GENERAL RELATIVITY

Homepage: https://sj6219.github.io/GameProgrammingDocument/

Email: sj6219@hotmail.com

2013/09/24

이 문서에서는 상대성 이론에 대해 정리해보겠다.

CONTENTS

1 SPECIAL RELATIVITY

등속도 운동을 하고 있는 관찰자 A 와 B 가 있다고 하자. A 의 입장에서 관찰할 때, B 가 x 축 방향으로 v의 속도로 움직인다고 가정하자. 이 때 각각의 관찰자에서 바라본 좌표간의 변환에 대해서 생각해 보자.

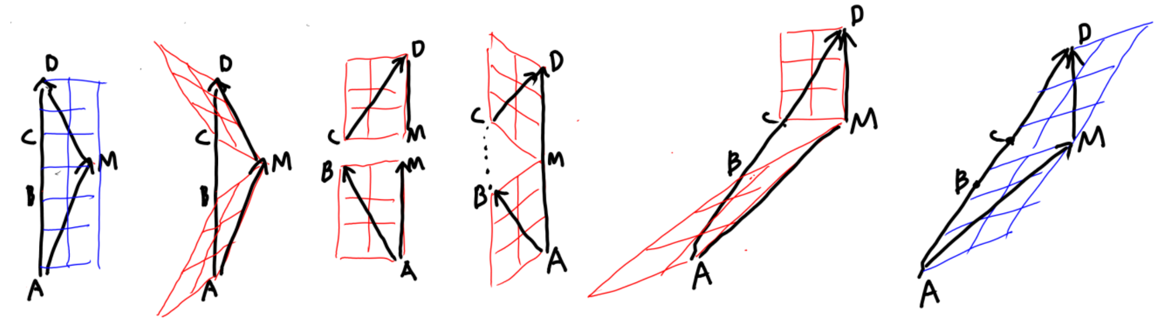
뉴튼 역학에서 보면 간단하다.

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

위의 방법으로 A 좌표계의 위치를 B 좌표계의 위치로 변환할 수 있다.

이에 비해, 상대성이론에서는 아래와 같이 **Lorentz transformation** 으로 변환한다.

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{-(v/c)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-(v/c)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



그림에서 파란색 선은 A,B,C,D 방향으로 직진하는 관찰자의 직각 좌표계이고, 빨간선은 A,M,D 로 움직이는 관찰자의 직각 좌표계를 표시한 것이다. 후자가 관찰하는 시공간은 휘어지고, 전자보다 더 짧은 시간 동안에 이동하게 된다. 마지막 그림은 M 에서 D 로 이동할 때의 좌표계에서 관찰한 이동 경로이다.

2 DIFFERENTIAL MANIFOLD

[1] Chapter 1-5 참조

2.1 TENSOR

M 을 topological space(공간상의 점들의 집합)라 하자. 그리고, p 를 M 의 한 점이라고 하자.

$$p \in M$$

그리고, U 를 p 를 포함하는 주변의 점들의 공간이라고 하자.

점 p 에 대하여 좌표값을 구하는 변환 $x : U \to \mathbb{R}^n$이 homeomorphism 을 만족한다고 하면,

순서쌍 (U, x) 를 n 차원 **chart** 라고 한다. (http://en.wikipedia.org/wiki/Manifold#Circle 참조)

Homeomorphism 은 어떤 변환 x 가 역변환 x^{-1}를 가지고 있고, 변환 x 와 역변환 x^{-1}이 둘 다 continuous 한 것을 의미한다.

이렇게 유한한 a 개의 chart 의 $(U_{(1)}, x_{(1)}), (U_{(2)}, x_{(2)}), \cdots, (U_{(a)}, x_{(a)})$, 에 의해 표현되는 topological space M 을 **topological manifold** 라고 한다. $M = U_{(1)} \cup U_{(2)} \cdots \cup U_{(a)}$이어야 한다.

두 개의 chart $(U_{(1)}, x_{(1)})$ 와 $(U_{(2)}, x_{(2)})$ 가 있을 때, $W = U_{(1)} \cap U_{(2)} \neq \emptyset$ 의 원소에 대한 좌표계간의 변환 $x_{(1)} \circ x_{(2)}{}^{-1}: x_{(2)}(W) \to x_{(1)}(W)$과 $x_{(2)} \circ x_{(1)}{}^{-1}: x_{(1)}(W) \to x_{(2)}(W)$ 가 C^k differentiable 하면, 두 chart 는 $\boldsymbol{C^k}$ **compatible** 하다고 한다. 이렇게, Topological space M 의 공통 부분을 가지는 모든 chart 간에 C^∞ compatible 하면 M 을 $\boldsymbol{C^\infty}$ **differentiable manifold** 라고 한다.

Manifold 의 한 점을 실수로 변환하는 함수 $f : M \to \mathbb{R}$의 **scalar function** 이라고 부르고, scalar 함수의 집합을 $\boldsymbol{\mathcal{T}_0^0}$ 로 표시한다.

chart (U, x)에 대하여, $x^i: U \to \mathbb{R}$ 를 다음과 같이 좌표값을 구하는 함수로 정의 하자.

$$p \in U, \qquad x(p) = \left(x^1(p), x^2(p), \ldots, x^n(p)\right)$$

물체가 다음과 같이 i 축 방향으로 이동하는 간단한 경우부터 알아보자.

$P_i: M \times \mathbb{R} \to M$를 다음과 같이 정의하자.

$$p \in U,$$

$$P_i(p, \Delta t) = x^{-1}\left(x^1(p), \ldots, x^{i-1}(p), x^i(p) + \Delta t, x^{i+1}(p), \ldots, x^n(p)\right)$$

이 때, 주어진 스칼라 함수 $f \in \mathcal{T}_0^0$ 에 대해 $f\left(P_i(p, \Delta t)\right)$ 의 변화 속도를 구하는 변환 $\boldsymbol{e_i}: \mathcal{T}_0^0 \times U \to \mathbb{R}$에 대해 알아보자.

$$f \in \mathcal{T}_0^0, \qquad p \in U,$$

$$\left(e_i(f)\right)(p) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f\left(P_i(p, \Delta t)\right) - f(p)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f \circ x^{-1}\left(x^1(p), \ldots, x^{i-1}(p), x^i(p) + \Delta t, x^{i+1}(p), \ldots, x^n(p)\right) - f(p)}{\Delta t}$$

이번에는 물체가 임의의 방향으로 이동할 때에 대해 알아보자.

어떤 물체가 시간 t 일 때, 공간상의 그 위치를 구하는 함수를 $P: \mathbb{R} \rightarrow M$ 라고 하고, $P(t)$ 가 manifold 공간 내부를 이동한다고 가정하자.

주어진 스칼라 함수 $f \in \mathcal{T}_0^0$ 에 대해 $f(P(t))$ 의 변화 속도를 구하는 변환 $v: \mathcal{T}_0^0 \times M \rightarrow \mathbb{R}$에 대해 알아보자.

$$f \in \mathcal{T}_0^0, \qquad (v(f))(P(t)) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(P(t+\Delta t)) - f(P(t))}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f \circ x^{-1}\left(x^1(P(t+\Delta t)), x^2(P(t+\Delta t)), \dots, x^n(P(t+\Delta t))\right) - f(P(t))}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f \circ x^{-1}\left(x^1(P(t+\Delta t)), x^2(P(t+\Delta t)), \dots, x^n(P(t+\Delta t))\right) - f \circ x^{-1}\left(x^1(P(t)), x^2(P(t+\Delta t)), \dots, x^n(P(t+\Delta t))\right)}{\Delta t}$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f x^{-1}\left(x^1(P(t)), x^2(P(t+\Delta t)), \dots, x^n(P(t+\Delta t))\right) - f \circ x^{-1}\left(x^1(P(t)), x^2(P(t)), \dots, x^n(P(t+\Delta t))\right)}{\Delta t}$$

$$+ \cdots + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f \circ x^{-1}\left(x^1(P(t)), x^2(P(t)), \dots, x^n(P(t+\Delta t))\right) - f(P(t))}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f \circ x^{-1}\left(x^1(P(t+\Delta t)), x^2(P(t)), \dots, x^n(P(t))\right) - f(P(t))}{\Delta t}$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f \circ x^{-1}\left(x^1(P(t)), x^2(P(t+\Delta t)), \dots, x^n(P(t))\right) - f(P(t))}{\Delta t} + \cdots$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f \circ x^{-1}\left(x^1(P(t)), x^2(P(t)), \dots, x^n(P(t+\Delta t))\right) - f(P(t))}{\Delta t}$$

$$= \left((\boldsymbol{e_1}(f))(P(t))\right) \frac{dx^1(P(t))}{dt} + \left((\boldsymbol{e_2}(f))(P(t))\right) \frac{dx^2(P(t))}{dt} + \cdots + \left((\boldsymbol{e_n}(f))(P(t))\right) \frac{dx^n(P(t))}{dt}$$

$$= \frac{dx^i(P(t))}{dt}\left((\boldsymbol{e_i}(f))(P(t))\right)$$

물체의 각 점 p 를 지나고 그 점 p 를 지날 때의 시간이 t 라고 하면

$$v: M \times \mathcal{T}_0^0 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v(p) = \frac{dx^i(P(t))}{dt} \boldsymbol{e_i}$$

로 표현할 수 있다.

Manifold 상에서 물체가 어떤 속도로 움직일 때, 입력 f 의 함수값 $f(P(t))$의 증가속도를 구하는 변환을 vector 라고 정의한다. 이런 vector $v: \mathcal{T}_0^0 \times M \to \mathbb{R}$들의 집합을 **vector space** 라고 하고, $\boldsymbol{\mathcal{T}_0^1}$으로 표시한다. 이 때, vector space 는 각 점마다 $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}$를 basis 로 하는 n 차원 값을 가진다.

물체의 좌표상에서 속도를 구하는 함수 $v^i \in \mathcal{T}_0^1: U \to \mathbb{R}$라고 하면, 위 식은 아래와 같이 된다.

$$\forall f \in \mathcal{T}_0^0, \qquad (v(f))(P(t)) = v^i(P(t))\left((\boldsymbol{e_i}(f))(P(t))\right)$$

위와 같이 움직일 때의 vector 를 $v \in \mathcal{T}_0^1$라고 할 때, 그 벡터의 i번째 component 값을 구하는 함수 $\boldsymbol{\varepsilon^i}: \mathcal{T}_0^1 \to \mathcal{T}_0^0$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\boldsymbol{\varepsilon^i}(v) = v^i = v(x^i)$$

각 점에서 $\boldsymbol{\varepsilon^1}, \boldsymbol{\varepsilon^2}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon^n}$를 basis 로 하는 n 차원 값을 가지는 개체의 집합을 **dual vector space** 라고 하고, $\mathcal{T}_1^0$으로 표시한다.

$w \in \mathcal{T}_1^0$ 에 대해 각 점 $p \in U$ 에서의 component 의 값이 $(w_1(p), w_2(p), \dots, w_n(p))$일 때,

$$w: \mathcal{T}_0^1 \to \mathcal{T}_0^0, w_i: U \to \mathbb{R}$$

$$\forall p \in U, \forall v \in \mathcal{T}_0^1, \qquad (w(v))(p) = (w_i(p))\left(\left(\boldsymbol{\varepsilon^i}(v)\right)(p)\right)$$

을 만족하도록 w 를 정의한다..

그런데, 다음과 같이 vector 함수를 확장하여, dual vector 도 입력이 될 수 있도록 한다.

$$v \in \mathcal{T}_0^1, v: \mathcal{T}_1^0 \to \mathcal{T}_0^0$$

$$\forall w \in \mathcal{T}_1^0, \qquad v(w) = w(v)$$

그래서, dual vector $w \in \mathcal{T}_1^0$에서 i 번째 component 를 구하는 변환도 $\boldsymbol{e_i}: \mathcal{T}_1^0 \to \mathcal{T}_0^0$이다.

$$\boldsymbol{e_i}(w) = w_i = w(\boldsymbol{e_i})$$

타입 (a,b) tensor $T \in \mathcal{T}_b^a$ 의 정의를 알아 보자. $\mathcal{T}_b^a$는 a 개의 dual vector 와 b 개의 vector 를 입력으로 scalar 함수로 변환하는 함수의 집합이다.

$T: (\mathcal{T}_1^0)^{\mathrm{a}} \times (\mathcal{T}_0^1)^{\mathrm{b}} \to \mathcal{T}_0^0$ 라고 하자. 여기서 $(\mathcal{T}_1^0)^{\mathrm{a}}$는 a 개의 곱집합 $\mathcal{T}_1^0 \times \dots \times \mathcal{T}_1^0$를 의미한다.

T의 component 값 ${T^{A_1,\dots,A_a}}_{B_1,\dots,B_b}: U \to \mathbb{R}$을

$${T^{A_1,\dots,A_a}}_{B_1,\dots,B_b} = T\left(\boldsymbol{\varepsilon^{A_1}}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon^{A_a}}, \boldsymbol{e_{B_1}}, \dots, \boldsymbol{e_{B_b}}\right)$$

로 표기한다. 아래처럼 좌표 값을 입력으로 받을 수도 있다.

$${T^{A_1,\dots,A_a}}_{B_1,\dots,B_b}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\forall p \in U, \qquad {T^{A_1,\dots,A_a}}_{B_1,\dots,B_b}(x(p)) = {T^{A_1,\dots,A_a}}_{B_1,\dots,B_b}(p)$$

$T: (\mathcal{T}_1^0)^{\mathrm{a}} \times (\mathcal{T}_0^1)^{\mathrm{b}} \to \mathcal{T}_0^0, R: (\mathcal{T}_1^0)^{\mathrm{c}} \times (\mathcal{T}_0^1)^{\mathrm{d}} \to \mathcal{T}_0^0$ 일 때, $T \otimes R: (\mathcal{T}_1^0)^{\mathrm{a}} \times (\mathcal{T}_0^1)^{\mathrm{b}} \times (\mathcal{T}_1^0)^{\mathrm{c}} \times (\mathcal{T}_0^1)^{\mathrm{d}} \to \mathcal{T}_0^0$를 아래와 같이 정의하고, 연산 $\otimes$ 를 tensor product 라고 부른다.

$$\forall p \in U, \qquad \left((T \otimes R)^{A_1,\dots,A_a}{}_{B_1,\dots,B_b}{}^{C_1\dots,C_c}{}_{D_1,\dots,D_d}\right)(p) = \left(\mathrm{T}^{A_1,\dots,A_a}{}_{B_1,\dots,B_b}(p)\right)\left(R^{C_1,\dots,C_c}{}_{D_1,\dots,D_d}(p)\right)$$

tensor $T \otimes R \in \mathcal{T}_{b+d}^{a+c}$는 $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{A_1}} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{A_a}} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{B_1}} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{B_b}} \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{C_1}} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{C_c}} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{D_1}} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{D_d}}$를 basis 로 하는 $n^{a+b+c+d}$차원 값을 가진다.
$f \in \mathcal{T}_0^0$인 경우에는 $f \otimes T$ 대신에 간단히 fT 로 표기한다. 예를 들어, $v^i: U \to \mathbb{R}$일 때, $v^i \otimes \boldsymbol{e_i}$ 대신에 $v^i \boldsymbol{e_i}$로 표기한다.

그리고,

$$T \in \mathcal{T}_b^a, \qquad T: M \to \mathcal{T}_{(p)}{}_b^a$$

로 Tensor 함수의 정의구역을 확장하여, 공간의 점을 입력으로 받기도 한다. $\mathcal{T}_{(p)}{}_b^a$는 a 개의 $\mathcal{T}_{(p)}{}_1^0$과 b 개의 $\mathcal{T}_{(p)}{}_0^1$을 입력으로 실수 값을 구하는 함수들의 집합이다.

만약에, $p \in M, T: (\mathcal{T}_1^0)^{\mathrm{a}} \times (\mathcal{T}_0^1)^{\mathrm{b}} \to \mathcal{T}_0^0$ 라면, $T(p) \in \mathcal{T}_{(p)}{}_b^a$는

$$T(p): \left(\mathcal{T}_{(p)}{}_1^0\right)^{\mathrm{a}} \times \left(\mathcal{T}_{(p)}{}_0^1\right)^{\mathrm{b}} \to \mathbb{R}$$

이어야 하고,

$$\forall w^{(i)} \in \mathcal{T}_1^0, \forall v_{(i)} \in \mathcal{T}_0^1,$$

$$\left(T(p)\right)\left(w^{(1)}(p), \dots, w^{(a)}(p), v_{(1)}(p), \dots, v_{(b)}(p)\right) = \left(T\left(w^{(1)}, \dots, w^{(a)}, v_{(1)}, \dots, v_{(b)}\right)\right)(p)$$

을 만족해야 한다.

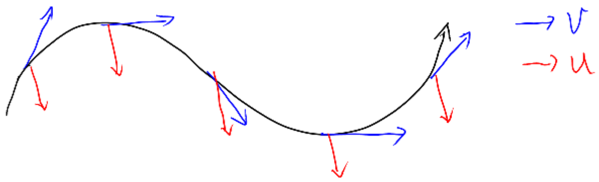
2.2 COVARIANT DIFFERENTIATION

scalar 함수 f 를 입력으로 하는 변환 $\nabla_v: \mathcal{T}_0^0 \to \mathcal{T}_0^0$를 $v \in \mathcal{T}_0^1$ 와 똑같이 정의한다.

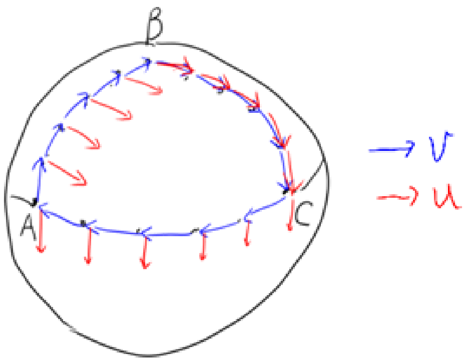
$$\forall f \in \mathcal{T}_0^0, \qquad \nabla_v f = v(f)$$

이번엔 vector 를 입력으로 하는 변환 $\nabla_v: \mathcal{T}_0^1 \to \mathcal{T}_0^1$ 에 대해 정의해 보자.
Manifold 상의 점이 $v = v^l e_l$ 방향으로 이동할 때, 그 경로를 따라 vector $u = u^m e_m$ 의 방향과

크기가 변하지 않는다면 vector u 가 parallel transport 되었다고 말한다. $\nabla_v u = 0$ 을 만족하면, 벡터 u는 parallel transport 된다. 그렇게 되도록 변환 ∇_v를 정의한다.



아래 그림은 3 차원 구의 표면으로 이루어진 2 차원 공간에서의 이동을 그림으로 표현하였다. 점 A, B, C, A 경로로 이동하는 동안, 벡터 u 는 parallel transport 되었다. 2 차원 공간상에서 벡터 u가 매 순간 평행을 유지하면서 이동하고 있다. 중간에 어떤 경로를 택하느냐에 따라, 최종적으로 parallel transport 된 결과는 바뀔 수 있다.



서로 다른 두 위치의 vector 를 비교하기 위해서는 두 위치간의 환율 비슷한 게 필요하다. 여기서, $\Gamma^{c}_{a\,b}$가 그 역할을 한다. e_a를 b 축 방향으로 이동할 때, vector e_a 의 변화 량의 c 번째 component 값을 $\Gamma^{c}_{a\,b}: U \to \mathbb{R}$ 라고 정의한다.

$p \in U$일때, $p' = x^{-1}\left(x^1(p), \dots, x^{b-1}(p), x^b(p) + \Delta t, x^{b+1}(p), \dots, x^n(p)\right)$로 표기하면

$$\left(\nabla_{e_b}(e_a)\right)(p) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e_a(p') - e_a(p)}{\Delta t} = \Gamma^{c}_{a\,b}(p)\, e_c(p)$$

이것은

$$\boldsymbol{e_a}(p') = \boldsymbol{e_a}(p) + \left(\Gamma^{c}_{a\,b}(p)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)\right) \boldsymbol{e_c}(p)$$

b 축으로 Δt 만큼 이동할 때, 우변의 $\mathcal{T}_{(p)}{}^{1}_{0}$ vector 가 좌변의 $\boldsymbol{e_a}(p') \in \mathcal{T}_{(p')}{}^{1}_{0}$로 parallel transport 된다는 의미이다. 여기서, 등호는 parallel transport 된다는 것을 편의상 표현한 것이다.

$R \in \mathcal{T}_0^1, S \in \mathcal{T}_1^0, T \in \mathcal{T}_0^1$에 대해, $\big(\Gamma(R,S,T)\big)(p) = (\Gamma_{a\ c}^{\ b} R^a S_b T^c)(p)$의 값은 좌표계에 따라서 다른 값을 가질 수 있으므로, 좁은 의미에서는 Γ는 텐서가 아니다. ([1] (3.3.16) (3.3.21) 참조)
하지만, $S = (\Gamma_{a\ c}^{\ b} - \Gamma_{c\ a}^{\ b})(\varepsilon^a \otimes e_b \otimes \varepsilon^c)$는 텐서이고, **torsion tensor** 라고 부른다.([1] (3.4.18) 참조)

또한, $\boldsymbol{e_a}$ 를 $v = v^m e_m$ 방향으로 이동할 때는

$$\forall p \in U, \qquad \big(\nabla_v(\boldsymbol{e_a})\big)(p) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{e_a} \circ x^{-1}(x^1(p) + v^1(p)\Delta t, \dots, x^n(p) + v^n(p)\Delta t) - \boldsymbol{e_a}(p)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{e_a} \circ x^{-1}(x^1(p) + v^1(\tilde{x})\Delta t, x^2(p) + v^2(\tilde{x})\Delta t, \dots, x^n(p) + v^n(p)\Delta t) - \boldsymbol{e_a} \circ x^{-1}(x^1(p), x^2(p) + v^2(p)\Delta t, \dots, x^n + v^n(p)\Delta t)}{\Delta t}$$

$$+ \frac{\boldsymbol{e_a} \circ x^{-1}(x^1(p), x^2(p) + v^2(p)\Delta t, x^3(p) + v^3(p)\Delta t, \dots, x^n(p) + v^n(p)\Delta t) - \boldsymbol{e_a} \circ x^{-1}(x^1(p), x^2(p), x^3(p) + v^3(p)\Delta t, \dots, x^n + v^n(p)\Delta t)}{\Delta t}$$

$$+ \ \dots$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \Gamma_{a\ 1}^{\ c} \circ x^{-1}(x^1(p), x^2 + v^2(p)\Delta t, \dots, x^n(p) + v^n(p)\Delta t)\ v^1(p)\ \boldsymbol{e_c} \circ x^{-1}(x^1(p), x^2(p) + v^2(p)\Delta t, \dots, x^n(p) + v^n(p)\Delta t)$$

$$+ \Gamma_{a\ 2}^{\ c} \circ x^{-1}(x^1(p), x^2(p), x^3(p) + v^3(p)\Delta t, \dots, x^n(p) + v^n(p)\Delta t) v^2(p)\ \boldsymbol{e_c} \circ x^{-1}(x^1(p), x^2(p), x^3(p) + v^3(p)\Delta t, \dots, x^n(p) + v^n(p)\Delta t)$$

$$+ \cdots$$

$$= v^m(p)\ \Gamma_{a\ m}^{\ c}(p)\ \boldsymbol{e_c}(p)$$

$u = u^m e_m$ 를 $v = v^l e_l$ 방향으로 이동할 때는

$$\nabla_v u\,(p) =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u^m\big(x^1(p) + v^1(p)\Delta t, \dots, x^n(p) + v^n(p)\Delta t\big)\boldsymbol{e_m}\big(x^1(p) + v^1(p)\Delta t, \dots, x^n(p) + v^n(p)\Delta t\big) - u(p)}{\Delta t}$$

$$= u^m{}_{,l}(p)\ v^l(p)\ \boldsymbol{e_m}(p) + \Gamma_{m\ l}^{\ c}(p)\ u^m(p)\ v^l(p)\ \boldsymbol{e_c}(p)$$

$$= u^m{}_{,l}(p)\ v^l(p)\ \boldsymbol{e_m}(p) + \Gamma_{k\ l}^{\ m}(p)\ u^k(p)\ v^l(p)\ \boldsymbol{e_m}(p)$$

$$= v^l(p)\ \nabla_{\boldsymbol{e_l}} u\,(p)$$

변환 $\nabla_v : \mathcal{T}_1^0 \to \mathcal{T}_1^0$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\forall w \in \mathcal{T}_1^0, \forall u \in \mathcal{T}_0^1, \qquad \big(\nabla_v(w)\big)(u) = \nabla_v\big(w(u)\big) - w(\nabla_v u)$$

Tensor $T \otimes R$ 를 입력으로 하는 변환 $\nabla_v : \mathcal{T}_{\mathrm{b+d}}^{\mathrm{a+c}} \to \mathcal{T}_{\mathrm{b+d}}^{\mathrm{a+c}}$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\forall T \in \mathcal{T}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{a}}, \forall R \in \mathcal{T}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}, \qquad \nabla_v(T \otimes R) = (\nabla_v T) \otimes R + T \otimes (\nabla_v R)$$

$T:\mathcal{T}_1^0\times\mathcal{T}_0^1\to\mathcal{T}_0^0$일 때, $\nabla_{e_u}\big(T(\varepsilon^a,e_b)\big)$=$\nabla_{e_u}(T^a{}_b)$ 은 $T^a{}_{b,u}$로, $\big(\nabla_{e_u}T\big)(\varepsilon^a,e_b)=\big(\nabla_{e_u}T\big)^a{}_b$는 $T^a{}_{b;u}$로, $\Big(\nabla_{e_v}\big(T^p{}_{q;r}\boldsymbol{e_p}\otimes\boldsymbol{\varepsilon^q}\otimes\boldsymbol{\varepsilon^r}\big)\Big)^a{}_{bu}$는 $T^a{}_{b;u;v}$로 표기한다.

2.3 COVARIANT EXTERIOR DERIVATIVE

(**generalized Kronecker delta** 함수 δ 에 관해서는 [1] 4.2.1 참조)

대부분의 다른 책에서는 1-form 과 dual vector 를 서로 같은 것으로 정의하지만, 여기서는 구분해서 설명한다. 그래야만 covariant exterior derivative 의 개념이 더 명확해진다.

$\boldsymbol{dx^{A_1}}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{dx^{A_p}}$를 **p-form** 이라고 하는데, $\frac{1}{p!}\delta^{A_1\ldots A_p}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\boldsymbol{\varepsilon^{\alpha_1}}\otimes\ldots\otimes\boldsymbol{\varepsilon^{\alpha_p}}\in\mathcal{T}_{\mathrm{p}}^0$ 와 상호간에 변환 가능하다. p-form 은 이렇게 tensor 와 비슷한 역할을 한다. 하지만, 몇 가지 추가 기능을 가진다. 지금까지 배운 tensor $\mathcal{T}_b^a$들은 0-form 에 속한다. 일반적으로 $T\in\mathcal{T}_{b+p}^a$ 가 $T^{A_1\ldots A_a}_{B_1\ldots B_b\,\mathrm{C}_1\ldots\mathrm{C}_p}=\frac{1}{p!}\delta^{\gamma_1\ldots\gamma_p}_{\mathrm{C}_1\ldots\mathrm{C}_p}T^{A_1\ldots A_a}_{B_1\ldots B_b\,\gamma_1\ldots\gamma_p}$를 만족하면, p-form $T^{A_1\ldots A_a}_{B_1\ldots B_b\,\mathrm{C}_1\ldots\mathrm{C}_p}\boldsymbol{e_{A_1}}\otimes\ldots\otimes\boldsymbol{e_{A_a}}\otimes\boldsymbol{\varepsilon^{B_1}}\otimes\ldots\otimes\boldsymbol{\varepsilon^{B_b}}\,\boldsymbol{dx^{\mathrm{C}_1}}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{dx^{\mathrm{C}_p}}$으로 변환가능하고, component $T^{A_1\ldots A_a}_{B_1\ldots B_b\,\mathrm{C}_1\ldots\mathrm{C}_p}\boldsymbol{e_{A_1}}\otimes\ldots\otimes\boldsymbol{e_{A_a}}\otimes\boldsymbol{\varepsilon^{B_1}}\otimes\ldots\otimes\boldsymbol{\varepsilon^{B_b}}\in\mathcal{T}_b^a$를 $T_{\mathrm{C}_1\ldots\mathrm{C}_p}$로 표기한다. 그리고, p-form 들의 집합을 Λ^p로 표기한다.

p-form 은 **exterior product** 연산 $\wedge:\Lambda^p\times\Lambda^q\to\Lambda^{p+q}$ 를 지원한다.

$$\forall\omega_{A_1\ldots A_p}\in\Lambda^0,\forall\pi_{B_1\ldots B_q}\in\Lambda^0,$$
$$\Big(\omega_{A_1\ldots A_p}\,\boldsymbol{dx^{A_1}}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{dx^{A_p}}\Big)\wedge\Big(\pi_{B_1\ldots B_q}\,\boldsymbol{dx^{B_1}}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{dx^{B_q}}\Big)$$
$$=\omega_{A_1\ldots A_p}\otimes\pi_{B_1\ldots B_q}\,\boldsymbol{dx^{A_1}}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{dx^{A_p}}\wedge\boldsymbol{dx^{B_1}}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{dx^{B_q}}$$
$$=\frac{1}{(p+q)!}\delta^{\alpha_1\ldots\alpha_p\,\beta_1\ldots\beta_q}_{A_1\ldots A_p\,B_1\ldots B_q}\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\otimes\pi_{\beta_1\ldots\beta_q}\,\boldsymbol{dx^{A_1}}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{dx^{A_p}}\wedge\boldsymbol{dx^{B_1}}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{dx^{B_q}}$$

그리고, 다음과 같이 **exterior derivative** $d:\Lambda^p\to\Lambda^{p+1}$ 변환을 할 수 있다.

$$\forall f\in\mathcal{T}_0^0,\qquad df=f_{,h}\,\boldsymbol{dx^h}$$
$$d(\boldsymbol{e_i})=d(\boldsymbol{\varepsilon^i})=d(\boldsymbol{dx^i})=0$$
$$\forall\omega\in\Lambda^p,\forall\pi\in\Lambda^q,d(\omega\wedge\pi)=(d\omega)\wedge\pi+(-1)^p\omega\wedge(d\pi)$$

또, **covariant exterior derivative** $D: \Lambda^p \to \Lambda^{p+1}$ 변환도 가능하다.

$$\forall f \in \mathcal{T}_0^0, \qquad Df = f_{,h}\, \boldsymbol{dx^h}$$

$$D(\boldsymbol{e_i}) = \Gamma_{i\,h}^{\,m}\, e_m\, \boldsymbol{dx^h}$$

$$D(\boldsymbol{\varepsilon^i}) = -\Gamma_{m\,h}^{\,i}\, \varepsilon^m\, \boldsymbol{dx^h}$$

$$D(\boldsymbol{dx^i}) = 0$$

$$\forall \omega \in \Lambda^p, \forall \pi \in \Lambda^q, \qquad D(\omega \wedge \pi) = (D\omega)\wedge\pi + (-1)^p \omega \wedge (D\pi)$$

예를 들어

$$D\left(\mathrm{A}_{l\ hk}^{\ j}\, \boldsymbol{\varepsilon^l} \otimes \boldsymbol{e_j}\, \boldsymbol{dx^h} \wedge \boldsymbol{dx^k}\right)$$

$$= \mathrm{A}_{l\ hk,p}^{\ j} \boldsymbol{dx^p} \wedge \boldsymbol{\varepsilon^l} \wedge \boldsymbol{e_j} \wedge \boldsymbol{dx^h} \wedge \boldsymbol{dx^k} - \mathrm{A}_{l\ hk}^{\ j} \wedge \Gamma_{m\,p}^{\,l} \boldsymbol{\varepsilon^m} \boldsymbol{dx^p} \wedge \boldsymbol{e_j} \wedge \boldsymbol{dx^h} \wedge \boldsymbol{dx^k} + \mathrm{A}_{l\ hk}^{\ j} \wedge \boldsymbol{\varepsilon^l} \wedge \Gamma_{j\,p}^{\,m} \boldsymbol{e_m} \boldsymbol{dx^p} \wedge \boldsymbol{dx^h} \wedge \boldsymbol{dx^k}$$

$$= \left(\mathrm{A}_{l\ hk,p}^{\ j} - \mathrm{A}_{m\ hk}^{\ j} \Gamma_{l\,p}^{\,m} + \mathrm{A}_{l\ hk}^{\ m} \Gamma_{m\,p}^{\,j}\right) \boldsymbol{\varepsilon^l} \otimes \boldsymbol{e_j}\, \boldsymbol{dx^p} \wedge \boldsymbol{dx^h} \wedge \boldsymbol{dx^k}$$

$$= \left(\mathrm{A}_{l\ hk;p}^{\ j} + \frac{1}{2} \mathrm{A}_{l\ mk}^{\ j} S_{h\,p}^{\,m} + \frac{1}{2} \mathrm{A}_{l\ mp}^{\ j} S_{k\,p}^{\,m}\right) \boldsymbol{\varepsilon^l} \otimes \boldsymbol{e_j}\, \boldsymbol{dx^p} \wedge \boldsymbol{dx^h} \wedge \boldsymbol{dx^k}$$

2.4 LIE DERIVATIVE

$\phi: M \to \bar{M}$ 가 두 개의 Manifold 공간 사이의 변환을 정의한다고 하자. M 공간의 chart 를 (U, x) 라고 하고, $\bar{M}$ 공간의 chart 를 $(\bar{U}, \bar{x})$ 라고 하자.

M공간의 vector space $\mathcal{T}_0^1$에서 $\bar{M}$ 공간의 vector space $\bar{\mathcal{T}}_0^1$로 변환 ϕ^*: $\mathcal{T}_0^1 \to \bar{\mathcal{T}}_0^1$를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\forall p \in M, \forall v \in \mathcal{T}_0^1, \forall \bar{f} \in \bar{\mathcal{T}}_0^0, \qquad \left((\phi^*(v))(\bar{f})\right)(\phi(p)) = \left(v(\bar{f} \circ \phi)\right)(p)$$

그러므로,

$$\forall p \in U, \qquad (\phi^*(v))^i(\phi(p)) = \left((\phi^*(v))(\bar{x}^i)\right)(\phi(p)) = \left(v(\bar{x}^i \circ \phi)\right)(p)$$

$$= \left(v^j(p)\right)\left(\left(e_j(\bar{x}^i \circ \phi)\right)(p)\right)$$

$$= \left(v^j(p)\right)\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}(p)\right)$$

마지막 줄에서, $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\bar{x}^i\circ\phi\circ x^{-1})\left(x^1(p),\dots,x^{j-1}(p),x^j(p)+\Delta t,x^{j+1}(p),\dots,x^n(p)\right)-\bar{x}^i(\phi(p))}{\Delta t}$를 $\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}(p)$로 표기하였다.

마찬가지로, ϕ_*: $\bar{\mathcal{T}}_1^0 \to \mathcal{T}_1^0$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\forall p\in M, \forall \bar{w}\in \bar{\mathcal{T}}_1^0, \forall v\in \mathcal{T}_0^1, \qquad \left(\left(\phi_*(\bar{w})\right)(v)\right)(p)=\left(\bar{w}\left(\phi^*(v)\right)\right)\left(\phi(p)\right)$$

다음 식도 만족한다.

$$\forall p\in U, \qquad \left(\phi_*(\bar{w})\right)_i(p)=\left(\bar{w}_j\left(\phi(p)\right)\right)\left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}(p)\right)$$

ϕ^*: $\mathcal{T}_b^a \to \bar{\mathcal{T}}_b^a$의 정의는 다음과 같다.

$$\forall p\in M, \forall \bar{w}^{(i)}\in \bar{\mathcal{T}}_1^0, \forall \bar{v}_{(i)}\in \bar{\mathcal{T}}_0^1, \qquad \left(\left(\phi^*(T)\right)\left(\bar{w}^{(1)},\dots,\bar{w}^{(a)},\bar{v}_{(1)},\dots,\bar{v}_{(b)}\right)\right)\left(\phi(p)\right)$$
$$=\left(T\left(\phi_*\left(\bar{w}^{(1)}\right),\dots,\phi_*\left(\bar{w}^{(a)}\right),(\phi^{-1})^*\left(\bar{v}_{(1)}\right),\dots,(\phi^{-1})^*\left(\bar{v}_{(b)}\right)\right)\right)(p)$$

$\left(\bar{e}_j(x^i\circ\phi^{-1})\right)\left(\phi(p)\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(x^i\circ\phi^{-1}\circ\bar{x}^{-1})\left(\bar{x}^1(\phi(p)),\dots,\bar{x}^{j-1}(\phi(p)),\bar{x}^j(\phi(p))+\Delta t,\bar{x}^{j+1}(\phi(p)),\dots,\bar{x}^n(\phi(p))\right)-x^i(p)}{\Delta t}$를 $\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}(p)$로 표기하면,

$$\forall p\in U, \qquad \left(\phi^*(T)\right)^{A_1\dots,A_a}{}_{B_1,\dots,B_b}\left(\phi(p)\right)$$
$$=T^{U_1\dots,U_a}{}_{V_1,\dots,V_b}(p)\ \frac{\partial \bar{x}^{A_1}}{\partial x^{U_1}}(p)\dots\frac{\partial \bar{x}^{A_a}}{\partial x^{U_a}}(p)\ \frac{\partial x^{V_1}}{\partial \bar{x}^{B_1}}(p)\dots\frac{\partial x^{V_b}}{\partial \bar{x}^{B_b}}(p)$$

이제 $\mathcal{L}_v: \mathcal{T}_b^a \to \mathcal{T}_b^a$ **Lie derivative** 변환에 대해 알아보자.
$v\in \mathcal{T}_0^1$에 대하여 변환 $\phi: M\to M$ 이

$$\forall p\in U, \qquad \phi(p)=x^{-1}\left(x^1(p)-v^1(p)\Delta t,\dots,x^n(p)-v^n(p)\Delta t\right)$$

를 만족할 때,

$$\forall T\in \mathcal{T}_b^a, \qquad \mathcal{L}_v T=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\phi^*(T)-T}{\Delta t}$$

로 정의한다.

$T\in \mathcal{T}_1^1$일 때, $\mathcal{L}_v T$를 구해보자.

$\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^m}(p)\ \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^b}(p)=\delta_b^a$에서 $\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^b}(p)$의 값을 first order 까지 구해서 다음 식에 적용하면

$$(\phi^*(T))^a{}_b(\phi(p)) = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^l}(p)\,\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^b}(p)\, T^l{}_m(p) = \left(\delta^a_l - v^a{}_{,l}(p)\Delta t\right)\left(\delta^m_b + v^m{}_{,b}(p)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)\right) T^l{}_m(p)$$

그리고, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{T^a_b(p) - T^a_b(\phi(p))}{\Delta t} = T^a_{b,m}(p)\, v^m(p)$이므로

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\phi^*(T))^a{}_b(\phi(p)) - T^a_b(\phi(p))}{\Delta t} = T^a_{b,m}(p)\, v^m(p) - T^m_b(p)\, v^a{}_{,m}(p) + T^a_m(p)\, v^m{}_{,b}(p)$$

$$\therefore (\mathcal{L}_v T)^a{}_b(p) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\phi^*(T))^a{}_b(p) - T^a_b(p)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\phi^*(T))^a{}_b\left(\phi(\phi^{-1}(p))\right) - T^a_b\left(\phi(\phi^{-1}(p))\right)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} T^a_{b,m}(\phi^{-1}(p))\, v^m(\phi^{-1}(p)) - T^m_b(\phi^{-1}(p))\, v^a{}_{,m}(\phi^{-1}(p)) + T^a_m(\phi^{-1}(p))\, v^m{}_{,b}(\phi^{-1}(p))$$

$$= T^a_{b,m}(p)\, v^m(p) - T^m_b(p)\, v^a{}_{,m}(p) + T^a_m(p)\, v^m{}_{,b}(p)$$

$$= T^a_{b;m}(p)\, v^m(p) - T^m_b(p)\left(v^a{}_{;m}(p) - S_l{}^a{}_m(p)\, v^l(p)\right) + T^a_m(p)\left(v^m{}_{;b}(p) - S_l{}^m{}_b(p)\, v^l(p)\right)$$

마지막 줄의 S는 앞에서 설명한 torsion tensor 이다.

([1] (4.4.15) 참조)

$f \in \mathcal{T}^0_0$에 대해서 다음 성질을 만족한다.

$$\mathcal{L}_v f = v(f)$$

$$\mathcal{L}_v(df) = d(\mathcal{L}_v f)$$

Tensor $T \otimes R$ 를 입력으로 하는 변환 $\mathcal{L}_v: \mathcal{T}^{a+c}_{b+d} \to \mathcal{T}^{a+c}_{b+d}$ 는 다음과 같다.

$$\forall T \in \mathcal{T}^a_b, \forall R \in \mathcal{T}^c_d, \qquad \mathcal{L}_v(T \otimes R) = (\mathcal{L}_v T) \otimes R + T \otimes (\mathcal{L}_v R)$$

Lie bracket $[u, v]$을 다음과 같이 정의한다.

$$\forall u \in \mathcal{T}^1_0, \forall v \in \mathcal{T}^1_0, \qquad [u, v] = \mathcal{L}_u v$$

그리고, 다음 성질을 가진다.

$$\forall T \in \mathcal{T}^a_b, \qquad \mathcal{L}_{[u,v]} T = \mathcal{L}_u(\mathcal{L}_v T) - \mathcal{L}_v(\mathcal{L}_u T) = (\mathcal{L}_u \mathcal{L}_v - \mathcal{L}_v \mathcal{L}_u) T$$

3 GENERAL RELATIVITY

3.1 GRAVITY IN NEWTON DYANAMICS

뉴튼 역학에서 중력을 계산하는 방법에 대해서 알아보자.

Force $\vec{F}(\vec{x})$는 다음 성질을 만족한다.

$$\nabla \cdot \vec{F}(\vec{x}) = 4\pi G \sum_n m_n \, \delta^3(\vec{x} - \overrightarrow{x_n})$$

$$\nabla \times \vec{F}(\vec{x}) = 0$$

$\vec{F}(\vec{x})$는 Curl 이 없으므로 $\vec{F}(\vec{x}) = \nabla A(\vec{x})$ 를 만족하는 위치에너지 $A(\vec{x})$로 나타낼 수 있다.

$$\nabla^2 A(\vec{x}) = 4\pi G \sum_n m_n \, \delta^3(\vec{x} - \overrightarrow{x_n})$$

식 3.1.1

Green's function 에 의해 풀면 아래와 같다.

$$A(\vec{x}) = -G \sum_n \frac{m_n \, \delta^3(\vec{x} - \overrightarrow{x_n})}{|\vec{x} - \overrightarrow{x_n}|}$$

참고로 상대성이론에서는 식 3.1.1 대신에

$$G^{\mu\nu}(\vec{x}) = -8\pi G \, T^{\mu\nu}(\vec{x})$$

식 3.1.2

을 만족시키는 $g_{\mu\nu}(\vec{x})$을 구하면 된다.

3.2 ENERGY-MOMENTUM TENSOR

[3] 2.8 참조

뉴우튼 역학에서는 물질의 분포를 규정하는데, 단위 부피당 질량(mass)인 농도(density) 값 하나면 충분했다. 상대성 이론에서는 단위 부피당 momentum 의 값을 이용한다. 그런데, 이 값들은 관찰자의 속도에 따라 변하게 된다. 그래서 총 10 개의 값이 필요하다.
직각 좌표계에선 **energy momentum tensor** 를 다음과 같이 정의한다.

좌표 벡터 (x^0, x^1, x^2, x^3)을 $\tilde{x}$로 표기하겠다.

$$T^{\alpha\beta}(\tilde{x}) = \sum_n m_n \frac{d{x_n}^\alpha}{d\tau_n} \frac{d{x_n}^\beta}{dx^0} \delta\left(x^1 - {x_n}^1(x^0)\right) \delta\left(x^2 - {x_n}^2(x^0)\right) \delta\left(x^3 - {x_n}^3(x^0)\right)$$

간략하게,

$$= \sum_n m_n \frac{d{x_n}^{\alpha}}{d\tau_n}(x^0)\frac{d{x_n}^{\beta}(x^0)}{dx^0}\delta^3\left(\vec{x}-\overrightarrow{x_n}(x^0)\right)$$

$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)\delta(x-p)\,dp$ 와 ${x_n}^0(p) = p$ 라는 사실을 이용하면

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\sum_n m_n \frac{d{x_n}^{\alpha}}{d\tau_n}(p)\frac{d{x_n}^{\beta}(p)}{dp}\delta^4\left(\overleftarrow{x}-\overleftarrow{x_n}(p)\right)dp$$

그런데, δ^4함수의 의미를 좀더 명확하게 해 보자.

우선, $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(l)\,dl = f(x)$ 라는 성질을 이용하여

$$T^{\alpha\beta}(\vec{x})$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^4}\int_{x^3}^{x^3+h}\int_{x^2}^{x^2+h}\int_{x^1}^{x^1+h}\int_{x^0}^{x^0+h}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_n m_n \frac{d{x_n}^{\alpha}}{d\tau_n}(p)\frac{d{x_n}^{\beta}(p)}{dp}\delta^4\left(\overleftarrow{l}-\overleftarrow{x_n}(p)\right)dp\,dl^0\,dl^1\,dl^2\,dl^3$$

간략하게 표현하여

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^4}\int_{x^\rho}^{x^\rho+h}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_n m_n \frac{d{x_n}^{\alpha}}{d\tau_n}(p)\frac{d{x_n}^{\beta}(p)}{dp}\delta^4\left(\overleftarrow{l}-\overleftarrow{x_n}(p)\right)dp\,dl^\rho$$

n 번째 물체가 p가 $Start_n$에서 $Stop_n$ 동안에 x^ρ와 $x^\rho+h$ 의 내부 공간에 존재한다고 하면

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^4}\sum_n\int_{Start_n}^{Stop_n} m_n \frac{d{x_n}^{\alpha}}{d\tau_n}(p)\frac{d{x_n}^{\beta}(p)}{dp}dp$$

이번엔, 일반적인 좌표계에서 $T'^{\alpha\beta}\left(\overleftarrow{x'}\right)$를 구해보자.

$$T'^{\alpha\beta}\left(\overleftarrow{x'}\right) = \left(\frac{dx'^{\alpha}}{dx^{\mu}}\right)\left(\frac{dx'^{\beta}}{dx^{\nu}}\right)T^{\mu\nu}(\overleftarrow{x})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\sum_n m_n\left(\frac{dx'^{\alpha}}{dx^{\mu}}\right)\frac{d{x_n}^{\mu}}{d\tau_n}(p)\left(\frac{dx'^{\beta}}{dx^{\nu}}\right)\frac{d{x_n}^{\nu}(p)}{dp}\delta^4\left(\overleftarrow{x}-\overleftarrow{x_n}(p)\right)dp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\sum_n m_n \frac{d{x_n}'^{\alpha}}{d\tau_n}(p)\frac{d{x_n}'^{\beta}(p)}{dp}\delta^4\left(\overleftarrow{x}-\overleftarrow{x_n}(p)\right)dp$$

그런데, $\delta^4(\overleftarrow{x} - \overleftarrow{x_n}(p))\, dx^0dx^1dx^2dx^3 = \delta^4\left(\overleftarrow{x'} - \overleftarrow{x_n{}'}(p)\right)dx'^0dx'^1dx'^2dx'^3$ 이고

$dx^0dx^1dx^2dx^3 = Det\left(\frac{dx^\kappa}{dx'^\lambda}\overleftarrow{e_\kappa}\,\overleftarrow{e_\lambda}^T\right)dx'^0dx'^1dx'^2dx'^3$이므로(단,$\overrightarrow{e_\kappa}$ 는 κ행의 값이 1 인 단위 열 벡터)

$\delta^4(\overleftarrow{x} - \overleftarrow{x_n}(p)) = \frac{1}{Det\left(\frac{dx^\kappa}{dx'^\lambda}\overleftarrow{e_\kappa}\,\overleftarrow{e_\lambda}^T\right)}\delta^4\left(\overleftarrow{x'} - \overleftarrow{x_n{}'}(p)\right)$이다. 계속하면,

$$= \frac{1}{Det\left(\frac{dx^\kappa}{dx'^\lambda}\overleftarrow{e_\kappa}\,\overleftarrow{e_\lambda}^T\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_n m_n\frac{dx_n{}'^\alpha}{d\tau_n}(p)\frac{dx_n{}'^\beta(p)}{dp}\delta^4\left(\overleftarrow{x'} - \overleftarrow{x_n{}'}(p)\right)dp$$

여기서, $Det\left(\frac{dx^\kappa}{dx'^\lambda}\overrightarrow{e_\kappa}\,\overrightarrow{e_\lambda}^T\right)$의 값을 구하면

$$g'_{\alpha\beta} = \left(\frac{dx^\mu}{dx'^\alpha}\right)\left(\frac{dx^\nu}{dx'^\beta}\right)\eta_{\mu\nu}$$

$$Det\left(g'_{\alpha\beta}\,\overleftarrow{e_\alpha}\,\overleftarrow{e_\beta}^T\right) = Det\left(\frac{dx^\kappa}{dx'^\lambda}\overleftarrow{e_\kappa}\,\overleftarrow{e_\lambda}^T\right)Det\left(\frac{dx^\kappa}{dx'^\lambda}\overleftarrow{e_\kappa}\,\overleftarrow{e_\lambda}^T\right)Det\left(\eta_{\alpha\beta}\,\overleftarrow{e_\alpha}\,\overleftarrow{e_\beta}^T\right)$$

$$\sqrt{g'} = \sqrt{-Det\left(g'_{\alpha\beta}\,\overleftarrow{e_\alpha}\,\overleftarrow{e_\beta}^T\right)} = Det\left(\frac{dx^\kappa}{dx'^\lambda}\overleftarrow{e_\kappa}\,\overleftarrow{e_\lambda}^T\right)$$

로 표기하면

$$= \frac{1}{\sqrt{g'(\vec{x})}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_n m_n\frac{dx_n{}'^\alpha}{d\tau_n}(p)\frac{dx_n{}'^\beta(p)}{dp}\delta^4\left(\overleftarrow{x'} - \overleftarrow{x_n{}'}(p)\right)dp$$

일반 좌표계에서 energy-momentum tensor 를

$$T^{\alpha\beta}(\overleftarrow{x}) = g^{-\frac{1}{2}}(\overleftarrow{x})\sum_n m_n\frac{dx_n{}^\alpha}{d\tau_n}(x^0)\frac{dx_n{}^\beta(x^0)}{dx^0}\delta^3\left(\vec{x} - \overrightarrow{x_n}(x^0)\right)$$

로 정의한다. 속도가 v인 관찰자가 느끼는 단위부피당 momentum 은 $-T^{\alpha\beta}v_\beta$이다.

3.3 SOLVING OF GRAVIATIONAL FIELD EQUATIONS

물체의 위치 $x_n{}^i(x^0)$ 와 $g_{\alpha\beta}(\overleftarrow{x})$ 함수 값을 구하는 방법을 알아보겠다.

시간 $x^0 = t$ 일 때의 물체의 위치 $x_n{}^i(t)$, 속도 $\frac{dx_n{}^\alpha}{d\tau_n}(t)$ 와 $g_{\alpha\beta}(t, x^1, x^2, x^3)$, $g_{\alpha\beta,0}(t, x^1, x^2, x^3)$의 값이 입력으로 주어진다고 가정하자. 이 입력을 이용해, $x^0 = t + \Delta t$ 일 때의 물체의 위치 $x_n{}^i(t + \Delta t)$, 속도 $\frac{dx_n{}^\alpha}{d\tau_n}(t + \Delta t)$, $g_{\alpha\beta}(t + \Delta t, x^1, x^2, x^3)$, $g_{\alpha\beta,0}(t + \Delta t, x^1, x^2, x^3)$의 값을 구해보자. 우선, 모멘텀 텐서의 값부터 구해야 한다. 좌표가 (t, x^1, x^2, x^3)인 점을 $\overleftarrow{x_t}$로 표시하겠다.

$$T^{\alpha\beta}(\overleftarrow{x_t}) = g^{-\frac{1}{2}}(\overleftarrow{x_t}) \sum_n m_n \frac{d{x_n}^{\alpha}}{dx^0}(t) \left(\frac{d\tau_n}{dx^0}(t)\right)^{-1} \frac{d{x_n}^{\beta}}{dx^0}(t)\, \delta^3\left(\overrightarrow{x_t} - \overrightarrow{x_n}(t)\right)$$

식 3.3.1

이용하여 energy momentum tensor 를 계산한다.

그 다음, $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\overleftarrow{x_t})$을 구하자. $g_{\alpha\beta,ij}(\overleftarrow{x_t})$ 는 $\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^i \partial x^j}(\overleftarrow{x_t})$를 이용해 구하고, $g_{\alpha\beta,i0}(\overleftarrow{x_t})$의 값은 $g_{\alpha\beta,0i}(\overleftarrow{x_t}) = \frac{\partial g_{\alpha\beta,0}}{\partial x^i}(\overleftarrow{x_t})$와 같다. $G^{\mu\nu}(\overleftarrow{x_t})$ 는 $g_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\overleftarrow{x_t})$의 함수이므로, 10 개의 미지수 $g_{\alpha\beta,00}(\overleftarrow{x_t})$ 를 10 개의 연립 방정식 $G^{\mu\nu}(\overleftarrow{x_t}) = -8\pi G\, T^{\mu\nu}(\overleftarrow{x_t})$ 을 이용해 구할 수 있다. 그런데, $G^{\mu 0}(\overleftarrow{x_t})$ 는 $g_{\alpha\beta,00}(\overleftarrow{x_t})$의 함수가 아니다. (자세한 증명은 [3] 7.5.1 참조). 그리하여, 4 개의 방정식 $G^{\mu 0}(\overleftarrow{x_t}) = -8\pi G\, T^{\mu 0}(\overleftarrow{x_t})$ 은 $g_{\alpha\beta,00}(\overleftarrow{x_t})$ 를 구하는데, 쓸 수가 없다. 그래서, 일반적으로 4 개의 harmonic coordinate 조건을 추가해 $g_{\alpha\beta,00}(\overleftarrow{x_t})$를 구한다. (모든 좌표계는 harmonic coordinate 으로 표현 가능하다. [3]. 7.4.3 참조)

이제, $t + \Delta t$ 일 때, $g_{\alpha\beta}$의 값을 구할 수 있다.

$$g_{\alpha\beta,0}(\overleftarrow{x_{t+\Delta t}}) = g_{\alpha\beta,0}(\overleftarrow{x_t}) + g_{\alpha\beta,00}(\overleftarrow{x_t})\Delta t$$

식 3.3.2

$$g_{\alpha\beta}(\overleftarrow{x_{t+\Delta t}}) = g_{\alpha\beta}(\overleftarrow{x_t}) + g_{\alpha\beta,0}(\overleftarrow{x_t})\Delta t$$

식 3.3.3

다음에 각 물체의 위치를 계산하는 것은 간단하다.

$$\frac{d^2{x_n}^{\alpha}}{d{\tau_n}^2}(t) = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\left(\overleftarrow{x_n}(t)\right) \frac{d{x_n}^{\mu}}{d\tau_n}(t)\, \frac{d{x_n}^{\nu}}{d\tau_n}(t)$$

식 3.3.4

$$\frac{d{x_n}^{\alpha}}{d\tau_n}(t + \Delta t) = \frac{d{x_n}^{\alpha}}{d\tau_n}(t) + \frac{d^2{x_n}^{\alpha}}{d{\tau_n}^2}(t)\, \frac{d\tau_n}{dx^0}(t)\, \Delta t$$

식 3.3.5

$${x_n}^{i}(t + \Delta t) = {x_n}^{i}(t) + \frac{d{x_n}^{i}}{d\tau_n}(t)\, \frac{d\tau_n}{dx^0}(t)\, \Delta t$$

식 3.3.6

전자기력을 적용할 경우에는 식 3.3.1, 식 3.3.4 대신에 다음과 같이 구하면 된다.

$$T^{\alpha\beta}(\overleftarrow{x_t}) = g^{-\frac{1}{2}}(\overleftarrow{x_t}) \sum_n m_n \frac{d{x_n}^\alpha}{dx^0}(t)\left(\frac{d\tau_n}{dx^0}(t)\right)^{-1}\frac{d{x_n}^\beta}{dx^0}(t)\,\delta^3(\overrightarrow{x_t}-\overrightarrow{x_n}(t))$$

$$+\left(F^\alpha{}_\gamma(\overleftarrow{x_t})\,F^{\beta\gamma}(\overleftarrow{x_t}) - \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}(\overleftarrow{x_t})\,F_{\gamma\delta}(\overleftarrow{x_t})\,F^{\gamma\delta}(\overleftarrow{x_t})\right)$$

식 3.3.7

$$\frac{d^2{x_n}^\alpha}{d{\tau_n}^2}(t) = -\Gamma^\alpha_{\mu\nu}(\overleftarrow{x_n}(t))\,\frac{d{x_n}^\mu}{d\tau_n}(t)\,\frac{d{x_n}^\nu}{d\tau_n}(t) + \frac{e_n}{m_n}F^\alpha{}_\mu(\overleftarrow{x_n}(t))\frac{d{x_n}^\mu}{d\tau_n}(\overleftarrow{x_n}(t))$$

식 3.3.8

전자기력은 뒤에서 다시 설명한다.

3.4 HARMONIC COORDINATE

[3] 7.4 참조

좌표함수 $x^\alpha : U \to \mathbb{R}$ 가

$$\nabla^\beta\nabla_\beta(x^\alpha) = 0$$

을 만족하면, 그 좌표계를 **harmonic coordinate** 이라고 한다.

$\nabla^\beta\nabla_\beta\,(x^\alpha) = \left((x^\alpha)_{,\mu,\nu} - \Gamma^\beta_{\mu\nu}\,(x^\alpha)_{,\beta}\right)g^{\mu\nu} = -\Gamma^\beta_{\mu\nu}\,(x^\alpha)_{,\beta}\,g^{\mu\nu} = -\Gamma^\beta_{\mu\nu}\,\delta^\alpha_\beta\,g^{\mu\nu}$ 이므로

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,g^{\mu\nu} = 0$$

는 위 조건과 필요충분조건이다.

어떤 공간의 좌표계를 harmonic 좌표계로 변환하는 방법을 알아보자.

어떤 공간의 내부 좌표가 $-L < x^0 < L, -L < x^1 < L,\ -L < x^2 < L, -L < x^3 < L$ 라고 가정하자. 또, 그 공간의 스칼라 함수 $F \in \mathcal{T}_0^0$가 있다고 하고, 공간의 경계면에서 함수 F 의 값은 x^1 이라고 하자.

$$F(-L, x^1, x^2, x^3) = x^1$$

$$F(L, x^1, x^2, x^3) = x^1$$

$$F(x^0, -L, x^2, x^3) = -L = x^1$$

$$F(x^0, L, x^2, x^3) = L = x^1$$

$$F(x^0, x^1, -L, x^3) = x^1$$

$$F(x^0, x^1, L, x^3) = x^1$$

$$F(x^0, x^1, x^2, -L) = x^1$$

$$F(x^0, x^1, x^2, L) = x^1$$

그리고, 공간내부에서 함수 F의 d'Alembertian 의 값은 0 이라고 하자.

$$F^{;\alpha}{}_{;\alpha} = F^{,\alpha}{}_{,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\,\alpha}\, F^{,\beta} = 0$$

만약 공간내부에서 $g^{\alpha\beta}(x) = \eta^{\alpha\beta}$ 라면, , 위 식을 만족하는 유일한 F 의 값은 x^1와 같다.

$$F(\vec{x}) = x^1$$

당연히, $g^{\alpha\beta}(\vec{x}) \approx \eta^{\alpha\beta}$라면, $F(\vec{x}) \approx x^1$가 된다.

어떤 좌표계 x를 harmonic 좌표계 $\bar{x}$로 변환하려면, 우선 함수 $F^\alpha \in \mathcal{T}_0{}^0$가 경계면에서 좌표계 x의 좌표값 x^α과 같도록 조건을 잡는다. 그리고, d'Alembertian 의 값이 0 을 만족하는 함수 F^α을 구한다. Harmonic coordinate $\bar{x}$ 는 함수 F^α의 값을 $\bar{x}^\alpha$의 좌표값으로 하는 좌표계이다.

$$\bar{x}^\alpha(\vec{x}) = F^\alpha(\vec{x})$$

이왕이면, 처음 좌표계 x 를 정할 때, 공간의 중심을 원점으로 하는 orthonormal 한 좌표계로 하면 좋다. 그러면, 좌표계 $\bar{x}$ 는 Cartestian 좌표계에 근접하게 된다.

3.5 ELECTRODYNAMICS

[3] 2.7 참조

current four-vector J 는 다음과 같이 계산한다.

$$J^\alpha(\vec{x}) = g^{-\frac{1}{2}} \sum_n e_n \frac{dx_n{}^\alpha(x^0)}{dx^0} \delta^3\left(\vec{x} - \overrightarrow{x_n}(x^0)\right)$$

정의에 따르면,

$$J^\alpha{}_{;\alpha} = \left(\sqrt{g}\, J^\alpha\right)_{,\alpha} / \sqrt{g} = 0$$

식 3.5.1

이어야 한다.

다음 조건을 만족하는 텐서 벡터 $A \in \mathcal{T}_0^1$ 를 구한다.

$$A^{\alpha;\lambda}{}_{\lambda} = -J^{\alpha}$$

식 3.5.2

$$A^{\alpha}{}_{;\alpha} = \left(\sqrt{g}\,A^{\alpha}\right)_{,\alpha} / \sqrt{g} = 0$$

식 3.5.3

직각 좌표계에서 **Green's function** 을 이용해 식 3.5.2 를 풀면 식 3.5.1 에 의해 식 3.5.3

도 만족하게 된다. 그 다음 텐서 F 를 구한다.

$$F_{\alpha\beta} dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} = d\left(A_{\lambda} dx^{\lambda}\right)$$

$$F^{\alpha\beta} = A^{\beta;\alpha} - A^{\alpha;\beta}$$

식 3.5.4

그러면, 식 3.5.2, 식 3.5.3 에 의해

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} = \left(\sqrt{g}\,F^{\alpha\beta}\right)_{,\alpha} / \sqrt{g} = -J^{\beta}$$

식 3.5.5

$$d\left(F_{\alpha\beta} dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta}\right) = 0$$

$$F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\beta\gamma;\alpha} + F_{\gamma\alpha;\beta} = F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0$$

식 3.5.6

이 된다.

속도가 v 인 입자가 받는 힘은

$$f^{\alpha} = m\frac{dv^{\alpha}}{d\tau} = e\,F^{\alpha\phi} v_{\phi}$$

식 3.5.7

이다.

속도가 v 인 입자가 느끼는 전기장과 자기장을 현재 좌표계에서 표현하면

$$E^{\alpha} = -F^{\phi\alpha} v_{\phi} = -\left(A^{\alpha;\phi} - A^{\phi;\alpha}\right) v_{\phi}$$

$$B_{\alpha} = \frac{1}{2}\epsilon_{\phi\alpha\beta\gamma}\,F^{\beta\gamma} v^{\phi} = \epsilon_{\phi\alpha\beta\gamma} A^{\gamma:\beta} v^{\phi}$$

전자기력 모멘텀 텐서는 다음 식으로 계산한다. ([3] 2.8.9 참조)

$$T_{em}{}^{\alpha\beta} = F^{\alpha}{}_{\gamma} F^{\beta\gamma} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta}$$

식 3.5.8

$\vec{\boldsymbol{E}} = (E^1, E^2, E^3), \vec{\boldsymbol{B}} = (B^1, B^2, B^3)$로 표기하면 3 차원 직각 좌표계에서 전자기장은 다음과 같다.

$$F^{\alpha\beta}\,\overleftarrow{e_\alpha}\,\overleftarrow{e_\beta}^T = \begin{bmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\boldsymbol{E}}^T \\ -\vec{\boldsymbol{E}} & -\mathrm{Skew}(\vec{\boldsymbol{B}}) \end{bmatrix}$$

식 3.5.9

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\vec{\boldsymbol{A}}_{,0} - \nabla A^0$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}$$

식 3.5.7 에 의해

$$\vec{\boldsymbol{f}} = e(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{B}})$$

식 3.5.10

식 3.5.5 에 의해

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = J^0$$

식 3.5.11

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{E}}_{,0} + \vec{\boldsymbol{J}}$$

식 3.5.12

식 3.5.6 에 의해

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$$

식 3.5.13

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\vec{\boldsymbol{B}}_{,0}$$

식 3.5.14

가 된다.

식 3.5.8 에 의해

$$T_{em}{}^{\alpha\beta}\,\overleftarrow{e_\alpha}\,\overleftarrow{e_\beta}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\left|\vec{\boldsymbol{E}}\right|^2 + \left|\vec{\boldsymbol{B}}\right|^2\right) & \left(\vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\right)^T \\ \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}} & \frac{1}{2}\left(\left|\vec{\boldsymbol{E}}\right|^2 + \left|\vec{\boldsymbol{B}}\right|^2\right) - \vec{\boldsymbol{E}}\,\vec{\boldsymbol{E}}^T - \vec{\boldsymbol{B}}\,\vec{\boldsymbol{B}}^T \end{bmatrix}$$

식 3.5.15

이것을 **electromagnetic stress–energy tensor** 라고 한다.

charge 가 q인 물체가 $(0,0,h\,cos(\omega t))$로 움직일 때, $(r,0,0)$에서의 전자기력을 계산해보자.

$$\vec{H} = (0,0,h)$$
$$\boldsymbol{J^0}(t,\vec{x}) = \delta\left(\vec{x} - Re\left(e^{i\omega t}\vec{H}\right)\right)\left(q + \mathcal{O}(h)\right)$$
$$\vec{\boldsymbol{J}}(t,\vec{x}) = \delta\left(\vec{x} - Re\left(e^{i\omega t}\vec{H}\right)\right)\left(Re\left(iq\omega e^{i\omega t}\vec{H}\right) + \mathcal{O}(h^2)\right)$$

$\boldsymbol{J^0}$ 을 정확하게 계산하긴 어려우므로, 그 대신 $\boldsymbol{A^0}$을 Lorentz guage 조건에 맞도록 계산한다.

$$\boldsymbol{A^0}(t,\vec{x}) = Re\left(\frac{q}{4\pi|\vec{x}|} + \frac{iq\omega e^{i\omega(t-|\vec{x}|)}(\vec{H}\cdot\vec{x})}{4\pi|\vec{x}|^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\vec{x}|^2}\right)$$
$$\vec{\boldsymbol{A}}(t,\vec{x}) = Re\left(\frac{iq\omega e^{i\omega(t-|\vec{x}|)}\vec{H}}{4\pi|\vec{x}|}\right) + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}(t,\vec{x}) = Re\left(-\frac{q\omega^2 e^{i\omega(t-|\vec{x}|)}}{4\pi}\left(-\frac{\vec{H}}{|\vec{x}|} + \frac{(\vec{H}\cdot\vec{x})\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\right)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\vec{x}|^2}\right)$$
$$= Re\left(-\frac{q\omega^2 e^{i\omega(t-|\vec{x}|)}}{4\pi}\left(\frac{(\vec{H}\times\vec{x})\times\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\right)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\vec{x}|^2}\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(t,\vec{x}) = Re\left(-\frac{q\omega^2 e^{i\omega(t-|\vec{x}|)}}{4\pi|\vec{x}|^2}(\vec{H}\times\vec{x})\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\vec{x}|^2}\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}\times\vec{\boldsymbol{B}}(t,\vec{x}) = \frac{q^2\omega^4\left|Re\left(e^{i\omega(t-|\vec{x}|)}(\vec{H}\times\vec{x})\right)\right|^2\vec{x}}{16\pi^2|\vec{x}|^5} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\vec{x}|^4}\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}(t,r,0,0) = \frac{qh\omega^2\cos\left(\omega(t-r)\right)}{4\pi r}(0,0,1) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(t,r,0,0) = \frac{qh\omega^2\cos\left(\omega(t-r)\right)}{4\pi r}(0,-1,0) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

진공상태에서 $\vec{\boldsymbol{E}}$와 $\vec{\boldsymbol{B}}$의 크기는 같고, 서로 직각이다. 식 3.5.15 에 의하면 단위부피당 $\frac{1}{2}\left(\left|\vec{\boldsymbol{E}}\right|^2 + \left|\vec{\boldsymbol{B}}\right|^2\right)$에너지가 $\frac{|\vec{\boldsymbol{E}}\times\vec{\boldsymbol{B}}|}{\frac{1}{2}\left(\left|\vec{\boldsymbol{E}}\right|^2+\left|\vec{\boldsymbol{B}}\right|^2\right)} \approx 1$ 의 속력으로 움직이고 있음을 알 수 있다.

전체 방향으로 방출되는 에너지는

$$\hat{\boldsymbol{r}} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$
$$\vec{a}(t) = Re\left(-\omega^2 e^{i\omega t}\vec{H}\right)$$
$$P(t) = \lim_{r\to\infty}\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\ \left(\vec{\boldsymbol{E}}\times\vec{\boldsymbol{B}}(t+r, r\hat{\boldsymbol{r}})\right)\cdot(\hat{\boldsymbol{r}})\,r^2\sin\theta = \frac{q^2|\vec{a}(t)|^2}{6\pi}$$

식 3.5.16

이고, 위 식을 **Larmor formula** 라고 한다. 단위 시간당 방출되는 평균 에너지는

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P(t)\, dt = \frac{q^2h^2\omega^4}{12\pi}$$

4 POST-NEWTONIAN APPROXIMATION

[3] 9.1 참조

어떤 중심에 물질이 밀집해있고, 그 중심에서 멀어질수록 밀도가 희박하다면, 원점에서 멀어질수록 $g_{\alpha\beta}$ 가 $\eta_{\alpha\beta}$에 수렴하는 좌표계가 존재한다. 이런 상황에서 각 위치의 $g_{\alpha\beta}$ 와 물질의 위치를 계산하는 방법을 알아보겠다.

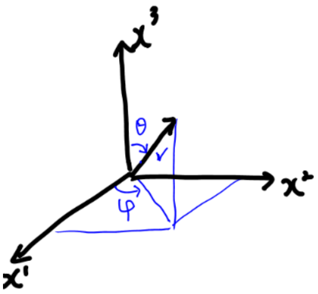
좌표 (x^0, x^1, x^2, x^3)를 다음과 같이 spherical polar coordinate (t, r, θ, φ)로 표현할 수도 있다.

$$x^0 = t$$

$$x^1 = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$x^2 = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$x^3 = r\cos\theta$$



물질의 농도 $\rho(\overleftarrow{x}) = \sum_n m_n\, \delta^3(\vec{x} - \overrightarrow{x_n})$에 대해, $\rho(\overleftarrow{x})r^3$가 $\frac{1}{r}$ 에 대해 C^∞ differentiable 하다고 가정하자. 그러면, $\rho(\overleftarrow{x}) = \mathcal{O}(\frac{1}{r^3})$이다. 그리고, 물체의 속도 $|\overrightarrow{v_n}| = \left|\frac{d\overrightarrow{x_n}}{dx^0}\right|$ 에 대해, 뉴우튼의 법칙에 따르면 운동에너지 $\frac{1}{2}m_n|\overrightarrow{v_n}|^2$는 위치에너지 $-\frac{G\,M\,m_n}{r}$와 같은 규모인 것을 감안하여, $|\overrightarrow{v_n}|r^{0.5}$도 $\frac{1}{r}$ 에 대해 C^∞ differentiable 하다고 가정하자.

$$T^{\alpha\beta} = g^{-\frac{1}{2}} \sum_n m_n \frac{dx_n{}^{\alpha}}{dx^0} \frac{dx_n{}^{\beta}}{dx^0} \left(\frac{d\tau_n}{dx^0}\right)^{-1} \delta^3(\vec{x} - \overrightarrow{x_n})$$

이므로,

$$T^{00} = \mathcal{O}(\rho) = \mathcal{O}(\frac{1}{r^3})$$

$$T^{i0} = \mathcal{O}(v_n{}^i)\,\mathcal{O}(\rho\,) = \mathcal{O}(\frac{1}{r^{3.5}})$$

$$T^{ij} = \mathcal{O}(v_n{}^i)\,\mathcal{O}(v_n{}^j)\,\mathcal{O}(\rho\,) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

임을 알 수 있다.

이제,

$$\begin{aligned}
&g_{00} = -1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^1}\right), \quad g_{i0} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{1.5}}\right), \qquad g_{ij} = \delta_{ij} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^1}\right) \\
&g_{00,0} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{2.5}}\right), \quad g_{i0,0} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right), \qquad g_{ij,0} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{2.5}}\right) \\
&g_{00,k} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad g_{i0,0} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{2.5}}\right), \qquad g_{ij,k} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \\
&T^{00}{}_{,0} = \mathcal{O}(\frac{1}{r^{4.5}}), \quad T^{i0}{}_{,0} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^5}\right), \qquad T^{ij}{}_{,0} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{5.5}}\right) \\
&T^{00}{}_{,k} = \mathcal{O}(\frac{1}{r^4}), \quad T^{i0}{}_{,k} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{4.5}}\right), \qquad T^{ij}{}_{,k} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^5}\right)
\end{aligned}$$

등을 증명해보자. 증명이 좀 지저분하므로 넘어가도 무방하다.

$\rho\, r^3$ 가 $\frac{1}{r}$ 에 대해 C^∞ differentiable 하므로, Taylor series 로 표현한다면

$$\rho\ \ r^3 = \rho_{(0)}(t,\theta,\varphi) + \rho_{(1)}(t,\theta,\varphi)\frac{1}{r} + \cdots$$

$$\rho\ \ = \rho_{(0)}(t,\theta,\varphi)\frac{1}{r^3} + \rho_{(1)}(t,\theta,\varphi)\frac{1}{r^4} + \cdots$$

이번엔 $\rho_{,i}$ 에 대해 알아보자.

$$\begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi & -\frac{1}{r}\sin\theta \\ -\frac{1}{r\sin\theta}\sin\varphi & \frac{1}{r\sin\theta}\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{bmatrix}$$

이므로

$$\rho_{,i} = \frac{d\rho}{dx^i} = \frac{d\rho}{dr}\frac{dr}{dx^i} + \frac{d\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dx^i} + \frac{d\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx^i}$$

$$= \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right)\frac{dr}{dx^i} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)\frac{d\theta}{dx^i} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)\frac{d\varphi}{dx^i}$$

$$= \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right)\ \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)\ \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)\ \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

마찬가지로 $\rho_{,ij} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^5}\right)$ 이다.

이번엔 $\rho_{,0}$ 에 대해 알아보자

$$\left(\frac{d{x_n}^{\alpha}}{dx^0} m_n\, \delta^3(\vec{x} - \overrightarrow{x_n})\, g^{-\frac{1}{2}}\right)_{;\alpha} = 0$$

는 에너지 보존의 법칙인데, 관찰자가 물체와 같은 속도로 움직이는 직각 좌표계에서 생각해보면 성립되는 것을 쉽게 알 수 있다. $\sum_n \left(\frac{d{x_n}^{\alpha}}{dx^0} m_n\, \delta^3(\vec{x} - \overrightarrow{x_n})\right)$는 weight 가 1 인 relative tensor 이므로 ([1] 4.1 (1.27) 참조)

$$\sum_n \left(\frac{d{x_n}^{\alpha}}{dx^0} m_n\, \delta^3(\vec{x} - \overrightarrow{x_n})\right)_{,a} = \sum_n \left(\frac{d{x_n}^{\alpha}}{dx^0} m_n\, \delta^3(\vec{x} - \overrightarrow{x_n})\right)_{;a} = 0$$

$$\rho_{,0} = \sum_n (m_n\, \delta^3(\vec{x} - \overrightarrow{x_n}))_{,0} = -\sum_n \left(\frac{d{x_n}^{i}}{dx^0} m_n\, \delta^3(\vec{x} - \overrightarrow{x_n})\right)_{,i}$$

$$= \left(\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{3.5}}\right)\right)_{,i} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{4.5}}\right)$$

$\left(\frac{dx^0}{d\tau_n}\right)_{,0} = \left(\frac{dx^0}{d{\tau_n}^2}\right)\left(\frac{d\tau_n}{dx^0}\right) = \left(-\Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ 0} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau_n}\frac{dx^{\beta}}{d\tau_n}\right)\left(\frac{d\tau_n}{dx^0}\right) = \mathcal{O}(\Gamma_{0\ 0}^{\ 0}) + \mathcal{O}(\Gamma_{i\ 0}^{\ 0})\, \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{0.5}}\right) + \mathcal{O}(\Gamma_{i\ j}^{\ 0})\, \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^1}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{2.5}}\right)$, $\left(\frac{dx^i}{d\tau_n}\right)_{,0} = \left(\frac{dx^i}{d{\tau_n}^2}\right)\left(\frac{d\tau_n}{dx^0}\right) = \left(-\Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ i} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau_n}\frac{dx^{\beta}}{d\tau_n}\right)\left(\frac{d\tau_n}{dx^0}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$, $g_{,0} = g_{\alpha\beta,0}\, g^{\alpha\beta}\, g = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{2.5}}\right)$ 인 성질을 미리 이용하면,

$$T^{\alpha\beta}{}_{,0} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{1.5}}\right)\ \mathcal{O}(T^{\alpha\beta})$$

이 증명된다. 뒷부분에서 증명하겠지만, $g_{00,0} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{2.5}}\right), g_{i0,0} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{3.5}}\right), g_{ij,0} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{2.5}}\right)$ 인 것을 이용하면, $g_{,0}, \Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \gamma}$의 규모도 명확해진다

계속해서, $\rho_{,00}$ 에 대해 알아보자

$$\left(\frac{d{x_n}^{\alpha}}{dx^0} m_n\, \delta^3(\vec{x} - \overrightarrow{x_n})\right)_{,\alpha 0} = 0$$

$$\rho_{,00} = \sum_n (m_n\, \delta^3(\vec{x} - \overrightarrow{x_n}))_{,00} = -\sum_n \left(\frac{d{x_n}^{i}}{dx^0} m_n\, \delta^3(\vec{x} - \overrightarrow{x_n})\right)_{,i0} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^6}\right)$$

그러므로, ρ 를 Taylor series 로 표현한다면

$$\rho \ = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right) + t\,\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{4.5}}\right) + t^2\,\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^6}\right)\dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} t^k\,\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{3+1.5k}}\right)$$

한번 더 Taylor Series 로 표현하면

$$= \sum_{k=0}^{\infty} t^k \left(\frac{\rho_{(0,k)}(\theta,\varphi)}{r^{3+1.5k}} + \frac{\rho_{(1,k)}(\theta,\varphi)}{r^{4+1.5k}}\dots\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\rho_{(l,k)}(\theta,\varphi)t^k}{r^{3+l+1.5k}}$$

비슷하게

$$T^{00} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{T^{00}{}_{(l,k)}(\theta,\varphi)t^k}{r^{3+l+1.5k}}$$

$$T^{i0} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{T^{i0}{}_{(l,k)}(\theta,\varphi)t^k}{r^{3.5+l+1.5k}}$$

$$T^{ij} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{T^{00}{}_{(l,k)}(\theta,\varphi)t^k}{r^{4+l+1.5k}}$$

이제

$$g_{00} = -1 + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{g_{00}{}_{(l,k)}(\theta,\varphi)t^k}{r^{1+l+1.5k}}$$

$$g_{i0} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{g_{i0}{}_{(l,k)}(\theta,\varphi)t^k}{r^{1.5+l+1.5k}}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{g_{ij}{}_{(l,k)}(\theta,\varphi)t^k}{r^{1+l+1.5k}}$$

로 놓고,

$$G^{\mu\nu} = -8\pi G\, T^{\mu\nu}$$

미분 방정식을 풀면 된다.

$g_{i0} = \ \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{1.5}}\right)$ 인 이유를 알아보자.

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda}\left(g_{\alpha\beta,\kappa\lambda} - g_{\alpha\lambda,\beta\kappa} - g_{\beta\kappa,\alpha\lambda} + g_{\kappa\lambda,\alpha\beta}\right)$$

$$+\frac{1}{4}g^{\kappa\lambda}g^{\rho\sigma}\left(2g_{\kappa\rho,\sigma}-g_{\rho\sigma,\kappa}\right)\left(g_{\alpha\lambda,\beta}+g_{\beta\lambda,\alpha}-g_{\alpha\beta,\lambda}\right)$$

$$-\frac{1}{4}g^{\kappa\lambda}g^{\rho\sigma}\left(g_{\alpha\kappa,\rho}+g_{\kappa\rho,\alpha}-g_{\alpha\rho,\kappa}\right)\left(g_{\beta\lambda,\sigma}+g_{\lambda\sigma,\beta}-g_{\beta\sigma,\lambda}\right)$$

를 잘 살펴보면, $g_{i0,jk}$ 의 규모는 R_{00} 함수의 입력 값이 아니고($g_{00,\kappa\lambda}, g_{0\lambda,0\kappa}, g_{0\kappa,0\lambda}, g_{\kappa\lambda,00}$ 형식이 아니다) R_{i0} 함수의 입력 값이다. 그러므로 $T_{i0}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{3.5}}\right)$ 을 만족시키기 위해서는 $g_{i0.jk}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{3.5}}\right)$ 이어야 한다.

앞에서 ${T^{\alpha\beta}}_{,0}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{1.5}}\right)\mathcal{O}\left(T^{\alpha\beta}\right)$ 를 증명할 때, $g_{\alpha\beta,0}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{1.5}}\right)\mathcal{O}\left(g_{\alpha\beta}-\eta_{\alpha\beta}\right)$ 를 미리 이용했었는데 좀 더 완벽하게 증명하려면,

$$\left(g_{\alpha\beta,0}=\mathcal{O}\left(g_{\alpha\beta}-\eta_{\alpha\beta}\right)\right)\rightarrow\left({T^{\alpha\beta}}_{,0}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{1}}\right)\mathcal{O}\left(T^{\alpha\beta}\right)\right)$$
$$\rightarrow\left(g_{\alpha\beta,0}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{1}}\right)\mathcal{O}\left(g_{\alpha\beta}-\eta_{\alpha\beta}\right)\right)\rightarrow\left({T^{\alpha\beta}}_{,0}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{1.5}}\right)\mathcal{O}\left(T^{\alpha\beta}\right)\right)$$
$$\rightarrow\left(g_{\alpha\beta,0}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{1.5}}\right)\mathcal{O}\left(g_{\alpha\beta}-\eta_{\alpha\beta}\right)\right)$$

순서로 하면 더 명확해진다.

계속해서

$$\rightarrow\left(g_{\alpha\beta,00}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{1.5}}\right)\mathcal{O}\left(g_{\alpha\beta}-\eta_{\alpha\beta}\right)\right)\rightarrow\left({T^{\alpha\beta}}_{,00}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{2.5}}\right)\mathcal{O}\left(T^{\alpha\beta}\right)\right)$$
$$\rightarrow\left(g_{\alpha\beta,00}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{2.5}}\right)\mathcal{O}\left(g_{\alpha\beta}-\eta_{\alpha\beta}\right)\right)\rightarrow\left({T^{\alpha\beta}}_{,00}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{3}}\right)\mathcal{O}\left(T^{\alpha\beta}\right)\right)$$
$$\rightarrow\left(g_{\alpha\beta,00}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{3}}\right)\mathcal{O}\left(g_{\alpha\beta}-\eta_{\alpha\beta}\right)\right)\rightarrow\cdots$$

순으로 증명할 수 있다. 그 다음 계산은 [3] 9.1 을 참조해라.

5 GRAVITATIONAL RADIATION

5.1 WEAK-FIELD APPROXIMATION

원점에서 멀어질수록 $g_{\alpha\beta}$ 가 $\eta_{\alpha\beta}$에 수렴하는 harmonic coordinate 좌표계가 있다고 가정하자.

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^1}\right)$$

Taylor Series 로 표기하면,

$$h_{\alpha\beta} = h^{[1]}_{\alpha\beta}(t,\theta,\varphi)\left(\frac{1}{r^1}\right) + h^{[2]}_{\alpha\beta}(t,\theta,\varphi)\left(\frac{1}{r^2}\right) + \cdots = h^{(1)}_{\alpha\beta} + h^{(2)}_{\alpha\beta} + \cdots$$

마찬가지로

$$S_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T^{\lambda}{}_{\lambda} = S^{[1]}_{\alpha\beta}(t,\theta,\varphi)\left(\frac{1}{r^3}\right) + S^{[2]}_{\alpha\beta}(t,\theta,\varphi)\left(\frac{1}{r^4}\right) + \cdots = S^{(1)}_{\alpha\beta} + S^{(2)}_{\alpha\beta} + \cdots$$

로 표현 가능하다.

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\hat{\lambda}}\left(\left(h^{(1)}_{\alpha\beta}\right)_{,\lambda\hat{\lambda}} - \left(h^{(1)}_{\alpha\lambda}\right)_{,\beta\hat{\lambda}} - \left(h^{(1)}_{\beta\lambda}\right)_{,\alpha\hat{\lambda}} + \left(h^{(1)}_{\lambda\hat{\lambda}}\right)_{,\alpha\beta}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

에, Harmonic coordinate 조건

$$\eta^{\lambda\hat{\lambda}}h_{\alpha\lambda,\hat{\lambda}} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\hat{\lambda}}h_{\lambda\hat{\lambda},\alpha}$$

을 적용하면

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\hat{\lambda}}\left(h^{(1)}_{\alpha\beta}\right)_{,\lambda\hat{\lambda}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right) = -8\pi G\, S^{(1)}_{\alpha\beta} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

그러므로 $h_{\alpha\beta}$의 근사값 $\tilde{h}_{\alpha\beta}$가 미분방적식

$$\eta^{\lambda\hat{\lambda}}\left(\tilde{h}_{\alpha\beta}\right)_{,\lambda\hat{\lambda}} = -16\pi G\, S_{\alpha\beta} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

를 만족한다면,

$$h_{\alpha\beta} = \tilde{h}_{\alpha\beta} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

이다. $\tilde{h}_{\alpha\beta}$ 는 $\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$ 오차 이내의 근사값이다.

5.2 TOTAL ENERGY MOMENTUM TENSOR

[3] 7.6 참조

total energy momentum tensor $\tau^{\alpha\beta}$ 를 아래와 같이 정의한다.

$$R_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\acute{\lambda}}\left(\left(h_{\alpha\beta}\right)_{,\lambda\acute{\lambda}} - (h_{\alpha\lambda})_{,\beta\acute{\lambda}} - \left(h_{\beta\lambda}\right)_{,\alpha\acute{\lambda}} + (h_{\lambda\acute{\lambda}})_{,\alpha\beta}\right)$$

$$R_{\alpha\beta}^{(1)} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\lambda\acute{\lambda}}R_{\lambda\acute{\lambda}}^{(1)} = -8\pi G\,\tau_{\alpha\beta}$$

$$\tau^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\acute{\alpha}}\eta^{\beta\acute{\beta}}\tau_{\acute{\alpha}\acute{\beta}}$$

관찰자가 원점에서 멀어서 공간이 휘어짐이 약할 때, 실제 느끼는 energy momentum 이다.
물질뿐 아니라, 중력까지 포함한 tensor 이다. Energy momentum tensor 가 $T^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} = 0$ 을 만족하는 것과 비슷하게, $\tau^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} = 0$을 만족한다. ([3] 7.6 (A)).

$\int T^{\lambda 0} g^{\frac{1}{2}}\, d^3x$는 보존이 되지 않지만([3] (5.3.8)), $\int \tau^{\lambda 0}\, d^3x$는 보존이 되므로([3] (7.6.8)), 에너지와 같은 역할을 한다. 그러므로, 시간당 방출되는 에너지는

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2\hat{x}_i\langle\tau^{i0}\rangle$$

([3] (10.4.13))를 적분해서 구할 수 있다.

$$h_{\mu\nu} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^1}\right)$$

$$h_{\mu\nu,\lambda} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$h_{\mu\nu,\lambda\kappa} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$\tau_{\mu\kappa} - T_{\mu\kappa} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

어떤 좌표계에서 위 식을 만족한다면 $g_{\alpha\beta}$ 가 $\eta_{\alpha\beta}$에 수렴한다면, $\int \tau^{\lambda 0}\, d^3x$는 어떤 값에 수렴하고([3] 7.6 (E)), 좌표계에 상관없이 (그 좌표계들이 원점에서 멀어질수록 같아진다면) 그 수렴 값은 일정하다 ([3] 7.6 (I)).
만약, radiation 한다면

$$h_{\mu\nu} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^1}\right)$$

$$h_{\mu\nu,\lambda} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^1}\right)$$

$$h_{\mu\nu,\lambda\kappa} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^1}\right)$$

$$\tau_{\mu\kappa} - T_{\mu\kappa} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

이 돼서, 수렴하지 않는다.

5.3 TOTAL ENERGY RADIATION

[3] 10.3 참조

중심부에서 일정 거리이상에 물질이 없다고 가정할 때, 단위시간당 Total Energy $\int \tau^{\lambda 0}\, d^3x$ 의 방출량을 계산해보자.

$$dP = \int r^2 \hat{x}_i \langle \tau^{i0} \rangle d\Omega$$

$$\hat{x}_i = \frac{x_i}{r}, d\Omega = \sin\theta\ d\theta\ d\varphi$$

$$\langle \tau^{i0} \rangle = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t} \int_{-\mathrm{t}}^{\mathrm{t}} \tau^{i0} \mathrm{d}x^0$$

그러므로, $\langle \tau^{i0} \rangle$의 값을 $\left(\frac{1}{r^2}\right)$의 규모까지 구해야 된다. 원점으로부터 일정 거리 이상에서 물질이 없을 때, $\tau^{\alpha\beta}$의 값은 물질이 진동하지 않으면 $\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right)$이고([3] 7.6 (E)), 진동한다면 $\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$이다. $h_{\alpha\beta}$의 값을 $\left(\frac{1}{r}\right)$ 규모까지의 값만 이용해서 구하는 방법에 대해 알아본다.

$$\tau_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi G}\left(R^{(1)}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\lambda\acute{\lambda}}R^{(1)}_{\lambda\acute{\lambda}}\right) = \frac{1}{8\pi G}\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R^{\lambda}{}_{\lambda} - R^{(1)}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\lambda\acute{\lambda}}R^{(1)}_{\lambda\acute{\lambda}}\right)$$

$$= \frac{1}{8\pi G}\left(-\frac{1}{2}h_{\mu\nu}\eta^{\lambda\acute{\lambda}}R^{(1)}_{\lambda\acute{\lambda}} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\lambda\acute{\lambda}}\eta^{\rho\acute{\rho}}h_{\acute{\lambda}\acute{\rho}}R^{(1)}_{\lambda\rho} + R^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\lambda\acute{\lambda}}R^{(2)}_{\lambda\acute{\lambda}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

여기서, $R_{\alpha\beta} = 0$ 인 점을 이용했다. [3] (10.4.9) 를 참고하면,

$$h_{\mu\nu}(x^0, \vec{x}) = e^{(1)}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x})\, exp(ik_\mu x^\mu) + e^{(2)}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) exp(iq_\mu x^\mu) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$k_i = \omega\hat{x}_i, k_0 = -\omega$$

$$k_\mu k_{\acute{\mu}}\eta^{\mu\acute{\mu}} = 0$$

$$k_\mu e_{\acute{\mu}\nu}\eta^{\mu\acute{\mu}} = \frac{1}{2}k_\nu e_{\mu\acute{\mu}}\eta^{\mu\acute{\mu}}$$

$$e^{(1)}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) = \frac{4G}{|\vec{x}|}\int S_{\mu\nu}\left(\omega, \overrightarrow{x'}\right) exp\left(\frac{-i\omega\vec{x}\cdot\overrightarrow{x'}}{|\vec{x}|}\right) d^3x'$$

로 표현할 수 있고,

$$\left[\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}}\left(e_{\mu\nu}^{(1)}(\omega,\vec{x'})\,exp\left(i\omega|\vec{x'}|-i\omega x'^{0}\right)-e_{\mu\nu}^{(1)}(\omega,\vec{x})\,exp\left(\frac{i\omega\vec{x}\cdot\vec{x'}}{|\vec{x}|}-i\omega x'^{0}\right)\right)\right]_{\vec{x'}=\vec{x}}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$e_{\mu\nu}^{(1)}(\omega,\vec{x'})\,exp\left(i\omega|\vec{x'}|-i\omega x'^{0}\right)=e_{\mu\nu}^{(1)}(\omega,\vec{x})\,exp\left(\frac{i\omega\vec{x}\cdot\vec{x'}}{|\vec{x}|}-i\omega x'^{0}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)\cdot\left(\vec{x'}-\vec{x}\right)$$

인 성질을 이용하면, $h_{\mu\nu}(x^0,\vec{x'})$를 우변의 **plane wave** ([3] 10.2 참조)로 근사해서 값을 구할 수 있다.

이 때, $R_{\alpha\beta}^{(1)}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$ 이므로

$$\tau_{\mu\nu}=\frac{1}{8\pi G}\left(R_{\mu\nu}^{(2)}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\lambda\acute{\lambda}}R_{\lambda\acute{\lambda}}^{(2)}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

또한

$$\begin{aligned}R_{\mu\kappa}^{(2)}&=\frac{1}{2}\eta^{\lambda\nu}\left(\left(h_{\lambda\nu}^{(2)}\right)_{,\mu\kappa}-\left(h_{\mu\nu}^{(2)}\right)_{,\lambda\kappa}-\left(h_{\lambda\kappa}^{(2)}\right)_{,\mu\nu}+\left(h_{\lambda\nu}^{(2)}\right)_{,\lambda\nu}\right)\\&-\frac{1}{2}\eta^{\lambda\acute{\lambda}}\eta^{\nu\acute{\nu}}h_{\acute{\lambda}\acute{\nu}}^{(1)}\left(\left(h_{\lambda\nu}^{(1)}\right)_{,\mu\kappa}-\left(h_{\mu\nu}^{(1)}\right)_{,\lambda\kappa}-\left(h_{\lambda\kappa}^{(1)}\right)_{,\mu\nu}+\left(h_{\lambda\nu}^{(1)}\right)_{,\lambda\nu}\right)\\&+\frac{1}{2}\eta^{\nu\acute{\nu}}\eta^{\sigma\acute{\sigma}}\left(2\left(h_{\acute{\nu}\sigma}^{(1)}\right)_{,\nu}-\left(h_{\acute{\nu}\nu}^{(1)}\right)_{,\sigma}\right)\left(\left(h_{\acute{\sigma}\mu}^{(1)}\right)_{,\kappa}+\left(h_{\acute{\sigma}\kappa}^{(1)}\right)_{,\mu}-\left(h_{\mu\kappa}^{(1)}\right)_{,\acute{\sigma}}\right)\\&-\frac{1}{4}\eta^{\sigma\acute{\sigma}}\eta^{\lambda\acute{\lambda}}\left(\left(h_{\sigma\kappa}^{(1)}\right)_{,\lambda}+\left(h_{\sigma\lambda}^{(1)}\right)_{,\kappa}-\left(h_{\lambda\kappa}^{(1)}\right)_{,\sigma}\right)\left(\left(h_{\acute{\sigma}\mu}^{(1)}\right)_{,\acute{\lambda}}+\left(h_{\acute{\sigma}\acute{\lambda}}^{(1)}\right)_{,\mu}-\left(h_{\acute{\lambda}\mu}^{(1)}\right)_{,\acute{\sigma}}\right)\end{aligned}$$

에서 $\left(h_{\mu\nu}^{(2)}\right)_{,\lambda\kappa}$의 시간에 대한 평균값은 $\langle\left(h_{\mu\nu}^{(2)}\right)_{,\lambda\kappa}\rangle=\langle-q_\lambda q_\kappa e_{\mu\nu}^{(2)}(\omega,\hat{x})exp\left(iq_\mu x^\mu\right)\rangle=0$ 이 된다. 그러므로, $h_{\mu\nu}^{(1)}$ 의 값만 알면, $\langle R_{\mu\kappa}^{(2)}\rangle$의 값을 구할 수 있다.

6 SYMMETRIC SPACES

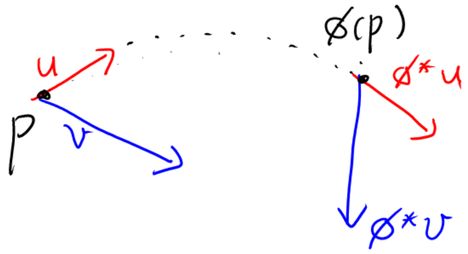
6.1 KILLING VECTORS

[3] 13. 1 참조

metric tensor $g\in\mathcal{T}_2^0$에 대해, manifold 공간내에서의 변환 $\phi: M\to M$가

$$\phi^*(g)=g$$

를 만족할 때, ϕ를 **isometry** 라고 부른다. 모든 점 $p \in M$에서의 임의의 두 벡터 $u, v \in \mathcal{T}_{(p)}{}_0^1$에 대해, 변환된 두 벡터 $\phi^*(u), \phi^*(v) \in \mathcal{T}_{(\phi(p))}{}_0^1$는 크기와 사이 각이 유지된다. 예를 들면, Euclidean space 에서 평행이동이나 회전이동이다.



$$\forall p \in M, \forall u \in \mathcal{T}_0^1, \forall v \in \mathcal{T}_0^1, \qquad \Big(g\big(\phi^*(u), \phi^*(v)\big)\Big)\big(\phi(p)\big) = \big(g(u,v)\big)(p)$$

만약, $\mathcal{L}_v g = 0$가 성립하면 $v \in \mathcal{T}_0^1$를 이 공간의 **killing vector** 라고 부른다.

metric space M 이

$$\forall p \in M, \forall \kappa, \exists v \in \mathcal{T}_0^1, \qquad v_\alpha(p) = \delta_\alpha^\kappa \wedge \mathcal{L}_v g = 0$$

을 만족하면, **homogeneous** 하다고 말한다. homogeneous 한 공간에서 임의의 두 점 사이에 **path** 가 존재하면, 두 점 사이에 isometry 변환이 존재한다.

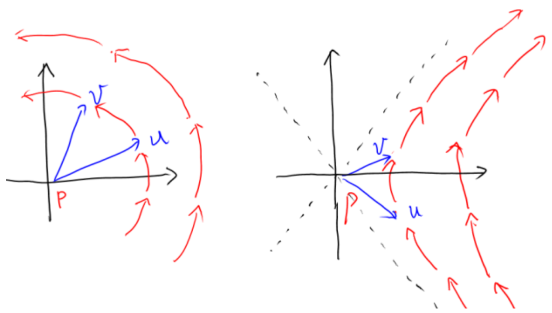
metric space M 이 다음을 만족하면, $p \in M$ 에서 **isotropic** 하다고 한다.

$$\forall \kappa, \forall \lambda, \exists v \in \mathcal{T}_0^1, \qquad v(p) = 0 \wedge v_{\alpha;\beta}(p) = \delta_\alpha^\kappa \delta_\beta^\lambda - \delta_\beta^\kappa \delta_\alpha^\lambda \wedge \mathcal{L}_v g = 0$$

크기가 같은 임의의 $u, v \in \mathcal{T}_{(p)}{}_0^1$에 대해, 회전축이 점 p 를 지나면서 u를 v로 회전이동시키는 isometry 변환이 존재하는 것과 동일조건이다.

$$\forall u \in \mathcal{T}_{(p)}{}_0^1, \forall v \in \mathcal{T}_{(p)}{}_0^1, \exists \phi: M \to M, \qquad g_{\alpha\beta}(p)\, u^\alpha u^\beta = g_{\alpha\beta}(p)\, v^\alpha v^\beta \to \phi^*(u) = v$$

u와 v를 포함하는 평면의 성질에 따라서, 원 또는 쌍곡선 궤도를 따라 회전 변환을 하게 된다.



n 차원 manifold 공간에서, n(n+1)/2 차원의 killing vector 가 존재하면, 그 manifold 공간을 **maximally symmetric** 이라고 한다.

$$N = \left\{1, \dots, \frac{n(n+1)}{2}\right\},$$

$$\exists v: N \to \mathcal{T}_0^1, \qquad \left(\forall i \in N, \mathcal{L}_{v(i)} g = 0\right) \wedge \left(\forall c: N \to \mathbb{R}, \forall j \in N, \sum_{k \in N} c(k)v(k) = 0 \to c(j) = 0\right)$$

manifold 공간이 homogeneous 하고, 어떤 점에 대해 isotropic 하면, maximally symmetric 하다.

6.2 MAXIMALLY SYMMETRIC SPACES: UNIQUENESS

[3] 13. 2 참조

어떤 manifold 공간이 maximally symmetric 하면,

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu} = K\left(g_{\rho\sigma} g_{\lambda\nu} - g_{\rho\nu} g_{\lambda\sigma}\right)$$

식 6.2.1

인 상수 $K \in \mathbb{R}$ 가 존재한다

또, manifold M 과 $\bar{M}$의 metric tensor, curvature tensor 를 각각 g, R와 $\bar{g}, \bar{R}$이라고 하고, matrix $g_{\kappa\lambda} \overrightarrow{e_\kappa}\, \overrightarrow{e_\lambda}^T$와 $\bar{g}_{\kappa\lambda} \overrightarrow{e_\kappa}\, \overrightarrow{e_\lambda}^T$의 eigenvalues 의 양수와 음수의 개수가 같다고 가정하면

$$\forall K \in \mathbb{R}, \forall p \in M, \forall q \in \overline{M}, \exists \phi: M \to \bar{M},$$
$$\left(R_{\lambda\rho\sigma\nu} = K\left(g_{\rho\sigma} g_{\lambda\nu} - g_{\rho\nu} g_{\lambda\sigma}\right) \wedge \bar{R}_{\lambda\rho\sigma\nu} = K\left(\bar{g}_{\rho\sigma} \bar{g}_{\lambda\nu} - \bar{g}_{\rho\nu} \bar{g}_{\lambda\sigma}\right)\right) \to \left(\phi(p) = q \wedge \phi^*(g) = \bar{g}\right)$$

이 성립한다. 그러므로 maximally symmetric space 는 상수 K와 $g_{\kappa\lambda} \overrightarrow{e_\kappa}\, \overrightarrow{e_\lambda}^T$의 eigenvalues 의 부호의 개수에 의해 정해지고, **식 6.2.1** 을 만족하는 공간은 maximally symmetric 하다.

6.3 COSMOLOGICAL PRINCIPLE

[3] 14. 1 참조

cosmological principle 은 다음 식을 만족하는 **cosmic standard coordinate system** 이라는 좌표계 x 가 존재한다는 법칙이다.

metric tensor g, energy momentum tensor T, 3 차원 subspace $\Sigma(t) = \{p \in M | x^0(p) = t\}$ 로 표기하였다.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall q \in \Sigma(t), \exists \phi: \Sigma(t) \to \Sigma(t),$$
$$\phi\left(x^{-1}(t,0,0,0)\right) = q \wedge \phi^*(g) = g \wedge \phi^*(T) = T$$
$$\wedge\, \Sigma(t)\ is\ isotropy\ about\ x^{-1}(t,0,0,0)$$

그러므로, $\Sigma(t)$가 maximally symmetric 하고, 그 공간에서 T 도 동일(**form-invariant**)하다는 것이다.

6.4 STATIC SPACETIME

[4] 6. 1 참조

4 차원 공간에 timelike Killing Vector 가 존재하면 **stationary spacetime** 이라고 한다. 그러면, 아래와 같이 시간의 함수가 아닌 metric tensor 를 가지는 좌표계를 선택할 수 있다.

$$d\tau(x^0, \vec{x})^2 = g_{\alpha\beta}(\vec{x}) dx^\alpha dx^\beta$$

이때, killing vector ξ는 e_0이다.

만약, $g_{0i}(\vec{x}) = 0$ 이면 그 공간을 **static spacetime** 이라고 한다. $\left(\frac{g_{0i}}{g_{00}}\right)_{,j} = \left(\frac{g_{0j}}{g_{00}}\right)_{,i}$ 이면 $\bar{g}_{0i} = 0$ 인 좌표계로 변환 가능하다.

먼저 $\left(f(\vec{x})\right)_{,i} = -\frac{g_{0i}}{g_{00}}$ 를 만족하는 함수 $f(\vec{x})$를 구한다. 그 다음,

$$x^0 = \bar{x}^0 + f\left(\vec{\bar{x}}\right)$$

$$x^i = \bar{x}^i$$

로 변환하면

$$\bar{g}_{0i} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^0} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^i} = g_{0i} + g_{00} f_{,i} = 0$$

REFERENCES

[1] Erin David Lovelock, Tensors, Differential Forms, and Variational Principles.

[2] Bernard Schutz, A First Course in General Relativity.

[3] Steven Weinberg, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity.

[4] Robert M. Wald, General Relativity.