

第四讲 余数、平方数与等差数列

数列基础知识：

数列常考公式：

	通项公式	求和公式
等差数列	$a_n = a_1 + (n - 1)d$	$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$
等比数列	$a_n = a_1 \times q^{n-1}$	$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$

数列常见性质：

	性质
等差数列	一、若是奇数项等差数列，则平均数=等差中项， $S_n=n\times$ 等差中项； 等差数列的平均数= $\frac{a_1+a_n}{2}$ ； 二、若 $m+n=k+i$, 则 $a_m + a_n = a_k + a_i$ 。
等比数列	一、若 a_{n-1}, a_n, a_{n+1} 成等比数列，则 $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$ ； 二、若 $m+n=k+i$, 则 $a_m a_n = a_k a_i$ 。

例题 1 (2022 青海)

某市对下辖 9 个文艺表演团体去年新创节目的数量进行统计分析，发现 9 个团体新创节目的数量恰好成等差数列，其中前 5 个团体的新创节目总数是 60，前 7 个团体的新创节目总数是 70。那么这 9 个文艺表演团体去年新创节目的总数是多少？

- A. 72
- B. 76
- C. 78
- D. 80

【参考答案】A

【参考解析】

5 个团体的中间项是 a_3 ，所以 $a_3=60/5=12$ ；7 个团体的中间项的中间项是 a_4 ，所以 $a_4=70/7=10$ ， $d=-2$ ，9 个团体中间项是 $a_5=8$ ，一共 9 项，所以答案： $8*9=72$ ，选 A；

秒杀技巧：已知是 9 个项数的和，就是 9 倍的 a_5 ，所以答案一定是 9 的倍数，只有 A 是 9 的倍数，只能选 A。

例题 2（2022 江苏 B）

某金融机构向 9 家“专精特新”企业共发放了 4500 万元贷款，若这 9 家企业获得的贷款额从少到多排列，恰好为一个等差数列，且排第 3 的企业获得 420 万元贷款，排第 8 的企业获得的贷款额为多少？

- A. 620 万元
- B. 660 万元
- C. 720 万元
- D. 760 万元

【参考答案】A

【参考解析】

9 的中间项为 5， $a_5 = 4500/9=500$ ，已知 $a_3 = 420$ ， $d=(500-420)/2=40$ ， $a_8=500+40*3=620$ ，所以答案为 A 选项。

例题 3（2022 四川）

某共享汽车公司年初购入一批二手电动汽车，每台 16200 元。第一年每台电动汽车的维护费用为 1100 元，以后每年增加 400 元，每台电动汽车每年可产生收益 9100 元。问在第几年时，单台汽车扣除购置和维护成本后产生的利润将超过 2 万元？

- A. 5
- B. 6
- C. 7
- D. 8

【参考答案】B

【参考解析】

第一年纯收入： $9100 - 1100 = 8000$ 元；

第二年纯收入： $8000 - 400 = 7600$ 元

第三年纯收入： $7600 - 400 = 7200$ 元

收入=成本+利润；想要利润超过 2 万元，收入就得超过 36200
($16200 + 20000$) 元即可；

代入 A 选项，假设第 5 年的时候，收入超过 36200，第 3 年是 5 年的中间项，5 项之和为： $5 \times 7200 = 36000$ ；第五年未超过 36200，但是 36000 与 36200 就相差 200，第 6 年的时候一定可以超过，所以，定位 B 选项。

例题 4 (2024 山东)

若干职员参加某次强国知识竞赛，每个人的得分均不相同且为整数，分数排名相邻的 2 人分差均为 5 分。已知有 3 人成绩低于 70 分，且超过 70 分的职员平均分为 82 分。问所有职员中竞赛成绩超过 70 分的人数占比在下列哪个范围内？

- A. 低于 50%
- B. 50%~60%之间
- C. 60%~70%之间
- D. 高于 70%

【参考答案】C

【参考解析】

超过 70 分的职员平均分为 82 分，如果是奇数项那么 82 为中间项，分差均为 5；可以试写成： 72、77、82、87、92；低于 70 分的有三人，分别为 67、62、57；一共 8 项，超过 70 分的有 5 个，占比 $5/8$ ，定位 C 选项。

能不能为偶数项？如果为偶数项，82 是中间两项的平均数，两个数差 5，那么只能是 79.5 和 84.5，题干说每个人的得分均不相同且为整数，所以，不能为偶数项。

例题 5 (2022 下四川)

商场 6 月 6 日开始销售某种电器，从 6 月 7 日起，每天这种电器的销量都比前一天多 1 台。已知 6 月 16 日卖了 22 台这种电器，问其 6 月共卖了多少台这种电器？

- A. 555
- B. 600
- C. 645
- D. 690

【参考答案】B

【参考解析】

$30 - 5 = 25$ ；25 天的中间项是第 13 天；6 月 6 号到 6 月 30 号，需要找到第 13 项。

批注 [1]: 从 6 月 6 日到 6 月 30 日一共卖了几天，一 共 30 天，前 5 天不卖，所以是 25 天

如果从 1 号开始，那么第 13 天就是第 13 项，如果从 6 号开始，那么第 18 天就是第 13 项，所以 6 月 18 日就是中间项，6 月 16 是 22 台，6 月 18 日就是 $22 + 2 = 24$ ，一共是 25 天， $24 \times 25 = 600$ ，所以答案是 B。

秒杀：一共 25 天，总数应该是 25 的中间项 $\times 25$ ，所以答案一定是 25 的倍数，只能选 B 选项。

例题 6 (2022 安徽)

某市举行庆典活动，将依次升空 105 架无人机，升空方式如下：每架无人机间距均相等，

第一次升空 n 架，第二次升空 $n-1$ 架，以此类推，最终在夜空中组成一个近似等边三角形

背景的灯光秀，那么第 10 次升空的无人机数量是多少？

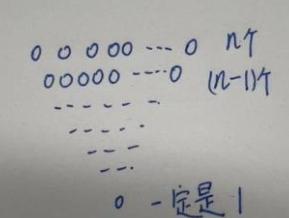
- A. 3 架
- B. 5 架
- C. 8 架
- D. 10 架

【参考答案】B

【参考解析】

根据题干得知：第一项为 n ，最后一项为 1；

根据等差数列求和公式可得： $\frac{1+n}{2} \times n = 105$ ，化简得： $n(1+n) = 210 = 14 \times 15$ ，所以 $n=14$ ； $a_{10}=14+(10-1) \times -1=5$ ，定位 B 选项。



批注 [2]:

批注 [3]: 将 210 化成两个近似数相乘的样子，210 能想到 $15 \times 15=225$ ，那么就是 15×14

例题 7 (2022 下四川)

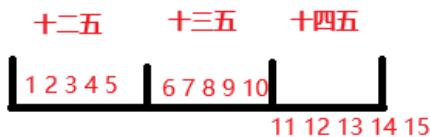
某企业在“十二五”期间第一年的营业额比上一年增长了 1.5 亿元，且往后每年的营业额增量都保持 1.5 亿元不变。已知该企业在“十四五”期间的营业额将是“十二五”和“十三五”期间营业额之和的 80%。问该企业在“十二五”到“十四五”期间的总营业额在以下哪个范围内？

- A. 不到 300 亿元
- B. 300~330 亿元
- C. 330~360 亿元
- D. 超过 360 亿元

【参考答案】C

【参考解析】

公差 = 1.5



十二五的中间项: a_3

十三五的中间项: $a_8 = a_3 + 7.5$

十四五的中间项: $a_{13} = a_3 + 15$

$a_3 + 15 = 0.8 (a_3 + a_3 + 7.5)$ 得出 $a_3 = 15$, 那么 $a_8 = 22.5$

$a_8 = 22.5$, 15 项之和 $= 22.5 \times 15 = 337.5$, 定位到 C 选项。

例题 8 (2024 浙江)

有一组算式 $1+1$ 、 $2+3$ 、 $3+5$ 、 $4+7$ 、 $1+9$ 、 $2+11$ 、 $3+13$ 、 $4+15$ 、 $1+17$ 、 $2+19$ 、 $3+21$ 、 $4+23$ 、 $1+25$ 、 $2+27$ 、……和为 2021 的是第几个算式?

- A. 507
- B. 1010
- C. 1012
- D. 1014

【参考答案】B

【参考解析】

每组式子 “+” 前的数字为 1、2、3、4，周期循环，“+”后的数字为奇数数列 1、3、5、7……，奇数数列可以表示 $2n-1$ ；偶数数列可以表示： $2n$

2021 是由左边为 1、2、3、4 和右边为奇数数列组成，只考虑奇数项得出 $2021 = 2n-1$ ； $n=1011$ 。

第 1011 项，不考虑左边为 1、2、3、4，就已经为 2021，所以答案比 1011 项小一点，定位 B 选项。

『平方数问题：

记住几个平方数：

$$1^2=1 \quad 2^2=4 \quad 3^2=9 \quad 4^2=16 \quad 5^2=25$$

$$6^2=36 \quad 7^2=49 \quad 8^2=64 \quad 9^2=81 \quad 10^2=100$$

$$11^2=121 \quad 12^2=144 \quad 13^2=169 \quad 14^2=196 \quad 15^2=225$$

$$16^2=256 \quad 17^2=289 \quad 18^2=324 \quad 19^2=361 \quad 20^2=400$$

例题 9 (2024 湖北)

小明购买一本书，发现该书的总页数 p 是一个平方数，且 $p-2$ 和 $p+2$ 都是质数，已知该书在 100—400 页之间，小明打算每个星期读书不超过 75 页，请问至少需要多少个星期才能把书读完？

- A. 5
- B. 4
- C. 3
- D. 2

【参考答案】C

【参考解析】

$p-2$ 和 $p+2$ 都是质数，质数唯一的偶数为 2，所以 p 是奇数；

假设 p 等于 121， $p-2$ 和 $p+2$ ，分别为 119 和 123；123 不是质数，排除；

假设 p 等于 169， $p-2$ 和 $p+2$ ，分别为 167 和 171；171 不是质数，排除；

假设 p 等于 225, $p-2$ 和 $p+2$, 分别为 223 和 227, 都是质数;
假设 p 等于 289, $p-2$ 和 $p+2$, 分别为 287 和 291; 291 不是质数, 排除;

假设 p 等于 361, $p-2$ 和 $p+2$, 分别为 359 和 363; 363 不是质数, 排除;

所以, p 是 225, $225 \div 75 = 3$, 定位 C 选项。

例题 10 (2022 天津)

有一个 20 世纪八九十年代出生的人, 在 21 世纪, 恰好有一年, 他年龄的平方数等于那一年的年份。这个人是哪年出生的?

- A. 1995
- B. 1990
- C. 1985
- D. 1980

【参考答案】D

【参考解析】

$40^2=1600$, $50^2=2500$, 正好 $45^2=2025$, 是在 21 世纪内的, 所以正好在 2025 年 45 岁, 所以, $2025-45=1980$, 定位 D 选项。

例题 11 (2022 甘肃)

甲、乙两家大型医疗公司的负责人各带一名助手参加展会订购医疗器械。最终订单显示: 每人各自订购了不同种类医疗器械, 且其订购的每种医疗器械台数恰巧等于他所订医疗器械

的种类数。每人订购的医疗器械种类数都未超过 15 类，并且两位负责人所订购的医疗器械台数不同，但都比自己的助手多购 45 台。问甲、乙两公司一共订购了多少台医疗器械？

- A. 150
- B. 170
- C. 210
- D. 240

【参考答案】 B

【参考解析】

订购数量 = 订购种类 \times 每种台数；

订购的每种医疗器械台数恰巧等于他所订医疗器械的种类数，
所以，订购数量是某一个数的平方。

两位负责人所订购的医疗器械台数不同，但都比自己的助手
多购 45 台；那么就是，两组差为 45 的平方数。

1、4、9、16、25、36、49、64、81、100 中 4 和 49 差 45、36
和 81 差 45；

甲、乙两公司一共订购： $4 + 49 + 36 + 81 = 170$ ，定位 B 选项。

◆余数问题：

特征	余同 余数相同	和同 除数与余数的和相同	差同 除数与余数的差相同
口诀	余同取余	和同加和	差同减差
被除数	最小公倍数+余数	最小公倍数+和	最小公倍数-差
实例	“一个数 除 3 余 1， 除 5 余 1， 除 6 余 1” 则被除数为 $30n+1$	“一个数 除 7 余 1， 除 6 余 2， 除 5 余 3” 则被除数为 $210n+8$	“一个数 除 7 余 5， 除 6 余 4， 除 3 余 1” 则被除数为 $42n-2$

例题 12（2023 广东县级）

某社区计划组建多支社工团队，为此招募了一批社工。如果每支团队由 3 名社工组成，则剩余 2 名社工；如果每支团队由 4 名社工组成，同样剩余 2 名社工，则该社区可能招募了多少名社工？

- A. 32 B. 34
C. 36 D. 38

【参考答案】 D

【参考解析】

除 3 余 2

除 4 余 2

符合余数相同，可以表示成 $12n+2$ ，因为都是 30 多，所以 n 取 3，
所以 $12n+2=38$ ，定位 D 选项。

例题 13 (2021 联考)

不超过 100 名的小朋友站成一列。如果从第一人开始依次按 1, 2, 3, ……, 9 的顺序循环报数，最后一名小朋友报的是 7；如果按 1, 2, 3, ……, 11 的顺序循环报数，最后一名小朋友报的是 9，那么一共有多少名小朋友？

- A. 98 B. 97
C. 96 D. 95

【参考答案】 B

【参考解析】

除 9 余 7

除 11 余 9

符合差数相同，可以表示 $99n-2$, n 取 1, 那么 $99-2=97$ ，定位 B 选项。

例题 14 (2019 江苏事业编)

N 为自然数，被 9 除余数是 8，被 7 除余数是 6，被 5 除余数是 4。已知 $100 < N < 1000$ ，则这样的数有多少个？

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

【参考答案】 C

【参考解析】

符合差数相同，3、5 与 9 的最小公倍数 = 315, $100 < N = 315n - 1 < 1000$ ，所以 n 可以取 1、2、3，定位 C 选项。