TEC | Tecnológico de Costa Rica

ITCR - Biodiversidad

COMPUTACIÓN
CENTRO ACADÉMICO ALAJUELA

Curso de introducción a Python

NumPy, Vectores y Matrices

Agenda

- Conceptos de Álgebra Lineal:
  a. Linealidad.
  b. Vectores.
  c. Matrices.

- Operaciones básicas de Vectores.
  a. Con escalares.
  b. Entre vectores.

- Operaciones básicas de Matrices.
  a. Con escalares.
  b. Con vectores.
  c. Entre matrices.

- NumPy
  a. ¿Qué es NumPy?
  b. ¿Por qué se utiliza?
  c. Ejemplos básicos.

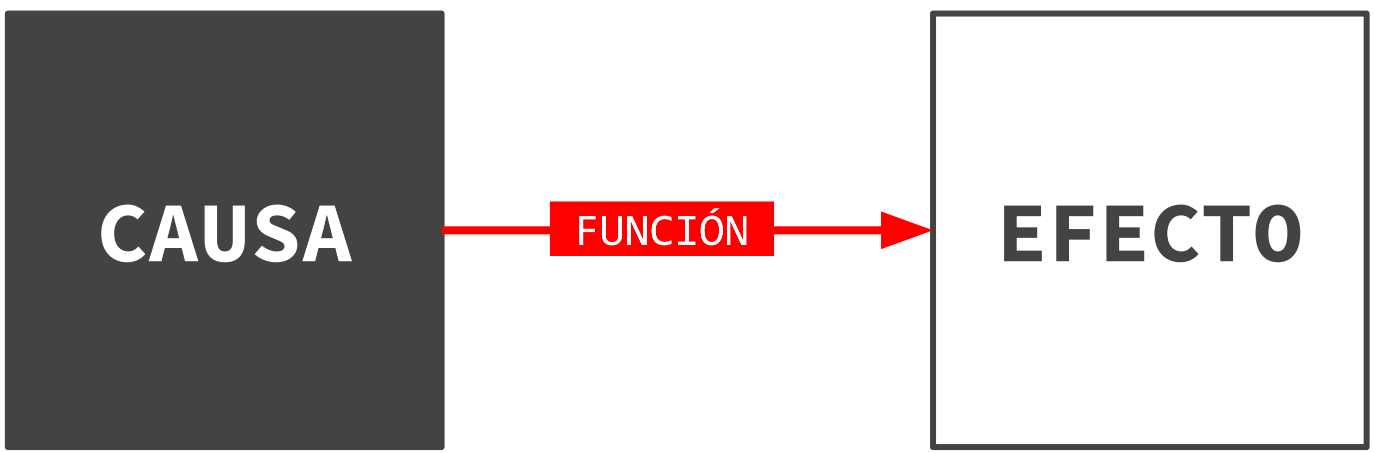
Conceptos de Álgebra Lineal

Linealidad

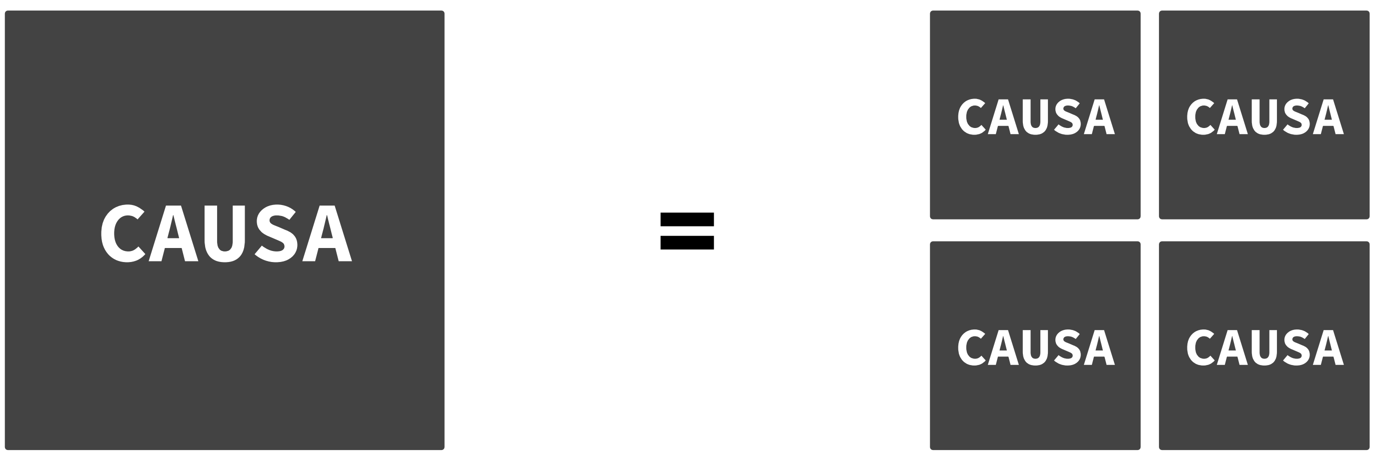
"En general, se dice en Matemáticas que una función es lineal cuando cumple que la imagen de la suma es igual a la suma de las imágenes *(superposición)* y cuando la imagen del múltiplo de un objeto es igual al múltiplo de la imagen *(homogeneidad)*" (colaboradores de Wikipedia, 2022b)

$$\underbrace{f(x + y) = f(x) + f(y)}_{\textit{Superposición}} \quad \& \quad \underbrace{f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)}_{\textit{Homogeneidad}}$$

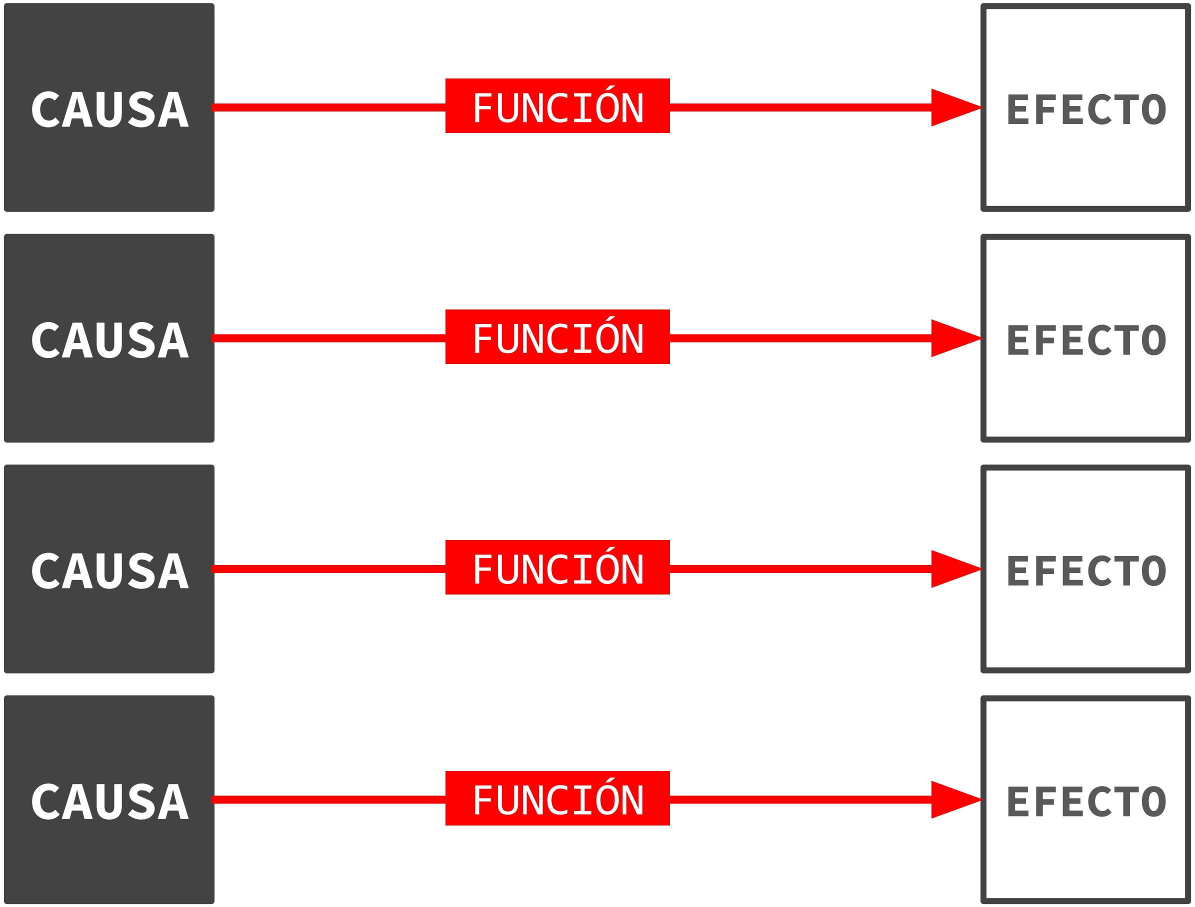
Linealidad



Linealidad



Linealidad


CAUSA
FUNCIÓN
EFECTO
CAUSA
FUNCIÓN
EFECTO
CAUSA
FUNCIÓN
EFECTO
CAUSA
FUNCIÓN
EFECTO

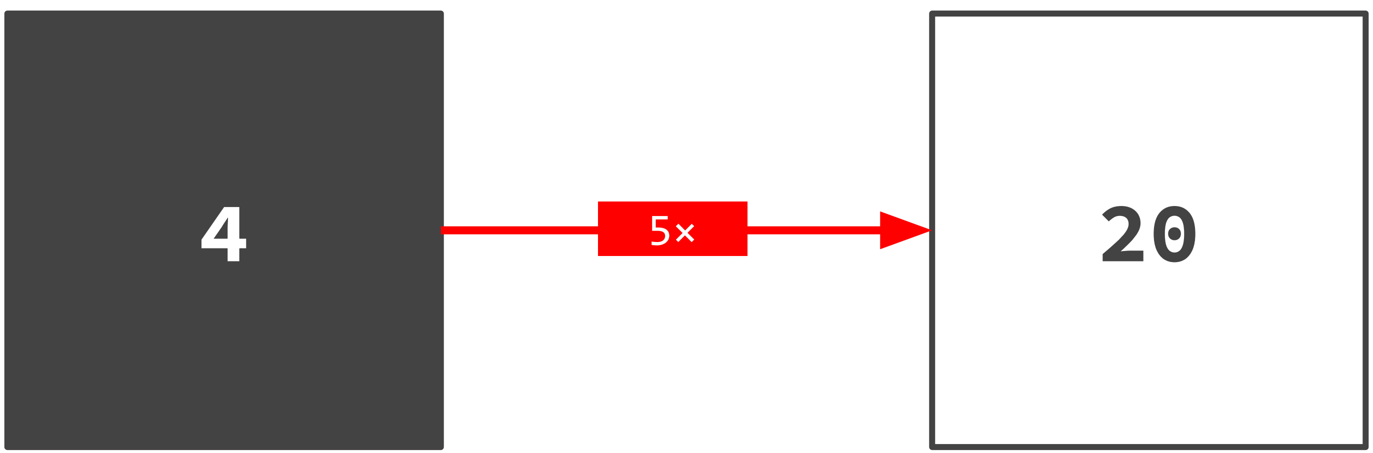
Linealidad

EFECTO	EFECTO
EFECTO	EFECTO

=

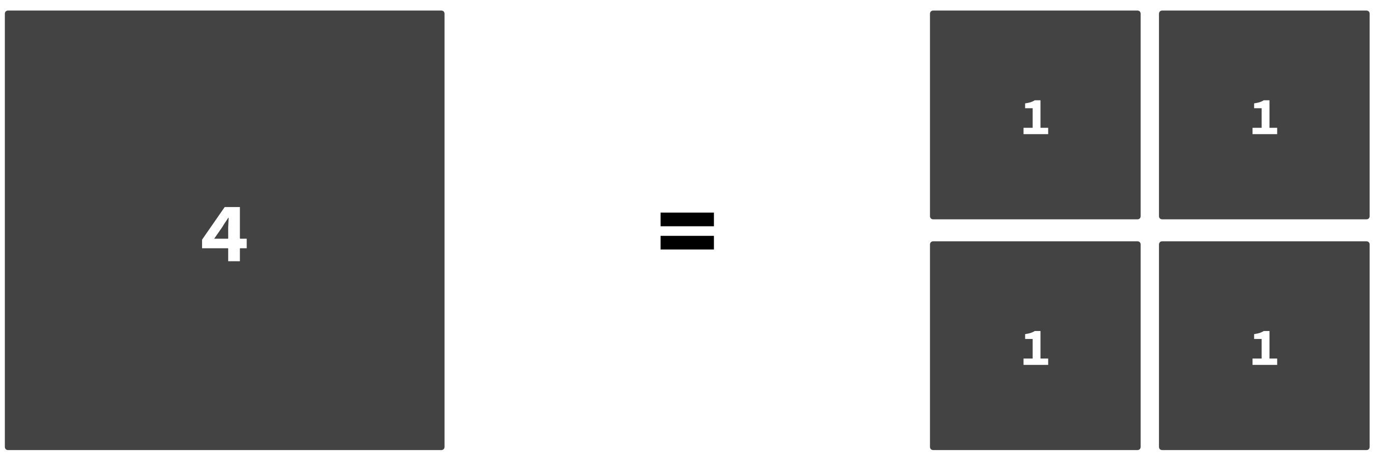
EFECTO

Linealidad



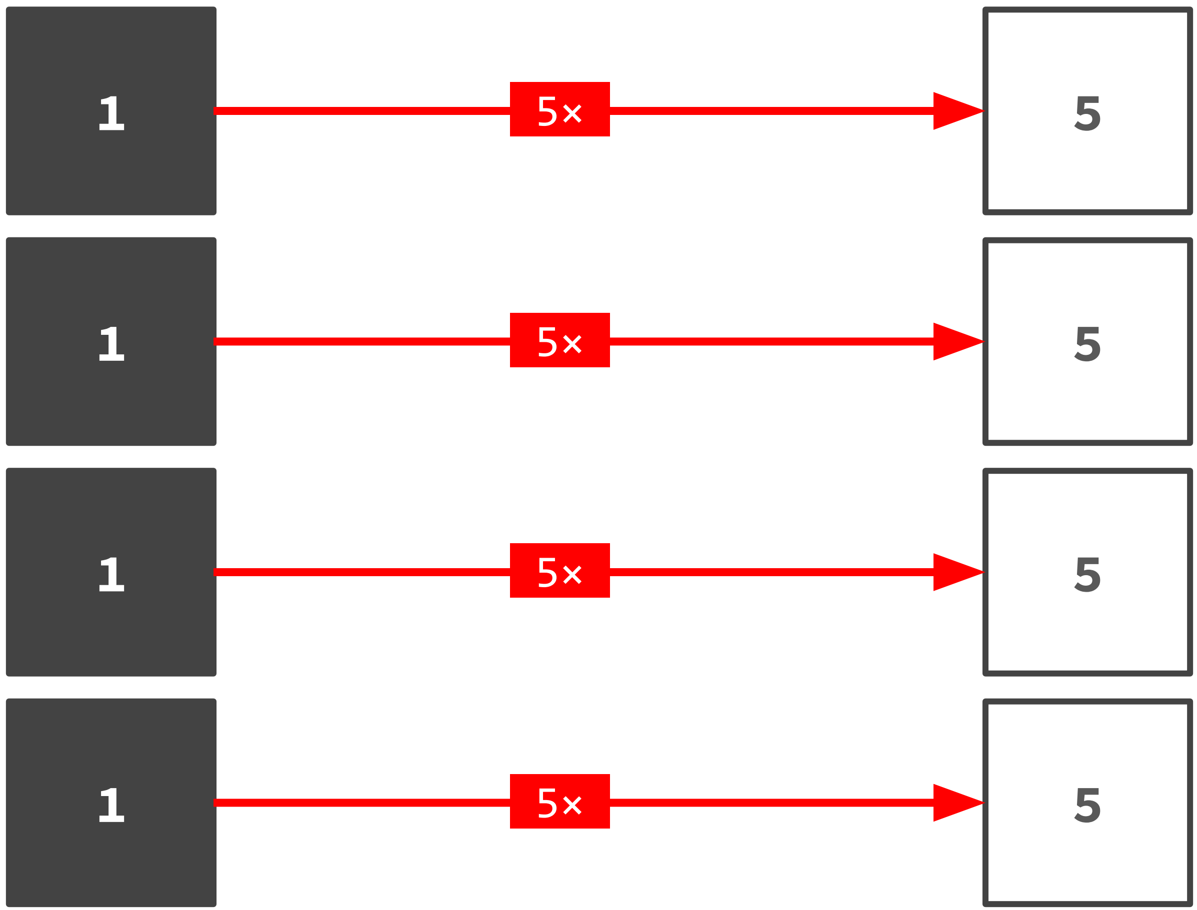
$5 \times 4 = 20$

Linealidad



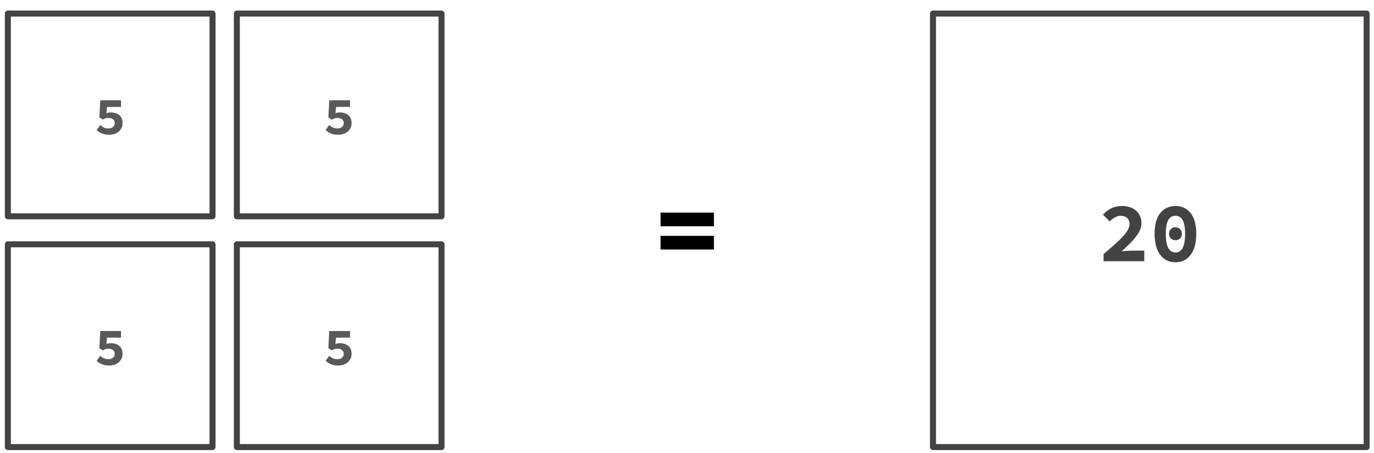
4 = (1+1+1+1)

Linealidad



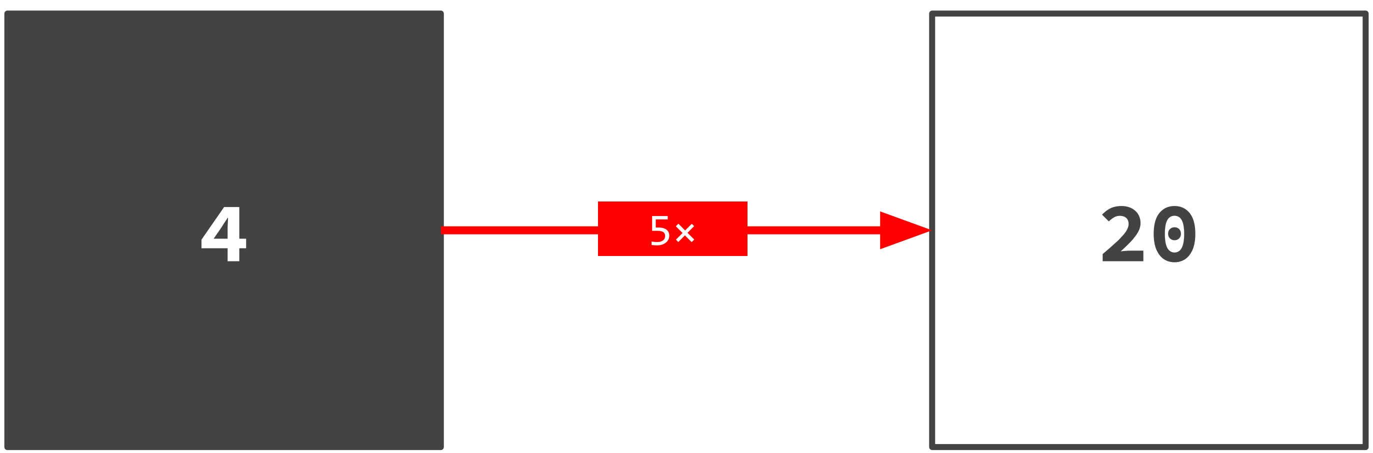
$5 \times 1 \quad = \quad 5$

Linealidad



5+5+5+5 = 20

Linealidad



5×4 = 20

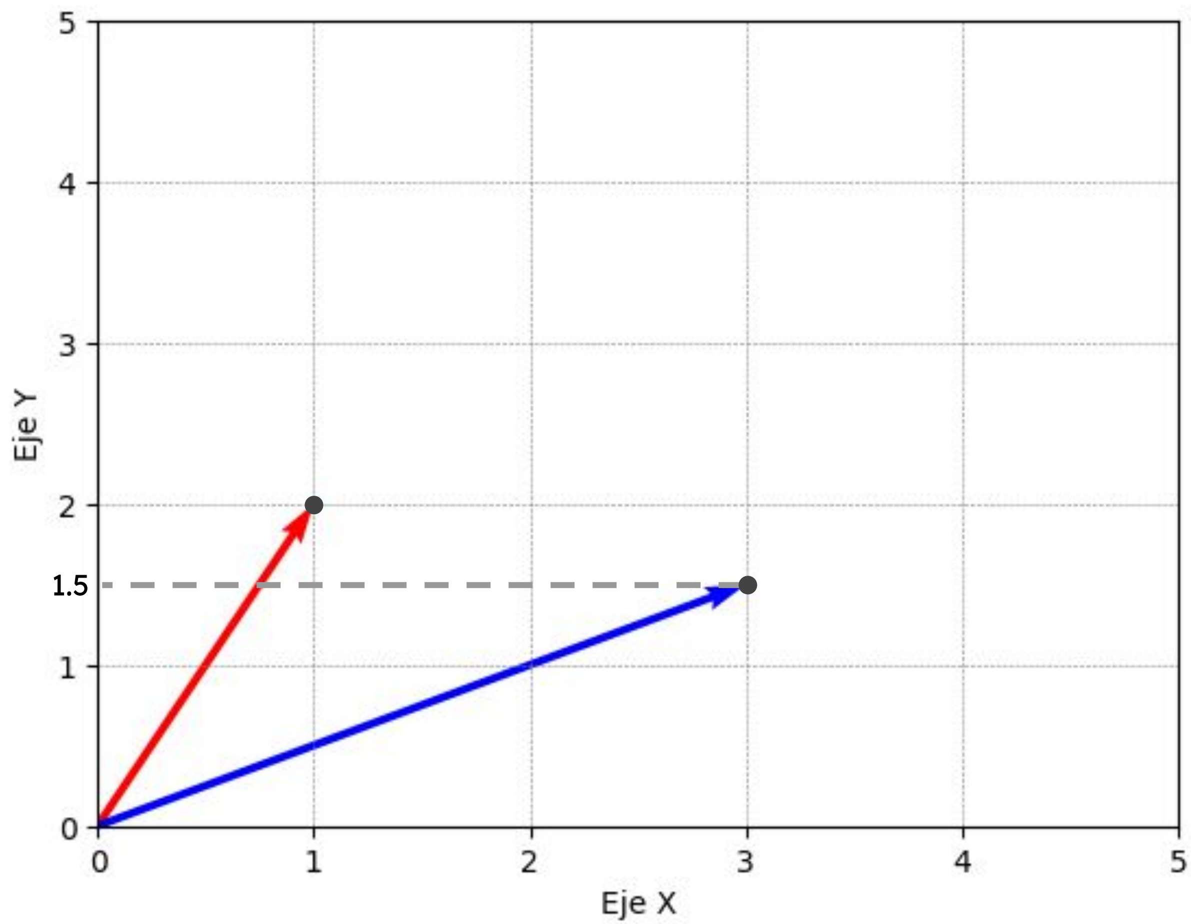
Vectores

“Definimos un vector columna *n-ario* como una lista de **n** números, denotada

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

el número a_i se llama componente i del vector a. Denotemos por $\mathbb{R}$ el conjunto de números reales y $\mathbb{R}^n$ el conjunto de n vectores columna con componentes reales. Llamamos a $\mathbb{R}^n$ un espacio vectorial real de n dimensiones. Comúnmente denotamos elementos de $\mathbb{R}^n$ con letras minúsculas. Los componentes de $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ se denotan por a_1 , a_2 , ... , a_n.” (Chong, Stanislaw, 2001)

Vectores



$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1, \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3, \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}, \vec{a} \in \mathbb{R}^2$$

Matrices

"Una matriz en $\mathbb{R}$ es un arreglo rectangular de números reales distribuidos en filas y columnas. En general, una matriz real A que tiene *m* filas y *n* columnas es un ordenamiento de números reales de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall\, i,j \in \mathbb{N}$ con $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$." (Páez, 2013)

Matrices

$$A = \begin{array}{cl} \textbf{n columnas} \qquad \mathbf{n = 5} & \\ \left(\begin{array}{c} (1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5), \\ (23, \quad 10, \quad 01, \quad 22, \quad 21), \\ (06, \quad 12, \quad 02, \quad 21, \quad 20) \end{array} \right) & \begin{array}{l} \textbf{m filas} \\ \\ \mathbf{m = 3} \end{array} \end{array}$$

Se dice que A tiene un **orden** de *“m x n”*, en este caso: **3x5**

Operaciones Básicas de Vectores

Con Escalares: Suma

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$a + 5 = \begin{pmatrix} 1+5 \\ 2+5 \\ 3+5 \\ 4+5 \end{pmatrix}$$

$$a + 5 = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Con Escalares: Resta

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$a - 1 = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 2 - 1 \\ 3 - 1 \\ 4 - 1 \end{pmatrix}$$

$$a - 1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Con Escalares: Producto

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$a \cdot 8 = \begin{pmatrix} 1 \cdot 8 \\ 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 8 \\ 4 \cdot 8 \end{pmatrix}$$

$$a \cdot 8 = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 24 \\ 32 \end{bmatrix}$$

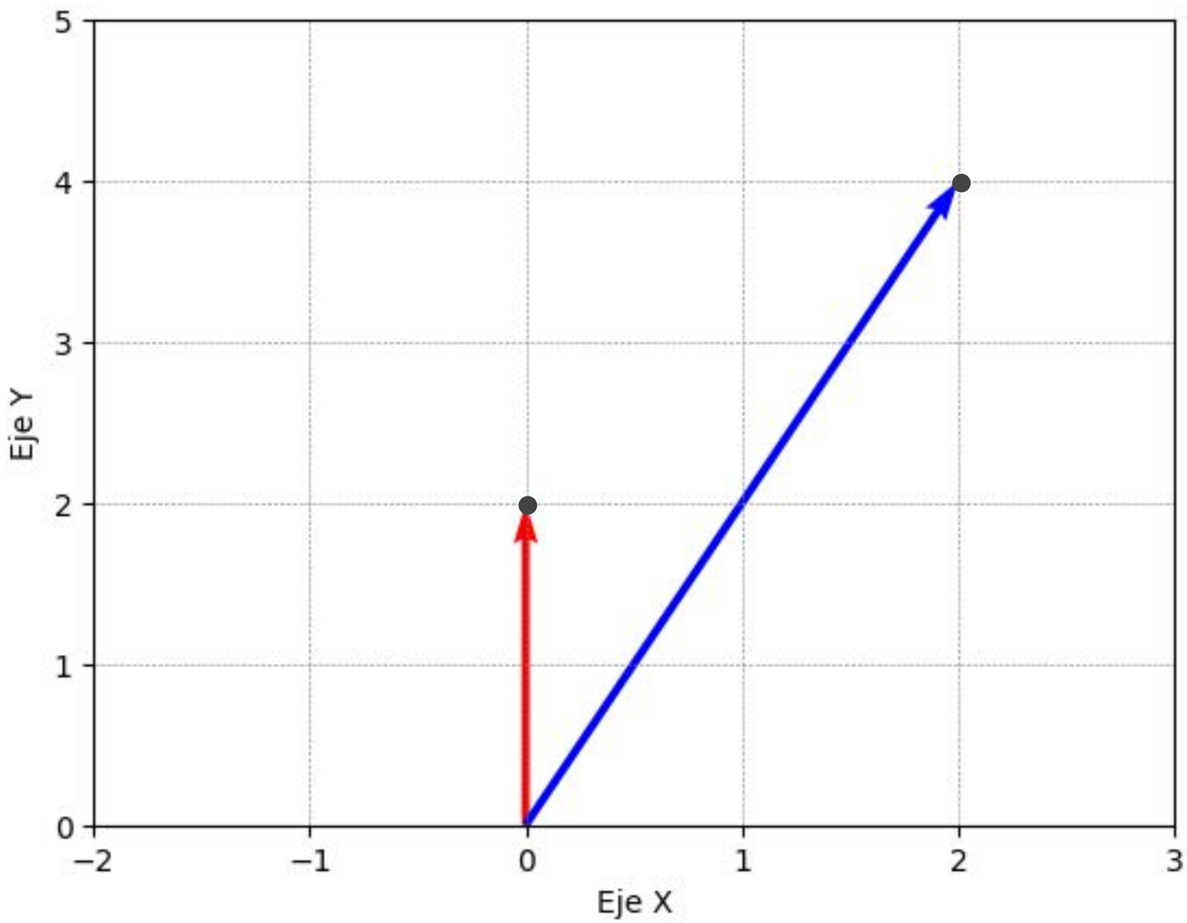
Con Escalares: División

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$a \,/\, 2 = \begin{pmatrix} 1 / 2 \\ 2 / 2 \\ 3 / 2 \\ 4 / 2 \end{pmatrix}$$

$$a \,/\, 2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Con Escalares: Suma

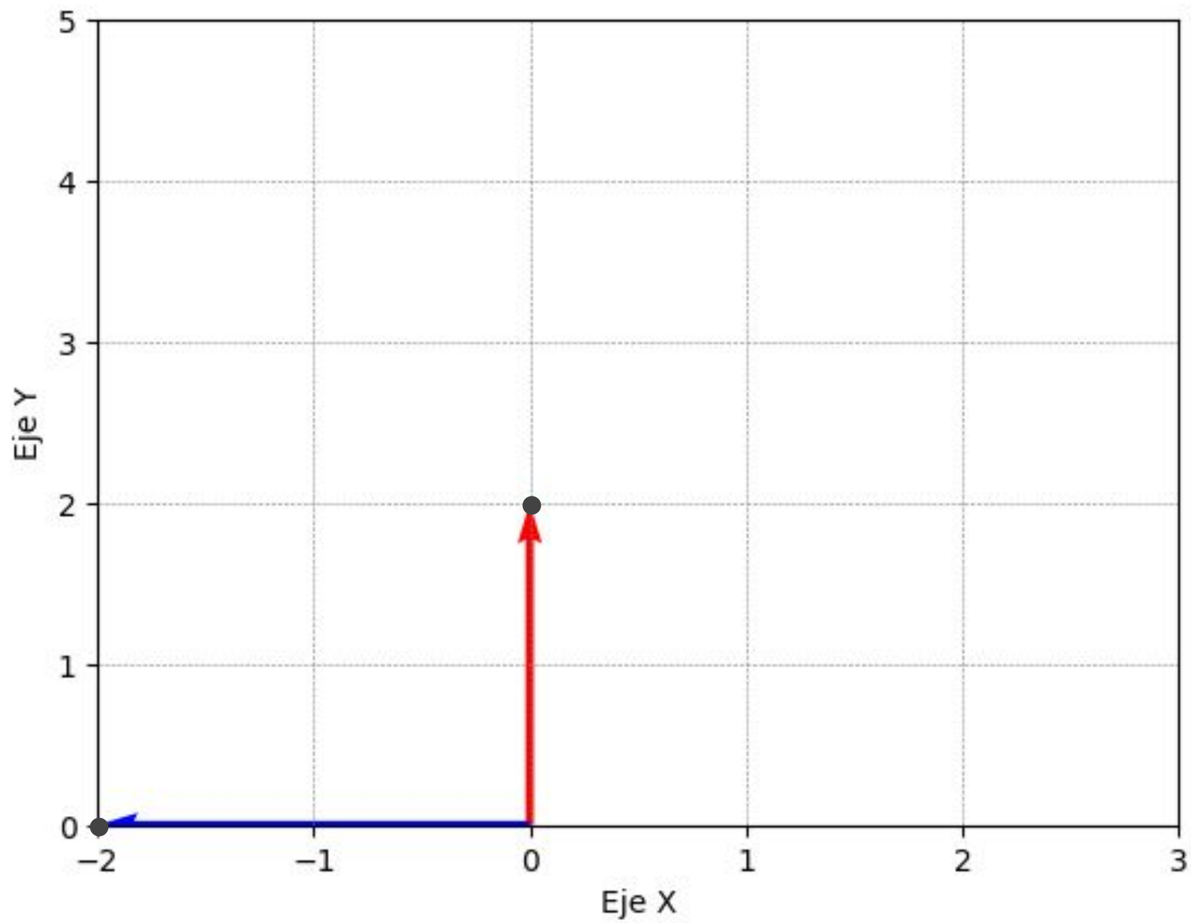


$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} + 2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \in \mathbb{R}^2$$

Con Escalares: Resta

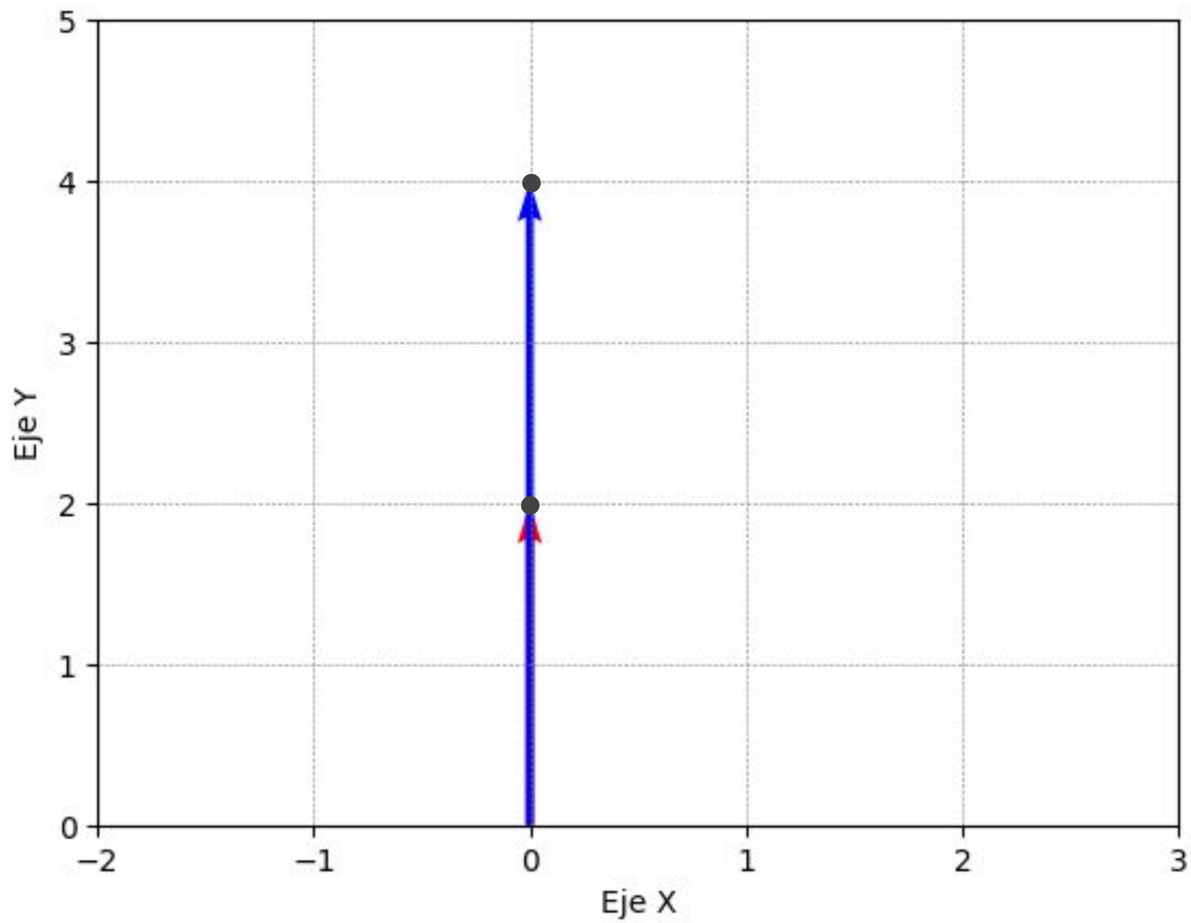


$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} - 2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \in \mathbb{R}^2$$

Con Escalares: Producto

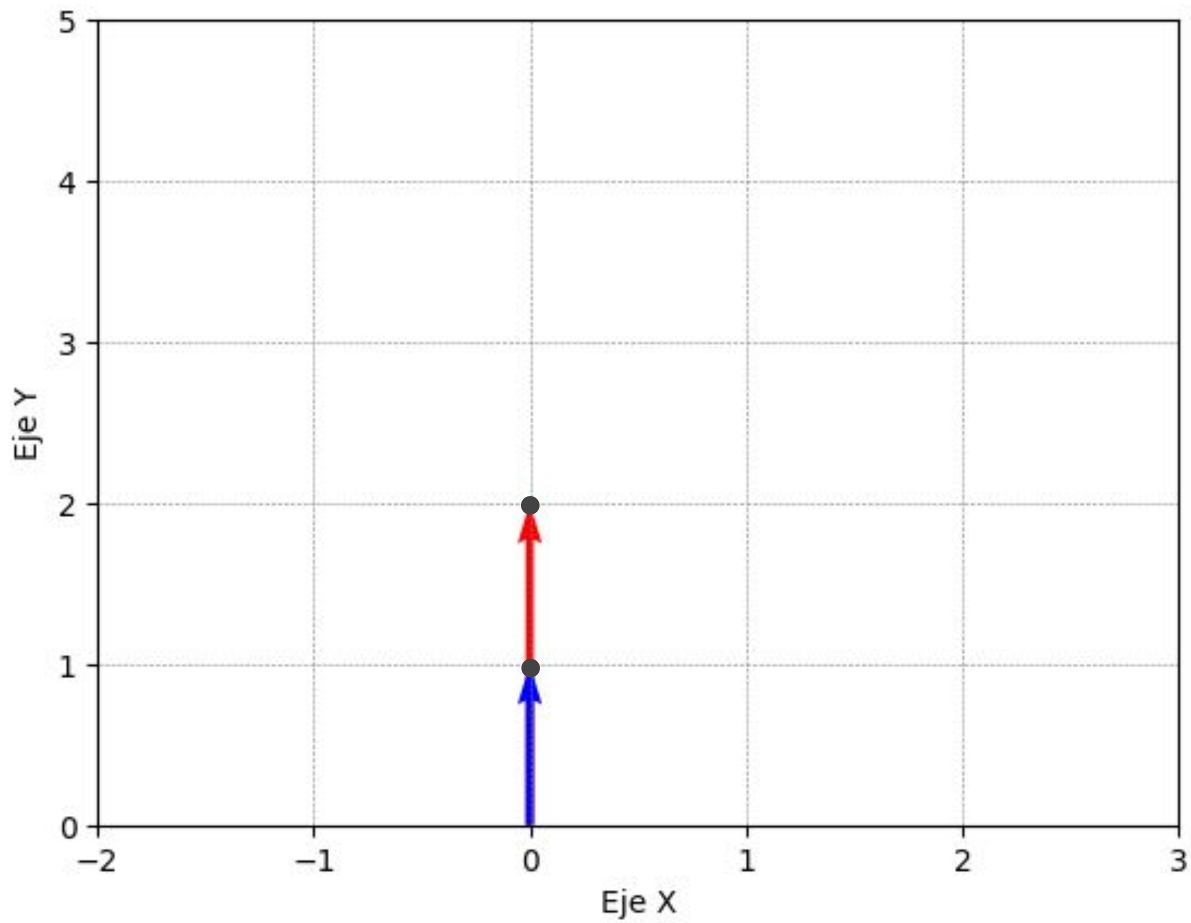


$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} * 2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \in \mathbb{R}^2$$

Con Escalares: División



$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \,/\, 2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \in \mathbb{R}^2$$

Entre vectores: Suma

$$v1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$v2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v3 = v1 + v2$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} + \\ + \end{matrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}} \end{bmatrix}$$

$$v3 = \begin{bmatrix} 2 + 4 \\ 3 + 1 \end{bmatrix}$$

$$v3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Entre vectores: Resta

$$v1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$v2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v3 = v2 - v1$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}} \end{bmatrix}$$

$$v3 = \begin{bmatrix} 4 - 2 \\ 1 - 3 \end{bmatrix}$$

$$v3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Entre vectores: Producto

$$v1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$v2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v3 = v2 * v1$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{4 \quad * \quad 2} \\ \boxed{1 \quad * \quad 3} \end{bmatrix}$$

$$v3 = \begin{bmatrix} 4 * 2 \\ 1 * 3 \end{bmatrix}$$

$$v3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Entre vectores: División

$$v1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$v2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v3 = v2 \;/\; v1$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} / \\ / \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}} \end{bmatrix}$$

$$v3 = \begin{bmatrix} 4 \;/\; 2 \\ 1 \;/\; 3 \end{bmatrix}$$

$$v3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.333... \end{bmatrix}$$

Operaciones Básicas de Matrices

Con Escalares: Suma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A + 2 = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+2 \\ 3+2 & 4+2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Con Escalares: Resta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A - 2 = \begin{pmatrix} 1-2 & 2-2 \\ 3-2 & 4-2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Con Escalares: Producto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A * 2 = \begin{pmatrix} 1*2 & 2*2 \\ 3*2 & 4*2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Con Escalares: División

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \, / \, 2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 2/2 \\ 3/2 & 4/2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 1.5 & 2 \end{pmatrix}$$

Con vectores: Suma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A + a = \begin{pmatrix} [1 \quad 2] + [5 \quad 6] \\ [3 \quad 4] + [5 \quad 6] \end{pmatrix}$$

$$A + a = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+5 & 4+6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Con vectores: Resta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A - a = \begin{pmatrix} [1 \quad 2] - [5 \quad 6] \\ [3 \quad 4] - [5 \quad 6] \end{pmatrix}$$

$$A - a = \begin{pmatrix} 1-5 & 2-6 \\ 3-5 & 4-6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Con vectores: Producto

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A * a = \begin{bmatrix} [1 \quad 2] * [5 \quad 6] \\ [3 \quad 4] * [5 \quad 6] \end{bmatrix}$$

$$A * a = \begin{bmatrix} 1*5 & 2*6 \\ 3*5 & 4*6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 15 & 24 \end{bmatrix}$$

Con vectores: División

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A \,/\, a = \begin{bmatrix} [1 \;\; 2] \,/\, [5 \;\; 6] \\ [3 \;\; 4] \,/\, [5 \;\; 6] \end{bmatrix}$$

$$A \,/\, a = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/6 \\ 3/5 & 4/6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.33 \\ 0.6 & 0.66 \end{bmatrix}$$

Entre Matrices: Suma

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B_{2x2} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Entre Matrices: Resta

$$A_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B_{2x2} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-5 & 2-6 \\ 3-7 & 4-8 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Entre Matrices: Producto

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B_{2x2} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$C_{2x1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{2 \times 2}{A} \qquad \underset{2 \times 2}{B}$$

$$\underbrace{2 \quad\quad 2}_{=}$$

sí se puede multiplicar

$$\underset{2 \times 1}{C} \qquad \underset{2 \times 2}{A}$$

$$\underbrace{1 \quad\quad 2}_{\neq}$$

no se puede multiplicar

Entre Matrices: Producto

$$A_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B_{2x2} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ 2 \times 2 & = & 2 \times 2 \end{array}$$

sí se puede multiplicar

$$A * B = \begin{pmatrix} [1*5 + 2*7] & [1*6 + 2*8] \\ [3*5 + 4*7] & [3*6 + 4*8] \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Entre Matrices: Producto

$$A_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B_{2x2} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\underset{2 \times 2}{A} \quad \underset{2 \times 2}{B}$$

$$2 \times 2 = 2 \times 2$$

sí se puede multiplicar

$$A * B = \begin{pmatrix} [1*5 + 2*7] & [1*6 + 2*8] \\ [3*5 + 4*7] & [3*6 + 4*8] \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Entre Matrices: Producto

$$A_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{pmatrix} \quad B_{2x2} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

A B

2 x 2 = 2 x 2

sí se puede multiplicar

$$A * B = \begin{pmatrix} [1*5 + 2*7] & [1*6 + 2*8] \\ [3*5 + 4*7] & [3*6 + 4*8] \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Entre Matrices: Producto

$$A_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{pmatrix} \quad B_{2x2} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} A & & B \\ 2 \times 2 & = & 2 \times 2 \end{matrix}$$

sí se puede multiplicar

$$A * B = \begin{pmatrix} [1*5 + 2*7] & [1*6 + 2*8] \\ [3*5 + 4*7] & [3*6 + 4*8] \end{pmatrix}$$

$$A * B = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Entre Matrices: Producto

$$A_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C_{2x1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overset{A}{2 \times 2} = \overset{C}{2 \times 1}$$

sí se puede multiplicar

$$A * C = \begin{pmatrix} [1 * 5 + 2 * 6] \\ [3 * 5 + 4 * 6] \end{pmatrix}$$

$$A * C = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Entre Matrices: Producto

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad C_{2x1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} A & & C \\ 2 \times 2 & = & 2 \times 1 \end{array}$$

sí se puede multiplicar

$$A * C = \begin{bmatrix} [1 * 5 + 2 * 6] \\ [3 * 5 + 4 * 6] \end{bmatrix}$$

$$A * C = \begin{bmatrix} 17 \\ 39 \end{bmatrix}$$

NumPy

¿Qué es NumPy?

"NumPy (Python numérico) es una **biblioteca de Python de código abierto** que se usa en casi todos los campos de la ciencia y la ingeniería. Es el estándar universal para trabajar con datos numéricos en Python, y está en el núcleo de ecosistemas científicos de Python y PyData." (NUMPY: The Absolute Basics for Beginners — NUMPY v1.25 Manual, s. f.)

¿Por qué se utiliza?

"Las listas en NumPy son más rápidas y compactas que las listas de Python. Una lista de Python consume poca memoria y es cómoda de usar. NumPy utiliza mucha menos memoria para almacenar esos datos y proporciona un mecanismo para especificar los tipos de datos. Esto permite optimizar aún más el código." (NUMPY: The Absolute Basics for Beginners — NUMPY v1.25 Manual, s. f.)

- Menos recursos. *(- memoria)*
- Algoritmos más eficientes. *(+ rápidos)*

Ejemplos Básicos

Los ejemplos están en el cuaderno de collab: [aquí]

Bibliografía

- NUMPY: The Absolute Basics for Beginners — NUMPY v1.25 Manual. (s. f.). https://numpy.org/doc/stable/user/absolute_beginners.html
- Chong K., Stanislaw H. An introduction to optimization, Wiley - Interscience Publication, 2001.
- Páez, C. (2013). Matrices y sistemas lineales (Instituto Tecnológico de Costa Rica, Ed.).