Zadania różne

Stanisław Chmiela

19 lutego 2013

Zadanie 5

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} \mathbf{\frac{27}{2x-y} + \frac{32}{x+3y} = 7} \\ \mathbf{\frac{45}{2x-y} - \frac{48}{x+3y} = -1} \end{cases}$

Kompletnie nie wiem co zrobić. Przepraszam. Przykro mi. Kajam się.

Zadanie 6

Znajdź wszystkie liczby pierwsze m, dla których zdanie: „Równanie $|\mathbf{x-2}| = ||\mathbf{m+1}| - \mathbf{4}| + \mathbf{1}$ ma dwa rozwiązania różnych znaków” jest nieprawdziwe.

To jedziemy z tym koksem. Rozpatrzmy przypadki. -.-

$\mathbf{x \geqslant 2}$

$$x - 2 = ||m+1| - 4| + 1$$
$$x - 3 = ||m+1| - 4|$$

$\mathbf{|m+1| \geqslant 4}$

$$x - 3 = |m+1| - 4$$
$$x + 1 = |m+1|$$

$\mathbf{m \geqslant -1}$

$x = m$

Czyli jedno rozwiażanie, czyli zdanie jest nieprawdziwe, zapamiętajmy ten moment jako A.

$\mathbf{m < -1}$

Nawet najmniejsze dzieci wiedzą, że nie ma liczb pierwszych < -1.

$\mathbf{|m+1| < 4}$

$$3 - x = |m+1| - 4$$
$$7 - x = |m+1|$$

$\mathbf{m \geqslant -1}$

$x = 6 - m$

Czyli jedno rozwiązanie, czyli zdanie jest nieprawdziwe, zapamiętajmy ten moment jako B.

$\mathbf{m < -1}$

Nawet najmniejsze dzieci wiedzą, że nie ma liczb pierwszych < -1.

$\mathbf{x < 2}$

$$2 - x = ||m+1| - 4| + 1$$
$$1 - x = ||m+1| - 4|$$

$\mathbf{|m+1| \geqslant 4}$

$$1 - x = |m+1| - 4$$
$$5 - x = |m+1|$$

$\mathbf{m \geqslant -1}$

$5 - x = m + 1$

$x = 4 - m$

Czyli jedno rozwiażanie, czyli zdanie jest nieprawdziwe, zapamiętajmy ten moment jako C.

$\mathbf{m < -1}$

Nawet najmniejsze dzieci wiedzą, że nie ma liczb pierwszych < -1.

$\mathbf{|m+1| < 4}$

$$x - 1 = |m+1| - 4$$
$$x + 3 = |m+1|$$

$\mathbf{m \geqslant -1}$

$x + 1 = m + 1$

$x = m$

Czyli jedno rozwiażanie, czyli zdanie jest nieprawdziwe, zapamiętajmy ten moment jako D.

$\mathbf{m < -1}$

Nawet najmniejsze dzieci wiedzą, że nie ma liczb pierwszych < -1.

Mamy te cztery momenty: A, B, C, D, nie? Dla każdego policzmy jakie liczby pierwsze m nam odpowiadają:

A) $m \geqslant 2 \wedge |m+1| \geqslant 4 \wedge m \geqslant -1 \Rightarrow m \geqslant 3$

B) $6 - m \geqslant 2 \wedge |m+1| < 4 \wedge m \geqslant -1 \Rightarrow -1 < m \leqslant 4$

C) $4 - m < 2 \wedge |m+1| \geqslant 4 \wedge m \geqslant -1 \Rightarrow m > 2$

D) $m < 2 \wedge \ldots$ Już wiadomo, że nie będzie takich m, bo nie ma liczb pierwszych mniejszych od 2.

Zatem praktycznie wychodzi, że dla każdej liczby pierwszej to jest spełnione. Dlatego to zadanie jest dziwne i fuj.

Zadanie 7

Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ spełniających równanie $\mathbf{xy + 5x + 2y + 3 = 0}$.

Pierwsze kroki są dość oczywiste:

$$xy + 2y = -5x - 3$$

$$y(x+2) = -5x - 3$$

$$y = \frac{-5x-3}{x+2}$$

Tutaj uwaga! Podzieliliśmy przez $x + 2$. Nie wolno nam tego robić tak se o, chyba że sprawdzimy co się dzieje dla $x = -2$. Wtedy równanie wygląda tak:

$$-2y - 10 + 2y + 3 = 0$$

$$7 = 0$$

Nieprawda, zatem dla $x = -2$ równanie nie jest spełnione.

Pojawia się teraz problem, jak znaleźć te pierońskie pary liczb całkowitych. Jedyną metodą jaka mi przychodzi do głowy to wpisanie w wolframalpha.com i obczajenie co wypluje. Ale chce mi się spać i nie wiem. :(

Kuba mówi, że można narysować i powiedzieć jakie wartości wchodzą w grę, ale to jest gówniany sposób według mnie, bo nie wiemy czy gdzieś dalej (w obszarach nieobjętych rysunkiem) nie ma jakichś par punktów w liczbach całkowitych.

Albo inaczej, ale to jest tak napałowo, że aż wstyd. Rysujemy sobie dość szeroki rysunek, a potem sprawdzamy skończoną liczbę punktów, które ewentualnie wchodzą w grę (raz do iksa dobieramy igreka, raz do igreka iksa).

Zadanie 8

Udowodnij, że liczba postaci $n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n$, gdzie n jest liczbą parzystą dodatnią większą od 4, jest podzielna przez 384.

No to ten, n będzie postaci $2k$, gdzie k jest dowolną liczbą naturalną większą od 2. Wtedy tamta liczba wygląda tak: $16k^4 - 32k^3 - 16k^2 + 16k = 16k(k^3 - 2k^2 - k + 2)$.

Czyli musimy udowodnić, że $k(k^3 - 2k^2 - k + 2)$ jest podzielne przez 24 dla każdego k większego od 2. Spróbujmy to zrobić indukcyjnie.

Krok 1 – sprawdzenie dla $k = 3$ $3(3^3 - 2 \cdot 3^2 - 3 + 2) = 24$, co ewidentnie jest podzielne przez 24.

Krok 2 – indukcja Czy $24 | k(k^3 - 2k^2 - k + 2) \Longrightarrow 24 | (k+1)\big((k+1)^3 - 2(k+1)^2 - k + 1\big)$.

$$(k+1)\big((k+1)^3 - 2(k+1)^2 - k + 1\big) = k(k^3 + 2k^2 - k - 2)$$

Nieeeee wiem, nie dziaaaałaaaaaa, nie umiieeeeeeeem... :(

Zadanie 5

Tak naprawdę to wiem co z tym zrobić. Chyba.

$$\begin{cases} \frac{27}{2x-y} + \frac{32}{x+3y} = 7 \\ \frac{45}{2x-y} - \frac{48}{x+3y} = -1 \end{cases}$$

Pamiętamy, że wyłączamy z dziedziny wszystkie takie proste: $y = 2x, y = -\frac{1}{3}x$.

$$\begin{cases} 27(x+3y) + 32(2x-y) = 7(2x-y)(x+3y) \\ 45(x+3y) - 48(2x-y) = -(2x-y)(x+3y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -14x^2 - 35xy + 91x + 21y^2 + 49y = 0 \\ 2x^2 + 5xy - 51x - 3y^2 + 183y = 0 \end{cases}$$

Magiczny trick! Pomnóżmy drugie równanie przez -7!

$$\begin{cases} -14x^2 - 35xy + 91x + 21y^2 + 49y = 0 \\ 14x^2 + 35xy - 357x - 21y^2 + 1281y = 0 \end{cases}$$

Teraz zsumujmy równania! W końcu coś pięknie siądzie!

$$x(91 - 357) + y(49 + 1281) = 0$$

$$y = \frac{1}{5}x$$

Podstawmy y do któregokolwiek równania z układu.

$$2x^2 + 5xy - 51x - 3y^2 + 183y = 0$$

$$2x^2 + x^2 - 51x - \frac{3}{25}x^2 + \frac{183}{5}x = 0$$

$$\frac{72}{25}(x-5)x = 0$$

Zatem rozwiązaniami układu równań mogłyby być punkty $(0,0)$ i $(5,1)$. Jednak musimy sprawdzić, czy są oba w dziedzinie. Dlatego testujemy je na naszych prostych wyłączonych z dziedziny: $y = 2x, y = -\frac{1}{3}x$. Punkt $(0,0)$ spełnia minimum jeden z tych warunków, zatem odrzucamy go. Natomiast $(5,1)$ pasuje! I on jest rozwiązaniem.