La Formule Sommatoire de Poisson et son Rôle Central dans la Théorie de la Fonction Zêta de Riemann

S. JAUBERT
Pôle Formation UIMM - CVDL

28 février 2026

Résumé

Ce document synthétise, au niveau Master en Mathématiques, le lien profond unissant la Formule Sommatoire de Poisson à la fonction Zêta de Riemann. Il détaille l'émergence de l'équation fonctionnelle, le prolongement analytique, ainsi que l'équivalence mathématique stricte entre ces deux concepts fondamentaux de la théorie analytique des nombres.

1 Le passage par la fonction Thêta de Jacobi (Symétrie modulaire)

La fonction Thêta de Jacobi est définie pour tout $t > 0$ par la série rapidement convergente :

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}$$

Pour en déduire son équation fonctionnelle, on applique la Formule Sommatoire de Poisson (FSP) à la fonction gaussienne. Considérons la fonction $f(x) = e^{-\pi t x^2}$ avec $t > 0$. Cette fonction appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ infiniment dérivable à décroissance rapide. Sa transformée de Fourier classique est donnée par :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2} e^{-2i\pi x \xi} dx = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi \xi^2 / t}$$

La Formule Sommatoire de Poisson énonce que, sous ces conditions de régularité :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

En évaluant cette égalité analytique pour notre gaussienne $f(x)$, on obtient immédiatement l'identité modulaire fondamentale de la fonction Thêta :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi n^2 / t}$$

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right)$$

2 Le prolongement analytique de Zêta via la transformée de Mellin

La fonction Zêta de Riemann est initialement définie par la série convergente stricte pour $\Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

Pour la relier analytiquement à $\theta(t)$, Riemann introduit la fonction Gamma d'Euler via son intégrale, et opère le changement de variable $u = \pi n^2 t \implies du = \pi n^2 dt$:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} e^{-u} du$$

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s} = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{s}{2}-1} dt$$

En sommant cette identité sur tous les entiers $n \geq 1$ (l'interversion série-intégrale étant justifiée par la convergence absolue pour $\Re(s) > 1$), Riemann relie $\zeta(s)$ à la transformée de Mellin de la fonction $\omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} = \frac{\theta(t)-1}{2}$:

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^\infty \omega(t) t^{\frac{s}{2}-1} dt$$

Pour obtenir le prolongement analytique à tout le plan complexe, Riemann scinde cette intégrale géométrique en deux parties distinctes : l'une de 0 à 1, l'autre de 1 à ∞.

$$\int_0^\infty \omega(t) t^{\frac{s}{2}-1} dt = \int_0^1 \omega(t) t^{\frac{s}{2}-1} dt + \int_1^\infty \omega(t) t^{\frac{s}{2}-1} dt$$

L'équation fonctionnelle modulaire de $\theta(t)$ permet de réécrire le comportement de ω près de zéro. En effet, $\theta\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\theta(t)$ implique $\omega\left(\frac{1}{t}\right) = t^{1/2}\omega(t) + \frac{1}{2}t^{1/2} - \frac{1}{2}$. Par le changement de variable $t \mapsto \frac{1}{t}$ dans l'intégrale de 0 à 1, on extrait structurellement les termes divergents sous la forme explicite de pôles simples :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \omega(t) t^{\frac{s}{2}-1} dt = \int_1^\infty \omega\left(\frac{1}{t}\right) t^{-\frac{s}{2}-1} dt &= \int_1^\infty \left(t^{1/2}\omega(t) + \frac{1}{2}t^{1/2} - \frac{1}{2}\right) t^{-\frac{s}{2}-1} dt \\
&= \int_1^\infty \omega(t) t^{\frac{1-s}{2}-1} dt + \frac{1}{2}\int_1^\infty t^{-\frac{s+1}{2}} dt - \frac{1}{2}\int_1^\infty t^{-\frac{s}{2}-1} dt \\
&= \int_1^\infty \omega(t) t^{\frac{1-s}{2}-1} dt + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

On aboutit ainsi à l'expression globale :

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \omega(t) \left(t^{\frac{s}{2}-1} + t^{\frac{1-s}{2}-1}\right) dt$$

Puisque $\omega(t) = O(e^{-\pi t})$ à l'infini, l'intégrale de droite converge absolument pour tout $s \in \mathbb{C}$. Ceci confirme ultimement que la fonction Zêta de Riemann admet un prolongement analytique (méromorphe) à l'ensemble du plan complexe, avec un seul pôle simple résiduel en $s = 1$ (celui en $s = 0$ étant annulé par le pôle de la fonction Gamma).

3 La preuve de l'équation fonctionnelle de Zêta

On définit classiquement la fonction Zêta complétée (fonction xi de Riemann) par :

$$\xi^*(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

(souvent multipliée par $\frac{1}{2}s(s-1)$ pour obtenir une fonction holomorphe partout).

L'expression intégrale complète dérivée à l'étape précédente s'écrit formellement :

$$\xi^*(s) = -\frac{1}{s(1-s)} + \int_1^\infty \omega(t)\left(t^{\frac{s}{2}-1} + t^{\frac{1-s}{2}-1}\right)dt$$

Le membre de droite de cette identité est manifestement et structurellement invariant par la substitution de s par $1-s$. Cette symétrie élégante prouve directement la fameuse équation fonctionnelle de Riemann :

$$\xi^*(s) = \xi^*(1-s)$$

Il est à noter que cette équation force analytiquement les zéros dits “triviaux” de $\zeta(s)$ à se situer précisément aux entiers pairs négatifs $(-2, -4, -6\dots)$ afin de compenser les pôles de la fonction $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$.

4 La preuve directe par annulation des infinis (Régularisation)

Une approche alternative moderne (dans l'esprit de S. Ramanujan) exploite l'application de la FSP directement à la fonction génératrice $f(t) = 1/|t|^s$. Bien que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|n|^s}$ soit singulière et divergente, la théorie des distributions donne un sens rigoureux à la transformée de Fourier de $|t|^{-s}$ dans la bande $0 < \Re(s) < 1$:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{|t|^s}\right\}(\xi) = \frac{\pi^{s-1/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\frac{1}{|\xi|^{1-s}}$$

Appliquer naïvement la formule de Poisson produit une contradiction apparente : $\sum_n \frac{1}{|n|^s} = \sum_k \hat{f}(k)$ contenant des pôles en $n=0$ et $k=0$. Cependant, en régularisant la fonction via un paramètre $\epsilon \to 0$ (par ex. $f_\epsilon(t) = (t^2+\epsilon^2)^{-s/2}$) et en comparant les développements de Taylor de part et d'autre, une identité remarquable émerge : les termes principiellement divergents générés par le mode zéro ($k=0$) s'annulent asymptotiquement et symétriquement avec les termes d'intégration centraux.

En isolant formellement les "parties finies" de ces sommes asymétriques régularisées sur $\mathbb{N}^*$, l'équation de dualité se contracte immédiatement, livrant l'équation fonctionnelle sans nécessiter le prolongement intégral complexe :

$$2\zeta(s) = 2\frac{\pi^{s-1/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\zeta(1-s)$$

5 L'équivalence mathématique stricte

L'argument de Riemann est une relation bidirectionnelle. Il est possible de démontrer la Formule Sommatoire de Poisson à partir de l'équation fonctionnelle de $\zeta(s)$. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ une fonction test paire. La formule d'inversion de Mellin stipule que pour $\sigma > 0$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Re(s)=\sigma} Mf(s)|x|^{-s}ds \quad \text{où} \quad Mf(s) = \int_0^\infty f(t)t^{s-1}dt$$

En sommant cette expression sur les entiers $n \geq 1$ avec $\sigma > 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re(s)=\sigma>1} \zeta(s) Mf(s) ds$$

En repoussant le contour d'intégration vers la gauche sur l'axe $\Re(s) = -1$, le théorème des résidus de Cauchy intercepte deux singularités fondamentales :

1. Le pôle géométrique de $\zeta(s)$ en $s = 1$ de résidu 1, générant le terme $\int_0^\infty f(t)dt$.
2. Le pôle spectral de $Mf(s)$ en $s = 0$, générant le terme scalaire $\zeta(0)f(0) = -\frac{1}{2}f(0)$.

L'intégrale translatée sur $\Re(s) = -1$ est ensuite réévaluée en effectuant le changement de variable symétrique $s \mapsto 1 - s$ et en injectant l'équation fonctionnelle $\zeta(1 - s) \propto \zeta(s)$. Les facteurs Γ transfèrent l'opérateur de Mellin vers $M\hat{f}(s)$. Le nouveau contour synthétise ainsi exactement $\sum_{n=1}^\infty \hat{f}(n)$.

En somme, on récupère purement algébriquement l'identité discrète-continue :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_0^\infty f(t)dt - \frac{f(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n)$$

Ce qui, pour les fonctions paires ($f(-n) = f(n)$), équivaut strictement à la FSP classique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)$.

Conclusion : La généralisation de Tate

Le dévoilement de cette symétrie fondamentale a atteint son summum moderne lors de la célèbre thèse de John Tate en 1950. Tate a transcendé l'analyse harmonique classique en la reformulant au niveau des *anneaux d'adèles* $\mathbb{A}_K$ des corps de nombres algébriques K. Dans ce vaste espace projectif géométrique, le corps global K agit classiquement comme un réseau purement discret co-compact au sein du groupe produit de ses complétions locales.

En formalisant une **Formule Sommatoire de Poisson adélique globale** :

$$\sum_{x\in K} f(x) = \sum_{y\in K} \hat{f}(y)$$

et en appliquant judicieusement une fonction de Schwartz-Bruhat adélique (factorisable sur les places infinies et p-adiques), l'intégrale zêta générale induite prouve le prolongement analytique et l'équation fonctionnelle des L-fonctions de Hecke de champ en une seule construction formelle. Ainsi, la FSP n'est plus perçue comme un simple outil sommatoire divergent : elle est reconnue comme la trace algébrique universelle, traduisant la dualité archimédienne et arithmétique de l'espace des nombres entiers.