Ellips afstand uitleg

Sjoerd Hermes

Juni 2021

Dit is een uitleg over hoe je afstanden tussen twee ellipsen kan berekenen. Gegeven zijn ellips A en ellips B, met respectievelijk middelpunten m_A, m_B, lange assen b_A, b_B, korte assen a_A, a_B en tegenwijzerzin draaing t.o.v. de x-as θ_A, θ_B.

We willen de afstand weten tussen het punt op A dat het dichtst bij B ligt wanneer men de afstand door m_B trekt tot aan het punt op B dat het verst van A af ligt wanneer wanneer men de afstand door m_A trekt. Deze twee punten heten respectievelijk e en E, zie figuur 1.

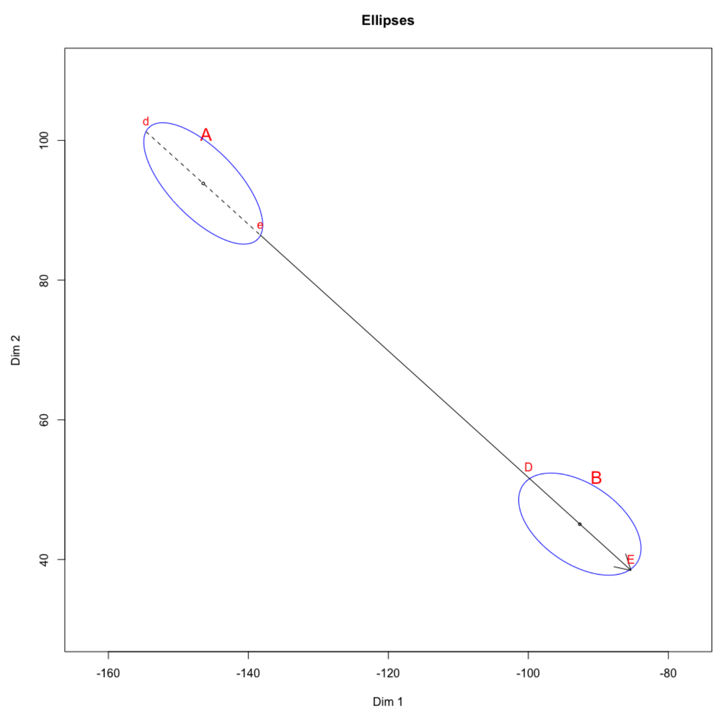

Figure 1: Ellips

Wanneer de coordinaten van e en E bekend zijn is het eenvoudig deze afstand te berekenen. Allereerst berekenen we de ratio tussen de middelpunten van de ellipsen:

$$R = \frac{m_{y,A} - m_{y,B}}{m_{x,A} - m_{x,B}}, \tag{1}$$

waar $m_{x,\cdot}, m_{y,\cdot}$ respectievelijk de x en y coordinaten zijn van het middelpunt van een ellips. Om vervolgens de coordinaten van e en E, maar ook d en D te berekenen (mochten deze interessant zijn), dienen we de volgende berekeningen te maken

$$\begin{aligned} u &= \frac{(\cos\theta_A + R\sin\theta_A)^2}{a_A^2} + \frac{(\sin\theta_A + R\cos\theta_A)^2}{b_A^2} \\ U &= \frac{(\cos\theta_B + R\sin\theta_B)^2}{a_B^2} + \frac{(\sin\theta_B + R\cos\theta_B)^2}{b_B^2} \end{aligned} \tag{2}$$

Dit stelt ons in staat om de coordinaten van d, e, D en E te berekenen

$$\begin{aligned} d_{x,y} &= m_{x,A} - \frac{1}{\sqrt{u}}, m_{y,A} - \frac{R}{\sqrt{u}} \\ e_{x,y} &= m_{x,A} + \frac{1}{\sqrt{u}}, m_{y,A} + \frac{R}{\sqrt{u}} \\ D_{x,y} &= m_{x,B} - \frac{1}{\sqrt{U}}, m_{y,B} - \frac{R}{\sqrt{U}} \\ E_{x,y} &= m_{x,B} + \frac{1}{\sqrt{U}}, m_{y,B} + \frac{R}{\sqrt{U}} \end{aligned} \tag{3}$$

De afgebeelde afstand in figuur 1 wordt dus berekend als

$$d(A,B) = \sqrt{(E_y - e_y)^2 + (E_x - e_x)^2} \tag{4}$$

Het is op deze manier ook makkelijk om alternatieve afstanden te berekenen met het verste punt van A (d) of het dichtsbijzijnde punt van B (D).

Voor sommige afstanden dient voor $d(A,B)$ gebruik gemaakt te worden van

$$d(A,B) = \sqrt{(D_y - d_y)^2 + (D_x - d_x)^2} \tag{5}$$

in plaats van (4). Dit impliceert dat er wellicht mogelijkheden zijn voor een betere afstand, al denk ik dat (4) = (5).