多项式简介

史记

2017 年 8 月 8 日

系数表示法

定义 n 次多项式为 $A(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$
a 是这个多项式的系数数组
最常用的表示多项式的方法就是用系数数组表示

多项式的基本运算

令 A 和 B 为两个 n 次多项式

加减：$(A \pm B)(x) = A(x) \pm B(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i \pm b_i)x^i$

乘法：$(A \times B)(x) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j x^{i+j}$

多项式的点值表示法

定理

已知平面上 n 个横坐标不同的点，则有且仅有 1 个 n-1 次多项式经过这 n 个点。

多项式的点值表示法

定理

已知平面上 n 个横坐标不同的点，则有且仅有 1 个 n-1 次多项式经过这 n 个点。

于是就有了另一种表示多项式的方法：用多项式曲线上 n-1 个点的坐标表示

点值表示法与系数表示法的转换

- 系数表示法-> 点值表示法:
  随便取 n+1 个不同的数作为横坐标代进去

点值表示法与系数表示法的转换

- 系数表示法-> 点值表示法:
  随便取 n+1 个不同的数作为横坐标代进去
- 点值表示法-> 系数表示法:
  称为插值
  常用算法是拉格朗日插值法，后面会介绍

点值表示法下的基本运算

设插值所用的横坐标为 $x_0, x_1, ...x_n$
L 表示插值函数
$A(x) = L(A(x_0), A(x_1), ..., A(x_n)), B(x) = L(B(x_0), B(x_1), ..., B(x_n))$

点值表示法下的基本运算

设插值所用的横坐标为 $x_0, x_1, ...x_n$

L 表示插值函数

$A(x) = L(A(x_0), A(x_1), ..., A(x_n)), B(x) = L(B(x_0), B(x_1), ..., B(x_n))$

加减：$(A \pm B)(x) = L((A \pm B)(x_0), (A \pm B)(x_1), ..., (A \pm B)(x_n)) = L(A(x_0) \pm B(x_0), A(x_1) \pm B(x_1), ..., A(x_n) \pm B(x_n))$

点值表示法下的基本运算

设插值所用的横坐标为 $x_0, x_1, ...x_n$

L 表示插值函数

$A(x) = L(A(x_0), A(x_1), ..., A(x_n)), B(x) = L(B(x_0), B(x_1), ..., B(x_n))$

加减：$(A \pm B)(x) = L((A \pm B)(x_0), (A \pm B)(x_1), ..., (A \pm B)(x_n)) = L(A(x_0) \pm B(x_0), A(x_1) \pm B(x_1), ..., A(x_n) \pm B(x_n))$

乘法：$(A \times B)(x) = L((A \times B)(x_0), (A \times B)(x_1), ...(A \times B)(x_n)) = L(A(x_0) \times B(x_0), A(x_1) \times B(x_1), ..., A(x_n) \times B(x_n))$

快速傅立叶变换

FFT 可以在 $O(nlogn)$ 的时间复杂度内从特定的 n 个横坐标上插值出多项式

准确的说是 $\omega_n^1, \omega_n^2, ...\omega_n^n$

ω_n 是复数，表示 n 次单位根

FFT 的过程这里不深入探究

如果要计算两个系数表示的多项式的乘积的系数表示，就可以先转换成点值表示，然后相乘，再插值回去

拉格朗日插值

FFT 只能从特定的横坐标插值，如果想要从任意点插值，就要使用拉格朗日插值法了