Universiteit van Amsterdam

Algoritmen en Complexiteit

Opgavenserie 4

Students:

Patrick Goddijn 10776796

Kelly Griffioen 10759700

Steven Raaijmakers 106967

Doeke Leeuwis 10723692

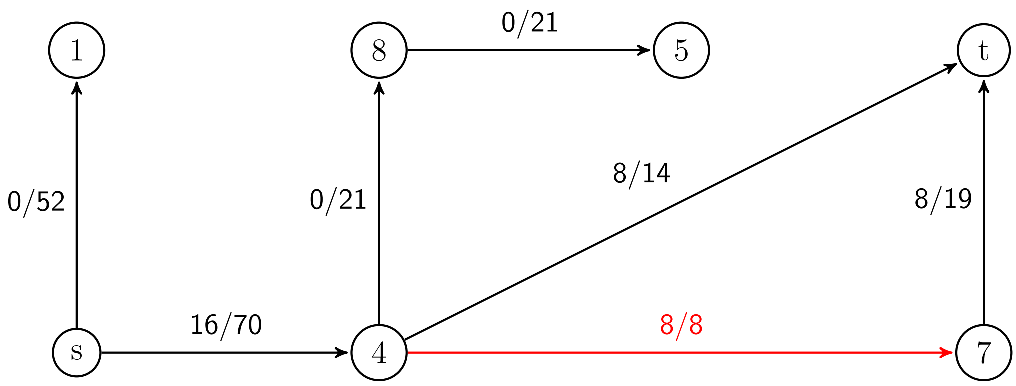
Opgave 1

A)

De maximale stroom van de graaf is 43.
Zie bijlage 1a.py voor het gebruikte algoritme.
Complexiteit: $O(n)$

B)

Laag 0: {s}
Laag 1: {1,4}
Laag 2: {7,8}
Laag 3: {5}
Laag 4: {t}

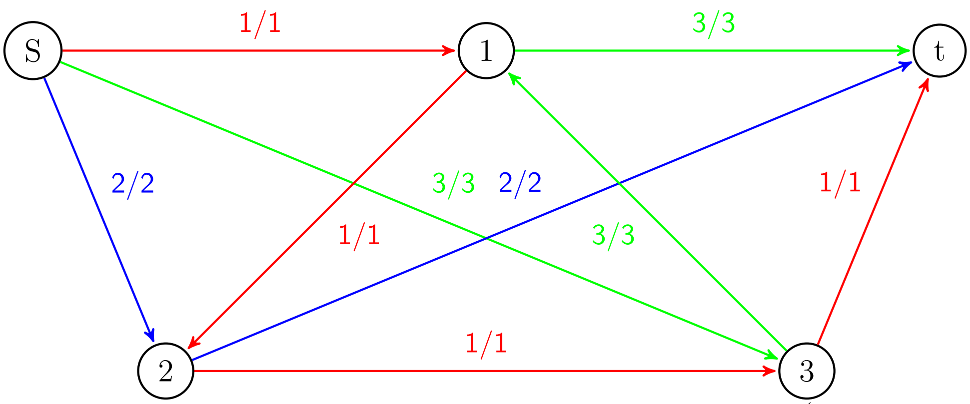


C)

.

Opgave 2

A)



Het Ford Fulkerson algoritme maakt de volgende paden (toevallig hebben deze paden de capaciteiten 1, 2 en 3):

$$S \to 1 \to 2 \to 3 \to t$$

$$S \to 2 \to t$$

$$S \to 3 \to 1 \to t$$

Dit levert een cycle op tussen:

$$1 \to 2 \to 3 \to 1$$

B)

Nee, dit hoeft zeker niet. Bijvoorbeeld bij het netwerk bij vraag 2a, hier hebben niet alle kanten gelijke capaciteiten. Zowel $1 \to 2$ als $2 \to 3$ hebben capaciteit 1, terwijl $3 \to 1$ capaciteit 3 heeft. Het is natuurlijk wel mogelijk dat ze allemaal dezelfde capaciteit hebben, bijvoorbeeld in een netwerk met alleen maar kanten met capaciteit 1.

Conclusie: nee, niet altijd maar het is wel mogelijk.

C)

Nee, dit is niet mogelijk. Bij MKM stroomt alles slechts één kant op, doordat elk punt dat stroom ophoud wordt verwijderd en daarna wordt dit gecompenseerd. Hierdoor komt er geen stroom de verkeerde kant uit voor. Dit betekent dat er geen cycles mogelijk zijn, omdat cycles per definitie de verkeerde kant uit stromen, en stroom ophouden.

Opgave 3

A)

Uitwerken met de hand geeft de volgende resultaten (waarbij we weten dat $(\pm 1 \pm i)^8 = 16$)
1

- $1^1 = 1$

2

- $1^2 = 1$
- $-1^2 = 1$

4

- $1^4 = 1$
- $i^4 = i^{2^2} = -1^2 = 1$
- $-i^4 = -i^{2^2} = 1^2 = 1$

8

- $1^8 = 1^{4^2} = 1^2 = 1$
- $(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})^8 = \frac{(1+i)^8}{2^4} = \frac{16}{16} = 1$
- $i^8 = i^{2^4} = -1^4 = 1$
- $(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})^8 = \frac{(-1+i)^8}{2^4} = \frac{16}{16} = 1$
- $-1^8 = 1$
- $(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})^8 = \frac{(-1-i)^8}{2^4} = \frac{16}{16} = 1$
- $-i^8 = 1$
- $(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})^8 = \frac{(1-i)^8}{2^4} = \frac{16}{16} = 1$

B)

Bij de DFT wordt de polynoom P(x) eerst verdeeld in een polynoom die de even-machten $P_e(x)$ bevat en een polynoom die de oneven-machten $P_o(x)$ bevat. Vervolgens wordt er bij de oneven-polynoom een x buiten haakjes geschreven, zodat de polynoom even-machten bevat.

Tot slot worden de waardes van de 8-e machts éénheidswortels omgerekent naar e-machten. Deze waardes worden in beiden polynomen ingevuld en het eindantwoord wordt berekent door $P(x) = P_e(x) + P_o(x)$. We hebben $\omega 0$, $\omega 1$ en $\omega 2$ volledig uitgeschreven. Hierna hebben we enkel de antwoorden van de sub-polynomen weergegeven.

$$\begin{aligned} Polynoom : P(x) &= 2x^7 + x^6 + 5x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x2 + x + 3 \\ P_{\mathrm{e}}(x) &= x^6 + 3x^4 + 4x^2 + 3 \\ P_{\mathrm{o}}(x) &= 2x^7 + 5x^5 + 4x^3x \\ &= x(2x^6 + 5x^4 + 4x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_0 : P_{\mathrm{e}}(1) &= 1^6 + 3(1)^4 + 4(1)^2 + 3 \\ &= 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 3 \\ &= 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_0 : P_0(1) &= (1) \cdot (2(1)^6 + 5(1)^4 + 4(1)^2 + 1) \\ &= 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 1 \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\omega_0 : P_{\mathrm{e}}(1) + P_{\mathrm{o}}(1) = 11 + 12 = 23$$

$$\begin{aligned} \omega_1 : P_{\mathrm{e}}(e^{2\pi i1/8}) &= (e^{2\pi i1/8})^6 + 3(e^{2\pi i0/8})^4 + 4(e^{2\pi i1/8})^2 + 3 \\ &= (e^{2\pi i3/4}) + 3(e^{2\pi i1/2}) + 4(e^{2\pi i1/4}) + 3 \\ &= -i + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot (i) + 3 \\ &= 3i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1 : P_\mathrm{o}(e^{2\pi i1/8}) &= (e^{2\pi i1/8})(2(e^{2\pi i1/8})^6 + 5(e^{2\pi i1/8})^4 + 4(e^{2\pi i1/8})^2 + 1) \\
&= (e^{2\pi i1/8})(2(e^{2\pi i3/4}) + 5(e^{2\pi i1/2}) + 4(e^{2\pi i1/4}) + 1) \\
&= (e^{2\pi i1/8})(2 \cdot (-i) + 5 \cdot (-1) + 4 \cdot (i) + 1) \\
&= (e^{2\pi i1/8})(2i - 4) \\
&= (\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}\sqrt{2})(2i - 4) \\
&= (\frac{1+i}{\sqrt{2}})(2i - 4) \\
&= \frac{(1+i)(2i-4)}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{2(i-2)(1+i)}{\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{2}(i+1)(i-2) \\
&= -\sqrt{2}i - 3\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\omega_1 : P_\mathrm{e}(e^{2\pi i1/8}) + P_\mathrm{o}(e^{2\pi i1/8}) = -3\sqrt{2} - i\sqrt{2} + 3i$$

$$\begin{aligned}
\omega_2 : P_\mathrm{e}(i) &= i^6 + 3i^4 + 4i^2 + 3 \\
&= -1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot -1 + 3 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_2 : P_\mathrm{o}(i) &= i(2i^6 + 5i^4 + 4i^2 + 1) \\
&= i(2 \cdot -1 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot -1 + 1) \\
&= i \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

$$\omega_2 : P_\mathrm{e}(i) + P_\mathrm{o}(i) = 1 + 0 = 1$$

$$\omega_3 : P_\mathrm{e}(e^{2\pi i3/8}) + P_\mathrm{o}(e^{2\pi i3/8}) = 3\sqrt{2} - i\sqrt{2} - 3i$$

$$\omega_4 : P_\mathrm{e}(-1) + P_\mathrm{o}(-1) = 11 - 12 = -1$$

$$\omega_5 : P_\mathrm{e}(e^{2\pi i5/8}) + P_\mathrm{o}(e^{2\pi i5/8}) = 3\sqrt{2} + i\sqrt{2} + 3i$$

$$\omega_6 : P_\mathrm{e}(-i) + P_\mathrm{o}(-i) = 1 + 0 = 1$$

$$\omega_7 : P_\mathrm{e}(e^{2\pi i7/8}) + P_\mathrm{o}(e^{2\pi i7/8}) = -3\sqrt{2} + i\sqrt{2} - 3i$$

C)

We hebben de antwoorden van $\omega 0$, $\omega 1$ en $\omega 2$ nagerekent via horner:

$$\begin{aligned}P(x) &= 2x^7 + x^6 + 5x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + x + 3 \\ &= (2x^6 + x^5 + 5x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 4x + 1)x + 3 \\ &= ((2x^5 + x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 4x + 4)x + 1)x + 3 \\ &= (((2x^4 + x^3 + 5x^2 + 3x + 4)x + 4)x + 1)x + 3 \\ &= ((((2x^3 + x^2 + 5x + 3)x + 4)x + 4)x + 1)x + 3 \\ &= ((((2x^2 + x + 5)x + 3)x + 4)x + 4)x + 1)x + 3 \\ &= (((((2x + 1)x + 5)x + 3)x + 4)x + 4)x + 1)x + 3 \\ &= ((((((2)x + 1)x + 5)x + 3)x + 4)x + 4)x + 1)x + 3\end{aligned}$$

- $P(1) = 2 \cdot 1 + 1 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 1 + 3 = 23$
- $P(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) = ((((((2)((\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) + 1)((\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) + 5)((\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) + 3)((\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) + 4)((\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) + 4)((\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) + 1)((\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) + 3$

$= ((((((0{,}5\sqrt{2} + 0,5i\sqrt{2} + 5 + 2i)((\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) + 3)((\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) + 4)((\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) + 4)((\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) + 1)((\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) + 3$

$= ((((1{,}5\sqrt{2} + 3,5i\sqrt{2} + i + 3)((\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) + 4)((\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) + 4)((\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) + 1)((\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) + 3$

$= (((\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} + 2 + 5i)((\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) + 4)((\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) + 1)((\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) + 3$

$=((\text{-}1{,}5\sqrt{2} + 3,5i\sqrt{2} + 3 + 3i)((\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) + 1)((\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) + 3$

$= (\text{-}4 + 3\text{i}\sqrt{2} + 2i)((\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) + 3 = -3\sqrt{2} - i\sqrt{2} + 3i$

- $P(i) = 2 \cdot i^7 + i^6 + 5 \cdot i^5 + 3 \cdot i^4 + 4 \cdot i^3 + 4 \cdot i^2 + i^1 + 3 = 1$

We zien dat deze antwoorden overeenkomen met de eerder gevonden antwoorden bij b.

D)

Om via de inverse fourier transformatie de oorspronkelijke polynoom weer te vinden bestaat er voor de 8-e machts éénheidswortels een algemene formule. Er bestaat een standaard matrix (bron: wiki) waarmee vermenigvuldig moet worden met één-achtste en de antwoorden verkregen uit b en c. Dit levert vervolgens de coëfficienten op van de polynoom in omgekeerde volgorde:
Voor $\omega = {\omega_8}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & -i & -i\omega & -1 & -\omega & i & i\omega \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -i\omega & i & w & -1 & i\omega & -i & -\omega \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\omega & -i & i\omega & -1 & \omega & i & -i\omega \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & i \\ 1 & i\omega & i & -\omega & -1 & -i\omega & -i & \omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 23 \\ -3\sqrt{2} - i\sqrt{2} + 3i \\ 1 \\ 3\sqrt{2} - i\sqrt{2} - 3i \\ -1 \\ 3\sqrt{2} + i\sqrt{2} + 3i \\ 1 \\ -3\sqrt{2} + i\sqrt{2} - 3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 32 \\ 32 \\ 24 \\ 40 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 24 \\ 8 \\ 32 \\ 32 \\ 24 \\ 40 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ x^6 \\ x^7 \end{bmatrix}^T = 2x^7 + x^6 + 5x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + x + 3$$

Opgave 4

$P(x) = 4x^3 + 3x^2 + 6x + 5$
$Q(x) = 2x^3 + 6x^2 + 3x + 4$
$P_o(x) = 4x^3 + 6x = x(4x^2 + 6)$
$P_e(x) = 3x^2 + 5$
Te gebruiken: 1, i, -1, -i

	P(x)
1	8 + 1(10)
i	2 + i(2)
-1	8 - 1(10)
-i	2 - i(2)

F(P) = 18, 2+2i, -2, 2-2i

$Q(x) = 2x^3 + 6x^2 + 3x + 4$

$Q_o(x) = 2x^3 + 3x = x(2x^2 + 3)$
$Q_e(x) = 6x^2 + 4$

	Q(x)
1	10 + 1(5)
i	-2 + i(1)
-1	10 - 1(5)
-i	-2 - i(1)

F(Q) = 15, -2+i, 5, -2-i

F(PQ) = 270, -6-2i, -10, -6+2i

$$\frac{1}{4} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 270 \\ -6-2i \\ -10 \\ -6+2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37\frac{1}{2} \\ 69 \\ 68 \\ 71 \end{bmatrix}$$

$71\text{x}^3 + 68x^2 + 69x + 37\frac{1}{2}$

Opgave 5

Voor het vermenigvuldigen met de fast fourier methode met n een macht van 3 wordt de polynoom in drie delen verdeeld. Die delen worden aan het eind met recursie weer bij elkaar gevoegd. Hiervan is de recurrente betrekking $T(n) = 3T(n/3) + O(n)$ Door middel van de Akra-Bazzi stelling kan die opgelost worden. Hiervoor geldt a = 3 en b = 3. $n^{\log_b a} = n$. Echter is het zo dat $f(n) \notin O(n^{\log_b a - \epsilon})$. Dit is dus geval 2 van de Akra-Bazzi stelling, dus $T(n) \in \theta(n \log n)$.