

---


# ERE102– Reglerteknik D

## Tentalösningar

---

Av Johan Sjöblom sjoblomj88@gmail.com  
20 augusti 2014

---



Jag har  
klarat  
regleren,  
sucker!

## Inledning

Det här dokumentet är ett försök till att göra utförliga lösningar till kursen Reglerteknik D. Ett antal uppgifter från gamla tentor är lösta så utförligt som det varit möjligt. Målsättningen är att lösningarna antingen ska innehålla motiveringar om varför vi räknar som vi gör, alternativt referera till ett kapitel med förklaringar eller referenser till vart man hittar mer information.

Då allt för många av de existerande lösningsförslagen hoppar över mellansteg och samband har det inneburit mycket svårtydda lösningar. Ambitionen med detta dokumentet är att skriva ut alla mellansteg, även de av ren algebraisk natur, så att det blir tydliga lösningar.

Reglerkursen är i första hand svår då den innehåller en stor mängd spridda begrepp som man måste försöka hålla i huvudet och se sambanden mellan. För att slippa hålla ytterligare en massa formler i huvudet så refereras till de formler och sidor i Mathematics Handbook Beta (fifth edition) som är relevanta. Skrivsättet  $\beta_{\text{sid } 62}$  refererar alltså till sida 62 i Beta. Vid Laplacetransformeringar används skrivsättet  $\beta_{L47}$  för att beteckna i detta fall transform 47 ur Laplacetransformtabellen i Beta. Skrivsättet  $BL_{\text{sid } xx}$  används för att referera till en sida ur Bengt Lennartssons kursbok Reglerteknikens Grunder.

Beteckningen för den imaginära enheten är slumpvis  $i$  och  $j$  i dokumentet.

Ambitionen med dokumentet är att förklara uppgifter på ett för datateknologer tydligt sätt. Utan tvekan så kommer du ha en massa frågetecken även efter att ha läst uppgifterna, inte minst av karaktären "vartifrån kommer den här uppställningen?" eller "varför ansätter vi problemet på det här viset?". Hjälp jättegärna till med att förbättra dokumentet! Oavsett vad du kan bidra med så uppmuntras du att förbättra och utöka!

Lycka till så ses vi på omtentan!

---

Det är fritt fram att sprida dokumentet till alla som kan tänkas vilja ha det. Förbättra gärna lösningarna om du kan! Hela dokumentet, såväl som L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-koden är att betrakta som Public Domain.

Observera att lösningarna inte kommer från institutionen som ger kursen och att de inte blivit felkontrollerade. Svaren kan vara både fel, ha konstig notation och det är inte säkert att de är utförliga nog. Ser du något som du tycker verkar fel eller som du tror är konstigt, så har du förmodligen rätt.

---

## Ändringslogg

2014-08-21   Johan Sjöblom   Första versionen.

## Innehåll

<b>1</b>	<b>Tenta 2014-04-24</b>	<b>4</b>
1.1	1a . . . . .	4
1.2	1b . . . . .	5
1.3	1d . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Tenta 2013-12-16</b>	<b>8</b>
2.1	1a . . . . .	8
2.2	1b . . . . .	8
2.3	3a . . . . .	13
2.4	3b . . . . .	13
2.5	3c . . . . .	15
2.6	4a . . . . .	15
2.7	4b . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Tenta 2013-08-22</b>	<b>17</b>
3.1	1a . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Tenta 2013-04-05</b>	<b>18</b>
4.1	5a . . . . .	18
4.2	5b . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Tenta 2012-12-21</b>	<b>21</b>
5.1	1b . . . . .	21
5.2	2b . . . . .	21
5.3	5a . . . . .	22
5.4	5b . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Blockdiagram</b>	<b>24</b>
<b>7</b>	<b>State Space</b>	<b>24</b>
<b>8</b>	<b>Frekvenssvar och Bodediagram</b>	<b>24</b>
<b>9</b>	<b>Linjärisering</b>	<b>24</b>
<b>10</b>	<b>Partialbråksuppdelning</b>	<b>25</b>

# 1 Tenta 2014-04-24

## 1.1 1a

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = u(t-1)$$

Notera att uppgiften säger att  $u$  är insignal, och alltså inte ett steg!  
Laplacea med hjälp av  $\beta_{L8}$  ( $\ddot{y}(t)$ ),  $\beta_{L7}$  ( $\dot{y}(t)$ ) och  $\beta_{L4}$  ( $u(t-1)$ ):

$$\begin{aligned}s^2 Y(s) + s Y(s) &= e^{-1 \cdot s} U(s) \\ Y(s)(s^2 + s) &= U(s)e^{-s}\end{aligned}$$

Överföringsfunktionen blir:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{e^{-s}}{s^2 + s}$$

Detta är inte ett trevligt problem; tidsförskjutningen (alltså  $u(t-1)$  i den givna ekvationen) ger upphov till  $e^{-s}$ , vilket gör det hela besvärligt att arbeta med. Vi struntar tillsvidare i tidsförskjutningen, och kompenserar för det i efterhand. Detta kan vi göra om systemet är tidsinvariant, vilket alla system i Reglerteknikkursen är. Om vi alltså istället för att räkna på den givna ekvationen tittar på följande,

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = u(t)$$

så får vi på samma sätt som ovan:

$$\begin{aligned}s^2 Y(s) + s Y(s) &= U(s) \\ Y(s)(s^2 + s) &= U(s)\end{aligned}$$

Överföringsfunktionen, (nu kallad  $G_{ny}(s)$ , då det ju inte är samma som vi tidigare hade) blir:

$$G_{ny}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + s}$$

Vi vill bestämma systemets stegsvar, det vill säga  $y(t)$  då insignalen är ett steg. Det får vi genom att invers-Laplacea  $Y(s)$ . Ett steg i Laplacedomänen innebär att insignalen  $U(s) = \frac{1}{s}$ . Vi har  $G_{ny}(s)$  och  $U(s)$ , och vill ha ut  $Y(s)$ . Detta ger:

$$G_{ny}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \iff Y(s) = G_{ny}(s)U(s) = \frac{1}{s^2 + s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

För att lösa detta använder vi oss av partialbråksuppdelning (se sektion 10).

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+1} \iff \\ 1 &= A(s+1) + Bs(s+1) + Cs^2 \iff \\ 1 &= As + A + Bs^2 + Bs + Cs^2\end{aligned}$$

Vi skiljer på gradtalen:

$$\begin{aligned}s^2 : \quad B + C &= 0 \\ s^1 : \quad A + B &= 0 \\ s^0 : \quad A &= 1\end{aligned}$$

Detta kan lösas på flera sätt, till exempel genom att sätta upp på matrisform:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\rho_1 + \rho_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\rho_2 + \rho_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Vi får alltså:

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 1 \end{cases}$$

Stoppar vi in värdena i  $Y(s)$  så får vi:

$$Y(s) = G_{\text{ny}}(s)U(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

Detta kan vi enkelt invers-Laplacea med hjälp av  $\beta_{L20} \left(\frac{1}{s^2}\right)$ ,  $\beta_{L18} \left(\frac{1}{s}\right)$  och  $\beta_{L21} \left(\frac{1}{s+1}\right)$ .

$$y(t) = t^1 - 1 + e^{-1 \cdot t} = t - 1 + e^{-t}, \quad t \geq 0 \quad (y(t) = 0, t < 0)$$

Detta har vi alltså löst då vi struntat i den tidsfördröjning som fanns med i ursprungsproblemet (det vill säga vi har förbisett att differentialekvationen innehöll termen  $u(t-1)$  och istället räknat på  $u(t)$ ). Då fördröjningen är 1 tidsenhet, så ersätter vi  $t$  i resultatet med  $t-1$ :

$$y(t) = (t-1) - 1 + e^{-(t-1)} = t - 2 + e^{-t+1}, \quad t \geq 1 \quad (y(t) = 0, t < 1)$$

## 1.2 1b

Teorin bakom detta står på BL<sub>sid 424</sub>.

Vi ska bestämma en tillståndsåterkoppling. Med andra ord så har vi ett öppet system, och ska återkoppla det.

I det allmänna fallet så gäller

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

och i vårt fall så har vi

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

Då vi har ett öppet system så kan vi enligt ekvation 3.15 på BL<sub>sid 92</sub> räkna ut polerna med  $\det(sI - A) = 0$  (om det var ett slutet system så hade (11.15) på BL<sub>sid 425</sub> gällt). Hur man räknar ut determinanter står på BL<sub>sid 93</sub>.

$$\begin{aligned}\det(sI - A) &= 0 \iff \\ 0 &= \det \left( \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \det \left( \begin{bmatrix} s+4 & 3 \\ -1 & s \end{bmatrix} \right) = \\ &= (s+4)s - 3(-1) = s^2 + 4s + 3 = 0 \\ s &= -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3} \\ s &= -2 \pm 1 \\ s_1 &= -3, \quad s_2 = -1\end{aligned}$$

Referens till polavstånd vs. hastighet på systemet?

Ökat avstånd till origo ger snabbare system. Den långsamma polen är alltså  $s_2 = -1$ . Detta innebär att vi vill placera den långsamma polen  $s_2$  i den snabba polen  $s_1$ . Alltså sätter vi att  $s_1 = s_2 = -3$ . Har vi båda polerna i  $-3$  så blir den karakteristiska ekvationen  $\alpha_c(s) = (s+3)^2 = s^2 + 6s + 9$ .

Enligt (11.15) på BL<sub>sid 425</sub> så gäller att när vi "uttrycker den önskade polplaceringen för det återkopplade systemet i form av det karakteristiska polynomet ( $\alpha_c(s)$ ), leder det till att följande polynomidentitet ska uppfyllas:  $\alpha_c(s) = \det(sI - A + BL_u)$ ". Med andra ord, den karakteristiska ekvationen vi nyss räknade ut ska vara lika med  $\det(sI - A + BL)$ .

$$\begin{aligned}\det(sI - A + BL) &= \det \left( \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \det \left( \begin{bmatrix} s+4 & 3 \\ -1 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \det \left( \begin{bmatrix} s+4+l_1 & 3+l_2 \\ -1 & s \end{bmatrix} \right) = \\ &= (s+4+l_1)s - (3+l_2)(-1) = \\ &= s^2 + 4s + l_1s + 3 + l_2 = s^2 + (4+l_1)s + (3+l_2)\end{aligned}$$

Detta är alltså enligt (11.15) lika med den karakteristiska ekvationen ( $\alpha_c(s)$ ), varifrån vi kan identifiera värden på  $l_1$  och  $l_2$ :

$$\begin{aligned}s^2 + (4+l_1)s + (3+l_2) &= \\ s^2 + 6s + 9 &= \\ \begin{cases} 4+l_1 = 6 \\ 3+l_2 = 9 \end{cases} &\iff \begin{cases} l_1 = 2 \\ l_2 = 6 \end{cases}\end{aligned}$$

## 1.3 1d

*Obs! Detta är en skissartad lösning, med en del oklarheter i sig. Den är troligast skriven med delvis inkorrekt matematisk notation, vilket lärare har en tendens att se rött av.*

Från bifogat formelblad till tesen:

$$\text{LP} \rightarrow \text{HP}: \quad s \rightarrow \frac{\omega_c}{s}.$$

På något sätt så ser vi att när vi utgår från första ordningens Butterworth-filter, så har vi

Hur ser vi detta?

$$|H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$

Nu har vi

Hur?

$$H(s) = \frac{1}{1 + \underbrace{s}_{s \rightarrow \frac{\omega_c}{s}}} \rightarrow \frac{1}{1 + \frac{\omega_c}{s}} = \frac{s}{\omega_c + s}$$

Från bifogat formelblad till tesen så har vi att Tustin-diskretisering innebär:

$$s \rightarrow \frac{2}{h} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{2}{h} \frac{1 - \frac{1}{z}}{1 + \frac{1}{z}} = \frac{2}{h} \frac{z - 1}{z + 1}$$

Om vi Tustin-diskretiserar  $H(s)$  så får vi:

$$H(z) = \frac{\frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1}}{\omega_c + \frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{2(z-1)}{\omega_c h(z+1) + 2(z-1)} = \frac{z-1}{z-1 + \frac{1}{2}\omega_c h(z+1)}$$

På något sätt så ser vi att  $\omega_c = 2\pi \cdot 500$  Hz. Vi ljugar oss också till att  $h$  är angivet i sekunder, och att  $h = 10^{-4}$  Hz  $\Rightarrow (10^4)^{-1}$ . Sätter vi in det så får vi:

Hur gick det till?

$$H(z) = \frac{z-1}{z-1 + \frac{1}{2}2\pi 500 \cdot (10^4)^{-1}(z+1)} = \frac{z-1}{z-1 + 0.05\pi(z+1)} = \frac{z-1}{(0.05\pi+1)z + 0.05\pi - 1} = \frac{\frac{1}{(0.05\pi+1)}(z-1)}{z + \frac{0.05\pi-1}{(0.05\pi+1)}} \approx \frac{0.86(z-1)}{z-0.73}$$

## 2 Tenta 2013-12-16

### 2.1 1a

Ett insignal-utsignal-stabilt system har sina poler strikt i vänster halvplan. Vi vill alltså hitta polerna och kontrollera vart de ligger, för att avgöra om systemen är stabila eller inte. Polerna hittar vi genom att sätta nämnarna i ekvationerna till 0, och sedan lösa ut  $s$ .

$$G_1(s) = \frac{s-3}{s^2+2s+6}$$

Sätt nämnaren till 0 och lös:

$$\begin{aligned} s^2 + 2s + 6 &= 0 \\ s &= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 6} \\ s &= -1 \pm \sqrt{-5} \\ s_1 &= -1 + 5i, \quad s_2 = -1 - 5i \end{aligned}$$

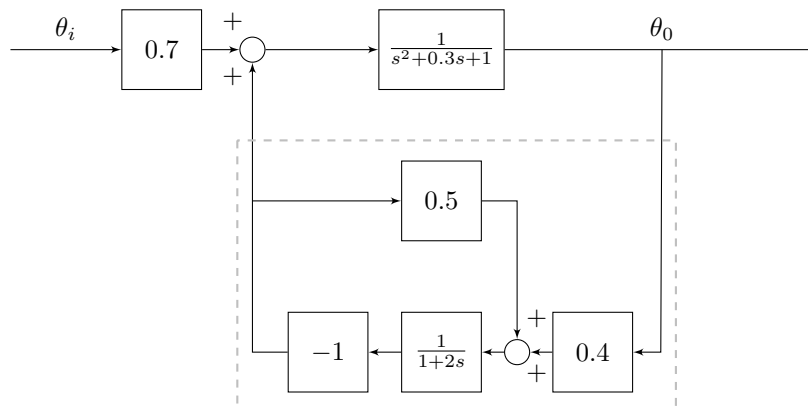
Vi ser att båda polerna har imaginära delar, men det spelar ingen roll. Det viktiga är att båda ligger i vänster halvplan, vilket de ju gör.  $G_1(s)$  är alltså stabilt.

$$G_2(s) = \frac{s+3}{s^2+2s} = \frac{s+3}{s(s+2)}$$

Polerna får vi alltså av  $s(s+2) = 0$ . Vi ser omedelbart att  $s_1 = -2$  och  $s_2 = 0$ . Polen  $s_1$  ligger i vänster halvplan, men  $s_2$  ligger på 0, och alltså inte strikt i vänster halvplan.  $G_2(s)$  är alltså inte stabilt.

### 2.2 1b

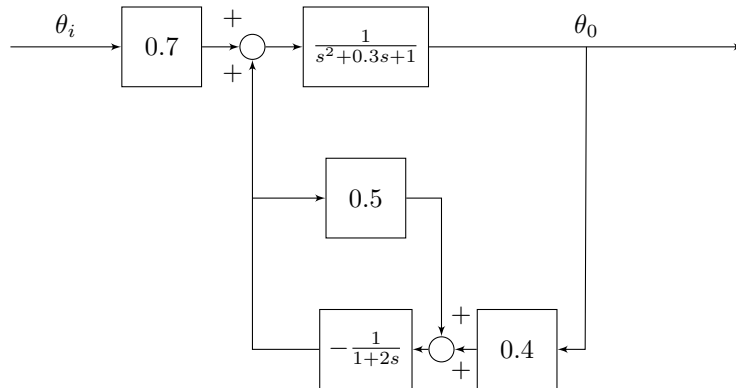
Vi ska bestämma överföringsfunktionen från  $\theta_i$  till  $\theta_0$ . Gyroåterkopplingen subtraherar  $\theta_0 K s$  från insignalen, men givet i uppgiften är att  $K = 0$ , vilket alltså gör att gyroåterkopplingen faller bort. Blockdiagrammet reduceras till följande:



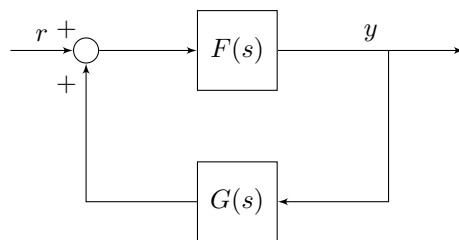


För att gå vidare behöver vi reducera blockdiagrammet ytterligare. Vi börjar fokusera på den inre återkopplingen (markerad i figuren ovan). Vi kan behandla boxen med  $-1$  på två olika sätt.

**Alternativ ett:** Multiplicera in den i boxen med  $\frac{1}{1+2s}$  varpå vi får följande:



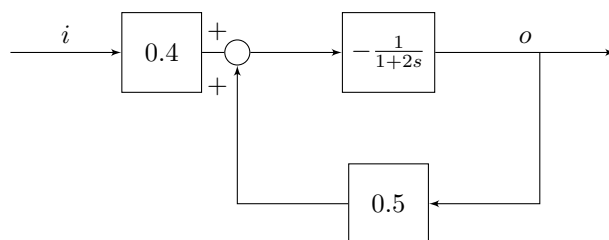
Standardformen för att rita en enkel positiv återkoppling är:



Överföringsfunktionen för ett sådant system är som bekant

$$\frac{y}{r} = \frac{F(s)}{1 - F(s)G(s)}$$

Om vi tittar på den inre återkopplingen, som vi nyss markerade, och ritar om den på standardformen får vi:



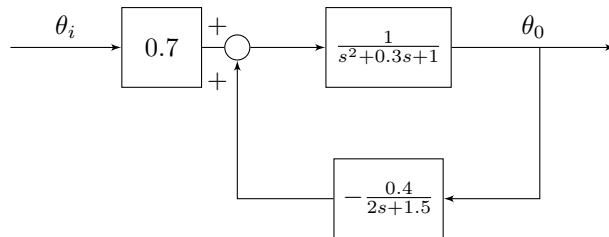
Sätter vi upp överföringsfunktionen för delsystemet så får vi

$$\frac{o}{i} = 0.4 \frac{-\frac{1}{1+2s}}{1 - (-\frac{1}{1+2s})0.5}$$

Vi kan förenkla systemet genom att börja med att förlänga med  $1 + 2s$ :

$$\begin{aligned}\frac{o}{i} &= -0.4 \frac{\frac{1}{1+2s}}{1 + \frac{1}{1+2s} 0.5} = -0.4 \frac{1+2s}{1+2s} \cdot \frac{\frac{1}{1+2s}}{1 + \frac{1}{1+2s} 0.5} = \\ &= -0.4 \frac{\frac{1}{1+2s}(1+2s)}{(1+2s) + \frac{1}{1+2s} 0.5(1+2s)} = -0.4 \frac{1}{(1+2s) + 0.5} = -\frac{0.4}{2s+1.5}\end{aligned}$$

Vi kan nu ersätta den inre återkopplingen med en låda med den inre återkopplingens överföringsfunktion:



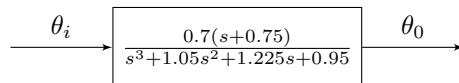
På precis samma sätt som ovan kan vi nu förenkla systemet genom att sätta upp dess överföringsfunktion.

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = 0.7 \frac{\frac{1}{s^2+0.3s+1}}{1 - \frac{1}{s^2+0.3s+1} \left(-\frac{0.4}{2s+1.5}\right)}$$

Vi förlänger med  $(s^2 + 0.3s + 1)(2s + 1.5)$ :

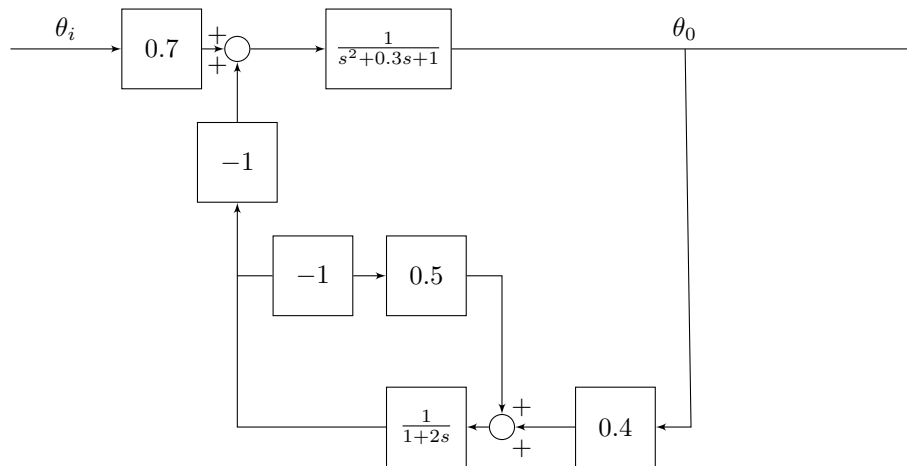
$$\begin{aligned}\frac{\theta_0}{\theta_i} &= 0.7 \frac{(s^2 + 0.3s + 1)(2s + 1.5)}{(s^2 + 0.3s + 1)(2s + 1.5)} \cdot \frac{\frac{1}{s^2+0.3s+1}}{1 + \frac{1}{s^2+0.3s+1} \cdot \frac{0.4}{2s+1.5}} = \\ &= 0.7 \frac{\frac{1}{s^2+0.3s+1}(s^2 + 0.3s + 1)(2s + 1.5)}{(s^2 + 0.3s + 1)(2s + 1.5) + \frac{1}{s^2+0.3s+1} \cdot \frac{0.4}{2s+1.5}(s^2 + 0.3s + 1)(2s + 1.5)} = \\ &= 0.7 \frac{2s + 1.5}{(s^2 + 0.3s + 1)(2s + 1.5) + 0.4} = 0.7 \frac{2(s + 0.75)}{2((s^2 + 0.3s + 1)(s + 0.75) + 0.2)} = \\ &= \frac{0.7(s + 0.75)}{s^3 + 1.05s^2 + 1.225s + 0.95}\end{aligned}$$

På blockschemaform:

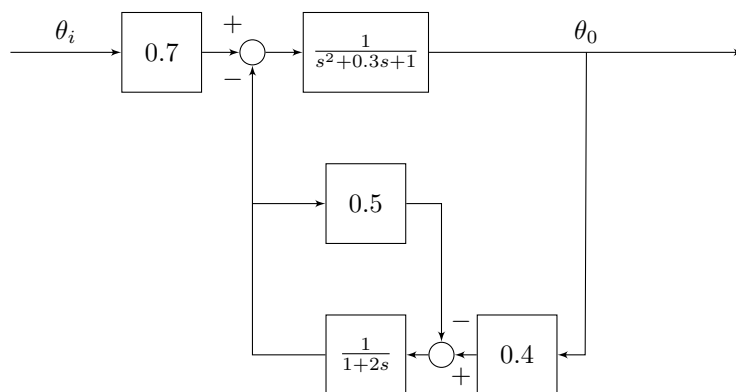


Fördelen med denna lösningsmetod är att vi mekaniskt arbetar med det givna blockschemat. Nackdelen är att vi har ett positivt återkopplat system (det vill säga, signalerna till alla summeringspunkterna i systemet adderas), vilket inte används lika mycket i Reglerteknikkursen. Detta är inte ett problem, utan det är mest att vi är lite mer ovana vid att ställa upp positivt återkopplade system.

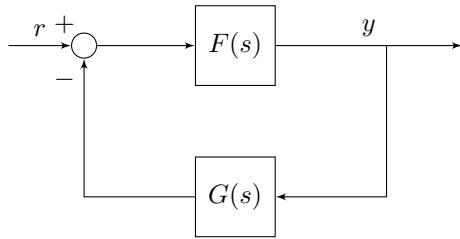
**Alternativ 2:** Det lösningsförslag som presenteras i facit har fördelen att vi har ett negativt återkopplat system (det vill säga, signalerna till alla summeringspunkterna i systemet subtraheras), vilket vi ju räknar oftare på. Vi kan flytta boxen  $-1$  fram över delningspunkten, och få följande blockdiagram:



I den övre summeringspunkten så adderar vi en negerad signal, vilket är samma sak som att subtrahera signalen. Vi kan alltså ersätta additionstecknet med ett subtraktionstecken, och ta bort boxen med  $-1$ . På samma sätt gör vi i den inre återkopplingen; den återkopplande signalen kommer vara negerad, och vi kan därför ersätta additionstecknet i den undre summeringspunkten med ett subtraktionstecken:



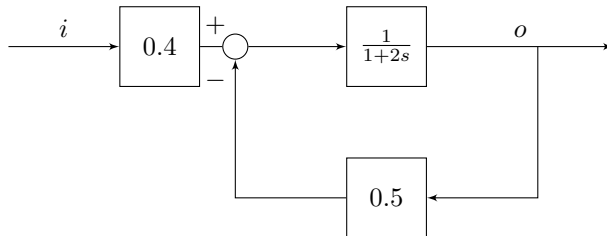
Standardformen för att rita en enkel negativ återkoppling är:



Överföringsfunktionen för ett sådant system är som bekant

$$\frac{y}{r} = \frac{F(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

Om vi tittar på den inre återkopplingen, och ritat om den på standardformen får vi:



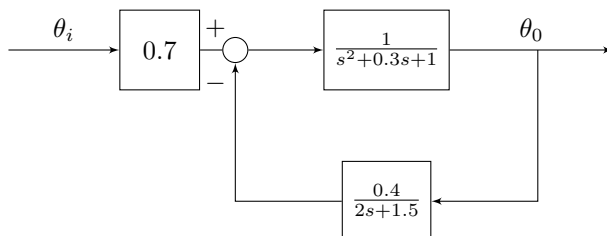
Sätter vi upp överföringsfunktionen för delsystemet så får vi

$$\frac{o}{i} = 0.4 \frac{\frac{1}{1+2s}}{1 + \frac{1}{1+2s} 0.5}$$

Vi kan förenkla systemet genom att börja med att förlänga med  $1 + 2s$ :

$$\begin{aligned} \frac{o}{i} &= 0.4 \frac{\frac{1}{1+2s}}{1 + \frac{1}{1+2s} 0.5} = 0.4 \frac{1+2s}{1+2s} \cdot \frac{\frac{1}{1+2s}}{1 + \frac{1}{1+2s} 0.5} = \\ &= 0.4 \frac{\frac{1}{1+2s} (1+2s)}{(1+2s) + \frac{1}{1+2s} 0.5 (1+2s)} = 0.4 \frac{1}{(1+2s) + 0.5} = \frac{0.4}{2s+1.5} \end{aligned}$$

Vi kan nu ersätta den inre återkopplingen med en låda med den inre återkopplingens överföringsfunktion:



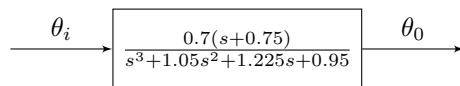
På precis samma sätt som ovan kan vi nu förenkla systemet genom att sätta upp dess överföringsfunktion.

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = 0.7 \frac{\frac{1}{s^2+0.3s+1}}{1 + \frac{1}{s^2+0.3s+1} \cdot \frac{0.4}{2s+1.5}}$$

Vi förlänger med  $(s^2 + 0.3s + 1)(2s + 1.5)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\theta_0}{\theta_i} &= 0.7 \frac{(s^2 + 0.3s + 1)(2s + 1.5)}{(s^2 + 0.3s + 1)(2s + 1.5)} \cdot \frac{\frac{1}{s^2+0.3s+1}}{1 + \frac{1}{s^2+0.3s+1} \cdot \frac{0.4}{2s+1.5}} = \\ &= 0.7 \frac{\frac{1}{s^2+0.3s+1}(s^2 + 0.3s + 1)(2s + 1.5)}{(s^2 + 0.3s + 1)(2s + 1.5) + \frac{1}{s^2+0.3s+1} \cdot \frac{0.4}{2s+1.5}(s^2 + 0.3s + 1)(2s + 1.5)} = \\ &= 0.7 \frac{2s + 1.5}{(s^2 + 0.3s + 1)(2s + 1.5) + 0.4} = 0.7 \frac{2(s + 0.75)}{2((s^2 + 0.3s + 1)(s + 0.75) + 0.2)} = \\ &= \frac{0.7(s + 0.75)}{s^3 + 1.05s^2 + 1.225s + 0.95} \end{aligned}$$

På blockschemaform:



Samma svar erhålls alltså oavsett angreppssätt.

### 2.3 3a

Som framgår av differentialekvationen och texten så har vi två funktioner som beror av tiden:  $u(t)$  och  $N(t)$ . Vi har också konstanter:  $J$ ,  $R$ ,  $K_T$ ,  $K_G$  och  $K_E$ . Uppgiften är att räkna ut den konstanta spänningen  $u_0$  för det konstanta varvtalet  $N_0$ , det vill säga ersätta de variabla funktionerna  $N(t)$  och  $u(t)$  med konstanterna  $N_0$  respektive  $u_0$ , och sedan bryta ut  $u_0$ .

$$J \frac{dN_0}{dt} + K_G N_0^2 = \frac{K_T}{R} (u_0 - K_E N_0)$$

Den första termen,  $\frac{dN_0}{dt}$ , deriverar en konstant med avseende på tiden. En derivata av en konstant är noll, varpå den termen faller bort. Vi får:

$$\begin{aligned} 0 + K_G N_0^2 &= \frac{K_T}{R} u_0 - \frac{K_T}{R} K_E N_0 \\ u_0 &= \frac{K_G N_0^2 R}{K_T} + K_E N_0 \end{aligned}$$

### 2.4 3b

Se sektion 9 för bakgrund till linjärisering. Vi börjar med att kalla differentialekvationen för  $g$  och flyttar över alla termer till samma sida.

$$g(u, N) = \underbrace{J \frac{dN(t)}{dt}}_{\text{Term 1}} + \underbrace{K_G N(t)^2}_{\text{Term 2}} + \underbrace{\frac{K_T K_E}{R} N(t)}_{\text{Term 3}} - \underbrace{\frac{K_T}{R} u(t)}_{\text{Term 4}}$$

Linjärisera!

$$g(u, N) \approx \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{u_0, N_0} (u - u_0) + \left. \frac{\partial g}{\partial N} \right|_{u_0, N_0} (N - N_0)$$

När vi först partialderiverar med avseende på  $u$  kommer alla termer som inte innehåller  $u$  (Term 1, Term 2 och Term 3) betraktas som konstanter. Derivatans av en konstant är som bekant noll, vilket gör att alla termer ej innehållande  $u$  då försvinner.

$$\frac{\partial g}{\partial u} = -\frac{K_T}{R}$$

På samma sätt gäller att när vi partialderiverar med avseende på  $N$ , så kommer Term 4 som inte innehåller  $N$  att bli 0. Vi får:

$$\frac{\partial g}{\partial N} = J \frac{d}{dt} + 2K_G N + \frac{K_T K_E}{R}$$

Term 1 innehåller en derivering av  $N(t)$  med avseende på  $t$ , men när vi nu partialderiverar  $g$ , så gör vi det med avseende på  $N$ . Tidsderiveringen blir alltså kvar, men inte funktionen  $N$ .

Vi linjäriserar enligt uppgiften i arbetspunkten  $(u_0, N_0)$ , vilket innebär att vi stoppar in värdet  $u_0$  i funktionen  $u$  och stoppar in  $N_0$  i funktionen  $N$ . Med lite slappt språkbruk kan vi säga att vi "ersätter"  $u$  med  $u_0$  och  $N$  med  $N_0$ . Det är detta som avses med beteckningarna  $\left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{u_0, N_0}$  respektive  $\left. \frac{\partial g}{\partial N} \right|_{u_0, N_0}$ .

I  $\frac{\partial g}{\partial N}$  ersätter vi alltså  $N$  med  $N_0$ . Något  $u$  finns inte i varken  $\frac{\partial g}{\partial u}$  eller  $\frac{\partial g}{\partial N}$ , och något  $N$  finns inte i  $\frac{\partial g}{\partial u}$ . För exempel på när vi har kvar termer att ersätta, se det första exemplet i Matematikrepetitionsheftet kapitel 5.1.

$$g(u, N) \approx \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{u_0, N_0} (u - u_0) + \left. \frac{\partial g}{\partial N} \right|_{u_0, N_0} (N - N_0) = -\frac{K_T}{R} (u - u_0) + \left( J \frac{d}{dt} + 2K_G N_0 + \frac{K_T K_E}{R} \right) (N - N_0)$$

Vi sätter  $\Delta N = N - N_0$  och  $\Delta u = u - u_0$ :

$$\begin{aligned} -\frac{K_T}{R} \Delta u(t) + J \frac{d\Delta N(t)}{dt} + 2K_G N_0 \Delta N(t) + \frac{K_T K_E}{R} \Delta N(t) &= 0 \iff \\ \frac{K_T}{R} \Delta u(t) &= J \frac{d\Delta N(t)}{dt} + \left( 2K_G N_0 + \frac{K_T K_E}{R} \right) \Delta N(t) \end{aligned}$$

## 2.5 3c

Vad gör vi här egentligen?

$$\frac{\Delta N(s)}{\Delta u(s)} = \frac{\frac{K_T}{R}}{Js + 2K_G N_0 R + \frac{K_T K_E}{R}} = \frac{K_T}{RJs + 2K_G N_0 R + K_T K_E}$$

Vartifrån kommer den formen?

Vi vill ha uttrycket på formen  $\frac{K}{1+sT}$ . Tidskonstanten som det frågas efter är  $T$ . Det gäller för oss att algebraiskt arbeta om uttrycket så att vi får det på önskad form.

$$\begin{aligned} \frac{K_T}{RJs + 2K_G N_0 R + K_T K_E} &= \frac{\frac{1}{2K_G N_0 R + K_T K_E}}{\frac{1}{2K_G N_0 R + K_T K_E}} \frac{K_T}{RJs + 2K_G N_0 R + K_T K_E} = \\ &= \frac{\frac{K_T}{2K_G N_0 R + K_T K_E}}{\frac{RJ}{2K_G N_0 R + K_T K_E} s + 1} = \frac{K}{Ts + 1} \end{aligned}$$

Vi kan nu avläsa  $T$ .

$$T = \frac{RJ}{2K_G N_0 R + K_T K_E} = \frac{J}{2K_G N_0 + \frac{K_T K_E}{R}}$$

Varvtalet,  $N_0$ , står i nämnaren, det vill säga  $T$  minskar med ökat varvtalet.

## 2.6 4a

Teorin bakom detta står på BL<sub>sid</sub> 424.

I det allmänna fallet så gäller

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

och i vårt fall så har vi

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

$$u(t) = -Lx(t) + K_r r(t)$$

Då det skall finnas relativ dämpning och naturlig egenfrekvens så ska vi använda följande ekvation från det till tesen bifogade formelbladet.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Det karakteristiska polynomet för det slutna systemet är alltså för  $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$  och  $\omega_n = \sqrt{2}$ :

$$\alpha_c(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}s + (\sqrt{2})^2 = s^2 + 2s + 2$$

Enligt (11.15) på BL<sub>sid 425</sub> så gäller följande för det slutna systemet:

$$\alpha_c(s) = \det(sI - A + BL)$$

$$\begin{aligned} sI - A + BL &= \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_1 & -l_2 \\ l_1 & l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-l_1 & -1-l_2 \\ l_1 & s+l_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hur man räknar ut determinanter står på  $\beta_{\text{sid 93}}$ .

$$\begin{aligned} \det(sI - A + BL) &= \det \left( \begin{bmatrix} s-l_1 & -1-l_2 \\ l_1 & s+l_2 \end{bmatrix} \right) = \\ &= (s-l_1)(s+l_2) - l_1(-1-l_2) = s^2 + (-l_1+l_2)s + l_1 \end{aligned}$$

Detta är alltså lika med det karakteristiska polynomet ( $\alpha_c(s)$ ), varifrån vi kan identifiera värden på  $l_1$  och  $l_2$ :

$$\begin{array}{rcl} s^2 + & (-l_1 + l_2)s & + l_1 = \\ s^2 + & 2s & + 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} -l_1 + l_2 = 2 \\ l_1 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} l_1 = 2 \\ l_2 = 4 \end{cases}$$

## 2.7 4b

Enligt (11.16) på BL<sub>sid 426</sub> så gäller:

$$G_{ry}(s) = C(sI - A + BL)^{-1}BK_r$$

Vi ska alltså lösa ut  $K_r$ , och för att göra det behöver vi utföra lite matrismultiplikation och räkna ut inversen av  $sI - A + BL$  (som vi ju räknade ut i a)-uppgiften). Hur man räknar ut matrisinverser står på  $\beta_{\text{sid 94}}$ .



$$\begin{aligned}
G_{ry}(s) &= C(sI - A + BL)^{-1}BK_r = \\
&= [1 \quad 0] \left( \begin{bmatrix} s - l_1 & -1 - l_2 \\ l_1 & s + l_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} K_r = \\
&= [1 \quad 0] \left( \frac{1}{(s - l_1)(s + l_2) - l_1(-1 - l_2)} \begin{bmatrix} s + l_2 & 1 + l_2 \\ -l_1 & s - l_1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} K_r = \\
&= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s + l_2 & 1 + l_2 \\ -l_1 & s - l_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{K_r}{(s - l_1)(s + l_2) - l_1(-1 - l_2)} = \\
&= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} -1(s + l_2) + 1 \cdot (1 + l_2) \\ (-1)(-l_1) + 1 \cdot (s - l_1) \end{bmatrix} \frac{K_r}{s^2 + (-l_1 + l_2)s + l_1} = \\
&= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 - s \\ s \end{bmatrix} \frac{K_r}{s^2 + (-l_1 + l_2)s + l_1} = \\
&= (1 - s) \frac{K_r}{s^2 + (-l_1 + l_2)s + l_1} = \\
&= \frac{K_r(1 - s)}{s^2 + (-l_1 + l_2)s + l_1}
\end{aligned}$$

Sätter vi in  $l_1 = 2$  och  $l_2 = 4$  från a)-uppgiften så får vi:

$$G_{ry}(s) = \frac{K_r(1 - s)}{s^2 + (-l_1 + l_2)s + l_1} = \frac{K_r(1 - s)}{s^2 + (-2 + 4)s + 2} = \frac{K_r(1 - s)}{s^2 + 2s + 2}$$

Villkoret i stationaritet uppfylls genom att sätta  $G_{ry}(0) = 1$ :

$$\begin{aligned}
G_{ry}(0) &= \frac{K_r(1 - 0)}{0^2 + 2 \cdot 0 + 2} = \frac{K_r}{2} = 1 \iff \\
&K_r = 2
\end{aligned}$$

### 3 Tenta 2013-08-22

#### 3.1 1a

Notera att uppgiften säger att  $u$  är insignal, det är alltså inte ett steg som står inskrivet i differentialekvationen. Insignalen är en sinussignal, vilket innebär att vi väljer att ansätta problemet enligt nedan.

Laplacea med hjälp av  $\beta_{L8}$  ( $\ddot{y}(t)$ ),  $\beta_{L7}$  ( $\dot{y}(t)$ ),  $\beta_{L6}$  ( $y(t)$ ) och  $\beta_{L4}$  ( $u(t - 2)$ ):

$$\begin{aligned}
\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) &= 3u(t - 2) \\
s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) &= 3e^{-2s}U(s) \\
Y(s)(s^2 + 3s + 2) &= 3e^{-2s}U(s) \\
G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{3e^{-2s}}{s^2 + 3s + 2} = \frac{3e^{-2s}}{(s + 1)(s + 2)}
\end{aligned}$$

Vi ersätter  $s$  med  $i\omega$  (det vill säga går över från s-domänen till Frekvensdomänen).

$$G(i\omega) = \frac{3e^{-2i\omega}}{(i\omega + 1)(i\omega + 2)}$$

På  $\beta_{\text{sid } 339}$  regel 7 under ‘Continuous Systems’ ser vi att med en insignal som är  $\sin(\omega t)$ , så blir utsignalen  $|G(i\omega)| \sin(\omega t + \arg\{G(i\omega)\})$ .

Vi börjar med att räkna ut  $|G(i\omega)|$ , och hur vi gör det står beskrivet på  $\beta_{\text{sid } 61}$ :  $|z| = \sqrt{(\text{Re}\{z\})^2 + (\text{Im}\{z\})^2}$ . På  $\beta_{\text{sid } 61}$  finns några användbara räkneregler för absolutbelopp:  $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$  och  $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ . Vi ser också på  $\beta_{\text{sid } 62}$  att  $|e^{i\theta}| = 1$ .

$$\begin{aligned} |G(i\omega)| &= \left| \frac{3e^{-2i\omega}}{(i\omega + 1)(i\omega + 2)} \right| = \\ &= \frac{|3| \cdot |e^{-2i\omega}|}{|(i\omega + 1)| \cdot |(i\omega + 2)|} = \\ &= \frac{3}{\sqrt{\omega^2 + 1^2} \sqrt{\omega^2 + 2^2}} \end{aligned}$$

Vi räknar nu ut  $\arg\{G(i\omega)\}$ , och hur vi gör det står beskrivet på  $\beta_{\text{sid } 62}$ :  $\arg\{z\} = \arctan \frac{\text{Im}\{z\}}{\text{Re}\{z\}}$ . På  $\beta_{\text{sid } 62}$  finns det några användbara räkneregler för argument:  $\arg\{z_1 z_2\} = \arg\{z_1\} + \arg\{z_2\}$  och  $\arg\{\frac{z_1}{z_2}\} = \arg\{z_1\} - \arg\{z_2\}$ . Vi ser också på  $\beta_{\text{sid } 62}$  att  $\arg\{e^{i\theta}\} = \theta$ .

$$\begin{aligned} \arg\{G(i\omega)\} &= \arg\left\{ \frac{3e^{-2i\omega}}{(i\omega + 1)(i\omega + 2)} \right\} = \\ &= \arg\{3e^{-2i\omega}\} - \arg\{(i\omega + 1)(i\omega + 2)\} = \\ &= \arg\{3\} + \arg\{e^{-2i\omega}\} - (\arg\{i\omega + 1\} + \arg\{i\omega + 2\}) = \\ &= \arctan \frac{0}{3} - 2\omega - (\arctan \frac{\omega}{1} + \arctan \frac{\omega}{2}) = \\ &= -2\omega - \arctan \omega - \arctan \frac{\omega}{2} \end{aligned}$$

Vi kan nu skriva upp det hela på önskad form:

$$y(t) = |G(i\omega)| \sin(\omega t + \arg\{G(i\omega)\}) = \frac{3}{\sqrt{\omega^2 + 1} \sqrt{\omega^2 + 4}} \sin(\omega t - 2\omega - \arctan \omega - \arctan \frac{\omega}{2})$$

Varför gäller detta enbart när det är strikt stabilt? Nämn det som nödvändigt kriterium!

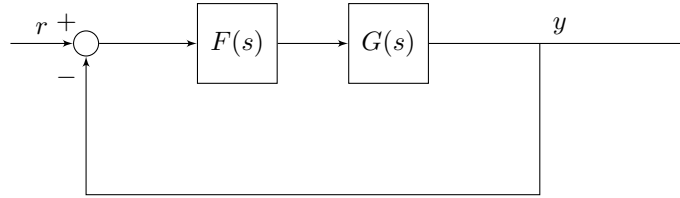
Kommentera begreppet “stora  $t$ ”.

## 4 Tenta 2013-04-05

### 4.1 5a

Vår uppgift är att vi blivit givna  $G(s)$  (vars egenskaper vi inte kan påverka), och vi ska dimensionera en regulator  $F(s)$  som ändrar systemets egenskaper så

att de uppfyller uppgiftens krav.



$$G(s) = \frac{e^{-s}}{s(s+1)}$$

Från (6.30) på BL<sub>sid 249</sub> ser vi att följande gäller:

Förtydliga vad vi gör här.

$$\varphi_m - 180^\circ = \arg\{G(j\omega_c)\}$$

På  $\beta_{\text{sid } 62}$  finns det några användbara räkneregler för argument:  $\arg\{z_1 z_2\} = \arg\{z_1\} + \arg\{z_2\}$  och  $\arg\{\frac{z_1}{z_2}\} = \arg\{z_1\} - \arg\{z_2\}$ .

Överkorsningsfrekvensen ska vara  $\omega_c \geq 1$  rad/s. Om vi ansätter problemet med  $\omega_c = 1$ :

$$\arg\{G(j \cdot 1)\} = \arg\{e^{-j \cdot 1}\} - (\arg\{j \cdot 1\} + \arg\{j \cdot 1 + 1\})$$

På  $\beta_{\text{sid } 62}$  ser vi att  $\arg\{e^{i\theta}\} = \theta$ . Hur vi räknar ut  $\arg\{G(i\omega)\}$  framgår av  $\beta_{\text{sid } 62}$ :  $\arg\{z\} = \arctan \frac{\text{Im}\{z\}}{\text{Re}\{z\}}$ .

$$\begin{aligned} \arg\{G(j \cdot 1)\} &= \arg\{e^{-j \cdot 1}\} - (\arg\{j \cdot 1\} + \arg\{j \cdot 1 + 1\}) = \\ &= -1 - \arctan \frac{1}{0} - \arctan \frac{1}{1} = -1 - \arctan(\infty) - \arctan 1 = -1 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \text{ rad} \end{aligned}$$

Värdena på arctan kommer från tabellen på  $\beta_{\text{sid } 130}$ . På  $\beta_{\text{sid } 125}$  ser vi hur vi konverterar mellan grader och radianer.

$$\arg\{G(j \cdot 1)\} = -1 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \text{ rad} = (-1 - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \frac{180^\circ}{\pi} \approx -192.3^\circ$$

Fasmarginalen som systemet redan har:

$$\begin{aligned} \Phi_m - 180^\circ &= \arg\{G(j\omega_c)\} \approx 192.3^\circ \\ \Phi_m &\approx 180^\circ - 192.3^\circ = -12.3^\circ \end{aligned}$$

Alltså, den fasmarginal som  $G$  har är  $-12.3^\circ$ . Vill vill dimensionera  $F$  så att  $FG \geq 30^\circ$ .

$$\varphi_{m_{ny}} = 30^\circ - \Phi_m \approx 42.3^\circ$$

Vi ska alltså höja fasmarginalen med  $42.3^\circ$ . Att höja fasmarginalen innebär att vi ska använda en PD-regulator.

## 4.2 5b

Från formelbladet bifogat tesen så ser vi att en PD-regulator har följande ekvation:

$$F_{PD}(s) = K_p \frac{1 + s\tau_d}{1 + \frac{s\tau_d}{b}}$$

Att dimensionera en regulator, vilket uppgiften ber oss göra, innebär i vårt fall att bestämma värdena i formeln, det vill säga hitta värdena på  $K_p$ ,  $\tau_d$  och  $b$ . Från formelbladet bifogat tesen ser vi också att följande gäller:

$$b = \frac{1 + \sin \varphi_{max}}{1 - \sin \varphi_{max}}$$

$$\omega_{\varphi_{max}} = \sqrt{b}/T$$

Vi har att  $\varphi_{max} = 42.3^\circ$  och  $\omega_{\varphi_{max}} = 1$ . Av någon anledning så byter man beteckning mellan formlerna, så  $\tau_d = T$ .

Varför är  $T = \tau_d$ ?

$$b = \frac{1 + \sin \varphi_{max}}{1 - \sin \varphi_{max}} = \frac{1 + \sin 42.3}{1 - \sin 42.3} \approx 5$$

$$\omega_{\varphi_{max}} = \sqrt{b}/T \iff 1 = \sqrt{5}/T \iff T = \sqrt{5}$$

Vi har nu bestämt  $b$  och  $T = \tau_d$ , och kvar står att bestämma  $K_p$ . Följande samband gäller tydligen alltid

Referens?

$$|L(i\omega)| = 1$$

Som bekant är  $L(i\omega) = G(i\omega)F(i\omega)$ . Vi kan därmed ställa upp följande:

$$1 = |L(i\omega)| = |G(i\omega)F(i\omega)|$$

Vi vill med andra ord räkna ut absolutbeloppet av  $|G(j\omega_{\varphi_{max}})F(j\omega_{\varphi_{max}})| = |G(j \cdot 1)F(j \cdot 1)| = |G(j)F(j)|$ , och hur vi gör det står beskrivet på  $\beta_{\text{sid } 61}$ :  $|z| = \sqrt{(\text{Re}\{z\})^2 + (\text{Im}\{z\})^2}$ . På  $\beta_{\text{sid } 61}$  finns några användbara räkneregler för absolutbelopp:  $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$  och  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ . Vi ser också på  $\beta_{\text{sid } 62}$  att  $|e^{i\theta}| = 1$ .

$$\begin{aligned}
 1 &= |L(i)| = |G(i)F(i)| = |G(i)| \cdot |F(i)| = \\
 &\left| \frac{e^{-j}}{j(j+1)} \right| \left| K_p \frac{1+j\sqrt{5}}{1+\frac{j\sqrt{5}}{5}} \right| = \left| \frac{e^{-j}}{-1+j} \right| \left| K_p \frac{1+j\sqrt{5}}{1+\frac{j}{\sqrt{5}}} \right| = \\
 &\left| \frac{e^{-j}}{-1+j} \right| \left| K_p \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1+j\sqrt{5}}{1+\frac{j}{\sqrt{5}}} \right| = \left| \frac{e^{-j}}{-1+j} \right| \left| K_p \frac{\sqrt{5}+5j}{\sqrt{5}+j} \right| = \\
 &\frac{|e^{-j}|}{|-1+j|} \cdot |K_p| \frac{|\sqrt{5}+5j|}{|\sqrt{5}+j|} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} \cdot |K_p| \frac{\sqrt{(\sqrt{5})^2+5^2}}{\sqrt{(\sqrt{5})^2+1^2}} = \\
 &\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |K_p| \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = |K_p| \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{30}{6}} = |K_p| \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{5} = |K_p| \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

Då  $|L(i)| = 1$  så kan vi lösa ut  $K_p$ :

$$1 = |K_p| \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \iff K_p = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

Stoppar vi in våra värden så får vi alltså följande PD-regulator:

$$F_{PD}(s) = K_p \frac{1+s\tau_d}{1+\frac{s\tau_d}{b}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}s}{1+\frac{\sqrt{5}s}{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}s}{1+\frac{s}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}s}{\sqrt{5}+s}$$

## 5 Tenta 2012-12-21

### 5.1 1b

Vi går över till Laplacedomänen med hjälp av  $\beta_{L21}$  och  $\beta_{L47}$ :

$$\begin{aligned}
 g(t) &= e^{-0.5t}(1 + \cos 0.5t) = e^{-0.5t} + e^{-0.5t} \cos 0.5t \\
 G(s) &= \frac{1}{s+0.5} + \frac{s+0.5}{(s+0.5)^2 + 0.5^2}
 \end{aligned}$$

Enligt BL<sub>sid 42</sub> så kan vi räkna ut ett systems statiska förstärkning med hjälp av  $G(0)$ :

$$G(0) = \frac{1}{0+0.5} + \frac{0+0.5}{(0+0.5)^2 + 0.5^2} = 3$$

### 5.2 2b

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad \delta(t) &= -k_1\theta(t) - k_2 \frac{d\theta(t)}{dt} - k_3 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \\
 \text{II.} \quad \frac{d\delta(t)}{dt} &= -k_1\theta(t) - k_2 \frac{d\theta(t)}{dt} - k_3 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \\
 \text{III.} \quad \frac{d^2\delta(t)}{dt^2} &= -k_1\theta(t) - k_2 \frac{d\theta(t)}{dt} - k_3 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}
 \end{aligned}$$

Vi går över till Laplacedomänen med hjälp av  $\beta_{L6}$ ,  $\beta_{L7}$  och  $\beta_{L8}$ :

$$\begin{aligned}\text{I.} \quad \Delta(s) &= -k_1\Theta(s) - k_2s\Theta(s) - k_3s^2\Theta(s) \\ \text{II.} \quad s\Delta(s) &= -k_1\Theta(s) - k_2s\Theta(s) - k_3s^2\Theta(s) \\ \text{III.} \quad s^2\Delta(s) &= -k_1\Theta(s) - k_2s\Theta(s) - k_3s^2\Theta(s)\end{aligned}$$

Vi kan nu ställa upp överföringsfunktionerna:

$$\begin{aligned}\text{I.} \quad \frac{\Delta(s)}{\Theta(s)} &= -k_1 - k_2s - k_3s^2 \\ \text{II.} \quad \frac{\Delta(s)}{\Theta(s)} &= \frac{-k_1 - k_2s - k_3s^2}{s} = -\frac{k_1}{s} - k_2 - k_3s \\ \text{III.} \quad \frac{\Delta(s)}{\Theta(s)} &= \frac{-k_1 - k_2s - k_3s^2}{s^2} = -\frac{k_1}{s^2} - \frac{k_2}{s} - k_3\end{aligned}$$

Vi vet att  $s$ -termer är deriverande och  $\frac{1}{s}$ -termer är integrerande. Vi ser att i typ I så finns enbart  $s$ -termer, vilket motsvarar en PD-regulator. I typ II så finns  $s$ - och  $\frac{1}{s}$ -termer, vilket motsvarar en PID-regulator. I typ III så finns enbart  $\frac{1}{s}$ -termer, vilket motsvarar en PD-regulator.

### 5.3 5a

Vi skriver upp signalerna från blockdiagrammet i uppgiften. Efter det flyttar vi om uttrycken algebraiskt. Sedan utnyttjar vi  $\beta_{L7}$ , det vill säga  $\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = sF(s)$ .

$$\begin{aligned}x_1 = \frac{1}{s}x_2 &\iff sx_1 = x_2 &\iff \dot{x}_1 = x_2 &\iff \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 = \frac{1}{s+1}x_3 &\iff sx_2 + x_2 = x_3 &\iff \dot{x}_2 + x_2 = x_3 &\iff \dot{x}_2 = -x_2 + x_3 \\ x_3 = \frac{5}{s+5}u &\iff sx_3 + 5x_3 = 5u &\iff \dot{x}_3 + 5x_3 = 5u &\iff \dot{x}_3 = -5x_3 + 5u\end{aligned}$$

### 5.4 5b

Vi ska enligt uppgiften ha en pol i  $p_1 = -10$ , en i  $p_2 = -1-i$  och en i  $p_3 = -1+i$ . Vi räknar ut uttrycket för de två komplexkonjugerade polerna genom att räkna PQ-formeln baklänges:

$$\begin{aligned}s &= -1 \pm i \\ s &= -1 \pm \sqrt{-1} \\ s &= -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 2} \\ s^2 + 2s + 2 &= 0\end{aligned}$$

För polen  $p_1 = -10$  så får vi uttrycket  $s + 10$ . Kombinerar vi polernas uttryck så får vi följande karakteristiska ekvation:

$$\alpha_c(s) = (s + 10)(s^2 + 2s + 2) = s^3 + 12s^2 + 22s + 20$$

Enligt (11.15) på BL<sub>sid 425</sub> så gäller att när vi "uttrycker den önskade pol-placeringen för det återkopplade systemet i form av det karakteristiska polynomet ( $\alpha_c(s)$ ), leder det till att följande polynomidentitet ska uppfyllas:  $\alpha_c(s) = \det(sI - A + BL_u)$ ". Med andra ord, den karakteristiska ekvationen vi nyss räknade ut ska vara lika med  $\det(sI - A + BL)$ .

Från a)-uppgiften får vi följande A- och B-matris.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} u(t)$$

Hur man räknar ut determinanter står på  $\beta_{\text{sid } 93}$ .

$$\begin{aligned} \det(sI - A + BL) &= \\ \det \left( \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix} \right) &= \\ \det \left( \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & -1 \\ 0 & 0 & s+5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5l_1 & 5l_2 & 5l_3 \end{bmatrix} \right) &= \\ \det \left( \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & -1 \\ 5l_1 & 5l_2 & s+5+5l_3 \end{bmatrix} \right) &= \\ s(s+1)(s+5+5l_3) + (-1)(-1)5l_1 - s(-1)5l_2 &= \\ s^3 + (6+5l_3)s^2 + (5+5l_2+5l_3)s + 5l_1 & \end{aligned}$$

Detta är alltså enligt (11.15) lika med den karakteristiska ekvationen ( $\alpha_c(s)$ ), varifrån vi kan identifiera värden på  $l_1$ ,  $l_2$  och  $l_3$ :

$$\begin{array}{cccc} s^3 + & 12s^2 + & 22s + & 20 = \\ s^3 + & (6 + 5l_3)s^2 + & (5 + 5l_2 + 5l_3)s + & 5l_1 \end{array}$$

$$\begin{cases} 6 + 5l_3 = 12 \\ 5 + 5l_2 + 5l_3 = 22 \\ 5l_1 = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} l_1 = 4 \\ l_2 = 2.2 \\ l_3 = 1.2 \end{cases}$$

## 6 Blockdiagram

Introduktionsvideo på enkel nivå:

[http://www.youtube.com/watch?v=Wj\\_vfeuksUM](http://www.youtube.com/watch?v=Wj_vfeuksUM)

Exempel på blockdiagramreduktion:

<http://www.youtube.com/watch?v=rNlshpOoyxU>

Exempel på blockdiagramreduktion:

[http://www.youtube.com/watch?v=5\\_DpDB4CWEE](http://www.youtube.com/watch?v=5_DpDB4CWEE)

Föreläsning om blockdiagram:

[https://www.youtube.com/watch?v=X4hPVxZlrPU  
&list=PL5105727DD6E8DE98&index=6](https://www.youtube.com/watch?v=X4hPVxZlrPU&list=PL5105727DD6E8DE98&index=6)

## 7 State Space

Introduktionsvideo som förklarar lite varför det är gött och lite om hur det fungerar:

<https://www.youtube.com/watch?v=-k2a5d-X1Gc>

## 8 Frekvenssvar och Bodediagram

Föreläsning i rätt snabbt tempo om frekvenssvar och bodediagram:

[https://www.youtube.com/watch?v=PVV0f6KfjNg  
&index=6&list=PL5105727DD6E8DE98](https://www.youtube.com/watch?v=PVV0f6KfjNg&index=6&list=PL5105727DD6E8DE98)

Samma föreläsning fast i långsammare tempo:

[https://www.youtube.com/watch?v=VfmV0vkc-ks  
&index=7&list=PL5105727DD6E8DE98](https://www.youtube.com/watch?v=VfmV0vkc-ks&index=7&list=PL5105727DD6E8DE98)

Frekvenssvar och stabilitet:

[https://www.youtube.com/watch?v=-YLavh8mIVk  
&index=8&list=PL5105727DD6E8DE98](https://www.youtube.com/watch?v=-YLavh8mIVk&index=8&list=PL5105727DD6E8DE98)

## 9 Linjärisering

Att linjärisera betyder att vi gör en linjär approximering av en funktion på en viss punkt. Om vi till exempel har ett krångligt system, så kan vi förenkla arbetet genom att lägga en tangent på en punkt vi är extra intresserade av, och räkna på tangenten istället, då tangenten är lik systemet i just den punkten.

Linjäriseringsuppgifter är ju kul att få på tentan, särskilt när det kommer till flervariabelsuppgifter, vilket kanske 5% av datastudenter behärskar. Fördelen med den här typen av uppgifter är att de är rätt lätta poäng. Hur man räknar står beskrivet i Matematikrepetitionsheftet från kursen, se kapitel 5.



## 10 Partialbråksuppdelning

Partialbråksuppdelning är kanske inte något man jobbar med varje dag, så det är rostigt för många. Det är dock ganska lätt. Partialbråksuppdelning används flitigt både i kurserna Reglerteknik och Transformer, Signaler och System, så om det sitter löst så är det bara att bita i det sura äpplet och lära sig. Nedan följer en lite utvidgad förklaring från Matematikrepetitionsheftet kaptiel 3.

Vi antar att vi har en rationell funktion (det vill säga en kvot av två polynom)  $\frac{B(s)}{A(s)}$  där  $B(s)$  har lägre gradtal än  $A(s)$  och där nämnaren  $A(s)$  är faktorerad så långt som det går i reella faktorer enligt tabellen nedan.

Faktor i nämnaren ( $A(s)$ )	Ger upphov till partialbråk
$s - \alpha$	$\frac{A_1}{s - \alpha}$
$(s - \alpha)^n$	$\frac{A_1}{s - \alpha} + \frac{A_2}{(s - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_n}{(s - \alpha)^n}$
$s^2 + as + b$	$\frac{B_1 s + C_1}{s^2 + as + b}$
$(s^2 + as + b)^n$	$\frac{B_1 s + C_1}{s^2 + as + b} + \frac{B_2 s + C_2}{(s^2 + as + b)^2} + \dots + \frac{B_n s + C_n}{(s^2 + as + b)^n}$

I  $\beta_{\text{sid } 120}$  står detta kort nämnt, så man behöver inte memorera det utantill. Sätter man samtliga partialbråk på gemensam nämnare så får man ett ekvationssystem med entydig lösning. Exempel:

$$\frac{2s^2 + s - 3}{(s + 1)^2(s + 2)} = \frac{A_1}{s + 1} + \frac{A_2}{(s + 1)^2} + \frac{A_3}{s + 2} \quad (1)$$

$$(s + 1)^2(s + 2) \frac{2s^2 + s - 3}{(s + 1)^2(s + 2)} = (s + 1)^2(s + 2) \left( \frac{A_1}{s + 1} + \frac{A_2}{(s + 1)^2} + \frac{A_3}{s + 2} \right) \quad (2)$$

$$2s^2 + s - 3 = A_1(s + 1)(s + 2) + A_2(s + 2) + A_3(s + 1)^2 \quad (3)$$

$$2s^2 + s - 3 = s^2 A_1 + 3s A_1 + 2A_1 + A_2 s + 2A_2 + A_3 s^2 + 2s A_3 + A_3 \quad (4)$$

$$2s^2 + s - 3 = (A_1 + A_3)s^2 + (3A_1 + A_2 + 2A_3)s + (2A_1 + 2A_2 + A_3) \quad (5)$$

Vi utgår från problemet i vänsterledet i (1), och partialbråksuppdelar det enligt tabellen, varpå högerledet i (1) erhålls. I steg (2) så multiplicerar vi båda sidor av ekvationen med nämnaren i vänsterledet i (1). Vi förenklar det hela i steg (3) och (4). I (5) så "klumpar vi ihop" alla koefficienter till de olika gradtalen av  $s$ . Vi kan nu identifiera koefficienterna:

$$s^2 : A_1 + A_3 = 2$$

$$s^1 : 3A_1 + A_2 + 2A_3 = 1$$

$$s^0 : 2A_1 + 2A_2 + A_3 = -3$$

Uttryckt lite slarvigt, om vi betraktar (5) så ser vi att koefficienterna till  $s^2$  är  $A_1 + A_3$  i högerledet, och detta är lika med 2 i vänsterledet. Koefficienterna till  $s^1 = s$  är  $3A_1 + A_2 + 2A_3$  i högerledet och 1 i vänsterledet. Koefficienterna till  $s^0 = 1$  är  $2A_1 + 2A_2 + A_3$  i högerledet och  $-3$  i vänsterledet. Vi har nu tre ekvationer och tre obekanta variabler som vi vill lösa ut. Detta kan man göra på lite olika sätt. Jag löser det med matriser, men tycker du att det verkar krångligt

så använd för all del ditt sätt att lösa det. Ett kort exempel på matrisalgebra finns på  $\beta_{\text{sid } 92}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \end{array} \right] & \xrightarrow{-3\rho_1+\rho_2} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \end{array} \right] & \xrightarrow{-2\rho_1+\rho_3} \\
 \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & -7 \end{array} \right] & \xrightarrow{-2\rho_2+\rho_3} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] & \xrightarrow{\rho_3+\rho_2} \\
 \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] & \xrightarrow{-\rho_3+\rho_1} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Vi får alltså:

$$\begin{cases} A_1 = -1 \\ A_2 = -2 \\ A_3 = 3 \end{cases}$$

Sätter vi in de här värdena i (1) så får vi:

$$\begin{aligned}
 \frac{2s^2 + s - 3}{(s+1)^2(s+2)} &= \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{s+2} = \\
 \frac{-1}{s+1} + \frac{-2}{(s+1)^2} + \frac{3}{s+2} &= -\frac{1}{s+1} - 2\frac{1}{(s+1)^2} + 3\frac{1}{s+2}
 \end{aligned}$$

Här ser vi värdet av att partialbråksuppdelar. Om uppgiften var att vi skulle invers-Laplacea ursprungsuttrycket, så hade vi ju inte haft någon snäll transform i våra tabeller som vi kunnat vända oss till. På den partialbråksuppdelade formen är det däremot lätt.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s^2 + s - 3}{(s+1)^2(s+2)} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\beta_{L21}} - 2\underbrace{\frac{1}{(s+1)^2}}_{\beta_{L22}} + 3\underbrace{\frac{1}{s+2}}_{\beta_{L21}} \right\} = \\
 -e^{-t} - 2te^{-t} + 3e^{-2t}, &\quad \text{för } t \geq 0
 \end{aligned}$$