

附件

机器学习的数学基础

高等数学

1. 导数定义：

导数和微分的概念

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

$$\text{或者: } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

2. 左右导数导数的几何意义和物理意义

函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右导数分别定义为：

$$\text{左导数: } f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, (x = x_0 + \Delta x)$$

$$\text{右导数: } f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

3. 函数的可导性与连续性之间的关系

Th1: 函数 $f(x)$ 在 x_0 处可微 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处可导。

Th2: 若函数在点 x_0 处可导, 则 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续, 反之则不成立。即函数连续不一定可导。

Th3: $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

4. 平面曲线的切线和法线

切线方程 : $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

法线方程: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), f'(x_0) \neq 0$

5. 四则运算法则

设函数 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 在点 x 可导, 则:

$$(1) (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(2) (uv)' = uv' + vu' \quad d(uv) = u dv + v du$$

$$(3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} (v \neq 0) \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

6. 基本导数与微分表

$$(1) y = c \text{ (常数)} \quad \text{则: } y' = 0 \quad dy = 0$$

$$(2) y = x^\alpha (\alpha \text{ 为实数}) \quad \text{则: } y' = \alpha x^{\alpha-1} \quad dy = \alpha x^{\alpha-1} dx$$

$$(3) y = a^x \quad \text{则: } y' = a^x \ln a \quad dy = a^x \ln a dx \quad \text{特例: } (e^x)' = e^x \quad d(e^x) = e^x dx$$

$$(4) y = \log_a x \quad \text{则:}$$

$$y' = \frac{1}{x \ln a} \quad dy = \frac{1}{x \ln a} dx \quad \text{特例: } y = \ln x \quad (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

$$(5) y = \sin x \quad \text{则: } y' = \cos x \quad d(\sin x) = \cos x dx$$

$$(6) y = \cos x \quad \text{则: } y' = -\sin x \quad d(\cos x) = -\sin x dx$$

$$(7) y = \tan x \quad \text{则: } y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \quad d(\tan x) = \sec^2 x dx$$

$$(8) y = \cot x \quad \text{则: } y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x \quad d(\cot x) = -\csc^2 x dx$$

$$(9) y = \sec x \quad \text{则: } y' = \sec x \tan x \quad d(\sec x) = \sec x \tan x dx$$

$$(10) y = \csc x \quad \text{则: } y' = -\csc x \cot x \quad d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$$

$$(11) y = \arcsin x \quad \text{则: } y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(12) y = \arccos x \quad \text{则: } y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(13) y = \arctan x \quad \text{则: } y' = \frac{1}{1+x^2} \quad d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$(14) \quad y = \operatorname{arccot} x \quad \text{则: } y' = -\frac{1}{1+x^2} \quad d(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx$$

$$(15) \quad y = \operatorname{sh} x \quad \text{则: } y' = \operatorname{ch} x \quad d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x dx$$

$$(16) \quad y = \operatorname{ch} x \quad \text{则: } y' = \operatorname{sh} x \quad d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x dx$$

7. 复合函数，反函数，隐函数以及参数方程所确定的函数的微分法

(1) 反函数的运算法则：设 $y = f(x)$ 在点 x 的某邻域内单调连续，在点 x 处可导且 $f'(x) \neq 0$ ，则其反函数在点 x 所对应的 y 处可导，并且有 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

(2) 复合函数的运算法则：若 $\mu = \varphi(x)$ 在点 x 可导，而 $y = f(\mu)$ 在对应点 μ ($\mu = \varphi(x)$) 可导，则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 在点 x 可导，且 $y' = f'(\mu) \cdot \varphi'(x)$

(3) 隐函数导数 $\frac{dy}{dx}$ 的求法一般有三种方法：

1) 方程两边对 x 求导，要记住 y 是 x 的函数，则 y 的函数是 x 的复合函数。例如 $\frac{1}{y}$, y^2 , $\ln y$, e^y 等均是 x 的复合函数。对 x 求导应按复合函数连锁法则做。

2) 公式法。由 $F(x, y) = 0$ 知 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$ ，其中， $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ 分别表示 $F(x, y)$ 对 x 和 y 的偏导数。

3) 利用微分形式不变性

8. 常用高阶导数公式

$$(1) \quad (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0) \quad (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(2) \quad (\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(3) \quad (\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(4) \quad (x^m)^{(n)} = m(m-1) \cdots (m-n+1)x^{m-n}$$

$$(5) \quad (\ln x)^{(n)} = (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

(6) 莱布尼兹公式: 若 $u(x), v(x)$ 均 n 阶可导, 则: $(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}$, 其中 $u^{(0)} = u, v^{(0)} = v$

9. 微分中值定理, 泰勒公式

Th1: (费马定理)

若函数 $f(x)$ 满足条件:

(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义, 并且在此邻域内恒有 $f(x) \leq f(x_0)$ 或 $f(x) \geq f(x_0)$,

(2) $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则有 $f'(x_0) = 0$

Th2: (罗尔定理)

设函数 $f(x)$ 满足条件:

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续; (2) 在 (a, b) 内可导; (3) $f(a) = f(b)$

则在 (a, b) 内 \exists 一个 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$

Th3: (拉格朗日中值定理)

设函数 $f(x)$ 满足条件:

(1) 在 $[a, b]$ 上连续; (2) 在 (a, b) 内可导;

则在 (a, b) 内存在一个 ξ , 使 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

Th4: (柯西中值定理)

设函数 $f(x), g(x)$ 满足条件:

(1) 在 $[a, b]$ 上连续; (2) 在 (a, b) 内可导且 $f'(x), g'(x)$ 均存在, 且 $g'(x) \neq 0$

则在 (a, b) 内存在一个 ξ , 使 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

10. 洛必达法则

法则 I ($\frac{0}{0}$ 型不定式极限)

设函数 $f(x), g(x)$ 满足条件: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$; $f(x), g(x)$ 在 x_0 的邻域内可导
(在 x_0 处可除外)且 $g'(x) \neq 0$;

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞)。

则: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

法则I' ($\frac{0}{0}$ 型不定式极限)

设函数 $f(x), g(x)$ 满足条件: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$; 存在一个 $X > 0$, 当 $|x| > X$

时, $f(x), g(x)$ 可导, 且 $g'(x) \neq 0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞)。

则: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

法则II ($\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限)

设函数 $f(x), g(x)$ 满足条件: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$; $f(x), g(x)$ 在 x_0 的邻域内可

导(在 x_0 处可除外)且 $g'(x) \neq 0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或 ∞)。

则: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

同理法则II' ($\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式极限)仿法则I'可写出

11. 泰勒公式

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数, 则对该邻域内异于 x_0 的任意点 x , 在 x_0 与 x 之间至少存在一个 ξ , 使得:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 阶泰勒余项。

令 $x_0 = 0$, 则 n 阶泰勒公式:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \cdots$$

(1) 其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$, ξ 在 0 与 x 之间。(1) 式称为麦克劳林公式

常用五种函数在 $x_0 = 0$ 处的泰勒公式 :

$$1) e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^\xi$$

$$\text{或} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$2) \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(\xi + \frac{n+1}{2}\pi\right)$$

$$\text{或} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2} + o(x^n)$$

$$3) \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\xi + \frac{n+1}{2}\pi\right)$$

$$\text{或} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2} + o(x^n)$$

$$4) \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$\text{或} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$5) (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n \\ + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\xi)^{m-n-1}$$

$$\text{或} (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

12. 函数单调性的判断

Th1: 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 区间内可导, 如果对 $\forall x \in (a, b)$, 都有 $f'(x) > 0$ (或 $f'(x) < 0$), 则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内是单调增加的 (或单调减少)。

Th2: (取极值的必要条件) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且在 x_0 处取极值, 则 $f'(x_0) = 0$ 。

Th3: (取极值的第一充分条件) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内可微, 且 $f'(x_0) = 0$ (或 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 但 $f'(x_0)$ 不存在.)。

(1) 若当 x 经过 x_0 时, $f'(x)$ 由“+”变“-”, 则 $f(x_0)$ 为极大值;

(2) 若当 x 经过 x_0 时, $f'(x)$ 由“-”变“+”, 则 $f(x_0)$ 为极小值;

(3) 若 $f'(x)$ 经过 $x = x_0$ 的两侧不变号, 则 $f(x_0)$ 不是极值。

Th4: (取极值的第二充分条件) 设 $f(x)$ 在点 x_0 处有 $f''(x) \neq 0$, 且 $f'(x_0) = 0$, 则:

当 $f''(x_0) < 0$ 时, $f(x_0)$ 为极大值; 当 $f''(x_0) > 0$ 时, $f(x_0)$ 为极小值. 注: 如果 $f''(x_0) = 0$, 此方法失效。

13. 渐近线的求法

(1) 水平渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, 或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, 则 $y = b$ 称为函数 $y = f(x)$ 的水平渐近线。

(2) 铅直渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$, 则 $x = x_0$ 称为 $y = f(x)$ 的铅直渐近线。

(3) 斜渐近线 若 $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$, 则 $y = ax + b$ 称为 $y = f(x)$ 的斜渐近线。

14. 函数凹凸性的判断

Th1: (凹凸性的判别定理) 若在 I 上 $f''(x) < 0$ (或 $f''(x) > 0$), 则 $f(x)$ 在 I 上是凸的 (或凹的)。

Th2: (拐点的判别定理 1) 若在 x_0 处 $f''(x) = 0$, (或 $f''(x)$ 不存在), 当 x 变动经过 x_0 时, $f''(x)$ 变号, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点。

Th3: (拐点的判别定理 2) 设 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内有三阶导数, 且 $f''(x) = 0$, $f'''(x) \neq 0$, 则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点。

15. 弧微分

$$dS = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

16. 曲率

曲线 $y = f(x)$ 在点 (x, y) 处的曲率 $k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$. 对于参数方程:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, k = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{3/2}}$$

17. 曲率半径

曲线在点 M 处的曲率 $k(k \neq 0)$ 与曲线在点 M 处的曲率半径 ρ 有如下关系: $\rho = \frac{1}{k}$

线性代数

行列式

1. 行列式按行（列）展开定理

$$(1) \text{ 设 } A = (a_{ij})_{n \times n}, \text{ 则: } a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A|, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

$$\text{或 } a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} |A|, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

$$\text{即 } AA^* = A^*A = |A|E, \text{ 其中: } A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = (A_{ji}) = (A_{ij})^T$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

(2) 设 A, B 为 n 阶方阵, 则 $|AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|$, 但 $|A \pm B| = |A| \pm |B|$ 不一定成立。

(3) $|kA| = k^n|A|$, A 为 n 阶方阵。

(4) 设 A 为 n 阶方阵, $|A^T| = |A|$; $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ (若 A 可逆), $|A^*| = |A|^{n-1}$

$n \geq 2$

(5) $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$, A, B 为方阵, 但

$$\begin{vmatrix} O & A_{m \times m} \\ B_{n \times n} & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \cdot |A||B|。$$

$$(6) \text{ 范德蒙行列式 } D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

设 A 是 n 阶方阵, $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是 A 的 n 个特征值, 则 $|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$

矩阵

矩阵: $m \times n$ 个数 a_{ij} 排成 m 行 n 列的表格 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 称为矩阵, 简记为 A ,

或者 $(a_{ij})_{m \times n}$ 。若 $m = n$, 则称 A 是 n 阶矩阵或 n 阶方阵。

矩阵的线性运算

1. 矩阵的加法

设 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ 是两个 $m \times n$ 矩阵, 则 $m \times n$ 矩阵 $C = (c_{ij}) = a_{ij} + b_{ij}$ 称为矩阵 A 与 B 的和, 记为 $A + B = C$ 。

2. 矩阵的数乘

设 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵, k 是一个常数, 则 $m \times n$ 矩阵 (ka_{ij}) 称为数 k 与矩阵 A 的数乘, 记为 kA 。

3. 矩阵的乘法

设 $A = (a_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵, $B = (b_{ij})$ 是 $n \times s$ 矩阵, 那么 $m \times s$ 矩阵 $C = (c_{ij})$, 其中 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ 称为 AB 的乘积, 记为 $C = AB$ 。

4. A^T 、 A^{-1} 、 A^* 三者之间的关系

$$(1) (A^T)^T = A, (AB)^T = B^T A^T, (kA)^T = kA^T, (A \pm B)^T = A^T \pm B^T$$

$$(2) (A^{-1})^{-1} = A, (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, (kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1},$$

但 $(A \pm B)^{-1} = A^{-1} \pm B^{-1}$ 不一定成立。

$$(3) (A^*)^* = |A|^{n-2} A \quad (n \geq 3), (AB)^* = B^* A^*, (kA)^* = k^{n-1} A^* \quad (n \geq 2)$$

但 $(A \pm B)^* = A^* \pm B^*$ 不一定成立。

$$(4) (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}, (A^{-1})^* = (AA^*)^{-1}, (A^*)^T = (A^T)^*$$

5. 有关 A^* 的结论

$$(1) AA^* = A^*A = |A|E$$

$$(2) |A^*| = |A|^{n-1} \quad (n \geq 2), \quad (kA)^* = k^{n-1}A^*, \quad (A^*)^* = |A|^{n-2}A \quad (n \geq 3)$$

$$(3) \text{若} A \text{可逆, 则} A^* = |A|A^{-1}, (A^*)^* = \frac{1}{|A|}A$$

(4) 若 A 为 n 阶方阵, 则:

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$$

6. 有关 A^{-1} 的结论

$$A \text{可逆} \Leftrightarrow AB = E; \Leftrightarrow |A| \neq 0; \Leftrightarrow r(A) = n;$$

$$\Leftrightarrow A \text{可以表示为初等矩阵的乘积}; \Leftrightarrow A \text{无零特征值}; \Leftrightarrow Ax = 0 \text{ 只有零解}.$$

7. 有关矩阵秩的结论

$$(1) \text{秩} r(A) = \text{行秩} = \text{列秩};$$

$$(2) r(A_{m \times n}) \leq \min(m, n);$$

$$(3) A \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 1;$$

$$(4) r(A \pm B) \leq r(A) + r(B);$$

$$(5) \text{初等变换不改变矩阵的秩}$$

$$(6) r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min(r(A), r(B)), \text{特别若 } AB = O$$

$$\text{则: } r(A) + r(B) \leq n$$

$$(7) \text{若 } A^{-1} \text{存在} \Rightarrow r(AB) = r(B); \text{若 } B^{-1} \text{存在} \Rightarrow r(AB) = r(A);$$

$$\text{若 } r(A_{m \times n}) = n \Rightarrow r(AB) = r(B); \text{若 } r(A_{m \times s}) = n \Rightarrow r(AB) = r(A).$$

$$(8) r(A_{m \times s}) = n \Leftrightarrow Ax = 0 \text{ 只有零解}$$

8. 分块求逆公式

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

这里 A, B 均为可逆方阵。

向量

1. 有关向量组的线性表示

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 \Leftrightarrow 至少有一个向量可以用其余向量线性表示。
- (2) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关 $\Leftrightarrow \beta$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 唯一线性表示。
- (3) β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta)$ 。

2. 有关向量组的线性相关性

- (1) 部分相关, 整体相关; 整体无关, 部分无关。
- (2) ① n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow |[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]| \neq 0$, n 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow |[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]| = 0$ 。
- ② $n+1$ 个 n 维向量线性相关。
- ③ 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则添加分量后仍线性无关; 或一组向量线性相关, 去掉某些分量后仍线性相关。

3. 有关向量组的线性表示

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 \Leftrightarrow 至少有一个向量可以用其余向量线性表示。
- (2) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关 $\Leftrightarrow \beta$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 唯一线性表示。
- (3) β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示 $\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta)$

4. 向量组的秩与矩阵的秩之间的关系

设 $r(A_{m \times n}) = r$ ，则 A 的秩 $r(A)$ 与 A 的行列向量组的线性相关性关系为：

- (1) 若 $r(A_{m \times n}) = r = m$ ，则 A 的行向量组线性无关。
- (2) 若 $r(A_{m \times n}) = r < m$ ，则 A 的行向量组线性相关。
- (3) 若 $r(A_{m \times n}) = r = n$ ，则 A 的列向量组线性无关。
- (4) 若 $r(A_{m \times n}) = r < n$ ，则 A 的列向量组线性相关。

5. n 维向量空间的基变换公式及过渡矩阵

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是向量空间 V 的两组基，则基变换公式为：

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)C$$

其中 C 是可逆矩阵，称为由基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵。

6. 坐标变换公式

若向量 γ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的坐标分别是 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$,

$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 即: $\gamma = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \cdots + y_n\beta_n$ ，则向量坐标变换公式为 $X = CY$ 或 $Y = C^{-1}X$ ，其中 C 是从基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵。

7. 向量的内积

$$(\alpha, \beta) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \alpha^T\beta = \beta^T\alpha$$

8. Schmidt 正交化

若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关，则可构造 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 使其两两正交，且 β_i 仅是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ 的线性组合($i = 1, 2, \dots, s$)，再把 β_i 单位化，记 $\gamma_i = \frac{\beta_i}{|\beta_i|}$ ，则 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_i$ 是规范正交向量组。其中

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1, \quad \beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2,$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{(\alpha_s, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 - \frac{(\alpha_s, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)} \beta_2 - \dots - \frac{(\alpha_s, \beta_{s-1})}{(\beta_{s-1}, \beta_{s-1})} \beta_{s-1}$$

向量空间一组基中的向量如果两两正交，就称为正交基；若正交基中每个向量都是单位向量，就称其为规范正交基。

1. 克莱姆法则

[illegible]

2. n 阶矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow Ax = 0$ 只有零解。 $\Leftrightarrow \forall b, Ax = b$ 总有唯一解, 一般地, $r(A_{m \times n}) = n \Leftrightarrow Ax = 0$ 只有零解。

(1) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 若 $r(A_{m \times n}) = m$, 则对 $Ax = b$ 而言必有 $r(A) = r(A : b) = m$, 从而 $Ax = b$ 有解。

$2x_3 - (x_1 + x_2)$ 为 $Ax = 0$ 的解。

4. 奇次线性方程组的基础解系和通解, 解空间, 非奇次线性方程组的通解

(1) 齐次方程组 $Ax = 0$ 恒有解(必有零解)。当有非零解时, 由于解向量的任意线性组合仍是该齐次方程组的解向量, 因此 $Ax = 0$ 的全体解向量构成一个向量空间, 称为该方程组的解空间, 解空间的维数是 $n - r(A)$, 解空间的一组基称为齐次方程组的基础解系。

(2) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 即:

1) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 是 $Ax = 0$ 的解;

2) $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性无关;

3) $Ax = 0$ 的任一解都可以由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$ 线性表出. $k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \dots + k_t\eta_t$ 是 $Ax = 0$ 的通解, 其中 k_1, k_2, \dots, k_t 是任意常数。

矩阵的特征值和特征向量

1. 矩阵的特征值和特征向量的概念及性质

(1) 设 λ 是 A 的一个特征值, 则 $kA, aA + bE, A^2, A^m, f(A), A^T, A^{-1}, A^*$ 有一个特征值分别为 $k\lambda, a\lambda + b, \lambda^2, \lambda^m, f(\lambda), \lambda, \lambda^{-1}, \frac{|A|}{\lambda}$, 且对应特征向量相同 (A^T 例外)。

(2) 若 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值, 则 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii}, \prod_{i=1}^n \lambda_i = |A|$, 从而 $|A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 没有特征值。

(3) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 为 A 的 s 个特征值, 对应特征向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$,

若: $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$,

则: $A^n\alpha = k_1A^n\alpha_1 + k_2A^n\alpha_2 + \dots + k_sA^n\alpha_s = k_1\lambda_1^n\alpha_1 + k_2\lambda_2^n\alpha_2 + \dots + k_s\lambda_s^n\alpha_s$ 。

2. 相似变换、相似矩阵的概念及性质

(1) 若 $A \sim B$, 则

1) $A^T \sim B^T, A^{-1} \sim B^{-1}, A^* \sim B^*$

2) $|A| = |B|, \sum_{i=1}^n A_{ii} = \sum_{i=1}^n B_{ii}, r(A) = r(B)$

3) $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$, 对 $\forall \lambda$ 成立

3. 矩阵可相似对角化的充分必要条件

(1) 设 A 为 n 阶方阵, 则 A 可对角化 \Leftrightarrow 对每个 k_i 重根特征值 λ_i , 有 $n - r(\lambda_i E - A) = k_i$

(2) 设 A 可对角化, 则由 $P^{-1}AP = \Lambda$, 有 $A = P\Lambda P^{-1}$, 从而 $A^n = P\Lambda^n P^{-1}$

(3) 重要结论

1) 若 $A \sim B, C \sim D$, 则 $\begin{bmatrix} A & O \\ O & C \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} B & O \\ O & D \end{bmatrix}$.

2) 若 $A \sim B$, 则 $f(A) \sim f(B), |f(A)| \sim |f(B)|$, 其中 $f(A)$ 为关于 n 阶方阵 A 的多项式。

3) 若 A 为可对角化矩阵, 则其非零特征值的个数(重根重复计算)=秩(A)

4. 实对称矩阵的特征值、特征向量及相似对角阵

(1) 相似矩阵: 设 A, B 为两个 n 阶方阵, 如果存在一个可逆矩阵 P , 使得 $B = P^{-1}AP$ 成立, 则称矩阵 A 与 B 相似, 记为 $A \sim B$ 。

(2) 相似矩阵的性质: 如果 $A \sim B$ 则有:

1) $A^T \sim B^T$

2) $A^{-1} \sim B^{-1}$ (若 A, B 均可逆)

3) $A^k \sim B^k$ (k 为正整数)

4) $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$, 从而 A, B 有相同的特征值

5) $|A| = |B|$, 从而 A, B 同时可逆或者不可逆

6) 秩(A)=秩(B), $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$, A, B 不一定相似

二次型

1. n 个变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的二次齐次函数

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, 其中 $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 称为 n 元二次型, 简

称二次型. 若令 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, 这二次型 f 可改写成矩阵向量形

式 $f = x^T A x$. 其中 A 称为二次型矩阵, 因为 $a_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 所以二次型矩阵均为对称矩阵, 且二次型与对称矩阵一一对应, 并把矩阵 A 的秩称为二次型的秩.

2. 惯性定理, 二次型的标准形和规范形

(1) 惯性定理

对于任一二次型, 不论选取怎样的合同变换使它化为仅含平方项的标准形, 其正负惯性指数与所选变换无关, 这就是所谓的惯性定理.

(2) 标准形

二次型 $f = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T A x$ 经过合同变换 $x = Cy$ 化为 $f = x^T A x = y^T C^T A C$

$y = \sum_{i=1}^r d_i y_i^2$ 称为 $f (r \leq n)$ 的标准形. 在一般的数域内, 二次型的标准形不是唯一的, 与所作的合同变换有关, 但系数不为零的平方项的个数由 $r(A)$ 的秩唯一确定.

(3) 规范形

任一实二次型 f 都可经过合同变换化为规范形 $f = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$, 其中 r 为 A 的秩, p 为正惯性指数, $r - p$ 为负惯性指数, 且规范型唯一.

3. 用正交变换和配方法化二次型为标准形, 二次型及其矩阵的正定性

设 A 正定 $\Rightarrow kA (k > 0), A^T, A^{-1}, A^*$ 正定; $|A| > 0, A$ 可逆; $a_{ii} > 0$, 且 $|A_{ii}| > 0$

A, B 正定 $\Rightarrow A + B$ 正定, 但 AB, BA 不一定正定

A 正定 $\Leftrightarrow f(x) = x^T A x > 0, \forall x \neq 0$

$\Leftrightarrow A$ 的各阶顺序主子式全大于零

$\Leftrightarrow A$ 的所有特征值大于零

$\Leftrightarrow A$ 的正惯性指数为 n

\Leftrightarrow 存在可逆阵 P 使 $A = P^T P$

\Leftrightarrow 存在正交矩阵 Q ，使 $Q^T A Q = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$,

其中 $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$. 正定 $\Rightarrow kA (k > 0), A^T, A^{-1}, A^*$ 正定; $|A| > 0, A$ 可逆; $a_{ii} > 0$, 且 $|A_{ii}| > 0$ 。

概率论和数理统计

随机事件和概率

1. 事件的关系与运算

- (1) 子事件: $A \subset B$, 若 A 发生, 则 B 发生。
- (2) 相等事件: $A = B$, 即 $A \subset B$, 且 $B \subset A$ 。
- (3) 和事件: $A \cup B$ (或 $A + B$), A 与 B 中至少有一个发生。
- (4) 差事件: $A - B$, A 发生但 B 不发生。
- (5) 积事件: $A \cap B$ (或 AB), A 与 B 同时发生。
- (6) 互斥事件 (互不相容): $A \cap B = \emptyset$ 。
- (7) 互逆事件 (对立事件): $A \cap B = \emptyset, A \cup B = \Omega, A = \bar{B}, B = \bar{A}$ 。

2. 运算律

- (1) 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$
- (2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- (3) 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

3. 德·摩根律

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

4. 完全事件组

$A_1 A_2 \cdots A_n$ 两两互斥, 且和事件为必然事件, 即 $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

5. 概率的基本概念

- (1) 概率: 事件发生的可能性大小的度量, 其严格定义如下:

概率 $P(g)$ 为定义在事件集合上的满足下面 3 个条件的函数:

1) 对任何事件 A , $P(A) \geq 0$

2) 对必然事件 Ω , $P(\Omega) = 1$

3) 对 $A_1 A_2 \cdots A_n, \dots$, 若 $A_i A_j = \emptyset (i \neq j)$, 则: $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

(2) 概率的基本性质

1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;

2) $P(A - B) = P(A) - P(AB)$;

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ 特别, 当 $B \subset A$ 时, $P(A - B) = P(A) - P(B)$ 且
 $P(B) \leq P(A)$; $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$

4) 若 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互斥, 则 $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

(3) 古典型概率: 实验的所有结果只有有限个, 且每个结果发生的可能性相同, 其概率计

算公式: $P(A) = \frac{\text{事件}A\text{发生的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$

(4) 几何型概率: 样本空间 Ω 为欧氏空间中的一个区域, 且每个样本点的出现具有等可能

性, 其概率计算公式: $P(A) = \frac{A\text{的度量(长度、面积、体积)}}{\Omega\text{的度量(长度、面积、体积)}}$

6. 概率的基本公式

(1) 条件概率: $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, 表示 A 发生的条件下, B 发生的概率

(2) 全概率公式: $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i), B_i B_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$.

(3) Bayes 公式:

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)}, j = 1, 2, \dots, n$$

注: 上述公式中事件 B_i 的个数可为可列个.

(4) 乘法公式: $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = P(A_2)P(A_1|A_2)$ $P(A_1A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1A_2 \cdots A_{n-1})$

7. 事件的独立性

(1) A 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

(2) A, B, C 两两独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B); P(BC) = P(B)P(C); P(AC) = P(A)P(C);$

(3) A, B, C 相互独立 $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B); P(BC) = P(B)P(C); P(AC) = P(A)P(C);$
 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C).$

8. 独立重复试验

将某试验独立重复 n 次, 若每次实验中事件 A 发生的概率为 p, 则 n 次试验中 A 发生 k 次的概率为: $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$ 。

9. 重要公式与结论

(1) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$

(3) $P(A - B) = P(A) - P(AB)$

(4) $P(\overline{AB}) = P(A) - P(AB), P(A) = P(AB) + P(\overline{AB}), P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{AB}) =$
 $P(AB) + P(\overline{AB}) + P(\overline{AB})$

(5) 条件概率 $P(\cdot|B)$ 满足概率的所有性质,

例如: $P(\overline{A_1}|B) = 1 - P(A_1|B)$ $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B)$
 $P(A_1A_2|B) = P(A_1|B)P(A_2|A_1B)$

(6) 若 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立, 则 $P(\cap_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n P(A_i), P(\cup_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$

(7) 互斥、互逆与独立性之间的关系: A 与 B 互逆 \Rightarrow A 与 B 互斥, 但反之不成立, A 与 B 互斥 (或互逆) 且均非零概率事件 \Rightarrow A 与 B 不独立.

(8) 若 $A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_n$ 相互独立, 则 $f(A_1, A_2, \dots, A_m)$ 与 $g(B_1, B_2, \dots, B_n)$ 也相互独立, 其中 $f(\cdot), g(\cdot)$ 分别表示对相应事件做任意事件运算后所得的事件, 另外, 概率为 1 (或 0) 的事件与任何事件相互独立.

随机变量及其概率分布

1. 随机变量及概率分布

取值带有随机性的变量, 严格地说是定义在样本空间上, 取值于实数的函数称为随机变量, 概率分布通常指分布函数或分布律

2. 分布函数的概念与性质

定义: $F(x) = P(X \leq x), -\infty < x < +\infty$

性质: (1) $0 \leq F(x) \leq 1$ (2) $F(x)$ 单调不减

(3) 右连续 $F(x+0) = F(x)$ (4) $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$

3. 离散型随机变量的概率分布

$P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots, n, \dots$ $p_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

4. 连续型随机变量的概率密度

概率密度 $f(x)$; 非负可积, 且: (1) $f(x) \geq 0$, (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (3) x 为 $f(x)$ 的连续点, 则:

$f(x) = F'(x)$ 分布函数 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$

5. 常见分布

(1) 0-1 分布: $P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k}, k = 0, 1$

(2) 二项分布: $B(n, p)$: $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n$

(3) Poisson 分布: $p(\lambda)$: $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda > 0, k = 0, 1, 2, \dots$

(4) 均匀分布 $U(a, b)$: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(5) 正态分布: $N(\mu, \sigma^2)$: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0, -\infty < x < +\infty$

(6) 指数分布: $E(\lambda)$: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \lambda > 0 \\ 0, & \end{cases}$

(7) 几何分布: $G(p)$: $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p, 0 < p < 1, k = 1, 2, \dots$

(8) 超几何分布: $H(N, M, n)$: $P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k = 0, 1, \dots, \min(n, M)$

6. 随机变量函数的概率分布

(1) 离散型: $P(X = x_i) = p_i, Y = g(X)$

则: $P(Y = y_j) = \sum_{g(x_i)=y_j} P(X = x_i)$

(2) 连续型: $X \sim f_X(x), Y = g(x)$

则: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = \int_{g(x) \leq y} f_X(x) dx, \quad f_Y(y) = F'_Y(y)$

7. 重要公式与结论

(1) $X \sim N(0, 1) \Rightarrow \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \Phi(0) = \frac{1}{2}, \Phi(-a) = P(X \leq -a) = 1 - \Phi(a)$

(2) $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1), P(X \leq a) = \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$

(3) $X \sim E(\lambda) \Rightarrow P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$

(4) $X \sim G(p) \Rightarrow P(X = m + k | X > m) = P(X = k)$

(5) 离散型随机变量的分布函数为阶梯间断函数; 连续型随机变量的分布函数为连续函数, 但不一定为处处可导函数。

(6) 存在既非离散也非连续型随机变量。

多维随机变量及其分布

1. 二维随机变量及其联合分布

由两个随机变量构成的随机向量 (X, Y) , 联合分布为 $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

2. 二维离散型随机变量的分布

(1) 联合概率分布律 $P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}; i, j = 1, 2, \dots$

(2) 边缘分布律 $p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, i = 1, 2, \dots$ $p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, j = 1, 2, \dots$

(3) 条件分布律 $P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$ $P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$

3. 二维连续性随机变量的密度

(1) 联合概率密度 $f(x, y)$:

1) $f(x, y) \geq 0$ 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$

(2) 分布函数: $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$

(3) 边缘概率密度: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$ $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$

(4) 条件概率密度: $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$ $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$

4. 常见二维随机变量的联合分布

(1) 二维均匀分布: $(x, y) \sim U(D)$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{s(D)}, & (x, y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(2) 二维正态分布: $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

5. 随机变量的独立性和相关性

X 和 Y 的相互独立: $\Leftrightarrow F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$:

$\Leftrightarrow p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$ (离散型) $\Leftrightarrow f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ (连续型)

X 和 Y 的相关性:

相关系数 $\rho_{XY} = 0$ 时, 称 X 和 Y 不相关, 否则称 X 和 Y 相关

6. 两个随机变量简单函数的概率分布

离散型: $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, Z = g(X, Y)$ 则:

$$P(Z = z_k) = P\{g(X, Y) = z_k\} = \sum_{g(x_i, y_j) = z_k} P(X = x_i, Y = y_j)$$

连续型: $(X, Y) \sim f(x, y), Z = g(X, Y)$ 则:

$$F_z(z) = P\{g(X, Y) \leq z\} = \iint_{g(x, y) \leq z} f(x, y) dx dy, \quad f_z(z) = F'_z(z)$$

7. 重要公式与结论

(1) 边缘密度公式: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$

(2) $P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy$

(3) 若 (X, Y) 服从二维正态分布 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 则有:

1) $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

2) X 与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow \rho = 0$, 即 X 与 Y 不相关。

3) $C_1 X + C_2 Y \sim N(C_1 \mu_1 + C_2 \mu_2, C_1^2 \sigma_1^2 + C_2^2 \sigma_2^2 + 2C_1 C_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho)$

4) X 关于 $Y=y$ 的条件分布为: $N(\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - \mu_2), \sigma_1^2 (1 - \rho^2))$

5) Y 关于 $X=x$ 的条件分布为: $N(\mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (x - \mu_1), \sigma_2^2 (1 - \rho^2))$

(4) 若 X 与 Y 独立, 且分别服从 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则:

$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, 0), C_1 X + C_2 Y \sim N(C_1 \mu_1 + C_2 \mu_2, C_1^2 \sigma_1^2 + C_2^2 \sigma_2^2)$.

(5) 若 X 与 Y 相互独立, $f(x)$ 和 $g(x)$ 为连续函数, 则 $f(X)$ 和 $g(Y)$ 也相互独立。

随机变量的数字特征

1. 数学期望

离散型: $P\{X = x_i\} = p_i, E(X) = \sum_i x_i p_i$;

连续型: $X \sim f(x), E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

性质:

$$(1) E(C) = C, E[E(X)] = E(X)$$

$$(2) E(C_1X + C_2Y) = C_1E(X) + C_2E(Y)$$

$$(3) \text{ 若 } X \text{ 和 } Y \text{ 独立, 则 } E(XY) = E(X)E(Y) \quad (4) [E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$$

$$2. \text{ 方差: } D(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$3. \text{ 标准差: } \sqrt{D(X)},$$

$$4. \text{ 离散型: } D(X) = \sum_i [x_i - E(X)]^2 p_i$$

$$5. \text{ 连续型: } D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x)dx$$

性质:

$$(1) D(C) = 0, D[E(X)] = 0, D[D(X)] = 0$$

$$(2) X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立, 则 } D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

$$(3) D(C_1X + C_2) = C_1^2 D(X)$$

$$(4) \text{ 一般有 } D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2Cov(X, Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\rho\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$

$$(5) D(X) < E(X - C)^2, C \neq E(X)$$

$$(6) D(X) = 0 \Leftrightarrow P\{X = C\} = 1$$

6. 随机变量函数的数学期望

$$(1) \text{ 对于函数 } Y = g(x)$$

$$X \text{ 为离散型: } P\{X = x_i\} = p_i, E(Y) = \sum_i g(x_i)p_i;$$

$$X \text{ 为连续型: } X \sim f(x), E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

$$(2) Z = g(X, Y); (X, Y) \sim P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}; E(Z) = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij}$$

$$(X, Y) \sim f(x, y); E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$$

7. 协方差 $Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$

8. 相关系数 $\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$, k 阶原点矩 $E(X^k)$; k 阶中心矩 $E\{[X - E(X)]^k\}$

性质:

$$(1) Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$$

$$(2) Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$$

$$(3) Cov(X_1 + X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + Cov(X_2, Y)$$

$$(4) |\rho(X, Y)| \leq 1$$

$$(5) \rho(X, Y) = 1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1, \text{ 其中 } a > 0$$

$$\rho(X, Y) = -1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1, \text{ 其中 } a < 0$$

9. 重要公式与结论

$$(1) D(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$(2) Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$(3) |\rho(X, Y)| \leq 1, \text{ 且 } \rho(X, Y) = 1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1, \text{ 其中 } a > 0$$

$$\rho(X, Y) = -1 \Leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1, \text{ 其中 } a < 0$$

(4) 下面 5 个条件互为充要条件:

$$\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow Cov(X, Y) = 0 \Leftrightarrow E(XY) = E(X)E(Y) \Leftrightarrow D(X + Y) = D(X) + D(Y) \Leftrightarrow$$

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y)$$

注: X 与 Y 独立为上述 5 个条件中任何一个成立的充分条件, 但非必要条件。

数理统计的基本概念

1. 基本概念

总体：研究对象的全体，它是一个随机变量，用 X 表示。

个体：组成总体的每个基本元素。

简单随机样本：来自总体 X 的 n 个相互独立且与总体同分布的随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n ，称为容量为 n 的简单随机样本，简称样本。

统计量：设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的一个样本， $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是样本的连续函数，且 $g(\cdot)$ 中不含任何未知参数，则称 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为统计量

样本均值： $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

样本方差： $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

样本矩：样本 k 阶原点矩： $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, k = 1, 2, \dots$

样本 k 阶中心矩： $B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k, k = 1, 2, \dots$

2. 分布

χ^2 分布： $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$ ，其中 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立，且同服从 $N(0,1)$

t 分布： $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$ ，其中 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$ ，且 X, Y 相互独立。

F分布： $F = \frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2)$ ，其中 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$ ，且 X, Y 相互独立。

分位数：若 $P(X \leq x_\alpha) = \alpha$ ，则称 x_α 为 X 的 α 分位数

3. 正态总体的常用样本分布

(1) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ，则：

$$1) \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{或者} \quad \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

$$2) \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$3) \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$$

$$4) \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

4. 重要公式与结论

$$(1) \text{ 对于 } \chi^2 \sim \chi^2(n), \text{ 有 } E(\chi^2(n)) = n, D(\chi^2(n)) = 2n;$$

$$(2) \text{ 对于 } T \sim t(n), \text{ 有 } E(T) = 0, D(T) = \frac{n}{n-2} (n > 2);$$

$$(3) \text{ 对于 } F \sim F(m, n), \text{ 有 } \frac{1}{F} \sim F(n, m), F_{\alpha/2}(m, n) = \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n, m)};$$

$$(4) \text{ 对于任意总体 } X, \text{ 有 } E(\bar{X}) = E(X), E(S^2) = D(X), D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n}$$