Koalgebry, koindukce, bisimulace atd.

Uvažujeme endofuktory $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

F-algebra je objekt A společně se šipkou $\alpha : FA \to A$. F-algebry tvoří kategorii; homomorfismus F-algeber $(A, \alpha) \to (B, \beta)$ je šipka $f : A \to B$ taková, že $f \circ \alpha = \beta \circ Ff$.

Iniciální F-algebra je nejmenším pevným bodem funktoru F. Šipce z iniciální F-algebry do F-algebry (A, α) říkáme *katamorfismus* a značíme ho $(\!|\alpha|\!)$.

```
type Algebra f a = f a -> a
data Fix f = Fix { unFix :: f (Fix f) }
cata :: Functor f => Algebra f a -> Fix f -> a
cata alpha = alpha . fmap (cata alpha) . unFix
```

Duálně: F-koalgebra je objekt A společně se šipkou $\alpha : A \to FA$. Homomorfismus $f : (A, \alpha) \to (B, \beta)$ splňuje $\beta \circ f = Ff \circ \alpha$.

Finální F-koalgebra je největším pevným bodem funktoru F. Šipce z F-koalgebry (A, α) do finální F-algebry říkáme *anamorfismus* a značíme ho $[\!(\alpha)\!]$.

```
type CoAlgebra f a = a -> f a
-- Fix f je tentýž, protože funktory v Haskellu mají jen jeden pevný bod
ana :: Functor f => CoAlgebra f a -> a -> Fix f
ana alpha = Fix . fmap (ana alpha) . alpha
```

Příklady:

- $FX = 1 + X$. Iniciální F-algebra je $\mathbb{N}$. Finální F-koalgebra je $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
- $FX = A \times X$. Terminální F-koalgebra je proud (stream).
- $FX = \mathcal{P}(A \times X)$. F-koalgebry jsou přechodové systémy s návěštími (LTS). Finální F-koalgebra neexistuje.

Indukce a koindukce:

Budeme se teď pohybovat v kategorii Set (nebo nějaké podobné, kde můžeme hovořit o prvcích, podmnožinách, relacích).

Princip indukce: Iniciální F-algebra je minimální (nemá žádné vlastní podalgebry).

Definice *kongruence* (nemusí to být ekvivalence): F-kongruence mezi F-algebrami (A, α) a (B, β) je F-algebra (R, ρ), která má homomorfismy π_1 do (A, α) a π_2 do (B, β). Na R se můžeme dívat jako na relaci $\{(\pi_1(r), \pi_2(r)) \mid r \in R\}$.

Pokud R je kongruence nad X, pak $\pi_1(R) \cap \pi_2(R)$ je podalgebra X.

Alternativní formulace principu indukce: Každá kongruence nad iniciální F-algebrou je nadmnožinou identity.

*Princip **koindukce**:* Finální F-koalgebra je jednoduchá (nemá žádný vlastní kvocient).

Kvocient koalgebry S je koalgebra T taková, že existuje epimorfismus (v případě Set surjektivní zobrazení) $S \to T$.

Definice *bisimulace*: F-bisimulace mezi F-koalgebrami (A, α) a (B, β) je F-koalgebra (R, ρ), která má homomorfismy π_1 do (A, α) a π_2 do (B, β). Na R se můžeme dívat jako na relaci $\{(\pi_1(r), \pi_2(r)) \mid r \in R\}$.

Alternativní formulace principu koindukce: Každá bisimulace nad finální F-koalgebrou je podmnožinou identity.

Příklad: Vezměme si klasickou bisimulaci nad přechodovými systémy s návěštími (LTS). Tedy R je bisimulace pokud pro každé $(x, y) \in R$ platí:

- $x \xrightarrow{a} x' \implies \exists y' : y \xrightarrow{a} y' \wedge (x', y') \in R.$
- $y \xrightarrow{a} y' \implies \exists x' : x \xrightarrow{a} x' \wedge (x', y') \in R.$

Dokažte, že tento pojem bisimulace je shodný s pojmem F-bisimulace, kde $FX = \mathcal{P}(A \times X)$.