

数字信号处理

作业一二三参考答案

2025 年 12 月 28 日

1 [15pts]

判断下列信号的周期性，并回答**是**、**否**。如果是周期信号，请给出其最小正周期。

(1) $x(t) = 3 \cos(4t + \frac{\pi}{3})$

(2) $x(t) = [\cos 2\pi t]u(t)$

(3) $x(n) = 2 \cos \frac{n\pi}{4} + 3 \sin \frac{n\pi}{6} - \cos \frac{n\pi}{2}$ 。

- 是, $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
- 否, 因为 $u(t)$ 不是周期信号
- 是, $T_1 = \frac{2\pi}{4} = 8, T_2 = \frac{2\pi}{6} = 12, T_3 = \frac{2\pi}{2} = 4$, 最小公倍数 $T = 24$

2 [15pts]

试判断以下系统的性质：记忆、因果、线性、时不变、稳定性

(1) $y(t) = e^{xt}$

(2) $y[n] = x[n - 2] - x[n + 1]$

(3) $y(t) = \sin(4t)x(t)$

- 无记忆；因果；非线性；时不变；稳定
- 有记忆；非因果；线性；时不变；稳定
- 无记忆；因果；线性；时变；稳定

3 [20pts]

填空题

(1) $\frac{d[e^{-at}u(t+2)*u(t-1)]}{dt} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 卷积积分 $\delta'(t) * x(t) * \delta(t^2 - 4)$ 的结果为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

- $e^{-a(t-1)}u(t+1)$
- $\frac{1}{4}[x'(t-2) + x'(t+2)]$

4 [15pts]

对于下图所示信号，试计算 $x_1(t) * x_2(t)$ 。

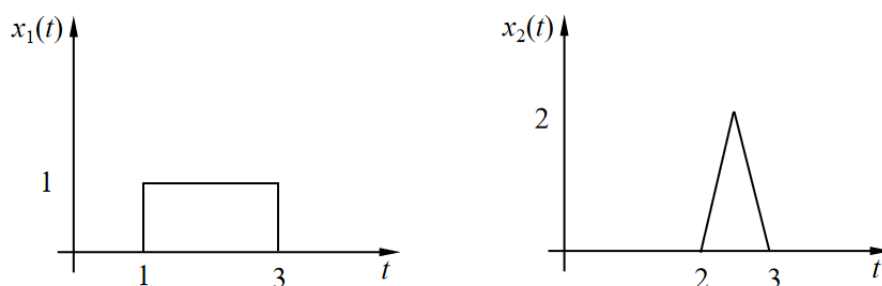


图 1: 信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的波形图

当 $t \leq 3$ 或 $t > 6$ 时，图像无交集，故卷积为 0。

当 $3 < t \leq 3.5$ 时，

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_2^{t-1} (4\tau - 8) d\tau \\
 &= 2\tau^2 - 8\tau \Big|_2^{t-1} \\
 &= 2[(t-1)^2 - 4] - 8(t-3) \\
 &= 2t^2 - 12t + 18.
 \end{aligned}$$

当 $3.5 < t \leq 4$ 时，

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_2^{\frac{5}{2}} (4\tau - 8) d\tau + \int_{\frac{5}{2}}^{t-1} (-4\tau + 12) d\tau \\
 &= -2t^2 + 16t - 31
 \end{aligned}$$

当 $4 < t \leq 5$ 时，

$$y(t) = \int_2^{\frac{5}{2}} (4\tau - 8) d\tau + \int_{\frac{5}{2}}^3 (-4\tau + 12) d\tau = 1$$

当 $5 < t \leq 5.5$ 时,

$$y(t) = \int_{t-3}^{\frac{5}{2}} (4\tau - 8) d\tau + \int_{\frac{5}{2}}^3 (-4\tau + 12) d\tau = -2t^2 + 20t - 49$$

当 $5.5 < t \leq 6$ 时,

$$y(t) = \int_{t-3}^3 (-4\tau + 12) d\tau = 2t^2 - 24t + 72$$

综上,

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 3 \\ 2t^2 - 12t + 18 & 3 < t \leq 3.5 \\ -2t^2 + 16t - 31 & 3.5 < t \leq 4 \\ 1 & 4 < t \leq 5 \\ -2t^2 + 20t - 49 & 5 < t \leq 5.5 \\ 2t^2 - 24t + 72 & 5.5 < t \leq 6 \\ 0 & t > 6 \end{cases}$$

5 [35pts]

已知 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的波形，求 $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$ 。

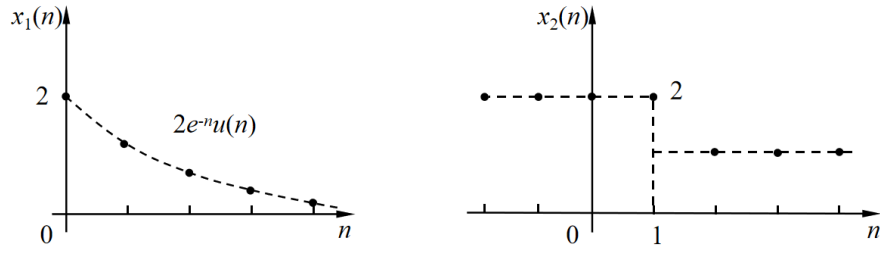


图 2: 信号 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的波形图

$$x_1(n) = 2e^{-n}u(n)$$

$$x_2(n) = 1 + u(1 - n)$$

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k)x_2(n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 2e^{-k}u(k)(1 + u(1 - n + k))$$

若 $n \leq 1$,

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2e^{-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} 2e^{-k}$$

$$= 4 \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k} = \frac{4}{1 - \frac{1}{e}}$$

若 $n > 1$,

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2e^{-k} + \sum_{k=n-1}^{+\infty} 2e^{-k}$$

$$= \frac{2}{1 - \frac{1}{e}} + \frac{2e^{-n+1}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{2(1 + e^{-n+1})}{1 - \frac{1}{e}}$$

综上,

$$x_1(n) * x_2(n) = \begin{cases} \frac{4}{1 - \frac{1}{e}}, & n \leq 1 \\ \frac{2(1 + e^{1-n})}{1 - \frac{1}{e}}, & n > 1 \end{cases}$$

$$= \frac{4}{1 - \frac{1}{e}} u(1 - n) + \frac{2(1 + e^{1-n})}{1 - \frac{1}{e}} u(n - 2)$$

6 选择题 [15pts]

(1) 连续周期信号的频谱具有 _____。

- A. 连续性、周期性
- B. 连续性、收敛性
- C. 离散性、周期性
- D. 离散性、收敛性

(2) 已知 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(j\omega)$, 则 $e^{j4t}x(t-2)$ 的傅里叶变换为 ()。

- A. $X[j(\omega+4)]e^{-2(j\omega+4)}$
- B. $X[j(\omega+4)]e^{-2j\omega}$
- C. $X[j(\omega-4)]e^{-2j(\omega-4)}$
- D. $X[j(\omega-4)]e^{-2j\omega}$

(3) (多选) 下列论述正确的有 ()。

- A. 周期信号的频谱是离散的
- B. 非周期信号与周期信号的频谱的表示方法是相同的
- C. 非周期信号的频谱是连续的
- D. $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$ 是傅里叶变换存在的充分条件

- D
- C
- AC

7 填空题 [15pts]

- (1) 实信号 $x(t) = 2 + \cos 2(\pi t) + 3 \sin 6(\pi t)$ 的平均功率为 _____。
- (2) 已知 $x(t)$ 为实信号，其傅里叶变换为 $X(j\omega) = R(\omega) + jQ(\omega)$ ，则 $\frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$ 的傅里叶变换为 _____。
- (3) 信号 $x(t)$ 的最高频率为 400Hz，对信号 $x(t) * x\left(\frac{t}{2}\right)$ 进行理想抽样，使频谱不混叠的最大抽样周期为 _____。

- 9W
- $R(\omega)$
- 2.5ms

8 计算题 [35pts]

升余弦脉冲信号 $x(t) = \frac{1}{2} [1 + \cos(\frac{\pi}{\tau}t)] [u(t + \tau) - u(t - \tau)]$, 求其傅里叶变换 $X(j\omega)$ 。

令门函数 $G_{2\tau}(t) = u(t + \tau) - u(t - \tau)$, 且 $\omega_0 = \frac{\pi}{\tau}$ 。

$$x(t) = \frac{1}{2}G_{2\tau}(t) + \frac{1}{2}G_{2\tau}(t) \cos(\omega_0 t)$$

$$\mathcal{F}\{G_{2\tau}(t)\} = \frac{2 \sin(\omega\tau)}{\omega}$$

$$\therefore X_1(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \sin(\omega\tau)}{\omega} = \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}$$

利用频移特性:

$$\begin{aligned} X_2(j\omega) &= \frac{1}{2} \mathcal{F}\{G_{2\tau}(t) \cos(\omega_0 t)\} \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{2 \sin(\tau(\omega - \omega_0))}{\omega - \omega_0} + \frac{2 \sin(\tau(\omega + \omega_0))}{\omega + \omega_0} \right] \end{aligned}$$

因为 $\sin(\theta \pm \pi) = -\sin(\theta)$:

$$\begin{aligned} X_2(j\omega) &= -\frac{\sin(\tau\omega)}{2} \left[\frac{1}{\omega - \omega_0} + \frac{1}{\omega + \omega_0} \right] \\ &= -\frac{\sin(\tau\omega)}{2} \left[\frac{2\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \right] \\ &= -\frac{\omega \sin(\tau\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= X_1(j\omega) + X_2(j\omega) \\ &= \sin(\tau\omega) \left[\frac{1}{\omega} - \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \right] \\ &= \sin(\tau\omega) \left[\frac{\omega^2 - \omega_0^2 - \omega^2}{\omega(\omega^2 - \omega_0^2)} \right] \\ &= \frac{-\omega_0^2 \sin(\tau\omega)}{\omega(\omega^2 - \omega_0^2)} = \frac{\omega_0^2 \sin(\tau\omega)}{\omega(\omega_0^2 - \omega^2)} \end{aligned}$$

代入 $\omega_0 = \frac{\pi}{\tau}$:

$$X(j\omega) = \frac{\pi^2 \sin(\tau\omega)}{\omega(\pi^2 - \tau^2 \omega^2)}$$

9 计算题 [35pts]

已知信号 $x(t)$ 如下图所示，试求其傅里叶变换。

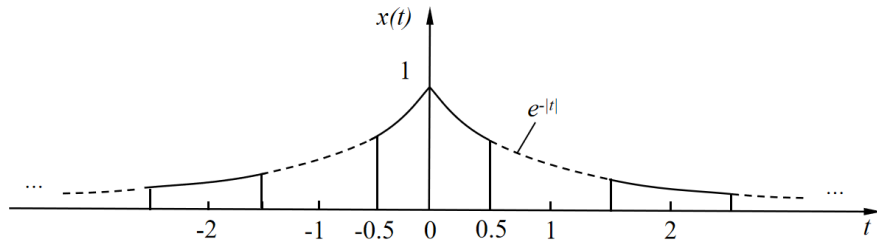


图 3: $x(t)$ 的波形图

将信号 $x(t)$ 分解为双边指数信号 $s(t)$ 与周期矩形脉冲串 $p(t)$ 的乘积：

$$x(t) = s(t) \cdot p(t)$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [S(j\omega) * P(j\omega)]$$

$$s(t) = e^{-|t|} = e^{-t}u(t) + e^t u(-t)$$

$$S(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{1-j\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

已知 $T = 2, \tau = 1, E = 1$ ，基波频率 $\omega_0 = \pi$ 。傅里叶级数系数：

$$a_k = \frac{E\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{Sa}\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

其傅里叶变换：

$$P(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\pi}{2}\right) \delta(\omega - k\pi)$$

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * \left[\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\pi}{2}\right) \delta(\omega - k\pi) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\pi}{2}\right) [S(j\omega) * \delta(\omega - k\pi)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\pi}{2}\right) S(j(\omega - k\pi)) \end{aligned}$$

将 $S(j(\omega - k\pi)) = \frac{2}{1 + (\omega - k\pi)^2}$ 代入：

$$X(j\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\pi}{2}\right) \frac{2}{1 + (\omega - k\pi)^2}$$

化简得最终结果：

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\pi}{2}\right) \frac{1}{1 + (\omega - k\pi)^2}$$

10 选择题 [15pts]

(1) 下列说法中，正确的是 _____。

- A. 系统 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x(t)$ 一定是因果系统
- B. 系统 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x(t)$ 一定是稳定系统
- C. 设 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(j\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega - \pi) - \delta(\omega + 2)$ ，则 $x(t)$ 肯定不是周期的
- D. 两个非周期信号的卷积可能是周期的

(2) 已知 $x(t)$ 的拉普拉斯变换 $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$ ，且 $g(t) = e^{2t}x(t)$ 的傅里叶变换存在，则 $x(t)$ 为 _____。

- A. 左边信号
- B. 右边信号
- C. 双边信号
- D. 有限长信号

(3) 下列序列中， z 变换的收敛域为 $|z| > \frac{1}{2}$ 的是 _____。

- A. $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$
- B. $\left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n) - u(n-10)]$
- C. $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$
- D. $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \left(\frac{2}{3}\right)^n u(n)$

- C D （本次作业批改单选 C 或 D 都给对）
- C
- A

11 填空题 [15pts]

(1) 已知信号 $x(t) = \frac{\sin t}{t}$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \underline{\hspace{2cm}}$$

(2) 因果信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换为 $X(s)$, 则

$$\int_{-\infty}^{t-2} x(\tau) d\tau$$

的拉普拉斯变换为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) 已知

$$X(z) = \frac{5z^2}{(z+2)(z-3)}$$

的收敛域为 $2 < |z| < 3$, 则其原序列 $x(n)$ 等于 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

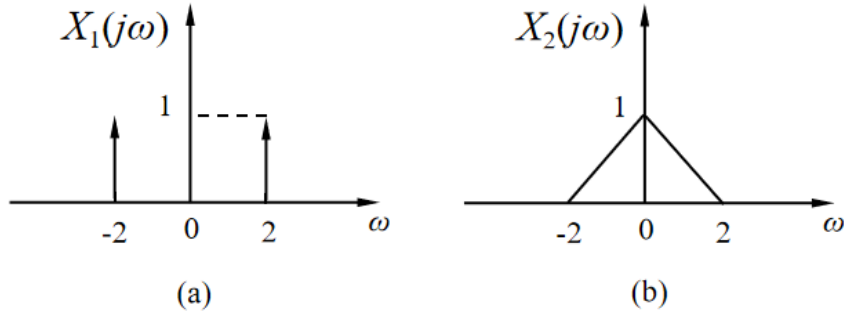
- π
- $\frac{X(s)e^{-2s}}{s}$
- $2(-2)^n u(n) - 3 \cdot 3^n u(-n-1)$

12 计算题 [20pts]

已知 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 的频谱分别如下图 (a)、(b) 所示，试画出

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)\delta\left(t - n\frac{\pi}{5}\right)$$

的频谱图。



$$X_1(j\omega) = \delta(\omega + 2) + \delta(\omega - 2)$$

$$X_2(j\omega) = \left(\frac{1}{2}\omega + 1\right)[u(\omega + 2) - u(\omega)] + \left(-\frac{1}{2}\omega + 1\right)[u(\omega) - u(\omega - 2)]$$

$$x_1(t)x_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}[X_1(j\omega) * X_2(j\omega)] = Y(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}[\delta(\omega + 2) * X_2(j\omega) + \delta(\omega - 2) * X_2(j\omega)]$$

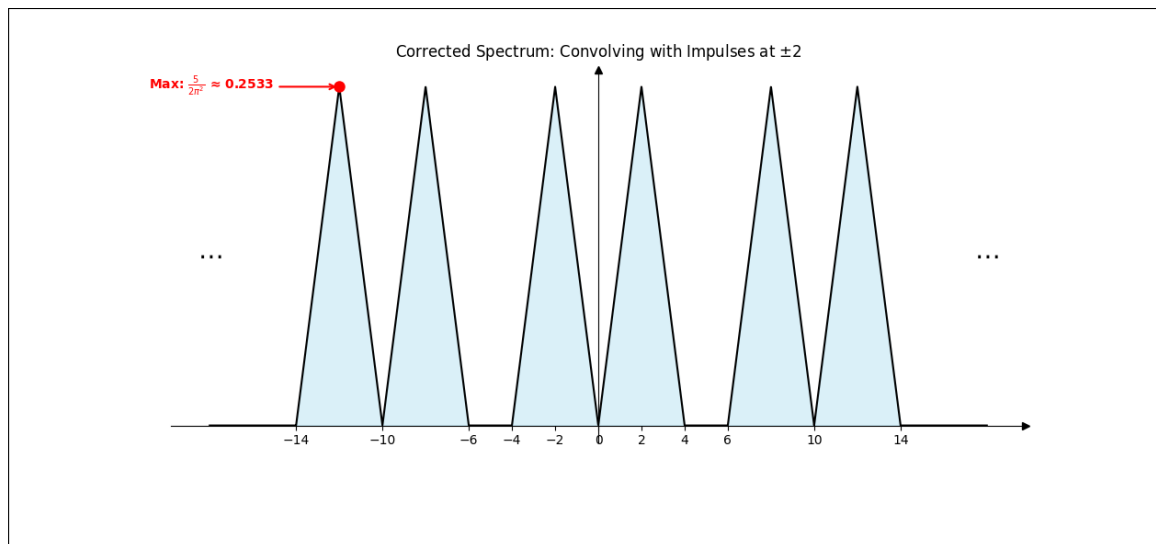
$$= \frac{1}{2\pi}[X_2(j(\omega + 2)) + X_2(j(\omega - 2))]$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 10 \text{ rad/s}$$

$$Z(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(j(\omega - k\omega_s))$$

$$= \frac{5}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} [X_2(j(\omega + 2 - 10k)) + X_2(j(\omega - 2 - 10k))]$$

$$= \frac{5}{2\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [X_2(j(\omega + 2 - 10k)) + X_2(j(\omega - 2 - 10k))]$$



13 计算题 [25pts]

已知 LTI 连续时间系统在激励信号 $x(t) = e^{-2t}u(t)$, 初始条件 $y(0^-) = 2$, $y'(0^-) = 1$, 全响应为

$$y(t) = (2te^{-2t} + 5e^{-3t})u(t),$$

求系统的零输入响应和零状态响应。

$$e^{-2t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+2} = X(s)$$

$$(2te^{-2t} + 5e^{-3t})u(t) \longleftrightarrow \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{5}{s+3}$$

推知有 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$

$$\therefore H(s) = \frac{D(s)}{(s+2)(s+3)}$$

\therefore 零输入响应微分方程

$$y_{zi}''(t) + 5y_{zi}'(t) + 6y_{zi}(t) = 0$$

$$[s^2Y_{zi}(s) - sy(0^-) - y'(0^-)] + 5[sY_{zi}(s) - y(0^-)] + 6Y_{zi}(s) = 0$$

$$\therefore y(0^-) = 2, y'(0^-) = 1$$

$$\therefore s^2Y_{zi}(s) - 2s - 1 + 5sY_{zi}(s) - 10 + 6Y_{zi}(s) = 0$$

$$Y_{zi}(s) = \frac{2s+11}{(s+2)(s+3)} = \frac{7}{s+2} - \frac{5}{s+3}$$

\therefore 零输入响应

$$y_{zi}(t) = 7e^{-2t}u(t) - 5e^{-3t}u(t)$$

\therefore 零状态响应

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= y(t) - y_{zi}(t) = (2te^{-2t} + 5e^{-3t} - 7e^{-2t} + 5e^{-3t})u(t) \\ &= (2te^{-2t} - 7e^{-2t} + 10e^{-3t})u(t) \end{aligned}$$

14 计算题 [25pts]

已知一个离散因果线性时不变系统，初值 $y(-1) = 0$, $y(-2) = \frac{25}{6}$ ，输入 $x(n] = u(n)$ 时，系统的响应为

$$y(n) = [1 - (0.4)^n - (0.6)^n]u(n).$$

1. 求该系统的差分方程。
2. 求该系统的单位样值响应 $h(n)$ ，说明该系统的稳定性。
3. 若输入信号为 $x(n) = u(n) - u(n-2)$ ，求输出响应 $y(n)$ 。

(1)

根据题意，系统已知特征根为 $z_1 = 0.4$ 和 $z_2 = 0.6$ 。由此可构造系统函数的分母多项式 $A(z)$ ：

$$\begin{aligned} A(z) &= (1 - 0.4z^{-1})(1 - 0.6z^{-1}) \\ &= 1 - z^{-1} + 0.24z^{-2} \end{aligned}$$

这决定了差分方程左端的形式为：

$$y(n) - y(n-1) + 0.24y(n-2)$$

由于该系统为二阶系统，可假设差分方程右端的一般形式为：

$$a_0x(n) + a_1x(n-1) + a_2x(n-2)$$

根据题目条件，已知输入 $x(n) = u(n)$ 时，系统的全响应为：

$$y(n) = [1 - (0.4)^n - (0.6)^n]u(n)$$

对差分方程两边进行 Z 变换，考虑初始条件 $y(-1) = 0, y(-2) = \frac{25}{6}$ ：

$$\begin{aligned} Y(z) - z^{-1}Y(z) - y(-1) + 0.24z^{-2}Y(z) + 0.24z^{-1}y(-1) + 0.24y(-2) \\ = a_0X(z) + a_1z^{-1}X(z) + a_2z^{-2}X(z) \end{aligned}$$

代入初始条件 $y(-1) = 0, y(-2) = \frac{25}{6}$ ，整理得：

$$(1 - z^{-1} + 0.24z^{-2})Y(z) = (a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2})X(z) + \frac{0.24 \times 25/6}{1 - z^{-1} + 0.24z^{-2}}$$

已知 $X(z) = \mathcal{Z}[u(n)] = \frac{z}{z-1}$, 且 $Y(z) = \mathcal{Z}[y(n)]$ 。

对 $y(n) = [1 - (0.4)^n - (0.6)^n]u(n)$ 进行 Z 变换:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.4} - \frac{z}{z-0.6} \\ &= \frac{z(z-0.76)}{(z-1)(z-0.4)(z-0.6)} \end{aligned}$$

将 $Y(z)$ 和 $X(z)$ 代入差分方程的 Z 变换形式, 并整理:

$$\frac{z(z-0.76)}{(z-1)(z-0.4)(z-0.6)} \cdot (1 - z^{-1} + 0.24z^{-2}) = (a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}) \cdot \frac{z}{z-1}$$

将 $1 - z^{-1} + 0.24z^{-2} = \frac{(z-0.4)(z-0.6)}{z^2}$ 代入上式, 化简得:

$$\frac{z-0.76}{z-1} = a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}$$

两边同乘 z , 并整理为 z 的幂次形式:

$$\frac{z(z-0.76)}{z-1} = a_0z + a_1 + a_2z^{-1}$$

通过部分分式展开, 可得:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -0.76$$

因此, 最终的差分方程为:

$$y(n) - y(n-1) + 0.24y(n-2) = x(n-1) - 0.76x(n-2)$$

(2)

对上述差分方程两边同时进行 Z 变换:

$$(1 - z^{-1} + 0.24z^{-2})Y(z) = (1 - 0.76z^{-2})X(z)$$

系统函数为:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1} - 0.76z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0.24z^{-2}}$$

分解可得:

$$H(z) = \frac{1.8z^{-1}}{1 - 0.4z^{-1}} - \frac{0.8z^{-1}}{1 - 0.6z^{-1}}$$

对 $H(z)$ 进行逆 Z 变换, 利用性质 $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}\right] = a^{n-1}u(n-1)$, 得到单位样值响应:

$$h(n) = [1.8(0.4)^{n-1} - 0.8(0.6)^{n-1}]u(n-1)$$

稳定性判断: 系统的极点为 $z_1 = 0.4$ 和 $z_2 = 0.6$ 。由于所有极点均位于单位圆内 ($|z_i| < 1$), 且系统为因果系统, 因此**该系统是稳定的**。

(3)

1. 零输入响应 $y_{zi}(n)$

设零输入响应的形式为 $y_{zi}(n) = [C_1(0.4)^n + C_2(0.6)^n]u(n)$ 。代入初始条件求解系数 C_1, C_2 , 可得:

$$y_{zi}(n) = [2(0.4)^n - 3(0.6)^n]u(n)$$

2. 零状态响应 $y_{zs}(n)$

已求得某特定输入下的零状态响应为:

$$y_{zs}(n) = [1 - 3(0.4)^n + 2(0.6)^n]u(n)$$

3. 新输入下的总响应

假设新的输入导致零状态响应发生变化。根据线性时不变 (LTI) 系统的特性, 若新输入由原输入组合而成, 新的零状态响应 $y_{news}(n)$ 可表示为:

$$y_{news}(n) = y_{zs}(n) - y_{zs}(n-2)$$

代入得:

$$\begin{aligned} y_{news}(n) &= [1 - 3(0.4)^n + 2(0.6)^n]u(n) \\ &\quad - [1 - 3(0.4)^{n-2} + 2(0.6)^{n-2}]u(n-2) \end{aligned}$$

最终总响应 $y_{new}(n)$:

$$y_{new}(n) = y_{zi}(n) + y_{news}(n)$$

代入整理得:

$$\begin{aligned} y_{new}(n) &= [1 - (0.4)^n - (0.6)^n]u(n) \\ &\quad - [1 - 3(0.4)^{n-2} + 2(0.6)^{n-2}]u(n-2) \end{aligned}$$