

内容回顾:

问题类型

解题方法

相邻问题

捆绑法

总元素变化+ 内部排序

不相邻问题

插空法

定序问题/无序问题

$$A_n^m / A_n$$

相同元素分配

插板法

“至少一个”

先给或先借!

平均分堆!

环形排序

n个元素环形排序

$$A_{n-1}^{1 \sim 1}$$

重复排序

互不干扰

电话号的后两位/密码

错位排序

1 2 3 4 5个元素的错位排序

0 1 2 9 44

第十七讲 特殊情境之平均分堆与特殊概率问题

平均分堆: 需去除人为排序

4个人平均分两组

ABCD

C42C22

$$\begin{array}{ccc} \boxed{AB} & \boxed{CD} & \times 2 \\ \hline AC & BD & \times 2 \\ \hline AD & BC & \times 2 \end{array}$$

需要在 $C_4^2 C_2^2$ 的基础上除掉顺序 (A_2^2)

5个人 分成221

$$\frac{C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1}{A_2^2}$$

九个人，分成 32211

9个人

$$\frac{3 \text{ (个)} \quad C_9^3 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_1^1 \cdot C_1^1}{A_2^2 \cdot A_2^2}$$

20 个人，分成 4433222

$$\frac{C_{20}^4 \cdot C_{16}^4 \cdot C_{12}^3 \cdot C_9^3 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2}{A_2^2 \cdot A_2^2 \cdot A_3^3}$$

例题 1 (2015 四川)

将 10 名运动员平均分成两组进行对抗赛，问有多少种不同的分法？

A. 120

B. 126

C. 240

D. 252

【答案】B

【解析】先挑出来一组，再除掉排序： $\frac{C_{10}^5}{A_2^2} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2} = 126$

例题 2 (2018 浙江)

某班共有 8 名战士，现在从中挑出 4 人平均分成两个战斗小组分别参加射击和格斗考核，问共有多少

种不同的方案？

A. 210

B. 420

C. 630

D. 840

【答案】B

【解析】

射击和格斗考核，问共有多少种不同的方案？

A. 210

B. 420

C. 630

D. 840

Handwritten solutions for the problem:

Method 1 (Left): $C_8^4 C_4^2 C_2^1 = 420$

Method 2 (Middle): $C_8^4 \cdot \frac{C_4^2 C_2^2}{A_2^2} \cdot A_2^2 = 420$

Method 3 (Right): $C_8^2 C_6^2 = 420$

方法一：先选出来四个人，然后选出来两人射击，剩下的两人格斗

方法二：先选出来四个人，然后平均分堆，然后安排射击和格斗

方法三：直接从 8 人中选出来两个人射击，再选出来两个人格斗

题型拓展

Handwritten formulas for similar problems:

4个人平均分两组 去甲乙两地: $\frac{C_4^2 C_2^2}{A_2^2} = C_4^2$

4个人平均分两组 打羽毛球: $\frac{C_4^2}{A_2^2}$

4个人平均分两组完成A B 工作: C_4^2

10个人分两组去参加拔河: C_{10}^5 / A_2^2

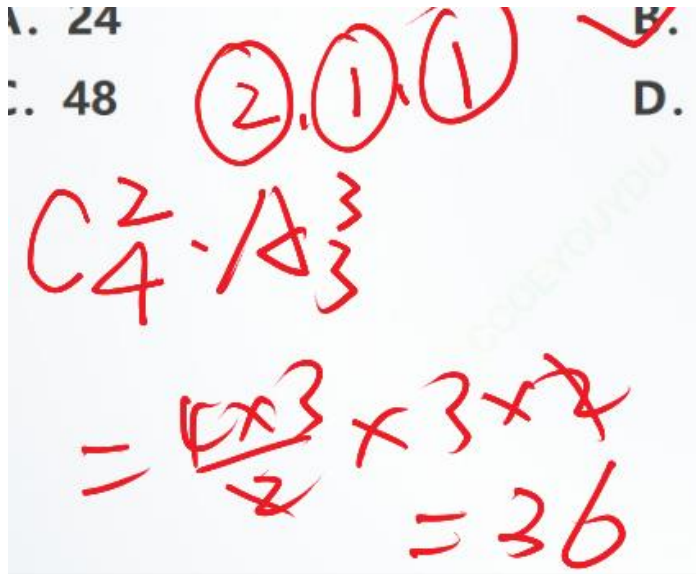
例题 3 (2021 上海)

安排 4 名护士护理 3 个病房，每个病房至少一名护士，每名护士固定护理一个病房，则共有多少种安排方法？

- A. 24 B. 36
C. 48 D. 72

【答案】B

【解析】先从 4 个人里挑两个人组成一组，然后另外两个人各自成一组，这三组再分到三个病房



The image shows a handwritten solution in red ink. At the top, the options are listed: A. 24, C. 48, B. (with a checkmark), and D. Below the options, the numbers 2, 1, and 1 are circled in red, representing the group sizes. The formula $C_4^2 \cdot A_3^3$ is written in red. Below this, the calculation is shown: $= \frac{4 \times 3}{2} \times 3 \times 2 = 36$.

☞二人同组：只需考虑第二人的位置即可

例题 4 (2018 联考)

某单位工会组织桥牌比赛，共有 8 人报名，随机组成 4 队，每队 2 人。那么，小王和小李恰好被分在同一队的概率是多少？

A. $\frac{1}{7}$

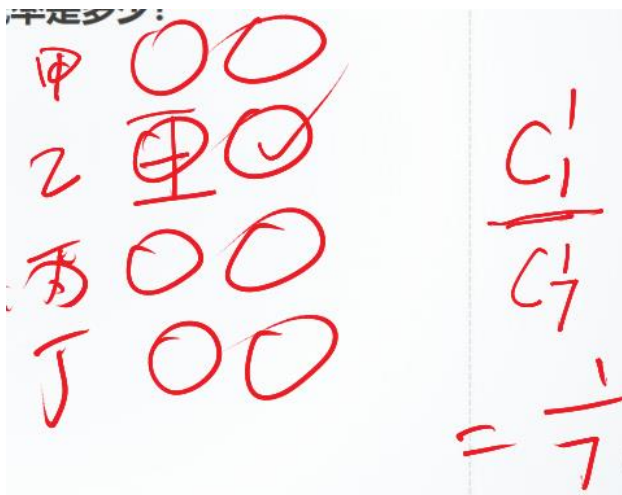
B. $\frac{1}{14}$

C. $\frac{1}{21}$

D. $\frac{1}{28}$

【答案】A

【解析】先给小王安排一个位置，然后再安排小李的位置，在小李能选择的 7 个位置中，只有一个位置和小王同一队



例题 5（2019 联考）

某学校举行迎新篝火晚会，100 名新生随机围坐在篝火四周。其中，小张与小李是同桌，他俩坐在一起的概率为多少？

A. $\frac{2}{97}$

B. $\frac{2}{98}$

C. $\frac{2}{99}$

D. $\frac{2}{100}$

【答案】C

【解析】先给小张安排座位，然后再安排小李的位置，在小李能选择的 99 个座位中，只有两个位置和小张相邻

围坐在篝火四周。其中，
多少？

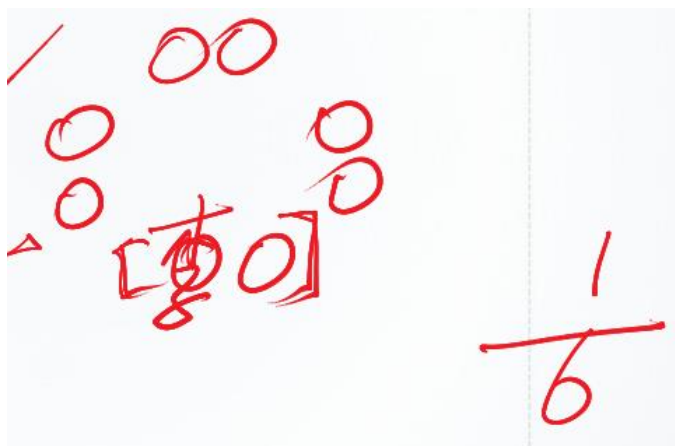
例题 6 (2021 江苏)

某次圆桌会议共设 8 个座位，有 4 个部门参加，每个部门 2 人，排座位时，要求同一部门的两人相邻，若小李和小王代表不同部门参加会议，则他们座位相邻的概率是多少？

- A. $\frac{1}{48}$
- B. $\frac{1}{24}$
- C. $\frac{1}{12}$
- D. $\frac{1}{6}$

【答案】D

【解析】先给小李安排座位，然后再安排小王，在小王能选择的 6 个座位中，只有一个座位和小李相邻



例题 7 (2021 江苏)

某市举办足球邀请赛，共有 9 个球队报名参加，其中包含上届比赛的前 3 名球队。现将这 9 个球队通过抽签的方式平均分成 3 组进行单循环比赛，则上届比赛的前 3 名球队被分在同一组的概率是？

- A. $\frac{1}{21}$
- B. $\frac{1}{28}$

C. $\frac{1}{63}$

D. $\frac{1}{84}$

【答案】B

【解析】假设上届比赛的前三名为甲乙丙，先给甲找一个位置，再安排乙丙的位置：乙丙在剩余的八个位置中选择两个，其中只有和甲在同一组（剩余两个位置中选择两个）选择符合题意

是?

A O O O O

B O O O O

C O O O O

$\frac{C_2^2}{C_8^2} = \frac{1}{28}$

例题 8（2024 浙江）

某公司组织面试，每位考生都要回答甲、乙、丙、丁、戊 5 道试题，作答顺序随机安排。已知小张第二题是甲题、第四题是丁题，小王第三题是乙题，那么两人作答顺序完全相同的概率是多少？

A. $\frac{1}{72}$

B. $\frac{1}{48}$

C. $\frac{1}{36}$

D. $\frac{1}{24}$

【答案】A

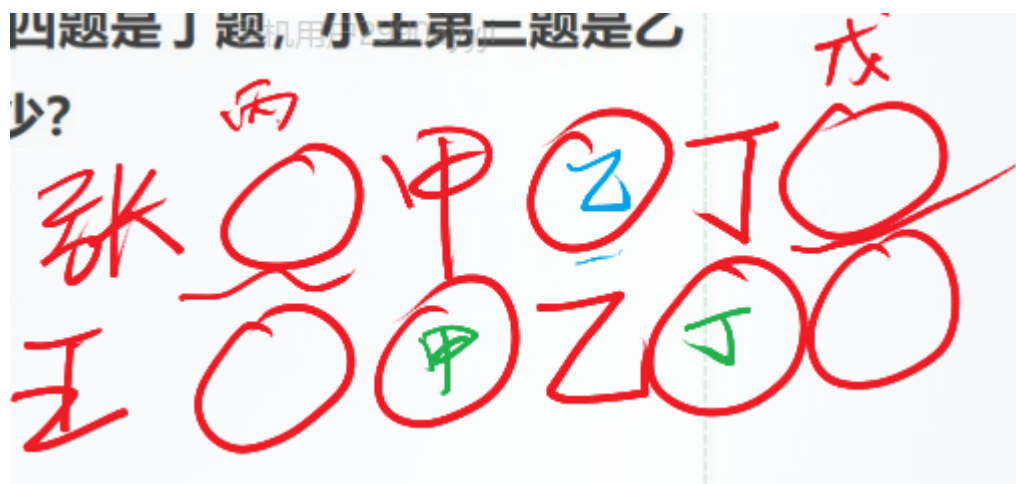
【解析】

第一步：小张的第三题是乙的概率（剩余三个题目中选择乙）

第二步：小王的第二四题为甲和丁的概率（剩余四个题目按顺序排好只有一种情况符合）

第三步：让小张剩余的一五题任意排序，然后让小王和小张顺序一样

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{A_4^2} \times \frac{1}{A_2^2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4 \times 3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{72}$$



(张第3题) (王2,4题)

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{A_4^2} \times \frac{1}{A_2^2} \quad \text{1.5题} \quad (\text{让王和张一样})$$

例题 9 (2019 国考)

小张和小王在同一个学校读研究生，每天早上从宿舍到学校有 6:40、7:00、7:20 和 7:40 发车的 4 班校车。某星期周一到周三，小张和小王都坐班车去学校，且每个人在 3 天中乘坐的班车发车时间都不同。问这 3 天小张和小王每天都乘坐同一趟班车的概率在？

- A. 3%以下
- B. 3%~4%之间
- C. 4%~5%之间
- D. 5%以上

【答案】C

【解析】

第一天：小张任选一辆校车，小王在四辆校车中有一辆和小张一样

第二天：小张再从三辆里任选一辆，小王在三辆中有一辆和小张一样

第三天：小张再从两辆里任选一辆，小王在两辆中选择一辆和小张一样

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{20} > \frac{1}{24} > \frac{1}{25}$$

$$0.05 > \frac{1}{24} > 0.04$$

📌比赛概型：

如果赢一场概率 0.7，输一场概率 0.3，输的那一场应该在前三场

3:1 000/0
输的一场找位置!
 $C_3^1 \times 0.3 \times 0.7^2$ C

如果输两场的话，输的两场应该在前四场

3:2 0000/0
 $C_4^2 \cdot 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.7^2$ C

例题 10（2020 安徽事业单位）

某场羽毛球单打比赛采取三局两胜制。假设甲选手在每局都有 80% 的概率赢乙选手，那么这场单打比赛甲有多大概率战胜乙选手？

- A. 0.768 B. 0.800
C. 0.896 D. 0.924

【答案】C

【解析】分情况讨论

第一种情况：2:0 $0.8 \times 0.8 = 0.64$

第二种情况：2:1，输的那一场一定在前两场， $C_2^1 \times 0.2 \times 0.8 \times 0.8 = 0.64 \times 0.4$

总概率 = $0.64 + 0.64 \times 0.4 = 0.64 \times 1.4$ ，根据尾数为 6，答案为 C 选项。

96

D. 0.924

$$\begin{array}{l}
 2=0 \\
 0.8 \times 0.8 \\
 + \\
 2=1 \\
 C_2^1 \cdot 0.2 \cdot 0.8^2 \\
 0.64 \times (1+0.4) \\
 1.4
 \end{array}$$

例题 11 (2014 年浙江省考)

两支篮球队打一个系列赛，三场两胜制，第一场和第三场在甲队的主场，第二场在乙队的主场。已知甲队主场赢球概率为 0.7，客场赢球概率为 0.5。问甲队赢得这个系列赛的概率为多少？

- A. 0.3 B. 0.595
C. 0.7 D. 0.795

【答案】C

【解析】分情况讨论

第一种情况：甲连赢两场， 0.7×0.5

第二种情况：甲赢一三，输第二场， $0.7 \times 0.5 \times 0.7$

第三种情况：甲赢二三场，输第一场， $0.3 \times 0.5 \times 0.7$

总概率：三种情况相加 $= 0.35 + 0.35$ ($0.3 + 0.7$) $= 0.7$

$$\begin{array}{l}
 \checkmark \checkmark \\
 \textcircled{0.7 \times 0.5} \\
 D. 0.795 \\
 \checkmark \times \checkmark \quad \times \checkmark \checkmark \\
 \frac{0.7 \times 0.5 \times 0.7 + 0.3 \times 0.5 \times 0.7}{0.35 \times 1 = 0.35}
 \end{array}$$

例题 12 (2021 福建事业单位)

某场乒乓球单打比赛采取 5 局 3 胜制。假设甲选手在每局都有 70% 的概率赢乙选手，若要打满 5 局，那么这场单打比赛甲有多大概率战胜乙选手？

- A. 0.031
B. 0.103
C. **0.185**
D. 0.343

【答案】 C

【解析】因为要打满五局，所以输的两场在前四场 C_4^2

$$\text{概率} = C_4^2 \times 0.3 \times 0.3 \times 0.7 \times 0.7 \times 0.7 = 6 \times 0.09 \times 0.343 = 0.54 \times 0.343 > 0.5 \times 0.343 = 0.172$$

答案为 C 选项。

B. 0.103
D. 0.343

$C_4^2 \cdot 0.3^2 \cdot 0.7^3$
 $= (6 \times 0.09) \times 0.343$
 $= 0.54 \times 0.343$
 $= 0.18642$

3:2 00070

0.171

例题 13 (2023 湖北选调)

某市职工篮球赛甲、乙两队决赛，采取 7 场 4 胜制（先赢 4 场者胜，每场没有平局）。若两队水平相当，现在已经比了 3 场，甲赢了 2 场，乙赢了 1 场。问甲获得最后胜利的概率有多少？

- A. $\frac{2}{3}$
- B. $\frac{3}{4}$
- C. $\frac{5}{8}$
- D. $\frac{11}{16}$

【答案】D

【解析】甲再赢两场就可以了

第一种情况：甲连赢两场 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

第二种情况：甲输一场，则需要在这场中选择一场输 $C_2^1(\frac{1}{5})^3$

第三种情况：甲输两场，则需要在三场中选择两场输 $C_3^2(\frac{1}{5})^4$

$$\text{概率} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$$

比了3场，甲赢了2场，乙赢了1场。

$\cancel{2=0}$ $\overset{000}{2=1}$ $\overset{0000}{2=2}$

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ $C_2^1 (\frac{1}{2})^3$ $C_3^2 (\frac{1}{2})^4$

$= \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$

反向思考：1-乙赢的概率，乙赢分两种情况

第一种情况：乙连赢三场， $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

第二种情况：乙输一场， $C_3^1 (\frac{1}{2})^4 = \frac{3}{16}$

甲赢的概率 $= 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$

$\frac{2}{3}$ $3=0$ $3=1$ B. $\frac{3}{4}$

$\frac{5}{8}$ $\frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ $C_3^1 \frac{1}{16}$ D. $\frac{11}{16}$

$\frac{1}{16}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{5}{16}$ $1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$

例题 14 (2024 四川)

甲和乙进行乒乓球比赛。第一局甲胜乙的概率为 70%。往后每局如甲上局取胜，则当局甲的胜率为 50%；如乙上局取胜，则当局甲的胜率为 70%。问第三局甲取胜的概率在以下哪个范围内？

- A. 不到 55%
B. 在 55%~57%之间
C. 在 57%~59%之间
D. 高于 59%

【答案】C

【解析】分情况讨论

第一种情况：甲在前两局都赢的情况下赢第三场 $0.7 \times 0.5 \times 0.5$

第二种情况：甲在第一局赢，第二局输的情况下赢第三场 $0.7 \times 0.5 \times 0.7$

第三种情况：甲在第一局输，第二局赢的情况下赢第三场 $0.3 \times 0.7 \times 0.5$

第四种情况：甲在前两局都输的情况下赢第三场 $0.3 \times 0.3 \times 0.7$

概率 = $0.175 + 0.245 + 0.105 + 0.063 = 0.588$ ，答案为 C 选项

C. 在 57%~59%之间 D. 高于 59%

Handwritten calculations and probability breakdown:

- Case 1: $0.7 \times 0.5 \times 0.5 = 0.175$ (marked with ✓✓✓)
- Case 2: $0.7 \times 0.5 \times 0.7 = 0.245$ (marked with ✓x✓)
- Case 3: $0.3 \times 0.7 \times 0.5 = 0.105$ (marked with x✓✓)
- Case 4: $0.3 \times 0.3 \times 0.7 = 0.063$ (marked with x x ✓)

Sum: $0.175 + 0.245 + 0.105 + 0.063 = 0.588$

Additional handwritten notes: 0.35 , 0.238 , 0.063 , 0.175 , 0.09 , 0.5