

Démonstration détaillée de la formule sommatoire de Poisson

S. JAUBERT

Pôle Formation UIMM - CVDL

28 février 2026

Énoncé et Hypothèses

Convention de la transformée de Fourier : Pour une fonction intégrable $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier \hat{f} par :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2i\pi\xi t} dt$$

Hypothèses sur la fonction f : L'application de cette formule exige des conditions de régularité et de décroissance pour garantir la convergence des séries et intégrales. La démonstration classique est valide si l'on suppose que :

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^1 .
2. La fonction f et sa dérivée f' décroissent suffisamment vite à l'infini, c'est-à-dire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $f(x) = O(1/x^2)$ et $f'(x) = O(1/x^2)$ lorsque $|x| \rightarrow +\infty$.

(Note : Ces conditions sont naturellement remplies si f appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des fonctions infiniment dérivables à décroissance rapide.)

Énoncé de la formule : Sous ces hypothèses, la formule sommatoire de Poisson stipule que la somme des valeurs de la fonction sur les entiers est égale à la somme des valeurs de sa transformée de Fourier sur les entiers :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)$$

Plus généralement, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2i\pi kx}$$

Démonstration rigoureuse

La preuve s'articule autour de la "périodisation" de la fonction f et de l'utilisation des séries de Fourier.

Étape 1 : Périodisation et régularité

On construit une fonction F en sommant une infinité de versions décalées de f :

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$$

Montrons d'abord que cette série converge normalement sur tout segment $[-K, K]$ (avec $K > 0$). Par hypothèse de décroissance, il existe une constante M telle que $|f(x)| \leq \frac{M}{x^2}$ pour $|x|$ assez grand. Pour $x \in [-K, K]$ et $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| > K + 1$, on a :

$$|f(x+n)| \leq \frac{M}{(x+n)^2} \leq \frac{M}{(|n| - K)^2}$$

Puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{(|n|-K)^2}$ converge, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ converge normalement, et donc uniformément, sur tout segment de \mathbb{R} . La limite simple $F(x)$ est donc bien définie et continue.

En appliquant le même raisonnement de convergence normale à la série des dérivées $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(x+n)$, le théorème de dérivation des suites de fonctions nous assure que F est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

De plus, F est 1-périodique. En effet, par un simple changement d'indice ($m = n + 1$) :

$$F(x+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+1+n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+m) = F(x)$$

Étape 2 : Calcul des coefficients de Fourier de F

Puisque F est périodique de période 1 et continue, on peut l'exprimer par sa série de Fourier. Calculons son k -ième coefficient de Fourier, noté $c_k(F)$:

$$c_k(F) = \int_0^1 F(x) e^{-2i\pi kx} dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \right) e^{-2i\pi kx} dx$$

Grâce à la convergence normale de la série sur le segment $[0, 1]$, le théorème d'interversion série-intégrale s'applique :

$$c_k(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n) e^{-2i\pi kx} dx$$

Effectuons le changement de variable $u = x + n$ (donc $dx = du$). L'intervalle d'intégration $[0, 1]$ devient $[n, n+1]$. De plus, k et n étant des entiers, $e^{-2i\pi kn} = 1$, ce qui donne $e^{-2i\pi kx} = e^{-2i\pi k(u-n)} = e^{-2i\pi ku}$. L'intégrale devient alors :

$$c_k(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(u) e^{-2i\pi ku} du$$

La somme infinie d'intégrales sur les intervalles adjacents $[n, n+1]$ reconstruit l'intégrale sur la droite réelle tout entière :

$$c_k(F) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2i\pi ku} du = \hat{f}(k)$$

Étape 3 : Théorème de Dirichlet et conclusion

La fonction F étant périodique et de classe C^1 , le théorème de convergence de Dirichlet (ou de convergence normale) garantit que $F(x)$ est égale en tout point à la somme de sa série de Fourier :

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(F) e^{2i\pi kx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{2i\pi kx}$$

Ceci démontre la version générale de la formule. En évaluant simplement cette égalité en $x = 0$, on obtient l'identité finale de Poisson :

$$F(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)$$

■