

# Coomologia di Čech

Dario Di Meo (D70/000023)

Seminario di Geometria Algebrica, a.a. 2025/2026

# Outline

1 Coomologia di un ricoprimento a coefficienti in un fascio

2 Limiti diretti e coomologia di Čech

3 Legame con la coomologia di fasci

## Definizione (Complesso simpliciale astratto)

## Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto  $K$  è una coppia

$$K = (\text{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

## Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto  $K$  è una coppia

$$K = (\text{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

- ➊  $\text{Vert}(K)$  è un insieme non vuoto di elementi chiamati **vertici**;

## Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto  $K$  è una coppia

$$K = (\text{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

- ①  $\text{Vert}(K)$  è un insieme non vuoto di elementi chiamati **vertici**;
- ②  $\Sigma$  è un sottoinsieme di parti finite e non vuote di  $\text{Vert}(K)$  chiamate **simplessi** tali che

## Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto  $K$  è una coppia

$$K = (\text{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

- ①  $\text{Vert}(K)$  è un insieme non vuoto di elementi chiamati **vertici**;
- ②  $\Sigma$  è un sottoinsieme di parti finite e non vuote di  $\text{Vert}(K)$  chiamate **simplessi** tali che
  - ① Per ogni  $v \in \text{Vert}(K)$ ,  $\{v\} \in \Sigma$ ;

## Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto  $K$  è una coppia

$$K = (\text{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

- ①  $\text{Vert}(K)$  è un insieme non vuoto di elementi chiamati **vertici**;
- ②  $\Sigma$  è un sottoinsieme di parti finite e non vuote di  $\text{Vert}(K)$  chiamate **simplessi** tali che
  - ① Per ogni  $v \in \text{Vert}(K)$ ,  $\{v\} \in \Sigma$ ;
  - ②  $\sigma \in \Sigma \wedge \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma$ .

## Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto  $K$  è una coppia

$$K = (\text{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

- ①  $\text{Vert}(K)$  è un insieme non vuoto di elementi chiamati **vertici**;
- ②  $\Sigma$  è un sottoinsieme di parti finite e non vuote di  $\text{Vert}(K)$  chiamate **simplessi** tali che
  - ① Per ogni  $v \in \text{Vert}(K)$ ,  $\{v\} \in \Sigma$ ;
  - ②  $\sigma \in \Sigma \wedge \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma$ .

Se  $\sigma$  è un simplesso e  $|\sigma| = q + 1$ ,  $\sigma$  si dirà  $q$ -simplesso.

## Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto  $K$  è una coppia

$$K = (\text{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

- ①  $\text{Vert}(K)$  è un insieme non vuoto di elementi chiamati **vertici**;
- ②  $\Sigma$  è un sottoinsieme di parti finite e non vuote di  $\text{Vert}(K)$  chiamate **simplessi** tali che
  - ① Per ogni  $v \in \text{Vert}(K)$ ,  $\{v\} \in \Sigma$ ;
  - ②  $\sigma \in \Sigma \wedge \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma$ .

Se  $\sigma$  è un simplexo e  $|\sigma| = q + 1$ ,  $\sigma$  si dirà  $q$ -simplexo.

Il sottoinsieme di  $\Sigma$  di tutti i  $q$ -simplessi si indicherà con  $\Sigma_q$ .

Fissiamo uno spazio topologico  $X$ .

## Definizione (Nervo)

Fissiamo uno spazio topologico  $X$ .

### Definizione (Nervo)

Sia  $\mathcal{U}$  un ricoprimento aperto di  $X$ .

Fissiamo uno spazio topologico  $X$ .

### Definizione (Nervo)

Sia  $\mathcal{U}$  un ricoprimento aperto di  $X$ .

Si dice **nervo**, e si indica con  $N(\mathcal{U})$ , il complesso simpliciale astratto i cui vertici sono gli aperti di  $\mathcal{U}$ :  $\text{Vert}(N(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$ ,

Fissiamo uno spazio topologico  $X$ .

### Definizione (Nervo)

Sia  $\mathcal{U}$  un ricoprimento aperto di  $X$ .

Si dice **nervo**, e si indica con  $N(\mathcal{U})$ , il complesso simpliciale astratto i cui vertici sono gli aperti di  $\mathcal{U}$ :  $\text{Vert}(N(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$ , e i cui simplexi sono le sottofamiglie finite di aperti a intersezione non vuota:

$$\Sigma = \left\{ (U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_n}) \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \mid n \in \mathbb{N}_0 \wedge \bigcap_{j=0}^n U_{i_j} \neq \emptyset \right\}$$

Fissiamo un fascio su  $X$  di gruppi abeliani  $\mathcal{F}$ .

Fissiamo un fascio su  $X$  di gruppi abeliani  $\mathcal{F}$ .

### Definizione (Complesso dei gruppi di cocatene)

Fissiamo un fascio su  $X$  di gruppi abeliani  $\mathcal{F}$ .

### Definizione (Complesso dei gruppi di cocatene)

Definiamo la seguente successione di gruppi e omomorfismi

$$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F}) = \cdots \longrightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^q} C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

dove:

Fissiamo un fascio su  $X$  di gruppi abeliani  $\mathcal{F}$ .

### Definizione (Complesso dei gruppi di cocatene)

Definiamo la seguente successione di gruppi e omomorfismi

$$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F}) = \cdots \longrightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^q} C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

dove:  $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \operatorname{Dr}_{\sigma \in \Sigma_q} \mathcal{F}(\bigcap \sigma)$

Fissiamo un fascio su  $X$  di gruppi abeliani  $\mathcal{F}$ .

### Definizione (Complesso dei gruppi di cocatene)

Definiamo la seguente successione di gruppi e omomorfismi

$$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F}) = \cdots \longrightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^q} C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

dove:  $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma_q} \mathcal{F}(\bigcap \sigma)$  e, presa  $f : \Sigma_q \rightarrow \bigcup_{\sigma \in \Sigma_q} \mathcal{F}(\bigcap \sigma)$   
in  $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ :

$$\delta^q(f) = \left( \sigma \in \Sigma_{q+1} \mapsto \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i f(\hat{\sigma}^i) \in \bigcup_{\tau \in \Sigma_{q+1}} \mathcal{F}(\bigcap \tau) \right)$$

in  $C^{q+1}(\mathcal{F}, \mathcal{U})$ .

## Esercizio

$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F})$  è un complesso.

## Esercizio

$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F})$  è un complesso.

### Definizione (Coomologia di un ricoprimento a coefficienti in $\mathcal{F}$ )

## Esercizio

$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F})$  è un complesso.

Definizione (Coomologia di un ricoprimento a coefficienti in  $\mathcal{F}$ )

Sia  $\mathcal{U}$  un ricoprimento aperto di  $X$ .

## Esercizio

$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F})$  è un complesso.

### Definizione (Coomologia di un ricoprimento a coefficienti in $\mathcal{F}$ )

Sia  $\mathcal{U}$  un ricoprimento aperto di  $X$ .

Chiamiamo **gruppi di coomologia** di  $\mathcal{U}$  a coefficienti in  $\mathcal{F}$  i gruppi di omologia del complesso  $C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F})$ .

## Esercizio

$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F})$  è un complesso.

### Definizione (Coomologia di un ricoprimento a coefficienti in $\mathcal{F}$ )

Sia  $\mathcal{U}$  un ricoprimento aperto di  $X$ .

Chiamiamo **gruppi di coomologia** di  $\mathcal{U}$  a coefficienti in  $\mathcal{F}$  i gruppi di omologia del complesso  $C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F})$ .

Li indichiamo con

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

# Outline

- 1 Coomologia di un ricoprimento a coefficienti in un fascio
- 2 Limiti diretti e coomologia di Čech
- 3 Legame con la coomologia di fasci

## Definizione (Sistema diretto)

## Definizione (Sistema diretto)

Siano  $(I, \preceq)$  un insieme parzialmente ordinato e  $\mathcal{C}$  una categoria.

## Definizione (Sistema diretto)

Siano  $(I, \preceq)$  un insieme parzialmente ordinato e  $\mathcal{C}$  una categoria.  
Un **sistema diretto** in  $\mathcal{C}$  su  $I$  è una coppia ordinata

$$\{M_i, \varphi_j^i\} := ((M_i)_{i \in I}, (\varphi_j^i)_{i \preceq j})$$

dove

## Definizione (Sistema diretto)

Siano  $(I, \preceq)$  un insieme parzialmente ordinato e  $\mathcal{C}$  una categoria.  
Un **sistema diretto** in  $\mathcal{C}$  su  $I$  è una coppia ordinata

$$\{M_i, \varphi_j^i\} := ((M_i)_{i \in I}, (\varphi_j^i)_{i \preceq j})$$

dove  $(M_i)_{i \in I} \subseteq \text{obj}(\mathcal{C})$ ;

## Definizione (Sistema diretto)

Siano  $(I, \preceq)$  un insieme parzialmente ordinato e  $\mathcal{C}$  una categoria.

Un **sistema diretto** in  $\mathcal{C}$  su  $I$  è una coppia ordinata

$$\{M_i, \varphi_j^i\} := ((M_i)_{i \in I}, (\varphi_j^i)_{i \preceq j})$$

dove  $(M_i)_{i \in I} \subseteq \text{obj}(\mathcal{C})$ ;  $(\varphi_j^i)_{i \preceq j} \subseteq M_j^{M_i}$  con  $\varphi_i^i = \iota_{M_i}$  per ogni  $i$ ;

## Definizione (Sistema diretto)

Siano  $(I, \preceq)$  un insieme parzialmente ordinato e  $\mathcal{C}$  una categoria.  
Un **sistema diretto** in  $\mathcal{C}$  su  $I$  è una coppia ordinata

$$\{M_i, \varphi_j^i\} := ((M_i)_{i \in I}, (\varphi_j^i)_{i \preceq j})$$

dove  $(M_i)_{i \in I} \subseteq \text{obj}(\mathcal{C})$ ;  $(\varphi_j^i)_{i \preceq j} \subseteq M_j^{M_i}$  con  $\varphi_i^i = \iota_{M_i}$  per ogni  $i$ ;  
per ogni  $i \preceq j \preceq k$ , il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\varphi_k^i} & M_k \\ & \searrow \varphi_j^i & \nearrow \varphi_k^j \\ & M_j & \end{array}$$

## Definizione (Limite diretto)

## Definizione (Limite diretto)

Siano  $(I, \preceq)$  un poset,  $\mathcal{C}$  una categoria e  $\{M_i, \varphi_j^i\}$  diretto in  $\mathcal{C}$ .

## Definizione (Limite diretto)

Siano  $(I, \preceq)$  un poset,  $\mathcal{C}$  una categoria e  $\{M_i, \varphi_j^i\}$  diretto in  $\mathcal{C}$ .

Il **limite diretto** è una coppia costituita da un oggetto  $\varinjlim M_i$  e una famiglia  $(M_i \xrightarrow{\alpha_i} \varinjlim M_i)_{i \in I}$  di **insertion morphisms** tali che

## Definizione (Limite diretto)

Siano  $(I, \preceq)$  un poset,  $\mathcal{C}$  una categoria e  $\{M_i, \varphi_j^i\}$  diretto in  $\mathcal{C}$ .

Il **limite diretto** è una coppia costituita da un oggetto  $\varinjlim M_i$  e una famiglia  $(M_i \xrightarrow{\alpha_i} \varinjlim M_i)_{i \in I}$  di **insertion morphisms** tali che

- 1  $\varphi_j^i \cdot \alpha_j = \alpha_i$  quando  $i \preceq j$ ;

## Definizione (Limite diretto)

Siano  $(I, \preceq)$  un poset,  $\mathcal{C}$  una categoria e  $\{M_i, \varphi_j^i\}$  diretto in  $\mathcal{C}$ .

Il **limite diretto** è una coppia costituita da un oggetto  $\varinjlim M_i$  e una famiglia  $(M_i \xrightarrow{\alpha_i} \varinjlim M_i)_{i \in I}$  di **insertion morphisms** tali che

- ①  $\varphi_j^i \cdot \alpha_j = \alpha_i$  quando  $i \preceq j$ ;
- ② Presi  $X \in \text{obj}(\mathcal{C})$  e dei morfismi  $f_i : M_i \rightarrow X$  t.c.  $\varphi_j^i \cdot f_j = f_i$  per ogni  $i \preceq j$ , esiste ed è unico  $\theta : \varinjlim M_i \rightarrow X$  che rende il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 \varinjlim M_i & \xrightarrow{\quad \theta \quad} & X \\
 \downarrow \alpha_i & \nearrow \varphi_j^i & \downarrow f_i \\
 M_i & \xrightarrow{\quad f_j \quad} & X \\
 \downarrow \varphi_j^i & & \downarrow f_j \\
 M_j & & 
 \end{array}$$

## Definizione (Classe diretta)

## Definizione (Classe diretta)

Una classe  $\mathcal{K}$  si dice **classe diretta** se su di essa è definita una relazione  $\preceq$  riflessiva, asimmetrica e transitiva e se per ogni  $k, k' \in \mathcal{K}$  esiste  $k^* \in \mathcal{K}$  tale che  $k \preceq k^*$  e  $k' \preceq k^*$ .

## Definizione (Classe diretta)

Una classe  $\mathcal{K}$  si dice **classe diretta** se su di essa è definita una relazione  $\preceq$  riflessiva, asimmetrica e transitiva e se per ogni  $k, k' \in \mathcal{K}$  esiste  $k^* \in \mathcal{K}$  tale che  $k \preceq k^*$  e  $k' \preceq k^*$ .

## Proposizione

Siano  $\mathcal{K}$  una classe diretta,  $\mathcal{C}$  una categoria **cocompleta** e  $\{A_k, \varphi_j^k\}$  un sistema diretto in  $\mathcal{C}$  su  $\mathcal{K}$ .

## Definizione (Classe diretta)

Una classe  $\mathcal{K}$  si dice **classe diretta** se su di essa è definita una relazione  $\preceq$  riflessiva, asimmetrica e transitiva e se per ogni  $k, k' \in \mathcal{K}$  esiste  $k^* \in \mathcal{K}$  tale che  $k \preceq k^*$  e  $k' \preceq k^*$ .

## Proposizione

Siano  $\mathcal{K}$  una classe diretta,  $\mathcal{C}$  una categoria **cocompleta** e  $\{A_k, \varphi_j^k\}$  un sistema diretto in  $\mathcal{C}$  su  $\mathcal{K}$ . Se due sottoclassi di  $\mathcal{K}$ , siano esse  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{M}$ , sono insiemi e **cofinali** in  $\mathcal{K}$ , allora

$$\varinjlim_{\mathcal{L}} A_k \cong \varinjlim_{\mathcal{M}} A_k$$

## Definizione (Raffinamento)

## Definizione (Raffinamento)

Siano  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  due ricoprimenti aperti di  $X$ .

## Definizione (Raffinamento)

Siano  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  due ricoprimenti aperti di  $X$ .

$\mathcal{V}$  si dice **raffinamento** di  $\mathcal{U}$ , e si indica con  $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$ , se, per ogni  $V \in \mathcal{V}$ , esiste  $U \in \mathcal{U}$  tale che  $V \subseteq U$ .

## Definizione (Raffinamento)

Siano  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  due ricoprimenti aperti di  $X$ .

$\mathcal{V}$  si dice **raffinamento** di  $\mathcal{U}$ , e si indica con  $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$ , se, per ogni  $V \in \mathcal{V}$ , esiste  $U \in \mathcal{U}$  tale che  $V \subseteq U$ .

## Definizione (Funzione di raffinamento)

## Definizione (Raffinamento)

Siano  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  due ricoprimenti aperti di  $X$ .

$\mathcal{V}$  si dice **raffinamento** di  $\mathcal{U}$ , e si indica con  $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$ , se, per ogni  $V \in \mathcal{V}$ , esiste  $U \in \mathcal{U}$  tale che  $V \subseteq U$ .

## Definizione (Funzione di raffinamento)

Siano  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  due ricoprimenti aperti di  $X$  tali che  $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$ .

## Definizione (Raffinamento)

Siano  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  due ricoprimenti aperti di  $X$ .

$\mathcal{V}$  si dice **raffinamento** di  $\mathcal{U}$ , e si indica con  $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$ , se, per ogni  $V \in \mathcal{V}$ , esiste  $U \in \mathcal{U}$  tale che  $V \subseteq U$ .

## Definizione (Funzione di raffinamento)

Siano  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  due ricoprimenti aperti di  $X$  tali che  $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$ .

Scegliere, al variare di  $V \in \mathcal{V}$ ,  $V \subseteq U_V \in \mathcal{U}$  definisce una funzione

$$r : V \in \mathcal{V} \mapsto U_V \in \mathcal{U}$$

detta **funzione di raffinamento**.

## Definizione (Ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ )

## Definizione (Ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ )

Sia  $\mathcal{F}$  un fascio di gruppi abeliani su  $X$ .

## Definizione (Ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ )

Sia  $\mathcal{F}$  un fascio di gruppi abeliani su  $X$ .

Poniamo  $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \preceq \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$  se e solo se, per definizione, esiste una funzione di raffinamento  $r : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ .

## Definizione (Ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ )

Sia  $\mathcal{F}$  un fascio di gruppi abeliani su  $X$ .

Poniamo  $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \preceq \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$  se e solo se, per definizione, esiste una funzione di raffinamento  $r : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ .

(Si dimosta che)  $\preceq$  è un ordine parziale sugli  $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ .

## Definizione (Ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ )

Sia  $\mathcal{F}$  un fascio di gruppi abeliani su  $X$ .

Poniamo  $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \preceq \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$  se e solo se, per definizione, esiste una funzione di raffinamento  $r : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ .

(Si dimosta che)  $\preceq$  è un ordine parziale sugli  $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ .

Indichiamo  $\mathcal{K}$  la classe diretta dei gruppi  $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ .

## Definizione (Ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ )

Sia  $\mathcal{F}$  un fascio di gruppi abeliani su  $X$ .

Poniamo  $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \preceq \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$  se e solo se, per definizione, esiste una funzione di raffinamento  $r : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ .

(Si dimosta che)  $\preceq$  è un ordine parziale sugli  $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ .

Indichiamo  $\mathcal{K}$  la classe diretta dei gruppi  $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ .

## Esercizio (Ricerca di un sottoinsieme cofinale in $\mathcal{K}$ )

## Definizione (Ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ )

Sia  $\mathcal{F}$  un fascio di gruppi abeliani su  $X$ .

Poniamo  $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \preceq \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$  se e solo se, per definizione, esiste una funzione di raffinamento  $r : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ .

(Si dimosta che)  $\preceq$  è un ordine parziale sugli  $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ .

Indichiamo  $\mathcal{K}$  la classe diretta dei gruppi  $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ .

## Esercizio (Ricerca di un sottoinsieme cofinale in $\mathcal{K}$ )

### La sottoclassificazione di $\mathcal{K}$

$\mathcal{H} := \{\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : \mathcal{U} \text{ è un ricoprimento aperto senza ripetizioni}\}$   
è un insieme cofinale in  $\mathcal{K}$ .

## Definizione (Coomologia di Čech)

## Definizione (Coomologia di Čech)

La **coomologia di Čech** di  $X$  a coefficienti in  $\mathcal{F}$  è definita come

$$\check{H}^q(\mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{H}} \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

# Outline

- 1 Coomologia di un ricoprimento a coefficienti in un fascio
- 2 Limiti diretti e coomologia di Čech
- 3 Legame con la coomologia di fasci

# Proposizione

Consideriamo  $(H^q)_{q \in \mathbb{N}_0}$  e  $(\check{H}^q)_{q \in \mathbb{N}_0}$  e supponiamo che:

# Proposizione

Consideriamo  $(H^q)_{q \in \mathbb{N}_0}$  e  $(\check{H}^q)_{q \in \mathbb{N}_0}$  e supponiamo che:

- 1 Per ogni successione esatta corta  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$  ci siano due successioni esatte lunghe:

$$\cdots \rightarrow H^{q-1}(\mathcal{H}) \rightarrow H^q(\mathcal{F}) \rightarrow H^q(\mathcal{G}) \rightarrow H^q(\mathcal{H}) \rightarrow H^{q+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow \check{H}^{q-1}(\mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^{q+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

# Proposizione

Consideriamo  $(H^q)_{q \in \mathbb{N}_0}$  e  $(\check{H}^q)_{q \in \mathbb{N}_0}$  e supponiamo che:

- 1 Per ogni successione esatta corta  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$  ci siano due successioni esatte lunghe:

$$\cdots \rightarrow H^{q-1}(\mathcal{H}) \rightarrow H^q(\mathcal{F}) \rightarrow H^q(\mathcal{G}) \rightarrow H^q(\mathcal{H}) \rightarrow H^{q+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow \check{H}^{q-1}(\mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^{q+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

- 2  $H^0$  sia naturalmente isomorfo a  $\check{H}^0$ ;

# Proposizione

Consideriamo  $(H^q)_{q \in \mathbb{N}_0}$  e  $(\check{H}^q)_{q \in \mathbb{N}_0}$  e supponiamo che:

- ① Per ogni successione esatta corta  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$  ci siano due successioni esatte lunghe:

$$\cdots \rightarrow H^{q-1}(\mathcal{H}) \rightarrow H^q(\mathcal{F}) \rightarrow H^q(\mathcal{G}) \rightarrow H^q(\mathcal{H}) \rightarrow H^{q+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow \check{H}^{q-1}(\mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^{q+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

- ②  $H^0$  sia naturalmente isomorfo a  $\check{H}^0$ ;
- ③  $H^q(\mathcal{I}) = 0 = \check{H}^q(\mathcal{I})$  per tutti i fasci iniettivi  $\mathcal{I}$  e ogni  $q \in \mathbb{N}$ .

# Proposizione

Consideriamo  $(H^q)_{q \in \mathbb{N}_0}$  e  $(\check{H}^q)_{q \in \mathbb{N}_0}$  e supponiamo che:

- 1 Per ogni successione esatta corta  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$  ci siano due successioni esatte lunghe:

$$\cdots \rightarrow H^{q-1}(\mathcal{H}) \rightarrow H^q(\mathcal{F}) \rightarrow H^q(\mathcal{G}) \rightarrow H^q(\mathcal{H}) \rightarrow H^{q+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow \check{H}^{q-1}(\mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^{q+1}(\mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

- 2  $H^0$  sia naturalmente isomorfo a  $\check{H}^0$ ;
- 3  $H^q(\mathcal{I}) = 0 = \check{H}^q(\mathcal{I})$  per tutti i fasci iniettivi  $\mathcal{I}$  e ogni  $q \in \mathbb{N}$ .

Allora  $H^q$  è naturalmente isomorfo a  $\check{H}^q$  per ogni  $q \in \mathbb{N}_0$ .

## Osservazione

I funtori di coomologia di fasci sono in accordo con la prima e la terza ipotesi; inoltre, per ogni  $\mathcal{F}$ , si ha  $H^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ .

## Osservazione

I funtori di coomologia di fasci sono in accordo con la prima e la terza ipotesi; inoltre, per ogni  $\mathcal{F}$ , si ha  $H^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ .

## Esercizio (Coomologia di Čech in grado 0)

## Osservazione

I funtori di coomologia di fasci sono in accordo con la prima e la terza ipotesi; inoltre, per ogni  $\mathcal{F}$ , si ha  $H^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ .

## Esercizio (Coomologia di Čech in grado 0)

Per ogni ricoprimento aperto  $\mathcal{U}$  e ogni fascio  $\mathcal{F}$  si ha:

## Osservazione

I funtori di coomologia di fasci sono in accordo con la prima e la terza ipotesi; inoltre, per ogni  $\mathcal{F}$ , si ha  $H^0(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ .

## Esercizio (Coomologia di Čech in grado 0)

Per ogni ricoprimento aperto  $\mathcal{U}$  e ogni fascio  $\mathcal{F}$  si ha:

$$\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$$

## Teorema

*Sia  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$  è una successione esatta corta di fasci su uno spazio paraccompatto.*

## Teorema

Sia  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$  è una successione esatta corta di fasci su uno spazio paraccompatto. Allora esiste una successione esatta

$$0 \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{F}) \rightarrow \cdots$$

## Teorema

Sia  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$  è una successione esatta corta di fasci su uno spazio paraccompatto. Allora esiste una successione esatta

$$0 \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

## Lemma

Sia  $\mathcal{I}$  un fascio iniettivo.

## Teorema

Sia  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$  è una successione esatta corta di fasci su uno spazio paraccompatto. Allora esiste una successione esatta

$$0 \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{G}) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{H}) \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

## Lemma

Sia  $\mathcal{I}$  un fascio iniettivo. Allora

$$\check{H}^q(\mathcal{F}) = 0$$

per ogni  $q \in \mathbb{N}$ .

## Teorema

*Sia  $\mathcal{F}$  un fascio su uno spazio paraccompatto.*

## Teorema

*Sia  $\mathcal{F}$  un fascio su uno spazio paraccompatto. Allora*

$$\check{H}^q(\mathcal{F}) \cong H^q(\mathcal{F})$$

*per ogni  $q \in \mathbb{N}_0$ .*