Il teorema di riferimento sarà il seguente:

Teorema 1 (Corollario 6.49)**.** *Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due categorie abeliane di cui la prima con abbastanza iniettivi e siano $(F^n, G^n : \mathcal{A} \to \mathcal{B})_{n \in \mathbb{N}_0}$ due successioni di funtori covarianti additivi tra esse. Si supponga che:*

1. *Per ogni successione esatta corta $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$, esiste una successione esatta lunga dotata di omomorfismi naturali di collegamento;*
2. *F^0 è naturalmente isomorfo a G^0;*
3. *$F^n(E) = 0 = G^n(E)$ per tutti gli oggetti iniettivi E e per ogni $n \geq 1$.*

Allora F^n è naturalmente isomorfo a G^n per ogni $n \in \mathbb{N}_0$.

Per il punto 1 abbiamo (per Čech):

Teorema 2 (Serre, teorema 6.87)**.** *Sia $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ una successione esatta corta di fasci di gruppi abeliani su uno spazio paracompatto. Allora esiste una successione esatta nella coomologia di Čech:*

$$\begin{aligned} 0 \to \check{H}^0(\mathcal{F}') \to \check{H}^0(\mathcal{F}) \to \check{H}^0(\mathcal{F}'') & \\ \to \check{H}^1(\mathcal{F}') \to \check{H}^1(\mathcal{F}) \to \check{H}^1(\mathcal{F}'') &\to \cdots \\ \to \check{H}^q(\mathcal{F}') \to \check{H}^q(\mathcal{F}) \to \check{H}^q(\mathcal{F}'') &\to \check{H}^{q+1}(\mathcal{F}') \to \cdots . \end{aligned}$$

Per il punto 2 abbiamo (per Čech):

Esercizio 1 (6.79(i))**.** *Siano X uno spazio topologico, $\mathcal{U}$ un suo ricoprimento aperto e $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su X. Allora:*

$$\boxed{\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \Gamma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)}$$

(a cui è uguale anche $H^0(\mathcal{F})$).

Per il punto 3 abbiamo (per Čech):

Lemma 1 (6.85)**.** *Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su X. Se $\mathcal{F}$ è iniettivo, allora, per ogni $q \geq 1$:*

$$\check{H}^q(\mathcal{F}) = \{0\}$$

Teorema 3. *Siano X uno spazio topologico e $\mathcal{F}$ un fascio di gruppi abeliani su X. Se X è paracompatto, allora, per ogni $q \in \mathbb{N}_0$:*

$$\check{H}^q(\mathcal{F}) \cong H^q(\mathcal{F})$$