Ayudantía 10 MAT033

Eduardo Rubio Marín

Correo: eduardo.rubiom@sansano.usm.cl

Julio, 2021

Pregunta 1

Si el tiempo de espera de una micro en minutos X para una persona es tal que:

$f(x/\lambda) = \dfrac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}$ con $x > 0$

Y sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a. de X

a. Encuentre el E.M.V. de λ . Calcule su esperanza y varianza.
b. Si se observan los valores 2 2,4 3 4,5 y 3 encuentre el valor de $\hat{\lambda}$.

Solución:

Solución:

a. La función de verosimilitud es:

Solución:

a. La función de verosimilitud es:

$$L(x_1, .., x_n, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x_i}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Solución:

a. La función de verosimilitud es:

$$L(x_1, .., x_n, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x_i}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Luego la log-verosimilitud queda como:

Solución:

a. La función de verosimilitud es:

$$L(x_1,..,x_n,\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x_i}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Luego la log-verosimilitud queda como:

$$Ln(L) = -n \cdot Ln(\lambda) - \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Solución:

a. La función de verosimilitud es:

$$L(x_1,..,x_n,\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x_i}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Luego la log-verosimilitud queda como:

$$Ln(L) = -n \cdot Ln(\lambda) - \tfrac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Luego aplicando $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = 0$

Solución:

a) La función de verosimilitud es:

$$L(x_1,..,x_n,\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x_i}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Luego la log-verosimilitud queda como:

$$Ln(L) = -n \cdot Ln(\lambda) - \tfrac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Luego aplicando $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = 0$

$$-\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

Solución:

a. La función de verosimilitud es:

$$L(x_1,..,x_n,\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x_i}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda^n} e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Luego la log-verosimilitud queda como:

$$Ln(L) = -n \cdot Ln(\lambda) - \tfrac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Luego aplicando $\dfrac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = 0$

$$-\frac{n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\lambda} = \bar{x}$$

$$E(\hat{\lambda}) =$$

$$E(\hat{\lambda}) = E(\bar{x}) =$$

$$E(\hat{\lambda}) = E(\bar{x}) = E(x) =$$

$$E(\hat{\lambda}) = E(\bar{x}) = E(x) = \lambda$$

$E(\hat{\lambda}) = E(\bar{x}) = E(x) = \lambda$
$\Rightarrow$ es insesgado.

$E(\hat{\lambda}) = E(\bar{x}) = E(x) = \lambda$

$\Rightarrow$ es insesgado.

$Var(\hat{\lambda}) =$

$E(\hat{\lambda}) = E(\bar{x}) = E(x) = \lambda$
$\Rightarrow$ es insesgado.

$Var(\hat{\lambda}) = Var(\bar{x})$

$E(\hat{\lambda}) = E(\bar{x}) = E(x) = \lambda$

$\Rightarrow$ es insesgado.

$$Var(\hat{\lambda}) = Var(\bar{x}) = \frac{Var(x)}{n}$$

$E(\hat{\lambda}) = E(\bar{x}) = E(x) = \lambda$
$\Rightarrow$ es insesgado.
$$Var(\hat{\lambda}) = Var(\bar{x}) = \frac{Var(x)}{n} = \frac{\lambda^2}{n}$$

$E(\hat{\lambda}) = E(\bar{x}) = E(x) = \lambda$
$\Rightarrow$ es insesgado.
$$Var(\hat{\lambda}) = Var(\bar{x}) = \frac{Var(x)}{n} = \frac{\lambda^2}{n}$$

- c En este caso solo basta reemplazar,

$E(\hat{\lambda}) = E(\bar{x}) = E(x) = \lambda$

$\Rightarrow$ es insesgado.

$$Var(\hat{\lambda}) = Var(\bar{x}) = \frac{Var(x)}{n} = \frac{\lambda^2}{n}$$

c. En este caso solo basta reemplazar, y se obtiene $\hat{\lambda} = \bar{x} = 2.98$

Pregunta 2

Suponga que a partir de una muestra aleatoria de tamaño 25, se ha podido establecer un intervalo de confianza para la media poblacional que va desde 68 a 72 unidades de medida para un $\alpha = 0.01$. Encuentre un intervalo al 95% de confianza para la media poblacional, asuma que la varianza poblacional es conocida.

Solución: Se sabe que:

Solución: Se sabe que:

$$n = 25$$

Solución: Se sabe que:

$$n = 25$$

$$IC_{99\%}(\mu) = [68, 72]$$

Solución: Se sabe que:

$$n = 25$$

$$IC_{99\%}(\mu) = [68, 72]$$

$$\Rightarrow \overline{X} = 70$$

Solución: Se sabe que:

$$n = 25$$

$$IC_{99\%}(\mu) = [68, 72]$$

$$\Rightarrow \overline{X} = 70$$

$$\therefore \epsilon = 2$$

Solución: Se sabe que:

$$n = 25$$

$$IC_{99\%}(\mu) = [68, 72]$$

$$\Rightarrow \overline{X} = 70$$

$$\therefore \epsilon = 2$$

$$\Rightarrow 2 = Z_{1-\frac{0.01}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{25}}$$

$$\Rightarrow 2 = Z_{0.995} \cdot \frac{\sigma}{5}$$

$$\Rightarrow 2 = Z_{0.995} \cdot \frac{\sigma}{5}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{2 \cdot 5}{2.575}$$

$$\Rightarrow 2 = Z_{0.995} \cdot \frac{\sigma}{5}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{2 \cdot 5}{2.575}$$

$$\Rightarrow \sigma \approx 3.88$$

$$\Rightarrow 2 = Z_{0.995} \cdot \frac{\sigma}{5}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{2 \cdot 5}{2.575}$$

$$\Rightarrow \sigma \approx 3.88$$

Ahora para un intervalo de confianza del 95% para la media poblacional se tiene:

$$\Rightarrow 2 = Z_{0.995} \cdot \frac{\sigma}{5}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{2 \cdot 5}{2.575}$$

$$\Rightarrow \sigma \approx 3.88$$

Ahora para un intervalo de confianza del 95% para la media poblacional se tiene:

$$IC_{95\%}(\mu) = [70 \pm 1.96 \cdot \frac{3.88}{5}]$$

$$\Rightarrow 2 = Z_{0.995} \cdot \frac{\sigma}{5}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{2 \cdot 5}{2.575}$$

$$\Rightarrow \sigma \approx 3.88$$

Ahora para un intervalo de confianza del 95% para la media poblacional se tiene:

$$IC_{95\%}(\mu) = [70 \pm 1.96 \cdot \frac{3.88}{5}]$$

$$\Rightarrow IC_{95\%}(\mu) = [68.479; 71,520]$$

Pregunta 3

Se realizó un experimento considerando 64 pacientes varones de similares características que llegan a un servicio de urgencia con fuertes dolores producidos por cálculos renales. Se les suministró una dosis de 5 ml. De un nuevo fármaco para calcular tales dolores, midiéndose el tiempo transcurrido hasta que el dolor desaparece completamente. Los resultados del experimento entregaron los siguientes resultados:

$$\overline{X} = 20 \text{ minutos};\ S = 5 \text{ minutos}.$$

Además 7 pacientes reaccionaron negativamente por la dosis.

a. Mediante un intervalo de confianza del 95%, encuentre los límites que permitan estimar, el tiempo que tarda el medicamento en eliminar el dolor. (Asuma que el tiempo medio transcurrido hasta que el dolor desaparezca completamente tiene una distribución normal)
b. Estime mediante un intervalo de confianza del 90%, la proporción de pacientes que reaccionaran de manera negativa ante la suministración de la dosis.
c. Si se toma en consideración la información recopila hasta este momento y se desea construir un intervalo con 90% de confianza para la proporción de casos que reacciona negativamente, de tal manera de lograr un error de estimación del 3% como máximo. ¿Cuál es la cantidad mínima de pacientes que debe constituir el grupo experimental?

Solución:

a) De los datos tenemos:

$$n = 64$$

Solución:

a) De los datos tenemos:

$$n = 64$$

$$\bar{X} = 20$$

Solución:

a. De los datos tenemos:

$$n = 64$$

$$\bar{X} = 20$$

$$\alpha = 5\% = 0.05$$

Solución:

a. De los datos tenemos:

$$n = 64$$

$$\bar{X} = 20$$

$$\alpha = 5\% = 0.05$$

$$S = 5$$

Solución:

a) De los datos tenemos:

$$n = 64$$

$$\bar{X} = 20$$

$$\alpha = 5\% = 0.05$$

$$S = 5$$

$$t_{(1-\frac{\alpha}{2};n-1)} = t_{(0.975;63)} = 1.9983$$

Límites de tiempo:

Límites de tiempo:

$$IC_{95\%}(\mu) = \overline{X} \pm t_{(1-\frac{\alpha}{2};n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Límites de tiempo:

$$IC_{95\%}(\mu) = \overline{X} \pm t_{(1-\frac{\alpha}{2};n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow IC_{95\%}(\mu) = 20 \pm 1.9983 \cdot \frac{5}{\sqrt{64}}$$

Límites de tiempo:

$$IC_{95\%}(\mu) = \overline{X} \pm t_{(1-\frac{\alpha}{2};n-1)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow IC_{95\%}(\mu) = 20 \pm 1.9983 \cdot \frac{5}{\sqrt{64}}$$

$$\Rightarrow IC_{95\%}(\mu) = [18,7511; 21,2489]$$

- b) Proporción de pacientes que reaccionaran de manera negativa:

- b) Proporción de pacientes que reaccionaran de manera negativa:

$$\hat{p} = \frac{7}{64}$$

- b) Proporción de pacientes que reaccionaran de manera negativa:

$$\hat{p} = \frac{7}{64}$$

$$\hat{q} = \frac{57}{64}$$

- b) Proporción de pacientes que reaccionaran de manera negativa:

$$\hat{p} = \frac{7}{64}$$

$$\hat{q} = \frac{57}{64}$$

$$Z_{(1-\frac{\beta}{2})} = Z_{0.95} = 1.645$$

$$IC_{90\%}(p) = \hat{p} \pm Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}$$

$$IC_{90\%}(p) = \hat{p} \pm Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}$$

$$\Rightarrow IC_{90\%}(p) = \frac{7}{64} \pm 1.645 \cdot \sqrt{\frac{\frac{7}{64} \cdot \frac{57}{64}}{64}}$$

$$IC_{90\%}(p) = \hat{p} \pm Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}$$

$$\Rightarrow IC_{90\%}(p) = \frac{7}{64} \pm 1.645 \cdot \sqrt{\frac{\frac{7}{64} \cdot \frac{57}{64}}{64}}$$

$$\Rightarrow IC_{90\%}(p) = [0,0452; 0,1736]$$

c. Cantidad mínima de pacientes que debe constituir el grupo experimental:

- c. Cantidad mínima de pacientes que debe constituir el grupo experimental:

$$\epsilon = Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}$$

- (c) Cantidad mínima de pacientes que debe constituir el grupo experimental:

$$\epsilon = Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}$$

$$\Rightarrow n = \frac{Z^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}}{\epsilon^2}$$

c) Cantidad mínima de pacientes que debe constituir el grupo experimental:

$$\epsilon = Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}$$

$$\Rightarrow n = \frac{Z^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}}{\epsilon^2}$$

$$\Rightarrow n = \frac{(1.645)^2 \frac{7}{64} \cdot \frac{57}{64}}{(0.03)^2}$$

- c. Cantidad mínima de pacientes que debe constituir el grupo experimental:

$$\epsilon = Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}$$

$$\Rightarrow n = \frac{Z^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}}{\epsilon^2}$$

$$\Rightarrow n = \frac{(1.645)^2 \frac{7}{64} \cdot \frac{57}{64}}{(0.03)^2}$$

$$\Rightarrow n = 292.88 \approx 293$$