

## 第十二讲 立体几何与特殊几何问题

◆立体几何之表面积：

相关公式在第 11 讲

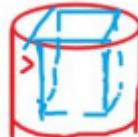
### 例题 1 (2022 国考)

一个圆柱体零件的高为 1，其圆形底面上的内接正方形边长正好也为 1。现将圆柱体零件切割 4 次，得到棱长为 1 的正方体，则切去部分的总表面积为多少？

- A.  $\sqrt{2}(\pi + 2)$
- B.  $2\sqrt{2}(\pi - 2)$
- C.  $(\sqrt{2} + 1)\pi + 2$
- D.  $2\sqrt{2}\pi - 2$

【参考答案】C

【实战解析】

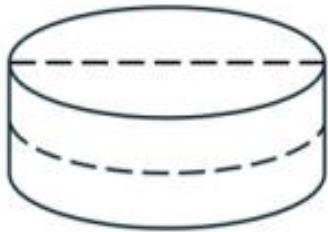


总表面积=2 个圆形-2 个正方形+圆柱侧面+4 个正方形，其中圆形的直径= $\sqrt{2}$ ，面积= $\frac{\pi}{2}$ ，周长= $\sqrt{2}\pi$ ，则圆柱

侧面积= $\sqrt{2}\pi$ ；正方形边长为 1，面积=1；所以总面积= $\pi - 2 + \sqrt{2}\pi + 4 = (\sqrt{2} + 1)\pi + 2$ ，答案为 C 选项。

### 例题 2 (2024 福建)

一个白色圆柱体零件的底面半径是高的 1.5 倍，现将其表面涂上黑漆之后，沿下图所示虚线方向切割为 4 个完全相同的部分。问单个部分的黑色面积是白色面积的多少倍？( $\pi \approx 3.14$ )



- A. 不到 1.1 倍
- B. 1.1~1.2 倍之间
- C. 1.2~1.3 倍之间
- D. 1.3 倍以上

【参考答案】B

【实战解析】

将零件的半径设为 3，则圆柱体的高为 2.

黑色面积：白色面积= (半圆+半个侧面) : (半圆+矩形)，注：此处不能直接约去半圆。

$$\left( \frac{9\pi}{2} + 3\pi \right) : \left( \frac{9\pi}{2} + 6 \right) = 7.5\pi : (4.5\pi + 6) = 15.7 : 13.4 > 1.1$$

答案为 B 选项。

立体几何之体积：

相关公式在第 11 讲

### 例题 3 (2021 辽宁)

如下图 1 所示，在一个金字塔造型（底面为正方形，侧面为四个全等的等腰三角形）的铸造件内部挖空一个圆柱。现沿铸造件顶点 A 且垂直底面的方向切开，切开后的截面如下图 2 所示，已知 DE、GF 为圆柱的高， $BC=4\sqrt{2}$  分米， $DE=2$  分米， $AO=4$  分米，那么挖后铸造件的体积是多少？

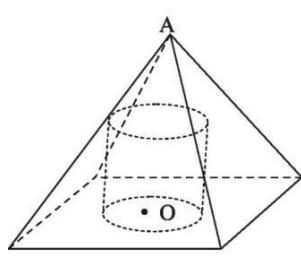


图1

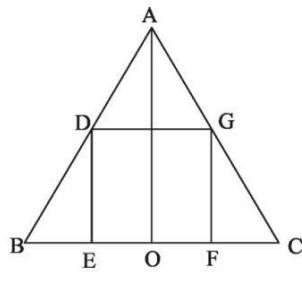
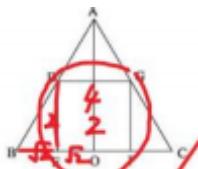


图2

- A.  $128 - 4\pi$  立方分米  
 B.  $\frac{128}{3} - 4\pi$  立方分米  
 C.  $\frac{64}{3} - 4\pi$  立方分米  
 D.  $64 - 4\pi$  立方分米

**【参考答案】B**

**【实战解析】**



根据侧视图可知切割是沿着平行于底边的方向，而不是沿着对角线切割。

铸造件体积=椎体体积-圆柱体积

$$\text{椎体体积} = \frac{\text{底面积} \times \text{高}}{3} = \frac{32 \times 4}{3} = \frac{128}{3}, \text{ 圆柱体积} = \text{底面积} \times \text{高} = 2\pi \times 2 = 4\pi$$

$$\text{铸造件体积} = \frac{128}{3} - 4\pi \quad \text{答案为 B 选项}$$

#### 例题 4 (2023 湖北)

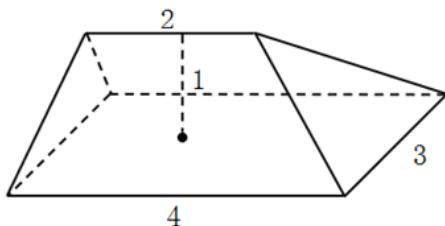
下图所示是一种帐篷屋顶的示意图，底面是一个长 4 米宽 3 米的长方形，屋顶高 1 米，上棱长 2 米且平行于底面，那么该帐篷屋顶的体积是多少？

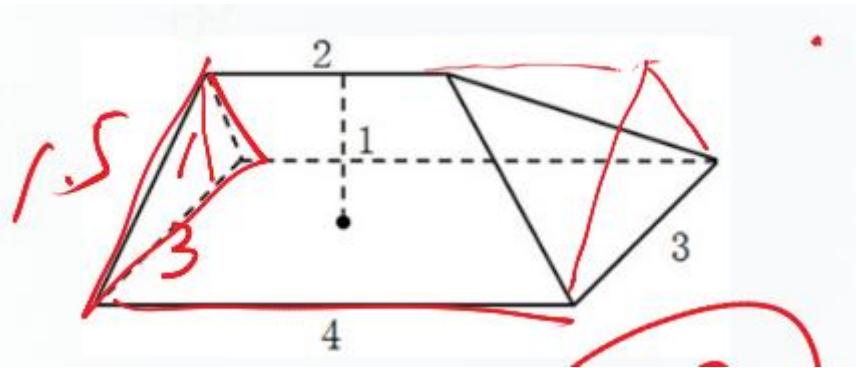
- A. 5 立方米  
 B. 11 立方米  
 C. 12 立方米  
 D. 24 立方米

**【参考答案】A**

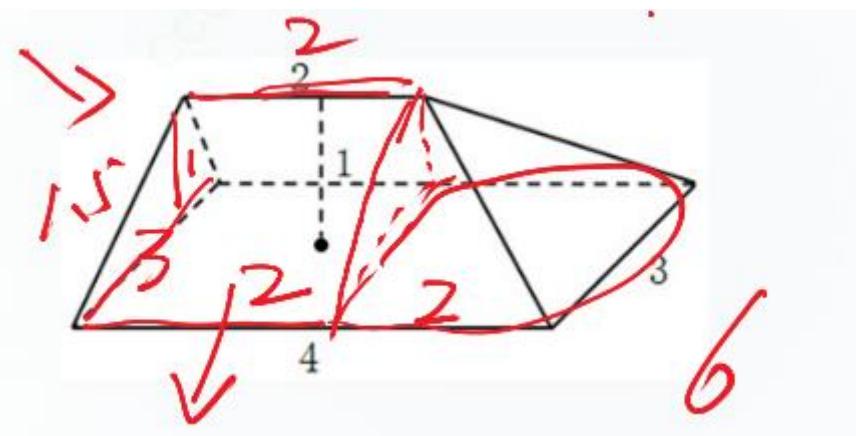
**【实战解析】**

解法一：将屋顶补全后，完整的三棱柱体积=底面积×高= $\frac{3 \times 1}{2} \times 4 = 6$ ，现在题干挖去一块，则体积<6，只有 A 选项满足。





解法二：屋顶体积=小三棱柱体积+四棱锥体积= $\frac{3 \times 1}{2} \times 2 + \frac{2 \times 3 \times 1}{3} = 3 + 2 = 5$ ，答案为 A 选项。



等比放缩：

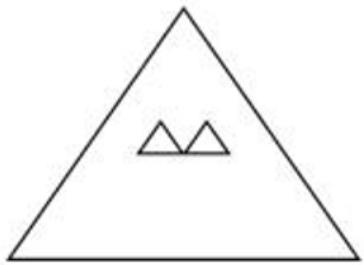
长度比=1: n

面积比=1: n<sup>2</sup>

体积比=1: n<sup>3</sup>

### 例题 5 (2020 新疆)

某演播大厅的地面形状是边长为 100 米的正三角形，现要用边长为 2 米的正三角形砖铺满（如图所示）。问，需要用多少块砖？



- A. 2763      B. 2500  
C. 2340      D. 2300

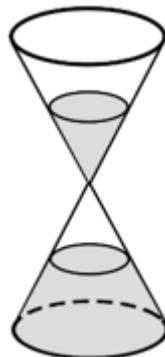
【参考答案】B

【实战解析】

长度比=1: 50，面积比=1: 2500，故需要 2500 块砖，答案为 B 选项。

#### 例题 6 (2023 安徽)

某餐馆承诺 25 分钟内上齐一桌菜，若超时则未上的菜品免单。每张餐桌上都有一个装满后正好 25 分钟漏完的圆锥形沙漏（如下图所示）。某位顾客在等待的过程中发现沙漏内上方沙子的高度为原先的一半，此时还差一道菜未上，则再过多久还未上菜，这位顾客将享受免单服务？



- A. 不到 3 分钟      B. 3~4 分钟之间  
C. 4~5 分钟之间      D. 超过 6 分钟

【参考答案】B

【实战解析】

沙漏上方沙子高度与整个沙漏高比为 1: 2，则剩余圆锥体积：整个圆锥体积=1:  $2^3 = 1: 8$ ，整个沙漏需要 25 分钟漏完，现在还剩下  $\frac{1}{8}$ ，所以还需要  $\frac{25}{8} = 3.125$  分钟，答案为 B 选项。

#### 例题 7 (2022 安徽)

商家门口摆放了一把正四棱锥形（底面为正方形，侧面为四个全等的等腰三角形）的遮阳伞，第一次伞撑开到图 1 所示的位置，伞柄与伞骨成角 $\angle CPQ$  为  $30^\circ$ ，继续撑开到如图 2 所示的位置，伞柄与伞骨成角 $\angle C'PQ'$  变为  $60^\circ$ ，那么第二次伞撑开后形成的正方形 $A'B'C'D'$  是第一次撑开后正方形 ABCD 面积的多少倍？

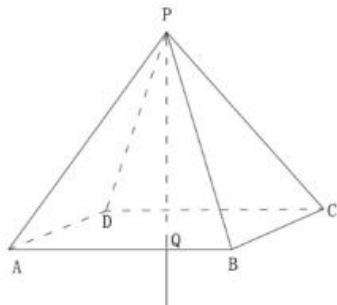


图1

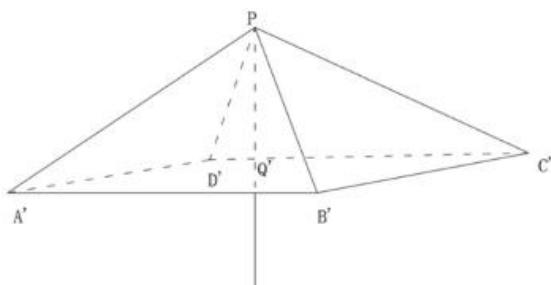
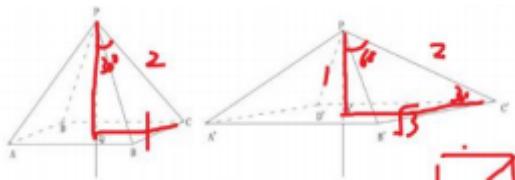


图2

- A.  $3\sqrt{2}$ 倍  
 B.  $\sqrt{3}$ 倍  
 C. 2 倍  
 D. 3 倍

**【参考答案】D**

**【实战解析】**



设  $PC=2$ , 当  $\angle CPQ=30^\circ$  时, 根据三角形勾股定理,  $CQ=1$ , 当  $\angle CPQ=60^\circ$  时,  $CQ=\sqrt{3}$ , 所以前后边长之比为  $1:\sqrt{3}$ , 则面积之比为  $1:3$ , 答案为 D 选项。

### 例题 8 (2021 国考)

一个人工湖的湖面上有一个露出水面 3 米的圆锥体人工景观 (底面朝下)。如人工湖水深减少 20%, 则该景观露出水面部分的体积将增加  $61/64$ 。问原来的人工湖水深为多少米?

- A. 3.5  
 B. 3.75  
 C. 4.25  
 D. 4.5

**【参考答案】B**

**【实战解析】**

增加  $\frac{61}{64}$ , 则前后圆锥体积之比为  $1:\frac{125}{64}$ , 所以前后圆锥高之比为  $1:\frac{5}{4}$ , 之前圆锥高为 3m, 则现在圆锥高增加了  $3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ m, 所以人工湖原先深度  $= \frac{3}{4} \div 20\% = 0.75 \times 5 = 3.75$ m, 答案为 B 选项。

几何最值：

矩形的周长一定，正方形面积最大

矩形的面积一定，正方形的周长最短

面积一定，越接近球，体积越大

体积一定，越接近球，面积越小

例题 9（2024 联考）

某公园绿化管理部门采购 100 片围栏，每片长 1 米且不可弯折。现拆分拟围成 5 块周长相等且互不相邻的矩形花卉区域。若不考虑拼接间隙，那么这 5 块区域的最大与最小面积最多可相差多少平方米？

- A. 10                    B. 12  
C. 16                    D. 25

【参考答案】C

【实战解析】

100 片围栏分成平均五块，则每块 20 片围栏，周长相同，越接近正方形，面积越大，否则面积越小。

则最大面积对应边长为 5 的正方形，面积=25

最小面积对应边长为 1 和 9 的矩形，面积=9，所以面积差=25-9=16，答案为 C 选项。

例题 10（2023 安徽）

某村拟建造一个容积为 144 立方米，深度为 4 米的长方体无盖蓄水池。为节约成本，侧面积最小为多少平方米？

- A. 24                    B. 36  
C. 96                    D. 132

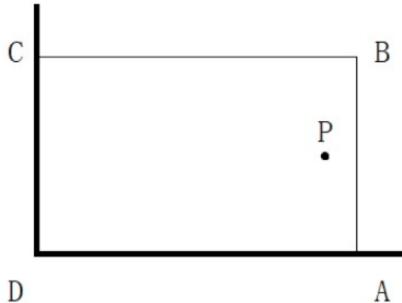
【参考答案】C

【实战解析】

体积=144，深度为 4，则底面积= $\frac{144}{4} = 36$  平方米，侧面积最小，则对应底面周长最短，根据面积相同时，越接近正方形周长越短推知，底面应为正方形，且边长为 6m，则侧面积=6×4×4=96 平方米，答案为 C 选项。

例题 11（2018 四川）

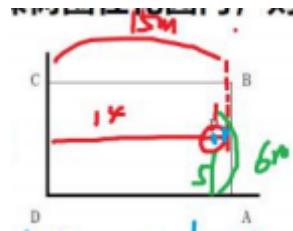
在美化城市活动中，某街道工作人员想借助如图所示的直角墙角，用 28 米长的篱笆围成一个矩形花园 ABCD，篱笆只围 AB、BC 两边。图中的 P 为一棵直径为 1 米的树，其与墙 CD、AD 的最短距离分别是 14 米和 5 米，若要将这棵树围在花园内，则花园的最大面积为多少平方米？



- A. 187      B. 192  
C. 195      D. 196

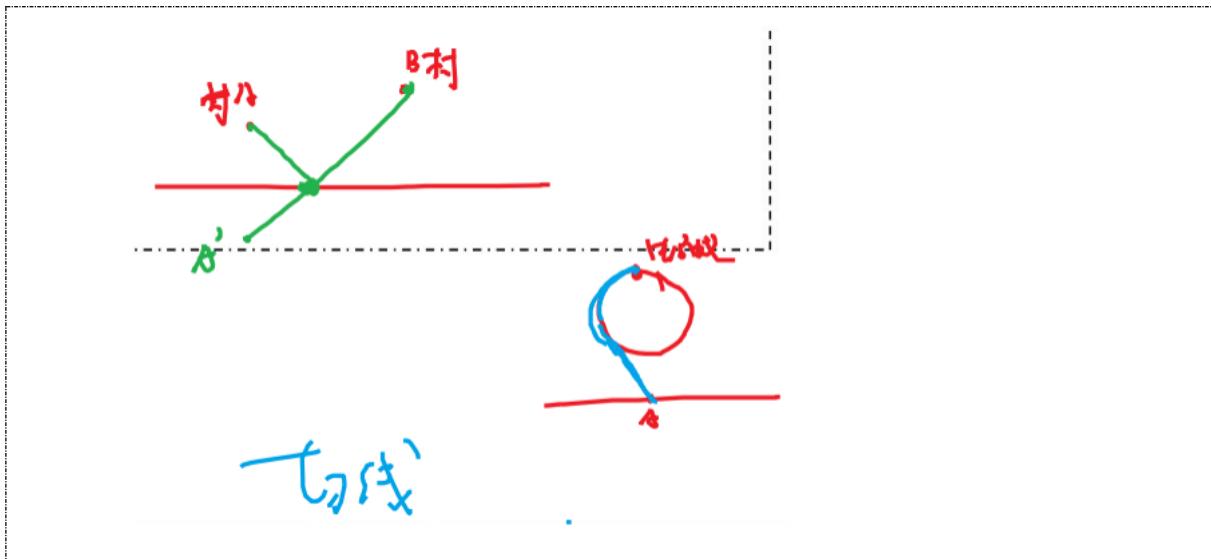
【参考答案】C

【实战解析】



题干中说要将树围在花园中，所以需要考虑树的直径为 1m，则围栏 CB 最短=14+1=15m，AB 最短=5+1=6m，篱笆共有 28m 长，要使花园面积最大，则需要接近正方形，但又因为  $CB \geq 15m$ ，则  $CB=15m$ ， $AB=13m$ ，则面积= $15 \times 13=195$  平方米，答案为 C 选项。

最短路径：



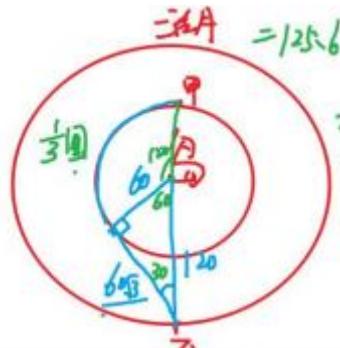
### 例题 12 (2023 北京)

一个半径为 120 米的圆形人工湖正中有一个半径为 60 米的圆形人工岛。甲从岛的正北岸边出发，以 1 米/秒的速度匀速划船前往湖的正南岸边，则最少需要多长时间？

- A. 不到 3 分 45 秒
- B. 3 分 45 秒~4 分之间
- C. 4 分~4 分 15 秒之间
- D. 超过 4 分 15 秒

**【参考答案】B**

**【实战解析】**



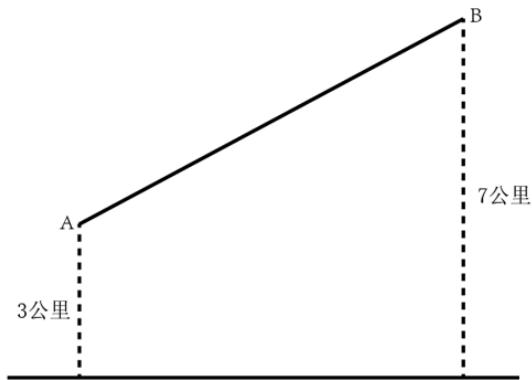
过乙作圆的切线可得图中所示直角三角形，且知斜边=120m，一直角边=60m，可推知直角三角形为  $30^\circ$ ， $60^\circ$  直角三角形，则甲沿圆形人工岛走过了  $120^\circ$ ，对应长度= $120\pi \times \frac{1}{3}=40\pi$ m，接着走了两个切线长度= $60\sqrt{3}$ m，

$$\text{时间} = \frac{40\pi + 60\sqrt{3}}{1} > 40 \times 3.1 + 60 \times 1.7 = 124 + 102 = 226 = 180 + 46 = 3 \text{ 分钟} + 46 \text{ 秒}$$

### 例题 13 (2023 湖北)

A、B 两村在一条笔直公路的同侧，到公路的垂直距离分别是 3 公里和 7 公里，两村相距 8.5 公里，现

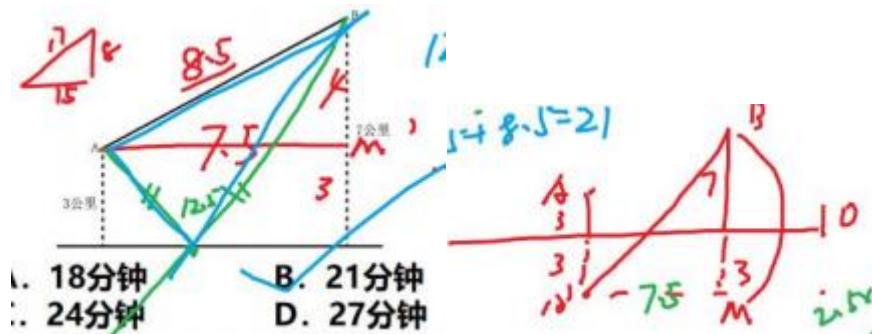
需在公路边建一个物资集散中心，为节约物资配送成本，集散中心到两个村的直线路程之和应尽可能小，若货车的速度约为 60 公里/小时，那么货车从集散中心出发，到两村送货后返回中心，路途所花费的最少时间为多少？



- A. 18 分钟
- B. 21 分钟
- C. 24 分钟
- D. 27 分钟

**【参考答案】B**

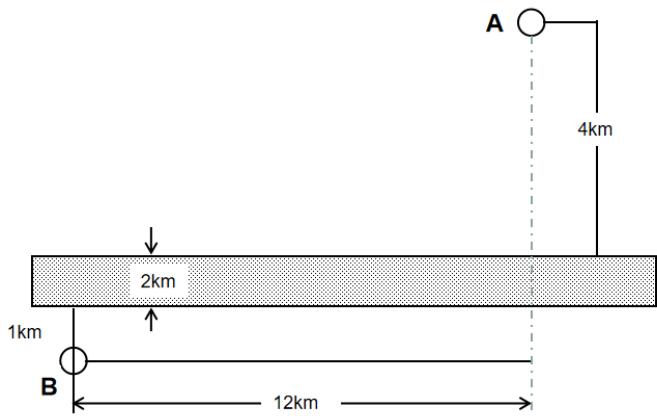
**【实战解析】**



AB=8.5KM, BM' =4KM, 根据勾股数 8 15 17 可求得 AM' =7.5KM, , BM=7+3=10KM, A' M=AM' =7.5KM, 所以根据勾股数 3 4 5, A' B=12.5km, 则时间= $\frac{12.5+8.5}{60} \times 60 = 21$ 分钟，答案为 B 选项。

#### 例题 14 (2022 安徽)

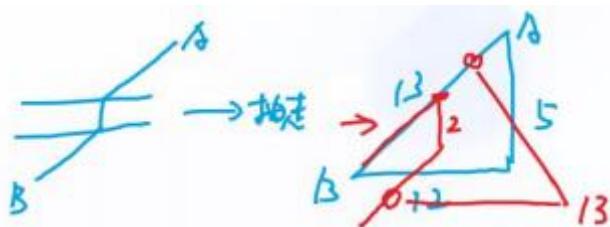
A、B 两个乡镇分布于山谷两侧，山谷间有一条宽为 2km 的河道（如下图所示）。当地政府决定在两个乡镇间修建一条跨河公路促进旅游发展。由于架桥费用高昂，所以要求跨河公路中的桥梁路段长度最短。那么根据图中数据，从 A 镇前往 B 镇的最短距离为多少？



- A. 17km      B. 15km  
 C. 19km      D. 20km

**【参考答案】B**

**【实战解析】**



先将河道抽掉，将 B 上移，再把河道放回来，将 B 下移

将河道抽离后，根据勾股数 5 12 13 可求得  $AB=13\text{KM}$ ，再将河道（2km）放回来，则总长度= $13+2=15\text{km}$ ，答案为 B 选项。