Matura: zestaw otwarty XIV

Stanisław Chmiela

12 grudnia 2012

Zadanie 1

Rozpiszmy sobie wyrażenie, a następnie skorzystajmy ze wzorów redukcyjnych.
$(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\beta-\cos\beta)=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta-(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=\cos(\alpha-\beta)-(\sin(\alpha+\beta))=0.3-0.8=-\mathbf{\frac{1}{2}}$.

Zadanie 2

Podpunkt a) $\sin 2x=\sin x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x=\sin x$. Mamy dwa przypadki:

1. $\sin x = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x=0\lor x=\pi\lor x=2\pi}$
2. $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathbf{x=\frac{\pi}{3}\lor x=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}}$

Podpunkt b) $\sin 2x>\sin x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x>\sin x$. Jeśli $\sin x=0$, nierówność nie jest spełniona. W przeciwnym wypadku $\cos x>\frac{1}{2}\Leftrightarrow \mathbf{x\in\langle 0,\frac{\pi}{3})\cup(\frac{5\pi}{3},2\pi\rangle}$.

Zadanie 3

Na przedziale $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ tangens jest różnowartościowy, zatem równanie sprowadza się do $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-x\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}$.
Skorzystajmy jednak jeszcze ze wzoru redukcyjnego $\operatorname{tg}(\pi+x)=\operatorname{tg}x$. Wtedy $\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{3})=\operatorname{tg}(x+\frac{4\pi}{3})$. Sprawdźmy zatem kiedy $x+\frac{4\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-x\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{3}=-\frac{5\pi}{6}$.
W tym przypadku $x=-\frac{5\pi}{12}$.
Zatem $\mathbf{x=\left\{-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{12}\right\}}$.

Zadanie 4

$f(x)=\cos^2x-\sin x=1-\sin^2x-\sin x=-\sin^2x-\sin x+1$. Funkcja jest funkcją kwadratową.
Podstawmy $t:=\sin x$.
$f(t)=-t^2-t+1$. Wierzchołek funkcji kwadratowej leży w punkcie $(\frac{-b}{2a},\frac{\Delta}{4a})=(-\frac{1}{2},\frac{5}{4})$. Zatem największą wartość funkcja przyjmuje dla $t=0,\mathbf{m=f(0)=1}$, a najmniejszą dla $t=-\frac{1}{2},\mathbf{M=f(-\frac{1}{2})=\frac{5}{4}}$.

Zadanie 5

Aby nierówność była spełniona:

1. $\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\geqslant 0\Leftrightarrow\cos x\geqslant\cos\frac{\pi}{4}$ lub
2. $\cos x=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}\lor x=\frac{\pi}{2}$.

Rozwiązaniem pierwszej nierówności jest przedział $x\in\langle-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\rangle$. Łącząc te przedziały, rozwiązaniami nierówności jest zbiór liczb $\mathbf{x:x\in\left\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\}\cup\langle-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\rangle}$.

Zadanie 6

$\operatorname{tg}x=4\Rightarrow\frac{\sin x}{\cos x}=4\Rightarrow\sin x=4\cos x\Rightarrow\sin x=4\sqrt{1-\sin^2x}\Rightarrow\sin^2x=16-16\sin^2x\Rightarrow\sin^2x=\frac{16}{17}$.
Ze wzorów trygonometrycznych wiemy, że $\cos 2x=1-2\sin^2x=1-\frac{2\cdot16}{17}=\frac{17-2\cdot16}{17}=\mathbf{-\frac{15}{17}}$.

Zadanie 7

$\operatorname{tg} 110^\circ \cdot \operatorname{tg} 200^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ + 20^\circ) \cdot \operatorname{tg}(180^\circ + 20^\circ) = -\operatorname{ctg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ = -1$. Równanie zatem po przekształceniach wygląda tak: $\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \left\{\pm\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}} + \mathbf{k}\boldsymbol{\pi}, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}\right\}$.

Zadanie 8 – PROBLEM

$\sin\alpha = \sin\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

$\sin 2\alpha = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

$\sin 3\alpha = -4\sin^3 x + 3\sin x = -4\cdot\frac{1}{8}\left((2-\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) + \frac{3}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}(2-\sqrt{3}) + \frac{3}{2}\right) = \sqrt{2-\sqrt{3}}\left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\right) = \sqrt{2-\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = \frac{1}{2} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{4-2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

$2\cos\alpha + 1 = \sqrt{2+\sqrt{3}} + 1$.

$\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{2\cos\alpha+1} = \frac{\frac{1}{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{2+\sqrt{3}}+1} = \frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}}-1)\frac{1}{2}+(\sqrt{2+\sqrt{3}}-1)\sqrt{2-\sqrt{3}}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1+\sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}-\frac{1}{2}+(2-\sqrt{3})(1+\frac{\sqrt{3}}{2})-\sqrt{2-\sqrt{3}}(1+\frac{\sqrt{3}}{2})}{1+\sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}-\frac{1}{2}+2+\sqrt{3}-\sqrt{3}-\frac{3}{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{3}}{2}}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{6-3\sqrt{3}}}{2+2\sqrt{3}} = \frac{(2-2\sqrt{3})\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{6-3\sqrt{3}}\right)}{4-4\cdot 3} = \frac{(2-2\sqrt{3})\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-2\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{6-3\sqrt{3}}\right)}{-8} = -\frac{1}{8}(2-2\sqrt{3})(\sqrt{2+\sqrt{3}} - 2\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}) = -\frac{1}{8}(2-2\sqrt{3})(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}(2+\sqrt{3}))$.

Zadanie 9

$\sin 2kx = \cos kx, k = 1005$.

$\sin 2kx = 2\sin kx\cos kx = \cos kx \Leftrightarrow \cos kx = 0 \vee \sin kx = \frac{1}{2}$.

Rozwiązań równości $\cos x = 0$ na przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$ jest dwa. Gdy cosinus biegnie k razy szybciej, rozwiązań jest k razy więcej, a więc 2010.

Rozwiązań równości $\sin x = \frac{1}{2}$ na przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$ jest dwa. Gdy sinus biegnie k razy szybciej, rozwiązań jest k razy więcej, a więc 2010.

W sumie rozwiązań jest **4020**.

Zadanie 10

$\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$.

$(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha) = (1 + 2\sin\alpha\cos\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)$

$(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 = (1 + \sin 2\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)$

Nie zawsze $\cos\alpha = \sin\alpha$, zatem możemy podzielić przez ten nawias.

$(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Zadanie 11

$\sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = \frac{1}{8}$

$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = \cos(30^\circ - 10^\circ) \cdot \cos(30^\circ + 10^\circ) = (\cos 30^\circ \cos 10^\circ + \sin 30^\circ \sin 10^\circ)(\cos 30^\circ \cos 10^\circ - \sin 30^\circ \sin 10^\circ) = (\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^\circ + \frac{\sin 10^\circ}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^\circ - \frac{\sin 10^\circ}{2}) = \frac{3}{4}\cos^2 10^\circ - \frac{1}{4}\sin^2 10^\circ$.

$8\sin 10^\circ(\frac{3}{4}\cos^2 10^\circ - \frac{1}{4}\sin^2 10^\circ) = 1$

$2\sin 10^\circ(3\cos^2 10^\circ - \sin^2 10^\circ) = 1$

$2\sin 10^\circ(3(1-\sin^2 10^\circ) - \sin^2 10^\circ) = 1$

$2\sin 10^\circ(3 - 3\sin^2 10^\circ - \sin^2 10^\circ) = 1$

$2\sin 10^\circ(3 - 4\sin^2 10^\circ) = 1$

$-4\sin^3 10^\circ + 3\sin 10^\circ = \frac{1}{2}$

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$0 = 0$.