Coomologia di Čech

Dario Di Meo (D70/000023)

Seminario di Geometria Algebrica, a.a. 2025/2026

Outline

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto K è una coppia

$$K = (\mathrm{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto K è una coppia

$$K = (\mathrm{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

1. $\mathrm{Vert}(K)$ è un inieme non vuoto di elementi chiamati **vertici**;

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto K è una coppia

$$K = (\mathrm{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

1. $\mathrm{Vert}(K)$ è un inieme non vuoto di elementi chiamati **vertici**;
2. Σ è un insieme di parti finite e non vuote di $\mathrm{Vert}(K)$ chiamate **simplessi** e tale che

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto K è una coppia

$$K = (\mathrm{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

1. $\mathrm{Vert}(K)$ è un inieme non vuoto di elementi chiamati **vertici**;
2. Σ è un insieme di parti finite e non vuote di $\mathrm{Vert}(K)$ chiamate **simplessi** e tale che
    1. Per ogni $v \in \mathrm{Vert}(K)$, $\{v\} \in \Sigma$;

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto K è una coppia

$$K = (\mathrm{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

1. $\mathrm{Vert}(K)$ è un inieme non vuoto di elementi chiamati **vertici**;
2. Σ è un insieme di parti finite e non vuote di $\mathrm{Vert}(K)$ chiamate **simplessi** e tale che
   i. Per ogni $v \in \mathrm{Vert}(K)$, $\{v\} \in \Sigma$;
   ii. $\sigma \in \Sigma \wedge \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma$.

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto K è una coppia

$$K = (\mathrm{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

1. $\mathrm{Vert}(K)$ è un inieme non vuoto di elementi chiamati **vertici**;
2. Σ è un insieme di parti finite e non vuote di $\mathrm{Vert}(K)$ chiamate **simplessi** e tale che
   i. Per ogni $v \in \mathrm{Vert}(K)$, $\{v\} \in \Sigma$;
   ii. $\sigma \in \Sigma \wedge \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma$.

Se σ è un simplesso e $|\sigma| = q + 1$, σ si dirà q-simplesso.

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto K è una coppia

$$K = (\mathrm{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

1. $\mathrm{Vert}(K)$ è un inieme non vuoto di elementi chiamati **vertici**;
2. Σ è un insieme di parti finite e non vuote di $\mathrm{Vert}(K)$ chiamate **simplessi** e tale che
   1. Per ogni $v \in \mathrm{Vert}(K)$, $\{v\} \in \Sigma$;
   2. $\sigma \in \Sigma \wedge \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma$.

Se σ è un simplesso e $|\sigma| = q + 1$, σ si dirà q-simplesso.
Il sottoinsieme di Σ di tutti i q-simplessi si indicherà con Σ_q.

Fissiamo uno spazio topologico X.

Definizione (Nervo)

Fissiamo uno spazio topologico X.

Definizione (Nervo)

Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X non contentente il vuoto.

Fissiamo uno spazio topologico X.

Definizione (Nervo)

Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X non contentente il vuoto.
Si dice **nervo**, e si indica con $N(\mathcal{U})$, il complesso simpliciale astratto i cui vertici sono gli aperti di $\mathcal{U}$: $\mathrm{Vert}(N(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$,

Fissiamo uno spazio topologico X.

Definizione (Nervo)

Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X non contentente il vuoto.
Si dice **nervo**, e si indica con $N(\mathcal{U})$, il complesso simpliciale astratto i cui vertici sono gli aperti di $\mathcal{U}$: $\mathrm{Vert}(N(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$, e i cui simplessi sono le sottofamiglie finite di aperti a intersezione non vuota:

$$\Sigma = \left\{ (U_{i_0}, U_{i_1}, ..., U_{i_n}) \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \mid n \in \mathbb{N}_0 \wedge \bigcap_{j=0}^{n} U_{i_j} \neq \emptyset \right\}$$

Fissiamo un fascio su X di gruppi abeliani $\mathcal{F}$.

Fissiamo un fascio su X di gruppi abeliani $\mathcal{F}$.

Definizione (Complesso dei gruppi di cocatene)

Fissiamo un fascio su X di gruppi abeliani $\mathcal{F}$.

Definizione (Complesso dei gruppi di cocatene)

Definiamo la seguente successione di gruppi e omomorfismi

$$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F}) = \cdots \longrightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^q} C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

dove:

Fissiamo un fascio su X di gruppi abeliani $\mathcal{F}$.

Definizione (Complesso dei gruppi di cocatene)

Definiamo la seguente successione di gruppi e omomorfismi

$$C^{\bullet}(N(\mathcal{U}),\mathcal{F}) = \cdots \longrightarrow C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^q} C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

dove: $C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \underset{\sigma\in\Sigma_q}{\mathrm{Dr}}\, \mathcal{F}\left(\bigcap \sigma\right)$

Fissiamo un fascio su X di gruppi abeliani $\mathcal{F}$.

Definizione (Complesso dei gruppi di cocatene)

Definiamo la seguente successione di gruppi e omomorfismi

$$C^{\bullet}(N(\mathcal{U}), \mathcal{F}) = \cdots \longrightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^q} C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

dove: $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \underset{\sigma \in \Sigma_q}{\mathrm{Dr}}\, \mathcal{F}\left(\bigcap \sigma\right)$ e, presa $f : \Sigma_q \to \bigcup_{\sigma \in \Sigma_q} \mathcal{F}\left(\bigcap \sigma\right)$ in $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$:

Fissiamo un fascio su X di gruppi abeliani $\mathcal{F}$.

Definizione (Complesso dei gruppi di cocatene)

Definiamo la seguente successione di gruppi e omomorfismi

$$C^{\bullet}(N(\mathcal{U}),\mathcal{F}) = \cdots \longrightarrow C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^q} C^{q+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

dove: $C^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \underset{\sigma\in\Sigma_q}{\mathrm{Dr}}\, \mathcal{F}\left(\bigcap\sigma\right)$ e, presa $f : \Sigma_q \to \bigcup_{\sigma\in\Sigma_q} \mathcal{F}\left(\bigcap\sigma\right)$ in $C^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$:

$$\delta^q(f) = \left(\sigma \in \Sigma_{q+1} \mapsto \sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i f\left(\hat{\sigma}^i\right) \in \bigcup_{\tau\in\Sigma_{q+1}} \mathcal{F}\left(\bigcap\tau\right)\right)$$

in $C^{q+1}(\mathcal{F},\mathcal{U})$.

Esercizio

$$\boxed{C^\bullet(N(\mathcal{U}),\mathcal{F}) \text{ è un complesso.}}$$

Esercizio

$\boxed{C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F}) \text{ è un complesso.}}$

Definizione (Coomologia di un ricoprimento a coefficienti in $\mathcal{F}$)

Esercizio

$$\boxed{C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F}) \text{ è un complesso.}}$$

Definizione (Coomologia di un ricoprimento a coefficienti in $\mathcal{F}$)

Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X.

Esercizio

$$\boxed{C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F}) \text{ è un complesso.}}$$

Definizione (Coomologia di un ricoprimento a coefficienti in $\mathcal{F}$)

Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X.
Chiamiamo **gruppi di coomologia** di $\mathcal{U}$ a coefficienti in $\mathcal{F}$ i gruppi di omologia del complesso $C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F})$.

Esercizio

$\boxed{C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F}) \text{ è un complesso.}}$

Definizione (Coomologia di un ricoprimento a coefficienti in $\mathcal{F}$)

Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X.
Chiamiamo **gruppi di coomologia** di $\mathcal{U}$ a coefficienti in $\mathcal{F}$ i gruppi di omologia del complesso $C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F})$.
Li indichiamo con

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

Outline

Definizione (Sistema diretto)

Definizione (Sistema diretto)

Siano $(I, \preceq)$ un insieme parzialmente ordinato e $\mathcal{C}$ una categoria.

Definizione (Sistema diretto)

Siano $(I, \preceq)$ un insieme parzialmente ordinato e $\mathcal{C}$ una categoria. Un **sistema diretto** in $\mathcal{C}$ su I è una coppia ordinata

$$\{M_i, \varphi_j^i\} \coloneqq \left((M_i)_{i \in I}, (\varphi_j^i)_{i \preceq j}\right)$$

dove

Definizione (Sistema diretto)

Siano $(I, \preceq)$ un insieme parzialmente ordinato e $\mathcal{C}$ una categoria. Un **sistema diretto** in $\mathcal{C}$ su I è una coppia ordinata

$$\{M_i, \varphi^i_j\} := \left((M_i)_{i\in I}, (\varphi^i_j)_{i\preceq j}\right)$$

dove $(M_i)_{i\in I} \subseteq \mathrm{obj}(\mathcal{C})$;

Definizione (Sistema diretto)

Siano $(I, \preceq)$ un insieme parzialmente ordinato e $\mathcal{C}$ una categoria. Un **sistema diretto** in $\mathcal{C}$ su I è una coppia ordinata

$$\{M_i, \varphi^i_j\} := \left((M_i)_{i \in I}, (\varphi^i_j)_{i \preceq j}\right)$$

dove $(M_i)_{i \in I} \subseteq \mathrm{obj}(\mathcal{C})$; $(\varphi^i_j)_{i \preceq j} \subseteq {M_j}^{M_i}$ con $\varphi^i_i = \iota_{M_i}$ per ogni i;

Definizione (Sistema diretto)

Siano $(I, \preceq)$ un insieme parzialmente ordinato e $\mathcal{C}$ una categoria. Un **sistema diretto** in $\mathcal{C}$ su I è una coppia ordinata

$$\{M_i, \varphi^i_j\} := \left((M_i)_{i\in I}, (\varphi^i_j)_{i\preceq j}\right)$$

dove $(M_i)_{i\in I} \subseteq \mathrm{obj}(\mathcal{C})$; $(\varphi^i_j)_{i\preceq j} \subseteq {M_j}^{M_i}$ con $\varphi^i_i = \iota_{M_i}$ per ogni i; per ogni $i \preceq j \preceq k$, il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[rr, "\varphi^i_k"] \arrow[dr, "\varphi^i_j"'] & & M_k \\
& M_j \arrow[ur, "\varphi^j_k"'] &
\end{tikzcd}$$

Definizione (Limite diretto)

Definizione (Limite diretto)

Siano $(I, \preceq)$ un poset, $\mathcal{C}$ una categoria e $\{M_i, \varphi^i_j\}$ diretto in $\mathcal{C}$.

Definizione (Limite diretto)

Siano $(I, \preceq)$ un poset, $\mathcal{C}$ una categoria e $\{M_i, \varphi^i_j\}$ diretto in $\mathcal{C}$.
Il **limite diretto** è una coppia costituita da un oggetto $\varinjlim M_i$ e una famiglia $(M_i \xrightarrow{\alpha_i} \varinjlim M_i)_{i \in I}$ di **insertion morphisms** tali che

Definizione (Limite diretto)

Siano $(I, \preceq)$ un poset, $\mathcal{C}$ una categoria e $\{M_i, \varphi^i_j\}$ diretto in $\mathcal{C}$.
Il **limite diretto** è una coppia costituita da un oggetto $\varinjlim M_i$ e una famiglia $(M_i \xrightarrow{\alpha_i} \varinjlim M_i)_{i \in I}$ di **insertion morphisms** tali che

1. $\varphi^i_j \cdot \alpha_j = \alpha_i$ quando $i \preceq j$;

Definizione (Limite diretto)

Siano $(I, \preceq)$ un poset, $\mathcal{C}$ una categoria e $\{M_i, \varphi_j^i\}$ diretto in $\mathcal{C}$.
Il **limite diretto** è una coppia costituita da un oggetto $\varinjlim M_i$ e una famiglia $(M_i \xrightarrow{\alpha_i} \varinjlim M_i)_{i \in I}$ di **insertion morphisms** tali che

1. $\varphi_j^i \cdot \alpha_j = \alpha_i$ quando $i \preceq j$;
2. Presi $X \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$ e dei morfismi $f_i : M_i \to X$ t.c. $\varphi_j^i \cdot f_j = f_i$ per ogni $i \preceq j$, esiste ed è unico $\theta : \varinjlim M_i \to X$ che rende il seguente diagramma commutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\varinjlim M_i \arrow[rr, dashed, "\theta"] & & X \\
& M_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "f_i"] \arrow[d, "\varphi_j^i"'] & \\
& M_j \arrow[uul, bend left, "\alpha_j"] \arrow[uur, bend right, "f_j"'] &
\end{tikzcd}
$$

Definizione (Classe diretta)

Definizione (Classe diretta)

Una classe $\mathcal{K}$ si dice **classe diretta** se su di essa è definita una relazione $\preceq$ riflessiva, asimmetrica e transitiva e se per ogni $k, k' \in \mathcal{K}$ esiste $k^* \in \mathcal{K}$ tale che $k \preceq k^*$ e $k' \preceq k^*$.

Definizione (Classe diretta)

Una classe $\mathcal{K}$ si dice **classe diretta** se su di essa è definita una relazione $\preceq$ riflessiva, asimmetrica e transitiva e se per ogni $k, k' \in \mathcal{K}$ esiste $k^* \in \mathcal{K}$ tale che $k \preceq k^*$ e $k' \preceq k^*$.

Proposizione

Siano $\mathcal{K}$ una classe diretta, $\mathcal{C}$ una categoria **cocompleta** e $\{A_k, \varphi_j^k\}$ un sistema diretto in $\mathcal{C}$ su $\mathcal{K}$.

Definizione (Classe diretta)

Una classe $\mathcal{K}$ si dice **classe diretta** se su di essa è definita una relazione $\preceq$ riflessiva, asimmetrica e transitiva e se per ogni $k, k' \in \mathcal{K}$ esiste $k^* \in \mathcal{K}$ tale che $k \preceq k^*$ e $k' \preceq k^*$.

Proposizione

Siano $\mathcal{K}$ una classe diretta, $\mathcal{C}$ una categoria **cocompleta** e $\{A_k, \varphi_j^k\}$ un sistema diretto in $\mathcal{C}$ su $\mathcal{K}$. Se due sottoclassi di $\mathcal{K}$, siano esse $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$, sono insiemi e **cofinali** in $\mathcal{K}$, allora

$$\boxed{\varinjlim_{\mathcal{L}} A_k \cong \varinjlim_{\mathcal{M}} A_k}$$

Definizione (Raffinamento)

Definizione (Raffinamento)

Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due ricoprimenti aperti di X.

Definizione (Raffinamento)

Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due ricoprimenti aperti di X.
$\mathcal{V}$ si dice **raffinamento** di $\mathcal{U}$, e si indica con $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$, se, per ogni $V \in \mathcal{V}$, esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che $V \subseteq U$.

Definizione (Raffinamento)

Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due ricoprimenti aperti di X.
$\mathcal{V}$ si dice **raffinamento** di $\mathcal{U}$, e si indica con $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$, se, per ogni $V \in \mathcal{V}$, esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che $V \subseteq U$.

Definizione (Funzione di raffinamento)

Definizione (Raffinamento)

Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due ricoprimenti aperti di X.
$\mathcal{V}$ si dice **raffinamento** di $\mathcal{U}$, e si indica con $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$, se, per ogni $V \in \mathcal{V}$, esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che $V \subseteq U$.

Definizione (Funzione di raffinamento)

Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due ricoprimenti aperti di X tali che $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$.

Definizione (Raffinamento)

Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due ricoprimenti aperti di X.
$\mathcal{V}$ si dice **raffinamento** di $\mathcal{U}$, e si indica con $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$, se, per ogni $V \in \mathcal{V}$, esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che $V \subseteq U$.

Definizione (Funzione di raffinamento)

Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due ricoprimenti aperti di X tali che $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$.
Scegliere, al variare di $V \in \mathcal{V}$, $V \subseteq U_V \in \mathcal{U}$ definisce una funzione

$$r : V \in \mathcal{V} \mapsto U_V \in \mathcal{U}$$

detta **funzione di raffinamento**.

Definizione (Ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$)

Definizione (Ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$)

Poniamo $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \preceq \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ se e solo se, per definizione, esiste una funzione di raffinamento $r : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$.

Definizione (Ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$)

Poniamo $\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \preceq \check{H}^q(\mathcal{V},\mathcal{F})$ se e solo se, per definizione, esiste una funzione di raffinamento $r : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$.
(Si dimosta che) $\preceq$ è un ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

Definizione (Ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$)

Poniamo $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \preceq \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ se e solo se, per definizione, esiste una funzione di raffinamento $r : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$.
(Si dimosta che) $\preceq$ è un ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Indichiamo $\mathcal{K}$ la classe diretta dei gruppi $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Definizione (Ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$)

Poniamo $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \preceq \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ se e solo se, per definizione, esiste una funzione di raffinamento $r : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$.
(Si dimosta che) $\preceq$ è un ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Indichiamo $\mathcal{K}$ la classe diretta dei gruppi $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Esercizio (Ricerca di un sottoinsieme cofinale in $\mathcal{K}$)

Definizione (Ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$)

Poniamo $\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) \preceq \check{H}^q(\mathcal{V},\mathcal{F})$ se e solo se, per definizione, esiste una funzione di raffinamento $r : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$.
(Si dimosta che) $\preceq$ è un ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

Indichiamo $\mathcal{K}$ la classe diretta dei gruppi $\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

Esercizio (Ricerca di un sottoinsieme cofinale in $\mathcal{K}$)

La sottoclasse di $\mathcal{K}$

$$\mathcal{H} := \{\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{F}) : \mathcal{U} \text{ è un ricoprimento aperto senza ripetizioni}\}$$

è un insieme cofinale in $\mathcal{K}$.

Definizione (Coomologia di Čech)

Definizione (Coomologia di Čech)

La **coomologia di Čech** di X a coefficienti in $\mathcal{F}$ è definita come

$$\check{H}^q(\mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{H}} \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

Outline

Proposizione

Consideriamo $\left(H^q\right)_{q\in\mathbb{N}_0}$ e $\left(\check{H}^q\right)_{q\in\mathbb{N}_0}$ e supponiamo che:

Proposizione

Consideriamo $(H^q)_{q\in\mathbb{N}_0}$ e $(\check{H}^q)_{q\in\mathbb{N}_0}$ e supponiamo che:

1. Per ogni successione esatta corta $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ ci siano due successioni esatte lunghe:

$$\cdots \to H^{q-1}(\mathcal{H}) \to H^q(\mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{G}) \to H^q(\mathcal{H}) \to H^{q+1}(\mathcal{F}) \to \cdots$$

$$\cdots \to \check{H}^{q-1}(\mathcal{H}) \to \check{H}^q(\mathcal{F}) \to \check{H}^q(\mathcal{G}) \to \check{H}^q(\mathcal{H}) \to \check{H}^{q+1}(\mathcal{F}) \to \cdots$$

Proposizione

Consideriamo $\left(H^q\right)_{q\in\mathbb{N}_0}$ e $\left(\check{H}^q\right)_{q\in\mathbb{N}_0}$ e supponiamo che:

1. Per ogni successione esatta corta $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ ci siano due successioni esatte lunghe:

$$\cdots \to H^{q-1}(\mathcal{H}) \to H^q(\mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{G}) \to H^q(\mathcal{H}) \to H^{q+1}(\mathcal{F}) \to \cdots$$

$$\cdots \to \check{H}^{q-1}(\mathcal{H}) \to \check{H}^q(\mathcal{F}) \to \check{H}^q(\mathcal{G}) \to \check{H}^q(\mathcal{H}) \to \check{H}^{q+1}(\mathcal{F}) \to \cdots$$

2. H^0 sia naturalmente isomorfo a $\check{H}^0$;

Proposizione

Consideriamo $(H^q)_{q\in\mathbb{N}_0}$ e $(\check{H}^q)_{q\in\mathbb{N}_0}$ e supponiamo che:

1. Per ogni successione esatta corta $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ ci siano due successioni esatte lunghe:
$$\cdots \to H^{q-1}(\mathcal{H}) \to H^q(\mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{G}) \to H^q(\mathcal{H}) \to H^{q+1}(\mathcal{F}) \to \cdots$$
$$\cdots \to \check{H}^{q-1}(\mathcal{H}) \to \check{H}^q(\mathcal{F}) \to \check{H}^q(\mathcal{G}) \to \check{H}^q(\mathcal{H}) \to \check{H}^{q+1}(\mathcal{F}) \to \cdots$$
2. H^0 sia naturalmente isomorfo a $\check{H}^0$;
3. $H^q(\mathcal{I}) = 0 = \check{H}^q(\mathcal{I})$ per tutti i fasci iniettivi $\mathcal{I}$ e ogni $q \in \mathbb{N}$.

Proposizione

Consideriamo $(H^q)_{q\in\mathbb{N}_0}$ e $(\check{H}^q)_{q\in\mathbb{N}_0}$ e supponiamo che:

1. Per ogni successione esatta corta $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ ci siano due successioni esatte lunghe:

$$\cdots \to H^{q-1}(\mathcal{H}) \to H^q(\mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{G}) \to H^q(\mathcal{H}) \to H^{q+1}(\mathcal{F}) \to \cdots$$

$$\cdots \to \check{H}^{q-1}(\mathcal{H}) \to \check{H}^q(\mathcal{F}) \to \check{H}^q(\mathcal{G}) \to \check{H}^q(\mathcal{H}) \to \check{H}^{q+1}(\mathcal{F}) \to \cdots$$

2. H^0 sia naturalmente isomorfo a $\check{H}^0$;
3. $H^q(\mathcal{I}) = 0 = \check{H}^q(\mathcal{I})$ per tutti i fasci iniettivi $\mathcal{I}$ e ogni $q \in \mathbb{N}$.

Allora $\boxed{H^q \text{ è naturalmente isomorfo a } \check{H}^q \text{ per ogni } q \in \mathbb{N}_0.}$

Osservazione

I funtori di coomologia di fasci sono in accordo con la prima e la terza ipotesi; inoltre, per ogni $\mathcal{F}$, si ha $H^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$.

Osservazione

I funtori di coomologia di fasci sono in accordo con la prima e la terza ipotesi; inoltre, per ogni $\mathcal{F}$, si ha $H^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$.

Esercizio (Coomologia di Čech in grado 0)

Osservazione

I funtori di coomologia di fasci sono in accordo con la prima e la terza ipotesi; inoltre, per ogni $\mathcal{F}$, si ha $H^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$.

Esercizio (Coomologia di Čech in grado 0)

Per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ e ogni fascio $\mathcal{F}$ si ha:

Osservazione

I funtori di coomologia di fasci sono in accordo con la prima e la terza ipotesi; inoltre, per ogni $\mathcal{F}$, si ha $H^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$.

Esercizio (Coomologia di Čech in grado 0)

Per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ e ogni fascio $\mathcal{F}$ si ha:

$$\boxed{\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)}$$

Teorema

Sia $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ *è una successione esatta corta di fasci su uno spazio* **paracompatto**.

Teorema

Sia $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ *è una successione esatta corta di fasci su uno spazio* **paracompatto**. *Allora esiste una successione esatta*

$$0 \to \check{H}^0(\mathcal{F}) \to \check{H}^0(\mathcal{G}) \to \check{H}^0(\mathcal{H}) \to \check{H}^1(\mathcal{F}) \to \cdots$$

Teorema

Sia $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ *è una successione esatta corta di fasci su uno spazio* **paracompatto**. *Allora esiste una successione esatta*

$$0 \to \check{H}^0(\mathcal{F}) \to \check{H}^0(\mathcal{G}) \to \check{H}^0(\mathcal{H}) \to \check{H}^1(\mathcal{F}) \to \cdots$$

Lemma

Sia $\mathcal{I}$ un fascio iniettivo.

Teorema

Sia $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ *è una successione esatta corta di fasci su uno spazio* **paracompatto**. *Allora esiste una successione esatta*

$$0 \to \check{H}^0(\mathcal{F}) \to \check{H}^0(\mathcal{G}) \to \check{H}^0(\mathcal{H}) \to \check{H}^1(\mathcal{F}) \to \cdots$$

Lemma

Sia $\mathcal{I}$ un fascio iniettivo. Allora

$$\check{H}^q(\mathcal{I}) = 0$$

per ogni $q \in \mathbb{N}$.

Teorema

Sia $\mathcal{F}$ un fascio su uno spazio paracompatto.

Teorema

Sia $\mathcal{F}$ un fascio su uno spazio paracompatto. Allora

$$\check{H}^q(\mathcal{F}) \cong H^q(\mathcal{F})$$

per ogni $q \in \mathbb{N}_0$.