Coomologia di Čech

Dario Di Meo, D70000023

Esame di Geometria Algebrica, XX/12/25

Outline

1. Coomologia di fasci
   - Successioni di oggetti e morfismi
   - Categorie abeliane
   - Fasci
2. Coomologia di Čech
   - Limiti diretti
   - La classe diretta degli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

Insiemi parzialmente ordinati come categorie

Sia $(X, \preceq)$ un insieme parzialmente ordinato.

Insiemi parzialmente ordinati come categorie

Sia $(X, \preceq)$ un insieme parzialmente ordinato.
È possibile considerarlo come una categoria $\mathcal{X}$ ponendo:

Insiemi parzialmente ordinati come categorie

Sia $(X, \preceq)$ un insieme parzialmente ordinato.
È possibile considerarlo come una categoria $\mathcal{X}$ ponendo:

- $\mathrm{obj}(\mathcal{X}) = X$;

Insiemi parzialmente ordinati come categorie

Sia $(X, \preceq)$ un insieme parzialmente ordinato.
È possibile considerarlo come una categoria $\mathcal{X}$ ponendo:

- $\mathrm{obj}(\mathcal{X}) = X$;
- $\mathrm{Hom}(x, y) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } x \not\preceq y \\ \{\iota_y^x\} & \text{se } x \preceq y \end{cases}$ per ogni $x, y \in \mathrm{obj}(\mathcal{X})$;

Insiemi parzialmente ordinati come categorie

Sia $(X, \preceq)$ un insieme parzialmente ordinato.
È possibile considerarlo come una categoria $\mathcal{X}$ ponendo:

- $\mathrm{obj}(\mathcal{X}) = X$;
- $\mathrm{Hom}(x, y) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } x \not\preceq y \\ \{\iota_y^x\} & \text{se } x \preceq y \end{cases}$ per ogni $x, y \in \mathrm{obj}(\mathcal{X})$;
- $\iota_y^x \cdot \iota_z^y = \iota_z^x$ se $x \preceq y \wedge y \preceq z$.

Insiemi parzialmente ordinati come categorie

Esempio (Topologia di uno spazio topologico)

Sia (X, τ) uno spazio topologico. $(\tau, \subseteq)$ è parzialmente ordinato quindi può vedersi come una categoria i cui oggetti sono gli aperti e i cui morfismi sono le inclusioni.

Insiemi parzialmente ordinati come categorie

Esempio (Topologia di uno spazio topologico)

Sia (X, τ) uno spazio topologico. $(\tau, \subseteq)$ è parzialmente ordinato quindi può vedersi come una categoria i cui oggetti sono gli aperti e i cui morfismi sono le inclusioni.

Esempio (Interi con diseguaglianze contrarie)

Poniamo $n \preceq m \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} m \leq n$.

Insiemi parzialmente ordinati come categorie

Esempio (Topologia di uno spazio topologico)

Sia (X, τ) uno spazio topologico. $(\tau, \subseteq)$ è parzialmente ordinato quindi può vedersi come una categoria i cui oggetti sono gli aperti e i cui morfismi sono le inclusioni.

Esempio (Interi con diseguaglianze contrarie)

Poniamo $n \preceq m \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} m \leq n$. $(\mathbb{Z}, \preceq)$ è totalmente ordinato, quindi parzialmente ordinato, e può vedersi come la categoria i cui oggetti sono gli interni e i cui morfismi sono le disuguaglianze contrarie:

$$\cdots \longrightarrow \underset{n+1}{\bullet} \longrightarrow \underset{n}{\bullet} \longrightarrow \underset{n-1}{\bullet} \longrightarrow \cdots$$

Successioni di oggetti e morfismi

Definizione (Successioni di oggetti e morfismi)

Sia $\mathcal{C}$ una categoria.

Successioni di oggetti e morfismi

Definizione (Successioni di oggetti e morfismi)

Sia $\mathcal{C}$ una categoria.
Una **successione di oggetti e morfismi**, o **successione**, è un funtore covariante $S : \mathbb{Z} \to \mathcal{C}$:

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

Osservazione

Analogamente, definiamo una **successione finita di oggetti e morfismi** di $\mathcal{C}$ come un funtore covariante $F : \mathbf{n+1} \to \mathcal{C}$.

Successioni esatte

Definizione (Successione esatta)

Sia A un anello commutativo.

Successioni esatte

Definizione (Successione esatta)

Sia A un anello commutativo.
Una successione finita o infinita di A-omomorfismi e A-moduli

$$\cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

si dice **successione esatta** se $\operatorname{im} f_{n+1} = \ker f_n$ per ogni n.

Successioni esatte

Definizione (Successione esatta)

Sia A un anello commutativo.
Una successione finita o infinita di A-omomorfismi e A-moduli

$$\cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

si dice **successione esatta** se $\operatorname{im} f_{n+1} = \ker f_n$ per ogni n.

Definizione (Successione esatta corta)

Una **successione esatta corta** è una successione esatta della forma

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

Categorie additive

Definizione (Categoria additiva)

Una categoria $\mathcal{C}$ si dice **additiva** se

Categorie additive

Definizione (Categoria additiva)

Una categoria $\mathcal{C}$ si dice **additiva** se

1. $\mathrm{Hom}(A, B)$ è un gruppo abeliano per ogni $A, B \in \mathrm{obj}(C)$;

Categorie additive

Definizione (Categoria additiva)

Una categoria $\mathcal{C}$ si dice **additiva** se

i. $\mathrm{Hom}(A, B)$ è un gruppo abeliano per ogni $A, B \in \mathrm{obj}(C)$;
ii. Vale la proprietà distribuitva sui morfismi:

Categorie additive

Definizione (Categoria additiva)

Una categoria $\mathcal{C}$ si dice **additiva** se

1. $\mathrm{Hom}(A, B)$ è un gruppo abeliano per ogni $A, B \in \mathrm{obj}(C)$;
2. Vale la proprietà distribuitva sui morfismi: dati

$$X \xrightarrow{a} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{b} Y$$

allora $(f+g)\cdot b = f \cdot b + g \cdot b$ e $a \cdot (f+g) = a \cdot f + a \cdot g$;

Categorie additive

Definizione (Categoria additiva)

Una categoria $\mathcal{C}$ si dice **additiva** se

1. $\mathrm{Hom}(A, B)$ è un gruppo abeliano per ogni $A, B \in \mathrm{obj}(C)$;
2. Vale la proprietà distribuitva sui morfismi: dati

$$X \xrightarrow{a} A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{b} Y$$

allora $(f+g)\cdot b = f \cdot b + g \cdot b$ e $a \cdot (f+g) = a \cdot f + a \cdot g$;

3. $\mathcal{C}$ ha un oggetto zero;

Categorie additive

Definizione (Categoria additiva)

Una categoria $\mathcal{C}$ si dice **additiva** se

1. $\mathrm{Hom}(A, B)$ è un gruppo abeliano per ogni $A, B \in \mathrm{obj}(C)$;
2. Vale la proprietà distribuitva sui morfismi: dati

$$X \xrightarrow{a} A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{b} Y$$

allora $(f+g)\cdot b = f\cdot b + g\cdot b$ e $a\cdot(f+g) = a\cdot f + a\cdot g$;

3. $\mathcal{C}$ ha un oggetto zero;
4. $\mathcal{C}$ ha prodotti finiti e coprodotti finiti.

Categorie additive

Definizione (Funtore additivo)

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorie additive.

Categorie additive

Definizione (Funtore additivo)

Siano $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorie additive.
Un funtore $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ si dice **additivo** se per ogni $A, B \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$ e per ogni $f, g \in \mathrm{Hom}(A, B)$ si ha

$$F(f+g) = F(f) + G(g)$$

Categorie abeliane

Definizione (Categoria abeliana)

Sia $\mathcal{C}$ una categoria. È abeliana se

Categorie abeliane

Definizione (Categoria abeliana)

Sia $\mathcal{C}$ una categoria. È abeliana se

1. Ogni morfismo ha un kernel e un cokernel;

Categorie abeliane

Definizione (Categoria abeliana)

Sia $\mathcal{C}$ una categoria. È abeliana se

1. Ogni morfismo ha un kernel e un cokernel;
2. Ogni monomorfismo è un kernel e ogni epimorfismo è un cokernel.

Categorie abeliane

Definizione (Categoria abeliana)

Sia $\mathcal{C}$ una categoria. È abeliana se

1. Ogni morfismo ha un kernel e un cokernel;
2. Ogni monomorfismo è un kernel e ogni epimorfismo è un cokernel.

Lemma

$\mathbf{Ab}$ è *una categoria abeliana.*

Risoluzioni iniettive

Definizione (Oggetti proiettivi)

Siano $\mathcal{A}$ una categoria abeliana e $E \in \mathrm{obj}(\mathcal{A})$.

Risoluzioni iniettive

Definizione (Oggetti proiettivi)

Siano $\mathcal{A}$ una categoria abeliana e $E \in \mathrm{obj}(\mathcal{A})$.
E si dice **iniettivo** se per ogni monomorfismo $g : A \to B$ e per ogni morfismo $f : A \to E$, esiste $h : B \to E$ tale che $f = g \cdot h$.

Risoluzioni iniettive

Definizione (Oggetti proiettivi)

Siano $\mathcal{A}$ una categoria abeliana e $E \in \mathrm{obj}(\mathcal{A})$.
E si dice **iniettivo** se per ogni monomorfismo $g : A \to B$ e per ogni morfismo $f : A \to E$, esiste $h : B \to E$ tale che $f = g \cdot h$.
Equivalentemente, h rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} E & \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & B \arrow[ul, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

Risoluzioni iniettive

Definizione (Risoluzione iniettiva)

Siano $\mathcal{A}$ una categoria abeliana e $A \in \mathrm{obj}(\mathcal{A})$.

Risoluzioni iniettive

Definizione (Risoluzione iniettiva)

Siano $\mathcal{A}$ una categoria abeliana e $A \in \mathrm{obj}(\mathcal{A})$. Una **risoluzone iniettiva di** A è una successione esatta

$$\mathbf{E} = 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\eta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \cdots$$

con E^n iniettivo per ogni $n \in \mathbb{N}_0$.

Risoluzioni iniettive

Definizione (Risoluzione iniettiva)

Siano $\mathcal{A}$ una categoria abeliana e $A \in \mathrm{obj}(\mathcal{A})$. Una **risoluzone iniettiva di** A è una successione esatta

$$\mathbf{E} = 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\eta} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \cdots$$

con E^n iniettivo per ogni $n \in \mathbb{N}_0$.

Definizione (Risoluzione ineittiva troncata)

Alla risoluzione iniettiva $\mathbf{E}$ è possibile associare il complesso

$$\mathbf{E}^A = 0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \cdots$$

detto **risoluzione iniettiva troncata**.

Fasci di gruppi abeliani

Definizione (Fascio di gruppi abeliani)

Sia (X, τ) uno spazio topologico.

Fasci di gruppi abeliani

Definizione (Fascio di gruppi abeliani)

Sia (X, τ) uno spazio topologico. Un **fascio di gruppi abeliani su** X è un funtore controvariante

$$\mathcal{F} : \tau \to \mathbf{Ab}$$

tale che:

Fasci di gruppi abeliani

Definizione (Fascio di gruppi abeliani)

Sia (X, τ) uno spazio topologico. Un **fascio di gruppi abeliani su** X è un funtore controvariante

$$\mathcal{F} : \tau \to \mathbf{Ab}$$

tale che:

- Ad ogni aperto A associa un gruppo abeliano $\mathcal{F}(A)$;

Fasci di gruppi abeliani

Definizione (Fascio di gruppi abeliani)

Sia (X, τ) uno spazio topologico. Un **fascio di gruppi abeliani su** X è un funtore controvariante

$$\mathcal{F} : \tau \to \mathbf{Ab}$$

tale che:

- Ad ogni aperto A associa un gruppo abeliano $\mathcal{F}(A)$;
- A ι_B^A associa $\mathcal{F}(\iota_B^A) = \rho_B^A \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(A))$;

Fasci di gruppi abeliani

Definizione (Fascio di gruppi abeliani)

Sia (X, τ) uno spazio topologico. Un **fascio di gruppi abeliani su** X è un funtore controvariante

$$\mathcal{F} : \tau \to \mathbf{Ab}$$

tale che:

- Ad ogni aperto A associa un gruppo abeliano $\mathcal{F}(A)$;
- A ι_B^A associa $\mathcal{F}(\iota_B^A) = \rho_B^A \in \operatorname{Hom}(\mathcal{F}(B), \mathcal{F}(A))$;
- Per ogni famiglia di aperti $\{A_i\}_{i \in I}$ e per ogni famiglia $\{a\}_{i \in I}$ tale che $a_i \in \mathcal{F}(A_i)$ per ogni i, se $a_{i|A_i \cap A_j} = a_{j|A_i \cap A_j}$, allora esiste ed è unico $a \in \mathcal{F}\left(\bigcup_i A_i\right)$ tale che $a_{|A_i} = a$ per ogni i.

La categoria dei fasci di gruppi abeliani

I fasci di gruppi abeliani costituiscono una categoria. In particolare, dato uno spazio topologico (X, τ):

La categoria dei fasci di gruppi abeliani

I fasci di gruppi abeliani costituiscono una categoria. In particolare, dato uno spazio topologico (X, τ):

Definizione (Categoria dei fasci di gruppi abeliani)

Definaimo $\mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab})$ come la categoria tale che:

La categoria dei fasci di gruppi abeliani

I fasci di gruppi abeliani costituiscono una categoria. In particolare, dato uno spazio topologico (X, τ):

Definizione (Categoria dei fasci di gruppi abeliani)

Definaimo $\mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab})$ come la categoria tale che:

- $\mathrm{obj}(\mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab}))$ è costituito dai fasci $\tau \to \mathbf{Ab}$;

La categoria dei fasci di gruppi abeliani

I fasci di gruppi abeliani costituiscono una categoria. In particolare, dato uno spazio topologico (X, τ):

Definizione (Categoria dei fasci di gruppi abeliani)

Definaimo $\mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab})$ come la categoria tale che:

- $\mathrm{obj}(\mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab}))$ è costituito dai fasci $\tau \to \mathbf{Ab}$;
- $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ è costutito dalle trasformazioni naturali $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$.

La categoria dei fasci di gruppi abeliani

I fasci di gruppi abeliani costituiscono una categoria. In particolare, dato uno spazio topologico (X, τ):

Definizione (Categoria dei fasci di gruppi abeliani)

Definaimo $\mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab})$ come la categoria tale che:

- $\mathrm{obj}(\mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab}))$ è costituito dai fasci $\tau \to \mathbf{Ab}$;
- $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ è costutito dalle trasformazioni naturali $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$.

Lemma

$\mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab})$ *è una categoria abeliana.*

Fasci di gruppi abeliani

Definizione (Funtore delle sezioni globali)

Il **funtore delle sezioni globali** è il funtore covariante additivo

$$\Gamma : \mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab}) \to \mathbf{Ab}$$

tale che

Fasci di gruppi abeliani

Definizione (Funtore delle sezioni globali)

Il **funtore delle sezioni globali** è il funtore covariante additivo

$$\Gamma : \mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab}) \to \mathbf{Ab}$$

tale che

- Ad ogni fascio $\mathcal{F}$ su X, associa $\mathcal{F}(X)$;

Fasci di gruppi abeliani

Definizione (Funtore delle sezioni globali)

Il **funtore delle sezioni globali** è il funtore covariante additivo

$$\Gamma : \mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab}) \to \mathbf{Ab}$$

tale che

- Ad ogni fascio $\mathcal{F}$ su X, associa $\mathcal{F}(X)$;
- Al morfismo di fasci $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ associa $\varphi_X : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$.

Coomologia di fasci

Definizione (Coomologia di fasci)

Siano X uno spazio topologico e $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani.

Coomologia di fasci

Definizione (Coomologia di fasci)

Siano X uno spazio topologico e $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani. Consideriamo una risoluzione iniettiva di $\mathcal{F}$

$$\mathbf{E} = 0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\eta} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{E}^2 \longrightarrow \cdots$$

Allora:

Coomologia di fasci

Definizione (Coomologia di fasci)

Siano X uno spazio topologico e $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani. Consideriamo una risoluzione iniettiva di $\mathcal{F}$

$$\mathbf{E} = 0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\eta} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{E}^2 \longrightarrow \cdots$$

Allora:

$$H^q(\mathcal{F}) := H^q\left(\Gamma\mathbf{E}^{\mathcal{F}}\right) = \frac{\ker\left(\Gamma(d^q) : \Gamma(\mathcal{E}^q) \to \Gamma(\mathcal{E}^{q+1})\right)}{\operatorname{im}\left(\Gamma(d^{q-1}) : \Gamma(\mathcal{E}^{q-1}) \to \Gamma(\mathcal{E}^q)\right)}$$

Outline

1. Coomologia di fasci
   - Successioni di oggetti e morfismi
   - Categorie abeliane
   - Fasci
2. Coomologia di Čech
   - Limiti diretti
   - La classe diretta degli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto K è una coppia

$$K = (\mathrm{Vert}(K), \mathcal{S})$$

dove

1. $\mathrm{Vert}(K)$ è un inieme non vuoto di elementi chiamati vertici;
2. $\mathcal{S}$ è un sottoinsieme di parti finite e non vuote σ di $\mathrm{Vert}(K)$ chiamate simplessi tali che
   a. Per ogni $v \in \mathrm{Vert}(K)$, $\{v\} \in \mathcal{S}$;
   b. $\sigma \in \mathcal{S} \wedge \tau \subseteq \sigma \wedge \tau \neq \emptyset \Rightarrow \tau \in \mathcal{S}$.

Se σ è un simplesso e $|\sigma| = n + 1$, σ è detto n-simplesso.

Definzione (Nervo)

Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{U}$ un suo rivestimento aperto. Si dice nervo $N(\mathcal{U})$ il complesso simpliciale astratto i cui vertici sono gli aperti del ricoprimento e i simplessi le sottofamiglie finite di $\mathcal{U}$ la cui intersezione è non vuota, cioè $\mathrm{Vert}(N(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$ e

$$\mathcal{S} = \left\{ (U_{i_0}, U_{i_1}, ..., U_{i_n}) : n \in \mathbb{N}_0 \wedge \bigcap_{j=0}^{n} U_{i_j} \neq \emptyset \right\}$$

Indichiamo con Σ_q l'insieme dei q-simplessi nel nervo.

Definizione (Complesso di gruppi di cocatene)

Definiamo il seguente complesso di gruppi e omomorfismi

$$C^\bullet(N(\mathcal{U}),\mathcal{F}) = \cdots \longrightarrow C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^q} C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

dove:

Definizione (Complesso di gruppi di cocatene)

Definiamo il seguente complesso di gruppi e omomorfismi

$$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F}) = \cdots \longrightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^q} C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

dove: $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \underset{\sigma \in \Sigma_q}{\mathrm{Dr}}\, \mathcal{F}\left(\bigcap \sigma\right)$

Definizione (Complesso di gruppi di cocatene)

Definiamo il seguente complesso di gruppi e omomorfismi

$$C^\bullet(N(\mathcal{U}),\mathcal{F}) = \cdots \longrightarrow C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^q} C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

dove: $C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \underset{\sigma\in\Sigma_q}{\mathrm{Dr}}\,\mathcal{F}\left(\bigcap\sigma\right)$ e, presa $f:\Sigma_q \to \bigcup_{\sigma\in\Sigma_q}\mathcal{F}\left(\bigcap\sigma\right)$ in $C^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$:

$$\delta^q(f) = \left(\sigma\in\Sigma_{q+1} \mapsto \sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i f\left(\hat{\sigma}^i\right) \in \bigcup_{\sigma\in\Sigma_{q+1}}\mathcal{F}\left(\bigcap\sigma\right)\right)$$

in $C^{q+1}(\mathcal{F},\mathcal{U})$.

Definizione (Gruppi di coomologia di un ricoprimento aperto con coefficienti in un fascio)

Siano X uno spazio topologico, $\mathcal{U}$ un suo ricoprimento aperto e $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani.

Definizione (Gruppi di coomologia di un ricoprimento aperto con coefficienti in un fascio)

Siano X uno spazio topologico, $\mathcal{U}$ un suo ricoprimento aperto e $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani.
Chiamiamo **gruppi di coomologia** di $\mathcal{U}$ con coefficienti in $\mathcal{F}$, e li indichiamo con

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

i gruppi di omologia del complesso $C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F})$.

Definizione (Sistema diretto)

Siano $(I, \preceq)$ un insieme parzialmente ordinato e $\mathcal{C}$ una categoria.

Definizione (Sistema diretto)

Siano $(I, \preceq)$ un insieme parzialmente ordinato e $\mathcal{C}$ una categoria. Un **sistema diretto** in $\mathcal{C}$ su I è una coppia ordinata

$$\{M_i, \varphi_j^i\} := \big((M_i)_{i \in I}, (\varphi_j^i)_{i \preceq j}\big)$$

dove

Definizione (Sistema diretto)

Siano $(I, \preceq)$ un insieme parzialmente ordinato e $\mathcal{C}$ una categoria. Un **sistema diretto** in $\mathcal{C}$ su I è una coppia ordinata

$$\{M_i, \varphi^i_j\} \coloneqq \left((M_i)_{i\in I}, (\varphi^i_j)_{i\preceq j}\right)$$

dove $(M_i)_{i\in I} \subseteq \mathrm{obj}(\mathcal{C})$;

Definizione (Sistema diretto)

Siano $(I, \preceq)$ un insieme parzialmente ordinato e $\mathcal{C}$ una categoria. Un **sistema diretto** in $\mathcal{C}$ su I è una coppia ordinata

$$\{M_i, \varphi_j^i\} := \left((M_i)_{i \in I}, (\varphi_j^i)_{i \preceq j}\right)$$

dove $(M_i)_{i \in I} \subseteq \mathrm{obj}(\mathcal{C})$; $(\varphi_j^i)_{i \preceq j} \subseteq {M_j}^{M_i}$ con $\varphi_i^i = \iota_{M_i}$ per ogni i;

Definizione (Sistema diretto)

Siano $(I, \preceq)$ un insieme parzialmente ordinato e $\mathcal{C}$ una categoria. Un **sistema diretto** in $\mathcal{C}$ su I è una coppia ordinata

$$\{M_i, \varphi^i_j\} := \left((M_i)_{i\in I}, (\varphi^i_j)_{i\preceq j}\right)$$

dove $(M_i)_{i\in I} \subseteq \mathrm{obj}(\mathcal{C})$; $(\varphi^i_j)_{i\preceq j} \subseteq {M_j}^{M_i}$ con $\varphi^i_i = \iota_{M_i}$ per ogni i; per ogni $i \preceq j \preceq k$, il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[rr, "\varphi^i_k"] \arrow[dr, "\varphi^i_j"'] & & M_k \\ & M_j \arrow[ur, "\varphi^j_k"'] & \end{tikzcd}$$

Definizione (Limite diretto)

Siano $(I, \preceq)$ un poset, $\mathcal{C}$ una categoria e $\{M_i, \varphi^i_j\}$ diretto in $\mathcal{C}$.

Definizione (Limite diretto)

Siano $(I, \preceq)$ un poset, $\mathcal{C}$ una categoria e $\{M_i, \varphi^i_j\}$ diretto in $\mathcal{C}$.
Il **limite diretto** è una coppia costituita da un oggetto $\varinjlim M_i$ e da una famiglia di morfismi $(\alpha_i)_{i\in I} \subseteq (\varinjlim M_i)^{M_i}$ tali che:

Definizione (Limite diretto)

Siano $(I, \preceq)$ un poset, $\mathcal{C}$ una categoria e $\{M_i, \varphi^i_j\}$ diretto in $\mathcal{C}$.
Il **limite diretto** è una coppia costituita da un oggetto $\varinjlim M_i$ e da una famiglia di morfismi $(\alpha_i)_{i \in I} \subseteq (\varinjlim M_i)^{M_i}$ tali che:

1. $\varphi^i_j \cdot \alpha_j = \alpha_i$ quando $i \preceq j$;

Definizione (Limite diretto)

Siano $(I, \preceq)$ un poset, $\mathcal{C}$ una categoria e $\{M_i, \varphi^i_j\}$ diretto in $\mathcal{C}$.
Il **limite diretto** è una coppia costituita da un oggetto $\varinjlim M_i$ e da una famiglia di morfismi $(\alpha_i)_{i \in I} \subseteq (\varinjlim M_i)^{M_i}$ tali che:

1. $\varphi^i_j \cdot \alpha_j = \alpha_i$ quando $i \preceq j$;
2. Presi $X \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$ e dei morfismi $f_i : M_i \to X$ tali che $\varphi^i_j \cdot f_j = f_i$ per ogni $i \preceq j$, esiste ed è unico $\theta : \varinjlim M_i \to X$ che rende il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim M_i \arrow[rr, dashed, "\theta"] & & X \\
& M_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "f_i"] \arrow[d, "\varphi^i_j"'] & \\
& M_j \arrow[uul, bend left, "\alpha_j"] \arrow[uur, bend right, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Classi dirette

Definizione (Classe diretta)

Una classe $\mathcal{K}$ si dice **classe diretta** se su di essa è definita una relazione $\preceq$ riflessiva, asimmetrica e transitiva e se per ogni $k, k' \in \mathcal{K}$ esiste $k* \in \mathcal{K}$ tale che $k \preceq k^*$ e $k' \preceq k^*$.

Classi dirette

Definizione (Classe diretta)

Una classe $\mathcal{K}$ si dice **classe diretta** se su di essa è definita una relazione $\preceq$ riflessiva, asimmetrica e transitiva e se per ogni $k, k' \in \mathcal{K}$ esiste $k* \in \mathcal{K}$ tale che $k \preceq k^*$ e $k' \preceq k^*$.

Definizione (Sottoclasse cofinale)

Una sottoclasse $\mathcal{L}$ di $\mathcal{K}$ si dice **cofinale** in $\mathcal{K}$ se, per ogni $k \in \mathcal{K}$, esiste $l \in \mathcal{L}$ tale che $k \preceq l$.

Classi dirette

Definizione (Classe diretta)

Una classe $\mathcal{K}$ si dice **classe diretta** se su di essa è definita una relazione $\preceq$ riflessiva, asimmetrica e transitiva e se per ogni $k, k' \in \mathcal{K}$ esiste $k* \in \mathcal{K}$ tale che $k \preceq k^*$ e $k' \preceq k^*$.

Definizione (Sottoclasse cofinale)

Una sottoclasse $\mathcal{L}$ di $\mathcal{K}$ si dice **cofinale** in $\mathcal{K}$ se, per ogni $k \in \mathcal{K}$, esiste $l \in \mathcal{L}$ tale che $k \preceq l$.

Osservazione

È possibile definire i sistemi diretti a partire da una classe diretta in maniera analoga a come fatto a partire da un insieme di indici.

Limiti su classi dirette

Definizione (Categoria cocompleta)

Una categoria $\mathcal{C}$ si dice **cocompleta** se il limite diretto esiste per ogni sistema diretto in $\mathcal{C}$.

Limiti su classi dirette

Definizione (Categoria cocompleta)

Una categoria $\mathcal{C}$ si dice **cocompleta** se il limite diretto esiste per ogni sistema diretto in $\mathcal{C}$.

Proposizione

Siano $\mathcal{K}$ una classe diretta, $\mathcal{C}$ una categoria cocompleta e $\{A_k, \varphi_j^k\}$ un sistema diretto in $\mathcal{C}$ su $\mathcal{K}$. Se due sottoclassi di $\mathcal{K}$, siano esse $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$, sono insiemi e cofinali in $\mathcal{K}$, allora

$$\varinjlim_{\mathcal{L}} A_k \cong \varinjlim_{\mathcal{M}} A_k$$

Limiti su classi dirette

Definizione (Categoria cocompleta)

Una categoria $\mathcal{C}$ si dice **cocompleta** se il limite diretto esiste per ogni sistema diretto in $\mathcal{C}$.

Proposizione

Siano $\mathcal{K}$ una classe diretta, $\mathcal{C}$ una categoria cocompleta e $\{A_k, \varphi_j^k\}$ un sistema diretto in $\mathcal{C}$ su $\mathcal{K}$. Se due sottoclassi di $\mathcal{K}$, siano esse $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$, sono insiemi e cofinali in $\mathcal{K}$, allora

$$\varinjlim_{\mathcal{L}} A_k \cong \varinjlim_{\mathcal{M}} A_k$$

Cioè, sotto le ipotesi della proposizione, è possibile formare limiti diretti su classi dirette.

Raffinamenti

Definizione (Raffinamento)

Siano X uno spazio topologico e $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ due suoi ricoprimenti aperti.

Raffinamenti

Definizione (Raffinamento)

Siano X uno spazio topologico e $\mathcal{U}$,$\mathcal{V}$ due suoi ricoprimenti aperti. $\mathcal{V}$ si dice **raffinamento** di $\mathcal{U}$, e si indica con $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$, se, per ogni $V \in \mathcal{V}$, esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che $V \subseteq U$.

Raffinamenti

Definizione (Raffinamento)

Siano X uno spazio topologico e $\mathcal{U}$,$\mathcal{V}$ due suoi ricoprimenti aperti. $\mathcal{V}$ si dice **raffinamento** di $\mathcal{U}$, e si indica con $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$, se, per ogni $V \in \mathcal{V}$, esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che $V \subseteq U$.

Definizione (Funzione di raffinamento)

Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due ricoprimenti aperti di un certo spazio con $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$.

Raffinamenti

Definizione (Raffinamento)

Siano X uno spazio topologico e $\mathcal{U}$,$\mathcal{V}$ due suoi ricoprimenti aperti. $\mathcal{V}$ si dice **raffinamento** di $\mathcal{U}$, e si indica con $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$, se, per ogni $V \in \mathcal{V}$, esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che $V \subseteq U$.

Definizione (Funzione di raffinamento)

Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due ricoprimenti aperti di un certo spazio con $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$. Scegliere, al variare di $V \in \mathcal{V}$, $V \subseteq U_V \in \mathcal{U}$ definisce una funzione

$$r : V \in \mathcal{V} \mapsto U_V \in \mathcal{U}$$

detta **funzione di raffinamento**.

Definizione (Ordine parziale sui gruppi di cocatene)

Sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su uno spazio X.

Definizione (Ordine parziale sui gruppi di cocatene)

Sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su uno spazio X.
Poniamo $\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \preceq \check{H}^q(\mathcal{V},\mathcal{F})$ se e solo se, per definizione, esiste una funzione di raffinamento $r : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$.

Definizione (Ordine parziale sui gruppi di cocatene)

Sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su uno spazio X.
Poniamo $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \preceq \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ se e solo se, per definizione, esiste una funzione di raffinamento $r : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$.
(Si dimosta che) $\preceq$ è un ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Sia $\mathcal{K}$ la classe (diretta) dei gruppi $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Sia $\mathcal{K}$ la classe (diretta) dei gruppi $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Esercizio (Ricerca di un sottoinsieme cofinale in $\mathcal{K}$)

Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di (X, τ).

Sia $\mathcal{K}$ la classe (diretta) dei gruppi $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Esercizio (Ricerca di un sottoinsieme cofinale in $\mathcal{K}$)

Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di (X, τ).
Possiamo considerare il ricoprimento $\mathcal{V}$ ottenuto a partire da $\mathcal{U}$ rimuovendo le ripetizoni. Esso risulta un raffinamento di $\mathcal{U}$.

Sia $\mathcal{K}$ la classe (diretta) dei gruppi $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Esercizio (Ricerca di un sottoinsieme cofinale in $\mathcal{K}$)

Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di (X, τ).
Possiamo considerare il ricoprimento $\mathcal{V}$ ottenuto a partire da $\mathcal{U}$ rimuovendo le ripetizoni. Esso risulta un raffinamento di $\mathcal{U}$.
Allora è cofinale in $\mathcal{K}$ la sottoclasse

$$\mathcal{H} := \{\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : \mathcal{U} \text{ è un ricoprimento aperto senza ripetizioni}\}$$

Sia $\mathcal{K}$ la classe (diretta) dei gruppi $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Esercizio (Ricerca di un sottoinsieme cofinale in $\mathcal{K}$)

Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di (X, τ).
Possiamo considerare il ricoprimento $\mathcal{V}$ ottenuto a partire da $\mathcal{U}$ rimuovendo le ripetizoni. Esso risulta un raffinamento di $\mathcal{U}$.
Allora è cofinale in $\mathcal{K}$ la sottoclasse

$$\mathcal{H} := \{\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : \mathcal{U} \text{ è un ricoprimento aperto senza ripetizioni}\}$$

Essa è inoltre un insieme perché

Definizione (Comologia di Čech)

La **coomologia di Čech di X a coefficienti nel fascio $\mathcal{F}$ su X** è definita come

$$\check{H}^q(\mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{H}} \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

Noi vogliamo usare questa per dire che le due coomologie so' uguali:

Proposizione

Siano $(F^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ e $(G^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ due successioni di funtori covarianti additivi tali che $F^n, G^n : \mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab}) \to \mathbf{Ab}$ per ogni $n \in \mathbb{N}_0$. Supponiamo che

1. Per ogni successione esatta corta, c'è una successione esatta lunga con natural connecting homomorphisms;
2. F^0 è naturalmente isomorfo a F'^0;
3. $F^n(E) = 0 = F'^n(E)$ per tutti gli oggetti iniettivi E e per ogni $n \geq 1$.

Questo appara il punto 1:

Teorema (Serre)

Se $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ è una successione esatta corta di fasci su uno spazio paracompatto, allora esiste una successione esatta nella coomologia di Čech:

$$0 \to \check{H}^0(\mathcal{F}') \to \check{H}^0(\mathcal{F}) \to \check{H}^0(\mathcal{F}'') \to \check{H}^1(\mathcal{F}') \to \cdots$$

Il punto 2 invece è da:

Osservazione

Per ogni fascio $\mathcal{F}$ su X e ogni ricoprimento $\mathcal{U}$, si ha

$$\check{H}^0(\mathcal{U}) = \Gamma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$$

Di fare il limite diretto non ci interessa qua perché tanto è indipendente dal ricoprimento.

Per il punto tre usiamo il famoso lemma 6.85:

Lemma

Se $\mathcal{F}$ è un fascio iniettivo su X, allora

$$\check{H}^q(\mathcal{F}) = 0$$

per ogni $q \geq 1$.

Teorema

Se $\mathcal{F}$ è un fascio di gruppi abeliani su uno spazio paracompatto, allora

$$\check{H}^q(\mathcal{F}) \cong H^q(\mathcal{F})$$

per ogni $q \geq 0$.