1 Definicja granicy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \in \mathbb{R} \iff \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N_0\in\mathbb{R}}\ \forall_{n>N_0}:\ |a_n - g| < \varepsilon$$

2 Definicja granicy w nieskończoności

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff \forall_{M\in\mathbb{R}}\ \exists_{N_0\in\mathbb{R}}\ \forall_{n>N_0}:\ a_n > M$$

Przykłady ciągów bez granic:

- $a_n = \sin n$
- $b_n = (-1)^n$
- $c_n = (-1)^n \cdot n$
- $d_n = (-1)^n \cdot \frac{3n}{2n-1}$

3 Dowód, że granica ciągu nie jest w danym miejscu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+7n-1}{3n^2+3n+4} \neq 1 \iff \exists_{\varepsilon>0}\ \forall_{N_0\in\mathbb{R}}\ \exists_{n\geqslant N_0}:\ \left|\frac{5n^2+7n-1}{3n^2+3n+4} - 1\right| \geqslant \varepsilon$$

Ustalone $\varepsilon > 0$. Z równania dostajemy kolejno:

$$\left|\frac{5n^2-3n^2+7n+3n-1-4}{3n^2-3n+4}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{2n^2+10n-5}{3n^2-3n+4}\right| < \varepsilon$$

Możemy ściągnąć moduł i pomnożyć, ponieważ wyrażenie jest dodatnie dla $n \geqslant 1$.

$$(3\varepsilon-2)n^2 + (3\varepsilon-4)n + (4\varepsilon+3) > 0$$

Dla $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nierówność jest spełniona dla skończonej liczby elementów, a więc nie tu jest granica.

4 Dowód, że ciąg nie może mieć dwóch granic

Hip. $g_1 \neq g_2$ są granicami ciągu (a_n). Niech $\varepsilon = \left|\frac{g_1-g_2}{3}\right|$, $g_2 > g_1$. Z definicji granicy:

$$\exists_{N_0\in\mathbb{R}}\ \forall_{n>N_0}:\ \ |a_n - g_1| < \varepsilon$$

Zarazem:

$$\exists_{N_1 \in \mathbb{R}} \, \forall_{n > N_1} : \ |a_n - g_2| < \varepsilon$$

A więc:

$$\forall_{n > N_0} : \ a_n < g_1 + \varepsilon$$

$$\forall_{n > N_1} : \ a_n > g_2 - \varepsilon$$

Ponadto $g_1 + \varepsilon < g_2 - \varepsilon$. Dostajemy:

$$\forall_{n > \max\{N_0, N_1\}} : \ a_n < g_1 + \varepsilon < g_2 + \varepsilon < a_n$$

Sprzeczność.

5 Granica sumy dwóch ciągów

Założenie:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \qquad \lim_{n \to \infty} b_n = b$$

Teza:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

Dowód:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \iff \forall_{\varepsilon > 0} \, \exists_{N_0 \in \mathbb{R}} \, \forall_{n > N_0} : \ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim_{n \to \infty} b_n = b \iff \forall_{\varepsilon > 0} \, \exists_{N_1 \in \mathbb{R}} \, \forall_{n > N_1} : \ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Z tezy otrzymujemy:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b \iff \forall_{\varepsilon > 0} \, \exists_{N_2 \in \mathbb{R}} \, \forall_{n > N_2} : \ |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$$

$$|a_n + b_n - a - b| = |a_n - a + b_n - b| \overset{\text{z tw. o sumie modułów}}{\leqslant} |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

dla $n > \max\{N_0, N_1\}$

A więc:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \, \exists_{N_2 = \max\{N_0, N_1\}} \, \forall_{n > N_2} : \ |a_n + b_n - (a + b)| < \varepsilon$$

6 Granica iloczynu dwóch ciągów

Założenie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

Teza:

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$$

Dowód:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \in \mathbb{R} \iff \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N_0\in\mathbb{R}}\ \forall_{n>N_0} :\ |a_n - g| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = g \in \mathbb{R} \iff \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N_1\in\mathbb{R}}\ \forall_{n>N_1} :\ |b_n - g| < \varepsilon$$

Rozpiszmy sobie tezę:

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= \\
&= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\
&= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \\
&\overset{\text{z tw. o sumie modułów}}{\leqslant} |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \\
&< |a_n|\varepsilon + |b|\varepsilon \\
&< \max\{|a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|\}\cdot\varepsilon + |b|\cdot\varepsilon \\
&= \varepsilon\underbrace{\left(\max\{|a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|\} + |b|\right)}_{>0}
\end{aligned}$$

A zatem dla $\varepsilon > 0\ \exists_{N_2=\max\{N_0,N_1\}} :\ |a_n b_n - ab| < \varepsilon \cdot c$, gdzie $c > 0$, dla $n > N_2$.

7 Ciąg ograniczony

Definicja:

$$(a_n) \text{ jest ograniczony} \iff \exists_{M\in\mathbb{R}}\ \forall_{n\in\mathbb{N}_+} :\ |a_n| < M$$

Założenie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Teza:

$$(a_n) \text{ jest ograniczony}$$

Dowód: Niech $\varepsilon = 1$. Wówczas $\exists_{N_0\in\mathbb{R}}\ \forall_{n>N_0} :\ |a_n - a| < 1$. A co za tym idzie:

$$a - 1 < a_n < a + 1$$

Dalej:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_+}: \underbrace{\min\{a_1, a_2, \dots, a_{[N_0]}, a-1\}}_{=m_1} \leqslant a_n \leqslant \underbrace{\max\{a_1, a_2, \dots, a_{[N_0]}, a+1\}}_{=m_2}$$

A więc wtedy $M = \max\{|m_1|, |m_2|\}$.

8 Granica ciągu w danej liczbie

Mamy ciąg $a_n = \frac{1}{2n-17}$, chcemy udowodnić, że jego granicą jest liczba $a = 0$.
Założenie:

$$a_n = \frac{1}{2n-17}$$

Teza:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-17} = 0 \iff \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{N_0\in\mathbb{R}}\, \forall_{n>N_0}: \left|\frac{1}{2n-17} - 0\right| < \varepsilon$$

Dowód: Dostajemy ustalony $\varepsilon > 0$. Rozpiszmy sobie z definicji granicy.

$$\left|\frac{1}{2n-17} - 0\right| < \varepsilon$$

Dla $n \geqslant 9$ możemy zdjąć moduł, więc zróbmy to.

$$\frac{1}{2n-17} < \varepsilon$$

$$1 < \varepsilon(2n-17)$$

$$1 < 2\varepsilon n - 17\varepsilon$$

$$n > \frac{1+17\varepsilon}{2\varepsilon}$$

A zatem do ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać $N_0 = \max\{\frac{1+17\varepsilon}{2\varepsilon}, 9\}$ takie, że $\forall_{n>N_0} \left|\frac{1}{2n-17} - 0\right| < \varepsilon$.

9 Twierdzenie o trzech ciągach

Założenie: Mamy trzy ciągi (a_n), (b_n), (c_n), dla których:

$$\exists_{N_0\in\mathbb{R}}\forall_{n>N_0}: a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Teza:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = g$$

Dowód: Rozpiszmy sobie tezę.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \iff \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N_1\in\mathbb{R}}\ \forall_{n>N_1} :\ |a_n - g| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = g \iff \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N_2\in\mathbb{R}}\ \forall_{n>N_2} :\ |c_n - g| < \varepsilon$$

Przyjrzyjmy się pokolorowanym elementom i rozpiszmy je.

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < a_n - g < \varepsilon$$

$$g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$$

Analogicznie dla (c_n):

$$g - \varepsilon < c_n < g + \varepsilon$$

Połączmy założenie z tym, co wyliczyliśmy.

$$g - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < g + \varepsilon$$

Z tego wnioskujemy, że:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N_3=\max\{N_0,N_1,N_2\}}\ \forall_{n>N_3} :\ |b_n - g| < \varepsilon$$

Co było do udowodnienia. Do $\varepsilon > 0$ dobraliśmy $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$ takie, że $g - \varepsilon < b_n < g + \varepsilon$.