Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 2

9 października 2014 r.

M 2.1. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Zaproponować sposób uniknięcia utraty cyfr znaczących wyniku w związku z obliczaniem wartości wyrażeń

$$(\mathbf{a})\ w(x) := -e^{-2x} + e^{x}; \qquad (\boldsymbol{b})\ r_i(p,q) := -p + (-1)^i\sqrt{p^2 - q} \quad (i = 1, 2).$$

M 2.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Pole n-kąta foremnego ($n \geqslant 4$) wpisanego w okrąg o promieniu 1 wynosi

$$P_n = \frac{1}{2} n \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Wartość P_n jest przybliżeniem liczby π – tym lepszym, im większe jest n. Następujący algorytm pozwala oszczędnie obliczać kolejno P_4, P_8, $P_{16}, \ldots$:

$$\begin{aligned}
&s_2 := 1, \quad c_2 := 0, \quad P_4 := 2;\\
&s_k := \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - c_{k-1})}, \quad c_k := \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + c_{k-1})}, \quad P_{2^k} := 2^{k-1}\, s_k \qquad (k = 3, 4, \ldots).
\end{aligned}$$

a) Uzasadnić powyższy algorytm.

b) Stosując wybraną arytmetykę t-cyfrową obliczyć P_{2^k} dla $k = 2, 3, \ldots, 2t$.

c) Czy wyniki są zgodne z oczekiwaniami? Jeśli nie, to jakie jest źródło kłopotów? Jak można ich uniknąć?

M 2.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zbadać uwarunkowanie zadania obliczania wartości funkcji f, podanej wzorem
($\mathbf{a}$) $f(x) = 1/(x^2 + c)$, gdzie c jest stałą; ($\mathbf{b}$) $f(x) = (1 - \cos x)/x$ dla $x \neq 0$.

M 2.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zbadać uwarunkowanie zadania obliczania iloczynu skalarnego $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) := \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \neq 0$ wektorów $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]^T$, $\boldsymbol{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]^T \in \mathbb{R}^n$.

M 2.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wartość sumy $\sum_{k=1}^{n} a_k$, gdzie $n := 2^m$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, można wyznaczyć stosując strategię *dziel i zwyciężaj*. Np. dla $m = 3$ obliczenia wykonywane są wówczas zgodnie z następującym diagramem:

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[dr] & & a_2 \arrow[dl] & & a_3 \arrow[dr] & & a_4 \arrow[dl] & & a_5 \arrow[dr] & & a_6 \arrow[dl] & & a_7 \arrow[dr] & & a_8 \arrow[dl] \\
& s_{12} \arrow[drr] & & & & s_{34} \arrow[dll] & & & & s_{56} \arrow[drr] & & & & s_{78} \arrow[dll] & \\
& & & s_{14} \arrow[drrrr] & & & & & & & & s_{58} \arrow[dllll] & & & \\
& & & & & & & s_{18} & & & & & & &
\end{tikzcd}$$

gdzie $s_{ij} := a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$. Wykazać, że ten algorytm jest numerycznie poprawny i — dla dużych wartości n — dokładniejszy niż zwykły algorytm sumowania.

M 2.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wartość wielomianu $L(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ w punkcie x można obliczyć według następującego *schematu Hornera*:

— Oblicz wielkości pomocnicze $w_0, w_1, \ldots, w_n$ za pomocą wzorów

a) $w_n := a_n$,

b) $w_k := w_{k+1} \times x + a_k \quad (k = n-1, n-2, \ldots, 0)$.

— Wynik: $L(x) = w_0$.

Zakładając, że a_0, a_1, ... , a_n oraz x są liczbami zmiennopozycyjnymi wykazać, że schemat Hornera jest algorytmem numerycznie poprawnym.

M 2.7. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ *Uproszczoną* metodę Newtona

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

stosujemy do wyznaczenia pojedynczego zera funkcji f. Jaki jest rząd zbieżności tej metody?

M 2.8. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Uzasadnić, że odwrotność liczby c można obliczać bez wykonywania dzieleń, za pomocą wzoru $x_{n+1} := x_n(2 - c\,x_n) \quad (n = 0, 1, \ldots)$. Uzasadnić (lokalną?) zbieżność tej metody. Dla jakich wartości x_0 metoda jest zbieżna?

M 2.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będzie $a = 2^d\, r$, gdzie d jest liczbą całkowitą, a r – ułamkiem z przedziału $[\frac{1}{2}, 1)$. Zaproponować efektywną metodę obliczania $\sqrt{a}$, otrzymaną przez zastosowanie metody Newtona do wyznaczania zera pewnej funkcji f. Jak wyznaczyć przybliżenie początkowe x_0?