Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 6

6 listopada 2014 r.

M 6.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech dla $n \in \mathbb{N}$ dane będą punkty $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ oraz taka funkcja f, że pochodna $f^{(n+1)}$ jest ciągła i ma stały znak w przedziale $[x_0,\, x_{n+1}]$. Niech L i M będą takimi wielomianami stopnia $\leqslant n$, że

$$L(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$
$$M(x_j) = f(x_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Wykazać, że dla dowolnego $x \in [x_0,\, x_{n+1}]$ wartość $f(x)$ leży pomiędzy $L(x)$ i $M(x)$.

M 6.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech L oznacza wielomian interpolujący funkcję $f(x) = \ln x - 2(x-1)/x$ w punktach $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 7$, $x_4 = 8$, $x_5 = 10$. Obliczyć wartości $L(2.9)$ oraz $L(5.25)$. Porównać rzeczywiste błędy tych wartości z ich oszacowaniami.

M 6.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech L_n oznacza wielomian interpolujący funkcję $f(x) = \sin 2x$ w punktach $x_i = \frac{i}{n}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Jaka wartość n gwarantuje, że w każdym punkcie x przedziału $[0,\, 1]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant 10^{-4}\,?$$

M 6.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech L_n będzie wielomianem interpolującym funkcję $f(x) = \exp x$ w zerach wielomianu Czebyszewa T_{n+1}. Jaka wartość n gwarantuje, że zachodzi nierówność

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - L_n(x)| \leqslant 10^{-5}\,?$$

M 6.5. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wykazać, że wielomian $I_n \in \Pi_n$ interpolujący funkcję f w węzłach

$$t_k \equiv t_{n+1,k} = \cos \frac{2k+1}{2n+2}\pi \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

(zerach wielomianu T_{n+1}) można zapisać w postaci

$$I_n(x) = {\sum_{i=0}^{n}}{}' \alpha_i\, T_i(x),$$

gdzie

$$\alpha_i := \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f(t_j) T_i(t_j) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

M 6.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Określmy wielomian $H_{2n+1} \in \Pi_n$ za pomocą wzoru

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, h_k(x) + \sum_{k=0}^{n} f'(x_k)\, \bar{h}_k(x),$$

gdzie węzły $x_0, \ldots, x_n$ są parami różne, ponadto

$$\left.\begin{aligned} h_k(x) &:= [1 - 2(x - x_k)\lambda'{}_k(x_k)]\lambda_k^2(x), \\ \bar{h}_k(x) &:= (x - x_k)\lambda_k^2(x), \\ \lambda_k(x) &:= \frac{p_{n+1}(x)}{(x - x_k)p'_{n+1}(x_k)}, \end{aligned}\right\} \qquad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

oraz $p_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$. Wykazać, że H_{2n+1} spełnia warunki

$$H_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \quad H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i) \qquad (0 \leqslant i \leqslant n). \tag{1}$$

M 6.7. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech będzie $f \in C^{2n+2}[a,b]$ i niech wielomian $H_{2n+1}(x) \in \Pi_{2n+1}$ spełnia warunki

$$H_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \quad H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i) \qquad (0 \leqslant i \leqslant n). \tag{2}$$

dla parami różnych węzłów $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$. Udowodnić, że dla każdego $x \in [a,b]$ istnieje taki punkt $\xi \in (a,b)$, że

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) p_{n+1}^2(x).$$

M 6.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznaczyć wielomian $H_5 \in \Pi_5$, spełniający warunki $H_5(x_i) = y_i$, $H'_5(x_i) = y'_i$ $(i = 0, 1, 2)$, gdzie x_i, y_i, y'_i mają następujące wartości:

i	x_i	y_i	y'_i
0	-1	7	-1
1	0	6	0
2	2	22	56

M 6.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będzie $f(x) = \ln x$ i niech wielomian $H_7 \in \Pi_7$ spełnia warunki $H_7(x_i) = f(x_i)$, $H'_7(x_i) = f'(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, gdzie $x_0 = 0.4$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 0.7$ i $x_3 = 0.8$. Podać oszacowanie z góry wielkości $|f(0.6) - H_7(0,6)|$.