

Coomologia di Čech

Dario Di Meo (D70/000023)

Seminario di Geometria Algebrica, a.a. 2025/2026

Outline

- 1 Coomologia di un ricoprimento a coefficienti in un fascio
- 2 Coomologia di Čech
- 3 Rapporto con la coomologia di fasci

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto K è una coppia

$$K = (\text{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto K è una coppia

$$K = (\text{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

- ➊ $\text{Vert}(K)$ è un insieme non vuoto di elementi chiamati **vertici**;

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto K è una coppia

$$K = (\text{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

- ① $\text{Vert}(K)$ è un insieme non vuoto di elementi chiamati **vertici**;
- ② Σ è un insieme di parti finite e non vuote di $\text{Vert}(K)$ chiamate **simplessi** e tale che

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto K è una coppia

$$K = (\text{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

- ① $\text{Vert}(K)$ è un insieme non vuoto di elementi chiamati **vertici**;
- ② Σ è un insieme di parti finite e non vuote di $\text{Vert}(K)$ chiamate **simplessi** e tale che
 - ① Per ogni $v \in \text{Vert}(K)$, $\{v\} \in \Sigma$;

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto K è una coppia

$$K = (\text{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

- ① $\text{Vert}(K)$ è un insieme non vuoto di elementi chiamati **vertici**;
- ② Σ è un insieme di parti finite e non vuote di $\text{Vert}(K)$ chiamate **simplessi** e tale che
 - ① Per ogni $v \in \text{Vert}(K)$, $\{v\} \in \Sigma$;
 - ② $\sigma \in \Sigma \wedge \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma$.

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto K è una coppia

$$K = (\text{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

- ① $\text{Vert}(K)$ è un insieme non vuoto di elementi chiamati **vertici**;
- ② Σ è un insieme di parti finite e non vuote di $\text{Vert}(K)$ chiamate **simplessi** e tale che
 - ① Per ogni $v \in \text{Vert}(K)$, $\{v\} \in \Sigma$;
 - ② $\sigma \in \Sigma \wedge \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma$.

Se σ è un simplesso e $|\sigma| = q + 1$, σ si dirà q -simplesso.

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto K è una coppia

$$K = (\text{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

- ① $\text{Vert}(K)$ è un insieme non vuoto di elementi chiamati **vertici**;
- ② Σ è un insieme di parti finite e non vuote di $\text{Vert}(K)$ chiamate **simplessi** e tale che
 - ① Per ogni $v \in \text{Vert}(K)$, $\{v\} \in \Sigma$;
 - ② $\sigma \in \Sigma \wedge \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma$.

Se σ è un simplesso e $|\sigma| = q + 1$, σ si dirà q -simplesso.

Il sottoinsieme di Σ di tutti i q -simplessi si indicherà con Σ_q .

Fissiamo uno spazio topologico X .

Definizione (Nervo)

Fissiamo uno spazio topologico X .

Definizione (Nervo)

Sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto di X non contenente il vuoto.

Fissiamo uno spazio topologico X .

Definizione (Nervo)

Sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto di X non contenente il vuoto.

Si dice **nervo**, e si indica con $N(\mathcal{U})$, il complesso simpliciale astratto i cui vertici sono gli aperti di \mathcal{U} : $\text{Vert}(N(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$,

Fissiamo uno spazio topologico X .

Definizione (Nervo)

Sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto di X non contenente il vuoto.

Si dice **nervo**, e si indica con $N(\mathcal{U})$, il complesso simpliciale astratto i cui vertici sono gli aperti di \mathcal{U} : $\text{Vert}(N(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$, e i cui simplexi sono le sottofamiglie finite di aperti a intersezione non vuota:

$$\Sigma = \left\{ (U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_n}) \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \mid n \in \mathbb{N}_0 \wedge \bigcap_{j=0}^n U_{i_j} \neq \emptyset \right\}$$

Fissiamo un fascio su X di gruppi abeliani \mathcal{F} .

Fissiamo un fascio su X di gruppi abeliani \mathcal{F} .

Definizione (Complesso dei gruppi di cocatene)

Fissiamo un fascio su X di gruppi abeliani \mathcal{F} .

Definizione (Complesso dei gruppi di cocatene)

Definiamo la seguente successione di gruppi e omomorfismi

$$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F}) = \cdots \longrightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^q} C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

dove:

Fissiamo un fascio su X di gruppi abeliani \mathcal{F} .

Definizione (Complesso dei gruppi di cocatene)

Definiamo la seguente successione di gruppi e omomorfismi

$$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F}) = \cdots \longrightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^q} C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

dove: $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \underset{\sigma \in \Sigma_q}{\text{Dr}} \mathcal{F}(\bigcap \sigma)$

Fissiamo un fascio su X di gruppi abeliani \mathcal{F} .

Definizione (Complesso dei gruppi di cocatene)

Definiamo la seguente successione di gruppi e omomorfismi

$$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F}) = \cdots \longrightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^q} C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

dove: $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma_q} \mathcal{F}(\bigcap \sigma)$ e, presa $f : \Sigma_q \rightarrow \bigcup_{\sigma \in \Sigma_q} \mathcal{F}(\bigcap \sigma)$
in $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$:

Fissiamo un fascio su X di gruppi abeliani \mathcal{F} .

Definizione (Complesso dei gruppi di cocatene)

Definiamo la seguente successione di gruppi e omomorfismi

$$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F}) = \cdots \longrightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^q} C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

dove: $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma_q} \mathcal{F}(\bigcap \sigma)$ e, presa $f : \Sigma_q \rightarrow \bigcup_{\sigma \in \Sigma_q} \mathcal{F}(\bigcap \sigma)$
in $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$:

$$\delta^q(f) = \left(\sigma \in \Sigma_{q+1} \mapsto \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i f(\hat{\sigma}^i) \in \bigcup_{\tau \in \Sigma_{q+1}} \mathcal{F}(\bigcap \tau) \right)$$

in $C^{q+1}(\mathcal{F}, \mathcal{U})$.

Esercizio

$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F})$ è un complesso.

Esercizio

$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F})$ è un complesso.

Definizione (Coomologia di un ricoprimento a coefficienti in \mathcal{F})

Esercizio

$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F})$ è un complesso.

Definizione (Coomologia di un ricoprimento a coefficienti in \mathcal{F})

Sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto di X .

Esercizio

$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F})$ è un complesso.

Definizione (Coomologia di un ricoprimento a coefficienti in \mathcal{F})

Sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto di X .

Chiamiamo **gruppi di coomologia** di \mathcal{U} a coefficienti in \mathcal{F} i gruppi di omologia del complesso $C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F})$.

Esercizio

$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F})$ è un complesso.

Definizione (Coomologia di un ricoprimento a coefficienti in \mathcal{F})

Sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto di X .

Chiamiamo **gruppi di coomologia** di \mathcal{U} a coefficienti in \mathcal{F} i gruppi di omologia del complesso $C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F})$.

Li indichiamo con

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

Outline

- 1 Coomologia di un ricoprimento a coefficienti in un fascio
- 2 Coomologia di Čech
- 3 Rapporto con la coomologia di fasci

Definizione (Sistema diretto)

Definizione (Sistema diretto)

Siano (I, \preceq) un insieme parzialmente ordinato e \mathcal{C} una categoria.

Definizione (Sistema diretto)

Siano (I, \preceq) un insieme parzialmente ordinato e \mathcal{C} una categoria.
Un **sistema diretto** in \mathcal{C} su I è una coppia ordinata

$$\{M_i, \varphi_j^i\} := ((M_i)_{i \in I}, (\varphi_j^i)_{i \preceq j})$$

dove

Definizione (Sistema diretto)

Siano (I, \preceq) un insieme parzialmente ordinato e \mathcal{C} una categoria.

Un **sistema diretto** in \mathcal{C} su I è una coppia ordinata

$$\{M_i, \varphi_j^i\} := ((M_i)_{i \in I}, (\varphi_j^i)_{i \preceq j})$$

dove $(M_i)_{i \in I} \subseteq \text{obj}(\mathcal{C})$;

Definizione (Sistema diretto)

Siano (I, \preceq) un insieme parzialmente ordinato e \mathcal{C} una categoria.

Un **sistema diretto** in \mathcal{C} su I è una coppia ordinata

$$\{M_i, \varphi_j^i\} := ((M_i)_{i \in I}, (\varphi_j^i)_{i \preceq j})$$

dove $(M_i)_{i \in I} \subseteq \text{obj}(\mathcal{C})$; $(\varphi_j^i)_{i \preceq j} \subseteq M_j^{M_i}$ con $\varphi_i^i = \iota_{M_i}$ per ogni i ;

Definizione (Sistema diretto)

Siano (I, \preceq) un insieme parzialmente ordinato e \mathcal{C} una categoria.
Un **sistema diretto** in \mathcal{C} su I è una coppia ordinata

$$\{M_i, \varphi_j^i\} := ((M_i)_{i \in I}, (\varphi_j^i)_{i \preceq j})$$

dove $(M_i)_{i \in I} \subseteq \text{obj}(\mathcal{C})$; $(\varphi_j^i)_{i \preceq j} \subseteq M_j^{M_i}$ con $\varphi_i^i = \iota_{M_i}$ per ogni i ;
per ogni $i \preceq j \preceq k$, il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\varphi_k^i} & M_k \\ & \searrow \varphi_j^i & \nearrow \varphi_k^j \\ & M_j & \end{array}$$

Definizione (Limite diretto)

Definizione (Limite diretto)

Siano (I, \preceq) un poset, \mathcal{C} una categoria e $\{M_i, \varphi_j^i\}$ diretto in \mathcal{C} .

Definizione (Limite diretto)

Siano (I, \preceq) un poset, \mathcal{C} una categoria e $\{M_i, \varphi_j^i\}$ diretto in \mathcal{C} .

Il **limite diretto** è una coppia costituita da un oggetto $\varinjlim M_i$ e una famiglia $(M_i \xrightarrow{\alpha_i} \varinjlim M_i)_{i \in I}$ di **insertion morphisms** tali che

Definizione (Limite diretto)

Siano (I, \preceq) un poset, \mathcal{C} una categoria e $\{M_i, \varphi_j^i\}$ diretto in \mathcal{C} .

Il **limite diretto** è una coppia costituita da un oggetto $\varinjlim M_i$ e una famiglia $(M_i \xrightarrow{\alpha_i} \varinjlim M_i)_{i \in I}$ di **insertion morphisms** tali che

- ① $\varphi_j^i \cdot \alpha_j = \alpha_i$ quando $i \preceq j$;

Definizione (Limite diretto)

Siano (I, \preceq) un poset, \mathcal{C} una categoria e $\{M_i, \varphi_j^i\}$ diretto in \mathcal{C} .

Il **limite diretto** è una coppia costituita da un oggetto $\varinjlim M_i$ e una famiglia $(M_i \xrightarrow{\alpha_i} \varinjlim M_i)_{i \in I}$ di **insertion morphisms** tali che

- ❶ $\varphi_j^i \cdot \alpha_j = \alpha_i$ quando $i \preceq j$;
- ❷ Presi $X \in \text{obj}(\mathcal{C})$ e dei morfismi $f_i : M_i \rightarrow X$ t.c. $\varphi_j^i \cdot f_j = f_i$ per ogni $i \preceq j$, esiste ed è unico $\theta : \varinjlim M_i \rightarrow X$ che rende il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \varinjlim M_i & \xrightarrow{\quad \theta \quad} & X \\
 \alpha_i \swarrow & & \searrow f_i \\
 M_i & & \\
 \varphi_j^i \downarrow & & f_j \\
 M_j & &
 \end{array}$$

Definizione (Classe diretta)

Definizione (Classe diretta)

Una classe \mathcal{K} si dice **classe diretta** se su di essa è definita una relazione \preceq riflessiva, asimmetrica e transitiva e se per ogni $k, k' \in \mathcal{K}$ esiste $k^* \in \mathcal{K}$ tale che $k \preceq k^*$ e $k' \preceq k^*$.

Definizione (Classe diretta)

Una classe \mathcal{K} si dice **classe diretta** se su di essa è definita una relazione \preceq riflessiva, asimmetrica e transitiva e se per ogni $k, k' \in \mathcal{K}$ esiste $k^* \in \mathcal{K}$ tale che $k \preceq k^*$ e $k' \preceq k^*$.

Proposizione

Siano \mathcal{K} una classe diretta, \mathcal{C} una categoria **cocompleta** e $\{A_k, \varphi_j^k\}$ un sistema diretto in \mathcal{C} su \mathcal{K} .

Definizione (Classe diretta)

Una classe \mathcal{K} si dice **classe diretta** se su di essa è definita una relazione \preceq riflessiva, asimmetrica e transitiva e se per ogni $k, k' \in \mathcal{K}$ esiste $k^* \in \mathcal{K}$ tale che $k \preceq k^*$ e $k' \preceq k^*$.

Proposizione

Siano \mathcal{K} una classe diretta, \mathcal{C} una categoria **cocompleta** e $\{A_k, \varphi_j^k\}$ un sistema diretto in \mathcal{C} su \mathcal{K} . Se due sottoclassi di \mathcal{K} , siano esse \mathcal{L} e \mathcal{M} , sono insiemi e **cofinali** in \mathcal{K} , allora

$$\varinjlim_{\mathcal{L}} A_k \cong \varinjlim_{\mathcal{M}} A_k$$

Definizione (Raffinamento)

Definizione (Raffinamento)

Siano \mathcal{U} e \mathcal{V} due ricoprimenti aperti di X .

Definizione (Raffinamento)

Siano \mathcal{U} e \mathcal{V} due ricoprimenti aperti di X .

\mathcal{V} si dice **raffinamento** di \mathcal{U} , e si indica con $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$, se, per ogni $V \in \mathcal{V}$, esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che $V \subseteq U$.

Definizione (Raffinamento)

Siano \mathcal{U} e \mathcal{V} due ricoprimenti aperti di X .

\mathcal{V} si dice **raffinamento** di \mathcal{U} , e si indica con $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$, se, per ogni $V \in \mathcal{V}$, esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che $V \subseteq U$.

Definizione (Funzione di raffinamento)

Definizione (Raffinamento)

Siano \mathcal{U} e \mathcal{V} due ricoprimenti aperti di X .

\mathcal{V} si dice **raffinamento** di \mathcal{U} , e si indica con $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$, se, per ogni $V \in \mathcal{V}$, esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che $V \subseteq U$.

Definizione (Funzione di raffinamento)

Siano \mathcal{U} e \mathcal{V} due ricoprimenti aperti di X tali che $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$.

Definizione (Raffinamento)

Siano \mathcal{U} e \mathcal{V} due ricoprimenti aperti di X .

\mathcal{V} si dice **raffinamento** di \mathcal{U} , e si indica con $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$, se, per ogni $V \in \mathcal{V}$, esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che $V \subseteq U$.

Definizione (Funzione di raffinamento)

Siano \mathcal{U} e \mathcal{V} due ricoprimenti aperti di X tali che $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$.

Scegliere, al variare di $V \in \mathcal{V}$, $V \subseteq U_V \in \mathcal{U}$ definisce una funzione

$$r : V \in \mathcal{V} \mapsto U_V \in \mathcal{U}$$

detta **funzione di raffinamento**.

Definizione (Ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$)

Definizione (Ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$)

Poniamo $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \preceq \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ se e solo se, per definizione, esiste una funzione di raffinamento $r : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$.

Definizione (Ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$)

Poniamo $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \preceq \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ se e solo se, per definizione, esiste una funzione di raffinamento $r : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$.

(Si dimosta che) \preceq è un ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Definizione (Ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$)

Poniamo $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \preceq \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ se e solo se, per definizione, esiste una funzione di raffinamento $r : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$.

(Si dimosta che) \preceq è un ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Indichiamo \mathcal{K} la classe diretta dei gruppi $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Definizione (Ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$)

Poniamo $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \preceq \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ se e solo se, per definizione, esiste una funzione di raffinamento $r : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$.

(Si dimosta che) \preceq è un ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Indichiamo \mathcal{K} la classe diretta dei gruppi $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Esercizio (Ricerca di un sottoinsieme cofinale in \mathcal{K})

Definizione (Ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$)

Poniamo $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \preceq \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ se e solo se, per definizione, esiste una funzione di raffinamento $r : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$.

(Si dimosta che) \preceq è un ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Indichiamo \mathcal{K} la classe diretta dei gruppi $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Esercizio (Ricerca di un sottoinsieme cofinale in \mathcal{K})

La sottoclassificazione di \mathcal{K}

$\mathcal{H} := \{\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : \mathcal{U} \text{ è un ricoprimento aperto senza ripetizioni}\}$
è un insieme cofinale in \mathcal{K} .

Definizione (Coomologia di Čech)

Definizione (Coomologia di Čech)

La **coomologia di Čech** di X a coefficienti in \mathcal{F} è definita come

$$\check{H}^q(\mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{H}} \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

Outline

- 1 Coomologia di un ricoprimento a coefficienti in un fascio
- 2 Coomologia di Čech
- 3 Rapporto con la coomologia di fasci

Proposizione

Consideriamo $(H^q)_{q \in \mathbb{N}_0}$ e $(\check{H}^q)_{q \in \mathbb{N}_0}$ e supponiamo che:

Proposizione

Consideriamo $(H^q)_{q \in \mathbb{N}_0}$ e $(\check{H}^q)_{q \in \mathbb{N}_0}$ e supponiamo che:

- 1 Per ogni successione esatta corta $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ ci siano due successioni esatte lunghe:

$$\cdots \rightarrow H^{q-1}(\mathcal{H}) \rightarrow H^q(\mathcal{F}) \rightarrow H^q(\mathcal{G}) \rightarrow H^q(\mathcal{H}) \rightarrow H^{q+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow \check{H}^{q-1}(\mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^{q+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

Proposizione

Consideriamo $(H^q)_{q \in \mathbb{N}_0}$ e $(\check{H}^q)_{q \in \mathbb{N}_0}$ e supponiamo che:

- 1 Per ogni successione esatta corta $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ ci siano due successioni esatte lunghe:

$$\cdots \rightarrow H^{q-1}(\mathcal{H}) \rightarrow H^q(\mathcal{F}) \rightarrow H^q(\mathcal{G}) \rightarrow H^q(\mathcal{H}) \rightarrow H^{q+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow \check{H}^{q-1}(\mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^{q+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

- 2 H^0 sia naturalmente isomorfo a \check{H}^0 ;

Proposizione

Consideriamo $(H^q)_{q \in \mathbb{N}_0}$ e $(\check{H}^q)_{q \in \mathbb{N}_0}$ e supponiamo che:

- ① Per ogni successione esatta corta $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ ci siano due successioni esatte lunghe:

$$\cdots \rightarrow H^{q-1}(\mathcal{H}) \rightarrow H^q(\mathcal{F}) \rightarrow H^q(\mathcal{G}) \rightarrow H^q(\mathcal{H}) \rightarrow H^{q+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow \check{H}^{q-1}(\mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^{q+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

- ② H^0 sia naturalmente isomorfo a \check{H}^0 ;
- ③ $H^q(\mathcal{I}) = 0 = \check{H}^q(\mathcal{I})$ per tutti i fasci iniettivi \mathcal{I} e ogni $q \in \mathbb{N}$.

Proposizione

Consideriamo $(H^q)_{q \in \mathbb{N}_0}$ e $(\check{H}^q)_{q \in \mathbb{N}_0}$ e supponiamo che:

- 1 Per ogni successione esatta corta $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ ci siano due successioni esatte lunghe:

$$\cdots \rightarrow H^{q-1}(\mathcal{H}) \rightarrow H^q(\mathcal{F}) \rightarrow H^q(\mathcal{G}) \rightarrow H^q(\mathcal{H}) \rightarrow H^{q+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow \check{H}^{q-1}(\mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^{q+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

- 2 H^0 sia naturalmente isomorfo a \check{H}^0 ;
- 3 $H^q(\mathcal{I}) = 0 = \check{H}^q(\mathcal{I})$ per tutti i fasci iniettivi \mathcal{I} e ogni $q \in \mathbb{N}$.

Allora H^q è naturalmente isomorfo a \check{H}^q per ogni $q \in \mathbb{N}_0$.

Osservazione

I funtori di coomologia di fasci sono in accordo con la prima e la terza ipotesi; inoltre, per ogni \mathcal{F} , si ha $H^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$.

Osservazione

I funtori di coomologia di fasci sono in accordo con la prima e la terza ipotesi; inoltre, per ogni \mathcal{F} , si ha $H^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$.

Esercizio (Coomologia di Čech in grado 0)

Osservazione

I funtori di coomologia di fasci sono in accordo con la prima e la terza ipotesi; inoltre, per ogni \mathcal{F} , si ha $H^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$.

Esercizio (Coomologia di Čech in grado 0)

Per ogni ricoprimento aperto \mathcal{U} e ogni fascio \mathcal{F} si ha:

Osservazione

I funtori di coomologia di fasci sono in accordo con la prima e la terza ipotesi; inoltre, per ogni \mathcal{F} , si ha $H^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$.

Esercizio (Coomologia di Čech in grado 0)

Per ogni ricoprimento aperto \mathcal{U} e ogni fascio \mathcal{F} si ha:

$$\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$$

Teorema

*Sia $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ è una successione esatta corta di fasci su uno spazio **paraccompatto**.*

Teorema

Sia $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ è una successione esatta corta di fasci su uno spazio **paraccompatto**. Allora esiste una successione esatta

$$0 \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

Teorema

Sia $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ è una successione esatta corta di fasci su uno spazio **paraccompatto**. Allora esiste una successione esatta

$$0 \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

Lemma

Sia \mathcal{I} un fascio iniettivo.

Teorema

Sia $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ è una successione esatta corta di fasci su uno spazio **paraccompatto**. Allora esiste una successione esatta

$$0 \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

Lemma

Sia \mathcal{I} un fascio iniettivo. Allora

$$\check{H}^q(\mathcal{I}) = 0$$

per ogni $q \in \mathbb{N}$.

Teorema

Sia \mathcal{F} un fascio su uno spazio paracompatto.

Teorema

Sia \mathcal{F} un fascio su uno spazio paraccompatto. Allora

$$\check{H}^q(\mathcal{F}) \cong H^q(\mathcal{F})$$

per ogni $q \in \mathbb{N}_0$.