Ayudantía 7 MAT033

Eduardo Rubio Marín

Correo: eduardo.rubiom@sansano.usm.cl

Junio, 2021

Pregunta 1

En una fabrica de telas, la cantidad de fallas semanales que presenta la maquinaria es una variable aleatoria X que se encuentra modelada por la siguiente función:

$$f_x(x) = \frac{c}{78} 5^{2-x} \quad , \quad x = 0, 1, 2, 3$$

a. Encuentre el valor de c , tal que f_x sea una función de cuantía.
b. Calcule la función de distribución F_x.
c. Calcule la esperanza y la varianza de X.
d. Encuentre: $P[X \leq 4\sqrt{V[X]} - E[X]/X > V[X]]$

Solución:

Solución:

a. Para que sea función de cuantía debe cumplir:

Solución:

a. Para que sea función de cuantía debe cumplir:

$$f_x(0) + f_x(1) + f_x(2) + f_x(3) = 1$$

Solución:

a. Para que sea función de cuantía debe cumplir:

$$f_x(0) + f_x(1) + f_x(2) + f_x(3) = 1$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{c}{78}5^2 + \frac{c}{78}5^1 + \frac{c}{78}5^0 + \frac{c}{78}5^{-1} = 1$$

Solución:

a. Para que sea función de cuantía debe cumplir:

$$f_x(0) + f_x(1) + f_x(2) + f_x(3) = 1$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{c}{78}5^2 + \frac{c}{78}5^1 + \frac{c}{78}5^0 + \frac{c}{78}5^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{5}{2}$$

Solución:

a. Para que sea función de cuantía debe cumplir:

$$f_x(0) + f_x(1) + f_x(2) + f_x(3) = 1$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{c}{78}5^2 + \frac{c}{78}5^1 + \frac{c}{78}5^0 + \frac{c}{78}5^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{5}{2}$$

b. La distribución acumulada sería:

Solución:

a. Para que sea función de cuantía debe cumplir:

$$f_x(0) + f_x(1) + f_x(2) + f_x(3) = 1$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{c}{78}5^2 + \frac{c}{78}5^1 + \frac{c}{78}5^0 + \frac{c}{78}5^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{5}{2}$$

b. La distribución acumulada sería:

X	0	1	2	3
$f_x(X)$	0,8013	0,9615	0,9936	1

c

$$E[X] =$$

c

$$E[X] = \sum_{x=0}^{3} x \cdot f_x(x)$$

c

$$E[X] = \sum_{x=0}^{3} x \cdot f_x(x) = 0 \cdot \frac{c}{78}5^2 + 1 \cdot \frac{c}{78}5^1 + 2 \cdot \frac{c}{78}5^0 + 3 \cdot \frac{c}{78}5^{-1}$$

c

$$E[X] = \sum_{x=0}^{3} x \cdot f_x(x) = 0 \cdot \frac{c}{78}5^2 + 1 \cdot \frac{c}{78}5^1 + 2 \cdot \frac{c}{78}5^0 + 3 \cdot \frac{c}{78}5^{-1}$$

$$\Rightarrow E[X] = 0,24359$$

c

$$E[X] = \sum_{x=0}^{3} x \cdot f_x(x) = 0 \cdot \frac{c}{78} 5^2 + 1 \cdot \frac{c}{78} 5^1 + 2 \cdot \frac{c}{78} 5^0 + 3 \cdot \frac{c}{78} 5^{-1}$$

$$\Rightarrow E[X] = 0,24359$$

De la misma manera se obtiene:

c

$$E[X] = \sum_{x=0}^{3} x \cdot f_x(x) = 0 \cdot \frac{c}{78}5^2 + 1 \cdot \frac{c}{78}5^1 + 2 \cdot \frac{c}{78}5^0 + 3 \cdot \frac{c}{78}5^{-1}$$

$$\Rightarrow E[X] = 0,24359$$

De la misma manera se obtiene:

$E[X^2]$

c

$$E[X] = \sum_{x=0}^{3} x \cdot f_x(x) = 0 \cdot \frac{c}{78}5^2 + 1 \cdot \frac{c}{78}5^1 + 2 \cdot \frac{c}{78}5^0 + 3 \cdot \frac{c}{78}5^{-1}$$

$$\Rightarrow E[X] = 0,24359$$

De la misma manera se obtiene:

$$E[X^2] = \sum_{x=0}^{3} x^2 \cdot f_x(x)$$

c

$$E[X] = \sum_{x=0}^{3} x \cdot f_x(x) = 0 \cdot \frac{c}{78}5^2 + 1 \cdot \frac{c}{78}5^1 + 2 \cdot \frac{c}{78}5^0 + 3 \cdot \frac{c}{78}5^{-1}$$

$$\Rightarrow E[X] = 0,24359$$

De la misma manera se obtiene:

$$E[X^2] = \sum_{x=0}^{3} x^2 \cdot f_x(x) = 0 \cdot \frac{c}{78}5^2 + 1 \cdot \frac{c}{78}5^1 + 4 \cdot \frac{c}{78}5^0 + 9 \cdot \frac{c}{78}5^{-1}$$

c

$$E[X] = \sum_{x=0}^{3} x \cdot f_x(x) = 0 \cdot \frac{c}{78}5^2 + 1 \cdot \frac{c}{78}5^1 + 2 \cdot \frac{c}{78}5^0 + 3 \cdot \frac{c}{78}5^{-1}$$

$$\Rightarrow E[X] = 0,24359$$

De la misma manera se obtiene:

$$E[X^2] = \sum_{x=0}^{3} x^2 \cdot f_x(x) = 0 \cdot \frac{c}{78}5^2 + 1 \cdot \frac{c}{78}5^1 + 4 \cdot \frac{c}{78}5^0 + 9 \cdot \frac{c}{78}5^{-1} = 0,346154$$

c

$$E[X] = \sum_{x=0}^{3} x \cdot f_x(x) = 0 \cdot \frac{c}{78}5^2 + 1 \cdot \frac{c}{78}5^1 + 2 \cdot \frac{c}{78}5^0 + 3 \cdot \frac{c}{78}5^{-1}$$

$$\Rightarrow E[X] = 0,24359$$

De la misma manera se obtiene:

$$E[X^2] = \sum_{x=0}^{3} x^2 \cdot f_x(x) = 0 \cdot \frac{c}{78}5^2 + 1 \cdot \frac{c}{78}5^1 + 4 \cdot \frac{c}{78}5^0 + 9 \cdot \frac{c}{78}5^{-1} = 0,346154$$

$$\therefore \quad V[X]$$

c

$$E[X] = \sum_{x=0}^{3} x \cdot f_x(x) = 0 \cdot \frac{c}{78} 5^2 + 1 \cdot \frac{c}{78} 5^1 + 2 \cdot \frac{c}{78} 5^0 + 3 \cdot \frac{c}{78} 5^{-1}$$

$$\Rightarrow E[X] = 0,24359$$

De la misma manera se obtiene:

$$E[X^2] = \sum_{x=0}^{3} x^2 \cdot f_x(x) = 0 \cdot \frac{c}{78} 5^2 + 1 \cdot \frac{c}{78} 5^1 + 4 \cdot \frac{c}{78} 5^0 + 9 \cdot \frac{c}{78} 5^{-1} = 0,346154$$

$$\therefore \quad V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

c

$$E[X] = \sum_{x=0}^{3} x \cdot f_x(x) = 0 \cdot \frac{c}{78} 5^2 + 1 \cdot \frac{c}{78} 5^1 + 2 \cdot \frac{c}{78} 5^0 + 3 \cdot \frac{c}{78} 5^{-1}$$

$$\Rightarrow E[X] = 0,24359$$

De la misma manera se obtiene:

$$E[X^2] = \sum_{x=0}^{3} x^2 \cdot f_x(x) = 0 \cdot \frac{c}{78} 5^2 + 1 \cdot \frac{c}{78} 5^1 + 4 \cdot \frac{c}{78} 5^0 + 9 \cdot \frac{c}{78} 5^{-1} = 0,346154$$

$$\therefore \quad V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 0,346154 - (0,24359)^2$$

c

$$E[X] = \sum_{x=0}^{3} x \cdot f_x(x) = 0 \cdot \frac{c}{78} 5^2 + 1 \cdot \frac{c}{78} 5^1 + 2 \cdot \frac{c}{78} 5^0 + 3 \cdot \frac{c}{78} 5^{-1}$$

$$\Rightarrow E[X] = 0,24359$$

De la misma manera se obtiene:

$$E[X^2] = \sum_{x=0}^{3} x^2 \cdot f_x(x) = 0 \cdot \frac{c}{78} 5^2 + 1 \cdot \frac{c}{78} 5^1 + 4 \cdot \frac{c}{78} 5^0 + 9 \cdot \frac{c}{78} 5^{-1} = 0,346154$$

$$\therefore \quad V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 0,346154 - (0,24359)^2 = 0,2868$$

d

$$P[X \leq 4\sqrt{V[X]} - E[X]/X > V[X]] =$$

d

$$P[X \leq 4\sqrt{V[X]} - E[X]/X > V[X]] = P[X \leq 1,9/X > 0,28]$$

d

$$P[X \leq 4\sqrt{V[X]} - E[X]/X > V[X]] = P[X \leq 1,9/X > 0,28]$$

$$\frac{P[0,28 < X < 1,9]}{P[X > 0,28]}$$

d

$$P[X \leq 4\sqrt{V[X]} - E[X]/X > V[X]] = P[X \leq 1,9/X > 0,28]$$

$$\frac{P[0,28 < X < 1,9]}{P[X > 0,28]} = \frac{P[X = 1]}{P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3]}$$

d

$$P[X \leq 4\sqrt{V[X]} - E[X]/X > V[X]] = P[X \leq 1,9/X > 0,28]$$

$$\frac{P[0,28 < X < 1,9]}{P[X > 0,28]} = \frac{P[X = 1]}{P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3]} = 0,806452$$

Pregunta 2

Se tienen cinco monedas en una alcancía, dos de 10 pesos, dos de 50 pesos y una de 100 pesos. Se extraen tres monedas al azar.

a. Encuentre la función de distribución acumulada de probabilidades de la cantidad extraída.
b. Calcule la Probabilidad de que la cantidad extraída no sea mayor a 100, si es que se sabe que es menor igual a 150.
c. ¿Cuenta dinero podría esperar tener de las tres monedas, y que porcentaje de valores posibles de la cantidad extraída se encuentran al rededor de este número?

Solución:

Solución:

Sea X:= Cantidad extraída de la alcancía.

Solución:

Sea X:= Cantidad extraída de la alcancía.

a. La función de distribución acumulada de probabilidades de X.

-

X	70	110	120	160	200
$P[X = x]$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$
$F_X(x)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{9}{10}$	1

- b Notemos que lo que nos piden es: $P[X \leq 100/X \leq 150]$

b. Notemos que lo que nos piden es: $P[X \leq 100/X \leq 150]$
Para resolver el ejercicio utilizaremos el Teorema de Bayes.

(b) Notemos que lo que nos piden es: $P[X \leq 100/X \leq 150]$
Para resolver el ejercicio utilizaremos el Teorema de Bayes.

$$P[A/B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

$$P[X \leq 100/X \leq 150] =$$

- b) Notemos que lo que nos piden es: $P[X \leq 100/X \leq 150]$
  Para resolver el ejercicio utilizaremos el Teorema de Bayes.

$$P[A/B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

$$P[X \leq 100/X \leq 150] = \frac{P[X \leq 100]}{P[X \leq 150]} =$$

- b Notemos que lo que nos piden es: $P[X \leq 100/X \leq 150]$
  Para resolver el ejercicio utilizaremos el Teorema de Bayes.

$$P[A/B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

$$P[X \leq 100/X \leq 150] = \frac{P[X \leq 100]}{P[X \leq 150]} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{5}{10}} =$$

- b. Notemos que lo que nos piden es: $P[X \leq 100/X \leq 150]$
  Para resolver el ejercicio utilizaremos el Teorema de Bayes.

$$P[A/B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

$$P[X \leq 100/X \leq 150] = \frac{P[X \leq 100]}{P[X \leq 150]} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{2}{5}$$

- Notemos que lo que nos piden es la esperanza y la probabilidad del intervalo

- c. Notemos que lo que nos piden es la esperanza y la probabilidad del intervalo $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$

c. Notemos que lo que nos piden es la esperanza y la probabilidad del intervalo $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$

$$\mu = E(X) =$$

- c Notemos que lo que nos piden es la esperanza y la probabilidad del intervalo $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{5} xf(x) =$$

- c. Notemos que lo que nos piden es la esperanza y la probabilidad del intervalo $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{5} x f(x) = 132$$

- c) Notemos que lo que nos piden es la esperanza y la probabilidad del intervalo $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{5} xf(x) = 132$$

$$\sigma^2 = V(X) =$$

- c) Notemos que lo que nos piden es la esperanza y la probabilidad del intervalo $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{5} x f(x) = 132$$

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{5} (x-\mu)^2 f(x) =$$

- c) Notemos que lo que nos piden es la esperanza y la probabilidad del intervalo $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{5} x f(x) = 132$$

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{5} (x - \mu)^2 f(x) = 1656$$

- c) Notemos que lo que nos piden es la esperanza y la probabilidad del intervalo $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{5} x f(x) = 132$$

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{5} (x-\mu)^2 f(x) = 1656$$

$$\sigma = 40.694$$

- c. Notemos que lo que nos piden es la esperanza y la probabilidad del intervalo $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{5} x f(x) = 132$$

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{5} (x - \mu)^2 f(x) = 1656$$

$$\sigma = 40.694$$

Así el intervalo queda como $[91.306; 172.694]$

- c Notemos que lo que nos piden es la esperanza y la probabilidad del intervalo $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$

  $$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{5} xf(x) = 132$$

  $$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{5} (x-\mu)^2 f(x) = 1656$$

  $\sigma = 40.694$

  Así el intervalo queda como $[91.306; 172.694]$

  $$P[91.306 \leq X \leq 172.694] =$$

- c. Notemos que lo que nos piden es la esperanza y la probabilidad del intervalo $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{5} x f(x) = 132$$

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{5} (x-\mu)^2 f(x) = 1656$$

$$\sigma = 40.694$$

Así el intervalo queda como $[91.306; 172.694]$

$$P[91.306 \leq X \leq 172.694] = \frac{7}{10}$$

Pregunta 3

La longitud de ciertos tornillos (en centimetros) es una variable aleatoria con la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(-x^2+4x-3) & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

a. Para hacer cierto trabajo se prefieren tornillos con longitud entre 1,7 [cm] y 2,4[cm] ¿Cuál es la probabilidad de que un tornillo tenga dicha longitud?
b. Si la longitud de cada tornillo es independiente de la logntiud de otro tornillo. ¿Cuál es la probabilidad de que tres tornillos tengan la longitud que se prefiere?

Solución:

Solución:

- Sabemos que la variable de interés es X y es una V.A. Continua. Por lo que nos piden es.

$$
\begin{aligned}
P[1,7 \leq X \leq 2,4] &= \int_{1,7}^{2,4} \frac{3}{4}(-x^2+4x-3)dx \\
&= \frac{3}{4}(\frac{-x^3}{3}+2x^2-3x)\Big|_{1,7}^{2,4}
\end{aligned}
$$

Solución:

- Sabemos que la variable de interés es X y es una V.A. Continua. Por lo que nos piden es.

$$
\begin{aligned}
P[1,7 \leq X \leq 2,4] &= \int_{1,7}^{2,4} \frac{3}{4}(-x^2 + 4x - 3)dx \\
&= \frac{3}{4}(\frac{-x^3}{3} + 2x^2 - 3x)\Big|_{1,7}^{2,4} \\
&= \frac{3}{4}[(-\frac{2,4^3}{3} + 2(2,4)^2 - 3(2,4)) \\
&- (-\frac{1,7^3}{3} + 2(1,7)^2 - 3(1,7))]
\end{aligned}
$$

Solución:

- Sabemos que la variable de interés es X y es una V.A. Continua. Por lo que nos piden es.

$$
\begin{aligned}
P[1,7 \leq X \leq 2,4] &= \int_{1,7}^{2,4} \frac{3}{4}(-x^2 + 4x - 3)dx \\
&= \frac{3}{4}(\frac{-x^3}{3} + 2x^2 - 3x)\Big|_{1,7}^{2,4} \\
&= \frac{3}{4}[(-\frac{2,4^3}{3} + 2(2,4)^2 - 3(2,4)) \\
&- (-\frac{1,7^3}{3} + 2(1,7)^2 - 3(1,7))] \\
&= 0,50225
\end{aligned}
$$

- Si llamamos T_i El tornillo i tiene la longitud que se prefiere. Como son sucesos independientes la probabilidad deseada, se puede expresar de la siguiente forma:

$$P[T_1 \cap T_2 \cap T_3] = P[T_1] \cdot P[T_2] \cdot P[T_3]$$

- Si llamamos T_i El tornillo i tiene la longitud que se prefiere. Como son sucesos independientes la probabilidad deseada, se puede expresar de la siguiente forma:

$$P[T_1 \cap T_2 \cap T_3] = P[T_1] \cdot P[T_2] \cdot P[T_3]$$

Por (a) sabemos que $P[T] = 0,50225$ por lo que se tendra que.

- Si llamamos T_i El tornillo i tiene la longitud que se prefiere. Como son sucesos independientes la probabilidad deseada, se puede expresar de la siguiente forma:

$$P[T_1 \cap T_2 \cap T_3] = P[T_1] \cdot P[T_2] \cdot P[T_3]$$

Por (a) sabemos que $P[T] = 0,50225$ por lo que se tendra que.

$$P[T_1 \cap T_2 \cap T_3] = 0,50225^3 \approx 0,1267$$