

## Seminář 10: (Ko)limity

**Intuice:** V minulých seminářích jsme viděli, jak jdou kategoriálně popsat vlastnosti součinů a disjunktních sjednocení. Díky tomu můžeme tyto koncepty zobecnit do jiných kategorií než jsou množiny. Obecné (ko)limity přidávají podobjekty a kvocienty.

(Zdůrazňuji, že se jedná o intuici, formálně je toto řečeno v rámci Věty 6.)

Vzhledem k tomu, že ve druhé části budou důležitější kolimity, tak vše v rozpravku je o nich a limity jsou jen duální :)

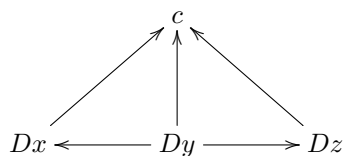
**Definice 1.** Diagram  $D$  v kategorii  $\mathcal{C}$  je funktor  $D: J \rightarrow \mathcal{C}$ , kde  $J$  je malá kategorie.

Diagram obsahující dva objekty je to samé co funktor z kategorie  $\{\bullet, \bullet\}$  (dva objekty a žádné neidentické šipky).

**Definice 2.** Kokužel nad diagramem  $D: J \rightarrow \mathcal{C}$  s vrcholem  $c \in \mathcal{C}$  je kolekce šipek  $(\alpha_j: D_j \rightarrow c)_{j \in J}$  taková, že pro každou šipku  $f: j \rightarrow j' \in J$  platí  $\alpha_{j'} \cdot Df = \alpha_j$ . Šipky  $\alpha_j$  se nazývají nohy kokužele.

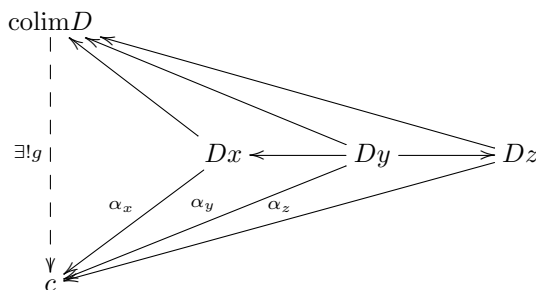
Ekvivalentně jde kokužel definovat jako přirozená transformace  $D \Rightarrow c$ , kde  $c$  myslíme funktor, který všechny objekty  $j$  pošle na  $c$  a všechny šipky na  $1_c$ . Pro snadnější zápis toho budeme využívat pro značení značit kokužely.

Pro  $J = \{x \leftarrow y \rightarrow z\}$  vypadá obecný kokužel s vrcholem  $c$  takto (všechny tyto trojúhelníky komutují):



**Definice 3.** Necht  $D: J \rightarrow \mathcal{C}$  je diagram,  $\alpha: D \Rightarrow c$ ,  $\beta: D \Rightarrow d$  dva kokužely. Pak jejich morfismem rozumíme šipku  $f: c \rightarrow d$  takovou, že  $f\alpha_j = \beta_j$  pro každé  $j$ . Kokužely a jejich morfismy tvoří kategorii, iniciální objekt v této kategorii je kolimitou  $D$ . Značí se  $\text{colim}D$ .

Pro  $J = \{x \leftarrow y \rightarrow z\}$  dostáváme, že pro libovolný kokužel  $\alpha$  s vrcholem  $c$  existuje právě jedna šipka  $g: \text{colim}D \rightarrow c$  taková, že následující diagram komutuje:



#### Příklad 4.

- Pokud v  $J$  nejsou žádné neidentické šipky, tak dostáváme standardní definici koproduktu.
- Kolimita diagramu z prázdné kategorie je iniciální objekt.
- Kolimita diagramu  $A \supseteq A \cap B \subseteq B$  je  $A \cup B$ .
- Nechť  $\sim$  je relace ekvivalence na  $A$ , pak kolimita diagramu  $\sim \rightrightarrows A$  (šipky jsou projekce ze součinu zúžené na  $\sim$ ) je  $A/\sim$ . Obecně kolimita diagramu  $A \rightrightarrows B$  se nazývá koekvalizér a platí, že noha kolimitního kokužele z  $B$  je vždy epimorfismus (v množinách surjekce).
- Kolimita diagramu  $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots$  je  $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ .

**Věta 5.** Iniciální objekt je jednoznačně určen až na jediný izomorfismus. Proto i libovolná kolimita je jednoznačně určena až na jediný izomorfismus komutující s kokužely.

**Věta 6.** Každá kolimita jde vyjádřit jako koekvalizér diagramu, kde obě šipky vedou do koproduktu všech objektů v diagramu.

Vzhledem k poznámce z předchozího příkladu toto znamená, že na každou kolimitu se můžeme dívat jako na nějaký kvocient disjunktního sjednocení objektů v diagramu, jehož kolimitu počítáme.

**Definice 7.** Nechť  $D: J \rightarrow \mathcal{C}$  je diagram, s kolimitou  $\alpha: D \Rightarrow \text{colim} D$  a  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  je funktor. Pak říkáme, že  $F$  zachovává kolimitu  $D$ , pokud  $F\alpha: FD \Rightarrow F\text{colim} D$  je kolimitní kokužel v  $\mathcal{D}$ .

Identita zachovává všechny kolimity, konstantní funktory zachovávají kolimity řetězců ( $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots$ ), zapomínání z monoidů nezachovává skoro žádné kolimity, ale zachovává všechny limity.

#### Iniciální $F$ -algebry

**Věta 8.** Nechť  $\mathcal{C}$  je kategorie s iniciálním objektem  $0$  a kolimitami spočetných řetězců a  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  endofunktor zachovávající kolimity řetězců. Pak existuje iniciální  $F$ -algebra.

*Názna důkazu:* Stačí spočítat kolimitu  $0 \rightarrow^! F0 \rightarrow^{F!} F^2 0 \rightarrow^{F^2!} \dots$  □

Koprodukty vždy komutují s kolimitami, konstantní funktory i identita zachovávají kolimity řetězců. V množinách navíc konečné součiny komutují s kolimitami. Proto libovolný funktor tvaru

$$X \mapsto \sum_{i \in I} A_i \times X^i$$

zachovává kolimity řetězců. Musí pro něj tedy existovat iniciální  $F$ -algebra.

Příklady zahrnují seznamy ( $X \mapsto 1 + A \times X$ ) nebo binární stromy ( $X \mapsto 1 + A \times (X + X)$ ).