AlCo6

Bart van den Aardweg, Alex Dekker, Kiran Tjikhoeri, Steven Raaijmakers

October 2015

1. $F = (\overline{x_3} \wedge \overline{x_1} \wedge x_5 \wedge \overline{x_4}) \vee ((x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee x_6 \vee x_4 \vee \overline{x_5})) \vee (x_5 \wedge \overline{x_3} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_1}) \vee ((\overline{x_2} \vee \overline{x_4} \vee x_3 \vee \overline{x_6}) \wedge x_3)$

   F is van de vorm $(F_1) \vee (F_2) \vee (F_3) \vee (F_4)$ met subformules:
   $F_1 = (\overline{x_3} \wedge \overline{x_1} \wedge x_5 \wedge \overline{x_4})$
   $F_2 = ((x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_3 \vee x_2 \vee x_6 \vee x_4 \vee \overline{x_5}))$
   $F_3 = (x_5 \wedge \overline{x_3} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_1})$
   $F_4 = ((\overline{x_2} \vee \overline{x_4} \vee x_3 \vee \overline{x_6}) \wedge x_3)$

   $F_i = (G_1^i) \vee \cdots \vee (G_{i_r}^i)$.
   We voeren k nieuwe variabelen $y_1 \ldots y_k$ in met de eigenschap dat F alleen waargemaakt kan worden als tenminste 1 van deze variabelen waargemaakt kan worden. Dan krijgen we een nieuwe formule:
   $(y_1 \vee \ldots yk) \wedge \overline{y_1} \vee (F_1)) \cdots \wedge (\overline{y_k} \vee (F_k))$

   We hebben dan de formule:
   $(y_1 \vee y_2 \vee y_3 \vee y_4) \wedge (\overline{y_1} \vee (F_1)) \wedge (\overline{y_2} \vee (F_2)) \wedge (\overline{y_3} \vee (F_3)) \wedge (\overline{y_4} \vee (F_4))$

   $(G_j^i)$is van de vorm $((H_1^{ir}) \vee \cdots \vee (H_{k_{ij}}^{ir}))$, dus de formules in de vorm van $(\overline{y_1} \vee (F_1))$ kunnen geschreven worden in de vorm van
   $(\overline{y_1} \vee (((H_1^{i1}) \vee \cdots \vee (H_{k_1}^{i1})) \wedge \cdots \wedge ((H_1^{ir}) \vee \cdots \vee (H_{k_{ir}}^{ir}))$ wat equivalent is met $((\overline{y_1} \vee (H_1^{i1}) \vee \cdots \vee (H_{k_{i1}}^{i1})) \wedge \cdots \wedge (\overline{y_1} \vee (H_1^{ir} \vee \cdots \vee (H_{k_{ir}}^{ir}))$

   Nieuwe subformules van F:
   $(y_1 \vee y_2 \vee y_3 \vee y_4)$ is al in goede vorm.
   $(\overline{y_1} \vee (F_1)) = (\overline{y_1} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{y_1} \vee \overline{x_1}) \wedge (\overline{y_1} \vee x_5) \wedge (\overline{y_1} \vee \overline{x_4})$
   $(\overline{y_2} \vee (F_2)) = (\overline{y_2} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{y_2} \vee x_3 \vee x_2 \vee x_6 \vee x_4 \vee \overline{x_5})$
   $(\overline{y_3} \vee (F_3)) = (\overline{y_3} \vee x_5) \wedge (\overline{y_3} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{y_3} \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{y_3} \vee \overline{x_1})$
   $(\overline{y_4} \vee (F_4)) = (\overline{y_4} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \vee x_3 \vee \overline{x_6}) \wedge (\overline{y_4} \vee x_3)$

   $F = (y_1 \vee y_2 \vee y_3 \vee y_4) \wedge (\overline{y_1} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{y_1} \vee \overline{x_1}) \wedge (\overline{y_1} \vee x_5) \wedge (\overline{y_1} \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{y_2} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{y_2} \vee x_3 \vee x_2 \vee x_6 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \wedge (\overline{y_3} \vee x_5) \wedge (\overline{y_3} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{y_3} \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{y_3} \vee \overline{x_1}) \wedge (\overline{y_4} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \vee x_3 \vee \overline{x_6}) \wedge (\overline{y_4} \vee x_3)$

   Alle subformules moeten 3 of minder variabelen hebben als ze in con-

juctieve normaalvorm staan. Daarna moeten we de subformules die uit twee variabelen bestaan omzetten in een formule die uit 3 bestaat.
$Z = (x_1 \vee \cdots \vee x_n)$, met $n < 3$
$Z' = (x_1 \vee x_2 \vee z) \wedge (\overline{z} \vee x_3 \vee \cdots \vee x_n)$

De formules die meer dan drie variabelen hebben worden:
$(y_1 \vee y_2 \vee y_3 \vee y_4) = (y_1 \vee y_2 \vee z_1) \wedge (y_3 \vee y_4 \vee \overline{z_1})$
$(\overline{y_2} \vee x_3 \vee x_2 \vee x_6 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) = (\overline{y_2} \vee x_3 \vee \overline{z_2}) \wedge (x_2 \vee x_6 \vee \overline{z_3}) \wedge (x_4 \vee \overline{x_5} \vee \overline{z_4}) \wedge (z_2 \vee z_3 \vee z_4)$
$(\overline{y_4} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \vee x_3 \vee \overline{x_6}) = (\overline{y_4} \vee \overline{x_2} \vee z_5) \wedge (\overline{z_5} \vee \overline{x_4} \vee x_3 \vee \overline{x_6}) = (\overline{y_4} \vee \overline{x_2} \vee z_5) \wedge (\overline{z_5} \vee \overline{x_4} \vee z_6) \wedge (\overline{z_6} \vee x_3 \vee \overline{x_6})$

De formules die minder dan drie variabelen hebben worden:
$(\overline{y_1} \vee \overline{x_3}) = (\overline{y_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{z_7}) \wedge (\overline{y_1} \vee \overline{x_3} \vee z_7)$
$(\overline{y_1} \vee \overline{x_1}) = (\overline{y_1} \vee \overline{x_1} \vee \overline{z_8}) \wedge (\overline{y_1} \vee \overline{x_1} \vee z_8)$
$(\overline{y_1} \vee x_5) = (\overline{y_1} \vee x_5 \vee \overline{z_9}) \wedge (\overline{y_1} \vee x_5 \vee z_9)$
$(\overline{y_1} \vee \overline{x_4}) = (\overline{y_1} \vee \overline{x_4} \vee \overline{z_{10}}) \wedge (\overline{y_1} \vee \overline{x_4} \vee z_{10})$
$(\overline{y_3} \vee x_5) = (\overline{y_3} \vee x_5 \vee \overline{z_{11}}) \wedge (\overline{y_3} \vee x_5 \vee z_{11})$
$(\overline{y_3} \vee \overline{x_3}) = (\overline{y_3} \vee \overline{x_3} \vee \overline{z_{12}}) \wedge (\overline{y_3} \vee \overline{x_3} \vee z_{12})$
$(\overline{y_3} \vee \overline{x_2}) = (\overline{y_3} \vee \overline{x_2} \vee \overline{z_{13}}) \wedge (\overline{y_3} \vee \overline{x_2} \vee z_{13})$
$(\overline{y_3} \vee \overline{x_1}) = (\overline{y_3} \vee \overline{x_1} \vee \overline{z_{14}}) \wedge (\overline{y_3} \vee \overline{x_1} \vee z_{14})$
$(\overline{y_4} \vee x_3) = (\overline{y_4} \vee x_3 \vee \overline{z_{15}}) \wedge (\overline{y_4} \vee x_3 \vee z_{15})$

$F = (y_1 \vee y_2 \vee z_1) \wedge (y_3 \vee y_4 \vee \overline{z_1}) \wedge (\overline{y_2} \vee x_3 \vee \overline{z_2}) \wedge (x_2 \vee x_6 \vee \overline{z_3}) \wedge (x_4 \vee \overline{x_5} \vee \overline{z_4}) \wedge (z_2 \vee z_3 \vee z_4) \wedge (\overline{y_4} \vee \overline{x_2} \vee z_5) \wedge (\overline{z_5} \vee \overline{x_4} \vee z_6) \wedge (\overline{z_6} \vee x_3 \vee \overline{x_6}) \wedge \overline{y_1} \vee \overline{x_3} \vee \overline{z_7}) \wedge (\overline{y_1} \vee \overline{x_3} \vee z_7) \wedge (\overline{y_1} \vee \overline{x_1} \vee \overline{z_8}) \wedge (\overline{y_1} \vee \overline{x_1} \vee z_8) \wedge (\overline{y_1} \vee x_5 \vee \overline{z_9}) \wedge (\overline{y_1} \vee x_5 \vee z_9) \wedge (\overline{y_1} \vee \overline{x_4} \vee \overline{z_{10}}) \wedge (\overline{y_1} \vee \overline{x_4} \vee z_{10}) \wedge (\overline{y_3} \vee x_5 \vee \overline{z_{11}}) \wedge (\overline{y_3} \vee x_5 \vee z_{11}) \wedge (\overline{y_3} \vee \overline{x_3} \vee \overline{z_{12}}) \wedge (\overline{y_3} \vee \overline{x_3} \vee z_{12}) \wedge (\overline{y_3} \vee \overline{x_2} \vee \overline{z_{13}}) \wedge (\overline{y_3} \vee \overline{x_2} \vee z_{13}) \wedge (\overline{y_3} \vee \overline{x_1} \vee \overline{z_{14}}) \wedge (\overline{y_3} \vee \overline{x_1} \vee z_{14}) \wedge (\overline{y_4} \vee x_3 \vee \overline{z_{15}}) \wedge (\overline{y_4} \vee x_3 \vee z_{15}) \wedge (\overline{y_2} \vee x_2 \vee \overline{x_3})$

2. (a) We beschouwen de set als een matrix van k x n. Zo kunnen we de volgende functie opstellen.

$$\bigwedge_{i=0}^{k} (\bigvee_{j=0}^{n} x_{ij} \vee (\bigwedge_{m=0, m \neq j}^{n} \bar{x}_{im}) \wedge (\bigwedge_{p=0, p \neq i}^{k} \bar{x}_{pj}))$$

(b) Ook deze graaf G beshouwen we als een matrix:

$$\neg(\bigvee_{j=0}^{k} (x_{jv} \wedge (\bigvee_{l=0, l \neq j}^{k} x_{lw})))$$

(c) We noemen de functie uit vraag 2.a F_a en noemen de functie uit 2.b

F_b. Dan geldt de volgende functie:

$$F_a \bigwedge_{(v,x)\in E} F_b$$

(d) De SATISFIABILITY bestaat uit een gigantische hoeveelheid booleans, terwijl de INDEPENDENT SET maar een zeer beperkt aantal opties heeft. De SATISFIABILITY heeft dus een veel hogere complexiteit.

3. (a) Dit probleem is niet op te lossen in polynomiale tijd, dus gebruiken we een algoritme dat elke node controleert. $X_{i,j} = 1$ wanneer i de kleur j heeft, en anders 0. Hierin is i de index van een node in graph G, en j een kleur van 0, . . . , k. Dus stel node 3 heeft kleur 2, dan is $X_{3,2} = 1$ maar $X_{3,1} = 0$.

   i. Er wordt gekeken of de huidige node (node 1) maar één kleur bevat volgens:
   $(x_{1,1} \vee x_{1,2} \vee x_{1,3}) \wedge (\neg x_{1,1} \vee \neg x_{1,2}) \wedge (\neg x_{1,1} \vee \neg x_{1,3}) \wedge (\neg x_{1,2} \vee \neg x_{1,3})$

   ii. De huidige node (node 1) en zijn buurman (node 2) mogen niet dezelfde kleur hebben:
   $(\neg x_{1,1} \vee \neg x_{2,1}) \wedge (\neg x_{1,2} \vee \neg x_{2,2}) \wedge (\neg x_{1,3} \vee \neg x_{2,3})$

   Dit algoritme passen we op elke node in graph G toe. We maken dus als het ware gebruik van een brute-force algoritme.

   (b) Voor dit probleem hebben we ook een oplossing in niet-polynomiale tijd, en dus ook hier geldt dat het algoritme op elke node in graph G toegepast wordt. $X_{i,j}$ betekent in dit geval dat de $i$de positie bezet is door node j.

   i. Elke node j moet voorkomen in het path volgens:
   $x_{1,j} \vee x_{2,j} \vee \cdots \vee x_{n,j}$ voor elke j.

   ii. Node j mag in het gehele path maar één keer voorkomen:
   $\neg x_{i,j} \vee \neg x_{k,j}$ voor alle i, j, k met $i \neq k$.

   iii. Elke positie i in het path moet bezet zijn:
   $x_{i,1} \vee x_{i,2} \vee \cdots \vee x_{i,n}$ voor elke i.

   iv. Geen twee nodes j en k mogen dezelfde positie hebben in het path:
   $\neg x_{i,j} \vee \neg x_{i,k}$ voor alle i, j, k met $j \neq k$

   v. Niet-aangrenzende nodes i en j mogen ook niet aangrenzend zijn in het path:
   $\neg x_{k,i} \vee \neg x_{k+1,j}$ voor alle $(i, j) \notin G$ en $k = 1, 2, \ldots, n - 1$

   (c) Wanneer de input graph P en graph G zijn:

   i. Maak een matrix M van $|V_p|$ x $|V_g|$ (waarbij V de vectoren zijn uit P en G) waarin elke rij precies één 1 bevat en elke kolom maximaal één 1 bevat.

   ii. $M_{i,j} = 1$ als en alleen als $V_j \in G$ correspondeert met $V_i \in P$ in het isomorfisme.

iii. $P = M(MG)T$ waar P en G de adjaceny matrices zijn.

iv. Matrix M_0 (eveneens van $|V_p|$ x $|V_g|$) heeft een 1 op (i, j) als het mogelijk is dat $V_i \sim V_j$ in een bepaalde subgraph isomorfisme.

v. We kunnen nu V_i mappen naar V_j als deze laatstgenoemde genoeg buren heeft volgens: $M_{0i,j} = 1 \implies deg(V_i) \leq deg(V_j)$. Dit wordt recursief aangeroepen

4. (a) Zeg het aantal knopen in G is n. Een certificaat is een deelverzameling W van V met $\|W\| \geq k$, dus van grootte $O(n)$. Het controleren kan door de lengte van elk pad te vergelijken met 3, dit kan in $O(n^2)$. Een certificaat kan in polynomiale ruimte en tijd gecontroleerd worden, dus het probleem is NP.

   We reduceren van INDEPENDENT SET. Gegeven graaf $G = (V, E)$ en een getal k, maken we een graaf G' met de eigenschap dat G' een zeer onafhankelijke verzameling van grootte k heeft, als G een independent set van grootte k heeft. Om G' te maken gebruiken we alle knopen van G plus een nieuwe knoop w_i voor elke kant in G. Elke kant (u_i, v_i) uit G wordt vervangen door twee kanten (u_i, w_i) en (w_i, v_i). Daarbij voegen we knopen a en b toe, de kant (a, b) en een kant (w_i, a) voor elke kant in G. Bij k tellen we 1 op.

   Stel W is een independent set van G met grootte k, dan is $W \cup \{b\}$ een zeer onafhankelijke verzameling van G' met grootte $k+1$. Omgekeerd geldt hetzelfde: stel W' is een zeer onafhankelijke set van G' met grootte $k+1$, dan kan W' niet zowel a als b bevatten. Dus bevat W' minstens k knopen in G, die samen een independent set vormen in G. Dus het probleem is NP-volledig.

   (b) Zeg het aantal knopen in G en H samen is n. Een certificaat is een deelverzameling van G en een deelverzameling van H, beide met minimaal K knopen en een bijectie f van V' naar W', dus van grootte $O(n)$. Het controleren kan door te kijken of de deelverzamelingen minimaal K knopen hebben en door te kijken of de bijectie f isomorf is. Dit kan in $O(n^2)$. Een certificaat kan in polynomiale ruimte en tijd gecontroleerd worden, dus het probleem is NP.

   We reduceren van CLIQUE. Gegeven een graaf C dan bekijkt CLIQUE of de graaf een clique Q heeft van k knopen. We nemen $C = H$ en $Q = G$, dan heeft C een clique van grootte k dan en slechts dan als er een ondergraaf op W' is die isomorf is met een ondergraaf op V'. Die ondergraaf op W' is dan ook isomorf met Q. Dus het probleem is NP-volledig.

   (c) Een certificaat is een collectie X_i met $\|X_i\| = 3$ van lengte q, deze is van grootte $O(n)$. Het controleren kan door te kijken of alle $\|X_i\| = 3$ en geen element vaker voorkomt dan in 1 drietal. Dit kan in $O(n^2)$. Een certificaat kan in polynomiale ruimte en tijd gecontroleerd worden, dus het probleem is NP.

We reduceren van 3-DIMENSIONAL MATCHING. Gegeven U, V, W allemaal van grootte n, en een verzameling drietallen T van de vorm (u, v, w) met $u \in U, v \in V, w \in W$. We nemen $X = U \cup V \cup W$. Nu is X_i een verzameling van q drietallen met $X_i \cup X_j = \emptyset$ waar $i \neq j$ en $\bigcup_i X_i = X$ (exact cover) en dit maakt X_i ook precies een koppeling (3-dimensional match). Dus het probleem is NP-volledig.

EXACT COVER BY 4-SETS: gegeven een verzameling Y met $\|Y\| = 4r$. Gevraagd een collectie Y_i met $\|Y_i\| = 4$, zo dat $Y_i \cup Y_j = \emptyset$ waar $i \neq j$ en $\bigcup_i Y_i = Y$. Een certificaat is een collectie Y_i van lengte r en kan net zoals EXACT COVER BY 3-SETS gecontroleerd worden door te kijken of er geen element vaker voorkomt dan in 1 viertal en alle $\|Y_i\| = 4$. Een certificaat kan in polynomiale ruimte en tijd gecontroleerd worden, dus het probleem is NP.

Om te bewijzen dat ook dit probleem NP-compleet is reduceren we van EXACT COVER BY 3-SETS. Stel gegeven is een verzameling Z met $\|Z\| = 3q$ en $\|Z\| = 4r$. Van een instantie van EXACT COVER BY 3-SETS Z_i kunnen we naar 4-SETS Z_i' door elk drietal vanaf het begin aan te vullen tot viertallen met elementen uit drietallen vanaf het einde, tot een leeg drietal bereikt wordt (dan zijn ze allemaal veranderd in viertallen). De collectie viertallen Z_i' geeft dan een exact cover dan en slechts dan als de collectie drietallen Z_i een exact cover geeft. Dus ook EXACT COVER BY 4-SETS is NP-volledig.

(d) Een certificaat is een pad bestaande uit maximaal evenveel kanten als in G zitten, dus van grootte $O(n)$. Het controleren kan door te kijken of het pad lengte K heeft en te kijken of er geen knopen meerdere keren gebruikt worden. (Want er mogen geen cykels in zitten). Dit kan in $O(n^2)$. Een certificaat kan in polynomiale ruimte en tijd gecontroleerd worden, dus het probleem is NP.

We reduceren van HAMILTON CIRCUIT. Gegeven HAMILTON CIRCUIT graaf $G' = (V', E')$ dan kan daar LANGSTE PAD met graaf G van gemaakt worden door dezelfde graaf te nemen, $G = G'$. Verder nemen we $K = |V'| - 1$. Er is dan een pad met lengte K in G dan en slechts dan als G een Hamilton circuit bevat. Dus het probleem is NP-volledig.

(e) Dit probleem kan als volgt omschreven worden: gegeven een graaf $G = (N, E)$, dan zijn de knopen mensen en elke kant geeft aan dat twee mensen in elkaars bereik zijn. Een certificaat is dan een lijst gesprekken, oftewel een verzameling kanten C, waarvan de knopen van verschillende kanten in C geen buren mogen zijn. Dit certificaat heeft maximaal evenveel kanten als in E, dus is van grootte $O(n)$. Het controleren kan door te kijken of er k kanten in het certificaat zitten, alle kanten van het certificaat in E zitten, en door te kijken of er geen knopen die buren zijn in C zitten. Dit kan in $O(n^2)$. Een certificaat kan in polynomiale ruimte en tijd gecontroleerd worden, dus het probleem is NP.

We reduceren van VERTEX COVER. Gegeven VERTEX COVER graaf $G' = (V', E')$ en getal k' dan kan daar CELLPHONE CAPACITY $G = (N, E)$ met k van gemaakt worden door voor elke knoop v_i in V' een nieuwe knoop v_i' te nemen en als kanten dezelfde E' en een nieuwe kant tussen elke knoop v_i en zijn nieuwe knoop v_i'. Dan nemen we $N = V' \cup \{v_i' | v_i \in V'\}$ en $E = E' \cup \{(v_i, v_i') | v_i \in V'\}$ en $k = |V'| - k'$.

Stel G' heeft een vertex cover met grootte maximaal k', dan nemen we C alle kanten tussen de knopen v_i en hun nieuwe knopen v_i' niet in de vertex cover. Dit geeft dan de gesprekken tegelijk zonder interferentie. Dus dan heeft G minimaal k gesprekken tegelijk zonder interferentie. Omgekeerd, als er in G minimaal k gesprekken tegelijk kunnen worden gevoerd zonder interferentie. We nemen van elke kant in C een knoop, dit geeft een independent set met grootte minimaal k. Dus dan is het complement hiervan een vertex cover met grootte maximaal k'. Dus het probleem is NP-volledig.