# 数学分析

## 笔记分享


作者：An Ordinary Math Enthusiast

组织：CHINA



时间：2024/7/21

版本：1.0.0


自定义：这是一份笔记分享，有错误还望指出批评


梦想可以大，但第一步总是小

Dreams can be big, but the first step is always small.

# 目录

# 第一章 六大定理的相互证明

**内容提要**



① 确界定理（实数系连续性定理）：非空有上界的实数集必有上确界，非空有下界的实数集必有下确界。

② 单调有界定理：在实数系中，单调且有界的数列必定收敛。

③ Cauchy 定理：数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是 $\{x_n\}$ 是基本（柯西）数列。

④ 区间套定理：若 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套，则存在唯一的实数 $\xi$ 属于所有的闭区间 $[a_n, b_n]$，$n = 1, 2, 3, \cdots$，且 $\xi$ 属于所有这些闭区间，并且有 $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \xi$

⑤ 聚点定理、魏尔斯特拉斯定理、致密性定理、Bolzano-Weierstrass 定理：

- 聚点定理：在一个有界序列中，至少存在一个聚点。
- 魏尔斯特拉斯定理：每个有界数列都有至少一个聚点。
- 致密性定理：一个集合是致密的当且仅当它的每一个开覆盖都有有限子覆盖。
- Bolzano-Weierstrass 定理：任何有界数列必有一个收敛的子序列。

(a). **聚点定理**：
- **定义**：在一个有界序列中，至少存在一个聚点。
- **说明**：聚点是指序列中某一子序列的极限。如果一个序列是有界的，那么它至少有一个聚点。
- **应用**：该定理说明了有界序列在某种意义上不会“散开”，一定存在某些点是序列的极限点。

(b). **魏尔斯特拉斯定理**（也称为**有界性原理**）：
- **定义**：每个有界数列都有至少一个聚点。
- **说明**：这个定理与聚点定理基本一致，它强调了有界数列一定存在至少一个聚点。
- **应用**：该定理是序列收敛性分析中的基础，特别是对于有界数列的性质研究。

(c). **致密性定理**：
- **定义**：一个集合是致密的当且仅当它的每一个开覆盖都有有限子覆盖。
- **说明**：这个定理描述了致密集（通常称为紧致集或紧集）的特性。一个集合如果每一个开覆盖（即用开集覆盖整个集合）都可以找到一个有限的子覆盖，那么这个集合是致密的。
- **应用**：致密性定理在拓扑学中非常重要，用于研究集合的极限性质和连续函数的性质。

(d). **Bolzano-Weierstrass 定理**：
- **定义**：任何有界数列必有一个收敛的子序列。
- **说明**：这个定理指出，有界数列总是可以找到一个收敛的子序列。这意味着有界数列在某种程度上总是可以提取出一个收敛的部分。
- **应用**：Bolzano-Weierstrass 定理在分析学中广泛应用，特别是在证明各种关于收敛性的命题时。

总结：
- **聚点定理**和**魏尔斯特拉斯定理**主要关注有界数列的聚点存在性。
- **致密性定理**关注的是集合的覆盖性质，是一个拓扑学定理。
- **Bolzano-Weierstrass 定理**进一步说明了有界数列不仅有聚点，而且必有一个收敛的子序列。

它们各自从不同的角度描述了数列和集合的性质，在数学分析和拓扑学中都有着广泛的应用。

⑥ 有限覆盖定理（Heine-Borel 定理）：
- **定义**：一个集合是紧的当且仅当它是闭且有界的；设 $H$ 为闭区间 $[a, b]$ 的一个（无限）开覆盖，则从 $H$ 中可选出有限个开区间来覆盖 $[a, b]$。

- **说明**：如果一个开覆盖 $S$ 覆盖了闭区间 $[a,b]$，即 $[a,b] \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$，其中 $U_i$ 是 $S$ 中的开区间，则存在有限个开区间 $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_n}$ 使得 $[a,b] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$。

**笔记**

1. 有界集：
   集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ 称为有界的，如果存在实数 $M$ 使得对于所有 $x \in A$，有 $|x| \le M$。即集合 $A$ 的所有元素都被限制在一个有限的范围内。
2. 上（下）确界：
   给定一个非空的有上界集合 $S \subseteq \mathbb{R}$，上确界（或称为最小上界）$\sup S$ 是满足下列条件的唯一实数：
   (a). 对于所有 $x \in S$，有 $x \le \sup S$。
   (b). 如果 $y$ 是任意上界，则 $\sup S \le y$。
   类似地，集合 $S$ 的下确界（或称为最大下界）$\inf S$ 定义为：
   (a). 对于所有 $x \in S$，有 $x \ge \inf S$。
   (b). 如果 $z$ 是任意下界，则 $\inf S \ge z$。
3. 数列收敛：
   数列 $\{a_n\}$ 称为收敛的，如果存在实数 $L$ 使得对于任意 $\epsilon > 0$，存在正整数 $N$ 使得当 $n \ge N$ 时，$|a_n - L| < \epsilon$。此时，$L$ 被称为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记作 $\lim_{n\to\infty} a_n = L$。
4. 闭区间套：
   一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 称为闭区间套，如果对于所有 $n$ 都有 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$，且 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$。根据闭区间套定理，存在唯一的实数 $\xi$，使得 $\xi$ 属于所有这些闭区间，即 $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$。
5. 聚点邻域开集：
   (a). 聚点：
   如果对于任意 $\epsilon > 0$，在区间 $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ 内包含集合 $A$ 的无限多个点，则称 $x$ 是集合 $A$ 的一个聚点。
   (b). 邻域：
   一个点 $x$ 的 $\epsilon$-邻域定义为开区间 $(x-\epsilon, x+\epsilon)$。
   (c). 开集：
   集合 $G \subseteq \mathbb{R}$ 称为开集，如果对于集合 $G$ 中的任意一点 $x$，存在 $x$ 的一个邻域完全包含于 $G$ 中。
6. 基本数列：
   数列 $\{a_n\}$ 称为基本数列（或柯西数列），如果对于任意 $\epsilon > 0$，存在正整数 $N$，使得当 $m, n \ge N$ 时，有 $|a_n - a_m| < \epsilon$。根据柯西收敛定理，数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是它是一个基本数列。

**定理 1.1 (确界定理（实数系连续性定理）)**

（1）非空有上界的实数集必有上确界，非空有下界的实数集必有下确界。
（2）设 $S$ 是实数集 $\mathbb{R}$ 的一个非空子集，且 $S$ 有上界，则 $S$ 在 $\mathbb{R}$ 中有一个上确界。

$$\forall S \subseteq \mathbb{R}, S \neq \emptyset \text{ 且} \exists u \in \mathbb{R} \text{ 使得} \forall x \in S, x \le u, \exists \sup S \in \mathbb{R} \text{ 使得 } \sup S = \inf\{u \in \mathbb{R} \mid \forall x \in S, x \le u\}$$

## 确界存在定理 ⇒ 单调有界定理

**证明:** 设数列 $\{x_n\}$ 是单调增加且有上界，令 $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$，根据确界存在定理，存在 $\beta \in \mathbb{R}$，使得 $\beta = \sup S$，满足如下条件：

1. $\forall x_k \in S, k \in \mathbb{N}^+$，有 $\beta \ge x_k$；
2. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$ 使得 $x_{n_0} + \varepsilon > \beta$。

于是 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = n_0$，$\forall n > N$，有 $x_n + \varepsilon \ge x_N + \varepsilon > \beta > x_n > x_n - \varepsilon$。

因此 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = n_0$，$\forall n > N$，有 $\beta - \varepsilon < x_n < \beta + \varepsilon$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \beta$$

## 确界存在定理 ⇒ Cauchy 收敛原理

**证明:** (必要性) 先证数列 $\{x_n\}$ 收敛 ⇒ 数列 $\{x_n\}$ 是基本数列。
设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，使得

$$\forall n, m > N,\ |x_{n,m} - a| < \frac{\varepsilon}{2},\ |x_n - x_m| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

因此数列 $\{x_n\}$ 是基本数列。

再证（充分性）数列 $\{x_n\}$ 是基本数列 ⇒ 数列 $\{x_n\}$ 收敛。
设数列 $\{x_n\}$ 是基本数列，则数列 $\{x_n\}$ 有界，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，$\forall n, m > N$，都有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$。取定 $\varepsilon = 1$ 时，存在 $N_1 \in \mathbb{N}^+$ 使得

$$\forall n > N_1,\ |x_n - x_{N_1}| < \varepsilon,$$

于是 $M = \max\{x_1, x_2, \dots, x_{N_1}, |x_{N_1}| + 1\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的一个上界，

$$m = \min\{x_1, x_2, \dots, x_{N_1}, -1\}$$

是数列 $\{x_n\}$ 的一个下界。因此数列 $\{x_n\}$ 有界。下说明数列 $\{x_n\}$ 收敛。
令 $S = \{x_n\}$，数列 $\{x_n\}$ 中小于 $x$ 的数只有有限个，显然数集 $S$ 有界，根据确界存在定理，数集 $S$ 必有上确界，设 $\beta = \sup S$，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\beta - \varepsilon \in S$，$\beta + \varepsilon \notin S$，从而 $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$ 中含有数列 $\{x_n\}$ 中无限项，于是存在数列 $\{x_{n_k}\}$ 的子列，使得

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \beta$$

又数列 $\{x_n\}$ 是基本数列，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，$\forall n, m > N$，$|x_n - x_m| < \varepsilon$，取 $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$，$\forall n > N$，$k > K$ 有

$$|x_n - \beta| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \beta| < \varepsilon$$

因此数列 $\{x_n\}$ 收敛，证毕。

## 确界存在定理 ⇒ 闭区间套定理

**证明:** 设一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套，则数集 $S = \{a_1, a_2, \dots\}$（$S$ 如果有相同的数则只算作一个）有上界，而且 $b_n, n = 1, 2, 3, \dots$ 都是数集 $S$ 的上界，存在性，根据确界存在定理，数集 $S$ 有上确界（最小上界），记为 $\alpha = \sup S$，于是

1. $\forall n \in \mathbb{N}^+$，$\alpha \ge a_n$；
2. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，使得 $a_N + \varepsilon > \alpha$，由 (1) 知 $a_n \le \alpha \le b_n$，$n = 1, 2, 3, \dots$，由 (2) 知

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{又} \quad \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0 \quad \text{可知} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$$

唯一性，若另有 $\alpha'$，使得 $a_n \le \alpha' \le b_n n = 1, 2, 3, \dots$，且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha'$$

由 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，可知 $\alpha = \alpha'$，证毕。

## 确界存在定理 ⇒ 聚点定理

**证明:** 设 $S$ 是有界无穷集，根据 确界存在定理，数集 $S$ 有上下确界，令 $\alpha = \inf S$，$\beta = \sup S$。若 $\alpha, \beta$ 其中有一点不是数集 $S$ 的孤立点，则此点必为聚点。反设，假设 $\alpha, \beta$ 其中都是数集 $S$ 的孤立点，令

$$E = \{x \mid 数集S\ 中仅有有限个数小于x, x \in \mathbb{R}\}$$

显然 $E$ 有上界，根据 确界存在定理，数集 $E$ 有上确界，令 $\beta' = \sup E$，因此 $\forall \varepsilon > 0$，$\beta' + \varepsilon \notin E$，$\beta' - \varepsilon \in E$，于是

$$(\beta' - \varepsilon, \beta' + \varepsilon)\ 中含有S\ 中无穷点,从而\beta'\ 是S\ 的聚点，证毕$$

## 确界存在定理 ⇒ 有限覆盖定理

**证明:** 设闭区间 $[a, b]$ 在实数 $R$ 上，任取闭区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖 $\{O_\lambda\}$，令

$$D = \{x | x \in [a, b], \exists [a, x]\ 能被\{O_\lambda\}\ 的有限子集覆盖\}$$

下说明集合 $D$ 是非空有界的。
$\{O_\lambda\}$ 是闭区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖，则存在 $\{O_\lambda\}$ 的一个开区间 $O_a$，使得 $a \in O_a$，于是 $a \in D$，从而集合 $D$ 非空，又显然 $D \subseteq [a, b]$，从而集合 $D$ 是有界的，因此集合 $D$ 是非空有界的。

根据 确界存在定理，集合 $D$ 有上确界，设 $\xi = \sup D$，下说明 $\xi = b$。假设 $\xi < b$，则 $\xi < b$，$[a, \xi]$ 能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限子集 $O_{\lambda_1}, O_{\lambda_2}, \ldots, O_{\lambda_n}$ 覆盖，又 $\xi \in [a, b]$，则存在 $\{O_\lambda\}$ 的一个开区间 $(\alpha, \beta)$ 使得 $\xi \in (\alpha, \beta)$，任取 $x_1 \in (\xi, \beta)$，易知 $[a, x_1]$ 可被 $\{O_{\lambda_1}, O_{\lambda_2}, \ldots, O_{\lambda_n}\}$ 覆盖。从而 $x_1 \in D$，而 $x_1 > \xi$ 与 $\xi = \sup D$ 矛盾，证毕。

**定理 1.2 (单调有界定理)**

（1）在实数系中，单调且有界的数列必定收敛。
（2）
1. 如果数列 $\{a_n\}$ 是单调增加的，并且有上界，那么 $\{a_n\}$ 收敛。
2. 如果数列 $\{a_n\}$ 是单调减少的，并且有下界，那么 $\{a_n\}$ 收敛。

## 单调有界定理 ⇒ 确界存在定理

**证明:** 设 $S$ 是非空有上界数集，任取它的一个上界 $b$，则 $S \subseteq [a, b]$，其中 $a \in S$。

对 $[a, b]$ 二等分为 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$，若 $\frac{a+b}{2}$ 非 $S$ 的上界，则记 $[a_1, b_1] = \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$，否则记 $[a_1, b_1] = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$。

对 $[a_1, b_1]$ 继续二等分为 $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$，若 $\frac{a_1+b_1}{2}$ 非 $S$ 的上界，则记 $[a_2, b_2] = \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$，否则记 $[a_2, b_2] = \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$。

如此递推，对 $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ 二等分为 $\left[a_{n-1}, \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}\right]$，若 $\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ 非 $S$ 的上界，则记 $[a_n, b_n] = \left[a_{n-1}, \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right]$，否则记 $[a_n, b_n] = \left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}\right]$。

由此，得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$。

易知数列 $\{a_n\}$ 单调增加有上界，数列 $\{b_n\}$ 单调减少有下界且 $\forall x \in S$ 有 $b \geq x$。根据单调有界定理，可知 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均收敛，存在 $\xi \in \mathbb{R}$，使得 $\lim_{n\to\infty} b_n = \xi$，又

$$|a_n - b_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$$

因此 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$。

下说明 $\xi$ 是 $S$ 的上确界:
1. $\forall x \in S$，有 $\xi \geq x$；
2. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，使得 $\xi - a_n < \varepsilon$，即 $\xi < a_n + \varepsilon$，其中 $a_n \in S$。

综上所述，$\xi$ 为 $S$ 的上确界。证毕。

## 单调有界定理 $\Rightarrow$ Cauchy 收敛原理

**证明:**(必要条件) 先证数列 $\{x_n\}$ 收敛 $\Rightarrow$ 数列 $\{x_n\}$ 是基本数列。
设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\forall\varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，使得

$$\forall n, m > N,\ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

从而

$$|x_n - x_m| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

因此数列 $\{x_n\}$ 是基本数列。

再证（充分条件）数列 $\{x_n\}$ 是基本数列 $\Rightarrow$ 数列 $\{x_n\}$ 收敛。
设数列 $\{x_n\}$ 是基本数列，下说明数列 $\{x_n\}$ 有界。$\forall\varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，$\forall n, m > N$，都有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$。取定 $\varepsilon = 1$ 时，存在 $N_1 \in \mathbb{N}^+$，使得

$$\forall n > N_1,\ |x_n - x_{N_1}| < 1$$

于是 $M = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_{N_1}, |x_{N_1}| + 1\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的一个上界，

$$m = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_{N_1}, -1\}$$

是数列 $\{x_n\}$ 的一个下界，因此数列 $\{x_n\}$ 有界。下说明数列 $\{x_n\}$ 收敛。将 $[m, M]$ 均分为

$$\left[m, \frac{m+M}{2}\right], \left[\frac{m+M}{2}, M\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 $\{x_n\}$ 中无穷个点，记此闭区间为 $[m_1, M_1]$。将 $[m_1, M_1]$ 均分为

$$\left[m_1, \frac{m_1+M_1}{2}\right], \left[\frac{m_1+M_1}{2}, M_1\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 $\{x_n\}$ 中无穷个点，记此闭区间为 $[m_2, M_2]$。如此一直下去，得到一列闭区间 $\{[m_n, M_n]\}$，且

$$\lim_{n\to\infty}(M_n - m_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}(M - m) = 0$$

易知数列 $\{m_n\}$ 单调增加，数列 $\{M_n\}$ 单调减少，根据单调有界定理，存在实数 $\alpha, \beta$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} M_n = \beta$$

且

$$m_n \le \alpha \le \beta \le M_n \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

可知 $\lim_{n\to\infty} m_n = \alpha = \beta = \lim_{n\to\infty} M_n$。
令每个 $[m_n, M_n]$ 中取一个 $\{x_n\}$ 中的元素记为 $x_{n_k}$，其中 $x_n$ 与 $x_{n_{k-1}}$ 相异，易知 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$。又数列 $\{x_n\}$ 是基本数列，

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n, m > N,\ |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

而根据 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$ 有

$$\forall\varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}^+, n_k > N, k > K, \text{有}\ |x_{n_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是 $\forall\varepsilon > 0 \forall n > Nk > K$ 有

$$|x_n - \alpha| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$$

因此数列 $\{x_n\}$ 收敛，证毕。

## 单调有界定理 $\Rightarrow$ 闭区间套定理

**证明:** 设一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套，则数列 $\{a_n\}$ 单调递增有上界，数列 $\{b_n\}$ 单调递减有下界，**存在性**，根据单调有界定理，存在实数 $\alpha, \beta$ 使得 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$，又 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，又有

$$a_n \le \alpha \le \beta \le b_n \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

可知 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha = \beta = \lim_{n\to\infty} b_n$。**唯一性**，若另有 $\alpha'$，使得 $a_n \le \alpha' \le b_n \quad n = 1, 2, 3, \ldots$ 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha'$，由 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，可知 $\alpha = \alpha'$，证毕。

## 单调有界定理 $\Rightarrow$ 聚点定理

### 方法一

**证明:** 设 $S$ 是有界无穷点集，取存在闭区间 $[a, b]$，使得 $S \subseteq [a, b]$。将 $[a, b]$ 均分为

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

则必在其中之一闭区间含有 $S$ 中无穷个点，记此闭区间为

$$[a_1, b_1] = \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \text{ 或 } \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

将 $[a_1, b_1]$ 均分为

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

则必在其中之一闭区间含有 $S$ 中无穷个点，记此闭区间为

$$[a_2, b_2] = \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right] \text{ 或 } \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

如此一直下去，得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$，且 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}(b - a) = 0$，易知数列 $\{a_n\}$ 单调增加，数列 $\{b_n\}$ 单调减少，根据单调有界定理，存在实数 $\alpha, \beta$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

且

$$a_n \le \alpha \le \beta \le b_n \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

可知

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha = \beta = \lim_{n\to\infty} b_n$$

下说明 $\alpha$ 是 $S$ 的一个聚点。在每个 $[a_n, b_n]$ 中取一个 $S$ 中的元素记为 $x_n$，易知 $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$，因此 $\alpha$ 是 $S$ 的聚点，证毕。

### 方法二（证明致密性定理）

**证明:** 先说明任意有界数列必有单调子列，设 $\{x_n\}$ 是一个有界数列，定义数列 $\{x_n\}$ 中的第 $k$ 项 $x_k$ 具有性质 $A$ 是指：$x_k = \max\{x_i | i \ge k\}$。

情形一，数列 $\{x_n\}$ 中有无限项具有性质 $A$，不妨设为 $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$，其中

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

则数列 $\{x_{n_k}\}$ 单调减少且有界；

情形二，数列 $\{x_n\}$ 中只有有限项具有性质 $A$，则存在 $N \in \mathbb{N}^+$，$\forall n > N$，$x_n$ 都不具有性质 $A$。任取一项记作 $x_{n_1}$，其中 $n_1 > N$，由于 $x_{n_1}$ 不具有性质 $A$，则必存在 $n_2 > n_1$ 使得 $x_{n_2} > x_{n_1}$，由于 $x_{n_2}$ 不具有性质 $A$，则必存

在 $n_3 > n_2$ 使得 $x_{n_3} > x_{n_2}$，如此继续下去可以得到一个单调增加的数列 $\{x_{n_k}\}$。

从而证明了任意有界数列必有单调子列。根据 单调有界定理，数列 $\{x_{n_k}\}$ 必收敛，于是对于任意无界数集 $S$，必有聚点。

## 单调有界定理 ⇒ 有限覆盖定理

**证明:** 设闭区间 $[a,b]$ 在实数 $R$ 上，任取闭区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖 $\{O_\lambda\}$，反证法，假设闭区间 $[a,b]$ 不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖。将 $[a,b]$ 二等分为

$$\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\left[\frac{a+b}{2},b\right]$$

至少有其中之一不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖，将此区间记为 $[a_1,b_1]$。将 $[a_1,b_1]$ 二等分为

$$\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right],\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$$

至少有其中之一不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖，将此区间记为 $[a_2,b_2]$。如此下去，便可得到一列闭区间 $\{[a_n,b_n]\}$，且 $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}(b-a)=0$。易知数列 $\{a_n\}$ 单调增加，数列 $\{b_n\}$ 单调减少，根据 单调有界定理，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 收敛，又

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$$

可知存在 $\xi$，使得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi \quad a_n\le\xi\le b_n \quad n=1,2,\dots$$

由于存在 $\{O_\lambda\}$ 的一个开区间 $O_{\lambda^*}$，使得 $\xi\in O_{\lambda^*}$，当 $n$ 充分大时，必有 $[a_n,b_n]\subseteq O_{\lambda^*}$ 与 $[a,b]$ 不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖矛盾，因此存在 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖闭区间 $[a,b]$，证毕。

**定理 1.3 (Cauchy 收敛准则)**

(1) 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是 $\{x_n\}$ 是柯西数列。

(2) 一个实数数列 $\{a_n\}$ 收敛，当且仅当对任意的 $\varepsilon>0$，存在一个正整数 $N$，使得当 $n,m>N$ 时，满足

$$|a_n-a_m|<\varepsilon$$

那么数列 $\{a_n\}$ 是收敛的。

## Cauchy 收敛准则 ⇒ 确界存在定理

**证明:** 设 $S$ 是非空有上界数集，任取它的一个上界 $b\notin S$，任取 $a\in S$，则 $S\subseteq[a,b]$。将 $[a,b]$ 均分为

$$\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\left[\frac{a+b}{2},b\right]$$

若 $\frac{a+b}{2}$ 非 $S$ 的上界，则记 $[a_1,b_1]=\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$，否则记 $[a_1,b_1]=\left[\frac{a+b}{2},b\right]$。对 $[a_1,b_1]$ 均分为

$$\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right],\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$$

若 $\frac{a_1+b_1}{2}$ 非 $S$ 的上界，则记 $[a_2,b_2]=\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right]$，否则记 $[a_2,b_2]=\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$。依此类推，对 $[a_{n-1},b_{n-1}]$ 均分为

$$\left[a_{n-1},\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right],\left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},b_{n-1}\right]$$

若 $\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ 非 $S$ 的上界，则记 $[a_n,b_n]=\left[a_{n-1},\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right]$，否则记 $[a_n,b_n]=\left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},b_{n-1}\right]$。依此类推，得到一列闭区间 $\{[a_n,b_n]\}$。易知 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足:

1. $\{[a_n,b_n]\}\subseteq[a,b]$，且 $\{[a_{n+1},b_{n+1}]\}\subseteq[a_n,b_n]$，$n=1,2,3,\dots$;

2. $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n(b-a)=0$。

因此，$\{[a_n,b_n]\}$ 形成一个闭区间套。$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，使得 $\left(\frac{1}{2}\right)^N(b-a)<\varepsilon$，则 $\forall n,m>N$，有

$$|a_n-a_m|<|a_n-b_n|=\left(\frac{1}{2}\right)^n(b-a)<\varepsilon$$

$$|b_n-b_m|<|b_n-a_n|=\left(\frac{1}{2}\right)^n(b-a)<\varepsilon$$

因此数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均是基本数列。根据 Cauchy 收敛准则，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均收敛，设 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi$，下说明 $\xi$ 是 $S$ 的上确界。
$\forall x\in S$，有 $x\leq\xi$；$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，有 $n>N$, 使得 $a_n\leq x<\xi+\varepsilon$，即 $b_n\leq\xi+\varepsilon$，从而 $b_n\in S$。综上，$\xi$ 是 $S$ 的上确界，证毕。

## Cauchy 收敛准则 ⇒ 单调有界定理

**证明:** 设数列 $\{x_n\}$ 是单调增加有上界, 令 $S=\{x_1,x_2,\ldots\}$, 任取它的一个上界 $b\notin S$, 任取 $a\in S$, 则 $S\subseteq[a,b]$。对 $[a,b]$ 二等分为

$$\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\left[\frac{a+b}{2},b\right]$$

若 $\frac{a+b}{2}$ 非 $S$ 的上界，则记 $[a_1,b_1]=\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$，否则记 $[a_1,b_1]=\left[\frac{a+b}{2},b\right]$。对 $[a_1,b_1]$ 二等分为

$$\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right],\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$$

若 $\frac{a_1+b_1}{2}$ 非 $S$ 的上界，则记 $[a_2,b_2]=\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right]$，否则记 $[a_2,b_2]=\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$。依此类推，对 $[a_{n-1},b_{n-1}]$ 二等分为

$$\left[a_{n-1},\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right],\left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},b_{n-1}\right]$$

若 $\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ 非 $S$ 的上界，则记 $[a_n,b_n]=\left[a_{n-1},\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right]$，否则记 $[a_n,b_n]=\left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},b_{n-1}\right]$。依此类推，得到一列闭区间 $\{[a_n,b_n]\}$。$\forall\varepsilon>0$，由

$$b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)$$

可知 $\exists N\in\mathbb{N}^+$，$n>N$, 使得 $\frac{1}{2^n}(b-a)<\varepsilon$，于是 $\forall n,m>N$，有

$$|a_n-a_m|<|b_n-a_n|<\varepsilon\quad|b_n-b_m|<|b_n-a_n|<\varepsilon$$

因此数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是 Cauchy 数列，根据 Cauchy 收敛准则，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都收敛，且由 $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\frac{1}{2^n}(b-a)=0$ 知,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi$$

在 $[a_n,b_n]$ 中取某个 $x_n^k\in\{x_1,x_2,\ldots\}$，于是有 $\{x_n^k\}$ 的子列收敛到 $\xi$，即 $\lim_{k\to\infty}x_n^k=\xi$，易知 $\lim_{n\to\infty}x_n=\xi$

## Cauchy 收敛准则 ⇒ 闭区间套定理

**证明:** 设一列闭区间 $\{[a_n,b_n]\}$ 形成一个闭区间套，存在性，由 $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ 知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，使得 $b_n-a_n<\varepsilon$，于是 $\forall n,m>N$，有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$，$|b_n-b_m|<\varepsilon$。因此数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是 Cauchy 数列，根据 Cauchy 收敛准则，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都收敛。由 $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ 知

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi$$

并设收敛到 $\xi$。唯一性，若另有 $\xi'$，使得 $a_n\leq\xi'\leq b_n n=1,2,3,\ldots$，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi'$，由 $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，可知 $\xi=\xi'$，证毕。

## Cauchy 收敛准则 ⇒ 聚点定理

**证明:** 设 $S$ 是有界无穷点集，则存在闭区间 $[a,b]$，使得 $S \subseteq [a,b]$。将 $[a,b]$ 均分为

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 $S$ 中无穷个点，记此闭区间为 $[a_1,b_1]$。将 $[a_1,b_1]$ 均分为

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 $S$ 中无穷个点，记此闭区间为 $[a_2,b_2]$。$\cdots$，将 $[a_{k-1},b_{k-1}]$ 均分为

$$\left[a_{k-1}, \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}\right], \left[\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}, b_{k-1}\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 $S$ 中无穷个点，记此闭区间为 $[a_k,b_k]$。如此一直下去，得到一列闭区间 $\{[a_n,b_n]\}$，且

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}(b-a) = 0$$

易知 $\{a_n\}$ 单调增加，数列 $\{b_n\}$ 单调减少，且 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，使得 $b_n - a_n < \varepsilon$，于是 $\forall n,m > N$，有

$$|a_n - a_m| < |b_n - a_n| < \varepsilon$$

$$|b_n - b_m| < |b_n - a_n| < \varepsilon$$

因此数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是 Cauchy 数列, 根据 Cauchy 收敛准则, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都收敛, 设收敛到 $\xi$。由 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ 知

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$$

下说明 $\xi$ 是 $S$ 的一个聚点。在每个 $[a_n,b_n]$ 中取一个 $S$ 中的元素记为 $x_n$，易知 $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$，因此 $\alpha = \xi$ 是 $S$ 的聚点，证毕。

## Cauchy 收敛准则 ⇒ 有限覆盖定理

**证明:** 设闭区间 $[a,b]$ 在实数 $R$ 上，任取闭区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖 $\{O_\lambda\}$，反证法，假设闭区间 $[a,b]$ 不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖，将 $[a,b]$ 二等分为

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

至少有其中之一不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖，将此区间记为 $[a_1,b_1]$。将 $[a_1,b_1]$ 二等分为

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

至少有其中之一不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖, 将此区间记为 $[a_2,b_2]$。如此下去, 便可得到一列闭区间 $\{[a_n,b_n]\}$, 且

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n(b-a) = 0$$

易知数列 $\{a_n\}$ 单调增加，数列 $\{b_n\}$ 单调减少，且 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，使得 $b_n - a_n < \varepsilon$，于是 $\forall n,m > N$，有

$$|a_n - a_m| < |b_n - a_n| < \varepsilon$$

$$|b_n - b_m| < |b_n - a_n| < \varepsilon$$

因此数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是 Cauchy 数列, 根据 Cauchy 收敛准则, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 都收敛, 设收敛到 $\xi$。由 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ 知

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$$

且 $\xi \in [a,b]$，于是存在 $\{O_\lambda\}$ 的一个开区间 $O_{\lambda^*}$，使得 $\xi \in O_{\lambda^*}$，当 $n$ 充分大时，必有 $[a_n,b_n] \subseteq O_{\lambda^*}$ 与 $[a,b]$ 不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖矛盾。因此存在 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖闭区间 $[a,b]$，证毕。

**定理 1.4 (闭区间套定理)**

(1) 若 $\{[a_n,b_n]\}$ 形成一个闭区间套，则存在唯一的实数 $\xi$ 属于所有的闭区间 $[a_n,b_n]$，$n=1,2,3,\cdots$，且存在唯一的实数 $\xi$，使得 $\xi$ 属于所有这些闭区间，即 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0 = \lim_{n\to\infty} a_n = \xi$

(2)

1. $[a_{n+1},b_{n+1}] \subseteq [a_n,b_n]$ 对于所有正整数 $n$ 都成立；
2. $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$。

则存在唯一的实数 $\xi$，使得

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\xi\}$$

♡

## 闭区间套定理 ⇒ 确界存在定理

**证明:** 设 $S$ 是非空有上界数集，任取它的一个上界 $b \notin S$，任取 $a \in S$，则 $S \subseteq [a,b]$。对 $[a,b]$ 二等分为

$$\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\left[\frac{a+b}{2},b\right]$$

若 $\frac{a+b}{2}$ 非 $S$ 的上界，则记 $[a_1,b_1]=\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$，否则记 $[a_1,b_1]=\left[\frac{a+b}{2},b\right]$。对 $[a_1,b_1]$ 二等分为

$$\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right],\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$$

若 $\frac{a_1+b_1}{2}$ 非 $S$ 的上界，则记 $[a_2,b_2]=\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right]$，否则记 $[a_2,b_2]=\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$。依此类推，对 $[a_{n-1},b_{n-1}]$ 二等分为

$$\left[a_{n-1},\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right],\left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},b_{n-1}\right]$$

若 $\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ 非 $S$ 的上界，则记 $[a_n,b_n]=\left[a_{n-1},\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right]$，否则记 $[a_n,b_n]=\left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},b_{n-1}\right]$。依此类推，得到一列闭区间 $\{[a_n,b_n]\}$。易知 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足：

1. $\{[a_{n+1},b_{n+1}] \subseteq [a_n,b_n]\}$ 对于所有正整数 $n$ 都成立；
2. $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n(b-a)=0$。

因此，$\{[a_n,b_n]\}$ 形成一个闭区间套。根据闭区间套定理，存在实数 $\xi \in \mathbb{R}$，使得

$$a_n \le \xi \le b_n \quad n=1,2,3,\ldots$$

且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$$

下说明 $\xi$ 是 $S$ 的上确界：

1. $\forall x \in S$，有 $x \le \xi$；
2. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，使得 $\xi - a_n < \varepsilon$，即 $b < \xi + \varepsilon$，其中 $a_n \in S$。

因此，$\xi$ 是 $S$ 的上确界，证毕。

## 闭区间套定理 ⇒ 单调有界定理

**证明:** 设数列 $\{x_n\}$ 是单调增加有上界，令 $S=\{x_1,x_2,\ldots\}$，任取它的一个上界 $b \notin S$，任取 $a \in S$，则 $S \subseteq [a,b]$。对 $[a,b]$ 二等分为

$$\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\left[\frac{a+b}{2},b\right]$$

若 $\frac{a+b}{2}$ 非 $S$ 的上界，则记 $[a_1,b_1]=\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$，否则记 $[a_1,b_1]=\left[\frac{a+b}{2},b\right]$。对 $[a_1,b_1]$ 二等分为

$$\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right],\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$$

若 $\frac{a_1+b_1}{2}$ 非 $S$ 的上界，则记 $[a_2,b_2]=\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right]$，否则记 $[a_2,b_2]=\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$。依此类推，对 $[a_{n-1},b_{n-1}]$ 二等分为

$$\left[a_{n-1},\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right],\left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},b_{n-1}\right]$$

若 $\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ 非 $S$ 的上界，则记 $[a_n,b_n]=\left[a_{n-1},\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right]$，否则记 $[a_n,b_n]=\left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},b_{n-1}\right]$。依此类推，得到一列闭区间 $\{[a_n,b_n]\}$。易知 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足：

1. $\{[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]\}$ 对于所有正整数 $n$ 都成立；
2. $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n(b-a)=0$。

因此，$\{[a_n,b_n]\}$ 形成一个闭区间套。根据闭区间套定理，存在唯一的实数 $\xi\in\mathbb{R}$，使得

$$a_n\le\xi\le b_n\quad n=1,2,3,\dots$$

且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\xi$$

下说明 $\xi$ 是 $S$ 的上确界。在每个 $[a_n,b_n]$ 中取某个 $x_n^k\in\{x_1,x_2,\dots\}$，于是有 $\{x_n^k\}$ 的子列收敛到 $\xi$，即 $\lim_{k\to\infty}x_n^k=\xi$，易知 $\lim_{n\to\infty}x_n=\xi$，因此 $S$ 的上确界是 $\xi$，证毕。

## 闭区间套定理 ⇒ Cauchy 收敛准则

**证明:** 先证数列 $\{x_n\}$ 收敛 ⇒ 数列 $\{x_n\}$ 是基本数列。设 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，使得

$$\forall n,m>N\ |x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}\,|x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

从而

$$|x_n-x_m|\le|x_n-a|+|x_m-a|<\varepsilon$$

因此数列 $\{x_n\}$ 是基本数列。

再证数列 $\{x_n\}$ 是基本数列 ⇒ 数列 $\{x_n\}$ 收敛。设数列 $\{x_n\}$ 是基本数列，下说明数列 $\{x_n\}$ 有界。$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，$\forall n,m>N$，都有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$。取定 $\varepsilon=1$ 时，存在 $N_1\in\mathbb{N}^+$，使得

$$\forall n>N_1,\ |x_n-x_{N_1}|<\varepsilon$$

于是 $M=\max\{x_1,x_2,\dots,x_{N_1},|x_{N_1}|+1\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的一个上界，

$$m=\min\{x_1,x_2,\dots,x_{N_1},-1\}$$

是数列 $\{x_n\}$ 的一个下界，因此数列 $\{x_n\}$ 有界。下说明数列 $\{x_n\}$ 收敛。将 $[m,M]$ 均分为

$$\left[m,\frac{m+M}{2}\right],\left[\frac{m+M}{2},M\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 $\{x_n\}$ 中无穷个点，记此闭区间为 $[m_1,M_1]$。将 $[m_1,M_1]$ 均分为

$$\left[m_1,\frac{m_1+M_1}{2}\right],\left[\frac{m_1+M_1}{2},M_1\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 $\{x_n\}$ 中无穷个点，记此闭区间为 $[m_2,M_2]$。$\cdots$，将 $[m_{k-1},M_{k-1}]$ 均分为

$$\left[m_{k-1},\frac{m_{k-1}+M_{k-1}}{2}\right],\left[\frac{m_{k-1}+M_{k-1}}{2},M_{k-1}\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 $\{x_n\}$ 中无穷个点，记此闭区间为 $[m_k,M_k]$。如此一直下去，得到一列闭区间 $\{[m_n,M_n]\}$，且

$$\lim_{n\to\infty}(M_n-m_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}(M-m)=0$$

易知 $\{m_n\}$ 单调增加，数列 $\{M_n\}$ 单调减少，根据闭区间套定理，存在实数 $\alpha, \beta$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} M_n = \beta$$

且

$$m_n \leq \alpha \leq \beta \leq M_n \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

可知 $\lim_{n\to\infty} m_n = \alpha = \beta = \lim_{n\to\infty} M_n$，即 $\lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty} M_n = \xi$。下说明 $\xi$ 是 $S$ 的一个聚点。在每个 $[m_n, M_n]$ 中取一个 $S$ 中的元素记为 $x_n$，易知 $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$。因此数列 $\{x_n\}$ 收敛，证毕。

## 闭区间套定理 ⇒ 聚点定理

**证明:** 设 $S$ 是有界无穷点集，则存在闭区间 $[a, b]$，使得 $S \subseteq [a, b]$。将 $[a, b]$ 均分为

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 $S$ 中无穷个点，记此闭区间为 $[a_1, b_1]$。将 $[a_1, b_1]$ 均分为

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 $S$ 中无穷个点，记此闭区间为 $[a_2, b_2]$。$\cdots$，将 $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ 均分为

$$\left[a_{k-1}, \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}\right], \left[\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}, b_{k-1}\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 $S$ 中无穷个点，记此闭区间为 $[a_k, b_k]$。如此一直下去，得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$，且

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}(b-a) = 0$$

因此 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套。根据闭区间套定理，存在唯一的实数 $\xi \in \mathbb{R}$，使得

$$a_n \leq \xi \leq b_n \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$$

下说明 $\xi$ 是 $S$ 的一个聚点。在每个 $[a_n, b_n]$ 中取一个 $S$ 中的元素记为 $x_n$，易知 $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$，因此 $\alpha$ 是 $S$ 的聚点，证毕。

## 闭区间套定理 ⇒ 有限覆盖定理

**证明:** 设闭区间 $[a, b]$ 在实数 $R$ 上，任取闭区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖 $\{O_\lambda\}$，反证法，假设闭区间 $[a, b]$ 不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖，将 $[a, b]$ 二等分为

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

至少有其中之一不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖，将此区间记为 $[a_1, b_1]$。将 $[a_1, b_1]$ 二等分为

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

至少有其中之一不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖，将此区间记为 $[a_2, b_2]$。如此下去，便可得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$，且

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a) = 0$$

因此 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套。根据闭区间套定理，存在唯一的实数 $\xi$ 属于所有的闭区间 $[a_n, b_n]$，且

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \quad a_n \leq \xi \leq b_n \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

于是存在 $\{O_\lambda\}$ 的一个开区间 $O_{\lambda^*}$，使得 $\xi \in O_{\lambda^*}$，当 $n$ 充分大时，必有 $[a_n, b_n] \subseteq O_{\lambda^*}$ 与 $[a, b]$ 不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖矛盾。因此存在 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖闭区间 $[a, b]$，证毕。

**定理 1.5 (聚点定理)**

(1) 在一个有界的无限点集 $S$ 中，至少存在一个实数 $\xi$，它是这个集合的聚点。即在这个点的任意小的邻域内，总是包含这个集合中的无穷多个点。

(2) 设 $S$ 是实数集合 $\mathbb{R}$ 的一个有界无限点集，则存在一个实数 $\xi \in \mathbb{R}$，使得对于任意的 $\varepsilon > 0$，区间 $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ 内总是包含 $S$ 中的无穷多个点。

(3)

- 聚点定理：在一个有界序列中，至少存在一个聚点。
- 魏尔斯特拉斯定理：每个有界数列都有至少一个聚点。
- 致密性定理：一个集合是致密的当且仅当它的每一个开覆盖都有有限子覆盖。
- Bolzano-Weierstrass 定理：任何有界数列必有一个收敛的子序列。

## 聚点定理 ⇒ 确界存在定理

**证明:** 设 $S$ 是非空有上界数集，任取它的一个上界 $b \notin S$，取 $a \in S$，使得 $S \cap (a, b) \neq \emptyset$。对 $[a, b]$ 一等分为

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \quad 和 \quad \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

若 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \cap S \neq \emptyset$，则记 $[a_1, b_1] = \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$，否则记 $[a_1, b_1] = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$。对 $[a_1, b_1]$ 一等分为

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right] \quad 和 \quad \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

若 $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right] \cap S \neq \emptyset$，则记 $[a_2, b_2] = \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$，否则记 $[a_2, b_2] = \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$。依此类推，对 $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ 一等分为

$$\left[a_{n-1}, \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right] \quad 和 \quad \left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}\right]$$

若 $\left[a_{n-1}, \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right] \cap S \neq \emptyset$，则记 $[a_n, b_n] = \left[a_{n-1}, \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right]$，否则记 $[a_n, b_n] = \left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_{n-1}\right]$。依此类推，得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$。记 $R = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$，其中如有相同项则记一个。易知集合 $R$ 有界，根据聚点定理，集合 $R$ 必有聚点记为 $\xi$，则有 $\{b_n\}$ 的子列 $\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = \xi$。

下说明 $\xi$ 是 $S$ 的上确界：

1. $\forall x \in S$，有 $x \le \xi$；
2. $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，使得 $\xi - a_n < \varepsilon$，即 $b < \xi + \varepsilon$，其中 $a_n \in S$。

① 由 $|a_n - b_{n_k}| = \frac{1}{2^{n_k}}(b-a)$ 知，$\lim_{n\to\infty} a_n = \xi$；

② $\xi$ 是 $S$ 的一个上界，不然存在 $x_0 \in S$，使得 $x_0 > \xi$，由 $\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = \xi$ 知，对于 $\varepsilon = x_0 - \xi$，$\exists K \in \mathbb{N}^+$，$\forall k > K$ 有 $-\varepsilon < b_{n_k} - \xi < \varepsilon$，即 $b_{n_k} - \xi < \varepsilon$，因此 $x_0 > b_{n_k}$ 是 $S$ 的上界矛盾，从而 $\xi$ 是 $S$ 的一个上界；

③ $\xi$ 是 $S$ 的最小上界，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists K \in \mathbb{N}^+$，使得 $b_{n_k} - \varepsilon < \xi < \varepsilon$，因为 $\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = \xi$，所以 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists K \in \mathbb{N}^+$，使得 $-\varepsilon < b_{n_k} - \xi < \varepsilon$，从而有 $b_{n_k} - \varepsilon < \xi < \varepsilon$。

综合 ①②③ 得 $\xi$ 是 $S$ 的上确界。

## 聚点定理 ⇒ 单调有界定理

**证明:** 设数列 $\{x_n\}$ 是单调增加有上界，令 $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$，任取它的一个上界 $b \notin S$，任取 $a \in S$，则 $S \subseteq [a, b]$。对 $[a, b]$ 二等分为

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

若 $\frac{a+b}{2}$ 非 $S$ 的上界，则记 $[a_1,b_1]=\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$，否则记 $[a_1,b_1]=\left[\frac{a+b}{2},b\right]$。对 $[a_1,b_1]$ 二等分为

$$\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right],\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$$

若 $\frac{a_1+b_1}{2}$ 非 $S$ 的上界，则记 $[a_2,b_2]=\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right]$，否则记 $[a_2,b_2]=\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$。依此类推，对 $[a_{n-1},b_{n-1}]$ 二等分为

$$\left[a_{n-1},\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right],\left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},b_{n-1}\right]$$

若 $\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ 非 $S$ 的上界，则记 $[a_n,b_n]=\left[a_{n-1},\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right]$，否则记 $[a_n,b_n]=\left[\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},b_{n-1}\right]$。依此类推，得到一列闭区间 $\{[a_n,b_n]\}$。易知 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足：

1. $\{[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]\}$ 对于所有正整数 $n$ 都成立；
2. $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n(b-a)=0$。

因此，$\{[a_n,b_n]\}$ 形成一个闭区间套。根据 聚点定理，$\{[a_n,b_n]\}$ 每一个区间都至少有一个数列 $\{x_n\}$ 的聚点。又数列 $\{x_n\}$ 单调增加，且 $b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)$。因此数列 $\{x_n\}$ 聚点唯一，设为 $\xi$，于是有 $\lim_{n\to\infty}x_n=\xi$。证毕。

## 聚点定理 ⇒ Cauchy 收敛准则

**证明:** 先证数列 $\{x_n\}$ 收敛 ⇒ 数列 $\{x_n\}$ 是基本数列。设 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，使得

$$\forall n,m>N\ |x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}\ |x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

从而

$$|x_n-x_m|\le|x_n-a|+|x_m-a|<\varepsilon$$

因此数列 $\{x_n\}$ 是基本数列。

再证数列 $\{x_n\}$ 是基本数列 ⇒ 数列 $\{x_n\}$ 收敛。设数列 $\{x_n\}$ 是基本数列，下说明数列 $\{x_n\}$ 有界。$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^+$，$\forall n,m>N$，都有 $|x_n-x_m|<\varepsilon$。取定 $\varepsilon=1$ 时，存在 $N_1\in\mathbb{N}^+$，使得

$$\forall n>N_1,\ |x_n-x_{N_1}|<\varepsilon$$

于是 $M=\max\{x_1,x_2,\ldots,x_{N_1},|x_{N_1}|+1\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的一个上界，

$$m=\min\{x_1,x_2,\ldots,x_{N_1},-1\}$$

是数列 $\{x_n\}$ 的一个下界，因此数列 $\{x_n\}$ 有界。下说明数列 $\{x_n\}$ 收敛。将 $[m,M]$ 均分为

$$\left[m,\frac{m+M}{2}\right],\left[\frac{m+M}{2},M\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 $\{x_n\}$ 中无穷个点，记此闭区间为 $[m_1,M_1]$。将 $[m_1,M_1]$ 均分为

$$\left[m_1,\frac{m_1+M_1}{2}\right],\left[\frac{m_1+M_1}{2},M_1\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 $\{x_n\}$ 中无穷个点，记此闭区间为 $[m_2,M_2]$。$\cdots$，将 $[m_{k-1},M_{k-1}]$ 均分为

$$\left[m_{k-1},\frac{m_{k-1}+M_{k-1}}{2}\right],\left[\frac{m_{k-1}+M_{k-1}}{2},M_{k-1}\right]$$

则必有其中之一闭区间含有 $\{x_n\}$ 中无穷个点，记此闭区间为 $[m_k,M_k]$。如此一直下去，得到一列闭区间 $\{[m_n,M_n]\}$，且

$$\lim_{n\to\infty}(M_n-m_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}(M-m)=0$$

易知 $\{m_n\}$ 单调增加，数列 $\{M_n\}$ 单调减少，根据 聚点定理，存在实数 $\alpha,\beta$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}m_n=\alpha,\quad\lim_{n\to\infty}M_n=\beta$$

且

$$m_n\le\alpha\le\beta\le M_n\quad n=1,2,3,\ldots$$

可知 $\lim_{n\to\infty} m_n = \alpha = \beta = \lim_{n\to\infty} M_n$。再根据数列 $\{x_n\}$ 是基本数列 $\Rightarrow$ 数列 $\{x_n\}$ 收敛，设数列 $\{x_n\}$ 是基本数列，下说明数列 $\{x_n\}$ 有界。由此得证。

## 聚点定理 $\Rightarrow$ 闭区间套定理

**证明:** 设一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套，则数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 有界，存在性，根据聚点定理，存在实数 $\alpha, \beta$，子列 $\{a_{n_k}\} \subseteq \{a_n\}$，子列 $\{b_{n_k}\} \subseteq \{b_n\}$，使得 $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$，$\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = \beta$。

由数列 $\{a_n\}$ 单调递增有上界，数列 $\{b_n\}$ 单调递减有下界知 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$，且 $\alpha \le a_n \le b_n \le \beta$，$n = 1, 2, 3, \ldots$。又 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，于是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha = \beta = \lim_{n\to\infty} b_n$$

唯一性：若另有 $\alpha'$，使得 $a_n \le \alpha' \le b_n n = 1, 2, 3, \ldots$ 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha'$ 由 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，可知 $\alpha = \alpha'$。证毕。

## 聚点定理 $\Rightarrow$ 有限覆盖定理

**证明:** 设闭区间 $[a, b]$ 在实数 $R$ 上，任取闭区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖 $\{O_\lambda\}$，反证法，假设闭区间 $[a, b]$ 不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖，将 $[a, b]$ 二等分为

$$\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

至少有其中之一不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖，将此区间记为 $[a_1, b_1]$。将 $[a_1, b_1]$ 二等分为

$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$$

至少有其中之一不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖，将此区间记为 $[a_2, b_2]$。如此下去，便可得到一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$，且

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a) = 0$$

易知数列 $\{a_n\}$ 单调增加有上界，数列 $\{b_n\}$ 单调减少有下界。根据聚点定理，存在实数 $\alpha$，使得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$$

于是存在 $\{O_\lambda\}$ 的一个开区间 $O_{\lambda^*}$，使得 $\alpha \in O_{\lambda^*}$，当 $n$ 充分大时，必有 $[a_n, b_n] \subseteq O_{\lambda^*}$，与 $[a_n, b_n]$ 不能被 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖矛盾。因此存在 $\{O_\lambda\}$ 的有限个子集覆盖闭区间 $[a, b]$，证毕。

**定理 1.6 (有限覆盖定理)**

(1) 一个集合是紧的当且仅当它是闭且有界的。

(2) 若一个开覆盖 $S$ 覆盖了闭区间 $[a, b]$，即 $[a, b] \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$，其中 $U_i$ 是 $S$ 中的开区间，则存在有限个开区间 $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_n}$ 使得 $[a, b] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$。

## 有限覆盖定理 $\Rightarrow$ 确界存在定理

**证明:** 反证法，设 $S$ 是非空有上界的实数集，假设 $S$ 没有上确界（最小上界）。任取它的一个上界 $b \notin S$，任取 $a \in S$，则 $\forall x \in [a, b]$ 有:

1. $x$ 是 $S$ 的一个上界，由于 $S$ 无最小上界，因此 $\exists x' \in [a, b]$，$x'$ 是 $S$ 的一个上界，且 $x' < x$，从而存在 $x$ 的一个开邻域 $O_x$，其中 $O_x$ 中的元素都是 $S$ 的上界；
2. $x$ 不是 $S$ 的上界，则存在 $x'' \in S \cap [a, b] x'' > x$，于是存在 $x$ 的一个开邻域 $O_x$，其中 $O_x$ 中的元素都不是 $S$ 的上界。

因此 $[a,b]$ 上的每个点都能找到一个开邻域 $O_x$，它要么属于第一类（每个点都为 $S$ 的上界），要么属于第二类（每个点都不是 $S$ 的上界），从而 $\{O_x \mid x \in [a,b]\}$ 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖。根据 有限覆盖定理，存在有限子集 $\{O_{x_1}, O_{x_2}, \ldots, O_{x_k}\}$，使得 $[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} O_{x_i}$。又因为 $b$ 所在的开区间属于第一类，相邻接的开区间有公共点，也应为第一类的，经过有限邻接，可知 $a$ 所在的开区间也是第一类的，与 $a$ 不是 $S$ 的上界矛盾，因此 $S$ 有上确界。证毕。

## 有限覆盖定理 ⇒ 单调有界定理

**证明:** 用反证法，设数列 $\{x_n\}$ 单调递增有上界，于是存在 $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ 使得 $\forall n \in \mathbb{N}^+$，$x_n \in [a,b]$。假设 $\{x_n\}$ 不收敛，则 $\forall x \in [a,b]$，必存在 $x$ 的某个开邻域 $O_x$ 只含有数列 $\{x_n\}$ 的有限个点。令 $S = \{O_x \mid x \in [a,b]\}$，则 $S$ 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖。根据 有限覆盖定理，$S$ 的有限子集 $\{O_1, O_2, \ldots, O_k\}$ 可以覆盖 $[a,b]$，即 $[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} O_i$。但每个 $O_i$ 中只能含有数列 $\{x_n\}$ 的有限个点，与 $\{x_n\}$ 在 $[a,b]$ 中齐矛盾，因此数列 $\{x_n\}$ 必收敛。证毕。

## 有限覆盖定理 ⇒ Cauchy 收敛准则

**证明:** 先证数列 $\{x_n\}$ 收敛 ⇒ 数列 $\{x_n\}$ 是基本数列。设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，使得

$$\forall n, m > N, \text{都有} |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

从而

$$|x_n - x_m| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

因此数列 $\{x_n\}$ 是基本数列。

再证数列 $\{x_n\}$ 是基本数列 ⇒ 数列 $\{x_n\}$ 收敛。设数列 $\{x_n\}$ 是基本数列，下说明数列 $\{x_n\}$ 有界。$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，$\forall n, m > N$，都有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$。取定 $\varepsilon = 1$ 时，存在 $N_1 \in \mathbb{N}^+$，使得

$$\forall n > N_1, |x_n - x_{N_1}| < \varepsilon$$

于是 $M = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_{N_1}, |x_{N_1}| + 1\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的一个上界，

$$m = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_{N_1}, -1\}$$

是数列 $\{x_n\}$ 的一个下界，因此数列 $\{x_n\}$ 有界。下说明数列 $\{x_n\}$ 收敛。假设数列 $\{x_n\}$ 不存在收敛子列，则 $\forall x \in [m,M]$，存在 $x$ 的一个开邻域 $O_x$，使得 $O_x$ 至多含有数列 $\{x_n\}$ 的有限项，令 $D = \{O_x \mid x \in [m,M]\}$，则 $D$ 是 $[m,M]$ 的一个开覆盖。根据 有限覆盖定理，存在 $D$ 的有限个子集 $\{O_{x_1}, O_{x_2}, \ldots, O_{x_k}\}$，使得 $[m,M] \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} O_{x_i}$。而 $\bigcup_{i=1}^{k} O_{x_i}$ 中只含有数列 $\{x_n\}$ 的有限项，与 $[m,M] \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} O_{x_i}$ 矛盾，因此数列 $\{x_n\}$ 存在收敛子列。设存在实数 $\xi$，数列 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$$

又数列 $\{x_n\}$ 是基本数列，则

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, \forall n, m > N, |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

而根据 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$ 有

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, n_k > N, k > K |x_{n_k} - \xi| < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n > N, k > K |x_n - \xi| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \xi| < \varepsilon$$

因此数列 $\{x_n\}$ 收敛。证毕。

## 有限覆盖定理 ⇒ 闭区间套定理

**证明:** 设一列闭区间 $\{[a_n,b_n]\}$ 形成一个闭区间套, 存在性, 下说明 $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\neq\varnothing$。假设 $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\varnothing$, 则 $\forall x\in[a,b]$, 存在一个开邻域 $O_x$, 使得 $O_x$ 不全与 $[a_n,b_n]$ 相交, 即存在 $N\in\mathbb{N}^+$, 使得 $O_x\cap[a_N,b_N]=\varnothing$。令 $S=\{O_x \mid x\in[a,b]\}$, 于是 $S$ 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖。根据 有限覆盖定理, 存在 $S$ 的有限个子集 $\{O_{x_1},O_{x_2},\ldots,O_{x_k}\}$, 使得 $[a,b]\subseteq\bigcup_{i=1}^{k}O_{x_i}$。而 $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\varnothing$, $i=1,2,\ldots,k$。取 $[a_{n_i},b_{n_i}]$ 中最小的区间为 $[a_0,b_0]$, 于是

$$[a_0,b_0]\cap\bigcup_{i=1}^{k}O_{x_i}=\varnothing$$

与 $[a_0,b_0]\subseteq\bigcup_{i=1}^{k}O_{x_i}$ 矛盾。因此 $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\neq\varnothing$。即存在 $\xi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$。由于 $\{[a_n,b_n]\}$ 为闭区间套, 得 $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)\to 0$, 故 $\xi$ 唯一。若另有 $\xi'\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$, 则由 $|\xi-\xi'|\leq|b_n-a_n|\to 0$ ($n\to\infty$) 知, $\xi=\xi'$。于是 $\xi=\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$。证毕。

## 有限覆盖定理 ⇒ 聚点定理

**证明:** 设 $S$ 是有界无穷点集, 则存在闭区间 $[a,b]$, 使得 $S\subseteq[a,b]$。

情形一, 存在 $\xi\in[a,b]$, $\xi$ 的任意邻域都包含 $S$ 中的无限项, 则在开区间 $\left(\xi-\frac{1}{k},\xi+\frac{1}{k}\right)$ 中任取 $S$ 中的一项记为 $x_k$, 其中 $x_k$ 取与 $x_{k-1}$ 相异的项, $k=1,2,3,\ldots$, 于是 $\lim_{n\to\infty}x_n=\xi$, 因此 $\xi$ 为数集 $S$ 的聚点;

情形二, 不存在情形一中的 $\xi$, 即 $\forall x\in[a,b]$, 存在 $x$ 的一个开邻域 $O_x$, 使得 $O_x$ 只含有数集 $S$ 中的有限项。令 $D=\{O_x \mid x\in[a,b]\}$, 则 $D$ 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖。根据 有限覆盖定理, 存在 $D$ 的有限个子集 $\{O_{x_1},O_{x_2},\ldots,O_{x_k}\}$, 使得 $[a,b]\subseteq\bigcup_{i=1}^{k}O_{x_i}$, 而 $\bigcup_{i=1}^{k}O_{x_i}$ 中只含有数集 $S$ 中的有限项, 与 $S\subseteq[a,b]\subseteq\bigcup_{i=1}^{k}O_{x_i}$ 矛盾, 于是只可能情形一成立, 因此数集 $S$ 必有聚点, 证毕。

# 第二章 数学分析、实分析、泛函分析

## Heine-Borel 定理

在实数空间 $\mathbb{R}^n$ 中，一个子集 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 是紧的，当且仅当它是闭且有界的。

明

### 必要性

如果 $S$ 是紧的，那么 $S$ 是闭且有界的。

### 有界性

假设 $S$ 是紧的。若 $S$ 不有界，那么对于每个正整数 $k$，存在 $x_k \in S$，使得 $\|x_k\| \geq k$。这意味着我们可以在 $S$ 中找到一个无穷序列 $\{x_k\}$ 使得 $\|x_k\| \to \infty$。但由于 $S$ 是紧的，$\{x_k\}$ 必须有一个收敛的子列。然而，这个子列的极限必须在 $S$ 中，并且它的极限必定是无穷大的，这与 $S$ 是紧的矛盾。所以 $S$ 必须是有界的。

### 闭性

假设 $S$ 是紧的。如果 $S$ 不是闭的，那么存在一个点 $x \in \overline{S} \setminus S$，其中 $\overline{S}$ 表示 $S$ 的闭包。由于 $x \notin S$，但 $x \in \overline{S}$，所以存在 $S$ 中的一个序列 $\{x_k\}$ 收敛于 $x$。由于 $S$ 是紧的，$\{x_k\}$ 的收敛极限 $x$ 必须在 $S$ 中，这与 $x \notin S$ 矛盾。因此，$S$ 必须是闭的。

### 充分性

如果 $S$ 是闭且有界的，那么 $S$ 是紧的。

根据 Bolzano-Weierstrass 定理，任何在 $\mathbb{R}^n$ 中的有界序列都有一个收敛子列。因为 $S$ 是有界的，所以 $S$ 中的任意序列必然有一个有界子序列。根据 Bolzano-Weierstrass 定理，这个有界子序列有一个收敛子列。

我们需要证明这个收敛子列的极限点也在 $S$ 中。因为 $S$ 是闭的，所以所有极限点都在 $S$ 中。于是，这个收敛子列的极限点在 $S$ 中，这意味着 $S$ 是序列紧的。

在 $\mathbb{R}^n$ 中，序列紧性和覆盖紧性等价。因此，$S$ 是覆盖紧的。

## 结论

综上所述，我们证明了在 $\mathbb{R}^n$ 中，Heine-Borel 定理成立：一个子集 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 是紧的，当且仅当它是闭且有界的。

任意数列都存在单调子列。

## 证明

设数列为 $\{a_n\}$，下面分两种情形来讨论：

1. 若对任何正整数 $k$，数列 $\{a_{k+n}\}$ 有最大项。设 $\{a_{k+n}\}$ 的最大项为 $a_{n_1}$，因 $\{a_{n_1+n}\}$ 亦有最大项，设其最大项为 $a_{n_2}$，显然有 $n_2 > n_1$，且因 $a_{n_1}$ 是 $\{a_{n_1+n}\}$ 的一个子列，故

$$a_{n_2} \le a_{n_1};$$

同理存在 $n_3 > n_2$，使得

$$a_{n_3} \le a_{n_2};$$

$$\vdots$$

这样就得到一个单调递减的子列 $\{a_{n_k}\}$。

2. 至少存在某正整数 $k$，数列 $\{a_{k+n}\}$ 没有最大项。先取 $n_1 = k+1$，因 $\{a_{k+n}\}$ 没有最大项，故 $a_{n_1}$ 后面总存在项 $a_{n_2}(n_2 > n_1)$，使得

$$a_{n_2} > a_{n_1};$$

同理在 $a_{n_2}$ 后面的项 $a_{n_3}(n_3 > n_2)$，使得

$$a_{n_3} > a_{n_2};$$

$$\vdots$$

这样就得到一个严格递增的子列 $\{a_{n_k}\}$。

# 第三章 代数、几何、微分方程、拓扑、分数阶微分方程

敬请期待 . . .