数字信号处理
作业二

索心弓

2025 年 12 月 25 日

1 选择题 [15pts]

(1) 连续周期信号的频谱具有 ＿＿＿＿＿＿。

A. 连续性、周期性

B. 连续性、收敛性

C. 离散性、周期性

D. 离散性、收敛性

(2) 已知 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(\mathrm{j}\omega)$，则 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}4t}x(t-2)$ 的傅里叶变换为 (　)。

A. $X\left[\mathrm{j}(\omega+4)\right]\mathrm{e}^{-2(\mathrm{j}\omega+4)}$

B. $X\left[\mathrm{j}(\omega+4)\right]\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega}$

C. $X\left[\mathrm{j}(\omega-4)\right]\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}(\omega-4)}$

D. $X\left[\mathrm{j}(\omega-4)\right]\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega}$

(3) (多选) 下列论述正确的有 (　)。

A. 周期信号的频谱是离散的

B. 非周期信号与周期信号的频谱的表示方法是相同的

C. 非周期信号的频谱是连续的

D. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|\,\mathrm{d}t<\infty$ 是傅里叶变换存在的充分条件

- (1) D
- (2) C
- (3) A、C、D

2 填空题 [15pts]

(1) 实信号 $x(t) = 2 + \cos 2(\pi t) + 3\sin 6(\pi t)$ 的平均功率为 ＿＿＿＿＿＿。

(2) 已知 $x(t)$ 为实信号，其傅里叶变换为 $X(\mathrm{j}\omega) = R(\omega) + \mathrm{j}Q(\omega)$，则 $\frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$ 的傅里叶变换为 ＿＿＿＿＿＿。

(3) 信号 $x(t)$ 的最高频率为 400Hz，对信号 $x(t) * x\left(\frac{t}{2}\right)$ 进行理想抽样，使频谱不混叠的最大抽样周期为 ＿＿＿＿＿＿。

- (1) 9
- (2) $R(\omega)$
- (3) 0.0025s

3 计算题 [35pts]

升余弦脉冲信号 $x(t)=\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)\right][u(t+\tau)-u(t-\tau)]$，求其傅里叶变换 $X(\mathrm{j}\omega)$。

- $x(t)=\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)\right][u(t+\tau)-u(t-\tau)]$
  $=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{\tau}t\right)\right], & -\tau\leqslant t<\tau\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$
  $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{2}\int_{-\tau}^{\tau}[1+cos(\frac{\pi}{\tau}t)]e^{-j\omega t}dt$
  $=\frac{1}{2}\int_{-\tau}^{\tau}[1+\frac{1}{2}(e^{-j\frac{\pi}{\tau}t}+e^{j\frac{\pi}{\tau}t})]e^{-j\omega t}dt$
  $=\frac{1}{2}\int_{-\tau}^{\tau}e^{-j\omega t}dt+\frac{1}{4}\int_{-\tau}^{\tau}e^{-j(\omega+\frac{\pi}{\tau})t}+\frac{1}{4}\int_{-\tau}^{\tau}e^{-j(\omega-\frac{\pi}{\tau})t}dt$
  $=-\frac{1}{2j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{t=-\tau}^{\tau}-\frac{1}{4j(\omega+\frac{\pi}{\tau})}e^{-j(\omega+\frac{\pi}{\tau})t}\Big|_{t=-\tau}^{\tau}-\frac{1}{4j(\omega-\frac{\pi}{\tau})}e^{-j(\omega-\frac{\pi}{\tau})t}\Big|_{t=-\tau}^{\tau}$
  $=\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}+\frac{\sin(\omega\tau+\pi)}{2(\omega+\frac{\pi}{\tau})}+\frac{\sin(\omega\tau-\pi)}{2(\omega-\frac{\pi}{\tau})}$
  $=\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}-\frac{\sin(\omega\tau)}{2(\omega+\frac{\pi}{\tau})}-\frac{\sin(\omega\tau)}{2(\omega-\frac{\pi}{\tau})}$
  $=\frac{\pi^2\sin(\omega\tau)}{w(\pi^2-\omega^2\tau^2)}$

4 计算题 [35pts]

已知信号 $x(t)$ 如下图所示，试求其傅里叶变换。

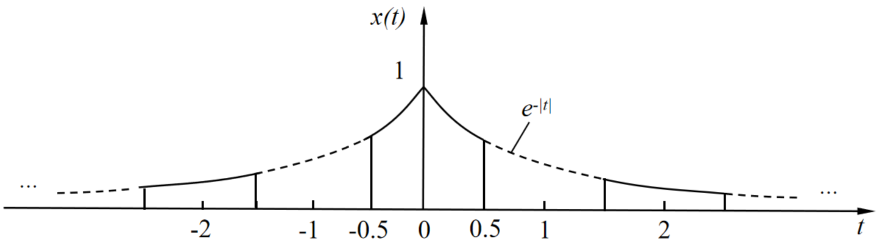

图 1: $x(t)$ 的波形图

- 由 $x(t)$ 的波形图可以得出 $x(t)$ 的表达式：

  $x(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$,

  $x_1(t) = e^{-|t|}$,

  $x_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } 2n - 0.5 \leqslant t \leqslant 2n + 0.5 (n \in N), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

  $X_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-(j\omega-1)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(j\omega+1)t} dt$

  $= -\frac{1}{j\omega-1} e^{-(j\omega-1)t}\Big|_{t=-\infty}^{0} - \frac{1}{j\omega+1} e^{-(j\omega+1)t}\Big|_{t=0}^{\infty} = -\frac{1}{j\omega-1} + \frac{1}{j\omega+1} = \frac{2}{1+\omega^2}$,

  $x_2(t)$是周期为 2 的连续周期信号,

  $X_2(j\omega) = \mathcal{F}[x_2(t)] = 2\pi \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(\omega - n\omega_0)$,

  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$

  $X_n = \frac{1}{T} \int_{-0.5}^{0.5} e^{-n\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} \int_{-0.5}^{0.5} e^{-n\pi t} dt$

  $= \frac{1}{2} \int_{-0.5}^{0.5} (\cos(n\pi t) - j \sin(n\pi t)) dt = \int_{0}^{0.5} \cos(n\pi t) dt = \frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\Big|_{t=0}^{0.5}$

  $= \frac{sin(\frac{n\pi}{2})}{n\pi} = \frac{1}{2} Sa(\frac{n\pi}{2})$

  $X_2(j\omega) = \pi \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} Sa(\frac{n\pi}{2}) \delta(\omega - n\pi)$,

  由频域卷积特性$x_1(t) \cdot x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi}[X_1(j\omega) * X_2(j\omega)]$可得：

  $X(j\omega) = \frac{1}{2\pi}[X_1(j\omega) * X_2(j\omega)] = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2} * Sa(\frac{n\pi}{2}) \delta(\omega - n\pi)$

  $= \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{Sa(\frac{n\pi}{2})}{1+(\omega-n\pi)^2}$