Coomologia di Čech

Dario Di Meo, D70000023

Esame di Geometria Algebrica, XX/12/25

Definizioni 1

Definizione (Complesso simpliciale astratto)

Siano un insieme $\mathrm{Vert}(K) \neq \emptyset$ e una famiglia di suoi sottoinsiemi $\mathcal{S}_K \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{Vert}(K)) \setminus \{\emptyset\}$ tali che

- $\{v\} \in \mathcal{S}_K$ per ogni $v \in \mathrm{Vert}(K)$;
- $\sigma \in \mathcal{S}_K \wedge \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in \mathcal{S}_K$.

Allora $K = (\mathrm{Vert}(K), \mathcal{S}_K)$ si dice complesso simpliciale astratto, gli elementi di $\mathrm{Vert}(K)$ si dicono vertici e gli elementi di $\mathcal{S}$ si dicono simplessi.

Un simplesso σ tale che $|\sigma| = n + 1$ si dice n-simplesso.
Se K e L sono complessi simpliciali, una funzione $\varphi : \mathrm{Vert}(K) \to \mathrm{Vert}(L)$ tale che $\sigma \in \mathcal{S}_K \Rightarrow \varphi(\sigma) \in \mathcal{S}_L$ per ogni $\sigma \in \mathcal{S}_K$ si dice mappa simpliciale.

Definizioni 2

Definizione (Nerbo)

Siano X uno spazio topologico e $\mathcal{U} = (U_I)_{i \in I}$ un suo ricoprimento aperto. Si chiama nerbo il complesso simpliciale astratto $N(\mathcal{U})$ di vertici $\mathrm{Vert}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ e simplessi le sottofamiglie $\{U_{i_0}, U_{i_1} \ldots, U_{i_n}\} \subseteq \mathcal{U}$ tali che $\bigcap_{j=0}^{n} U_{n_j} \neq \emptyset$, al variare di $n \in \mathbb{N}_0$.