

Coomologia di Čech

Dario Di Meo (D70/000023)

Seminario di Geometria Algebrica, a.a. 2025/2026

Outline

1 Coomologia di Čech

- Coomologia di un ricoprimento a coefficienti in un fascio
- Limiti diretti
- Coomologia di Čech

2 Confronto tra le coomologie

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto K è una coppia

$$K = (\text{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto K è una coppia

$$K = (\text{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

- 1 $\text{Vert}(K)$ è un insieme non vuoto di elementi chiamati **vertici**;

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto K è una coppia

$$K = (\text{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

- 1 $\text{Vert}(K)$ è un insieme non vuoto di elementi chiamati **vertici**;
- 2 Σ è un sottoinsieme di parti finite e non vuote di $\text{Vert}(K)$ chiamate **simplessi** tali che

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto K è una coppia

$$K = (\text{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

- 1 $\text{Vert}(K)$ è un insieme non vuoto di elementi chiamati **vertici**;
- 2 Σ è un sottoinsieme di parti finite e non vuote di $\text{Vert}(K)$ chiamate **simplessi** tali che
 1. Per ogni $v \in \text{Vert}(K)$, $\{v\} \in \Sigma$;

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto K è una coppia

$$K = (\text{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

- 1 $\text{Vert}(K)$ è un insieme non vuoto di elementi chiamati **vertici**;
- 2 Σ è un sottoinsieme di parti finite e non vuote di $\text{Vert}(K)$ chiamate **simplessi** tali che
 - i. Per ogni $v \in \text{Vert}(K)$, $\{v\} \in \Sigma$;
 - ii. $\sigma \in \Sigma \wedge \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma$.

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Un complesso simpliciale astratto K è una coppia

$$K = (\text{Vert}(K), \Sigma)$$

dove

- 1 $\text{Vert}(K)$ è un insieme non vuoto di elementi chiamati **vertici**;
- 2 Σ è un sottoinsieme di parti finite e non vuote di $\text{Vert}(K)$ chiamate **simplessi** tali che
 - i. Per ogni $v \in \text{Vert}(K)$, $\{v\} \in \Sigma$;
 - ii. $\sigma \in \Sigma \wedge \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma$.

Se σ è un simpleso e $|\sigma| = q + 1$, σ si dirà q -simpleso.

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Si fissi uno spazio topologico X .

Definizione (Nervo)

Si fissi uno spazio topologico X .

Definizione (Nervo)

Sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto di X .

Si fissi uno spazio topologico X .

Definizione (Nervo)

Sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto di X .

Si dice **nervo**, e si indica con $N(\mathcal{U})$, il complesso simpliciale astratto i cui vertici sono gli aperti del ricoprimento, vale a dire $\text{Vert}(N(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$,

Si fissi uno spazio topologico X .

Definizione (Nervo)

Sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto di X .

Si dice **nervo**, e si indica con $N(\mathcal{U})$, il complesso simpliciale astratto i cui vertici sono gli aperti del ricoprimento, vale a dire $\text{Vert}(N(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$, e i cui semplici sono le sottofamiglie finite di \mathcal{U} a intersezione non vuota:

$$\mathcal{S} = \left\{ (U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_n}) : n \in \mathbb{N}_0 \wedge \bigcap_{j=0}^n U_{i_j} \neq \emptyset \right\}$$

Definizione (Complesso di gruppi di cocatene)

Definizione (Complesso di gruppi di cocatene)

Definiamo la seguente successione di gruppi e omomorfismi

$$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F}) = \cdots \longrightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^q} C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

dove:

Definizione (Complesso di gruppi di cocatene)

Definiamo la seguente successione di gruppi e omomorfismi

$$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F}) = \cdots \longrightarrow C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^q} C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

dove: $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \operatorname{Dr}_{\sigma \in \Sigma_q} \mathcal{F}(\bigcap \sigma)$

Definiamo la seguente successione di gruppi e omomorfismi

dove: $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \bigvee_{\sigma \in \Sigma_q} \mathcal{F}(\bigcap \sigma)$ e, presa $f : \Sigma_q \rightarrow \bigcup_{\sigma \in \Sigma_q} \mathcal{F}(\bigcap \sigma)$ in $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$:

$$\delta^q(f) = \left(\sigma \in \Sigma_{q+1} \mapsto \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i f(\hat{\sigma}^i) \in \bigcup_{\sigma \in \Sigma_{q+1}} \mathcal{F}(\bigcap \sigma) \right)$$

in $C^{q+1}(\mathcal{F}, \mathcal{U})$.

Esercizio

Esercizio

$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F})$ è un complesso.

Esercizio

$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F})$ è un complesso.

Definizione (Coomologia di un ricoprimento a coefficienti in \mathcal{F})

Esercizio

$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F})$ è un complesso.

Definizione (Coomologia di un ricoprimento a coefficienti in \mathcal{F})

Siano \mathcal{U} un ricoprimento aperto di X e \mathcal{F} un fascio di gruppi abeliani su X .

Esercizio

$C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F})$ è un complesso.

Definizione (Coomologia di un ricoprimento a coefficienti in \mathcal{F})

Siano \mathcal{U} un ricoprimento aperto di X e \mathcal{F} un fascio di gruppi abeliani su X .

Chiamiamo **gruppi di coomologia** di \mathcal{U} con coefficienti in \mathcal{F} , e li indichiamo con

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

i gruppi di omologia del complesso $C^\bullet(N(\mathcal{U}), \mathcal{F})$.

Definizione (Sistema diretto)

Definizione (Sistema diretto)

Siano (I, \preceq) un insieme parzialmente ordinato e \mathcal{C} una categoria.

Definizione (Sistema diretto)

Siano (I, \preceq) un insieme parzialmente ordinato e \mathcal{C} una categoria.
Un **sistema diretto** in \mathcal{C} su I è una coppia ordinata

$$\{M_i, \varphi_j^i\} := ((M_i)_{i \in I}, (\varphi_j^i)_{i \preceq j})$$

dove

Definizione (Sistema diretto)

Siano (I, \preceq) un insieme parzialmente ordinato e \mathcal{C} una categoria.
Un **sistema diretto** in \mathcal{C} su I è una coppia ordinata

$$\{M_i, \varphi_j^i\} := ((M_i)_{i \in I}, (\varphi_j^i)_{i \preceq j})$$

dove $(M_i)_{i \in I} \subseteq \text{obj}(\mathcal{C})$;

Definizione (Sistema diretto)

Siano (I, \preceq) un insieme parzialmente ordinato e \mathcal{C} una categoria.
Un **sistema diretto** in \mathcal{C} su I è una coppia ordinata

$$\{M_i, \varphi_j^i\} := ((M_i)_{i \in I}, (\varphi_j^i)_{i \preceq j})$$

dove $(M_i)_{i \in I} \subseteq \text{obj}(\mathcal{C})$; $(\varphi_j^i)_{i \preceq j} \subseteq M_j^{M_i}$ con $\varphi_i^i = \iota_{M_i}$ per ogni i ;

Definizione (Sistema diretto)

Siano (I, \preceq) un insieme parzialmente ordinato e \mathcal{C} una categoria.
Un **sistema diretto** in \mathcal{C} su I è una coppia ordinata

$$\{M_i, \varphi_j^i\} := ((M_i)_{i \in I}, (\varphi_j^i)_{i \preceq j})$$

dove $(M_i)_{i \in I} \subseteq \text{obj}(\mathcal{C})$; $(\varphi_j^i)_{i \preceq j} \subseteq M_j^{M_i}$ con $\varphi_i^i = \text{id}_{M_i}$ per ogni i ;
per ogni $i \preceq j \preceq k$, il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\varphi_k^i} & M_k \\ & \searrow \varphi_j^i & \nearrow \varphi_k^j \\ & M_j & \end{array}$$

Definizione (Limite diretto)

Definizione (Limite diretto)

Siano (I, \preceq) un poset, \mathcal{C} una categoria e $\{M_i, \varphi_j^i\}$ diretto in \mathcal{C} .

Definizione (Limite diretto)

Siano (I, \preceq) un poset, \mathcal{C} una categoria e $\{M_i, \varphi_j^i\}$ diretto in \mathcal{C} .
Il **limite diretto** è una coppia costituita da un oggetto $\varinjlim M_i$ e da una famiglia $(\alpha_i)_{i \in I} \subseteq (\varinjlim M_i)^{M_i}$ di **insertion morfisms** tali che

Definizione (Limite diretto)

Siano (I, \preceq) un poset, \mathcal{C} una categoria e $\{M_i, \varphi_j^i\}$ diretto in \mathcal{C} .
Il **limite diretto** è una coppia costituita da un oggetto $\varinjlim M_i$ e da una famiglia $(\alpha_i)_{i \in I} \subseteq (\varinjlim M_i)^{M_i}$ di **insertion morfisms** tali che

$$\textcircled{1} \quad \varphi_j^i \cdot \alpha_j = \alpha_i \text{ quando } i \preceq j;$$

Definizione (Limite diretto)

Siano (I, \preceq) un poset, \mathcal{C} una categoria e $\{M_i, \varphi_j^i\}$ diretto in \mathcal{C} . Il **limite diretto** è una coppia costituita da un oggetto $\varinjlim M_i$ e da una famiglia $(\alpha_i)_{i \in I} \subseteq (\varinjlim M_i)^{M_i}$ di **insertion morfisms** tali che

- ❶ $\varphi_j^i \cdot \alpha_j = \alpha_i$ quando $i \preceq j$;
- ❷ Presi $X \in \text{obj}(\mathcal{C})$ e dei morfismi $f_i : M_i \rightarrow X$ t.c. $\varphi_j^i \cdot f_j = f_i$ per ogni $i \preceq j$, esiste ed è unico $\theta : \varinjlim M_i \rightarrow X$ che rende il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 \varinjlim M_i & \xrightarrow{\quad \theta \quad} & & & X \\
 & \nwarrow \alpha_i & & \nearrow f_i & \\
 & M_i & & & \\
 & \downarrow \varphi_j^i & & \nearrow f_j & \\
 & M_j & & &
 \end{array}$$

Il diagramma sopra illustra la commutatività richiesta. Le frecce curve rappresentano le relazioni $\alpha_j \cdot \varphi_j^i = \alpha_i$ (freccia da M_j a $\varinjlim M_i$) e $\varphi_j^i \cdot f_j = f_i$ (freccia da M_j a X).

Definizione (Classe diretta)

Definizione (Classe diretta)

Una classe \mathcal{K} si dice **classe diretta** se su di essa è definita una relazione \preceq riflessiva, asimmetrica e transitiva e se per ogni $k, k' \in \mathcal{K}$ esiste $k^* \in \mathcal{K}$ tale che $k \preceq k^*$ e $k' \preceq k^*$.

Definizione (Classe diretta)

Una classe \mathcal{K} si dice **classe diretta** se su di essa è definita una relazione \preceq riflessiva, asimmetrica e transitiva e se per ogni $k, k' \in \mathcal{K}$ esiste $k^* \in \mathcal{K}$ tale che $k \preceq k^*$ e $k' \preceq k^*$.

Definizione (Sottoclasse cofinale)

Definizione (Classe diretta)

Una classe \mathcal{K} si dice **classe diretta** se su di essa è definita una relazione \preceq riflessiva, asimmetrica e transitiva e se per ogni $k, k' \in \mathcal{K}$ esiste $k^* \in \mathcal{K}$ tale che $k \preceq k^*$ e $k' \preceq k^*$.

Definizione (Sottoclasse cofinale)

Una sottoclasse \mathcal{L} di \mathcal{K} si dice **cofinale** in \mathcal{K} se, per ogni $k \in \mathcal{K}$, esiste $l \in \mathcal{L}$ tale che $k \preceq l$.

Definizione (Classe diretta)

Una classe \mathcal{K} si dice **classe diretta** se su di essa è definita una relazione \preceq riflessiva, asimmetrica e transitiva e se per ogni $k, k' \in \mathcal{K}$ esiste $k^* \in \mathcal{K}$ tale che $k \preceq k^*$ e $k' \preceq k^*$.

Definizione (Sottoclasse cofinale)

Una sottoclasse \mathcal{L} di \mathcal{K} si dice **cofinale** in \mathcal{K} se, per ogni $k \in \mathcal{K}$, esiste $l \in \mathcal{L}$ tale che $k \preceq l$.

È possibile definire i sistemi diretti anche a partire da una classe diretta.

Definizione (Categoria cocompleta)

Definizione (Categoria cocompleta)

Una categoria \mathcal{C} si dice **cocompleta** se il limite diretto esiste per ogni sistema diretto in \mathcal{C} .

Definizione (Categoria cocompleta)

Una categoria \mathcal{C} si dice **cocompleta** se il limite diretto esiste per ogni sistema diretto in \mathcal{C} .

Proposizione

Definizione (Categoria cocompleta)

Una categoria \mathcal{C} si dice **cocompleta** se il limite diretto esiste per ogni sistema diretto in \mathcal{C} .

Proposizione

Siano \mathcal{K} una classe diretta, \mathcal{C} una categoria cocompleta e $\{A_k, \varphi_j^k\}$ un sistema diretto in \mathcal{C} su \mathcal{K} .

Definizione (Categoria cocompleta)

Una categoria \mathcal{C} si dice **cocompleta** se il limite diretto esiste per ogni sistema diretto in \mathcal{C} .

Proposizione

Siano \mathcal{K} una classe diretta, \mathcal{C} una categoria cocompleta e $\{A_k, \varphi_j^k\}$ un sistema diretto in \mathcal{C} su \mathcal{K} . Se due sottoclassi di \mathcal{K} , siano esse \mathcal{L} e \mathcal{M} , sono insiemi e cofinali in \mathcal{K} , allora

$$\lim_{\rightarrow \mathcal{L}} A_k \cong \lim_{\rightarrow \mathcal{M}} A_k$$

Definizione (Raffinamento)

Definizione (Raffinamento)

Siano \mathcal{U} e \mathcal{V} due ricoprimenti aperti di X .

Definizione (Raffinamento)

Siano \mathcal{U} e \mathcal{V} due ricoprimenti aperti di X .

\mathcal{V} si dice **raffinamento** di \mathcal{U} , e si indica con $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$, se, per ogni $V \in \mathcal{V}$, esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che $V \subseteq U$.

Definizione (Raffinamento)

Siano \mathcal{U} e \mathcal{V} due ricoprimenti aperti di X .

\mathcal{V} si dice **raffinamento** di \mathcal{U} , e si indica con $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$, se, per ogni $V \in \mathcal{V}$, esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che $V \subseteq U$.

Definizione (Funzione di raffinamento)

Definizione (Raffinamento)

Siano \mathcal{U} e \mathcal{V} due ricoprimenti aperti di X .

\mathcal{V} si dice **raffinamento** di \mathcal{U} , e si indica con $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$, se, per ogni $V \in \mathcal{V}$, esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che $V \subseteq U$.

Definizione (Funzione di raffinamento)

Siano \mathcal{U} e \mathcal{V} due ricoprimenti aperti di X tali che $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$.

\mathcal{V} si dice **raffinamento** di \mathcal{U} , e si indica con $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$, se, per ogni $V \in \mathcal{V}$, esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che $V \subset U$.

Scegliere, al variare di $V \in \mathcal{V}$, $V \subset U_V \in \mathcal{U}$ definisce una funzione

$$r : V \in \mathcal{V} \mapsto U_V \in \mathcal{U}$$

detta **funzione di raffinamento**.

Definizione (Ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$)

Definizione (Ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$)

Sia \mathcal{F} un fascio di gruppi abeliani su X .

Definizione (Ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$)

Sia \mathcal{F} un fascio di gruppi abeliani su X .

Poniamo $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \preceq \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ se e solo se, per definizione, esiste una funzione di raffinamento $r : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$.

Definizione (Ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$)

Sia \mathcal{F} un fascio di gruppi abeliani su X .

Poniamo $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \preceq \check{H}^q(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ se e solo se, per definizione, esiste una funzione di raffinamento $r : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$.

(Si dimostra che) \preceq è un ordine parziale sugli $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Esercizio (Ricerca di un sottoinsieme cofinale in \mathcal{K})

Esercizio (Ricerca di un sottoinsieme cofinale in \mathcal{K})

Sia \mathcal{K} la classe diretta dei gruppi $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Esercizio (Ricerca di un sottoinsieme cofinale in \mathcal{K})

Sia \mathcal{K} la classe diretta dei gruppi $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

La sottoclasse

$\mathcal{H} := \{\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : \mathcal{U} \text{ è un ricoprimento aperto senza ripetizioni}\}$
è un insieme cofinale in \mathcal{K} .

Esercizio (Ricerca di un sottoinsieme cofinale in \mathcal{K})

Sia \mathcal{K} la classe diretta dei gruppi $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

La sottoclasse

$\mathcal{H} := \{\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : \mathcal{U} \text{ è un ricoprimento aperto senza ripetizioni}\}$
è un insieme cofinale in \mathcal{K} .

Definizione (Coomologia di Čech)

Esercizio (Ricerca di un sottoinsieme cofinale in \mathcal{K})

Sia \mathcal{K} la classe diretta dei gruppi $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

La sottoclasse

$\mathcal{H} := \{\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : \mathcal{U} \text{ è un ricoprimento aperto senza ripetizioni}\}$
è un insieme cofinale in \mathcal{K} .

Definizione (Coomologia di Čech)

La **coomologia di Čech di X a coefficienti nel fascio \mathcal{F} su X** è definita come

$$\check{H}^q(X, \mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{H}} \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

Outline

1 Coomologia di Čech

- Coomologia di un ricoprimento a coefficienti in un fascio
- Limiti diretti
- Coomologia di Čech

2 Confronto tra le coomologie

Esercizio (Coomologia di Čech di grado 0)

$$\check{H}^0(X, \mathcal{U}) = \Gamma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$$

Noi vogliamo usare questa per dire che le due coomologie so' uguali:

Proposizione

Siano $(F^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ e $(G^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ due successioni di funtori covarianti additivi tali che $F^n, G^n : \mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab}) \rightarrow \mathbf{Ab}$ per ogni $n \in \mathbb{N}_0$.

Supponiamo che

- ❶ Per ogni successione esatta corta, c'è una successione esatta lunga con natural connecting homomorphisms;
- ❷ F^0 è naturalmente isomorfo a F'^0 ;
- ❸ $F^n(E) = 0 = F'^n(E)$ per tutti gli oggetti iniettivi E e per ogni $n > 1$.

Questo apparirà il punto 1:

Teorema (Serre)

Se $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ è una successione esatta corta di fasci su uno spazio paracompatto, allora esiste una successione esatta nella coomologia di Čech:

$$0 \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{F}') \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{F}'') \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{F}') \rightarrow \dots$$

Per il punto tre usiamo il famoso lemma 6.85:

Lemma

Se \mathcal{F} è un fascio iniettivo su X , allora

$$\check{H}^q(\mathcal{F}) = 0$$

per ogni $q \geq 1$.

Teorema

Se \mathcal{F} è un fascio di gruppi abeliani su uno spazio paracompatto, allora

$$\check{H}^q(\mathcal{F}) \cong H^q(\mathcal{F})$$

per ogni $q \geq 0$.