2021 高考数列压轴题最全汇总

szy 独家整理，感谢有道云提供的整题 ocr 接口

1. 数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=A_2^1+A_2^2,\cdots,a_n=A_n^1+A_n^2+\cdots+A_n^n(n\in N^*)$

(1) 求a_2,a_3,a_4,a_5的值

(2) 求a_n与a_{n-1}间的关系式$(n\in N^*,n\geq 2)$

(3) 求证：$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)<3(n\in N^*)$

2. 已知数列$\{x_n\}$满足：$x_1=1,x_n=x_{n-1}+\ln(1+x_{n+1})\,(n\in N^*)$，证明：$n\in N^*$时，

(1) $0<x_{n+1}<x_n$

(2) $2x_{n+1}-x_n\leq\frac{x_nx_n+1}{2}$

(3) $\frac{1}{2^{n-1}}\leq x_n\leq\frac{1}{2^{n-2}}$

3. 数列$\{a_n\}$中, $a_1=\frac{1}{2}$ ， $a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}(n\in N^*)$

(1) 求证：$a_{n+1}<a_n$

(2) 记数列 $\{a_n\}$的前n项和为S_n，求证：$S_n<1$

4. 已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_n^2+a_n=3a_{n+1}^2+2a_{n+1}$，$a_1=1$

(1) 求a_2的值

(2) 证明：对任意实数$n\in N^*$，$a_n\leq 2a_{n+1}$

(3) 记数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，证明：对任意$n\in N^*$ ，$2-\frac{1}{2^{n-1}}\leq S_n<3$

5. 已知在数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{3}{2}$，$a_{n+1}=a_n^2-2a_n+2, n\in N^*$

(1) 求证：$1<a_{n+1}<a_n<2$

(2) 求证：$\frac{6}{2^{n-1}+3}\le a_n\le\frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}$

(3) 求证：$n<s_n<n+2$

6. 设数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=a_n^2-a_n+1(n\in N^*)$，$S_n$为$\{a_n\}$的前$n$项和，证明：对任意$n\in N^*$，

(1) 当$0\le a_1\le 1$时，$0\le a_n\le 1$

(2) 当$a_1>1$时，$a_n>(a_1-1)a_1^{n-1}$

(3) 当$a_1=\frac{1}{2}$时，$n-\sqrt{2n}<S_n<n$

7. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$S_n=2a_{n+1}$，其中S_n为$\{a_n\}$的前n项和$(n\in N^*)$

(1) 求S_1, S_2及数列$\{S_n\}$的通项公式

(2) 若数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{(-1)^n}{S_n}$，且$\{b_n\}$的前n项和为T_n, 求证：当$n\ \geq 2$时, $\frac{1}{3}\leq |T_n|\leq \frac{7}{9}$.

8. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$ ，$a_{n+1}\cdot a_n=\frac{1}{n}(n\in N^*)$

(1) 证明：$\frac{a_{n+2}}{n}=\frac{a_n}{n+1}$

(2) 证明：$2(\sqrt{n+1}-1)\leq \frac{1}{2a_3}+\frac{1}{3a_4}+\cdots+\frac{1}{(n+1)a_{n+2}}\leq n$

9. 设数列$\{a_n\}$的前n项的和为S_n已知$a_1=\frac{3}{2}$，$a_{n+1}=\frac{a_n^3}{2a_n^2-3a_n+2}$，其中 $n\in N^*$

(1) 证明：$a_n<2$

(2) 证明：$a_n<a_{n+1}$

(3) 证明 ： $2n-\frac{4}{3}\le S_n\le 2n-1+(\frac{1}{2})^n$

10. 数列$\{a_n\}$的各项均为正数, 且$a_{n+1}=a_n+\frac{2}{a_n}-1(n\in N^*)$ ，$\{a_n\}$的前n项和是S_n

(1) 若$\{a_n\}$是递增数列，求a_1的取值范围

(2) 若$a_1>2$且对任意$n\in N^*$，都有$S_n\ge na_1-\frac{1}{3}(n-1)$，证明：$S_n<2n+1$。

11. 设$a_n = x^n$，$b_n = (\frac{1}{n})^2$ ，S_n为数列$\{a_n \cdot b_n\}$的前 n 项和，令$f_n(x) = S_n - 1, x \in R$，$\mathrm{a} \in N^*$

(1) 若$x = 2$，求数列$\{\frac{2n-1}{a_n}\}$ 的前n项和T_n

(2) 求证：$\forall n \in N^*$方程$f_n(x) = 0$在$x_n \in [\frac{2}{3}, 1]$ 上有且仅有一个根

(3) 求证：$\forall \mathrm{p} \in N^*$，由 (2) 中$x_n$构成的数列$\{x_n\}$满足$0 < x_n - x_{n-p} < \frac{1}{n}$

12. 已知数列$\{a_n\}, \{b_n\}, a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n^2}$ $(n = 0,1,2,\cdots)$ ，$b_n = \sqrt{n}$ $(n = 1,2,3,\cdots)$，T_n为数列$\{b_n\}$的前n项和

求证：(1) $a_{n+1} < a_n$

(2) $a_n \leq \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{b_n} (n = 1,2,3,\cdots)$

(3) $a_n \leq \frac{n}{2} \cdot T_n (n = 1,2,3,\cdots)$

13. 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=\frac{3}{2}, a_n=a_{n-1}^2+a_{n-1}$（$n \geq 2$ 且 $n \in N$）

(1) 求a_2, a_3并证明：$2^{2^{n-1}}-\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{2} \cdot 3^{2^{n-1}}$

(2) 设数列$\{a_n^2\}$的前n项和为A_n，数列$\{\frac{1}{a_n+1}\}$ 的前 n 项和为B_n,证明：$\frac{A_n}{B_n}=\frac{3}{2}a_{n+1}$

14. 已知数列$\{a_n\}$的各项均为非负数,其前n项和为S_n,且对任意的$n \in N^*$,都有$a_{n+1} \leq \frac{a_n+a_{n+2}}{2}$

(1) 若$a_1=1$ ，$a_{505}=2017$，求a_6的最大值

(2) 若对任意$n \in N^*$都有$S_n \leq 1$，求证：$0<a_n-a_{n+1}<\frac{2}{n(n+1)}$

15. 已知数列$\{a_n\}$中, $a_1=4$ ， $a_{n+1}=\frac{\sqrt{6+a_n}}{2}$ ， $n\in N^*$ ， S_n为$\{a_n\}$的前n项和

(1) 求证：$n\in N^*$时, $a_n>a_{n+1}$

(2) 求证：$n\in N^*$时, $2\le S_n-2n<\frac{16}{7}$

16. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$ ， $a_n=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{2}$

(1) 求证：$a_n\ge\frac{2}{3}$

(2) 求证：$|a_{n+1}-a_n|\le\frac{1}{3}$

(3) 求证：$|a_{2n}-a_n|\le\frac{10}{27}$

17. 设数列$\{a_n\}$满足$a_1 = a$，$a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_2^2+1}$($a > 0$ 且 $a \neq 1$，n $\in N^*$)

(1) 证明：当$n \geq 2$时，$a_n < a_{n+1} < 1$

(2) 若$b \in (a_2, 1)$，求证：当整数k $\geq \frac{(b-a_2)(b+1)}{a_2(1-b)} + 1$时, $a_{k+1} > b$

18. 设$a > 3$, 数列$\{a_n\}$中，$a_1 = a, a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2a_n - 3}, n \in N^*$

(1) 求证：$a_n > 3$，且$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

(2) 当$a \leq 4$时, 证明：$a_n \leq 3 + \frac{1}{5^{n-1}}$

19. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_n > 0$，$a_1 = 2$，且$(n+1)a_{n+1}^2 = na_n^2 + a_n(n \in N^*)$

(1) 证明：$a_n > 1$

(2) 证明$\frac{a_2^2}{4} + \frac{a_3^2}{9} + \cdots + \frac{a_n^2}{n^2} < \frac{9}{5}(n \geq 2)$

20. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_n > 0$，$a_{n+1} + \frac{1}{a_n} < 2(n \in N^*)$

(1) 求证：$a_{n+2} < a_{n+1} < 2(n \in N^*)$

(2) 求证：$a_n > 1(n \in N^*)$

21. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，且$a_{n+1}^2+a_n^2=2(a_{n+1}a_n+a_{n+1}-a_n-\frac{1}{2})$

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式

(2) 求证：$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}<\frac{7}{4}$

(3) 记$S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$，证明：对于一切$n\geq 2$，都有$S_n^2>2\left(\frac{S_2}{2}+\frac{S_3}{3}+\cdots+\frac{S_n}{n}\right)$

22. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$ ，$a_{n+1}=\frac{3}{3a_n+2}, n\in N^*$

(1) 求证：$\frac{3}{5}\leq a_n\leq 1$

(2) 求证$|a_{2n}-a_n|\leq\frac{2}{5}$

23. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和记为$\mathrm{S_n}$，且满足$S_n=2a_n-n, n\in N^*$

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式

(2) 证明：$\frac{n}{2}-\frac{1}{3}<\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{n}{2}(n\in N^*)$

24. 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=\frac{1}{2}$ ，$a_{n+1}=\frac{a_n^2}{2016}+a_n(n\in N^*)$

(1) 求证：$a_{n+1}>a_n$

(2) 求证：$a_{2017}<1$

(3) 若$a_k>1$，求正整数k的最小值

25. 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_n^2-a_n-a_{n+1}+1=0,a_1=2$

(1) 求a_2,a_3

(2) 证明数列为递增数列

(3) 求证：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}<1$

26. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$ ，$a_{n+1}=a_n+\frac{a_n^2}{(n+1)^2}(n\in N^*)$

(1) 求证：$a_n\geq 1$

(2) 证明：$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1+\frac{1}{(n+1)^2}$

(3) 求证：$\frac{2(n+1)}{n+3}<a_{n+1}<\mathrm{n}+1$

27. 在正项数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$ ，且满足$a_{n+1}=2a_n-\frac{1}{a_n+1}(n\in N^*)$

(1) 求a_2,a_3

(2) 证明$a_n\geq(\frac{3}{2})^{n-1}$

28. 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{3}$，$a_{n+1}=a_n+\frac{a_n^2}{n^2}(n\in N^*)$

(1) 证明：$a_n<a_{n+1}<1(n\in N^*)$

(2) 证明：$a_n\geq\frac{n}{2n+1}(n\in N^*)$

29. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1 = 2$ ，$a_{n+1} = 2(S_n + n + 1)(n \in N^*)$，令$b_n = a_n + 1$

(1) 求证：$\{b_n\}$是等比数列,

(2) 记数列$\{nb_n\}$的前n项和为T_n，求T_n

(3) 求证：$\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} < \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{11}{16}$

30. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1 = 3$，$2a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 4$

(1) 证明：$a_{n+1} > a_n$

(2) 证明：$a_n \geq 2 + (\frac{3}{2})^{n-1}$

(3) 设数列$\{\frac{1}{a_n}\}$的前 n 项和为S_n，求证：$1 - (\frac{2}{3})^n \leq S_n < 1$

31. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{2}{5}$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{3-a_n}, n\in N^*$

(1) 求a_2

(2) 求$\{\frac{1}{a_n}\}$的通项公式

(3) 设$\{a_n\}$的前n项和为S_n，求证：$\frac{6}{5}(1-(\frac{2}{3})^n)\leq S_n<\frac{21}{13}$

32. 数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$ ，$a_n=\sqrt{a_n a_{n+1}-2}$

(1) 证明：$a_n<a_{n+1}$

(2) 证明：$a_n a_{n+1}\geq 2n+1$

(3) 设$b_n=\frac{a_n}{\sqrt{n}}$，证明：$2<b_n<\sqrt{5}(n\geq 2)$

33. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$ ，$a_{n+1}=\frac{1}{8}a_n^2+m$

(1) 若数列$\{a_n\}$是常数列, 求m的值

(2) 当$m>1$时, 求证：$a_n<a_{n+1}$

(3) 求最大的正数m , 使得$a_n<4$对一切整数n恒成立, 并证明你的结论

34. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{p+1}{p}$ ，$p>1$，$a_{n+1}=\frac{a_n-1}{\ln a_n}$

(1) 证明：$a_n>a_{n+1}>1$

(2) 证明：$\frac{2a_n}{a_n+1}<a_{n+1}<\frac{a_n+1}{2}$

(3) 证明：$\frac{1}{p+1}\cdot\frac{2^n-1}{2^{n-1}}<\ln(a_1a_2\cdots a_n)<\frac{1}{p}\cdot\frac{2^n-1}{2^{n-1}}$

35. 数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}-a_n+a_na_{n+1}=0(n\in N^*)$

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式

(2) 求证：$a_1+a_1a_2+a_1a_2a_3+\cdots+a_1a_2\ldots a_n<1$

36. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n^2+p$

(1) 若数列$\{a_n\}$为常数列, 求p的值

(2) 当$p>1$求证：$a_n<a_{n+1}$

(3) 求最大的正数p，使得$a_n<2$对一切整数n恒成立，并证明你的结论

37. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1 = a > 4$ ，$a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 8}$ $(n \in N^*)$

(1) 求证：$a_n > 4$

(2) 判断数列$\{a_n\}$的单调性

(3) 设S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，求证：当$a = 6$时，$4n + 2 \leq S_n \leq 4n + \frac{8}{3}$

38. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1 = 1$ ，$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n^2 + 1}$

(1) 求证：$a_{n+1} < a_n$

(2) 求证：$\frac{1}{2^{n-1}} \leq a_n \leq \frac{2^n}{3 \cdot 2^n - 4}$

39. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1 = 1$ ，$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 2a_n + 3} + b$

(1) 若$b = 1$, 证明：数列$\{(a_n - 1)^2\}$是等差数列

(2) 若$b = -1$, 判断数列$\{a_{2n-1}\}$的单调性并说明理由

(3) 若$b = -1$，求证：$a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} < \frac{3n+4}{6}$

40. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_0 = \frac{1}{3}$, $a_n = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + a_{n-1})}(n = 1,2,3, \dots)$，$b_n = 2a_n^2 - a_n$，$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$

证明：(1) $a_{n-1} < a_n < 1(n \geq 1)$

(2) $0 < S_n < n - \frac{1}{2}(n \geq 2)$

41. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$ ，$a_{n+1}=\frac{a_n}{1+a_n^2}, n\in N^*$，记$S_n, T_n$分别是数列$\{a_n\}$，$\{a_n^2\}$的前$n$项和，证明：当$n\in N^*$时

(1) $a_{n+1}<a_n$

(2) $T_n=\frac{1}{a_{n+1}^2}-2n-1$

(3) $\sqrt{2n}-1<S_n<\sqrt{2n}$

42. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$ ，$a_{n+1}=a_n^2+2a_n, n\in N^*$，设$b_n=\log_2(a_n+1)$

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式

(2) 求证：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{b_n-1}<n(n\geq 2)$

(3) 若$2^{c_n}=b_n$，求证：$2\leq\left(\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)^n<3$

43. 已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$ ，$a_{n+1}^2+a_{n+1}=2a_n,n\in N^*$

(1) 求证：$1<a_n\le 3,n\in N^*$

(2) 若对于任意的正整数n都有$\frac{a_{n+1}-1}{a_n-1}<\mathrm{M}$成立, 求$M$的最小值

(3) 求证：$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<n+6$，$n\in N^*$

44. 已知在数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{3}{2},a_{n+1}=a_n^2-2a_n+2,n\in N^*$

(1) 求证：$1<a_{n+1}<a_n<2$

(2) 求证：$\frac{6}{2^{n-1}+3}\le a_n\le\frac{2^{n-1}+2}{2^{n-1}+1}$

(3) 求证：$n<s_n<n+2$

45. 已知数列$\{a_n\}$中$a_1=\frac{1}{2}, a_{n+1}=\frac{1+a_na_{n+1}}{2}(n\in N^*)$

(1) 求证：$\frac{1}{2}\le a_n<1$

(2) 求证$\{\frac{1}{a_n-1}\}$是等差数列

(3) 设$b_n=\frac{n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$记数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$S_n$，求证：$S_n<\frac{94}{15}$

46. 已知无穷数列$\{a_n\}$的首项$a_1=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$，$n\in N^*$

(1) 证明：$0<a_n<1$

(2) 记$b_n=\frac{(a_n-a_{n+1})^2}{a_na_{n+1}}$，$T_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项和，证明：对任意正整数$n$，$T_n<\frac{3}{10}$

47. 已知数列$\{x_n\}$满足$x_1 = 1$ ， $x_{n+1} = 2\sqrt{x_n} + 3$, 求证:

(1) $0 < x_n < 9$

(2) $x_n < x_{n+1}$

(3) $x_n > 9 - 8 \cdot (\frac{2}{3})^{n-1}$