Transformation

- Modeling
- Viewing

Scale：缩放（按比例，不按比例）

Reflection Matrix：反射矩阵

Shear Matrix：切变/剪切矩阵 Shear就是切变的意思（竖直方向不会，只有水平方向会移动）

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotate：旋转（规定默认绕(0,0)点，逆时针旋转）【对于单一图形，也可以理解为基向量顺时针旋转】

Linear Transforms：线性变换 能写成 $x' = Mx$ 的形式

旋转矩阵：

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

注：要用相同维度的矩阵（Matrices of the same dimension）

Homogeneous coordinates：齐次坐标

为什么要用这个概念？因为有一种特殊的变换：平移变换（Translation）

$$\begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \end{cases}$$

但平移不能表示成一个 $x' = Mx$，所以平移不是线性变化，而我们又不想把平移单独看待。

Add a third coordinate (*w-coordinate*)

- 2D point = $(x, y, 1)^T$
- 2D vector = $(x, y, 0)^T$

Matrix representation of translations

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

为什么点和向量区别对待，因为向量没有平移操作。（向量没有固定的起点）（而且向量的长度不能变）

Valid operation if w-coordinate of result is 1 or 0

- vector + vector = vector
- point – point = vector
- point + vector = point
- point + point = ??

在齐次坐标系中， $\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix}$ 是 $2D$ $\begin{pmatrix} x/w \\ y/w \\ w/w \end{pmatrix}$ 点（$w \neq 0$）的坐标。

所以点加点表示的是中点的坐标。

Affine Transformations：仿射变换

Affine map = linear map + translation

仿射映射 = 线性映射 + 平移

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

用齐次坐标系（二维变换）即：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & t_x \\ c & d & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Inverse Transform（逆变换）

Composite Transform（复合变换）：变换的顺序是很重要的！（其实就是矩阵乘的顺序不一样，矩阵乘法不满足交换律）

- 矩阵的乘法是从右往左的，ABx 是先 B 先乘 x 再跟 A。（矩阵是左乘的，有点模仿 $f_2(f_1(x))$。

Decomposing Complex Transforms：分解复杂变换

3D Transforms：三维变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & t_x \\ d & e & f & t_y \\ g & h & i & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

重点：仿射变换 = 线性变换 + 平移（即先应用线性变换，再平移）