

# Démonstration détaillée de la formule sommatoire de Poisson

S. JAUBERT  
Pôle Formation UIMM - CVDL

28 février 2026

## Énoncé et Hypothèses

**Convention de la transformée de Fourier :** Pour une fonction intégrable  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , on définit sa transformée de Fourier  $\hat{f}$  par :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2i\pi\xi t} dt$$

**Hypothèses sur la fonction  $f$  :** L'application de cette formule exige des conditions de régularité et de décroissance pour garantir la convergence des séries et intégrales. La démonstration classique est valide si l'on suppose que :

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est de classe  $C^1$ .
2. La fonction  $f$  et sa dérivée  $f'$  décroissent suffisamment vite à l'infini, c'est-à-dire qu'il existe une constante  $M > 0$  telle que  $f(x) = O(1/x^2)$  et  $f'(x) = O(1/x^2)$  lorsque  $|x| \rightarrow +\infty$ .

(*Note : Ces conditions sont naturellement remplies si  $f$  appartient à l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  des fonctions infiniment dérивables à décroissance rapide.*)

**Énoncé de la formule :** Sous ces hypothèses, la formule sommatoire de Poisson stipule que la somme des valeurs de la fonction sur les entiers est égale à la somme des valeurs de sa transformée de Fourier sur les entiers :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)$$

Plus généralement, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{2i\pi kx}$$

## Démonstration rigoureuse

La preuve s'articule autour de la “périodisation” de la fonction  $f$  et de l'utilisation des séries de Fourier.

## Étape 1 : Périodisation et régularité

On construit une fonction  $F$  en sommant une infinité de versions décalées de  $f$  :

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$$

Montrons d'abord que cette série converge normalement sur tout segment  $[-K, K]$  (avec  $K > 0$ ). Par hypothèse de décroissance, il existe une constante  $M$  telle que  $|f(x)| \leq \frac{M}{x^2}$  pour  $|x|$  assez grand. Pour  $x \in [-K, K]$  et  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $|n| > K + 1$ , on a :

$$|f(x+n)| \leq \frac{M}{(x+n)^2} \leq \frac{M}{(|n|-K)^2}$$

Puisque la série de Riemann  $\sum \frac{1}{(|n|-K)^2}$  converge, la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$  converge normalement, et donc uniformément, sur tout segment de  $\mathbb{R}$ . La limite simple  $F(x)$  est donc bien définie et continue.

En appliquant le même raisonnement de convergence normale à la série des dérivées  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(x+n)$ , le théorème de dérivation des suites de fonctions nous assure que  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

De plus,  $F$  est 1-périodique. En effet, par un simple changement d'indice ( $m = n + 1$ ) :

$$F(x+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+1+n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+m) = F(x)$$

## Étape 2 : Calcul des coefficients de Fourier de $F$

Puisque  $F$  est périodique de période 1 et continue, on peut l'exprimer par sa série de Fourier. Calculons son  $k$ -ième coefficient de Fourier, noté  $c_k(F)$  :

$$c_k(F) = \int_0^1 F(x) e^{-2i\pi kx} dx = \int_0^1 \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \right) e^{-2i\pi kx} dx$$

Grâce à la convergence normale de la série sur le segment  $[0, 1]$ , le théorème d'interversion série-intégrale s'applique :

$$c_k(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n) e^{-2i\pi kx} dx$$

Effectuons le changement de variable  $u = x + n$  (donc  $dx = du$ ). L'intervalle d'intégration  $[0, 1]$  devient  $[n, n+1]$ . De plus,  $k$  et  $n$  étant des entiers,  $e^{-2i\pi kn} = 1$ , ce qui donne  $e^{-2i\pi kx} = e^{-2i\pi k(u-n)} = e^{-2i\pi ku}$ . L'intégrale devient alors :

$$c_k(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(u) e^{-2i\pi ku} du$$

La somme infinie d'intégrales sur les intervalles adjacents  $[n, n+1]$  reconstruit l'intégrale sur la droite réelle tout entière :

$$c_k(F) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-2i\pi ku} du = \hat{f}(k)$$

### Étape 3 : Théorème de Dirichlet et conclusion

La fonction  $F$  étant périodique et de classe  $C^1$ , le théorème de convergence de Dirichlet (ou de convergence normale) garantit que  $F(x)$  est égale en tout point à la somme de sa série de Fourier :

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(F) e^{2i\pi kx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{2i\pi kx}$$

Ceci démontre la version générale de la formule. En évaluant simplement cette égalité en  $x = 0$ , on obtient l'identité finale de Poisson :

$$F(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)$$

■