!include ./header.md

Seminár 1: Úvod do teórie kategórií

Kategória - $C(O, A, \circ)$**:**

- O - kolekcia objektov
- A - kolekcia *arrows* - morfizmy medzi objektami z O
- $\circ$ - binárne skladanie morfizmov
  - musí platiť asociativita - $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = h \circ g \circ f$
  - identita id je voči operátoru neutrálna aj zľava aj sprava, nech $f : a \to b$ potom $f \circ id_a = id_b \circ f = f$
- id / 1 - identické morfizmy pre všetky objekty (id_a - identický morfizmus pre $a \in O$)
- $Hom(a, b)$ - kolekcia morfizmov **z** a **do** b

Kategórie

- *Malá*: aj O aj A sú množiny
- *Veľká*: nie malá
- *Lokálne malá*: pre všetky objekty $a, b \in C$ je $Hom(a, b)$ množina
- *Riedka (thin)*: pre všetky objekty $a, b \in C$ platí $|Hom(a, b)| \in \{0, 1\}$
- *Voľná (free)*: kategória generovaná z orientovaného grafu pomocou voľnej konštrukcie (doplnenie identít a zložením hrán - pre každú cestu z u do v existuje hrana reprezentujúca túto cestu)

Špeciálne objekty

- *iniciálny objekt*
  - a je iniciálny objekt $\iff \forall b \in O_C. \exists! m \in A_C. m : a \to b$
  - do každého objektu kategórie vedie unikátna šípka
  - v kategórii "typov" (Set) si môžeme predstaviť `void`, pretože pre každý iný typ `T` existuje funkcia `asburd : void -> T`
  - unikátny až na unikátny izomorfizmus
- *terminálny objekt* (duálny k iniciálnemu objektu)
  - a je terminálny objekt $\iff \forall b \in O_C. \exists! m \in A_C. m : b \to a$
  - z každého objektu kategórie vedie unikátna šípka
  - v kategórii "typov" si môžeme predstaviť `unit`, pretože pre každý iný typ existuje funkcia `unit : T -> ()`
  - unikátny až na unikátny izomorfizmus

Opačná kategória C^{op} - Kategória s opačnými morfizmami (od C). Môžme hovoriť o duálnych pojmoch (napr. terminálny objekt je iniciálny v opačnej kategórii, mono je duálne s epi, atď).

Špeciálne morfizmy

- *monomorfizmus (mono)*
  - $f : a \to b \in C$ je monomorfizmus $\iff$

    $\forall x \in C. \forall g, h : x \to a \in C. \{f \circ g = f \circ h \implies g = h\}$
  - v **Set** je morfizmus f mono $\iff$ funkcia f je injektívna
- *epimorfizmus (epi)* (duálny k monomorfizmu)
  - $f : a \to b \in C$ je epimorfizmus $\iff$

    $\forall x \in C. \forall g, h : b \to x \in C. \{g \circ f = h \circ f \implies g = h\}$
  - v **Set** je morfizmus f epi $\iff$ funkcia f je surjektívna
- *izomorfizmus*

  $f : a \to b \in C$ je izomorfizmus $\iff$

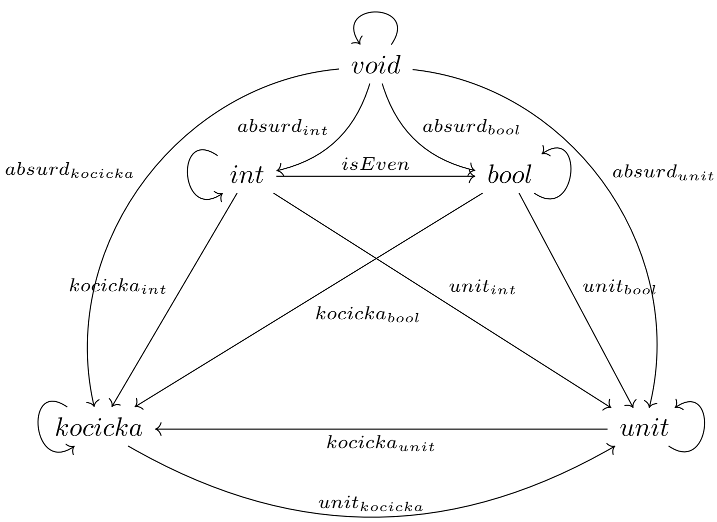
  $\exists g : b \to a \in C. \{g \circ f = id_a \land f \circ g = id_b\}$
- *endomorfizmus*

  $f : a \to a$
- *automorfizmus*

endomorfizmus + izomorfizmus

Príklady kategórií:

- **0** - kategória bez prvkov a morfizmov
- **1** - kategória s práve jedným prvkom a jeho identitou
- **2** - kategória s práve dvoma prvkami, medzi ktorými sú morfizmy
- **Set** - kategória množín a funkcií
- **Grp** - kategória grúp a homomorfizmov
- **Cat** - kategória malých kategórií a funktorov
- *Order* - kategória usporiadania s $\leq$
- *Voľná kategória* - konštrukcia z orientovaného grafu
- *Monoid ako kategória* - kategória s jedným objektom a endomorfizmami
- *Grupa ako kategória* - kategória s jedným objektom a automorfizmami
- **Hask** - "kategória typov v jazyku Haskell a funkcií"



Zdroje:

Milewski, B., 2022. Category Theory for Programmers: The Preface (Part One: 1-4). [online] Bartosz Milewski's Programming Cafe. Available at: https://bartoszmilewski.com/2014/10/28/category-theory-for-programmers-the-preface/ [Accessed 3 March 2022].

Buurlage, J-W, 2022. Categories and Haskell (Chapter 1). [online] Github. Available at: https://github.com/jwbuurlage/category-theory-programmers/ [Accessed 3 March 2022].