

Seminář 6: Adjunkce

Unit/counit adjunkce

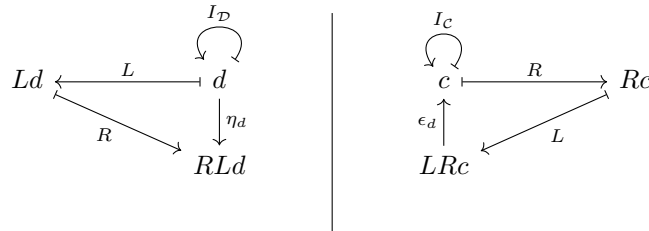
Kategorie \mathcal{C}, \mathcal{D} , Funktory $L : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}, R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$

- L je levý adjunkt R
- R je pravý adjunkt L

Značení: $L \dashv R$

Pokud existují přirozené transformace:

- $\eta : I_{\mathcal{D}} \Rightarrow R \circ L(\text{unit})$
- $\epsilon : L \circ R \Rightarrow I_{\mathcal{C}}(\text{counit})$.



Pro tyto transformace platí následující rovnosti:

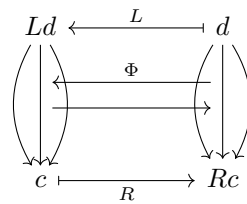
- $L = L \circ I_{\mathcal{D}} \rightarrow L \circ R \circ L \rightarrow I_{\mathcal{C}} \circ L = L$
- $R = I_{\mathcal{D}} \circ R \rightarrow R \circ L \circ R \rightarrow R \circ I_{\mathcal{C}} = R$

Hom-Set adjunkce

Kategorie \mathcal{C}, \mathcal{D} , Funktory $L : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}, R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$

$L \dashv R \iff \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Ld, c) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(d, Rc)$

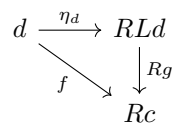
Φ je přirozený isomorfismus mezi HomSety



Adjunkce unvierzální šipkou (Universal arrow adjunction)

Kategorie \mathcal{C}, \mathcal{D} , Funktory $L : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}, R : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$

$L \dashv R \iff$ existuje přirozená transformace $\eta : I_{\mathcal{D}} \Rightarrow R \circ L$ taková, že $\forall c \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \forall d \in \mathcal{O}_{\mathcal{D}} \text{ a } \forall f : d \rightarrow Rc \exists ! g : Ld \rightarrow c$, že následující diagram komutuje:



Ekvivalence definic

$\text{HomSet} \rightarrow \text{Unit/Counit}$:

$$\eta_d : I_{\mathcal{D}} \Rightarrow R \circ Ld = \Phi_{d, Ld}(I_{\mathcal{D}}(Ld))$$

$$\epsilon_c : L \circ R \Rightarrow I_{\mathcal{C}} = \Phi_{Rc, c}^{-1}(I_{\mathcal{C}}(Rc))$$

Universal arrow $\rightarrow \text{HomSet}$:

$$\Phi_{d, c} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Ld, c) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(d, Rc) = (\alpha : Ld \rightarrow c) \mapsto R\alpha \circ \eta$$

$\text{Unit/Counit} \rightarrow \text{Universal arrow}$:

$$R(\Delta) \circ \eta_c = f$$

$$\Delta = \epsilon_c \circ Lf = g$$

Unikátnost adjunkcí (až na přirozený isomorfismus)

Nechť $L, L' : D \rightarrow C$ a $R : C \rightarrow D$

$L \dashv R, L' \dashv R$ s přirozenými bijekcemi $\Phi_{d, c}$ a $\Phi'_{d, c}$

Pak pro libovolné $d \in O_{\mathcal{D}}$ platí, že:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Ld, -) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(c, R-) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(L'd, -)$$

Z toho jde pomocí Yoneda embedding ukázat, že F a F' jsou přirozeně isomorfní.

Příklady

Exponenciál CCC popsáný adjunkcí:

$$L = z \rightarrow z \times a$$

$$R = b \rightarrow a \Rightarrow b$$

$$\text{Unit: } \eta = z \rightarrow a \Rightarrow z \times a$$

$$\text{Counit: } \epsilon = (a \Rightarrow b) \times a \rightarrow b = \text{eval}$$

Free/Forgetful adjunkce

Kategorie **Mon** - objekty jsou monoidy, morfismy jsou homomorfismy mezi nimi. Mějme $X \in O_{\mathbf{Set}}$ jako abecedu a $F(X)$ je monoid takový, že $F(X) = (X^*, ++, ())$. X^* je množina slov složených z prvků X - například: $w = (x1, x2, x3)$, $u = (x1)$, $z = ()$. $++$ je operace zřetězení a $()$ je prázdné slovo.

Pak $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Mon}$ je takový funktor, který pro každou množinu vybere monoid jí generovaný. Mějme funktor $U : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Set}$, který monoid namapuje na jeho množinu. X je tedy generátor monoidu $F(X)$ a $U(F(X))$ namapuje X na množinu generovanou X a operací $++$.

Nyní můžeme definovat přirozenou transformaci $\eta : Id_{\mathbf{Set}} \Rightarrow U \circ F$ takovou, že $\eta_X(x) = (x)$. Nyní chceme ukázat, že pro libovolné f existuje právě jedno g takové, že následující daigram komutuje:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & U(F(X)) \\ & \searrow f & \downarrow U(g) \\ & & U(M) \end{array}$$

Tedy chceme najít morfismus g takový, že je homomorfismus mezi monoidy a zároveň splňuje rovnost: $f(x) = U(g)(\eta_X x) = U(g)((x))$.

Takový morfismus g je:

$$g(()) = id_M$$

$$g((x)) = f(x)$$

$$g((x1, x2, \dots, x_n)) = f(x1)f(x2)\dots f(x_n)$$