# Wektory

12 kwietnia 2012

## 1 Trójkąt

### 1.1 Okrąg opisany na trójkącie

**Promień** $R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{abc}{4P}$

**Trójkąt równoboczny** $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

**Trójkąt prostokątny** Trójkąt oparty na średnicy jest prostokątny.

**Środek** Środek okręgu opisanego znajdujemy na przecięciu symetralnych boków trójkąta.

### 1.2 Okrąg wpisany w trójkąt

**Promień** $r = \frac{2P}{a+b=c}$

**Trójkąt równoboczny** $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

**Trójkąt prostokątny** $r = \frac{b+a-c}{2}$

**Trójkąt równoramienny** Podstawa – $a$, ramiona – $b$, $r = \frac{ab-\frac{1}{2}a^2}{2\sqrt{\left(b^2-\frac{1}{4}a^2\right)}}$

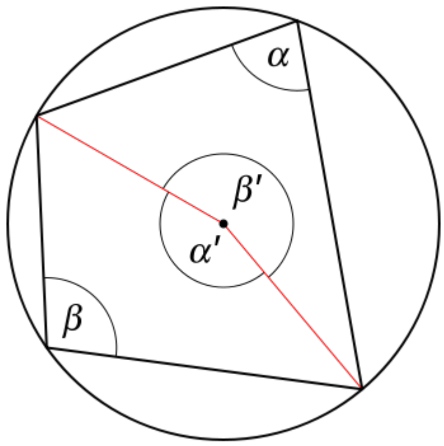
**Środek** Środek okręgu wpisanego znajdujemy na przecięciu dwusiecznych kątów trójkąta.

## 2 Czworokąt

### 2.1 Okrąg opisany na czworokącie

**Środek** Środek okręgu opisanego znajdujemy na przecięciu symetralnych boków.

### 2.1.1 Warunek konieczny do opisania okręgu




**Twierdzenie** Okrąg można opisać na czworokącie wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów czworokąta równe są $\pi$.

**Dowód** $\Rightarrow$ Z twierdzenia o miarach kątów wpisanych i środkowych opartych na tym samym łuku miara kąta $\alpha' = 2\alpha$, a kąta $\beta' = 2\beta$. Jednocześnie $\alpha' + \beta' = 2\pi$. Zatem $\alpha + \beta = \pi$.

**Dowód** $\Leftarrow$ Rozważmy sobie dwa przypadki, gdy czworokąta nie da się wpisać w okrąg.

**Wierzchołek wystaje poza okrąg** Wtedy z twierdzenia o kątach wpisanych i środkowych opartych na tym samym łuku dostajemy, że

$$\angle ADC \leqslant \pi - 2\angle ABC$$

, a zatem

$$\angle ADC + \angle ABC < \pi$$

.

**Wierzchołek jest wewnątrz okręgu**

## 2.2 Okrąg wpisany w czworokąt

Okrąg styczny do każdego z boków wielokąta.

**Twierdzenie** Okrąg można wpisać w czworokąt wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków są sobie równe.

**Dowód** Z „*najmocniejszego twierdzenia geometrii*” dostajemy taki rysunek, zaiste $a + b + c + d = a + b + c + d$.