Bachelor regression Linéaire

S. Jaubert

14 mars , 2020

Rappel sur le modèle linéaire simple

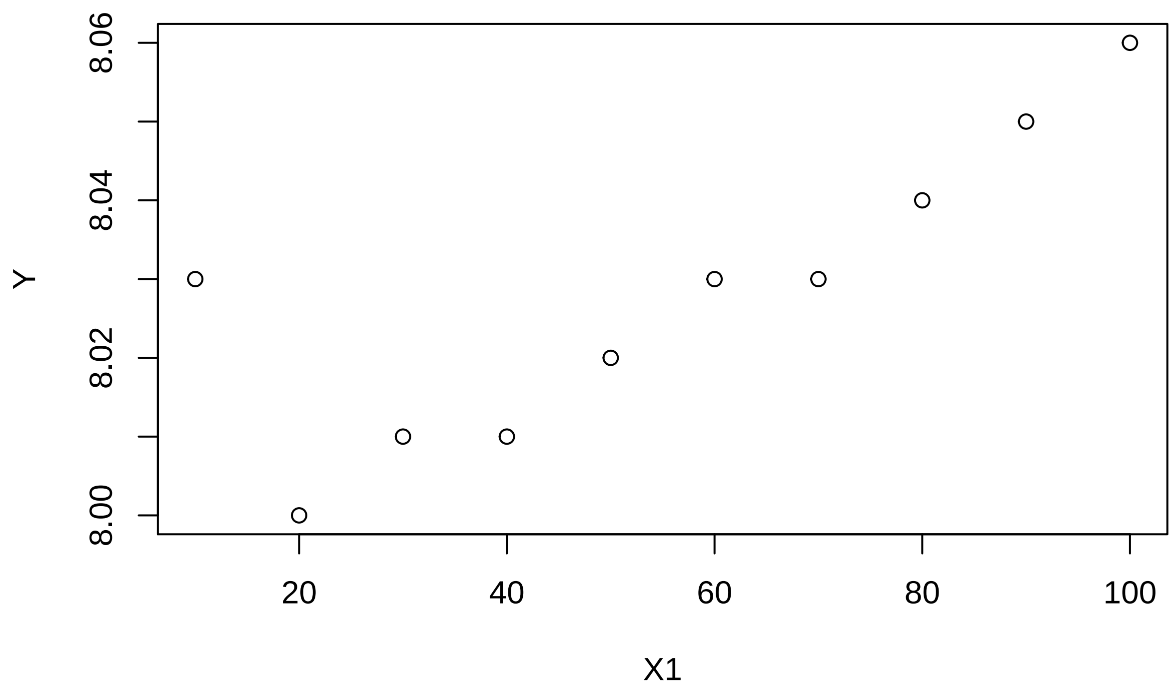
la régression linéaire simple est une méthode statistique classique, qui est employée pour évaluer la significativité du lien linéaire entre deux variables numériques continues.

Exemple : Une machine produit automatiquement des pièces cylindriques. Réglée initialement pour un diamètre de 8 mm, elle se dérègle en cours d'utilisation. Afin de contrôler la fabrication et de procéder aux réglages éventuellement nécessaires, on mesure le diamètre de la dernière pièce dans chaque série de dix pièces produites. Les résultats sont les suivants :

Numéro de la pièce : x_i	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Diamètre (mm) de la pièce : y_i	8,03	8,00	8,01	8,01	8,02	8,03	8,03	8,04	8,05	8,06

“

```r
X1<-seq(10,100,10)
Y<-c(8.03,8,8.01,8.01,8.02,8.03,8.03,8.04,8.05,8.06)
plot(x = X1,y = Y)
```



Nous cherchons un modèle linéaire $Y_i = aX1_i + b + \epsilon_i$ où chaque ϵ_i est un terme résiduel aléatoire suivant la loi normale $N(0, \sigma^2)$ (on dit que les ϵ_i sont des variables iid) a et b sont des paramètres inconnus.

L'idée est de minimiser (méthode des moindres carrés) la quantité :

$\epsilon_i^2 = (Y_i - (aX1_i + b))^2$ avec $Y = (Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ et $X1 = (X1_1, X1_2, ..., X1_n)$

Où Y et X1 sont les vecteurs de nos données observées

Le plus simple est de construire un système matriciel :

```
(X<-matrix(cbind(rep(1,length(X1)),X1),ncol=2) )
```

```
##       [,1] [,2]
##  [1,]    1   10
##  [2,]    1   20
##  [3,]    1   30
##  [4,]    1   40
##  [5,]    1   50
##  [6,]    1   60
##  [7,]    1   70
##  [8,]    1   80
##  [9,]    1   90
## [10,]    1  100
```

```
(Y<-matrix(Y,ncol=1))
```

```
##       [,1]
```

```
##  [1,] 8.03
##  [2,] 8.00
##  [3,] 8.01
##  [4,] 8.01
##  [5,] 8.02
##  [6,] 8.03
##  [7,] 8.03
##  [8,] 8.04
##  [9,] 8.05
## [10,] 8.06
```

On peut alors écrire :

$Y = X\beta + epsilon$ où β est la matrice (2,1) : $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ On a :

$\epsilon = Y - X\beta$ et on démontre que l'estimateur de β est :

$\beta = (X'X)^{-1}X'Y$ (X' représente la transposée de X)

Soit en faisant les calculs avec **R** :

```
(beta<-solve(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%Y)
```

```
##              [,1]
## [1,] 8.0000000000
## [2,] 0.0005090909
```

Nous pouvons calculer à présent le vecteur $\hat{Y}$ prédit par notre modèle :

```
Y_hat<-X%*%beta
```

puis la somme des carrés des résidus :

```
 (Scres<-sum((Y-Y_hat)^{2}))
```

```
## [1] 0.001021818
```

Nous verrons plus loin que **l'estimateur sans biais de σ^2 est donné par** $CMres = \frac{Scres}{n-p}$ (ici n=10 et p=2, n-p est le nombre de ddl associé à Scres)

```
n<-10 #nombre de lignes de la matrice X
p<-2  #    "    " colonnes "   "    "    X
```

Soit :

```
(CMres<-Scres/(n-p))
```

```
## [1] 0.0001277273
```

La somme des carrés expliqués par la régression :

```r
(Screg<-sum((Y_hat-mean(Y))^{2}))
```

```
## [1] 0.002138182
```

```r
CMreg<-Screg/(p-1)
```

Retrouvons avec **R** les valeurs critiques permettant la prise de décision (Test de Fisher) :

```r
(Fobs<-CMreg/CMres)
```

```
## [1] 16.74021
```

```r
(Fth<-qf(p = 1-0.05,df1 = p-1,df2 = n-p))
```

```
## [1] 5.317655
```

```r
pf(Fobs,df1 = p-1,df2 = n-p,lower.tail = F)
```

```
## [1] 0.003478466
```

F_{obs} est bien supérieur au F_{th}, on rejette donc l'hypothèse nulle $H_0 : \beta_1 = 0$

Pour rappel (voir cours sur l'ANOVA) :

$$\begin{array}{ccccc} \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 & = & \sum_i (Y_i - \hat{Y}_i)^2 & + & \sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \\ SCT & = & SCres & + & SCreg \end{array}$$

La capacité du modèle à expliquer les variations de Y est donné par le fameux $R^2 = \frac{Screg}{Screg+Scres}$ **(c'est le pourcentage de Y qui est expliqué par la régression)**

Soit ici :

```r
(R2<-Screg/(Screg+Scres))
```

```
## [1] 0.6766398
```

Sous **R** il est très facile d'obtenir tous ces résultats très simplement avec l'instruction *lm* :

```r
(model<-lm(Y~X1))
```

```
##
## Call:
## lm(formula = Y ~ X1)
##
## Coefficients:
## (Intercept)           X1
##   8.0000000    0.0005091
```

Les coefficients de notre modèle sont donnés avec :

```r
coefficients(model)
```

```
##  (Intercept)           X1
## 8.0000000000 0.0005090909
```

le vecteur $\hat{Y}$ prédit par notre modèle sera donné par :

```r
fitted.values(model)
```

```
##        1        2        3        4        5        6        7        8
## 8.005091 8.010182 8.015273 8.020364 8.025455 8.030545 8.035636 8.040727
##        9       10
## 8.045818 8.050909
```

et la SCres est obtenue très simplement par :

```r
sum(residuals(model)^2)
```

```
## [1] 0.001021818
```

Que l'on retrouve aussi par une ANOVA classique :

```r
anova(model)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: Y
##           Df    Sum Sq    Mean Sq F value   Pr(>F)
## X1         1 0.0021382 0.00213818   16.74 0.003478 **
## Residuals  8 0.0010218 0.00012773
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Donnons un peu plus d'explications sur les résultats fournis par le *summary(model)* :

```r
summary(model)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = Y ~ X1)
##
## Residuals:
##       Min        1Q    Median        3Q       Max
## -0.010364 -0.005591 -0.003000  0.003000  0.024909
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 8.0000000  0.0077205 1036.203  < 2e-16 ***
## X1          0.0005091  0.0001244    4.091  0.00348 **
## ---
```

```
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.0113 on 8 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.6766, Adjusted R-squared:  0.6362
## F-statistic: 16.74 on 1 and 8 DF,  p-value: 0.003478
```

Ligne *(Intercept)* : nous avons le premier coefficient de notre modèle :8.00000 puis son écart-type 0.0077205 et enfin la t value pour le test de Student de nullité des coefficients, donnée par $8/0.0077205 = 1036.203$. Ici la probabilité que le hasard puisse expliquer cette valeur est très faible 2e-16, on rejette donc l'hypothèse de nullité de ce coefficient

Ligne *X1* : Nous avons le coefficient directeur de notre modèle : 0.0005091, son écart-type et la t-value, comme précédemment on rejettera donc l'hypothèse de nullité de ce coefficient

Les codes '***' '**' '*' nous donne le risque α de 1ère espèce de rejeter l'hypothèse de nullité des coefficients.

Residual standard error : est l'écart-type résiduel $\sigma_X = \sqrt{CMres}$

```
CMres<-Scres/(n-p)
sqrt(CMres)
```

```
## [1] 0.01130165
```

Multiple R-squared : est le fameux $R^2 = \frac{Screg}{Screg+Scres}$ que nous avions déjà calculé plus haut par :

```
(R2<-Screg/(Screg+Scres))
```

```
## [1] 0.6766398
```

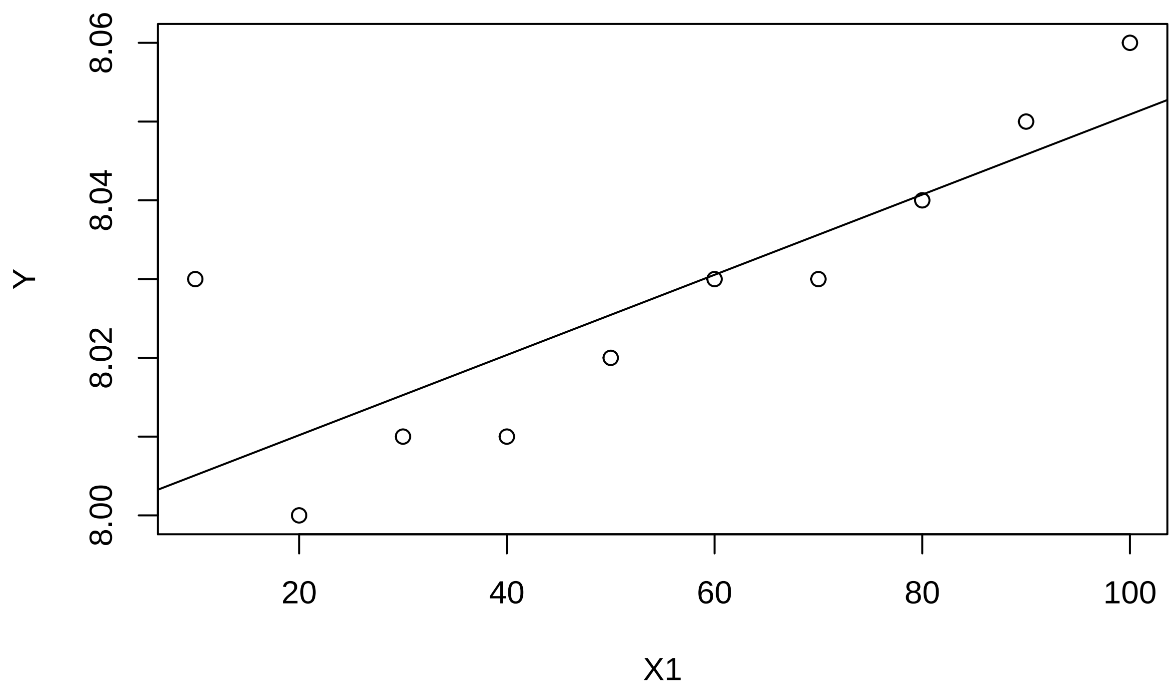
F-statistic : Nous donne la F-value du test de Fisher de significativité de notre modèle. Que nous avions obtenu aussi par une ANOVA ou par :

```
(Fobs<-CMreg/CMres)
```

```
## [1] 16.74021
```

Traçons à présent la droite prédite par le modèle :

```
plot(x = X1,y = Y,type="p")
abline(model)
```



Cas du modèle multiple linéaire

Un exemple : En fonction des paramètres de coupe : V (vitesse de coupe m/min), f (avance mm/rev), D (profondeur de coupe mm) nous obtenons une rugosité Ra (µm) et des vibrations radiales Ve (mm/s)

Pouvons nous modéliser par une régression linéaire la réponse Ra ou Ve en fonction de V, f et D ?

Commençons par entrer les données

```
setwd("D:/OneDrive - CFAI Centre/Bachelor/Regression-Analysis-with-R-master") #à adapter
donnee<-read.csv2("rugo_vib.csv")
donnee
```

```
##       D   V    f   Ra   Ve
## 1  0.15 140 0.08 0.87 0.20
## 2  0.15 140 0.16 1.37 0.21
## 3  0.15 140 0.22 1.98 0.24
## 4  0.15 210 0.08 1.24 0.37
## 5  0.15 210 0.16 1.29 0.41
## 6  0.15 210 0.22 1.82 0.50
## 7  0.15 280 0.08 1.03 0.50
## 8  0.15 280 0.16 1.18 0.52
## 9  0.15 280 0.22 1.87 0.55
## 10 0.33 140 0.08 0.93 0.20
## 11 0.33 140 0.16 1.58 0.24
```

```
## 12 0.33 140 0.22 2.04 0.25
## 13 0.33 210 0.08 1.43 0.47
## 14 0.33 210 0.16 1.75 0.48
## 15 0.33 210 0.22 2.21 0.54
## 16 0.33 280 0.08 1.24 0.55
## 17 0.33 280 0.16 1.43 0.55
## 18 0.33 280 0.22 2.15 0.57
## 19 0.50 140 0.08 1.15 0.33
## 20 0.50 140 0.16 1.66 0.55
## 21 0.50 140 0.22 2.47 0.69
## 22 0.50 210 0.08 1.09 0.48
## 23 0.50 210 0.16 1.57 0.58
## 24 0.50 210 0.22 2.44 0.70
## 25 0.50 280 0.08 0.98 0.47
## 26 0.50 280 0.16 1.45 0.53
## 27 0.50 280 0.22 2.27 0.57
```

Construisons les matrices de notre modèle linéaire

```
attach(donnee)
(X<-matrix(cbind(rep(1,27),D,V,f),ncol = 4))
```

```
##       [,1] [,2] [,3] [,4]
##  [1,]    1 0.15  140 0.08
##  [2,]    1 0.15  140 0.16
##  [3,]    1 0.15  140 0.22
##  [4,]    1 0.15  210 0.08
##  [5,]    1 0.15  210 0.16
##  [6,]    1 0.15  210 0.22
##  [7,]    1 0.15  280 0.08
##  [8,]    1 0.15  280 0.16
##  [9,]    1 0.15  280 0.22
## [10,]    1 0.33  140 0.08
## [11,]    1 0.33  140 0.16
## [12,]    1 0.33  140 0.22
## [13,]    1 0.33  210 0.08
## [14,]    1 0.33  210 0.16
## [15,]    1 0.33  210 0.22
## [16,]    1 0.33  280 0.08
## [17,]    1 0.33  280 0.16
## [18,]    1 0.33  280 0.22
## [19,]    1 0.50  140 0.08
## [20,]    1 0.50  140 0.16
## [21,]    1 0.50  140 0.22
## [22,]    1 0.50  210 0.08
## [23,]    1 0.50  210 0.16
## [24,]    1 0.50  210 0.22
## [25,]    1 0.50  280 0.08
## [26,]    1 0.50  280 0.16
## [27,]    1 0.50  280 0.22
```

```r
(Y<-matrix(Ra,ncol=1))
```

```
##       [,1]
##  [1,] 0.87
##  [2,] 1.37
##  [3,] 1.98
##  [4,] 1.24
##  [5,] 1.29
##  [6,] 1.82
##  [7,] 1.03
##  [8,] 1.18
##  [9,] 1.87
## [10,] 0.93
## [11,] 1.58
## [12,] 2.04
## [13,] 1.43
## [14,] 1.75
## [15,] 2.21
## [16,] 1.24
## [17,] 1.43
## [18,] 2.15
## [19,] 1.15
## [20,] 1.66
## [21,] 2.47
## [22,] 1.09
## [23,] 1.57
## [24,] 2.44
## [25,] 0.98
## [26,] 1.45
## [27,] 2.27
```

Nous cherchons donc à estimer le vecteur a tel que :

$$Y = aX + \epsilon$$

(X matrice à n=27 lignes et p+1=4 colonnes)

$$y_i = a_0 + a_1 x_{i,1} + a_2 x_{i,2} + ... + a_p x_{i,p} + \epsilon_i$$

les hypothèses sont :

- Les X sont observés sans erreur
- $E(\epsilon) = 0$ en moyenne le modèle est bien spécifié
- $\sigma_\epsilon^2 = E(\epsilon^2) - E(\epsilon)^2 = E(\epsilon^2)$ la variance de l'erreur est constante
- $\epsilon \hookrightarrow N(0, \sigma_\epsilon)$

On rappelle, comme pour le cas simple, que l'idée est de minimiser $\|\epsilon\|^2 = \epsilon'\epsilon = (Y - aX)'(Y - aX)$ (méthode des moindres carrés)

et on trouve de façon classique un estimateur de a par :

$$\hat{a} = (X'X)^{-1}X'Y$$

```
(a<-solve(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%Y)
```

```
##              [,1]
## [1,]  0.2873671985
## [2,]  0.7766291863
## [3,] -0.0003571429
## [4,]  7.2237237237
```

Biais de $\hat{a}$

$$\hat{a} = (X'X)^{-1}X'Y$$
$$\hat{a} = (X'X)^{-1}X'(Xa + \epsilon)$$
$$\hat{a} = a + (X'X)^{-1}X'\epsilon$$

Or comme X est non aléatoire

$$E(\hat{a}) = a$$

donc $\hat{a}$ est sans biais

Matrice de variance covariance de $\hat{a}$

$\hat{a} - a = (X'X)^{-1}X'\epsilon$ alors

$\Omega_{\hat{a}} = E((\hat{a} - a)(\hat{a} - a)') = (X'X)^{-1}X'E(\epsilon\epsilon')X(X'X)^{-1}$

et comme $E(\epsilon_i\epsilon_j) = 0 \;\; i \neq j$

On a : $\Omega_{\hat{a}} = \sigma_\epsilon^2(X'X)^{-1}$

Faisons les calculs :

$Y - aX = \epsilon$

```
Y_hat<-X%*%a
(SCres<-sum((Y-Y_hat)^2))
```

```
## [1] 0.8950231
```

$\sigma_\epsilon^2 = Scres/(27 - 4) = Cmres$

```
(Cmres<-SCres/24)
```

```
## [1] 0.03729263
```

et on obtient la matrice de covariance :

```
(Omega<-round(Cmres*(solve(t(X)%*%X)),3))
```

```
##        [,1]   [,2] [,3]   [,4]
## [1,]  0.037 -0.022    0 -0.064
## [2,] -0.022  0.068    0  0.000
## [3,]  0.000  0.000    0  0.000
## [4,] -0.064  0.000    0  0.420
```

Les écart-types des estimateurs de $\hat{a}$ sont donnés par les racines carrées des éléments diagonaux :

```
(sqrt(diag(Omega)))
```

```
## [1] 0.1923538 0.2607681 0.0000000 0.6480741
```

Calculons pour terminer, le pourcentage de variation de la rugosité expliquée par D, V et f :

Pour cela nous avons besoin du $SCreg = \sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$

```
(SCreg<-sum((Y_hat-mean(Y))^2))
```

```
## [1] 4.977606
```

$R^2 = \frac{SCreg}{SCreg+SCres}$

```
SCreg/(SCreg+SCres)
```

```
## [1] 0.8475941
```

Calcul direct avec R

```
modele<-lm(Ra~D+V+f)
```

```
summary(modele)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = Ra ~ D + V + f)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.28148 -0.14061 -0.05358  0.13689  0.38345
##
## Coefficients:
##               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  0.2873672  0.1968052   1.460  0.15777
## D            0.7766292  0.2656561   2.923  0.00764 **
## V           -0.0003571  0.0006642  -0.538  0.59596
## f            7.2237237  0.6619828  10.912 1.44e-10 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.1973 on 23 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.8476, Adjusted R-squared:  0.8277
## F-statistic: 42.64 on 3 and 23 DF,  p-value: 1.473e-09
```

Terminons par une ANOVA

```r
anova(modele)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: Ra
##           Df Sum Sq Mean Sq  F value    Pr(>F)
## D          1 0.3326  0.3326   8.5465  0.007643 **
## V          1 0.0112  0.0112   0.2891  0.595963
## f          1 4.6338  4.6338 119.0772 1.436e-10 ***
## Residuals 23 0.8950  0.0389
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Nous pouvons remarquer que la variable V a très peu d'influence pour notre modèle (qu'en pense les spécialistes ?!)

Refaire la même étude pour cette fois rechercher un modèle de régression de Ve en fonction de V, f et D

TP

L'entreprise CITRON fabrique un matériau en matière plastique qui est utilisé dans la fabrication de jouets. Le département de contrôle qualité de l'entreprise a effectué une étude qui a pour but d'établir dans quelle mesure la résistance à la rupture (en kg/cm2) de cette matière plastique pouvait être affectée par l'épaisseur du matériau ainsi que la densité de ce matériau. Douze essais ont été effectués et les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Essai numéro	Résistance à la rupture Y_i	Épaisseur du matériau X_{i_1}	Densité X_{i_2}
1	$37,8$	4	$4,0$
2	$22,5$	4	$3,6$
3	$17,1$	3	$3,1$
4	$10,8$	2	$3,2$
5	$7,2$	1	$3,0$
6	$42,3$	6	$3,8$
7	$30,2$	4	$3,8$
8	$19,4$	4	$2,9$
9	$14,8$	1	$3,8$
10	$9,5$	1	$2,8$
11	$32,4$	3	$3,4$
12	$21,6$	4	$2,8$

```r
Y<-c(37.8,22.5,17.1,10.8,7.2,42.3,30.2,19.4,14.8,9.5,32.4,21.6)
X1<-c(4,4,3,2,1,6,4,4,1,1,3,4)
X2<-c(4.0,3.6,3.1,3.2,3.0,3.8,3.8,2.9,3.8,2.8,3.4,2.8)
```

effectuer les analyses suivantes avec **R** et retrouver les résultats dans les tableaux.

Régression de la résistance à la rupture Y en fonction de l'épaisseur X_1

Coefficients $\widehat{\beta}_j$	Erreurs-types $s(\widehat{\beta}_j)$
$\widehat{\beta}_0 = 3,523$	
$\widehat{\beta}_1 = 6,036$	$s(\widehat{\beta}_1) = 1,279$

Source de variation	Somme des carrés	*ddl*
Régression X_1	980, 64	1
Résiduelle	440, 03	10

1.

Régression de la résistance à la rupture Y en fonction de la densité X_2

Coefficients $\widehat{\beta}_j$	Erreurs-types $s(\widehat{\beta}_j)$
$\widehat{\beta}_0 = -36,373$	
$\widehat{\beta}_2 = 17,464$	$s(\widehat{\beta}_2) = 6,069$

Source de variation	Somme des carrés	*ddl*
Régression X_2	643, 57	1
Résiduelle	777, 10	10

2.

Régression de la résistance à la rupture Y en fonction de l'épaisseur X_1 et de la densité X_2

Coefficients $\widehat{\beta}_j$	Erreurs-types $s(\widehat{\beta}_j)$
$\widehat{\beta}_0 = -30,081$	
$\widehat{\beta}_1 = 4,905$	$s(\widehat{\beta}_1) = 1,014$
$\widehat{\beta}_2 = 11,072$	$s(\widehat{\beta}_2) = 3,621$

Source de variation	Somme des carrés	*ddl*
Régression (X_1, X_2)	1204, 86	2
Résiduelle	215, 81	9

3.

4. Quel pourcentage de variation dans la résistance à la rupture est expliqué Pour chacune de ces régressions ?

5. Entre l'épaisseur du matériau et la densité qu'est-ce qui a le plus d'influence sur la résistance à la rupture ?

Corrigé (sans explication ! ce qui n'a aucun intérêt... A vous d'interpréter les résultats !!)

```
model<-lm(formula = Y~X1)
summary(model)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = Y ~ X1)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -8.266 -4.887 -1.208  3.232 10.770
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)    3.523      4.383   0.804 0.440237
## X1             6.036      1.279   4.721 0.000816 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
```

```
## Residual standard error: 6.633 on 10 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.6903, Adjusted R-squared:  0.6593
## F-statistic: 22.29 on 1 and 10 DF,  p-value: 0.0008155
```

```r
anova(model)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: Y
##           Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
## X1         1 980.63  980.63  22.285 0.0008155 ***
## Residuals 10 440.03   44.00
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```r
model<-lm(formula = Y~X2)
summary(model)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = Y ~ X2)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -15.1923  -5.1780  -0.2298   6.1123  12.3077
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  -36.373     20.489  -1.775   0.1062
## X2            17.464      6.069   2.878   0.0164 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 8.815 on 10 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.453,  Adjusted R-squared:  0.3983
## F-statistic: 8.282 on 1 and 10 DF,  p-value: 0.01645
```

```r
anova(model)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: Y
##           Df Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
## X2         1 643.57  643.57  8.2816 0.01645 *
## Residuals 10 777.10   77.71
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```r
model<-lm(formula = Y~X1+X2)
summary(model)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = Y ~ X1 + X2)
##
## Residuals:
##    Min     1Q Median     3Q    Max
## -6.897 -2.135 -1.126  1.714 10.122
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  -30.081     11.455  -2.626 0.027542 *
## X1             4.905      1.014   4.838 0.000923 ***
## X2            11.072      3.621   3.058 0.013617 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 4.897 on 9 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.8481, Adjusted R-squared:  0.8143
## F-statistic: 25.12 on 2 and 9 DF,  p-value: 0.0002075
```

```r
anova(model)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: Y
##           Df Sum Sq Mean Sq F value   Pr(>F)
## X1         1 980.63  980.63 40.8959 0.000126 ***
## X2         1 224.22  224.22  9.3509 0.013617 *
## Residuals  9 215.81   23.98
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```