Zadanie domowe

Stanisław Chmiela

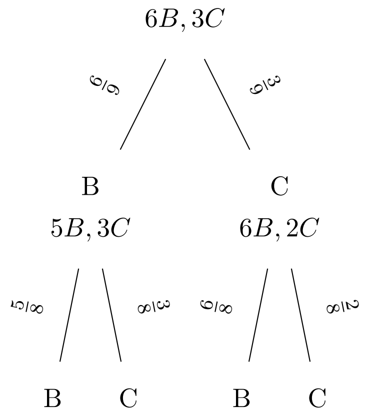
7 grudnia 2012

Zadanie 7.18

$\Omega = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_1, \ldots, a_n \in \{1, \ldots, n\}\}$
$\bar{\Omega} = n!$
$A_1 = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \Omega : a_1 = 1\}$
$A_2 = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \Omega : a_2 = 2\}$
$A_{1,2} = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \Omega : a_1 = 1 \wedge a_2 = 2\}$
$\bar{A}_1 = \bar{A}_2 = (n-1)!$
$\bar{A}_{1,2} = (n-2)!$
B – listy 1 i 2 nie trafiły do swoich adresatów.
$\bar{B} = \bar{\Omega} - \bar{A}_1 - \bar{A}_2 + \bar{A}_{1,2} = n! - 2 \cdot (n-1)! + (n-2)! = (n-2)!(n(n-1) - 2 \cdot (n-1) + 1) = (n-2)!(n^2 - n - 2n + 2 + 1) = (n-2)!(n^2 - 3n + 3)$
$P(B) = \frac{\bar{B}}{\bar{\Omega}} = \frac{(n-2)!(n^2-3n+3)}{n!} = \mathbf{\frac{n^2-3n+3}{n(n-1)}}$

Zadanie 7.19

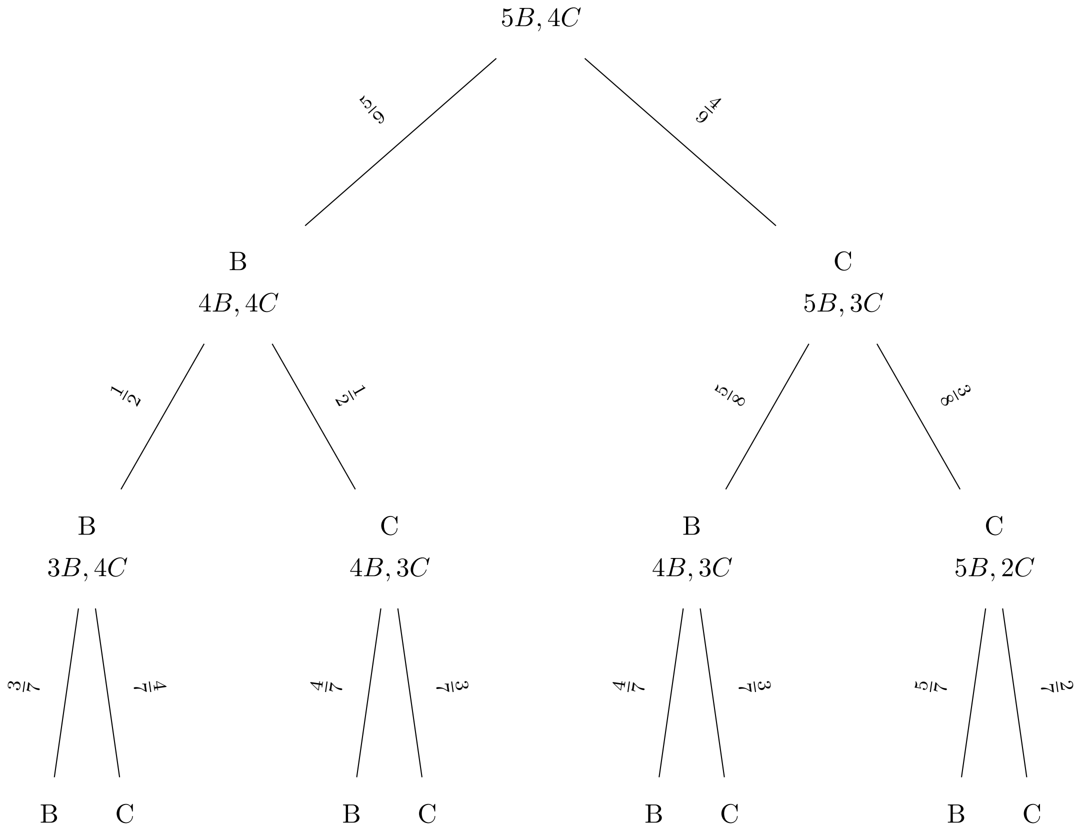
Przeanalizujmy to zadanie za pomocą drzewka stochastycznego:



Podpunkt a) Prawdopodobieństwo wyciągnięcia dwóch kul białych równe jest $P(B) = \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = \mathbf{\frac{25}{36}}$.
Podpunkt b) Prawdopodobieństwo wyciągnięcia dwóch kul czarnych równe jest $P(C) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \mathbf{\frac{1}{12}}$.

Zadanie 8.3

Przeanalizujmy to zadanie za pomocą drzewka stochastycznego:



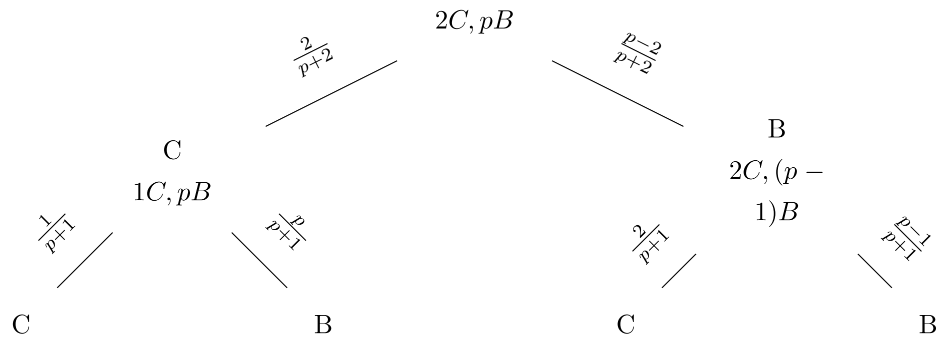
W pierwszym losowaniu odkładamy jedną kulę. Następnie losujemy dwie kule na raz, czyli losujemy dwie kule kolejno, bez zwracania.

Podpunkt a) Prawdopodobieństwo wyciągnięcia dwóch kul białych za drugim razem równe jest $P(B) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2}\frac{5}{9} + \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{9} = \frac{5}{42} + \frac{10}{63} = \mathbf{\frac{5}{18}}$.

Podpunkt b) Prawdopodobieństwo wyciągnięcia dwóch kul różnokolorowych za drugim razem równe jest $P(D) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2}\frac{5}{9} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} + \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{9} + \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9} = \mathbf{\frac{5}{9}}$.

Zadanie 8.6

Przeanalizujmy to zadanie za pomocą drzewka stochastycznego. Najpierw sprawdźmy z jakimi prawdopodobieństwami jakie dwie kule wylosujemy z urny U_1.



Losując dwie kule z urny U_1 możemy otrzymać z różnymi prawdopodobieństwami 3 kombinacje kul:

1. CC: $\frac{2}{p+2} \cdot \frac{1}{p+1} = \frac{2}{(p+1)(p+2)}$
2. BC: $\frac{2}{p+2} \cdot \frac{p}{p+1} + \frac{p-2}{p+2} \cdot \frac{2}{p+1} = \frac{4p-4}{(p+1)(p+2)}$
3. BB: $\frac{p-2}{p+2} \cdot \frac{p-1}{p+1} = \frac{(p-1)(p-2)}{(p+1)(p+2)}$

Zatem mamy 3 możliwe zestawy liczb kul w urnie U_2 po przełożeniu wylosowanych z U_1. Policzmy dla tych układów prawdopodobieństwo wylosowania spośród nich kuli białej:

1. $5B, 5C : \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
2. $6B, 4C : \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
3. $7B, 10C : \frac{7}{10}$

Pamiętajmy jednak, że te prawdopodobieństwa należy pomnożyć przez prawdopodbieństwa wypadnięcia takich układów. Zatem, wiedząc, że suma prawdopodobieństw musi być większa od 0.6, rozwiążmy nierówność:

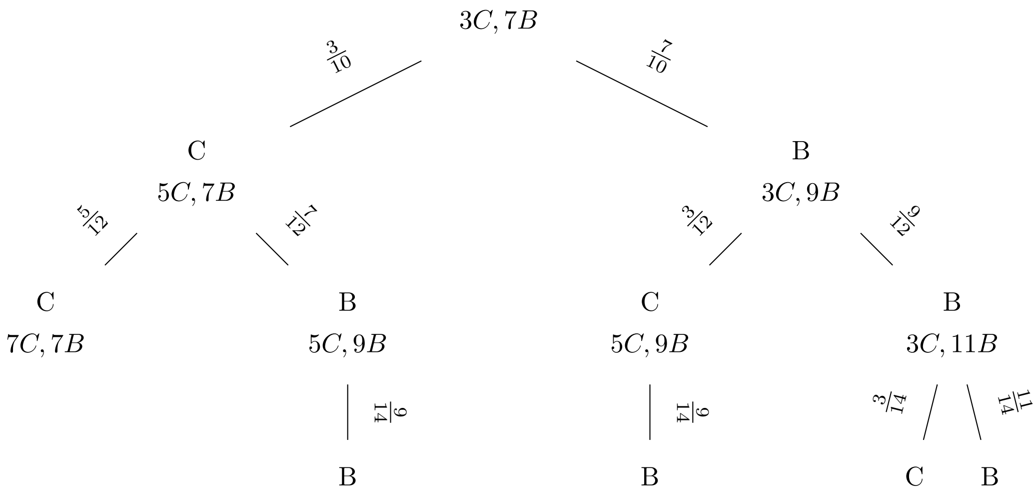
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(p+1)(p+2)} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4p-4}{(p+1)(p+2)} + \frac{7}{10} \cdot \frac{(p-1)(p-2)}{(p+1)(p+2)} &> \frac{6}{10} \\
\frac{10}{(p+1)(p+2)} + \frac{6(4p-4)}{(p+1)(p+2)} + \frac{7(p-1)(p-2)}{(p+1)(p+2)} &> 6 \\
10 + 24p - 24 + 7p^2 - 21p + 14 &> 6p^2 + 18p + 18 \\
7p^2 + 3p &> 6p^2 + 18p + 18 \\
p^2 - 15p - 18 &> 0
\end{aligned}$$

Z otrzymanej nierówności kwadratowej otrzymujemy: $p > \frac{3}{2}(5 + \sqrt{33})$ lub $p < \frac{3}{2}(5 - \sqrt{33})$. Przyrównajmy to do najbliższych liczb całkowitych: $p > 17 > \frac{3}{2}(5 + \sqrt{33})$ lub $p < -2 < \frac{3}{2}(5 - \sqrt{33})$.

Zatem p musi być równe przynajmniej 17, by prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli z urny U_2 było większe od 0.6.

Zadanie 8.8

Przeanalizujmy to zadanie za pomocą drzewka stochastycznego, ograniczając je tylko do wierzchołków, przez które może przechodzić ścieżka, przechodząca przez 2 białe wierzchołki.



Zliczmy prawdopodobieństwa dwukrotnego wylosowania białej kuli.

$$P(A) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{9}{14} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{9}{14} + \frac{7}{10} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{3}{14} = \mathbf{\frac{27}{80}}$$