数字信号处理
作业一

索心弓

2025 年 12 月 25 日

1 [15pts]

判断下列信号的周期性，并回答**是**、**否**。如果是周期信号，请给出其最小正周期。

(1) $x(t) = 3\cos(4t + \frac{\pi}{3})$

(2) $x(t) = [cos2\pi t]u(t)$

(3) $x(n) = 2\cos\frac{n\pi}{4} + 3\sin\frac{n\pi}{6} - cos\frac{n\pi}{2}$。

- 1. 是，最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$。
- 2. 否。
- 3. 是，最小正周期为 $lcm(8, 12, 4) = 24$。

2 [15pts]

试判断以下系统的性质：记忆、因果、线性、时不变、稳定性

(1) $y(t) = e^{x(t)}$

(2) $y[n] = x[n-2] - x[n+1]$

(3) $y(t) = \sin(4t)\, x(t)$

- 1. 该系统是无记忆系统、因果系统、非线性系统、时不变系统、稳定系统。
- 2. 该系统是记忆系统、非因果系统、线性系统、时不变系统、稳定系统。
- 3. 该系统是无记忆系统、因果系统、线性系统、时变系统、稳定系统。

3 [20pts]

填空题

(1) $\dfrac{\mathrm{d}\left[\mathrm{e}^{-at}u(t+2)*u(t-1)\right]}{\mathrm{d}t} =$ ___________。

(2) 卷积积分 $\delta'(t)*x(t)*\delta(t^2-4)$ 的结果为 ___________。

- (1) $e^{-\alpha(t-1)}u(t+1)$
- (2) $\frac{1}{4}x^{'}(t-2)+\frac{1}{4}x^{'}(t+2)$

4 [15pts]

对于下图所示信号，试计算 $x_1(t) * x_2(t)$。

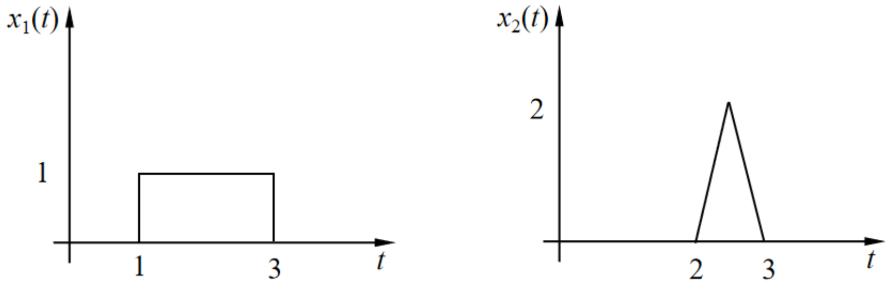

图 1: 信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的波形图

- 由信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的波形图可以写出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的表达式：

  $x_1(t) = u(t-1) - u(t-3)$,

  $$x_2t = \begin{cases} 4(t-2), & 2 \le t < 2.5, \\ 4(3-t), & 2.5 < t \le 3, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

  则 $x_1(t) * x_2(t) = [u(t-1) - u(t-3)] * x_2(t)$

  $= u(t-1) * x_2(t) - u(t-3) * x_2(t)$

  $= \int_{-\infty}^{t-1} x_2(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{t-3} x_2(\tau)d\tau$

  $= \int_{t-3}^{t-1} x_2(\tau)d\tau$

  当 $t-1 < 2$ 或 $t-3 > 3$, 即 $t < 3$ 或 $t > 6$ 时,$x_2(t) \equiv 0$,

  此时 $x_1(t) * x_2(t) = \int_{t-3}^{t-1} 0 d\tau = 0$;

  当 $2 \leqslant t-1 < 2.5$ 即 $3 \leqslant t < 3.5$ 时,$t-3 < 2$,

  此时 $x_1(t) * x_2(t) = \int_{2}^{t-1} 4(\tau-2)d\tau = 2(t-3)^2$;

  当 $2.5 \leqslant t-1 < 3$ 即 $3.5 \leqslant t < 4$ 时,$t-3 < 2$,

  此时 $x_1(t) * x_2(t) = \int_{2}^{2.5} 4(\tau-2)d\tau + \int_{2.5}^{t-1} 4(3-\tau)d\tau = -2(t-4)^2 + 1$;

  当 $t-1 \geqslant 3$ 且 $t-3 < 2$, 即 $4 \leqslant t < 5$ 时,

  此时 $x_1(t) * x_2(t) = \int_{2}^{2.5} 4(\tau-2)d\tau + \int_{2.5}^{3} 4(3-\tau)d\tau = 1$;

  当 $2 \leqslant t-3 \leqslant 2.5$ 即 $5 \leqslant t < 5.5$ 时,$t-1 > 3$,

  此时 $x_1(t) * x_2(t) = \int_{t-3}^{2.5} 4(\tau-2)d\tau + \int_{2.5}^{3} 4(3-\tau)d\tau = -2(t-5)^2 + 1$

  当 $2.5 \leqslant t-3 \leqslant 3$ 即 $5.5 \leqslant t \leqslant 6$ 时,$t-1 > 3$,

  此时 $x_1(t) * x_2(t) = \int_{t-3}^{3} 4(3-\tau)d\tau = 2(t-6)^2$.

综上所述,

$$x_1(t) * x_2(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \text{ 或} t > 6, \\ 2(t-3)^2, & 3 \leqslant t < 3.5, \\ -2(t-4)^2 + 1, & 3.5 \leqslant t < 4, \\ 1, & 4 \leqslant t < 5, \\ -2(t-5)^2 + 1, & 5 \leqslant t < 5.5, \\ 2(t-6)^2, & 5.5 \leqslant t \leqslant 6. \end{cases}$$

5 [35pts]

已知 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的波形，求 $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$。

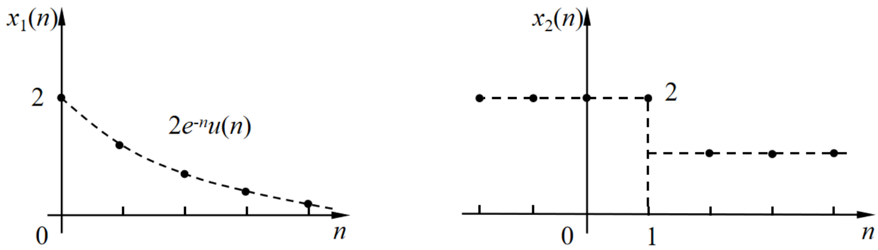

图 2: 信号 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的波形图

- 已知 $x_1(n) = 2e^{-n}u(n)$, 再由 $x_2(n)$ 的波形图可以写出 $x_2(n)$ 的表达式：

  $x_2(n) = 2u(1-n) + u(n-2)$

  则 $x_1(n) * x_2(n) = 2e^{-n}u(n) * 2u(1-n) + 2e^{-n}u(n) * u(n-2)$

  $= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 4e^{-k}u(k)u(1-n+k) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2e^{-k}u(k)u(n-k-2)$

  当 $n < 2$ 即 $n \leqslant 1$ 时,$n-1 \leqslant 0, u(k)u(n-k-2) \equiv 0$, $x_1(n)*x_2(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} 4e^{-k} = \frac{4}{1-e^{-1}}$;

  当 $n \geqslant 2$ 时,$n-1 > 0$

  $x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=n-1}^{+\infty} 4e^{-k} + \sum_{k=0}^{n-2} 2e^{-k}$

  $= \frac{4e^{-(n-1)}}{1-e^{-1}} + \frac{2(1-e^{-(n-1)})}{1-e^{-1}}$

  $= \frac{2(1+e^{-(n-1)})}{1-e^{-1}}$

  综上所述,

  $$x_1(n) * x_2(n) = \begin{cases} \frac{4}{1-e^{-1}}, & n \leqslant 1, \\ \frac{2(1+e^{-(n-1)})}{1-e^{-1}}, & n \geqslant 2, \end{cases}$$