1)\pi + 2$ D. $2\sqrt{2}\pi - 2$

【参考答案】C

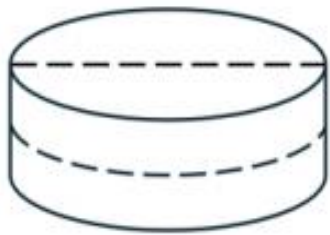
【实战解析】



总表面积=2 个圆形-2 个正方形+圆柱侧面+4 个正方形，其中圆形的直径= $\sqrt{2}$ ，面积= $\frac{\pi}{2}$ ，周长= $\sqrt{2}\pi$ ，则圆柱侧面积= $\sqrt{2}\pi$ ；正方形边长为 1，面积=1；所以总面积= $\pi - 2 + \sqrt{2}\pi + 4 = (\sqrt{2} + 1)\pi + 2$ ， 答案为 C 选项。

例题 2（2024 福建）

一个白色圆柱体零件的底面半径是高的 1.5 倍，现将其表面涂上黑漆之后，沿下图所示虚线方向切割为 4 个完全相同的部分。问单个部分的黑色面积是白色面积的多少倍？（ $\pi \approx 3.14$ ）



- A. 不到 1.1 倍 B. 1.1~1.2 倍之间
C. 1.2~1.3 倍之间 D. 1.3 倍以上

【参考答案】B

【实战解析】

将零件的半径设为 3，则圆柱体的高为 2.

黑色面积：白色面积=（半圆+半个侧面）：（半圆+矩形），注：此处不能直接约去半圆。

$$\left(\frac{9\pi}{2} + 3\pi\right) : \left(\frac{9\pi}{2} + 6\right) = 7.5\pi : (4.5\pi + 6) = 15.7 : 13.4 > 1.1$$

答案为 B 选项。

🔑立体几何之体积：

相关公式在第 11 讲

例题 3（2021 辽宁）

如下图 1 所示，在一个金字塔造型（底面为正方形，侧面为四个全等的等腰三角形）的铸造件内部挖空一个圆柱。现沿铸造件顶点 A 且垂直底面的方向切开，切开后的截面如下图 2 所示，已知 DE、GF 为圆柱的高， $BC=4\sqrt{2}$ 分米， $DE=2$ 分米， $AO=4$ 分米，那么挖后铸造件的体积是多少？

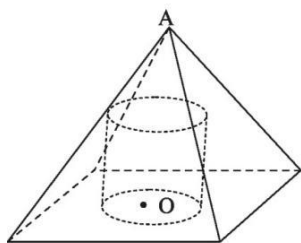


图1

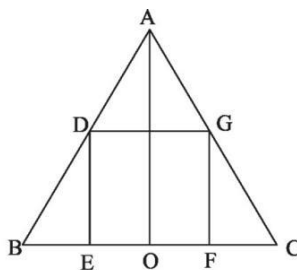


图2

A. $128 - 4\pi$ 立方分米

B. $\frac{128}{3} - 4\pi$ 立方分米

C. $\frac{64}{3} - 4\pi$ 立方分米

D. $64 - 4\pi$ 立方分米

【参考答案】B

【实战解析】



根据侧视图可知切割是沿着平行于底边的方向，而不是沿着对角线切割。

铸造件体积=椎体体积-圆柱体积

椎体体积 $=\frac{\text{底面积} \times \text{高}}{3} = \frac{32 \times 4}{3} = \frac{128}{3}$ ，圆柱体积=底面积 \times 高 $=2\pi \times 2=4\pi$

铸造件体积 $=\frac{128}{3} - 4\pi$ 答案为 B 选项

例题 4 (2023 湖北)

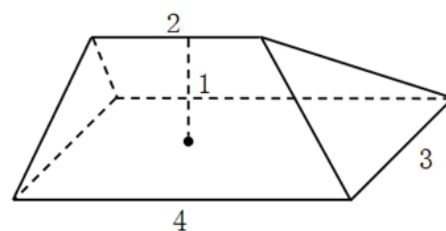
下图所示是一种帐篷屋顶的示意图，底面是一个长 4 米宽 3 米的长方形，屋顶高 1 米，上棱长 2 米且平行于底面，那么该帐篷屋顶的体积是多少？

A. 5 立方米

B. 11 立方米

C. 12 立方米

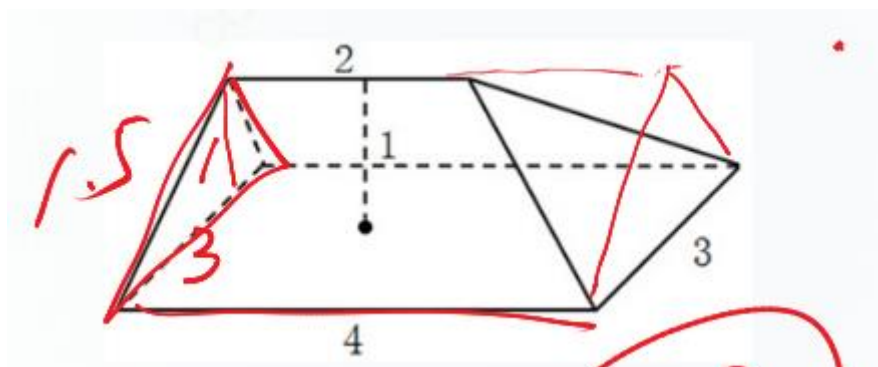
D. 24 立方米



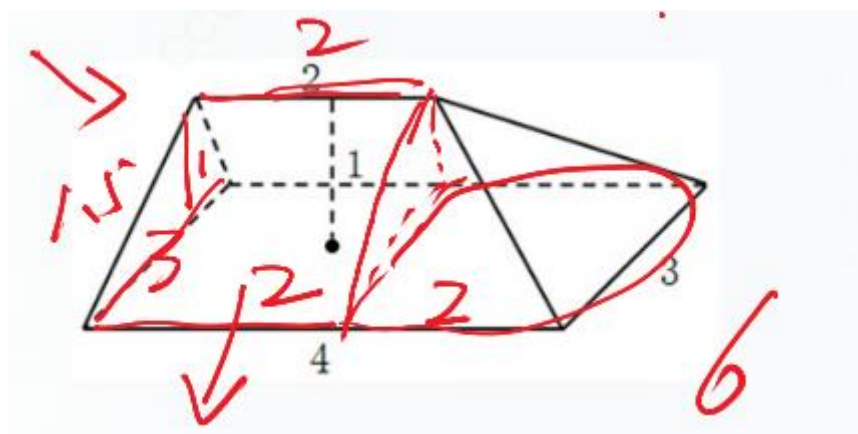
【参考答案】A

【实战解析】

解法一：将屋顶补全后，完整的三棱柱体积=底面积 \times 高 $=\frac{3 \times 1}{2} \times 4 = 6$ ，现在题干挖去一块，则体积 < 6 ，只有 A 选项满足。



解法二：屋顶体积=小三棱柱体积+四棱锥体积= $\frac{3 \times 1}{2} \times 2 + \frac{2 \times 3 \times 1}{3} = 3 + 2 = 5$ ，答案为 A 选项。



🔍 等比放缩：

长度比=1: n

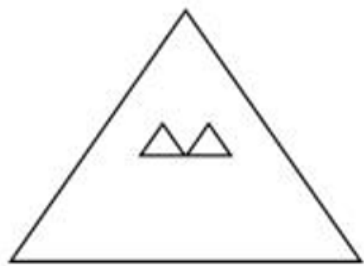
面积比=1: n^2

体积比=1: n^3

例题 5（2020 新疆）

某演播大厅的地面形状是边长为 100 米的正三角形，现要用边长为 2 米的正三角形砖铺满（如图所示）。

问，需要用多少块砖？



- A. 2763 B. 2500
C. 2340 D. 2300

【参考答案】B

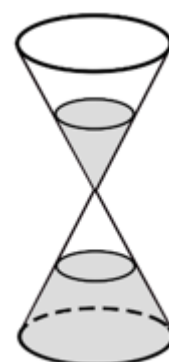
【实战解析】

长度比=1: 50, 面积比=1: 2500, 故需要 2500 块砖, 答案为 B 选项。

例题 6 (2023 安徽)

某餐馆承诺 25 分钟内上齐一桌菜, 若超时则未上的菜品免单。每张餐桌上都有一个装满后正好 25 分钟漏完的圆锥形沙漏 (如下图所示)。某位顾客在等待的过程中发现沙漏内上方沙子的高度为原先的一半, 此时还差一道菜未上, 则再过多久还未上菜, 这位顾客将享受免单服务?

- A. 不到 3 分钟 B. 3~4 分钟之间
C. 4~5 分钟之间 D. 超过 6 分钟



【参考答案】B

【实战解析】

沙漏上方沙子高度与整个沙漏高比为 1: 2, 则剩余圆锥体积: 整个圆锥体积=1: $2^3 = 1: 8$, 整个沙漏需要 25 分钟漏完, 现在还剩下 $\frac{1}{8}$, 所以还需要 $\frac{25}{8} = 3.125$ 分钟, 答案为 B 选项。

例题 7 (2022 安徽)

商家门口摆放了一把正四棱锥形 (底面为正方形, 侧面为四个全等的等腰三角形) 的遮阳伞, 第一次伞撑开到图 1 所示的位置, 伞柄与伞骨成角 $\angle CPQ$ 为 30° , 继续撑开到如图 2 所示的位置, 伞柄与伞骨成角 $\angle C'P'Q'$ 变为 60° , 那么第二次伞撑开后形成的正方形 $A'B'C'D'$ 是第一次撑开后正方形 $ABCD$ 面积的多少倍?

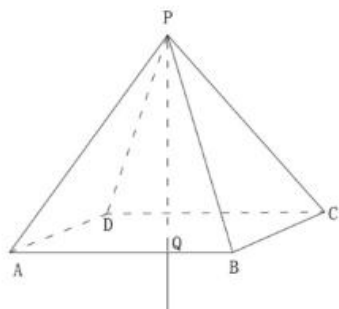


图1

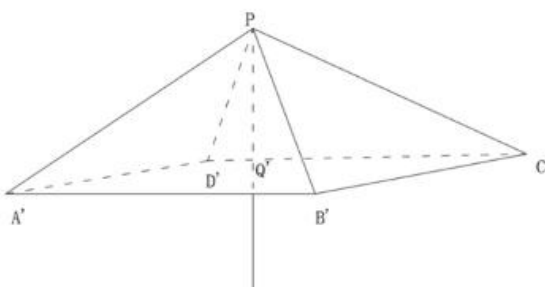


图2

A. $3\sqrt{2}$ 倍

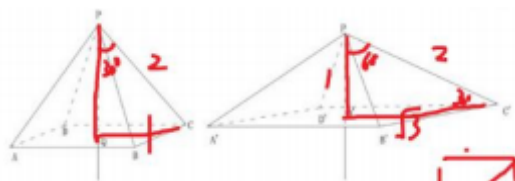
B. $\sqrt{3}$ 倍

C. 2 倍

D. 3 倍

【参考答案】D

【实战解析】



设 $PC=2$ ，当 $\angle CPQ=30^\circ$ 时，根据三角形勾股定理， $CQ=1$ ，当 $\angle CPQ=60^\circ$ 时， $CQ=\sqrt{3}$ ，所以前后边长之比为 $1: \sqrt{3}$ ，则面积之比为 $1: 3$ ，答案为 D 选项。

例题 8（2021 国考）

一个人工湖的湖面上有一个露出水面 3 米的圆锥体人工景观（底面朝下）。如人工湖水深减少 20%，则该景观露出水面部分的体积将增加 $61/64$ 。问原来的人工湖水深为多少米？

A. 3.5

B. 3.75

C. 4.25

D. 4.5

【参考答案】B

【实战解析】

增加 $\frac{61}{64}$ ，则前后圆锥体积之比为 $1: \frac{125}{64}$ ，所以前后圆锥高之比为 $1: \frac{5}{4}$ ，之前圆锥高为 3m，则现在圆锥高增

加了 $3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}m$ ，所以人工湖原先深度 $= \frac{3}{4} \div 20\% = 0.75 \times 5 = 3.75m$ ，答案为 B 选项。

📌几何最值：

矩形的周长一定，正方形面积最大

矩形的面积一定，正方形的周长最短

面积一定，越接近球，体积越大

体积一定，越接近球，面积越小

例题 9（2024 联考）

某公园绿化管理部门采购 100 片围栏，每片长 1 米且不可弯折。现拆分拟围成 5 块周长相等且互不相邻的矩形花卉区域。若不考虑拼接间隙，那么这 5 块区域的最大与最小面积最多可相差多少平方米？

- A. 10
B. 12
C. 16
D. 25

【参考答案】C

【实战解析】

100 片围栏分成平均五块，则每块 20 片围栏，周长相同，越接近正方形，面积越大，否则面积越小。

则最大面积对应边长为 5 的正方形，面积=25

最小面积对应边长为 1 和 9 的矩形，面积=9，所以面积差=25-9=16，答案为 C 选项。

例题 10（2023 安徽）

某村拟建造一个容积为 144 立方米，深度为 4 米的长方体无盖蓄水池。为节约成本，侧面积最小为多少平方米？

- A. 24
B. 36
C. 96
D. 132

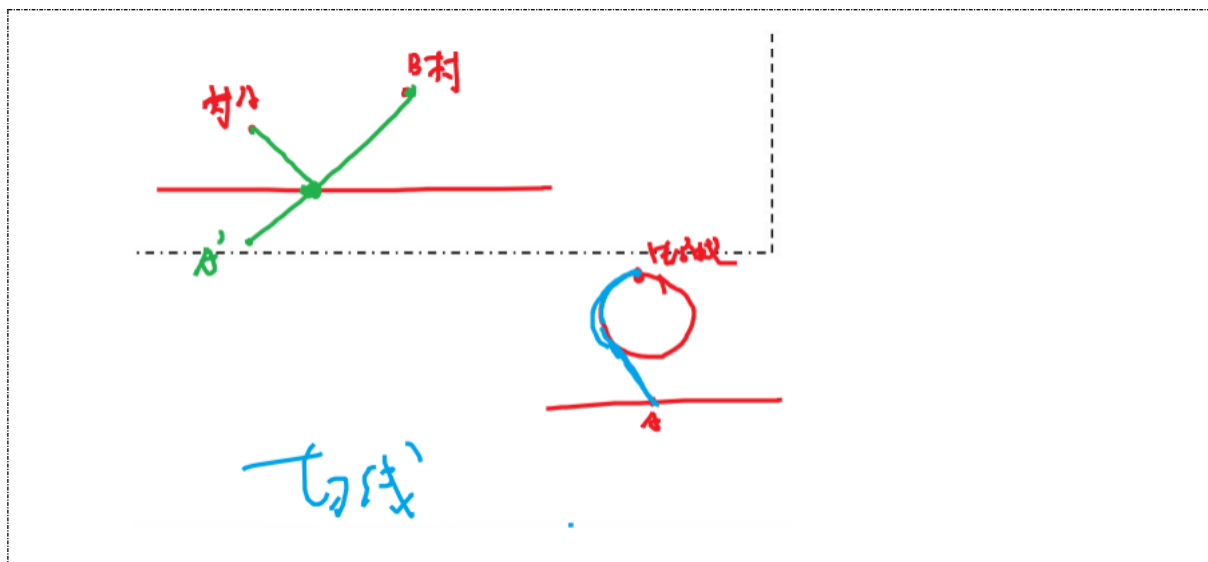
【参考答案】C

【实战解析】

体积=144，深度为 4，则底面积= $\frac{144}{4}=36$ 平方米，侧面积最小，则对应底面周长最短，根据面积相同时，越

接近正方形周长越短推知，底面应为正方形，且边长为 6m，则侧面积= $6 \times 4 \times 4=96$ 平方米，答案为 C 选项。

例题 11（2018 四川）



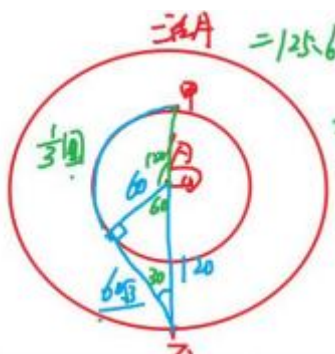
例题 12 (2023 北京)

一个半径为 120 米的圆形人工湖正中有一个半径为 60 米的圆形人工岛。甲从岛的正北岸边出发，以 1 米/秒的速度匀速划船前往湖的正南岸边，则最少需要多长时间？

- A. 不到 3 分 45 秒
- B. 3 分 45 秒~4 分之间
- C. 4 分~4 分 15 秒之间
- D. 超过 4 分 15 秒

【参考答案】B

【实战解析】



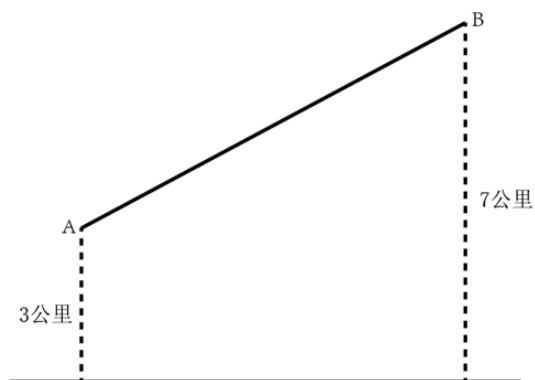
过乙作圆的切线可得图中所示直角三角形，且知斜边=120m，一直角边=60m，可推知直角三角形为 30° ， 60° 直角三角形，则甲沿圆形人工岛走过了 120° ，对应长度 $=120\pi \times \frac{1}{3} = 40\pi$ m，接着走了一个切线长度 $=60\sqrt{3}$ m，

时间 $= \frac{40\pi + 60\sqrt{3}}{1} > 40 \times 3.1 + 60 \times 1.7 = 124 + 102 = 226 = 180 + 46 = 3 \text{ 分钟} + 46 \text{ 秒}$ ，答案为 B 选项

例题 13 (2023 湖北)

A、B 两村在一条笔直公路的同侧，到公路的垂直距离分别是 3 公里和 7 公里，两村相距 8.5 公里，现

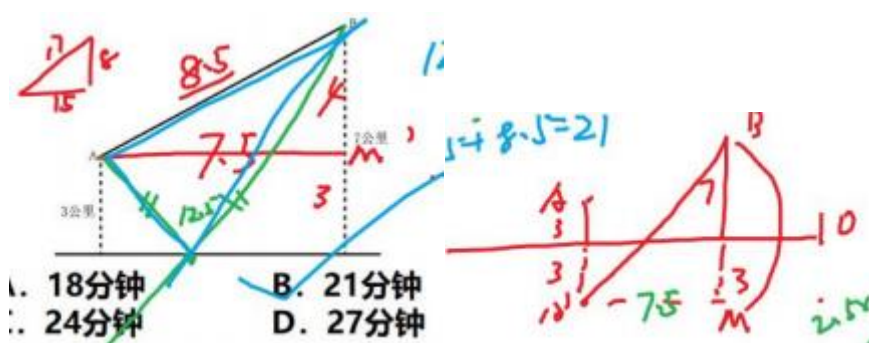
需在公路边建一个物资集散中心，为节约物资配送成本，集散中心到两个村的直线路程之和应尽可能小，若货车的速度约为 60 公里/小时，那么货车从集散中心出发，到两村送货后返回中心，路途所花费的最少时间为多少？



- A. 18 分钟 B. 21 分钟
C. 24 分钟 D. 27 分钟

【参考答案】B

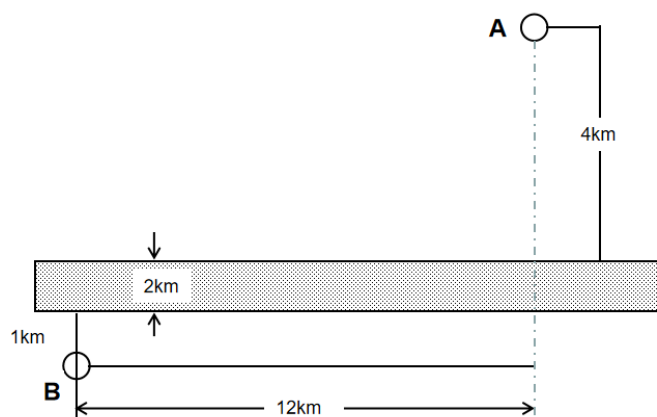
【实战解析】



$AB=8.5\text{KM}$, $BM'=4\text{KM}$, 根据勾股数 8 15 17 可求得 $AM'=7.5\text{KM}$, $BM=7+3=10\text{KM}$, $A'M=AM'=7.5\text{KM}$, 所以根据勾股数 3 4 5, $A'B=12.5\text{km}$, 则时间 $=\frac{12.5+8.5}{60} \times 60 = 21$ 分钟, 答案为 B 选项。

例题 14 (2022 安徽)

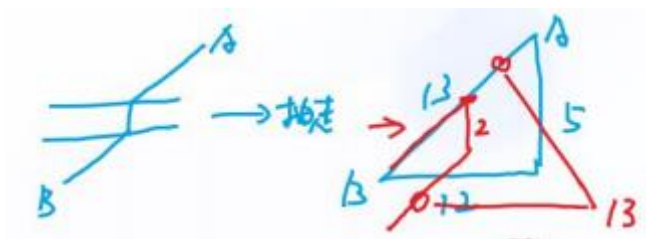
A、B 两个乡镇分布于山谷两侧，山谷间有一条宽为 2km 的河道（如下图所示）。当地政府决定在两个乡镇间修建一条跨河公路促进旅游发展。由于架桥费用高昂，所以要求跨河公路中的桥梁路段长度最短。那么根据图中数据，从 A 镇前往 B 镇的最短距离为多少？



- A. 17km
B. 15km
C. 19km
D. 20km

【参考答案】B

【实战解析】



先将河道抽掉，将 B 上移，再把河道放回来，将 B 下移

将河道抽离后，根据勾股数 5 12 13 可求得 $AB=13\text{KM}$ ，再将河道（2km）放回来，则总长度 $=13+2=15\text{km}$ ，答案为 B 选项。