数字信号处理
作业三

索心弓

2025 年 12 月 25 日

1 选择题 [15pts]

(1) 下列说法中，正确的是 ＿＿＿＿＿＿。

A. 系统 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=x(t)$ 一定是因果系统

B. 系统 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=x(t)$ 一定是稳定系统

C. 设 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(j\omega)=\delta(\omega)+\delta(\omega-\pi)-\delta(\omega+2)$，则 $x(t)$ 肯定不是周期的

D. 两个非周期信号的卷积可能是周期的

(2) 已知 $x(t)$ 的拉普拉斯变换 $X(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+3)}$，且 $g(t)=e^{2t}x(t)$ 的傅里叶变换存在，则 $x(t)$ 为 ＿＿＿＿＿＿。

A. 左边信号

B. 右边信号

C. 双边信号

D. 有限长信号

(3) 下列序列中，z 变换的收敛域为 $|z|>\dfrac{1}{2}$ 的是 ＿＿＿＿＿＿。

A. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u(n)+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n u(n)$

B. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \big[u(n)-u(n-10)\big]$

C. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$

D. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u(n)+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n u(n)$

- (1) C
- (2) C
- (3) A

2 填空题 [15pts]

(1) 已知信号 $x(t) = \dfrac{\sin t}{t}$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,\mathrm{d}t = \underline{\hspace{3cm}}$$

(2) 因果信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换为 $X(s)$，则

$$\int_{-\infty}^{t-2} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

的拉普拉斯变换为 ___________。

(3) 已知

$$X(z) = \frac{5z^2}{(z+2)(z-3)}$$

的收敛域为 $2 < |z| < 3$，则其原序列 $x(n)$ 等于 ___________。

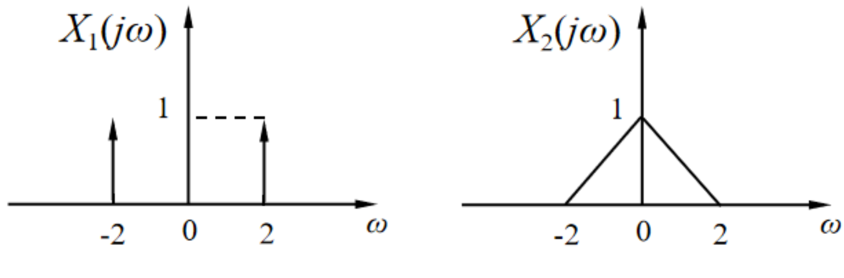
- (1) π
- (2) $\frac{1}{s}e^{-2s}X(s)$
- (3) $2 \cdot (-2)^n u[n] - 3^{n+1}u[-n-1]$

3 计算题 [20pts]

已知 $x_1(t)$、$x_2(t)$ 的频谱分别如下图 (a)、(b) 所示，试画出

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)\,\delta\Big(t-n\frac{\pi}{5}\Big)$$

的频谱图。



(a) (b)

- 由 $x_1(t), x_2(t)$ 的频谱图可知：

  $X_1(j\omega) = \delta(\omega+2) + \delta(\omega-2)$,

  $X_2(j\omega) = \frac{1}{2}(\omega+2)[u(\omega+2) - 2u(\omega) + u(\omega-2)]$.

  令 $y(t) = x_1(t)x_2(t)$，由频域卷积特性 $x_1(t)\cdot x_2(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$ 可得：

  $Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}X_1(j\omega) * X_2(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega - j\tau)X_2(j\tau)d\tau$

  $= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\delta(\omega-\tau+2) + \delta(\omega-\tau-2)]X_2(j\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}[X_2(j(\omega+2)) + X_2(j(\omega-2))]$

  $y_s(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)\delta(t - n\frac{\pi}{5}) = y(t)\cdot\delta_s(t) = y(t)\cdot\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_s)$, 其中$T_s = \frac{\pi}{5}$

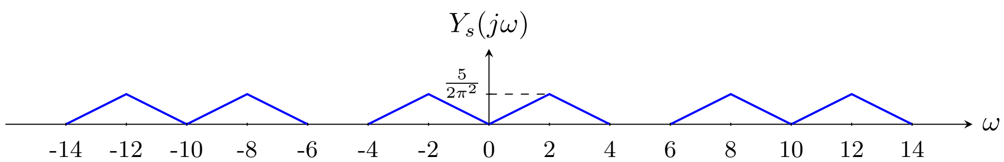
  $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 10$

  $\mathcal{F}[y_s(t)] = \mathcal{F}[y(t)\cdot\delta_s(t)] = \frac{1}{2\pi}[Y(j\omega) * \mathcal{F}[\delta_s(t)]] = \frac{1}{2\pi}[Y(j\omega) * \omega_s\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\omega_s)]$

  $= \frac{1}{T_s}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} Y(j(\omega - n\omega_s)) = \frac{5}{\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} Y(j(\omega - 10n))$

  $= \frac{5}{2\pi^2}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}[X_2(j(\omega - 10n + 2)) + X_2(j(\omega - 10n - 2))]$

  $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)\delta(t - n\frac{\pi}{5})$ 的频谱图如下图所示：

4 计算题 [25pts]

已知 LTI 连续时间系统在激励信号 $x(t)=e^{-2t}u(t)$，初始条件 $y(0^-)=2,\ y'(0^-)=1$，全响应为

$$y(t)=\left(2te^{-2t}+5e^{-3t}\right)u(t),$$

求系统的零输入响应和零状态响应。

- 由 $y(t)=(2te^{-2t}+5e^{-3t})u(t)$ 可知，系统的特征根为 $s_1=-2,s_2=-3$
  则 $y_{zi}(t)=(A_1e^{-2t}+A_2e^{-3t})u(t)$，$y_{zi}^{'}(t)=(-2A_1e^{-2t}-3A_2e^{-3t})u(t)$
  将初始条件 $y(0^-)=2,y^{'}(0^-)=1$ 代入 $y_{zi}(t)$ 得：
  $$\begin{cases}A_1+A_2=2\\-2A_1-3A_2=1\end{cases}$$
  解得：$\begin{cases}A_1=7\\A_2=-5\end{cases}$
  因此系统的零输入响应 $y_{zi}(t)=(7e^{-2t}-5e^{-3t})u(t)$，
  零状态响应 $y_{zs}(t)=y(t)-y_{zi}(t)=[(2t-7)e^{-2t}+10e^{-3t}]u(t)$。

5 计算题 [25pts]

已知一个离散因果线性时不变系统，初值 $y(-1)=0,\ y(-2)=\dfrac{25}{6}$，输入 $x(n)=u(n)$ 时，系统的响应为

$$y(n)=\big[1-(0.4)^n-(0.6)^n\big]u(n).$$

1. 求该系统的差分方程。

2. 求该系统的单位样值响应 $h(n)$，说明该系统的稳定性。

3. 若输入信号为 $x(n)=u(n)-u(n-2)$，求输出响应 $y(n)$。

- 1. 由 $y(n)=[1-(0.4)^n-(0.6)^n]u(n)$ 可知，该系统的特征根为 $z_1=0.4,z_2=0.6$
  则零输入响应 $y_{zi}(n)$的形式为$A_1(0.4)^n+A_2(0.6)^n$
  将 $y(-1)=0,y(-2)=\frac{25}{6}$ 代入可得：
  $$\begin{cases}\frac{5}{2}A_1+\frac{5}{3}A_2=0\\ \frac{25}{4}A_1+\frac{25}{9}A_2=\frac{25}{6}\end{cases}$$
  解得：$\begin{cases}A_1=2\\ A_2=-3\end{cases}$
  所以 $y_{zi}(n)=[2\cdot(0.4)^n-3\cdot(0.6)^n]u(n)$
  零状态响应 $y_{zs}(n)=y(n)-y_{zi}(n)=[1-3\cdot(0.4)^n+2\cdot(0.6)^n]u(n)$
  $X(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}u(n)z^{-n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\frac{1}{1-z^{-1}},|z|>1$
  $Y_{zs}(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}y_{zs}(n)z^{-n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}[1-3\cdot(0.4)^n+2\cdot(0.6)^n]z^{-n}$
  $=\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{3}{1-0.4z^{-1}}+\frac{2}{1-0.6z^{-1}},|z|>1$
  则系统函数 $H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{X(z)}=\frac{z-0.76}{z^2-z+0.24},|z|>0.6$
  对 $\frac{Y_{zs}(z)}{X(z)}=\frac{z-0.76}{z^2-z+0.24}$ 变形可得：
  $Y(z)-z^{-1}Y(z)+0.24z^{-2}Y(z)=z^{-1}X(z)-0.76z^{-2}X(z)$
  对 $Y(z)-z^{-1}Y(z)+0.24z^{-2}Y(z)=z^{-1}X(z)-0.76z^{-2}X(z)$ 取 Z 反变换可得：
  系统的差分方程为 $y(n)-y(n-1)+0.24y(n)=x(n-1)-0.76x(n-2)$

- 2.$H(z)=\frac{z-0.76}{z^2-z+0.24}=\frac{1.8(z-0.6)-0.8(z-0.4)}{(z-0.4)(z-0.6)}=\frac{1.8z^{-1}}{1-0.4z^{-1}}-\frac{0.8z^{-1}}{1-0.6z^{-1}}$
  由 $\alpha^n u[n]\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$ 可得：
  $\mathcal{Z}^{-1}[\frac{1.8}{1-0.4z^{-1}}-\frac{0.8}{1-0.6z^{-1}}]=[1.8\cdot(0.4)^n-0.8\cdot(0.6)^n]u(n)$
  由因果序列位移特性 $x[n-k]u[n-k]\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}z^{-k}X(z)$ 可得：
  $h(n)=\mathcal{Z}^{-1}[H(z)]=\mathcal{Z}^{-1}\left\{z^{-1}[\frac{1.8}{1-0.4z^{-1}}-\frac{0.8}{1-0.6z^{-1}}]\right\}$
  $=[1.8\cdot(0.4)^{n-1}-0.8\cdot(0.6)^{n-1}]u(n-1)$
  系统的极点为 $z_1=0.4,z_2=0.6$，均在单位圆内，因此系统稳定。

- 3.$x(n) = u(n) - u(n-2) = \delta(n) + \delta(n-1)$

  $y_{zs}(n) = x(n) * h(n) = [\delta(n) + \delta(n-1)] * h(n) = h(n) + h(n-1)$

  $= [1.8 \cdot (0.4)^{n-1} - 0.8 \cdot (0.6)^{n-1}]u(n-1) + [1.8 \cdot (0.4)^{n-2} - 0.8 \cdot (0.6)^{n-2}]u(n-2)$

  由 (1) 可得：$y_{zi}(n) = [2 \cdot (0.4)^n - 3 \cdot (0.6)^n]u(n)$

  故 $y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n) = [2 \cdot (0.4)^n - 3 \cdot (0.6)^n]u(n) + [1.8 \cdot (0.4)^{n-1} - 0.8 \cdot (0.6)^{n-1}]u(n-1) + [1.8 \cdot (0.4)^{n-2} - 0.8 \cdot (0.6)^{n-2}]u(n-2)$