Matura: zestaw zamknięty XII

Stanisław Chmiela

11 grudnia 2012

Zadanie 1

Odpowiedź A: NIE
Kontrprzykład: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \left|\sin\frac{\pi}{2}\right| = 2 \notin \langle 0, 1\rangle$

Odpowiedź B: TAK
Gdy cosinus jest dodatni $g(x) = 2\cos x = 2|\cos x|$, której to funkcji zbiorem wartości jest zbiór $\langle 0, 2\rangle$. Gdy cosinus jest ujemny, $g(x) = 0$. Zatem zbiorem wartości złożenia tych dwóch funkcji jest zbiór $\langle 0, 2\rangle$.

Odpowiedź C: NIE
Kontrprzykład: $f(\pi) = 3 \cdot \cos\pi - 2 = -3 - 2 = -5 \notin \langle -2, 1\rangle$.

Odpowiedź D: TAK
Sinus ma zbiór wartości $\langle -1, 1\rangle$. Pomnożony przez 2: $\langle -2, 2\rangle$. Po odjęciu jedynki otrzymujemy wynikowy $\langle -3, 1\rangle$.

Zadanie 2

Odpowiedź A: NIE
Ze wzorów redukcyjnych: $\cos 100° = \cos(90° + 10°) = -\sin 10° \neq \sin 10°$

Odpowiedź B: TAK
Ze wzorów redukcyjnych: $\sin 100° = \sin(90° + 10°) = \cos 10°$

Odpowiedź C: TAK
$\cos^2 45° = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} = \sin 30°$

Odpowiedź D: TAK
$\sin(120°) = 2\sin 60°\cos 60° = 2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60°$

Zadanie 3

Odpowiedź A: TAK
Sinus i cosinus równają się w $\alpha = 45°$, wcześniej sinus jest mniejszy od cosinusa.

Odpowiedź B: NIE
Blisko kąta 90° sinus równa się 1, a cosinus 0.

Odpowiedź C: TAK
Ze wzorów redukcyjnych wiemy, że $\sin(180° - 20°) = \sin 20°$.

Odpowiedź D: NIE
Ze wzorów redukcyjnych wiemy, że $\cos(180° - 20°) = -\cos 20° \neq \cos 20°$

Zadanie 4

Odpowiedź A: NIE
Sinus i cosinus nigdy nie przyjmują razem wartości 1, a jest to konieczne, by suma ich była równa 2.

Odpowiedź B: NIE
Suma sinusa i cosinusa przyjmuje największą wartość dla $x = 45°$, to jest $\sqrt{2}$. $\sqrt{3} > \sqrt{2}$, zatem nie ma takich x, które spełniałyby to równanie.

Odpowiedź C: TAK
Dla $x = 45°$: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

Odpowiedź D: TAK
Dla $x = 90°$: $\sin x + \cos x = 1$

Zadanie 5

$\log_{\sin x}\cos x = 1 \Rightarrow \sin x = \cos x$ W przedziale $(0, 2\pi)$ rozwiązania są dwa: $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$, zatem prawidłową odpowiedzią jest **odpowiedź C**.

Zadanie 6

$f(x) = 5\sin^2 x - 3\cos^2 x = 5(1-\cos^2 x) - 3\cos^2 x = 5 - 8\cos^2 x$

Odpowiedź A: NIE

Przykład: $f(\frac{\pi}{2}) = 5$.

Odpowiedź B: TAK

To widać.

Odpowiedź C: TAK

To też widać.

Odpowiedź D: TAK

Funkcja jest ciągła, przyjmuje wartości ujemne oraz dodatnie, na podstawie twierdzenia Bezout'a ma miejsca zerowe.

Zadanie 7

$\log \operatorname{tg} 1^\circ + \ldots + \log \operatorname{tg} 89^\circ =$
$\log(\operatorname{tg} 1^\circ + \ldots + \operatorname{tg} 89^\circ) =$
$\log(\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 44^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - 44^\circ) \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - 1^\circ)) =$
$\log(\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{ctg} 1^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 45^\circ) =$
$\log(\operatorname{tg} 45^\circ) =$
$\log 1 = 0$

Odpowiedź A: TAK

Odpowiedź B: TAK

Odpowiedź C: NIE

Odpowiedź D: NIE

Zadanie 8

Odpowiedź A: NIE

Ze wzorów redukcyjnych: $\sin(-x) = -\sin x \neq \sin x$

Odpowiedź B: TAK

Ze wzorów redukcyjnych: $\sin(\pi - x) = \sin x$

Odpowiedź C: NIE

Ze wzorów redukcyjnych: $\sin(\pi + x) = -\sin x \neq \sin x$

Odpowiedź D: TAK

Ze wzorów redukcyjnych: $\sin(2\pi + x) = \sin x$

Zadanie 9

Odpowiedź A: NIE

$\operatorname{tg}(-\frac{2011}{4}\pi) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}) = 1$

Odpowiedź B: TAK

$\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4}) = -1$

Odpowiedź C: NIE

$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}) = 1$

Odpowiedź D: TAK

$\operatorname{tg}(\frac{2011}{4}\pi) = \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4}) = -1$

Zadanie 10

Odpowiedź A: TAK

Dla $k = 1$.

Odpowiedź B: NIE

Badając parametrem k wykres funkcji $y = \sin 2x$ na przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ nie ma takiego k, dla którego równanie miałoby 3 rozwiązania jednocześnie.

Odpowiedź C: TAK

Dla $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Odpowiedź D: TAK

Dla $k = 0$.

Zadanie 11

Odpowiedź A: TAK

$\sin x \cos x < 0 \Leftrightarrow 2\sin x \cos x < 0 \Leftrightarrow \sin 2x < 0$.

Odpowiedź B: TAK

$\sin x \cos x < 0 \Leftrightarrow (\sin x < 0 \wedge \cos x > 0) \vee (\sin x > 0 \wedge \cos x < 0) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} < 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x < 0$.

Odpowiedź C: NIE

Dla $x = \frac{3\pi}{4}$: $\sin x \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2} < 0$, a jednocześnie $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$.

Odpowiedź D: NIE

Dla $x = -\frac{\pi}{4}$: $\sin x \cos x = (-\frac{1}{\sqrt{2}}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} < 0$, a jednocześnie $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$.

Zadanie 12

Odpowiedź A: NIE

$\sin(\frac{2009}{6}\pi) = \sin(167 \cdot 2\pi + \frac{5}{6}\pi) = \sin\frac{5}{6}\pi = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Odpowiedź B: TAK

$\sin(\frac{2009}{4}\pi) = \sin(251 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{2}$.

Odpowiedź C: NIE

$\sin(\frac{2009}{3}\pi) = \sin(334 \cdot 2\pi + \frac{5}{3}\pi) + \sin(2\pi - \frac{1}{3}\pi) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{2}$.

Odpowiedź D: TAK

$\sin(\frac{2009}{2}\pi) = \sin(1004 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 > \frac{1}{2}$.

Zadanie 13

$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = 3 \Leftrightarrow$

$\sin x + \cos x = 3\sin x - 3\cos x \Leftrightarrow$

$2\sin x - 4\cos x = 0 \Leftrightarrow$

$\sin x = 2\cos x \Leftrightarrow$

$\operatorname{tg} x = 2$

Odpowiedź A: TAK

Odpowiedź B: TAK

Odpowiedź C: TAK

Odpowiedź D: NIE

Zadanie 14

Odpowiedź A: NIE

$\sin 2011^\circ = \sin(5 \cdot 360^\circ + 211^\circ) = \sin 211^\circ$

Odpowiedź B: NIE

$\cos 2011^\circ = \cos(5 \cdot 360^\circ + 211^\circ) = \cos 211^\circ$

Odpowiedź C: TAK

$\operatorname{tg} 2011^\circ = \operatorname{tg}(11 \cdot 180^\circ + 31^\circ) = \operatorname{tg} 31^\circ$

Odpowiedź D: TAK

$\operatorname{ctg} 2011^\circ = \operatorname{ctg}(11 \cdot 180^\circ + 31^\circ) = \operatorname{ctg} 31^\circ$

Zadanie 15

Odpowiedź A: TAK

$\sin x = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1$, a to jest spełnione dla $\left\{x : x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Odpowiedź B: TAK

Z odpowiedzi A.

Odpowiedź C: NIE

$\cos 2x = 0 \Leftrightarrow$

$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\left\{x : x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Dla $x = -\frac{\pi}{4}$: $\cos 2x = 0 \wedge x \notin \mathbb{D}$.

Odpowiedź D: NIE

Dla $k = 0$: $\sin 2x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Zadanie 16

Odpowiedź A: TAK

Ze wzorów redukcyjnych wiemy, że $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, zatem $\cos\left(\frac{3}{4}\pi - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Odpowiedź B: NIE

Cosinus jest parzysty, zatem $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Odpowiedź C: NIE

Ze wzorów redukcyjnych wiemy, że $\sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\pi + x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Odpowiedź D: TAK

Ze wzorów redukcyjnych wiemy, że $\sin\left(\frac{5}{4}\pi - x\right) = \sin\left(\pi - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Zadanie 17

$\cos 200^\circ = m = \cos(180^\circ + 20^\circ) = -\cos 20^\circ \Leftrightarrow \cos 20^\circ = -m$

Z jedynki trygonometrycznej: $\sin 200^\circ = \sqrt{1-m^2}$

Ze wzorów redukcyjnych wiemy, że: $\sin(180^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ$

Zatem $\sin 20^\circ = -\sqrt{1-m^2}$.

$\sin 40^\circ = 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ = 2 \cdot (-\sqrt{1-m^2}) \cdot (-m) = -2m\sqrt{1-m^2}$.

Odpowiedź A: TAK

Odpowiedź B: NIE

Odpowiedź C: NIE

Odpowiedź D: NIE

Zadanie 18

Odpowiedź A: TAK

Tangens jest rosnący na przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Kąty $\frac{2}{7}\pi$ oraz $\frac{3}{7}\pi$ mieszczą się w tym przedziale, i jednocześnie $\frac{2}{7}\pi < \frac{3}{7}\pi$.

Odpowiedź B: TAK

Tangens jest rosnący na przedziale $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, oba kąty mieszczą się w tym przedziale, przy czym $\frac{4}{7}\pi < \frac{5}{7}\pi$.

Odpowiedź C: TAK

Ze wzorów redukcyjnych wiemy, że $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$, zatem $\operatorname{tg}\frac{4}{7}\pi = -\operatorname{tg}\frac{3}{7}\pi$. Wiemy, że w przedziale $\langle \frac{\pi}{7}, \frac{3}{7}\pi \rangle$ tangens jest rosnący, zatem $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7} < -\operatorname{tg}\frac{4}{7}\pi$, zatem suma ich jest mniejsza od 0.

Odpowiedź D: TAK

Ze wzorów redukcyjnych wiemy, że $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$, zatem $\operatorname{tg}\frac{5}{7}\pi = -\operatorname{tg}\frac{2}{7}\pi$. Zatem $\operatorname{tg}\frac{2}{7}\pi + \operatorname{tg}\frac{5}{7}\pi = 0 \leqslant 0$.

Zadanie 19

Odpowiedź A: TAK

Z wykresu.

Odpowiedź B: TAK

Z wykresu.

Odpowiedź C: NIE

Na podstawie odpowiedzi A.

Odpowiedź D: NIE

Na podstawie odpowiedzi B.

Zadanie 20

Odpowiedź A: TAK

Z wykresu.

Odpowiedź B: TAK

Z wykresu.

Odpowiedź C: NIE

Z wykresu.

Odpowiedź D: NIE

Z wykresu.