Test F pour une ANOVA à un facteur

S. Jaubert

02 février 2020

Contexte Soient 5 étudiants (ou $k = 5$ opérateurs) qui ont effectué chacun $n = 20$ mesures avec le même moyen de mesure.

On cherche à savoir si la part de dispersion imputable au facteur “Opérateur” est significativement supérieure de la variabilité résiduelle (ou variance de répétabilité notée σ_r^2). Cette variabilité résiduelle ou variance intra-groupe est une erreur aléatoire, une erreur que le modèle n’explique pas.

Pour cela nous utiliserons la statistique F due à Sir Ronald A. Fisher

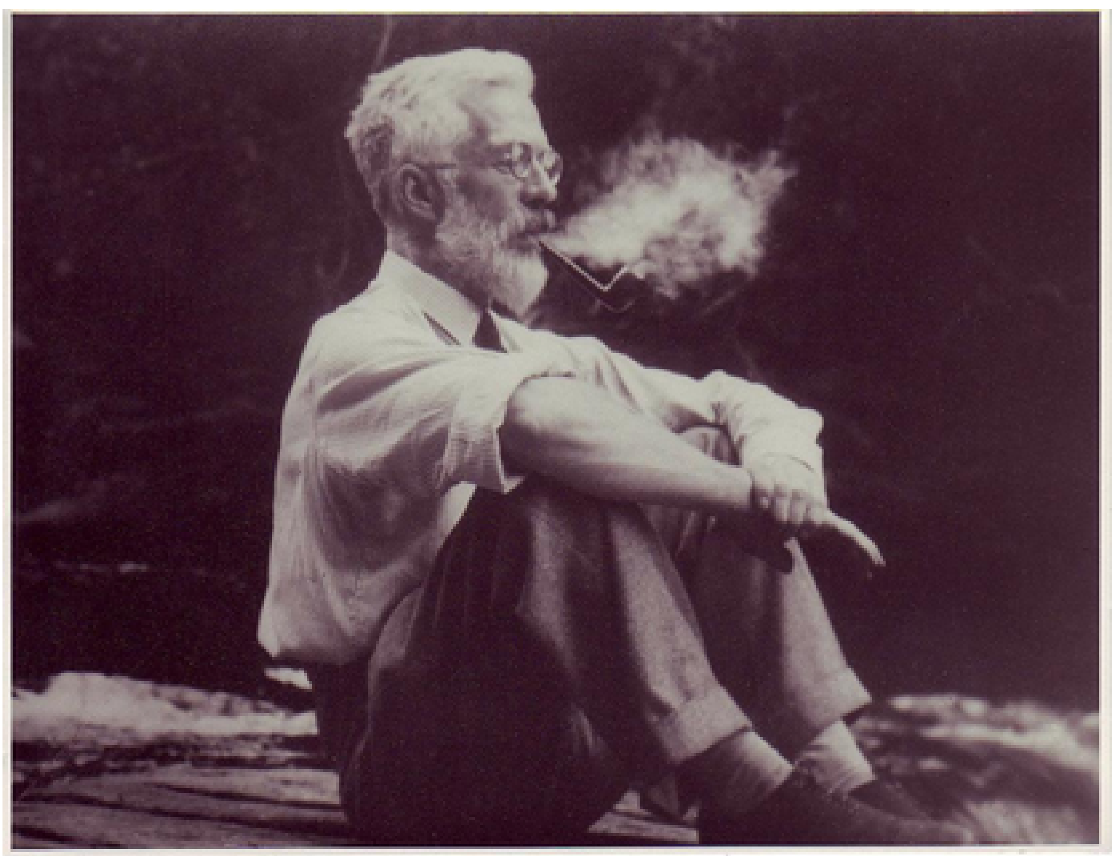


Figure 1: Ronald A. Fisher

Grossièrement cette statistique F est le rapport de deux carrés moyens, le CMF carré moyen dû aux facteurs et le CMR carré moyen dû aux résidus :

$$F = \frac{CMF}{CMR}$$

Ces deux carrés moyen ont approximativement la même valeur lorsque l'hypothèse nulle H_o est vraie (H_o affirme qu'il n'y a pas de différence entre les moyennes des groupes), ce qui donne une valeur de F proche de 1.

A présent mettons les mains dans le cambouis :

1ère Etape Mesurer les dispersions

On note :

X_{ij} la $j^{ème}$ mesure ($j = 1...n$) de l'opérateur i ($i = 1...k$)

$\bar{X} = \frac{1}{N}\Sigma_i\Sigma_j X_{ij}$ $\;(avec\; N = nk)$ la moyenne totale

$\bar{X}_i = \frac{1}{n}\Sigma_j X_{ij}$ la moyenne du facteur i

La dispersion totale notée **SCT** (somme des carrés totaux) se décompose donc en deux parties :

- Celle imputable aux facteurs (ici les opérateurs) que l'on notera **SCF** dite aussi **somme des carrés inter-classe**.
- Celle imputable aux résidus **SCR**, **somme des carrés intra-classes**.

$$\begin{array}{ccccc} \sum_{i,j}(X_{ij}-\bar{X})^2 & = & \sum_{i,j}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2 & + & \sum_{i,j}(\bar{X}_i-\bar{X})^2 \\ SCT & = & SCR & + & SCF \\ dispersion\ totale & = & somme\ des\ carrés\ intra-classes & + & somme\ des\ carrés\ inter-classes \end{array}$$

2ème Etape Calcul des variances factorielles et résiduelles

-Variance résiduelle : $CMR = \sigma_r^2 = \frac{SCR}{N-k}$ ($N-k$ est le nombre de ddl)

-Variance Factorielle : $CMF = \frac{SCF}{k-1}$ (ici $k-1$ ddl)

Pour pouvoir comparer ces deux sommes nous les avons divisées par leurs degrés de liberté respectifs (intuitivement les degrés de liberté indiquent la quantité d'informations indépendantes entrant dans une estimation)

3ème Etape Test statistique

On détermine si la Variance Factorielle est significativement supérieure à la Variance résiduelle

On pose : $F_{k-1,N-k} = \frac{\frac{SCF}{k-1}}{\frac{SCR}{N-k}}$ Si F est supérieure à la valeur seuil théorique selon la distribution de Fisher, avec un risque de 5%, alors le test sera significatif, donc la variabilité factorielle est significativement supérieure de la variabilité résiduelle et on conclut que les facteurs sont différents.

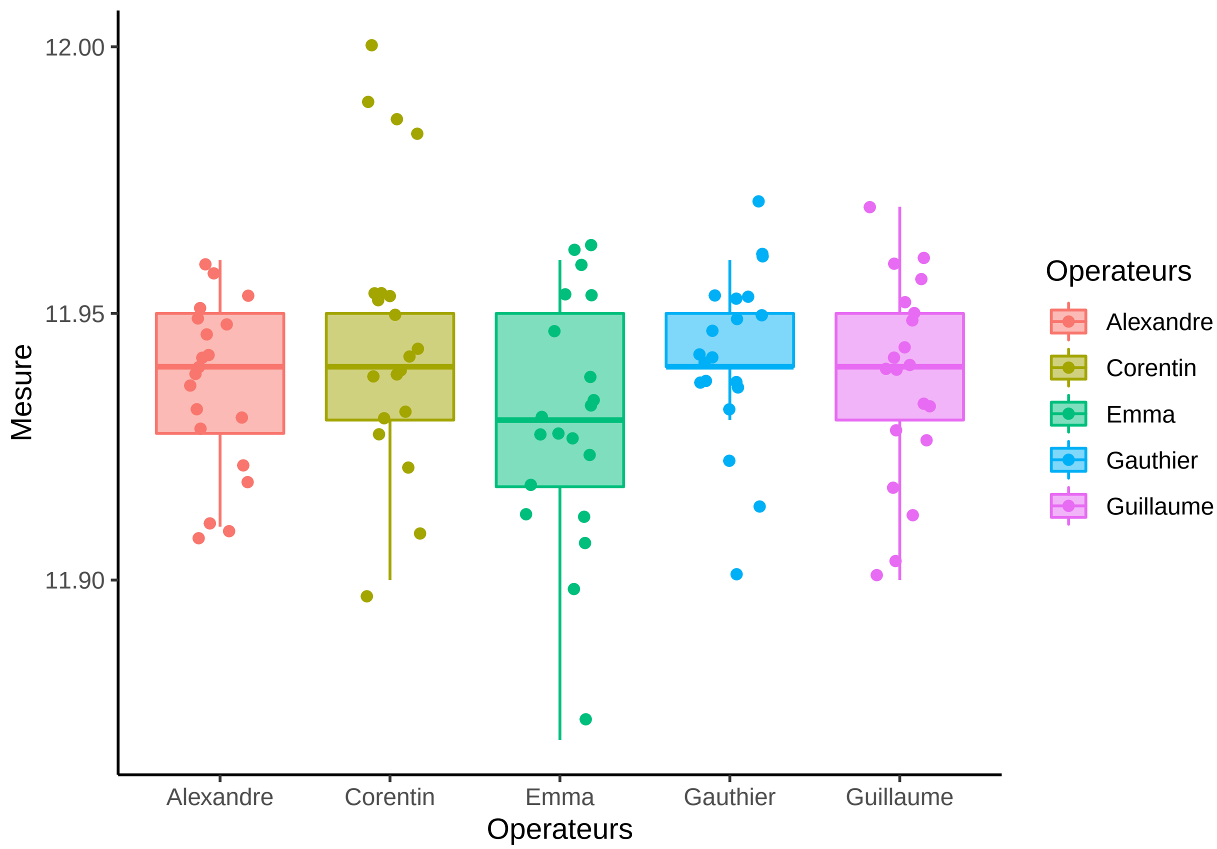
Revenons à nos étudiants et Chargeons les données : (ils ont mesuré les 20 mêmes pièces avec le même instrument de mesure)

```
donnees<-read.csv("https://sjaubert.github.io/SPCR/ANOVA_TP_R.csv",sep = ";",dec = ",",header = T)
donnees<-transform(donnees,Operateurs=as.factor(Operateurs))

Mesure=donnees$Mesure
Operateurs=donnees$Operateurs
```

En premier lieu, il est toujours utile de représenter les données pour se faire une première idée.

```r
library(ggplot2)
ggplot(donnees, aes(y=Mesure, x=Operateurs,colour=Operateurs ,fill=Operateurs))+
geom_boxplot(alpha=0.5, outlier.alpha=0)+
geom_jitter(width=0.2)+
theme_classic()
```



A commenter…

Avant d'effectuer une ANOVA nous allons effectuer deux tests, Cochran puis Grubbs afin de voir s'il n'y a pas de valeurs abbérantes (voir ici http://www.demarcheiso17025.com/fiche017.html)

Commançons par vérifier à l'aide du test de Cochran si les variances sont homogènes ou si la variance la plus élevée est significativement différente des autres

```r
library("outliers")
cochran.test(Mesure~Operateurs)
```

```
##
##  Cochran test for outlying variance
##
## data:  Mesure ~ Operateurs
## C = 0.32447, df = 20, k = 5, p-value = 0.1212
## alternative hypothesis: Group Corentin has outlying variance
## sample estimates:
##    Alexandre     Corentin         Emma     Gauthier    Guillaume
## 0.0002555263 0.0006871053 0.0005207895 0.0002765789 0.0003776316
```

Au regard de la p-value nous pouvons considérer qu'il n'y a pas de variance aberrante

Utilisons à présent le test de Grubbs pour rechercher une éventuelle moyenne aberrante :

```
(Moyennes<-tapply(Mesure,Operateurs,mean))
```

```
## Alexandre  Corentin      Emma  Gauthier Guillaume
##   11.9365   11.9465   11.9295   11.9415   11.9375
```

```
grubbs.test(Moyennes)
```

```
##
##  Grubbs test for one outlier
##
## data:  Moyennes
## G.Emma = 1.39665, U = 0.39043, p-value = 0.2978
## alternative hypothesis: lowest value 11.9295 is an outlier
```

Au regard de la p-value nous pouvons considérer qu'il n'y a pas de moyenne aberrante

On peut donc conserver toutes les données.

Mettons ces résultats en parallèle avec une ANOVA :

```
res<-aov(Mesure ~ Operateurs)
res
```

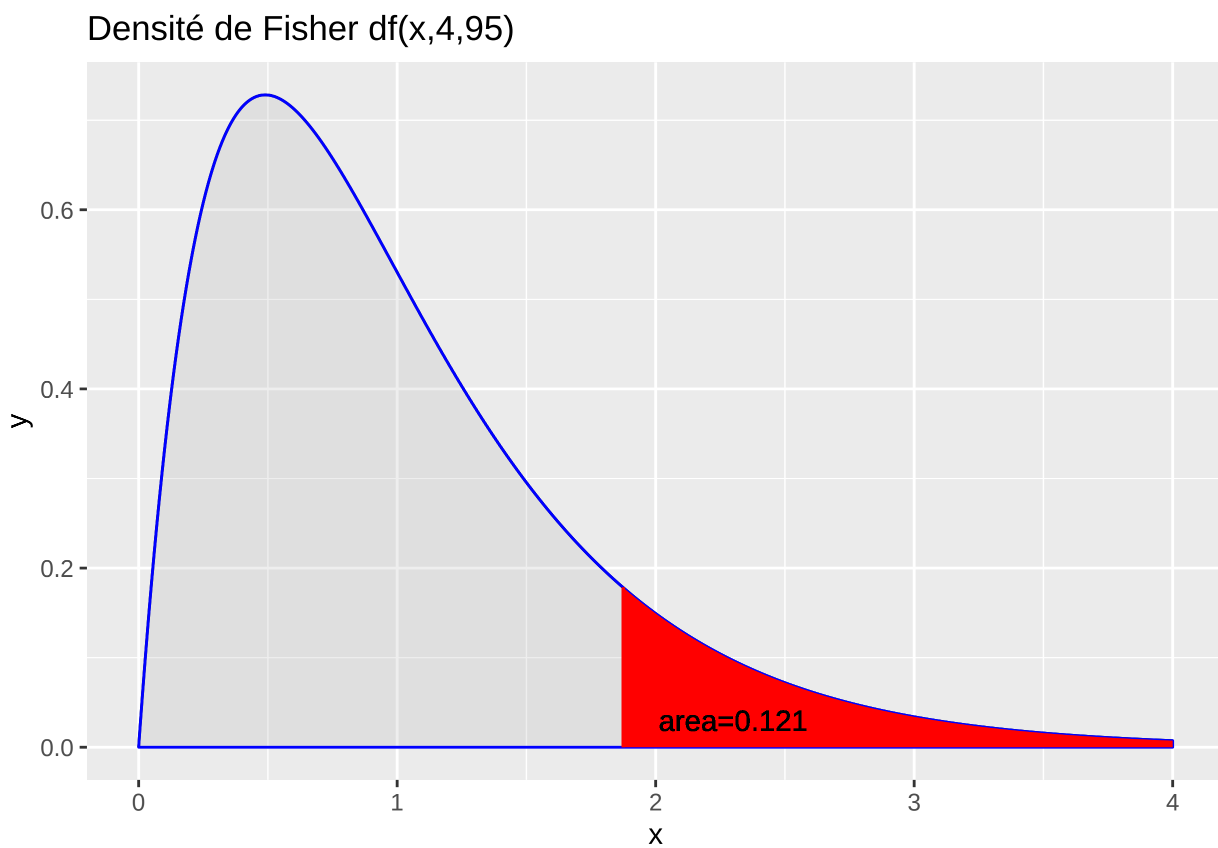
```
## Call:
##    aov(formula = Mesure ~ Operateurs)
##
## Terms:
##                  Operateurs Residuals
## Sum of Squares    0.003176  0.040235
## Deg. of Freedom          4        95
##
## Residual standard error: 0.02057975
## Estimated effects may be unbalanced
```

```
summary(res)
```

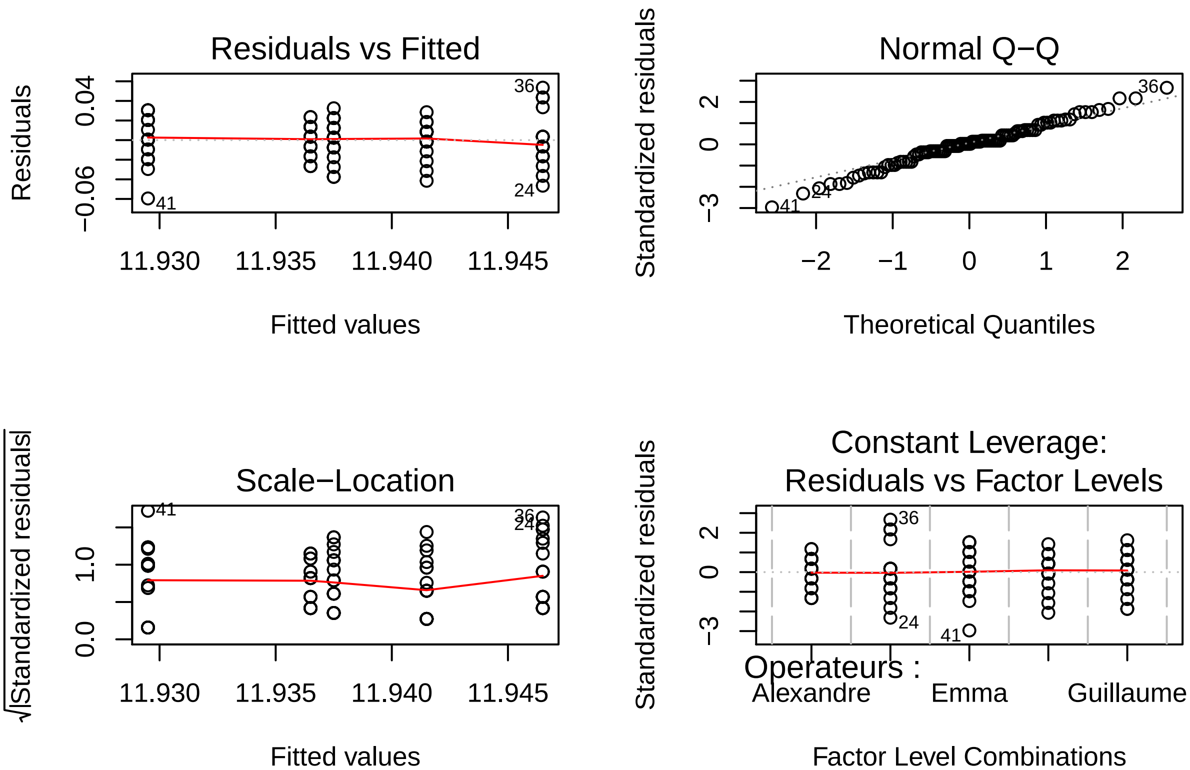
```
##             Df  Sum Sq   Mean Sq F value Pr(>F)
## Operateurs   4 0.00318 0.0007940   1.875  0.121
## Residuals   95 0.04024 0.0004235
```

Nous reconnaissons le $SCR = 0.04024$ avec 95 ddl et le $SCF = 0.00318$ avec 4 ddl

On a bien $F = \frac{\frac{SCF}{4}}{\frac{SCR}{95}} = 1.875$ la probabilité d'obtenir une valeur de F au moins aussi élevée, $P_r(F > 1.875) = 0.121$, est la p-value, ici elle est supérieure à 5%. On peut donc conclure qu'il n'y a pas de différence significative entre les opérateurs (une faible probabilité signifierait que nos données sont peu probable sous H_0)




```
par(mfrow=c(2,2)) # permet de séparer la fenêtre graphique en 4 parties (2 lignes, et 2 colonnes)
plot(res)
```



- Le premier graphe nous montre que la valeur des résidus ne semble pas dépendre de l'opérateur
- Le deuxième graphe (quantile-quantile) nous montre que les résidus suivent bien une loi normale
- Le troisième graphe nous montre que les variances des différents groupes sont globalement identiques
- Dans le quatrième graphe nous ne voyons aucune preuve de valeurs aberrantes.

Pour approfondir, quelques justifications :

Nous gardons les même notations que précédemment.

Cherchons un estimateur de la variance de répétabilité

$$X_{ij} \quad = \quad \mu \quad + \quad \underset{\textit{Effet de l'opérateur } i}{\underset{\uparrow}{\alpha_i}} \quad + \quad \underset{\textit{Résidu de l'opérateur } i \textit{ sur la jème mesure}}{\underset{\uparrow}{\epsilon_{ij}}}$$

où $\epsilon_{ij} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;\sigma_r)$ avec σ_r *l'écart type de répétabilité* et $\alpha_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0;\sigma_o)$ avec σ_o *l'écart type du facteur opérateur*

On obtient :

$V(X_{ij}) = \sigma_o^2 + \sigma_r^2 = \sigma_R^2$

$SCR = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \epsilon_{ij}^2$ soit :

$\frac{SCR}{\sigma_r^2} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (\frac{\epsilon_{ij}}{\sigma_r})^2$ mais on sait que

$\sum_{j=1}^{n} (\frac{\epsilon_{ij}}{\sigma_r})^2$ suit la loi du χ^2 à $n-1$ ddl alors $\frac{SCR}{\sigma_r^2} \hookrightarrow \chi^2(k(n-1))$ d'où

$\mathbb{E}(\frac{SCR}{\sigma_r^2}) = nk - k = N - k \Leftrightarrow \mathbb{E}(\frac{SCR}{N-k}) = \sigma_r^2$

$\frac{SCR}{N-k}$ est un estimateur sans biais de σ_r^2

Cherchons à présent un estimateur de la variance de reproductibilité

On a vu que :

$SCF = \sum_{i,j}(\bar{X}_i - \bar{X})^2 = n\sum_{i=1}^{k}(\bar{X}_i - \bar{X})^2$ et $\bar{X}_i = \frac{1}{n}\Sigma_j X_{ij} = \frac{1}{n}\Sigma_j(\mu + \alpha_i + \epsilon_{ij})$

$\bar{X}_i = \mu + \alpha_i + \frac{1}{n}\Sigma_j \epsilon_{ij}$

$V(\bar{X}_i) = V(\alpha_i) + \frac{1}{n^2}\Sigma_j V(\epsilon_{ij})$

$V(\bar{X}_i) = \sigma_o^2 + \frac{1}{n}\sigma_r^2$ d'où

$\frac{SCF}{V(\bar{X}_i)} = n\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\bar{X}_i - \bar{X}}{\sqrt{V(\bar{X}_i)}}\right)^2$

$\mathbb{E}(\frac{SCF}{V(\bar{X}_i)}) = n(k-1) \Leftrightarrow \mathbb{E}(SCF) = n(k-1)V(\bar{X}_i)$

Soit : $\mathbb{E}(\frac{SCF}{k-1}) = nV(\bar{X}_i) = n(\sigma_o^2 + \frac{1}{n}\sigma_r^2) = n\sigma_o^2 + \sigma_r^2$

Si on pose $CMF = \frac{SCF}{k-1}$ et $CMR = \frac{SCR}{N-k}$

Et ainsi on calcule la statistique de Fisher $F_{k-1,N-k} = \frac{\frac{SCF}{k-1}}{\frac{SCR}{N-k}}$

Remarques :

on a :

$\mathbb{E}(\frac{CMF-CMR}{n}) = \sigma_o^2$ et comme $\sigma_R^2 = \sigma_o^2 + \sigma_r^2$

$\mathbb{E}(\frac{CMF-CMR}{n}) + CMR = \sigma_R^2$

On calcule ainsi le $\sigma_{R\&R}$

$$\sigma_{R\&R}^2 = \sigma_R^2 + \sigma_r^2$$

(ça sera le sujet d'une autre étude…)