当小球遇上盒子

——SZY

Part A

概念理解

- 集合（aggregate）
- 多重集（multiset）
- 函数（function）
- 映射（mapping）
- 严格递增数列（strictly increasing sequence）
- 非严格递增数列（non-strictly increasing sequence）

基本模型

小球和盒子是非常经典（烂大街）的一种模型，以小球和盒子的爱恨情仇为背景，对把小球放到这个盒子里还是那个盒子里进行的一系列哲学问题探讨，其中会涉及到基本的组合数学和递推。

一般问题为n个小球放到m个盒子里，题目会给出三个基本要求：球是否相同，盒子是否相同，能否有空盒。

问题一

20名工人被分配去A区和B区工作，可以存在一个区没人去，则有多少种不同的分配方案?

[模板]

小球不相同，盒子不相同，可以有空盒。

[方法] 挨个考虑

[答案] $m^n = 2^{20} = 1048576$

问题二

学校新购买了20瓶相同的消毒水，准备分给四个年级，每个年级至少分到一瓶消毒水，则有几种不同的分法?

[模板]

小球相同，盒子不相同，不能有空盒。

[方法] 隔板法

[答案] $C_{n-1}^{m-1}=C_{19}^{3}=969$

问题三

桌上有6个装着不同病毒样本培养液的烧杯（培养液足够多），分析仪上有5支相同的试管，现要往每支试管中倒入10mL某种培养液，每种培养液可以被倒入多支试管中，某些培养液可以不被倒入任何一支试管中，且试管不允许为空，则一共有几种情况？

[模板] 小球相同，盒子不相同，可以有空盒。

[方法] 还是隔板法

[答案] $C_{n+m-1}^{m-1} = C_{10}^{5} = 252$

第二类Stirling数

- 设n个不同的球放入m个相同的盒子(不能有空盒)的方案数为$S2(n,m)$
- 考虑这个函数的递推公式
- 对于$S2(n,m)$，放第n个小球有2种情况
  ①放到前面已经有的m个盒子的某个盒子里，共m种放法
  ②单独放在一个盒子中
- 递推公式：
- $S2(n,m)=S2(n-1,m)\times m+S2(n-1,m-1)$
- 边界条件：$S2(n,n)=S2(n,1)=1$

第二类Stirling数

- 用Excel做个表格

S2		m									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	1	1									
	2	1	1								
	3	1	3	1							
	4	1	7	6	1						
	5	1	15	25	10	1					
	6	1	31	**90**	65	15	1				
	7	1	63	301	350	140	21	1			
	8	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
	9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
	10	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

问题四

为明确责任，切实有效做好疫情防控工作，政教处6名老师需在3块一样的签名板上签名，每人仅需在某一块签名板上签一次名，但每块签名板上至少有一人签名，则一共有几种情况？

[模板]
小球不同，盒子相同，不能有空盒。

[方法] 第二类Stirling数

[答案] $S2(n,m) = S2(6,3) = 90$

? 问题五

某公司购置了4箱一样的口罩（每箱口罩数量视为无穷大），要分发给下属的5个部门，每个部门从某一箱子内拿走一打口罩，可以存在某些箱子保持未开封状态，则一共有几种不同的情况?

[模板] 小球不同，盒子相同，可以有空盒。

[分析] 枚举非空盒有几个，然后把相应的第二类斯特林数加起来就可以了

问题五

某公司购置了4箱一样的口罩（每箱口罩数量视为无穷大），要分发给下属的5个部门，每个部门从某一箱子内拿走一打口罩，可以存在某些箱子保持未开封状态，则一共有几种不同的情况？

[模板] 小球不同，盒子相同，可以有空盒。

[方法] 第二类Stirling数之和

[答案] $\sum_{i=1}^{m} S2(n,i) = S2(5,1) + S2(5,2) + S2(5,3) + S2(5,4) = 51$

？问题柳

7位市领导分早、中、晚三个时段检查学校疫情防控工作，每个时段都至少有一位领导参与检查，每位领导只在一个时段参与检查，有几种安排方式?

[模板] 小球不同，盒子不同，不能有空盒。

[方法] 第二类Stirling数（有序）

[答案] $S2(n,m) \times m! = S2(7,3) \times 3! = 150$

自然数分割问题

- 设$f(n,m)$为把n拆分为m个正整数和的方案数，即n个相同小球放到m个相同盒子里的方案数
- 还是考虑这个函数的递推公式
- 参数n和m有三种情况
  I. 只有一个盒子或者没有小球
     方案数自然为1
  II. 小球比盒子要少
     小球肯定是放不满盒子的，由于盒子相同，可以得到关系式$f(n,m)=f(n,n)$
  III. 小球比盒子要多
     就分为将盒子放满和没放满两种情况，即$f(n,m)=f(n-m,m)+f(n,m-1)$

自然数分割问题

- 用Excel做个表格

f		m									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	3	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3
	4	1	3	4	5	5	5	5	5	5	5
	5	1	3	5	6	7	7	7	7	7	7
	6	1	4	7	9	10	11	11	11	11	11
	7	1	4	**8**	11	13	14	15	15	15	15
	8	1	5	10	15	18	20	21	22	22	22
	9	1	5	12	18	23	26	28	29	30	30
	10	1	6	14	23	30	35	38	40	41	42

问题七

把7盒一样的病毒检测试剂放入3个一样的箱子里（箱子可以空着），有几种放法?

[模板] 小球相同，盒子相同，可以有空盒。

[方法] 递推

[答案] $f(n,m)=f(7,3)=8$

问题八

某番茄种植园最近用植物组织培养技术获得了8个相同的番茄，现要把这8个番茄分给柳哥和种植园下属的2个研究基地，且要求柳哥分得的番茄数量最多（可以并列），番茄基因组测序基地分得的番茄数量最少（可以并列），但不能为0，有几种分配方法?

[模板] 小球相同，盒子相同，不能有空盒。

[方法] 转化为上一个问题

[答案] $f(n-m,m)=f(5,3)=5$

总结

小球个数=n	盒子个数=m	是否可以有空盒	答案
小球不同	盒子不同	不能有空盒	$S2(n,m)\times m!$
		可以有空盒	m^n
	盒子相同	不能有空盒	$S2(n,m)$
		可以有空盒	$\sum_{i=1}^{m} S2(n,i)$
小球相同	盒子不同	不能有空盒	C_{n-1}^{m-1}
		可以有空盒	C_{n+m-1}^{m-1}
	盒子相同	不能有空盒	$f(n-m,m)$
		可以有空盒	$f(n,m)$

当小球遇上盒子（Part A）

The End

STAFF

策划&制作&出题：SZY
动效支持：Microsoft Office 365
主题支持：Google Material Design
美化支持：Google Calendar Illustrator
（画师：Lotta Nieminen）
字体支持：方正字库、汉仪字库
灵感来自洛谷日报#69 [chengni]当小球遇上盒子

Thank you.

Part B

<table>
<tr><th>小球个数=n</th><th>盒子个数=m</th><th>是否可以有空盒</th><th>特殊要求</th><th>答案</th></tr>
<tr><td rowspan="12">小球相同</td><td rowspan="8">盒子不同</td><td rowspan="4">不能有空盒</td><td>无特殊要求</td><td>C_{n-1}^{m-1}</td></tr>
<tr><td>数列非严格递增</td><td></td></tr>
<tr><td>数列严格递增</td><td></td></tr>
<tr><td>数列无重复元素</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">可以有空盒</td><td>无特殊要求</td><td>C_{n+m-1}^{m-1}</td></tr>
<tr><td>数列非严格递增</td><td></td></tr>
<tr><td>数列严格递增</td><td></td></tr>
<tr><td>数列无重复元素</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">盒子相同</td><td rowspan="2">不能有空盒</td><td>无特殊要求</td><td>$f(n-m,m)$</td></tr>
<tr><td>集合无重复元素</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">可以有空盒</td><td>无特殊要求</td><td>$f(n,m)$</td></tr>
<tr><td>集合无重复元素</td><td></td></tr>
</table>

小球个数=n	盒子个数=m	是否可以有空盒	特殊要求	答案
小球相同	盒子不同	不能有空盒	无特殊要求	C_{n-1}^{m-1}
			数列非严格递增	$f(n-m,m)$
			数列严格递增	
			数列无重复元素	
		可以有空盒	无特殊要求	C_{n+m-1}^{m-1}
			数列非严格递增	$f(n,m)$
			数列严格递增	
			数列无重复元素	
	盒子相同	不能有空盒	无特殊要求	$f(n-m,m)$
			集合无重复元素	
		可以有空盒	无特殊要求	$f(n,m)$
			集合无重复元素	

已知数列$\{a_n\}$为严格递增数列，且$a_n \in \mathbb{N}, n = 1,2,3,\cdots$

（1）求证：$a_n - n \geq 0$

（2）给出一种对应关系，使得对于每个数列$\{a_n\}$，都恰好有一个非严格递增数列$\{b_n\}$与之对应，且对于不同的数列$\{a_n\}$，其对应的数列$\{b_n\}$也不同。

小球个数=n	盒子个数=m	是否可以有空盒	特殊要求	答案
小球相同	盒子不同	不能有空盒	无特殊要求	C_{n-1}^{m-1}
			数列非严格递增	$f(n-m,m)$
			数列严格递增	
			数列无重复元素	
		可以有空盒	无特殊要求	C_{n+m-1}^{m-1}
			数列非严格递增	$f(n,m)$
			数列严格递增	
			数列无重复元素	
	盒子相同	不能有空盒	无特殊要求	$f(n-m,m)$
			集合无重复元素	
		可以有空盒	无特殊要求	$f(n,m)$
			集合无重复元素	$f\left(n-\frac{m(m-1)}{2},m\right)$

小球个数=n	盒子个数=m	是否可以有空盒	特殊要求	答案
小球相同	盒子不同	不能有空盒	无特殊要求	C_{n-1}^{m-1}
			数列非严格递增	$f(n-m,m)$
			数列严格递增	
			数列无重复元素	
		可以有空盒	无特殊要求	C_{n+m-1}^{m-1}
			数列非严格递增	$f(n,m)$
			数列严格递增	
			数列无重复元素	
	盒子相同	不能有空盒	无特殊要求	$f(n-m,m)$
			集合无重复元素	$f\left(n-\frac{m(m+1)}{2},m\right)$
		可以有空盒	无特殊要求	$f(n,m)$
			集合无重复元素	$f\left(n-\frac{m(m-1)}{2},m\right)$

当小球遇上盒子

小球个数=n	盒子个数=m	是否可以有空盒	特殊要求	答案
小球相同	盒子不同	不能有空盒	无特殊要求	C_{n-1}^{m-1}
			数列非严格递增	$f(n-m,m)$
			数列严格递增	$f\left(n-\frac{m(m+1)}{2},m\right)$
			数列无重复元素	
		可以有空盒	无特殊要求	C_{n+m-1}^{m-1}
			数列非严格递增	$f(n,m)$
			数列严格递增	$f\left(n-\frac{m(m-1)}{2},m\right)$
			数列无重复元素	
	盒子相同	不能有空盒	无特殊要求	$f(n-m,m)$
			集合无重复元素	$f\left(n-\frac{m(m+1)}{2},m\right)$
		可以有空盒	无特殊要求	$f(n,m)$
			集合无重复元素	$f\left(n-\frac{m(m-1)}{2},m\right)$

小球个数=n	盒子个数=m	是否可以有空盒	特殊要求	答案
小球相同	盒子不同	不能有空盒	无特殊要求	C_{n-1}^{m-1}
			数列非严格递增	$f(n-m,m)$
			数列严格递增	$f\left(n-\frac{m(m+1)}{2},m\right)$
			数列无重复元素	$m!\cdot f\left(n-\frac{m(m+1)}{2},m\right)$
		可以有空盒	无特殊要求	C_{n+m-1}^{m-1}
			数列非严格递增	$f(n,m)$
			数列严格递增	$f\left(n-\frac{m(m-1)}{2},m\right)$
			数列无重复元素	$m!\cdot f\left(n-\frac{m(m-1)}{2},m\right)$
	盒子相同	不能有空盒	无特殊要求	$f(n-m,m)$
			集合无重复元素	$f\left(n-\frac{m(m+1)}{2},m\right)$
		可以有空盒	无特殊要求	$f(n,m)$
			集合无重复元素	$f\left(n-\frac{m(m-1)}{2},m\right)$

由数字1,2,3组成7位数，要求7位数中数字1,2,3每一个至少出现一次，求所以这种7位数的个数。

$$S2(7,3) \cdot 3! = 1806$$

现有7位乘客随意登上6节车厢，使得恰有两节车厢空着的上车方式有几种?

$$C_6^2 \cdot S2(7,4) \cdot 4! = 126000$$

将24个志愿者名额分配给3个学校，则每个学校至少有一个名额且各校名额互不相同的分配方法共有几种？

$$f(18,3)\cdot 3! = 222$$

[2010全国高中数学联赛]求方程$x+y+z=2010$满足$x \le y \le z$的正整数解(x,y,z)的个数。

f(2007,3)

定义条件$p(n)$：一个多重集S满足条件$p(n)$当且仅当S中所有元素都是正整数且它们的和等于n。

定义集合$f(n)$表示所有满足条件$p(n)$的多重集的集合。

定义条件$q(S)$：一个数列$\{a_n\}$满足条件$q(S)$当且仅当S等于由$\{a_n\}$中所有元素组成的多重集S。

定义集合$g(S)$表示所有满足条件$q(S)$的数列的集合。

（1）求$|f(10)|$

（2）求$\sum_{m\in f(12)}|g(m)|$

STAFF

策划&制作：SZY

动效支持：Microsoft Office 365

主题支持：Google Material Design

美化支持：Background Generator

字体支持：方正字库、汉仪字库、思源字体

Thank you.