

## 内容回顾：

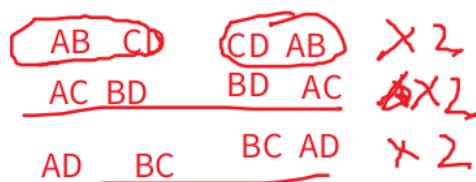
问题类型	解题方法	
相邻问题	捆绑法	总元素变化+ 内部排序
不相邻问题	插空法	
定序问题/无序问题		$A_m^m / A_n^n$
相同元素分配	插板法	“至少一个” 先给或先借!
平均分堆!		
环形排序	n个元素环形排序	$A_{n-1}^{n-1}$
重复排序	互不干扰	电话号的后两位/密码
错位排序	1 2 3 4 5个元素的错位排序 0 1 2 9 44	

## 第十七讲 特殊情境之平均分堆与特殊概率问题

◆ 平均分堆：需去除人为排序

4个人平均分两组 ABCD

C42C22



需要在  $C_4^2 C_2^2$  的基础上除掉顺序 ( $A_2^2$ )

5个人 分成221

$$\frac{C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1}{A_2^2}$$

九个人，分成 32211

9个人

$$\frac{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{1}}{A_2^2 \cdot A_2^2} \cdot C_9^3 \cdot C_6^2 \cdot C_4^1 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1$$

20 个人，分成 4433222

$$\cancel{4} \cancel{4} \cancel{3} \cancel{3} \cancel{2} \cancel{2} \cancel{2}$$

$$\frac{C_{20}^4 \cdot C_{16}^4 \cdot C_{12}^3 \cdot C_9^3 \cdot C_6^2 \cdot C_4^1 \cdot C_2^1}{A_2^2 \cdot A_2^2 \cdot A_3^3}$$

例题 1 (2015 四川)

将 10 名运动员平均分成两组进行对抗赛，问有多少种不同的分法？

- A. 120                              B. 126  
C. 240                              D. 252

【答案】B

【解析】先挑出来一组，再除掉排序： $\frac{C_{10}^5}{A_2^2} = \frac{\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}}{2} = 126$

例题 2 (2018 浙江)

某班共有 8 名战士，现在从中挑出 4 人平均分成两个战斗小组分别参加射击和格斗考核，问共有多少

种不同的方案?

- A. 210                      B. 420  
C. 630                      D. 840

【答案】B

【解析】

射击和格斗考核，问共有多少种不同的方案?

A. 210

C. 630

射击格斗

$$C_8^4 C_4^2 C_2^2$$
$$= 420$$

B. 420

D. 840

$$C_8^4 \cdot \frac{C_4^2 C_2^2}{A_2^2} \cdot A_2^2$$
$$= 420$$

射击 格斗

$$C_8^2 C_6^2$$
$$= 420.$$

方法一：先选出来四个人，然后选出来两人射击，剩下的两人格斗

方法二：先选出来四个人，然后平均分堆，然后安排射击和格斗

方法三：直接从 8 人中选出来两个人射击，再选出来两个人格斗

题型拓展

4个人平均分两组 去甲乙两地

$$\frac{C_4^2 C_2^2}{A_2^2} - A_2^2 = C_4^2$$

4个人平均分两组 打羽毛球

$$\frac{C_4^2}{A_2^2}$$
$$C_4^2$$

4个人平均分两组完成A B 工作

10个人分两组去参加拔河

$$C_{10}^5 / A_2^2$$

例题 3 (2021 上海)

安排 4 名护士护理 3 个病房，每个病房至少一名护士，每名护士固定护理一个病房，则共有多少种安排方法？

- A. 24      B. 36  
C. 48      D. 72

【答案】B

【解析】先从 4 个人里挑两个人组成一组，然后另外两个人各自成一组，这三组再分到三个病房

1. 24      2. 48      3.  $\textcircled{2}, \textcircled{1}, \textcircled{1}$       4.  $\checkmark$

$C_4^2 \cdot A_3^3$

$= \frac{4 \times 3}{2} \times 3 \times 2 = 36$

❶二人同组：只需考虑第二人的位置即可

例题 4 (2018 联考)

某单位工会组织桥牌比赛，共有 8 人报名，随机组成 4 队，每队 2 人。那么，小王和小李恰好被分在同一队的概率是多少？

A.  $\frac{1}{7}$

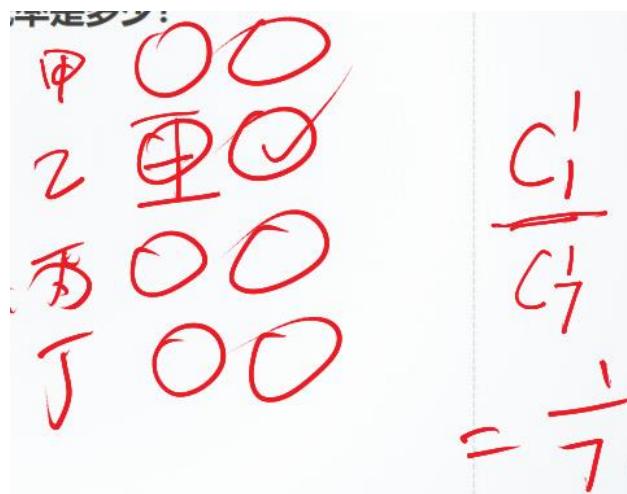
B.  $\frac{1}{14}$

C.  $\frac{1}{21}$

D.  $\frac{1}{28}$

【答案】A

【解析】先给小王安排一个位置，然后再安排小李的位置，在小李能选择的 7 个位置中，只有一个位置和小王同一队



### 例题 5 (2019 联考)

某学校举行迎新篝火晚会，100 名新生随机围坐在篝火四周。其中，小张与小李是同桌，他俩坐在一起的概率为多少？

A.  $\frac{2}{97}$

B.  $\frac{2}{98}$

C.  $\frac{2}{99}$

D.  $\frac{2}{100}$

【答案】C

【解析】先给小张安排座位，然后再安排小李的位置，在小李能选择的 99 个座位中，只有两个位置和小张相邻

围坐在篝火四周。其中，  
多少？

$$\frac{2}{99}$$

Diagram showing two triangles and two circles. The triangles are labeled  $C_1$  and  $C_2$ , and the circles are labeled  $C_{99}$ .

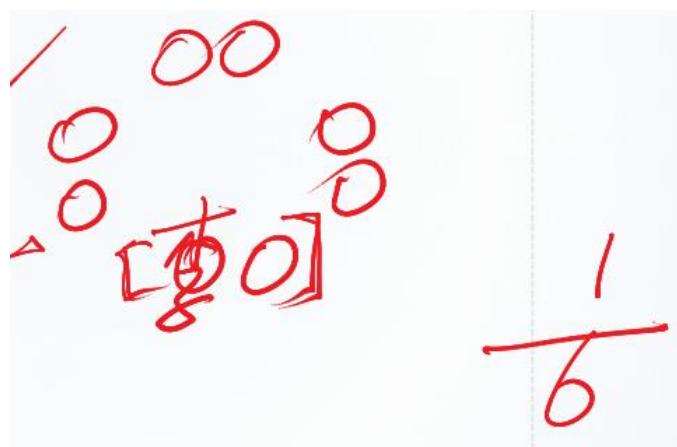
### 例题 6 (2021 江苏)

某次圆桌会议共设 8 个座位，有 4 个部门参加，每个部门 2 人，排座位时，要求同一部门的两人相邻，若小李和小王代表不同部门参加会议，则他们座位相邻的概率是多少？

- A.  $\frac{1}{48}$       B.  $\frac{1}{24}$   
C.  $\frac{1}{12}$       D.  $\frac{1}{6}$

【答案】D

【解析】先给小李安排座位，然后再安排小王，在小王能选择的 6 个座位中，只有一个座位和小李相邻



### 例题 7 (2021 江苏)

某市举办足球邀请赛，共有 9 个球队报名参加，其中包含上届比赛的前 3 名球队。现将这 9 个球队通过抽签的方式平均分成 3 组进行单循环比赛，则上届比赛的前 3 名球队被分在同一组的概率是？

- A.  $\frac{1}{21}$       B.  $\frac{1}{28}$

C.  $\frac{1}{63}$

D.  $\frac{1}{84}$

【答案】B

【解析】假设上届比赛的前三名为甲乙丙，先给甲找一个位置，再安排乙丙的位置：乙丙在剩余的八个位置中选择两个，其中只有和甲在同一组（剩余两个位置中选择两个）选择符合题意

$$\frac{C_2^2}{C_8^2} = \frac{1}{28}$$

### 例题 8 (2024 浙江)

某公司组织面试，每位考生都要回答甲、乙、丙、丁、戊 5 道试题，作答顺序随机安排。已知小张第二题是甲题、第四题是丁题，小王第三题是乙题，那么两人作答顺序完全相同的概率是多少？

A.  $\frac{1}{72}$

B.  $\frac{1}{48}$

C.  $\frac{1}{36}$

D.  $\frac{1}{24}$

【答案】A

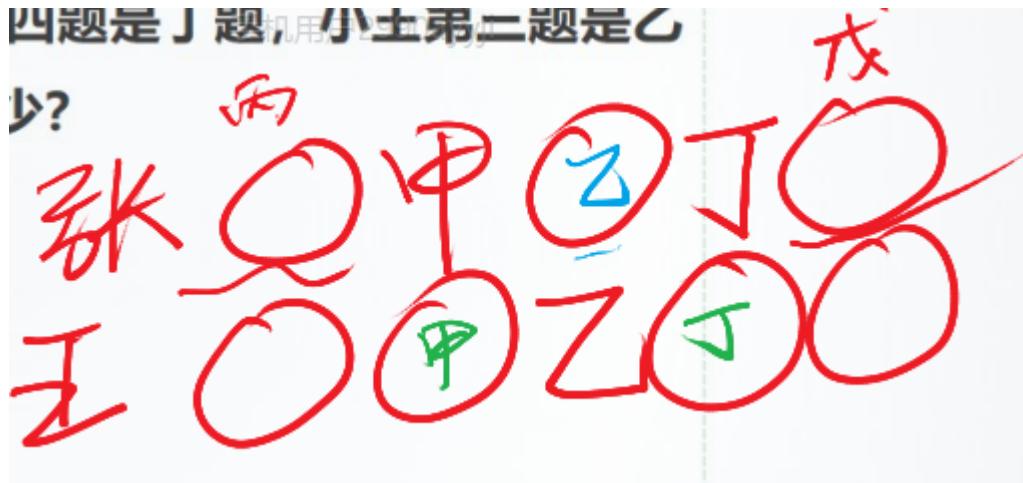
【解析】

第一步：小张的第三题是乙的概率（剩余三个题目中选择乙）

第二步：小王的第二四题为甲和丁的概率（剩余四个题目按顺序排好只有一种情况符合）

第三步：让小张剩余的一五题任意排序，然后让小王和小张顺序一样

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{A_4^2} \times \frac{1}{A_2^2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4 \times 3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{72}$$



(张第3题)(王2.4题)

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{\binom{4}{2}} \times \frac{1}{\binom{3}{2}} \quad \text{1.5题 (让王和张一样)}$$

### 例题 9 (2019 国考)

小张和小王在同一个学校读研究生，每天早上从宿舍到学校有 6:40、7:00、7:20 和 7:40 发车的 4 班校车。某星期周一到周三，小张和小王都坐班车去学校，且每个人在 3 天中乘坐的班车发车时间都不同。问这 3 天小张和小王每天都乘坐同一趟班车的概率在？

- A. 3%以下
- B. 3%~4%之间
- C. 4%~5%之间
- D. 5%以上

【答案】C

【解析】

第一天：小张任选一辆校车，小王在四辆校车中有一辆和小张一样

第二天：小张再从三辆里任选一辆，小王在三辆中有一辆和小张一样

第三天：小张再从两辆里任选一辆，小王在两辆中选择一辆和小张一样

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{20} > \frac{1}{24} > \frac{1}{25}$$

$$0.05 > \frac{1}{24} > 0.04$$

比赛模型：

如果赢一场概率 0.7，输一场概率 0.3，输的那一场应该在前三场

3:1      000P  
输的三场找位置

C

$C_3^1 \times 0.3 \times 0.7^3$  ~~×0.3~~

如果输两场的话，输的两场应该在前四场

3:2  
0000P  
 $C_4^2 \times 0.3 \times 0.3 \times 0.7 \times 0.7$  ~~×0.7~~  
K K

#### 例题 10（2020 安徽事业单位）

某场羽毛球单打比赛采取三局两胜制。假设甲选手在每局都有 80% 的概率赢乙选手，那么这场单打比赛甲有多大概率战胜乙选手？

- A. 0.768
- B. 0.800
- C. 0.896
- D. 0.924

【答案】C

【解析】分情况讨论

第一种情况：2: 0     $0.8 \times 0.8 = 0.64$

第二种情况：2: 1，输的那一场一定在前两场， $C_2^1 \times 0.2 \times 0.8 \times 0.8 = 0.64 \times 0.4$

总概率 =  $0.64 + 0.64 \times 0.4 = 0.64 \times 1.4$ ，根据尾数为 6，答案为 C 选项。

96

D. 0.924

$$2=0 \\ 0.8 \times 0.8 +$$

$$Z=1 \quad DVU \\ C_2^1 \cdot 0.2 \cdot 0.8^2 \\ 0.64 \times (1+0.4) \\ 1.4$$



### 例题 11 (2014 年浙江省考)

两支篮球队打一个系列赛，三场两胜制，第一场和第三场在甲队的主场，第二场在乙队的主场。已知甲队主场赢球概率为 0.7，客场赢球概率为 0.5。问甲队赢得这个系列赛的概率为多少？

- A. 0.3                            B. 0.595  
 C. 0.7                            D. 0.795

**【答案】C**

**【解析】分情况讨论**

第一种情况：甲连赢两场， $0.7 \times 0.5$

第二种情况：甲赢一三，输第二场， $0.7 \times 0.5 \times 0.7$

第三种情况：甲赢二三场，输第一场， $0.3 \times 0.5 \times 0.7$

总概率：三种情况相加= $0.35+0.35(0.3+0.7)=0.7$

D. 0.795

$\checkmark \checkmark$ 
 $\cancel{\checkmark} \cancel{x}$ 
 $\checkmark$ 
 $\cancel{x} \checkmark \checkmark$

$$\underline{0.7 \times 0.5 \times 0.7 + 0.3 \times 0.5 \times 0.7}$$

$$0.35 \times 1 = 0.35$$

### 例题 12 (2021 福建事业单位)

某场乒乓球单打比赛采取 5 局 3 胜制。假设甲选手在每局都有 70% 的概率赢乙选手，若要打满 5 局，那么这场单打比赛甲有多大概率战胜乙选手？

- A. 0.031      B. 0.103  
C. 0.185      D. 0.343

【答案】C

【解析】因为要打满五局，所以输的两场在前四场  $C_4^2$

$$\text{概率} = C_4^2 \times 0.3 \times 0.3 \times 0.7 \times 0.7 \times 0.7 = 6 \times 0.09 \times 0.343 = 0.54 \times 0.343 > 0.5 \times 0.343 = 0.172$$

答案为 C 选项。

Handwritten work showing the calculation for Example 12. It starts with the formula  $C_4^2 \times 0.3^2 \times 0.7^3$ , then multiplies by  $6 \times 0.09$  (circled) and  $0.343$ . The result is circled and labeled  $0.54$  at the bottom. To the right, it shows  $3:2$  followed by four zeros and a decimal point, with a red mark over the decimal point. Below this, the result  $0.171$  is written with a red underline.

### 例题 13 (2023 湖北选调)

某市职工篮球赛甲、乙两队决赛，采取 7 场 4 胜制（先赢 4 场者胜，每场没有平局）。若两队水平相当，现在已经比了 3 场，甲赢了 2 场，乙赢了 1 场。问甲获得最后胜利的概率有多少？

- A.  $\frac{2}{3}$       B.  $\frac{3}{4}$   
C.  $\frac{5}{8}$       D.  $\frac{11}{16}$

【答案】D

【解析】甲再赢两场就可以了

第一种情况：甲连赢两场  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

第二种情况：甲输一场，则需要在两场中选择一场输  $C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3$

第三种情况：甲输两场，则需要在三场中选择两场输  $C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$$\text{概率} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$$

比了3场，甲赢了2场，乙赢了1场。

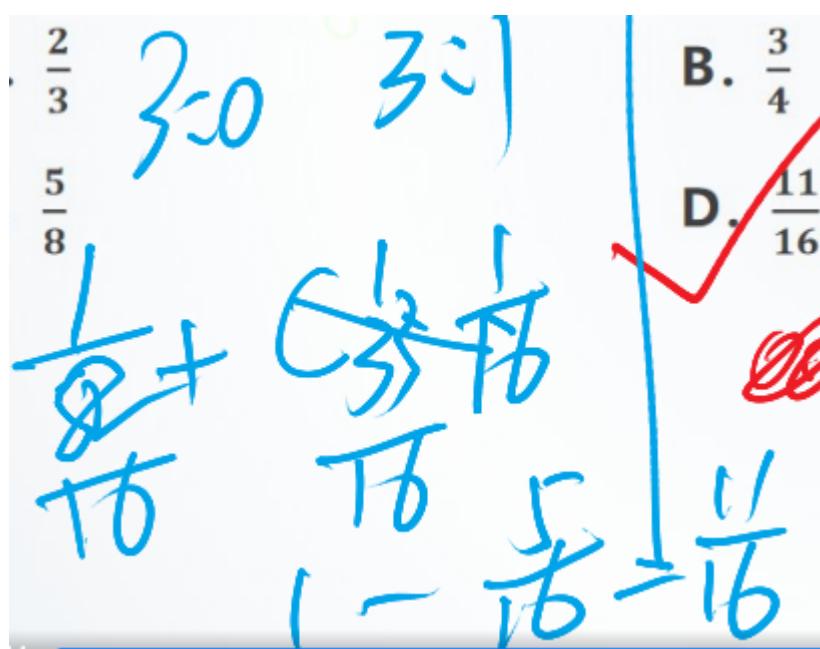
$$\begin{array}{c} \cancel{000} \quad \underline{000} \quad \cancel{\underline{000}} \\ \cancel{2=0} \quad \cancel{2=1} \quad \cancel{2=2} \\ \cancel{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} \quad C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ = \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{3}{16}} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16} \end{array}$$

反向思考：1-乙赢的概率，乙赢分两种情况

第一种情况：乙连赢三场， $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

第二种情况：乙输一场， $C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{16}$

甲赢的概率 $= 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$



### 例题 14 (2024 四川)

甲和乙进行乒乓球比赛。第一局甲胜乙的概率为 70%。往后每局如甲上局取胜，则当局甲的胜率为 50%；如乙上局取胜，则当局甲的胜率为 70%。问第三局甲取胜的概率在以下哪个范围内？

- A. 不到 55%
- B. 在 55%~57%之间
- C. 在 57%~59%之间
- D. 高于 59%

【答案】C

【解析】分情况讨论

第一种情况：甲在前两局都赢的情况下赢第三场  $0.7 \times 0.5 \times 0.5$

第二种情况：甲在第一局赢，第二局输的情况下赢第三场  $0.7 \times 0.5 \times 0.7$

第三种情况：甲在第一局输，第二局赢的情况下赢第三场  $0.3 \times 0.7 \times 0.5$

第四种情况：甲在前两局都输的情况下赢第三场  $0.3 \times 0.3 \times 0.7$

概率= $0.175+0.245+0.105+0.063=0.588$ ，答案为 C 选项

**C. 在 57%~59%之间**      **D. 高于 59%**

~~✓ ✓ ✓ ✓~~      ~~✓ ✗ ✗~~      ~~✗ ✓ ✓~~      ~~✗ ✗ ✓~~

~~$0.7 \times 0.5 \times 0.5$~~        ~~$0.7 \times 0.5 \times 0.7$~~        ~~$0.3 \times 0.7 \times 0.5$~~        ~~$0.3 \times 0.3 \times 0.7$~~

$\frac{0.175}{0.238}$        ~~$0.238$~~        $\frac{0.35}{0.238}$        $\frac{0.063}{0.175}$

$0.175$        ~~$0.238$~~        $0.238$        $0.063$

K