Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 5

30 października 2014 r.

M 5.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wielomian interpolujący funkcję f w parami różnych $n+1$ węzłach $x_0, \ldots, x_n$ można podać wzorem

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\lambda_k(x), \tag{1}$$

gdzie

$$\lambda_k(x) := \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \qquad (k = 0, 1, ..., n). \tag{2}$$

Wykazać, że wielomiany (2) spełniają tożsamość $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) \equiv 1$.

M 5.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że wielomiany (2) spełniają równości

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(0)x_k^j = \begin{cases} 1 & (j = 0), \\ 0 & (j = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

M 5.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Sprawdzić, że wielomian (1) można podać wzorem

$$L_n(x) = p_{n+1}(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{\sigma_k}{x - x_k} f(x_k), \tag{3}$$

gdzie $p_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$, natomiast

$$\sigma_k \equiv \sigma_k^{(n)} := 1/p'_{n+1}(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n), \tag{4}$$

M 5.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że wielkości (4) spełniają związki

$$\sigma_k^{(n)} := \frac{\sigma_k^{(n-1)}}{x_k - x_n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1); \qquad \sigma_n^{(n)} := -\sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j^{(n)}.$$

Jaka ważna własność wzoru interpolacyjnego (3) stąd wynika?

M 5.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że wzór (4) znacznie się upraszcza, jeśli węzły interpolacji są równoodległe, tj. $x_k = x_0 + k\,h \quad (k = 0, 1, \ldots, n;\ h$ – stała). Jak upraszcza się wówczas wzór (3)?

M 5.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Uzasadnić następującą *postać barycentryczną* wielomianu (1):

$$L_n(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\sigma_i}{t - x_i} f(x_i) \Bigg/ \sum_{i=0}^{n} \frac{\sigma_i}{t - x_i} & (t \notin \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}), \\ f(x_k) & (t = x_k,\ 0 \leqslant k \leqslant n), \end{cases}$$

gdzie użyto oznaczenia (4).

M 5.7. 1 punkt Wykazać, że zachodzi wzór rekurencyjny

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \qquad (k = 1, 2, \dots),$$

przy czym $f[x_j] = f(x_j)$.

M 5.8. 1 punkt Dowieść, że jeśli p jest wielomianem stopnia n, to $q(x) := p[x, x_1, \dots, x_k]$ jest wielomianem stopnia $n - k$, z takim współczynnikiem przy x^{n-k}, jaki stoi w p przy x^n.

M 5.9. 1 punkt Wyznaczyć wielomian p o następujących wartościach:

x	-2	-1	0	1	2	3
$p(x)$	31	5	1	1	11	61

Korzystając z tego wyniku podać wielomian q, który ma następujące wartości:

x	-2	-1	0	1	2	3
$q(x)$	31	5	1	1	11	30

M 5.10. 1,5 punktu Załóżmy, że $x_i = a + ih$ dla $i = 0, 1, \dots, n$ i że $h = (b - a)/n > 0$. Wykazać, że dla każdego $x \in [a, b]$ zachodzi nierówność

$$\prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \leqslant \tfrac{1}{4} n! h^{n+1}.$$