



## “华为杯”第十四届中国研究生 数学建模竞赛

学 校 上海交通大学

---

参赛队号 10248147

---

1. 张睿铭

---

队员姓名 2. 张本轩

---

3. 甄卓

---

参赛密码 \_\_\_\_\_

(由组委会填写)



# “华为杯”第十四届中国研究生 数学建模竞赛

题 目                      多波次导弹发射中的规划问题

---

## 摘                      要：

本文以最优化理论为基础，研究了多波次导弹发射中的规划问题。首先建立整数规划模型解决最优行进路径问题；其次，建立非线性时间约束的规划模型求解最小暴露时间；利用此模型对问题二和问题三进行求解分析。最后在此模型基础上，结合路线图的结构，探究问题四和问题五的解决方案。

问题一中，首先不考虑时间因素，利用整数规划模型求解最优路线。在计算出的最优路线基础上，引入时间因素并将整个发射过程分为隐蔽点到第一次发射点、第一次发射点到转载区域、转载区域到第二次发射点这三个阶段。建立多阶段非线性规划模型，对于每一阶段建立不同条件的约束方程，求出最小暴露时间之和，得到的最小暴露时间为 **7893.2** 分钟。

问题一建立的模型计算速度快，利用该模型穷举搜索求解问题二，我们选取 **J25**，**J34** 作为临时增设的转载点，则最小暴露时间降为 **6847.9** 分钟。

问题三中，在问题一模型的基础上，添加和修正其中的少量约束，使模型符合问题三的描述，求解问题三，结论是在 **J13** 新增一台隐蔽待机的 C 类发射装置，在 **J14** 新增两台隐蔽待机的 C 类发射装置。

问题四中，提出了评价节点重要程度的指标，并在此指标基础上将搜索范围降至 10 个节点，利用节点删除法判断攻防博弈下道路网中比较重要的三个节点，其中增加暴露时间最多的 3 个节点是 **J7, J6, J13** 或者 **J9, J6, J13**（计算出来时间相等）。

问题五中，提出基于道路流量平方的正则化惩罚项，并与信息熵模型比较讨论，两者均可用于评估网络的分散程度。利用极小极大约束优化评估单台发射装置的最长暴露时间，该约束可以很容易与问题一建立的模型整合。

在最后，本文总结了本模型的优缺点，并提出潜在改进方向。

**关键词：**多波次；导弹发射；非线性规划；整数规划；节点删除法

## 目录

1. 问题重述 .....	5
1.1 问题背景 .....	5
1.2 需要解决的问题 .....	5
2. 基本假设 .....	6
3. 符号说明 .....	7
4. 问题一模型建立与求解 .....	8
4.1 问题分析 .....	8
4.2 模型建立 .....	9
4.2.1 仅考虑最短运输时间的模型 .....	9
4.2.2 已知路线的前提下考虑等待时间的模型 .....	12
4.3 问题求解 .....	15
5. 问题二模型建立与求解 .....	18
5.1 问题分析与模型建立 .....	18
5.2 问题求解 .....	18
6. 问题三模型建立与求解 .....	20
6.1 问题分析 .....	20
6.2 模型建立 .....	20
6.2.1 仅考虑最短运输时间的模型 .....	20
6.2.2 考虑等待时间的模型 .....	21
6.3 问题求解 .....	21
7. 问题四模型建立与求解 .....	22
7.1 问题分析 .....	23
7.2 模型建立 .....	23
7.2.1 节点重要程度的评估 .....	23
7.2.2 对三个道路节点的确定 .....	23
7.3 问题求解 .....	23
8. 问题五模型建立与求解 .....	25
8.1 问题分析 .....	25
8.2 模型建立 .....	25
8.3 问题求解 .....	26
9. 模型评价及推广 .....	26
10. 参考文献 .....	27
11. 附录 .....	27
11.1 问题一规划后的时间安排表 .....	27
11.2 问题二规划后的时间安排表 .....	29
11.3 问题三规划后的时间安排表 .....	31
11.4 程序 .....	34

# 1. 问题重述

## 1.1 问题背景

随着导弹武器系统的不断发展，导弹在未来作战中将发挥越来越重要的作用，导弹作战将是未来战场的主要作战样式之一。

为了提高导弹部队的生存能力和机动能力，常规导弹大都使用车载发射装置，平时在待机地域隐蔽待机，在接受发射任务后，各车载发射装置从待机地域携带导弹沿道路机动到各自指定发射点位实施发射。每台发射装置只能载弹一枚，实施多波次发射时，完成了上一波次发射任务的车载发射装置需要立即机动到转载地域（用于将导弹吊装到发射装置的专门区域）装弹，完成装弹的发射装置再机动至下一波次指定的发射点位实施发射。连续两波次发射时，每个发射点位使用不超过一次。

## 1.2 需要解决的问题

某部参与作战行动的车载发射装置共有 24 台，依据发射装置的不同大致分为 A、B、C 三类，其中 A、B、C 三类发射装置的数量分别为 6 台、6 台、12 台，执行任务前平均部署在 2 个待机地域（D1，D2）。所属作战区域内有 6 个转载地域（Z01~Z06）、60 个发射点位（F01~F60），每一发射点位只能容纳 1 台发射装置。各转载地域最多容纳 2 台发射装置，但不能同时作业，单台转载作业需时 10 分钟。各转载地域弹种类型和数量满足需求。相关道路情况如图 1 所示（道路节点 J01~J62）。图 1 中主干道路（图中红线）是双车道，可以双车通行；其他道路（图中蓝线）均是单车道，只能在各道路节点处会车。A、B、C 三类发射装置在主干道路上的平均行驶速度分别是 70 公里/小时、60 公里/小时、50 公里/小时，在其他道路上的平均行驶速度分别是 45 公里/小时、35 公里/小时、30 公里/小时。

部队接受发射任务后，需要为每台车载发射装置规划每个波次的发射点位及机动路线，要求整体暴露时间（所有发射装置的暴露时间之和）最短。

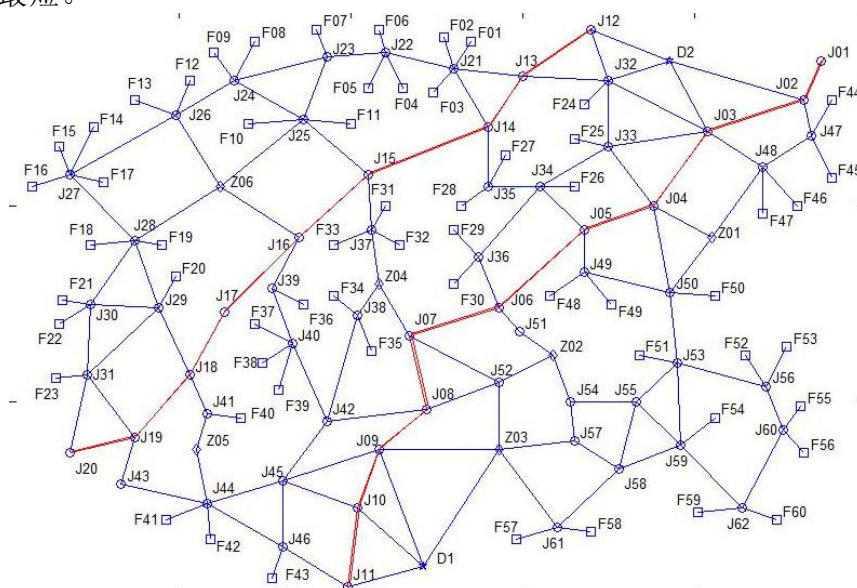


图 1 作战区域道路示意图

本文主要针对下列五个问题进行建模分析：

**问题 1** 该部接受到实施两个波次的齐射任务（齐射是指同一波次的导弹同一时刻发射），每个波次各发射 24 枚导弹。给出具体发射点分配及机动路线方案，使得完成两个波次发射任务的整体暴露时间最短。统一以第一波次的发射时刻作为第二波次机动的起始时刻。

**问题 2** 转载地域的合理布设是问题的“瓶颈”之一。除已布设的 6 个转载地域外，可选择在道路节点 J25、J34、J36、J42、J49 附近临时增设 2 个转载地域（坐标就取相应节点的坐标）。应该如何布设临时转载地域，使得完成两个波次发射任务的整体暴露时间最短。

**问题 3** 新增 3 台 C 类发射装置用于第二波次发射。这 3 台发射装置可事先选择节点 J04、J06、J08、J13、J14、J15 附近隐蔽待机（坐标就取相应节点的坐标），即这 3 台发射装置装弹后从待机地域机动到隐蔽待机点的时间不计入暴露时间内。每一隐蔽待机点至多容纳 2 台发射装置。待第一波次导弹发射后，这 3 台发射装置机动至发射点位参与第二波次的齐射，同时被替代的 3 台 C 类发射装置完成第一波次齐射后择机返回待机地域（返回时间不计入暴露时间）。转载地域仍为事先布设的 6 个的前提下，应该如何选择隐蔽待机点，使得完成两个波次发射任务的整体暴露时间最短。

**问题 4** 道路节点受到攻击破坏会延迟甚至阻碍发射装置按时到达指定发射点位。请结合图 1 路网特点，考虑攻防双方的对抗博弈，建立合理的评价指标，量化分析该路网最可能受到敌方攻击破坏的 3 个道路节点。

**问题 5** 在机动方案的拟制中，既要考虑整体暴露时间尽可能短，也要规避敌方的侦察和打击，采用适当分散机动的策略，同时还要缩短单台发射装置的最长暴露时间。综合考虑这些因素，重新讨论问题 1。

## 2. 基本假设

**假设 1** “暴露时间”是各车载发射装置从待机地域出发时刻至第二波次发射时刻为止的时间之和，其中发射装置在待机地域尚未出发以及位于转载地域内的时间不计入暴露时间。

**假设 2** 不考虑发射装置在发射点位必要的技术准备时间和发射后发射装置的撤收时间，即当所有 24 个发射装置到达指定发射点的时刻就是第一波次导弹的发射时刻，同时也是第二波次导弹开始布置的起始时刻。

**假设 3** 主干道路和普通道路均视为两条方向相反的有向路，单双行道的区别在后面的约束中讨论。

**假设 4** 普通道路上不允许会车，即不允许在同一时刻有两辆行驶方向不同的车出现在同一条普通道路上。如果会车事件发生，则需要一辆车在道路节点处等待另一辆车驶离该道路。

**假设 5** 所有有向路上均不可以进行超车，但是同种类型的多台发射装置可以连续通过，并假定各装置之间通过时间无时间差。如果出现某一时刻在一条有向路上后面的发射装置比前面的发射装置速度快，并且追上了前面的发射装置的情况，则速度快的发射装置要降速跟在速度慢的发射装置之后。

### 3. 符号说明

符号	意义
$V$	所有点的集合
$E$	所有边的集合
$D$	待机点集合
$J$	一般点集合
$F$	发射点集合
$Z$	转载点集合
$l_{ij}$	从 $i$ 到 $j$ 有向路的长度，若从 $i$ 到 $j$ 无道路则其值为无穷大
$type_{ij}$	从 $i$ 到 $j$ 有向路的类型，1 表示主干道路（双车道），0 表示普通道路（单车道）
$a_{ij}^{(m)}$	在第 $m$ 阶段从 $i$ 到 $j$ 有向路上行驶过的 A 类发射装置的数量， $m = 1, 2, 3$
$b_{ij}^{(m)}$	在第 $m$ 阶段从 $i$ 到 $j$ 有向路上行驶过的 B 类发射装置的数量， $m = 1, 2, 3$
$c_{ij}^{(m)}$	在第 $m$ 阶段从 $i$ 到 $j$ 有向路上行驶过的 C 类发射装置的数量， $m = 1, 2, 3$
$v_{ij}(A)$	A 类发射装置在从 $i$ 到 $j$ 有向路上的速度
$v_{ij}(B)$	B 类发射装置在从 $i$ 到 $j$ 有向路上的速度
$v_{ij}(C)$	C 类发射装置在从 $i$ 到 $j$ 有向路上的速度
$t_{ij}^{(m)}$	在第 $m$ 阶段三类发射装置在从 $i$ 到 $j$ 有向路上的总暴露时间， $m = 1, 2, 3$
$x_i^{(1)}$	在第一波次是否选择在发射点 $F_i$ 进行发射，0 表示未选择，1 表示选择
$x_i^{(2)}$	在第二波次是否选择在发射点 $F_i$ 进行发射，0 表示未选择，1 表示选择
$t_{i_{2k-2}}$	第 $i$ 个发射装置到达路径上第 $k$ 个节点的时间（起点是第一个节点）， $k \geq 2$
$t_{i_{2k-1}}$	第 $i$ 个发射装置离开路径上第 $n$ 个节点的时间（起点是第一个节点）， $k \geq 2$
$t_{i(1)}$	第 $i$ 个发射装置到达指定转载点的时间
$t_{i(2)}$	第 $i$ 个发射装置在指定转载点开始隐蔽的时间
$t_{i(3)}$	第 $i$ 个发射装置在指定转载点开始转载的时间
$t_{i(4)}$	第 $i$ 个发射装置离开指定转载点的时间

## 4. 问题一模型建立与求解

### 4.1 问题分析

问题一要求实施两波次各 24 枚导弹的齐射任务，使得整体暴露时间最短，每个发射点只能有一个发射装置进行发射，第一波次使用过的发射点不可以在第二波次发射时再次进行使用。

#### 4.1.1 规划目标

可以将该问题简化为如下规划目标：

**规划目标** 选取合适的规划参数，使得所有 24 台发射装置的总暴露时间和最短。

#### 4.1.2 限制条件

在规划过程中存在着如下限制条件：

**限制条件 1** 每个发射点只能有一个发射装置进行发射；

**限制条件 2** 第一波次使用过的发射点不可以在第二波次发射时再次使用；

**限制条件 3** 转载在两次发射之间进行；

**限制条件 4** 转载点同时最多容纳两台发射装置，但不能同时作业，转载的发射装置需要停留 10 分钟；

**限制条件 5** 普通道路上不允许会车，即不允许在同一时刻有两辆行驶方向不同的车出现在同一条普通道路上。如果会车事件发生，则需要一辆车在道路节点处等待另一辆车驶离该道路；

**限制条件 6** 任何一条有向路上都不允许超车。如果出现某一时刻在一条有向路上后面的发射装置比前面的发射装置速度快，并且追上了前面的发射装置的情况，则速度快的发射装置要降速跟在速度慢的发射装置之后。

#### 4.1.3 问题分析

在不考虑时间序列的情况下，我们首先规划每台发射装置的最优行进路线，然后再在此最优行进路线的基础上，引入时间因素影响，建立非线性规划，得出一个较优的可行解。考虑公式

$$T_{\text{总暴露时间}} = T_{\text{运输时间}} + T_{\text{等待时间}}$$

首先求出  $T_{\text{运输时间}}^* = \min T_{\text{运输时间}}$ ，这里暂不考虑时间，因此限制条

件 4、限制条件 6 暂不考虑。

对于限制条件 5，在不考虑时间序列的情况下考虑最优路线规划，如果某个可行解 X 中发生两台发射装置会车的事件，则仅交换这两台发射装置的发射点，一定可以构造出另一个可行解 Y。可行解 Y 不会出现会车事件，并且暴露时间一定比可行解 X 要短。因此在较优解中一定不会出现会车事件，故限制条件 5 可以不做考虑。

对每台发射装置而言，可将整个过程分为三个阶段：第一波次发射阶段、转载阶段、第二波次发射阶段，在每个阶段都有不同的特点，对规划参数进行约束。

**阶段 1** 第一波次发射阶段：发射装置从待机点 D 出发，最终到达指定发射点 F。



**阶段 2 转载阶段：**发射装置从第一波次的发射点出发，最终到达指定转载点 Z，并停留 10 分钟进行转载。

**阶段 3 第二波次发射阶段：**发射装置完成转载后，从转载点 Z 出发，最终到达指定发射点 F。

为了避免先到达的发射装置在发射地点等待而增加暴露时间，应安排加权路程长的发射装置先出发，加权路程短的发射装置后出发，尽量使所有（或大部分）发射装置同时到达指定发射地点。

由于没有考虑限制条件 4 和限制条件 5，因此求出的解并不是最终的结果，不过可以在这个结果的基础上增加等待时间，则可以得到一个满足所有约束条件的较优解。

## 4.2 模型建立

### 4.2.1 仅考虑最短运输时间的模型

先不考虑限制条件 4、限制条件 6，仅考虑在道路上运输的最短时间。

用  $v_{ij}(A)$  表示 A 类发射装置在从 i 到 j 的有向路上的速度，则有

$v_{ij}(A) = \text{type}_{ij} \cdot v_{A \text{ 主干道路}} + (1 - \text{type}_{ij}) \cdot v_{A \text{ 普通道路}}$ 。其中， $\text{type}_{ij}$  表示从 i 到 j 的有向路的类型（0 表示普通道路，1 表示主干道路）。同理可以得到  $v_{ij}(B)$  和  $v_{ij}(C)$ 。

用  $t_{ij}^{(m)}$  表示在第 m 阶段三类发射装置在从 i 到 j 的有向路上的总暴露时间，于是有  $t_{ij}^{(m)} = a_{ij}^{(m)} \cdot \frac{l_{ij}}{v_{ij}(A)} + b_{ij}^{(m)} \cdot \frac{l_{ij}}{v_{ij}(B)} + c_{ij}^{(m)} \cdot \frac{l_{ij}}{v_{ij}(C)}$ 。其中  $a_{ij}^{(m)}$ ， $b_{ij}^{(m)}$ ， $c_{ij}^{(m)}$  分别表示在第 m 阶段从 i 到 j 的有向路上通过的 A 类、B 类、C 类发射装置的总数，这里不考虑会车、超车情况。

于是目标函数如下：

**目标函数 1**

$$\min \sum_{\substack{m=1 \\ (i,j) \in E}}^3 t_{ij}^{(m)} = \sum_{\substack{m=1 \\ (i,j) \in E}}^3 (a_{ij}^{(m)} \cdot \frac{l_{ij}}{v_{ij}(A)} + b_{ij}^{(m)} \cdot \frac{l_{ij}}{v_{ij}(B)} + c_{ij}^{(m)} \cdot \frac{l_{ij}}{v_{ij}(C)})$$

下面根据三个阶段的特点对目标函数进行约束。

#### 4.2.1.1 阶段 1 的约束

在阶段 1 有三类点：待机点（D），途经点（J 和 Z）以及发射点（F）。

- 1) 待机点（D）是阶段 1 的起点，需要满足离开的三类发射装置数量分别为 3 台、3 台和 6 台。

**约束 1**

$$\sum_{j \in V} a_{ij}^{(1)} = 3, \forall i \in D$$

$$\sum_{j \in V} b_{ij}^{(1)} = 3, \forall i \in D$$

$$\sum_{j \in V} c_{ij}^{(1)} = 3, \forall i \in D$$

- 2) 对于途经点（J 和 Z），需要满足到达途经点的发射装置全部离开。

**约束 2**

$$\sum_{j \in V} (a_{ij}^{(1)} - a_{ji}^{(1)}) = 0, \forall i \in J \cup Z$$

$$\sum_{j \in V} (b_{ij}^{(1)} - b_{ji}^{(1)}) = 0, \forall i \in J \cup Z$$

$$\sum_{j \in V} (c_{ij}^{(1)} - c_{ji}^{(1)}) = 0, \forall i \in J \cup Z$$

- 3) 发射点（F）是阶段 1 的终点，需要满足每个发射点最多只能有一台发射装置。

**约束 3**

$$\sum_{j \in V} (a_{ji}^{(1)} + b_{ji}^{(1)} + c_{ji}^{(1)}) = x_i^{(1)}, \forall i \in F$$

$$x_i^{(1)} \leq 1, \forall i \in F$$

**4.2.1.2 阶段 2 的约束**

在阶段 2 有三类点：发射点（F）、途经点（J 和 D）以及转载点（Z）。

- 1) 发射点（F）是阶段 2 的起点，需要满足阶段 1 到发射点的发射装置全部离开。

**约束 4**

$$\sum_{j \in V} (a_{ji}^{(1)} - a_{ij}^{(2)}) = 0, \forall i \in F$$

$$\sum_{j \in V} (b_{ji}^{(1)} - b_{ij}^{(2)}) = 0, \forall i \in F$$

$$\sum_{j \in V} (c_{ji}^{(1)} - c_{ij}^{(2)}) = 0, \forall i \in F$$

- 2) 对于途经点（J 和 D）需要满足到达途经点的发射装置全部离开。这里没有考虑转载点（Z）作为途经点的情况，因为在转载

点等待时间应当不会超过 30 分钟，一定比经过一个转载点去另一个转载点的时间要快。

**约束 5**

$$\sum_{j \in V} (a_{ij}^{(2)} - a_{ji}^{(2)}) = 0, \forall i \in J \cup D$$

$$\sum_{j \in V} (b_{ij}^{(2)} - b_{ji}^{(2)}) = 0, \forall i \in J \cup D$$

$$\sum_{j \in V} (c_{ij}^{(3)} - c_{ji}^{(3)}) = 0, \forall i \in J \cup D$$

- 3) 转载点 (Z) 是阶段 2 的终点，需要满足全部发射装置都要到达转载点。

**约束 6**

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in Z} a_{ij}^{(2)} = 6$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in Z} b_{ij}^{(2)} = 6$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in Z} c_{ij}^{(2)} = 12$$

**4.2.1.3 阶段 3 的约束**

在阶段 3 有三类点：转载点 (Z)、途经点 (J 和 D) 以及发射点 (F)。

- 1) 转载点 (Z) 是阶段 3 的起点，同时也可能是阶段 3 的途经点（完成转载后，在前往发射点的途中又经过了另一个转载点），故需要满足阶段 2 和阶段 3 到转载点的发射装置全部离开。

**约束 7**

$$\sum_{j \in V} (a_{ji}^{(2)} + a_{ji}^{(3)} - a_{ij}^{(3)}) = 0, \forall i \in Z$$

$$\sum_{j \in V} (b_{ji}^{(2)} + b_{ji}^{(3)} - b_{ij}^{(3)}) = 0, \forall i \in Z$$

$$\sum_{j \in V} (c_{ji}^{(2)} + c_{ji}^{(3)} - c_{ij}^{(3)}) = 0, \forall i \in Z$$

- 2) 途经点 (J 和 D) 需要满足的到达途经点的发射装置全部离开。

**约束 8**

$$\sum_{j \in V} (a_{ij}^{(3)} - a_{ji}^{(3)}) = 0, \forall i \in J \cup D$$

$$\sum_{j \in V} (b_{ij}^{(3)} - b_{ji}^{(3)}) = 0, \forall i \in J \cup D$$

$$\sum_{j \in V} (c_{ij}^{(3)} - c_{ji}^{(3)}) = 0, \forall i \in J \cup D$$

- 3) 发射点是阶段 3 的终点，需要满足每个发射点最多只能有一台发射装置。

**约束 9**

$$\sum_{\forall j \in V} (a_{ji}^{(3)} + b_{ji}^{(3)} + c_{ji}^{(3)}) = x_i^{(2)}, i \in F$$

$$x_i^{(2)} \leq 1, \forall i \in F$$

同时，发射点还有使用数量的限制，并应满足限制条件 2，即第一波次使用过的发射点不可以在第二波次发射时再次使用。

**约束 10**

$$\sum_{i \in F} x_i^{(1)} = 24$$

$$\sum_{i \in F} x_i^{(2)} = 24$$

$$x_i^{(1)} + x_i^{(2)} \leq 1, \forall i \in F$$

上述约束变量  $a_{ij}^{(k)}, b_{ij}^{(k)}, c_{ij}^{(k)}, x_i^{(1)}, x_i^{(2)}$  均为整数变量，整个约束方程组其他量已知，且约束条件均为线性关系，因此为整数线性规划问题，可以利用 **matlab** 直接求解。考虑变量的个数，其中  $|a_{ij}^{(k)}| = |E|$ ， $b$  和  $c$  类似且各有三个阶段，因此总数

为  $9|E|$ ， $|x_i^{(1)}| = |F|$ ，所有一共有  $9|E| + 2|F|$  个整数变量，在本题中实际的变量个数为  $9|E| + 2|F| = 9 \times 350 + 2 \times 60 = 3270$  个，在 **matlab** 中可以很快算出结果。

#### 4.2.2 已知路线的前提下考虑等待时间的模型

在 4.2.1 中仅考虑了三类发射装置在道路上运输的最短时间，并没有考虑有向路上无法超车的限制以及转载时的等待时间。下面在 4.2.1 所求得的规划安排基础上加入对等待时间的考虑，以得到最终的总暴露时间和。下面将路线按照发射波次分为两个阶段分别求解。

##### 4.2.2.1 阶段 1 的时间

设第  $i$  个发射装置有路线  $v1 \rightarrow v2 \rightarrow \dots \rightarrow vk \rightarrow \dots \rightarrow vn$ ，其中  $vn$  表示到达第一波次发射点。用  $t_{i_{2k-2}}$  表示第  $i$  个发射装置到达路径上

第  $k$  个节点的时间,  $t_{i_{2k-1}}$  表示第  $i$  个发射装置离开路径上第  $k$  个节点的时间。其中, 第一个节点是起点  $D$ , 最后一个节点是发射点  $F$ 。起点  $D$  没有到达时间, 于是对于在阶段 1 的任意一条路线规划, 都可以得到所需的最短时间, 也即:

**目标函数 2**

$$\min \sum_{i=1}^{24} (t_{i_{2n-2}} - t_{i_1})$$

在对目标函数 2 进行约束之前, 首先作一下两个假设:

**假设 6** 任何一条有向路上都不会出现会车事件。

**假设 7** 任何一条有向路上都不会同时有三类不同的发射装置。

前文已经分析过, 较优解中不会出现会车事件, 因此在阶段 1 只有限制条件 6, 也即不能超车这一条限制。下面对此进行约束。

对于一段路, 如果其上有不同类型的发射装置通过, 那么不妨设两种发射装置类型分别为  $x$  和  $y$ , 并且有  $v_x < v_y$ 。用  $t_{sx}$  和  $t_{sy}$  表示两种发射装置到达该段路的时间,  $t_{ex}$  和  $t_{ey}$  表示两种发射装置离开该段路的时间, 于是有如下两种情况:

情况一: 速度较慢的发射装置  $x$  先到该段路, 即  $t_{sx} < t_{sy}$ ,

此时要求  $X$  先离开该段路, 即  $t_{ex} < t_{ey}$ 。

情况二: 速度较快的发射装置  $y$  先到该段路, 即  $t_{sx} > t_{sy}$ ,

此时一定是  $Y$  先离开该段路, 即  $t_{ex} > t_{ey}$ 。

综合以上两种情况, 即可总结出对不能超车的约束:

**约束 11**

$$(t_{sx} - t_{sy})(t_{ex} - t_{ey}) > 0$$

同时还存在着行驶时间和等待时间上的两个自然约束:

**约束 12**

$$t_{i_{2k}} - t_{i_{2k-1}} \geq \frac{l_{k,k+1}}{v_{k,k+1}}$$

**约束 13**

$$t_{i_{2k+1}} - t_{i_{2k}} \geq 0$$

**约束 14**

$$t_{1_{2n-2}} = t_{2_{2n-2}} = \dots = t_{24_{2n-2}}$$

其中约束 12 是在该路上的运行时间约束, 约束 13 是在节点处等待时间约束, 约束 14 表示所有发射装置第一波发射时刻相

同。再根据目标函数 2 和约束 11、约束 12 以及约束 13，便可得到一个确定的规划方案在阶段 1 的暴露时间和。

这一阶段所有约束变量均为实数，其中约束 12 为非线性关系，所以可以使用非线性规划问题，可以使用 matlab 的 fmincon 函数求解。非线性约束规划问题的求解，依赖于初始值的选择，在实际使用中，可以去掉上述非线性约束，求出满足其他约束的最优解作为之后求解非线性约束的初始解。

#### 4.2.2.2 阶段 2 和阶段 3 的时间约束

这两个阶段合并在一起处理之后，所有发射装置有一个共同的时间起点——第一波次发射导弹的时间。这两个阶段包含着一个转载过程，在转载点隐蔽的时间不计入暴露时间，于是每台发射装置的暴露时间是两个波次导弹的发射时间之差减去在转载点的隐蔽时间。

同样用  $t_{i2n-2}$  表示第  $i$  个发射装置到达路径上第  $n$  个节点的时间， $t_{i2n-1}$  表示第  $i$  个发射装置离开路径上第  $n$  个节点的时间。

在这两个阶段，第一个节点是第一波次的发射点 F1，最后一个节点是第二波次的发射点 F2。对于转载节点，使用 4 个变量描述。

用  $t_{i(1)}$  表示第  $i$  台发射装置到达转载节点的时间， $t_{i(2)}$  表示第  $i$  台

发射装置开始隐蔽的时间， $t_{i(3)}$  表示第  $i$  台发射装置开始转载的时间， $t_{i(4)}$  表示第  $i$  台发射装置的离开时间。而其他节点仍然是两个

时间变量描述。于是目标函数如下所示：

#### 目标函数 3

$$\min \sum_{i=1}^{24} [t_{i2n-2} - (t_{i(4)} - t_{i(2)})]$$

在这一阶段同样有不能超车的约束，即约束 11、约束 12 和约束 13 仍然需要满足。不同的是这一阶段中存在着转载过程（用时 10 分钟），以及由于转载导致的等待时间（到达转载点，但是要等待前一台发射装置完成转载），下面对转载过程进行时间上的约束。

首先，在  $t_{i(1)}$ ， $t_{i(2)}$ ， $t_{i(3)}$ ， $t_{i(4)}$  之间存在着一个自然约束关系：

#### 约束 15

$$t_{i(1)} \leq t_{i(2)} \leq t_{i(3)} \leq t_{i(3)} + 10 \leq t_{i(4)}, 1 \leq i \leq 24$$

然后对于转载点（Z），按照来转载的发射装置的数量进行分类，来附加约束。

分类一：不多于一台发射装置到该点进行转载。不需要附加任何约束。

分类二：有且只有两台发射装置到该点进行转载。设这两台发射装置分别为  $i$  和  $j$ ，并假设  $t_{i(1)} > t_{j(1)}$ ，那么两台发射装置均可以在到达转载点时就开始隐蔽，只需要满足同时只能对一台发射装置进行转载的约束，即

**约束 16**

$$t_{i(3)} \geq t_{j(3)} + 10$$

分类三：多于两台发射装置到该点进行转载。对于其中任意三台发射装置到该点进行转载，并记为  $i$ 、 $j$  和  $k$ ，并假设  $i$  是三台发射装置中最晚开始隐蔽的，即  $t_{i(2)} = \max\{t_{i(2)}, t_{j(2)}, t_{k(2)}\}$ ，那么  $i$  一定要在  $j$  和  $k$  有一台离开之后才可以开始隐蔽（约束 17），并且  $i$  开始转载的时间一定晚于  $j$  和  $k$  都结束转载的时间（约束 18），这两个约束如下所示：

**约束 17**

$$t_{i(2)} \geq \min\{t_{j(4)}, t_{k(4)}\}$$

**约束 18**

$$t_{i(3)} \geq \max\{t_{k(3)} + 10, t_{k(3)} + 10\}$$

**约束 19**

$$t_{1_{2n-2}} = t_{2_{2n-2}} = \dots = t_{24_{2n-2}}$$

约束 19 保证第二波次发射时间相同。求解该约束问题，由于约束 16、17 为非线性约束，可以使用 matlab 的 fmincon 函数求解，初始值的选择类似，可以将上述非线性约束去掉，求解一个较好的初始值利用 matlab 计算。

#### 4.3 问题求解

在问题一中，我们首先根据整数规划模型求解出  $T_{\text{运输时间}}$  的最小值，然后按照计算出的路径，求解两波次的非线性约束规划问题，得出在该路线下的最小暴露时间  $T$ 。我们记  $T = T_{\text{运输时间}}^* + T_{\text{等待时间}}$ ，记最优最小暴露时间  $T^* = T_{\text{运输时间}}' + T_{\text{等待时间}}'$ ，因为  $T_{\text{运输时间}}' \geq T_{\text{运输时间}}^*$ ，且  $T \geq T^*$  则  $T_{\text{等待时间}} \geq T_{\text{等待时间}}' \geq 0$ ，所以  $T - T^* = (T_{\text{等待时间}} - T_{\text{等待时间}}')$  -  $(T_{\text{运输时间}}' - T_{\text{运输时间}}^*) \leq T_{\text{等待时间}} - (T_{\text{运输时间}}' - T_{\text{运输时间}}^*) \leq T_{\text{等待时间}}$ 。所以本模型解的优异程度取决于  $T_{\text{等待时间}}$  的值，在  $T_{\text{等待时间}}$  较小的情况下，我

们得到的解与最优解差异也较小。从另一个角度看，在实际结果中等待时间相比于运输时间较短，因此在先优化运输时间的前提下优化等待时间得出的解是一个较优的解。

最终得到各发射装置的总实际行驶时间和为 7218.7 分钟，总等待时间和为 674.4 分钟，总暴露时间和为 7893.2 分钟。各发射装置的规划路径、实际行驶时间以及暴露时间如表 1 所示，其中由于存在不能超车的限制，导致实际行驶时间比单纯考虑最短路径的理论行驶时间要长一些。

表 1 问题一结果（时间单位：分钟）

发射装置	规划路径	实际行驶时间	等待时间	暴露时间
A01	<b>D1-&gt;J10-&gt;J45-&gt;J42-&gt;J40-&gt;F37-&gt;J40-&gt;J39-&gt;J16-&gt;Z6-&gt;J25-&gt;F10</b>	288.0	81.0	369.1
A02	<b>D1-&gt;J10-&gt;J45-&gt;J42-&gt;J40-&gt;F38-&gt;J40-&gt;J39-&gt;J16-&gt;Z6-&gt;J25-&gt;F11</b>	280.6	86.2	366.8
A03	<b>D1-&gt;J10-&gt;J45-&gt;J42-&gt;J40-&gt;F39-&gt;J40-&gt;J39-&gt;J16-&gt;Z6-&gt;J26-&gt;J24-&gt;F8</b>	299.8	69.5	369.2
A04	<b>D2-&gt;J12-&gt;J13-&gt;J14-&gt;J35-&gt;F28-&gt;J35-&gt;J34-&gt;J5-&gt;J4-&gt;Z1-&gt;J50-&gt;J53-&gt;J56-&gt;F52</b>	295.0	40.9	335.8
A05	<b>D2-&gt;J12-&gt;J13-&gt;J21-&gt;J22-&gt;F6-&gt;J22-&gt;J23-&gt;J25-&gt;Z6-&gt;J26-&gt;J24-&gt;F9</b>	276.1	71.5	347.6
A06	<b>D2-&gt;J12-&gt;J13-&gt;J21-&gt;J22-&gt;J23-&gt;F7-&gt;J23-&gt;J25-&gt;Z6-&gt;J28-&gt;J30-&gt;F21</b>	288.4	72.4	360.8
B01	<b>D1-&gt;J9-&gt;J8-&gt;J7-&gt;Z4-&gt;J37-&gt;F31-&gt;J37-&gt;Z4-&gt;J37-&gt;J15-&gt;J14-&gt;J35-&gt;F27</b>	320.4	7.9	328.3
B02	<b>D1-&gt;J9-&gt;J8-&gt;J7-&gt;J6-&gt;J36-&gt;F30-&gt;J36-&gt;J6-&gt;J51-&gt;Z2-&gt;J51-&gt;J6-&gt;J36-&gt;F29</b>	313.4	0.0	313.4
B03	<b>D1-&gt;J10-&gt;J45-&gt;J42-&gt;J40-&gt;J39-&gt;F36-&gt;J39-&gt;J16-&gt;Z6-&gt;J26-&gt;F12</b>	339.7	0.0	339.7
B04	<b>D2-&gt;J12-&gt;J13-&gt;J21-&gt;F1-&gt;J21-&gt;J14-&gt;J15-&gt;J16-&gt;Z6-&gt;J26-&gt;F13</b>	327.6	22.0	349.6
B05	<b>D2-&gt;J12-&gt;J13-&gt;J21-&gt;F2-&gt;J21-&gt;J14-&gt;J15-&gt;J16-&gt;Z6-&gt;J28-&gt;F18</b>	339.1	11.7	350.8
B06	<b>D2-&gt;J12-&gt;J13-&gt;J21-&gt;F3-&gt;J21-&gt;J14-&gt;J15-&gt;J16-&gt;Z6-&gt;J28-&gt;F19</b>	330.4	20.2	350.6
C01	<b>D1-&gt;Z3-&gt;J61-&gt;F58-&gt;J61-&gt;Z3-&gt;J61-&gt;F57</b>	296.8	0.0	296.8
C02	<b>D1-&gt;J9-&gt;J8-&gt;J7-&gt;Z4-&gt;J38-&gt;F34-&gt;J38-&gt;Z4-&gt;J37-&gt;F32</b>	261.8	0.0	261.8
C03	<b>D1-&gt;J9-&gt;J8-&gt;J7-&gt;Z4-&gt;J38-&gt;F35-&gt;J38-&gt;Z4-&gt;J37-&gt;F33</b>	272.3	72.4	344.7
C04	<b>D1-&gt;J11-&gt;J46-&gt;F43-&gt;J46-&gt;J44-&gt;Z5-&gt;J41-&gt;F40</b>	239.1	17.4	256.5
C05	<b>D1-&gt;J11-&gt;J46-&gt;J44-&gt;F41-&gt;J44-&gt;Z5-&gt;</b>	345.6	5.8	351.4



	J41->J18->J19->J31->F23			
C06	D1->J11->J46->J44->F42->J44->Z5-> J41->J18->J29->F20	300.8	0.0	300.8
C07	D2->J3->J2->J47->F44->J47->J48->Z1-> J4->J5->J34->F26	334.6	19.3	354.0
C08	D2->J3->J2->J47->F45->J47->J48->Z1-> J4->J5->J49->F48	332.8	24.7	357.5
C09	D2->J3->J48->F46->J48->Z1->J4->J5-> J49->F49	289.6	42.3	331.9
C10	D2->J3->J48->F47->J48->Z1->J50->F50	236.7	0.0	236.7
C11	D2->J32->F24->J32->J33->J4->Z1-> J50->J53->F51	281.0	9.3	290.3
C12	D2->J32->F25->J33->J4->Z1->J50-> J53->J59->F54	329.0	0.0	329.0

从表 1 的结果中可以看到，C 类发射装置的路径普遍比较简单，这也与 C 类发射装置速度较慢相吻合，路径简单能有效减少其他发射装置的等待时间，使总暴露时间降低。同时可以看到，从同一待机点出发的同类发射装置，路径规划大体相同，在实际作战部署时这种规划方案各发射装置不够分散，容易被敌方进行针对性打击，存在着优化空间，这方面的考虑在问题五中体现。此外也可以统计第一波次发射阶段，路线没有会车情形出现，同时任意一条边至多可能有两种车型通过，也符合之前的假设。

从另一个角度进行分析，对各发射装置经过的重要节点进行整理，得到表 2 如下所示。

表 2 问题一重要节点

发射装置	待机点 D	第一波次 发射点 F <sub>1</sub>	转载点 Z	第二波次 发射点 F <sub>2</sub>	总共经过 节点数
A01	D1	F37	Z6	F10	12
A02	D1	F38	Z6	F11	12
A03	D1	F39	Z6	F8	13
A04	D2	F28	Z1	F52	15
A05	D2	F6	Z6	F9	13
A06	D2	F7	Z6	F21	13
B01	D1	F31	Z4	F27	14
B02	D1	F30	Z2	F29	15
B03	D1	F36	Z6	F12	12
B04	D2	F1	Z6	F13	12
B05	D2	F2	Z6	F18	12
B06	D2	F3	Z6	F19	12
C01	D1	F58	Z3	F57	8
C02	D1	F34	Z4	F32	11
C03	D1	F35	Z4	F33	11
C04	D1	F43	Z5	F40	9

C05	D1	F41	Z5	F23	12
C06	D1	F42	Z5	F20	11
C07	D2	F44	Z1	F26	12
C08	D2	F45	Z1	F48	12
C09	D2	F46	Z1	F49	10
C10	D2	F47	Z1	F50	8
C11	D2	F24	Z1	F51	10
C12	D2	F25	Z1	F54	10

从表 2 可以看出，在转载阶段，转载点 Z1 被用到了 7 次，转载点 Z6 被用到了 9 次。由于转载点有着对于转载时间（耗时 10 分钟）和隐蔽数量的限制，过多发射装置到同一个转载点进行转载，有可能导致等待时间增加，从而增加暴露时间。从实际的最优解来看，总等待时间和为 674.4 分钟，平均每台发射装置为 28.1 分钟，可以看到即使出现了某些转载点利用次数过多的情况，算法仍然可能找出一个较优的解。

## 5. 问题二模型建立与求解

### 5.1 问题分析与模型建立

问题二在道路节点 J25、J34、J36、J42、J49 附近临时增设 2 个转载地域，使得完成两个波次发射任务的整体暴露时间最短。

这个问题相比于问题一，目标函数没有改变，阶段 1 也没有变化，只是在阶段 2 的转载点（Z）增多，相当于在阶段 2 把 J25、J34、J36、J42、J49 这五个点归类到转载点中，同时限制这五个点最多只可以使用两个作为转载点。

在五个点中选取任意两个点，一共只有  $C_5^2 = 10$  种情况，因此不妨保持问题一中的模型不变，直接对转载点进行扩充，对这 10 种情况分别优化求解，再比较得到的 10 组解，找到最合适的两个临时增设的转载点。

### 5.2 问题求解

利用问题一的模型，得到问题二的结果如表 3 所示，总暴露时间和最短的一组解在表中加粗表示。

表 3 问题二结果（时间单位：分钟）

新增的转载点	实际行驶时间（不考虑等待时间）	总暴露时间和（考虑等待时间）
<b>J25, J34</b>	<b>6429.3</b>	<b>6847.9</b>
J25, J36	6553.1	7253.1
J25, J42	6714.3	7491.5
J25, J49	6768.9	7183.8
J34, J36	6984.4	7325.8
J34, J42	6681.0	7414.1

J34, J49	6617.4	7328.3
J36, J42	6891.3	7320.0
J36, J49	6969.0	7760.5
J42, J49	6883.0	7279.1

可以看到，当选取 J25 和 J34 作为临时增设的转载点时，总暴露时间最短，为 6847.9 分钟。该组结果相对于问题一的最短暴露时间，缩短了 1045.3 分钟。此时的规划路径如表 4 所示。

表 4 选取 J25 和 J34 作为临时增设的转载点时的规划路径

发射装置	规划路径
A01	D1->J10->J45->J42->J40->F37->J40->J39->J16->Z6->J26->F13
A02	D1->J10->J45->J42->J40->F38->J40->J39->J16->Z6->J28->F18
A03	D1->J10->J45->J42->J40->F39->J40->J39->J16->Z6->J28->F19
A04	D2->J3->J2->J47->F45->J47->J48->Z1->J50->J53->J59->F54
A05	D2->J12->J13->J21->F2->J21->J22->J23-> <b>J25</b> ->J24->F8
A06	D2->J12->J13->J21->J22->F5->J22->J23-> <b>J25</b> ->J23->J22->F4
B01	D1->J9->J8->J7->J6->J36->F30->J36-> <b>J34</b> ->J5->J49->F48
B02	D1->J10->J45->J42->J40->J39->F36->J39->J16->Z6->J26->F12
B03	D1->J11->J46->J44->F41->J44->Z5->J41->J18->J19->J31->F23
B04	D2->J3->J2->J47->F44->J47->J48->Z1->J4->J5->J49->F49
B05	D2->J12->J13->J21->F1->J21->J22->J23-> <b>J25</b> ->J24->F9
B06	D2->J12->J13->J21->F3->J21->J22->J23-> <b>J25</b> ->J23->F7
C01	D1->Z3->J61->F58->J61->Z3->J61->F57
C02	D1->J9->J8->J7->Z4->J38->F34->J38->Z4->J37->F32
C03	D1->J9->J8->J7->Z4->J38->F35->J38->Z4->J37->F33
C04	D1->J9->J8->J7->Z4->J37->F31->J37->J15-> <b>J25</b> ->F10
C05	D1->J11->J46->F43->J46->J44->Z5->J41->F40
C06	D1->J11->J46->J44->F42->J44->Z5->J41->J18->J29->F20
C07	D2->J3->J48->F46->J48->Z1->J50->F50
C08	D2->J3->J48->F47->J48->Z1->J50->J53->F51
C09	D2->J12->J13->J21->J22->F6->J22->J23-> <b>J25</b> ->F11
C10	D2->J32->F24->J32->J33-> <b>J34</b> ->J35->F27
C11	D2->J32->J33->F25->J33-> <b>J34</b> ->J35->F28
C12	D2->J32->J33->J34->F26-> <b>J34</b> ->J36->F29

可以看到，把 J25 用作转载点的发射装置共有 6 台，把 J34 作为转载点的发射装置共有 4 台；与此同时，在 Z1 和 Z6 进行转载的发射装置都减少为 4 台。上述现象说明了增设转载点可以很大程度上减少转载的等待时间，从而减少暴露时间。

问题二的时间安排表列在附录中。

## 6. 问题三模型建立与求解

### 6.1 问题分析

问题三提供了新增 3 台隐蔽待机的 C 类发射装置用于第二波次发射，隐蔽待机的节点可从 J04、J06、J08、J13、J14、J15 中选取，每个隐蔽待机点，至多容纳 2 台发射装置。待第一波次导弹发射后，这 3 台发射装置机动至发射点位参与第二波次的齐射，同时被替代的 3 台 C 类发射装置完成第一波次齐射后择机返回待机地域（返回时间不计入暴露时间）。转载地域仍为事先布设的 6 个的前提下，选择合适的隐蔽待机点，使得完成两个波次发射任务的整体暴露时间最短。

### 6.2 模型建立

#### 6.2.1 仅考虑最短运输时间的模型

按照问题一建立的多阶段规划模型，首先计算最优路线。设  $D$  为隐蔽待机的节点集合，即  $D=\{J04、J06、J08、J13、J14、J15\}$ 。用  $n_i$  表示集合  $D$  中第  $i$  个节点隐蔽待机的 C 类发射装置的数量，于是有如下两个约束存在：

约束 20

$$\sum_{i \in D} n_i = 3$$

约束 21

$$n_i \leq 2, \forall i \in D$$

约束 4 中对 C 类发射装置的约束需要做出改动，如下所示：

约束 22

$$\sum_{j \in V} (a_{ji}^{(1)} - a_{ij}^{(2)}) = 0, \forall i \in F$$

$$\sum_{j \in V} (b_{ji}^{(1)} - b_{ij}^{(2)}) = 0, \forall i \in F$$

$$\sum_{i \in F} \sum_{j \in V} c_{ij}^{(2)} = 9$$

$$\sum_{j \in V} (c_{ij}^{(2)} - c_{ji}^{(1)}) \leq 0, \forall i \in F$$

约束 22 第 3 个等式表明，在第一波次发射结束后，从所有发射点离开的 C 型发射装置为 9 台。由于被替代的 3 台 C 类发射装置择机返回待机区域的时间不计入暴露时间，所以不会对优化目标函数有影响。第 4 个不等式表示，第一波次发射结束后离开发射点的 C 车数不大于进入在第一阶段进入发射点的 C 车数，用以描述替代装置。

对于新增 C 类发射装置，用  $c_{ij}^{(4)}$  表示从 i 到 j 有向路上行驶过的新增的 C 类发射装置的数量，于是应满足从隐蔽待机的节点新增的 C 类发射装置的数量约束，即

**约束 24**

$$\sum_{j \in V} (c_{ij}^{(4)} - c_{ji}^{(4)}) = n_i, \forall i \in D$$

同时还要满足在途径节点，新增的 C 类发射装置如果到达，则一定会全部离开，即

**约束 25**

$$\sum_{j \in V} c_{ji}^{(4)} - \sum_{j \in V} c_{ij}^{(4)} = 0, i \in V - D - F$$

由于前往转载点的 C 类发射装置减少了，故约束 6 应改为如下约束：

**约束 26**

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in Z} a_{ij}^{(2)} = 6$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in Z} b_{ij}^{(2)} = 6$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in Z} c_{ij}^{(2)} = 9$$

同理，在第二波次的发射点，同样要把约束 9 中有关 C 类发射装置的约束做一些改动，如下所示：

**约束 27**

$$\sum_{j \in V} (a_{ji}^{(3)} + b_{ji}^{(3)} + c_{ji}^{(3)}) + \sum_{j \in V} c_{ji}^{(4)} = x_i^{(2)}, i \in F$$

$$x_i^{(2)} \leq 1, \forall i \in F$$

对于问题一的模型中没有修改的约束，仍然要满足。

### 6.2.2 考虑等待时间的模型

与 4.2.2.2 的约束条件相同，除了将约束 19 修改为

$$t_{1_{2n-2}} = t_{2_{2n-2}} = \dots = t_{24_{2n-2}} = t_i, \forall i \in D$$

## 6.3 问题求解

利用 matlab 的 fmincon 函数求解上述非线性约束问题得到最终结果为在 J13 新增一台隐蔽待机的 C 类发射装置，在 J14 新增两台隐蔽待机的 C 类发射装置，总暴露时间为总暴露时间: 7235.3 分钟。最终各发射装置的规划路径如表 5 所示。

表 5 问题三路线规划结果（时间单位：分钟）

发射装置	规划路径
A01	<b>D1-&gt;J10-&gt;J45-&gt;J42-&gt;J40-&gt;F37-&gt;J40-&gt;J39-&gt;J16-&gt;Z6-&gt;J25-&gt;F10</b>
A02	<b>D1-&gt;J10-&gt;J45-&gt;J42-&gt;J40-&gt;F38-&gt;J40-&gt;J39-&gt;J16-&gt;Z6-&gt;J26-&gt;J24-&gt;F8</b>
A03	<b>D1-&gt;J10-&gt;J45-&gt;J42-&gt;J40-&gt;F39-&gt;J40-&gt;J39-&gt;J16-&gt;Z6-&gt;J26-&gt;J24-&gt;F9</b>
A04	<b>D2-&gt;J12-&gt;J13-&gt;J21-&gt;J22-&gt;F4-&gt;J22-&gt;J23-&gt;J25-&gt;Z6-&gt;J28-&gt;F18</b>
A05	<b>D2-&gt;J12-&gt;J13-&gt;J21-&gt;J22-&gt;J23-&gt;F7-&gt;J23-&gt;J25-&gt;Z6-&gt;J28-&gt;F19</b>
A06	<b>D2-&gt;J32-&gt;J33-&gt;J34-&gt;F26-&gt;J34-&gt;J5-&gt;J4-&gt;Z1-&gt;J50-&gt;J53-&gt;J56-&gt;F52</b>
B01	<b>D1-&gt;J9-&gt;J8-&gt;J7-&gt;Z4-&gt;J37-&gt;F31-&gt;J37-&gt;Z4-&gt;J37-&gt;J15-&gt;J25-&gt;F11</b>
B02	<b>D1-&gt;J9-&gt;J8-&gt;J7-&gt;J6-&gt;J36-&gt;F30-&gt;J36-&gt;J6-&gt;J51-&gt;Z2-&gt;J51-&gt;J6-&gt;J36-&gt;F29</b>
B03	<b>D1-&gt;J10-&gt;J45-&gt;J42-&gt;J40-&gt;J39-&gt;F36-&gt;J39-&gt;J16-&gt;Z6-&gt;J26-&gt;F12</b>
B04	<b>D2-&gt;J3-&gt;J2-&gt;J47-&gt;F44-&gt;J47-&gt;J48-&gt;Z1-&gt;J4-&gt;J5-&gt;J49-&gt;F48</b>
B05	<b>D2-&gt;J3-&gt;J2-&gt;J47-&gt;F45-&gt;J47-&gt;J48-&gt;Z1-&gt;J50-&gt;J53-&gt;J59-&gt;F54</b>
B06	<b>D2-&gt;J12-&gt;J13-&gt;J21-&gt;J22-&gt;F6-&gt;J22-&gt;J23-&gt;J25-&gt;Z6-&gt;J26-&gt;F13</b>
C01	<b>D1-&gt;Z3-&gt;J61-&gt;F58-&gt;J61-&gt;Z3-&gt;J61-&gt;F57</b>
C02	<b>D1-&gt;J9-&gt;J8-&gt;J7-&gt;Z4-&gt;J38-&gt;F34-&gt;J38-&gt;Z4-&gt;J37-&gt;F32</b>
C03	<b>D1-&gt;J9-&gt;J8-&gt;J7-&gt;Z4-&gt;J38-&gt;F35-&gt;J38-&gt;Z4-&gt;J37-&gt;F33</b>
C04	<b>D1-&gt;J11-&gt;J46-&gt;F43-&gt;J46-&gt;J44-&gt;Z5-&gt;J41-&gt;F40</b>
C05	<b>D1-&gt;J11-&gt;J46-&gt;J44-&gt;F41-&gt;J44-&gt;Z5-&gt;J41-&gt;J18-&gt;J19-&gt;J31-&gt;F23</b>
C06	<b>D1-&gt;J11-&gt;J46-&gt;J44-&gt;F42-&gt;J44-&gt;Z5-&gt;J41-&gt;J18-&gt;J29-&gt;F20</b>
C07	<b>D2-&gt;J3-&gt;J48-&gt;F46-&gt;J48-&gt;Z1-&gt;J4-&gt;J5-&gt;J49-&gt;F49</b>
C08	<b>D2-&gt;J3-&gt;J48-&gt;F47-&gt;J48-&gt;Z1-&gt;J50-&gt;F50</b>
C09	<b>D2-&gt;J12-&gt;J13-&gt;J21-&gt;F2</b>
C10	<b>D2-&gt;J12-&gt;J13-&gt;J21-&gt;F3</b>
C11	<b>D2-&gt;J32-&gt;F24</b>
C12	<b>D2-&gt;J32-&gt;-&gt;J33-&gt;F25-&gt;J33-&gt;J4-&gt;Z1-&gt;J50-&gt;J53-&gt;F51</b>
新增 C1	J13->J21->F2
新增 C2	J14->J35->F27
新增 C3	J14->J35->F28

从表 5 可以看出，被替换的 3 台 C 类发射装置分别为 C09、C10 和 C11。同时可以看出最终的规划路径与问题一的规划路径基本相同，这是由于 C 类发射装置速度较慢，仅仅替换掉 3 台并不足以弥补其对整体时间的消耗，仅仅是通过去掉了这三台发射装置的转载过程从而减少了等待时间，导致暴露时间减少。

## 7. 问题四模型建立与求解

## 7.1 问题分析

问题四要求考虑攻防双方的对抗博弈，建立合理的评价指标，量化分析该路网最可能受到敌方攻击破坏的 3 个道路节点。

可以考虑如下三个评价指标：道路节点的度，即有多少条路与该节点相连；是否为主干道路上的节点；经过该节点的最短路径个数，即对于图中任意两点之间的最短路径有多少条路径经过该节点。

对于这三个评价指标，可以根据一定的权重分配，确定每个节点的重要程度。选取其中重要程度最高的 10 个节点，删除任意三个，判断最短暴露时间是否会大幅增加。

## 7.2 模型建立

### 7.2.1 节点重要程度的评估

节点的度表示与该节点相连的路的数量。在这个拓扑图中，最小的度为 1，最大的度为 6。下面对度进行归一化处理，记节点 X 进行归一化前的度为  $d_X$ ，进行归一化之后的度为  $d'_X$ ，则有  $d'_X =$

$$\frac{d_X - 1}{6 - 1}。$$

用  $type_X$  表示 X 节点 X 是否为主干道路上的节点，0 表示 X 不是主干道路上的节点，1 表示 X 是主干道路上的节点。由于  $type_X$  就是在 0 和 1 之间，因此不需要进行归一化。

用  $num_X$  表示归一化前的经过节点 X 的最短路径个数，用  $num'_X$  表示归一化后的经过节点 X 的最短路径个数，则有  $num'_X =$

$$\frac{num_X - \min\{num_V\}}{\max\{num_V\} - \min\{num_V\}}，其中 V 表示所有节点的集合。$$

记与这三个评价指标相对应的权重分别为  $w_1$ ， $w_2$  和  $w_3$  ( $0 \leq w_1, w_2, w_3 \leq 1$  且  $w_1 + w_2 + w_3 = 1$ )，节点 X 的重要程度用  $S_X$  表示，于是可以得到

$$S_X = w_1 \cdot d'_X + w_2 \cdot type_X + w_3 \cdot num'_X$$

### 7.2.2 对三个道路节点的确定

由于要考虑攻防双方的对抗博弈，因此三个道路节点还是要根据战略部署的暴露时间来进行确定。可以把所有道路节点按照 7.1.1 中算出的重要程度进行排序，选出重要程度最高的 10 个道路节点，在其中删掉 3 个节点，共有  $C_{10}^3 = 120$  种可能结果，根据这些结果对问题一中的模型进行修改，比较哪一种结果会使最短暴露时间和增加最多，即可确定最有可能受到敌方攻击破坏的三个道路节点。

## 7.3 问题求解

这里使用 Floyd 多源最短路径算法计算所有节点之间的最短路径并统计各个节点经过的最短路径的个数。

表 6 经过各节点的最短路径个数

节点	最短路径 个数	节点	最短路径 个数	节点	最短路径 个数
J15	2436	J23	529	F22	100
J14	1884	J56	528	F23	99
J16	1474	J04	513	F24	98

J07	1462	J39	476	F25	97
Z04	1428	Z01	475	F26	96
J37	1387	J33	450	F27	95
J18	1238	J38	434	F28	94
J53	1226	J19	390	F29	93
J34	1197	J62	351	F30	92
J24	1105	J58	347	F31	91
J21	1102	J47	326	F32	90
J35	1092	J51	307	F33	89
J45	1079	J30	287	F34	88
Z02	1026	J60	266	F35	87
J09	1010	J61	256	F36	86
J06	1007	D2	255	F37	85
J44	1007	J46	212	F38	84
J05	988	J43	207	F39	83
J55	971	J02	194	F40	82
Z03	957	J31	194	F41	81
J52	957	D1	159	F42	80
J54	944	F01	121	F43	79
J32	907	F02	120	J11	79
J13	901	F03	119	F44	78
J29	900	F04	118	F45	77
J25	893	J10	118	F46	76
J26	890	F05	117	F47	75
J50	858	F06	116	F48	74
J22	793	F07	115	F49	73
J08	767	F08	114	F50	72
J17	757	F09	113	F51	71
J28	730	F10	112	F52	70
Z06	726	F11	111	F53	69
Z05	705	F12	110	F54	68
J41	698	F13	109	F55	67
J48	681	F14	108	F56	66
J49	630	F15	107	F57	65
J36	594	F16	106	F58	64
J59	578	F17	105	F59	63
J03	571	F18	104	F60	62
J57	552	F19	103	J01	61
J42	549	F20	102	J12	50
J27	541	F21	101	J20	42
J40	538				

选取权重值 $w_1$ ， $w_2$ 和 $w_3$ 分别为 0.2，0.3 和 0.5，便可得到重要程度最高的 10 个道路节点如表 7 所示。



表 7 各节点重要程度（前 10 位）

道路节点	重要程度	道路节点	重要程度
J15	0.91138	J9	0.65869
J14	0.79808	J6	0.61807
J16	0.71392	J5	0.61417
J7	0.71146	J3	0.60858
J18	0.66548	J13	0.59631

对于如上 10 个道路节点，利用节点删除法任意删掉三个，套用问题一中的模型进行最短暴露时间和的求解，求出使最短暴露时间增加最多的三个节点，其在攻防博弈中更为重要，实验结果选取最短暴露时间和增加最多的三组，罗列如表 8 所示。

表 8 问题四结果（部分）

删除节点	增加的最短暴露时间和（分钟）
J7 J6 J13	2217.9213
J9 J6 J13	2217.9213
J16 J5 J13	1849.9359

从表中可以看出，这三个节点在我们的评价标准下重要程度都不是最高的几个（见表 7），但是最短暴露时间却增加得最多。

表 9 三种情况的详细数据（时间单位：分钟）

删除节点	理论运输时间	实际运输时间	等待时间	总暴露时间
J7 J6 J13	7634.0	7635.1	2484.3	10110.9
J9 J6 J13	7634.0	7635.1	2484.3	10110.9
J16 J5 J13	7632.1	7676.2	2770.4	9742.9

表 9 三种情况的详细数据（时间单位：分钟）列出了这三种情况下的详细数据，从这些数据可以看出，这三种情况下理论运输时间和实际运输时间基本一致，说明没有出现由于不能超车导致的时间增加，但是可以看到这三种情况下的等待时间都非常长，同时可以看到这三种情况下都删去了 J13 节点。结合作战区域道路示意图（图 1 作战区域道路示意图）来看，J13 节点是从待机点 D2 出发，前往发射点 J1~J16 的必经节点，一旦删去，则会导致从 D2 出发要绕很远的路才能到达发射点 J1~J16。上述事实说明 J13 节点属于枢纽节点，重要性很高。同样地，节点 J5、J6、J7、J9 也有枢纽的作用，因此删去之后会导致暴露时间急剧增加。

从另一个角度考虑，之前在对节点重要程度进行评判时，最终的结果并不能够反应节点是否有枢纽作用，因此这一评判标准还有待改良。

## 8. 问题五模型建立与求解

### 8.1 问题分析

问题五要求采用适当分散机动的策略，同时还要缩短单台发射装置的最长暴露时间。

### 8.2 模型建立

适当分散机动是指尽量少出现一条道路同时由多台发射装置通过，从问题一到问题四的求解过程中，常常会出现同种类型的发射装置在同

时从某一条路线上通过，这是在求最少暴露时间下的自然结果。但是这种运输方式在遭受打击时可能蒙受巨大损失。同时这种运输方式往往高度依赖于单一转载节点，一旦转载节点或其附近道路遭受打击，会严重阻碍下一波次的发射安排。针对这一指标，我们比较两个模型。

第一种模型是在基于规划路线模型的目标函数上加上平方和的正则化惩罚项，即将目标函数 1 改为：

$$\min \sum_{\substack{m=1 \\ (i,j) \in E}}^3 t_{ij}^{(m)} + \lambda \sum_{(i,j) \in E} (s_{ij}^{(m)})^2$$

其中  $s_{ij}^{(m)} = a_{ij}^{(m)} + b_{ij}^{(m)} + c_{ij}^{(m)}$ ，表示在道路  $ij$  上通过的发射装置总数。惩罚项的值随着道路流量的增长而快速增大。若某些道路有大量发射装置通过，这个惩罚项会对目标函数的值造成较大影响，从而使得  $s_{ij}^{(m)}$  尽量趋于均匀。 $\lambda$  用以控制惩罚程度，当  $\lambda = 0$  时，无惩罚项，模型与原来相同。当  $\lambda \rightarrow \infty$  时， $s_{ij}^{(m)}$  的微小变化会导致整个目标函数急剧增大从而  $s_{ij}^{(m)}$  趋于 0。这个模型很容易与问题一建立的模型联系起来。

第二种模型利用通过的发射装置数量的信息熵来描述分散程度。

$$I = - \sum_{(i,j) \in E} s_{ij}^{(m)} \log(s_{ij}^{(m)})$$

由信息熵的定义可知，其值越大，各  $s_{ij}^{(m)}$  值越均匀。目标函数是最大化  $I$ 。同样这个定义可以很容易与问题一建立模型联系起来，修改目标函数为：

$$\min \sum_{\substack{m=1 \\ (i,j) \in E}}^3 t_{ij}^{(m)} - \lambda I$$

容易看出这两个模型的差别在于  $x^2$  和  $x \log(x)$  阶数上的差别。缩短单台发射装置的最长暴露时间即为满足下述优化目标。

$$\min \max_i (t_{i_n} - t_{i_1})$$

可以利用本模型解出最优路线，然后用该目标函数替换原最小化总暴露时间的函数，函数求解可以使用 matlab 的 fminimax 函数。

### 8.3 问题求解

由于模型第一步是利用整数规划模型求解最优路径，而正则项和信息熵都与图的流量有关，一旦引入非线性评价指标，模型就基本无法求解。

而缩短单台发射装置的最长暴露时间的函数只与时间有关，可以整合至模型的非线性规划部分。

## 9. 模型评价及推广

模型将复杂问题尽量分解简化，每个子问题子阶段用相应方法求解，因此约束条件较简单且速度较快。此外，模型求出的最优解与理论最优解有一个不确定性上界 $T_{\text{等待时间}}$ ，且按照实际情况等待时间相比运行时间较小，从而保证了解的较优性。

但是非线性约束模型的求解依赖于初始值的选择，从而导致解的不确定性。随着问题更复杂，非线性约束更多，求解时间显著增长。

在问题四中，提出了一个量化节点重要程度的计算方法，但是比较之下发现这种方法计算出的结果并不能完全反映节点是否为枢纽，还有很大的改良空间。

## 10. 参考文献

- [1]杨萍, 刘卫东, 李明雨. 常规导弹战前运输任务优化模型[J]. 火力与指挥控制, 2007, 32(2):41-43.
- [2]董岳, 于永利, 张柳,等. 多波次火力进攻战斗中作战单元使用任务规划[J]. 系统工程与电子技术, 2011, 33(8):1778-1782.
- [3]王阳明, 赵利. 基于多车型多约束的动态车辆调度算法研究[J]. 计算机工程, 2016, 42(9):305-309.
- [4]谭跃进, 吴俊, 邓宏钟. 复杂网络中节点重要度评估的节点收缩方法[J]. 系统工程理论与实践, 2006, 26(11):79-83.

## 11. 附录

### 11.1 问题一规划后的时间安排表

A1:D1 60.9811->108.0789 J10 108.0789->138.8613 J45  
138.8613->165.3272 J42 165.3272->195.1415 J40 195.1415->211.2522 F37  
217.5322->233.643 J40 241.9709->262.2796 J39 263.3113->283.6637 J16  
285.6734->320.8997 Z6 336.6354->375.8499 J25 437.1092->458.4841 F10  
A2:D1 63.3644->110.4621 J10 110.4621->141.2445 J45  
141.2445->167.7104 J42 167.7104->197.5247 J40 197.5247->211.2522 F38  
215.9111->229.6386 J40 230.8321->251.1408 J39 252.1554->272.5079 J16  
273.2413->308.4675 Z6 322.8702->362.0847 J25 439.7699->458.4841 F11  
A3:D1 60.2264->107.3242 J10 107.3242->138.1066 J45  
138.1066->164.5725 J42 164.5725->194.3867 J40 194.3867->211.2522 F39  
217.9475->234.813 J40 248.4962->268.805 J39 273.3597->293.7122 J16  
297.9653->333.1916 Z6 350.9892->380.594 J26 410.4935->436.1407 J24  
442.9349->458.4841 F8  
A4:D2 97.3335->144.6235 J12 144.6235->164.6154 J13  
164.6154->178.6736 J14 178.6736->198.6736 J35 198.6736->211.2522 F28  
212.9613->225.54 J35 227.2165->247.2165 J34 249.0281->271.7339 J5  
273.214->291.1117 J4 292.3761->317.4272 Z1 329.4475->354.0329 J50  
376.0616->400.2093 J53 405.6523->441.23 J56 445.1508->458.4841 F52

A5:D2 81.5432->128.8332 J12 128.8332->148.825 J13  
148.825->175.6247 J21 175.6247->202.8195 J22 202.8195->211.2522 F6  
218.6082->227.0409 J22 243.7733->266.4792 J23 281.3643->304.6499 J25  
308.8543->348.0688 Z6 365.5385->395.1433 J26 414.0053->439.6525 J24  
446.1914->458.4841 F9

A6:D2 57.1157->104.4057 J12 104.4057->124.3975 J13  
124.3975->151.1972 J21 151.1972->178.392 J22 178.392->201.0978 J23  
201.0978->211.2522 F7 211.2522->221.4066 J23 221.4066->244.6922 J25  
244.6922->283.9067 Z6 309.2761->347.4803 J28 411.9857->439.4731 J30  
447.7345->458.4841 F21

B1:D1 39.8191->110.6899 J9 110.6899->127.8945 J8  
127.8945->147.5414 J7 147.5414->174.6466 Z4 174.6466->198.8903 J37  
198.8903->211.2522 F31 211.2522->223.6141 J37 223.6141->247.8577 Z4  
322.4458->346.6894 J37 349.5277->373.5888 J15 375.8049->412.8049 J14  
414.7853->440.4996 J35 442.3116->458.4841 F27

B2:D1 35.0887->105.9594 J9 105.9594->123.1641 J8  
123.1641->142.811 J7 142.811->169.7368 J6 169.7368->194.2816 J36  
194.2816->211.2522 F30 211.2522->228.2228 J36 228.2228->252.7676 J6  
252.7676->267.3138 J51 267.3138->287.3056 Z2 382.4307->402.4226 J51  
402.4226->416.9687 J6 416.9687->441.5136 J36 441.5136->458.4841 F29

B3:D1 0->56.3197 J10 56.3197->95.897 J45 95.897->129.9246 J42  
129.9246->168.2572 J40 168.2572->194.3684 J39 194.3684->211.2522 F36  
211.2522->228.1359 J39 228.1359->254.3034 J16 254.3034->299.5943 Z6  
403.5371->441.6004 J26 441.6004->458.4841 F12

B4:D2 82.158->138.7248 J12 138.7248->162.0486 J13  
162.0486->196.5053 J21 196.5053->211.2522 F1 216.9134->231.6603 J21  
235.8291->266.7339 J14 269.4791->306.4791 J15 310.4092->336.0217 J16  
338.7414->384.0323 Z6 398.7366->436.8 J26 436.8->458.4841 F13

B5:D2 82.258->138.8248 J12 138.8248->162.1486 J13  
162.1486->196.6053 J21 196.6053->211.2522 F2 214.3478->228.9947 J21  
230.58->261.4847 J14 262.8481->299.8481 J15 301.5693->327.1818 J16  
328.8703->374.1612 Z6 386.8772->435.9968 J28 436.1326->458.4841 F18

B6:D2 82.3587->138.9255 J12 138.9255->162.2493 J13  
162.2493->196.706 J21 196.706->211.2522 F3 211.4016->225.9478 J21  
226.0983->257.003 J14 257.1559->294.1559 J15 294.3122->319.9247 J16  
320.0837->365.3746 Z6 376.4135->425.5331 J28 444.6631->458.4841 F19

C1:D1 49.4293->138.6548 Z3 138.6548->191.1524 J61  
191.1524->211.2522 F58 211.2522->231.3519 J61 231.3519->283.8496 Z3  
381.2479->433.7455 J61 433.7455->458.4841 F57

C2:D1 17.9906->98.2029 J9 98.2029->118.8485 J8 118.8485->142.4248  
J7 142.4248->174.0475 Z4 174.0475->194.0475 J38 194.0475->211.2522  
F34 211.2522->228.4568 J38 228.4568->248.4568 Z4 412.3113->440.5956  
J37 440.5956->458.4841 F32

C3:D1 15.4975->95.7099 J9 95.7099->116.3554 J8 116.3554->139.9317  
J7 139.9317->171.5545 Z4 171.5545->191.5545 J38 191.5545->211.2522  
F35 221.2697->240.9674 J38 250.8789->270.8789 Z4 406.7905->435.0747  
J37 435.0747->458.4841 F33

C4:D1 91.2791->151.2224 J11 151.2224->194.1642 J46  
194.1642->211.2522 F43 215.8785->232.9665 J46 237.6553->286.8488 J44  
291.7652->320.4008 Z5 419.4107->438.3844 J41 438.3844->458.4841 F40

C5:D1 33.8754->93.8187 J11 93.8187->136.7605 J46  
136.7605->185.954 J44 185.954->211.2522 F41 211.2522->236.5504 J44  
236.5504->265.1861 Z5 322.79->341.7637 J41 343.4256->365.7863 J18  
367.4876->394.6405 J19 396.295->438.8156 J31 440.3734->458.4841 F23

C6:D1 41.0629->101.0061 J11 101.0061->143.9479 J46  
143.9479->193.1414 J44 193.1414->211.2522 F42 211.2522->229.363 J44  
229.363->257.9986 Z5 359.8111->378.7847 J41 378.7847->401.1454 J18  
401.1454->439.6162 J29 439.6162->458.4841 F20

C7:D2 79.224->136.2353 J3 136.2353->171.1798 J2  
171.1798->189.6189 J47 189.6189->211.2522 F44 216.0764->237.7097 J47  
241.3422->273.5912 J48 279.2298->326.0913 Z1 339.9009->377.4775 J4  
378.1518->403.2086 J5 403.8625->437.9212 J34 438.4841->458.4841 F26

C8:D2 75.7974->132.8086 J3 132.8086->167.7532 J2  
167.7532->186.1923 J47 186.1923->211.2522 F45 217.9478->243.0078 J47  
249.9944->282.2434 J48 288.6891->335.5506 Z1 350.2855->387.8621 J4  
387.9424->412.9991 J5 413.0793->435.0793 J49 435.1603->458.4841 F48

C9:D2 89.2416->146.2528 J3 146.2528->182.9679 J48  
182.9679->211.2522 F46 211.2522->239.5365 J48 239.5365->286.398 Z1  
308.9237->346.5003 J4 379.7437->404.8004 J5 410.1423->432.1423 J49  
435.8567->458.4841 F49

C10:D2 93.5258->150.5371 J3 150.5371->187.2522 J48  
187.2522->211.2522 F47 211.2522->235.2522 J48 235.2522->282.1137 Z1  
395.5292->432.4073 J50 432.4073->458.4841 F50

C11:D2 140.6288->192.8131 J32 192.8131->211.2522 F24  
213.9411->232.3802 J32 234.9976->268.9976 J33 271.1558->310.8547 J4  
311.7613->349.3379 Z1 363.0237->399.9019 J50 399.9019->436.1235 J53  
436.1235->458.4841 F51

C12:D2 104.6718->156.8561 J32 156.8561->190.8561 J33  
190.8561->211.2522 F25 211.2522->231.6483 J33 231.6483->271.3471 J4  
271.3471->308.9237 Z1 318.9237->355.8019 J50 355.8019->392.0234 J53  
392.0234->434.071 J59 434.071->458.4841 F54

## 11.2 问题二规划后的时间安排表

A1:D1 60.9811->107.5241 J10 107.5241->138.3065 J45  
138.3065->164.7724 J42 164.7724->194.5867 J40 194.5867->210.6974 F37  
216.4589->232.5696 J40 236.9514->257.2599 J39 260.484->280.8363 J16  
284.3586->319.5847 Z6 368.2732->397.8296 J26 397.777->414.2779 F13

A2:D1 63.3644->109.9074 J10 109.9074->140.6898 J45  
 140.6898->167.1557 J42 167.1557->196.9699 J40 196.9699->210.6974 F38  
 210.7991->224.5186 J40 224.6051->244.8959 J39 244.9758->265.3071 J16  
 265.385->300.5921 Z6 336.0155->379.8589 J28 397.1922->414.2754 F18  
 A3:D1 60.2264->106.7694 J10 106.7694->137.5518 J45  
 137.5518->164.0177 J42 164.0177->193.8319 J40 193.8319->210.6974 F39  
 216.1927->233.0581 J40 238.781->259.0896 J39 265.7604->286.1128 J16  
 293.5467->328.7728 Z6 366.1367->404.1271 J28 403.9526->414.2802 F19  
 A4:D2 114.3446->156.7377 J3 156.7377->181.6981 J2  
 181.6981->193.9908 J47 193.9908->210.6974 F45 210.7836->227.4821 J47  
 227.5526->249.0296 J48 249.0748->280.2207 Z1 312.8249->340.266 J50  
 343.2466->367.3885 J53 368.9982->396.9926 J59 398.3478->414.2773 F54  
 A5:D2 105.7787->152.5139 J12 152.5139->172.5057 J13  
 172.5057->199.3054 J21 199.3054->210.6974 F2 216.04->227.4319 J21  
 231.1086->258.3031 J22 261.2213->283.9264 J23 287.1835->310.4656 J25  
 341.8339->376.8465 J24 399.0275->414.2754 F8  
 A6:D2 76.2484->122.9836 J12 122.9836->142.9755 J13  
 142.9755->169.7751 J21 169.7751->196.9699 J22 196.9699->210.6974 F5  
 210.7989->224.5183 J22 224.6043->247.2912 J23 247.3704->270.6377 J25  
 323.4723->352.6361 J23 372.4131->395.1152 J22 400.8576->414.2758 F4  
 B7:D1 35.0887->105.4047 J9 105.4047->122.6093 J8  
 122.6093->142.2562 J7 142.2562->169.182 J6 169.182->193.7269 J36  
 193.7269->210.6974 F30 210.7985->227.7605 J36 227.846->271.4689 J34  
 336.3905->369.1224 J5 373.6848->392.5231 J49 394.6146->414.2766 F48  
 B8:D1 0->55.7649 J10 55.7649->95.3422 J45 95.3422->129.3698 J42  
 129.3698->167.7024 J40 167.7024->193.8137 J39 193.8137->210.6974 F36  
 210.7976->227.6732 J39 227.7582->253.907 J16 253.9853->299.2569 Z6  
 350.201->391.9227 J26 397.6931->414.2754 F12  
 B9:D1 57.0976->110.0401 J11 110.0401->146.8474 J46  
 146.8474->189.0132 J44 189.0132->210.6974 F41 210.7981->232.4744 J44  
 232.5612->257.0919 Z5 304.1911->320.7261 J41 320.8795->340.0376 J18  
 340.1253->362.733 J19 362.8013->399.187 J31 399.1206->414.278 F23  
 B10:D2 96.7999->147.2292 J3 147.2292->176.3496 J2  
 176.3496->192.1546 J47 192.1546->210.6974 F44 212.6777->231.2204 J47  
 233.3855->261.0272 J48 263.6526->303.8195 Z1 324.1721->355.9485 J4  
 355.7623->376.5233 J5 376.5437->395.334 J49 395.2494->414.278 F49  
 B11:D2 82.158->138.17 J12 138.17->161.4939 J13 161.4939->195.9506  
 J21 195.9506->210.6974 F1 214.7005->229.4473 J21 233.3151->268.2796  
 J22 272.5951->301.7883 J23 308.6238->338.5625 J25 363.3053->399.827  
 J24 399.0547->414.2859 F9  
 B12:D2 82.3587->138.3707 J12 138.3707->161.6945 J13  
 161.6945->196.1512 J21 196.1512->210.6974 F3 215.0774->229.6235 J21  
 233.8495->268.814 J22 273.4635->302.6566 J23 309.4298->339.3665 J25  
 363.5575->395.8323 J23 401.5212->414.2754 F7

C13:D1 49.4293->138.1 Z3 138.1->190.5977 J61 190.5977->210.6974  
F58 210.7982->230.8902 J61 230.9773->283.461 Z3 337.5048->389.955 J61  
389.9028->414.2779 F57

C14:D1 17.9906->97.6481 J9 97.6481->118.2937 J8 118.2937->141.87  
J7 141.87->173.4928 Z4 173.4928->193.4928 J38 193.4928->210.6974 F34  
210.7988->227.9957 J38 228.0834->248.0695 Z4 368.5664->396.8036 J37  
396.7528->414.2779 F32

C15:D1 15.4975->95.1551 J9 95.1551->115.8007 J8  
115.8007->139.3769 J7 139.3769->170.9997 Z4 170.9997->190.9997 J38  
190.9997->210.6974 F35 210.7987->230.4887 J38 230.5763->250.5624 Z4  
363.0473->391.2841 J37 391.232->414.2779 F33

C16:D1 12.4888->92.1463 J9 92.1463->112.7919 J8  
112.7919->136.3682 J7 136.3682->167.9909 Z4 167.9909->196.2752 J37  
196.2752->210.6974 F31 216.932->231.3542 J37 239.0802->267.1515 J15  
275.8585->323.0586 J25 366.3486->413.6253 F10

C17:D1 91.2791->150.6676 J11 150.6676->193.6094 J46  
193.6094->210.6974 F43 210.8037->227.8849 J46 227.9793->277.1586 J44  
277.2508->305.8791 Z5 375.6678->394.5941 J41 394.5417->414.2779 F40

C18:D1 41.0629->100.4513 J11 100.4513->143.3931 J46  
143.3931->192.5866 J44 192.5866->210.6974 F42 210.7985->228.9015 J44  
228.9889->257.6107 Z5 315.9818->334.9471 J41 335.0284->357.3695 J18  
357.4342->395.8444 J29 395.7762->414.278 F20

C19:D2 89.2416->145.698 J3 145.698->182.4131 J48  
182.4131->210.6974 F46 213.0584->241.3426 J48 244.1425->291.004 Z1  
351.7847->388.6155 J50 388.5646->414.2779 F50

C20:D2 93.5258->149.9823 J3 149.9823->186.6974 J48  
186.6974->210.6974 F47 210.7968->234.7868 J48 234.8685->281.7125 Z1  
302.42->343.8307 J50 352.4477->388.6594 J53 392.2333->414.2762 F51

C21:D2 26.0985->89.0681 J12 89.0681->117.0566 J13  
117.0566->157.2561 J21 157.2561->198.0483 J22 198.0483->210.6974 F6  
210.7985->223.4396 J22 223.5256->257.5666 J23 257.6473->292.5592 J25  
386.5061->414.2754 F11

C22:D2 140.6288->192.2583 J32 192.2583->210.6974 F24  
215.6028->234.0418 J32 238.3554->272.3553 J33 276.6349->321.3562 J34  
365.8903->395.836 J35 395.7754->414.2779 F27

C23:D2 104.6718->156.3013 J32 156.3013->190.3013 J33  
190.3013->210.6974 F25 218.1832->238.5793 J33 248.9431->293.6644 J34  
365.8726->395.8248 J35 395.7735->414.2779 F28

C24:D2 60.3466->111.9761 J32 111.9761->145.9761 J33  
145.9761->190.6974 J34 190.6974->210.6974 F26 210.7981->230.7925 J34  
317.0398->374.0914 J36 394.7777->414.2754 F29

### 11.3 问题三规划后的时间安排表

A1:D1 60.9811->107.8924 J10 107.8924->138.6748 J45  
138.6748->165.1407 J42 165.1407->194.955 J40 194.955->211.0657 F37

211.0657->227.1764 J40 227.1764->247.4852 J39 247.4852->267.8376 J16  
 267.8376->303.0639 Z6 437.3528->476.5673 J25 476.5673->497.9423 F10  
 A2:D1 63.3644->110.2756 J10 110.2756->141.058 J45  
 141.058->167.5239 J42 167.5239->197.3382 J40 197.3382->211.0657 F38  
 211.0657->224.7932 J40 224.7932->245.1019 J39 245.1019->265.4544 J16  
 265.4544->300.6806 Z6 427.1411->456.7459 J26 456.7459->482.3931 J24  
 482.3931->497.9423 F8  
 A3:D1 60.2264->107.1377 J10 107.1377->137.9201 J45  
 137.9201->164.386 J42 164.386->194.2002 J40 194.2002->211.0657 F39  
 211.0657->227.9312 J40 227.9312->248.2399 J39 248.2399->268.5924 J16  
 268.5924->303.8186 Z6 430.3976->460.0024 J26 460.0024->485.6496 J24  
 485.6496->497.9423 F9  
 A4:D2 76.2484->123.3519 J12 123.3519->143.3437 J13  
 143.3437->170.1434 J21 170.1434->197.3382 J22 197.3382->211.0657 F4  
 211.0657->224.7932 J22 224.7932->247.4991 J23 247.4991->270.7847 J25  
 270.7847->309.9992 Z6 442.3536->480.5578 J28 480.5578->497.9423 F18  
 A5:D2 57.1157->104.2192 J12 104.2192->124.211 J13  
 124.211->151.0107 J21 151.0107->178.2055 J22 178.2055->200.9113 J23  
 200.9113->211.0657 F7 211.0657->221.2201 J23 221.2201->244.5057 J25  
 244.5057->283.7202 Z6 448.9885->487.1926 J28 487.1926->497.9423 F19  
 A6:D2 105.708->145.2515 J32 145.2515->167.9181 J33  
 167.9181->197.7324 J34 197.7324->211.0657 F26 211.0657->224.399 J34  
 224.399->247.1049 J5 247.1049->265.0026 J4 265.0026->290.0536 Z1  
 400.298->424.8835 J50 424.8835->449.0312 J53 449.0312->484.609 J56  
 484.609->497.9423 F52  
 B7:D1 39.8191->110.5034 J9 110.5034->127.708 J8 127.708->147.3549  
 J7 147.3549->174.4601 Z4 174.4601->198.7038 J37 198.7038->211.0657  
 F31 211.0657->223.4276 J37 223.4276->247.6713 Z4 385.1177->409.3614  
 J37 409.3614->433.4226 J15 433.4226->473.8811 J25 473.8811->497.9423  
 F11  
 B8:D1 35.0887->105.7729 J9 105.7729->122.9776 J8  
 122.9776->142.6245 J7 142.6245->169.5503 J6 169.5503->194.0951 J36  
 194.0951->211.0657 F30 211.0657->228.0363 J36 228.0363->252.5811 J6  
 252.5811->267.1273 J51 267.1273->287.1191 Z2 421.8889->441.8807 J51  
 441.8807->456.4269 J6 456.4269->480.9717 J36 480.9717->497.9423 F29  
 B9:D1 0->56.1332 J10 56.1332->95.7105 J45 95.7105->129.7381 J42  
 129.7381->168.0707 J40 168.0707->194.1819 J39 194.1819->211.0657 F36  
 211.0657->227.9495 J39 227.9495->254.1169 J16 254.1169->299.4078 Z6  
 442.9952->481.0585 J26 481.0585->497.9423 F12  
 B10:D2 96.7999->147.5975 J3 147.5975->176.7179 J2  
 176.7179->192.5229 J47 192.5229->211.0657 F44 211.0657->229.6085 J47  
 229.6085->257.2506 J48 257.2506->297.4176 Z1 406.0042->438.2127 J4  
 438.2127->459.0933 J5 459.0933->477.9505 J49 477.9505->497.9423 F48



B11:D2 93.8628->144.6604 J3 144.6604->173.7808 J2  
 173.7808->189.5858 J47 189.5858->211.0657 F45 211.0657->232.5456 J47  
 232.5456->260.1877 J48 260.1877->300.3547 Z1 378.3191->409.9289 J50  
 409.9289->440.976 J53 440.976->477.0168 J59 477.0168->497.9423 F54  
 B12:D2 51.0981->107.4784 J12 107.4784->130.8022 J13  
 211.0657->221.9078 J22 221.9078->251.101 J23 251.101->281.0397 J25  
 281.0397->331.4584 Z6 438.1948->476.2581 J26 476.2581->497.9423 F13  
 130.8022->165.2589 J21 165.2589->200.2236 J22 200.2236->211.0657 F6  
 C13:D1 49.4293->138.4683 Z3 138.4683->190.9659 J61  
 190.9659->211.0657 F58 211.0657->231.1655 J61 231.1655->283.6631 Z3  
 420.706->473.2037 J61 473.2037->497.9423 F57  
 C14:D1 17.9906->98.0164 J9 98.0164->118.662 J8 118.662->142.2383  
 J7 142.2383->173.861 Z4 173.861->193.861 J38 193.861->211.0657 F34  
 211.0657->228.2704 J38 228.2704->248.2704 Z4 451.7695->480.0538 J37  
 480.0538->497.9423 F32  
 C15:D1 15.4975->95.5234 J9 95.5234->116.1689 J8  
 116.1689->139.7452 J7 139.7452->171.368 Z4 171.368->191.368 J38  
 191.368->211.0657 F35 211.0657->230.7634 J38 230.7634->250.7634 Z4  
 446.2486->474.5329 J37 474.5329->497.9423 F33  
 C16:D1 91.2791->151.0359 J11 151.0359->193.9777 J46  
 193.9777->211.0657 F43 211.0657->228.1537 J46 228.1537->277.3472 J44  
 277.3472->305.9828 Z5 458.8689->477.8425 J41 477.8425->497.9423 F40  
 C17:D1 33.8754->93.6322 J11 93.6322->136.574 J46  
 136.574->185.7675 J44 185.7675->211.0657 F41 211.0657->236.3639 J44  
 236.3639->264.9996 Z5 368.8237->387.7974 J41 387.7974->410.158 J18  
 410.158->437.3109 J19 437.3109->479.8315 J31 479.8315->497.9423 F23  
 C18:D1 41.0629->100.8196 J11 100.8196->143.7614 J46  
 143.7614->192.9549 J44 192.9549->211.0657 F42 211.0657->229.1765 J44  
 229.1765->257.8121 Z5 399.2692->418.2429 J41 418.2429->440.6036 J18  
 440.6036->479.0743 J29 479.0743->497.9423 F20  
 C19:D2 89.2416->146.0663 J3 146.0663->182.7814 J48  
 182.7814->211.0657 F46 211.0657->239.35 J48 239.35->286.2115 Z1  
 390.6816->428.2581 J4 428.2581->453.3149 J5 453.3149->475.3149 J49  
 475.3149->497.9423 F49  
 C20:D2 93.5258->150.3506 J3 150.3506->187.0657 J48  
 187.0657->211.0657 F47 211.0657->235.0657 J48 235.0657->281.9272 Z1  
 434.9873->471.8655 J50 471.8655->497.9423 F50  
 C21:D2 62.3351->125.673 J12 125.673->153.6615 J13  
 153.6615->193.861 J21 193.861->211.0657 F1  
 C22:D2 62.5692->125.9071 J12 125.9071->153.8956 J13  
 153.8956->194.0951 J21 194.0951->211.0657 F3  
 C23:D2 140.6288->192.6266 J32 192.6266->211.0657 F24  
 C24:D2 104.6718->156.6696 J32 156.6696->190.6696 J33  
 190.6696->211.0657 F25 211.0657->231.4618 J33 231.4618->271.1606 J4

271.1606->308.7372 Z1 402.4819->439.3601 J50 439.3601->475.5816 J53  
475.5816->497.9423 F51

新 C1: J13 440.6548->480.8543 J21 480.8543->497.9423 F2

新 C2: J14 449.0743->479.0743 J35 479.0743->497.9423 F27

新 C3: J14 449.0743->479.0743 J35 479.0743->497.9423 F28

#### **11.4 程序**

由于代码太过复杂，不列在附录中，随附件一起提交。