Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 7

13 listopada 2014 r.

M 7.1. $\boxed{\text{3 punkty, Włącz komputer!}}$ Niech $f(x) = e^{\arctan(x)}$. Rozważyć interpolację w przedziale $[a, b] := [-5, 5]$ w $n+1$ węzłach równoodległych, gdzie $n = 10$. Znaleźć postać potęgową wielomianu interpolacyjnego $L_n(x)$ oraz naturalną funkcję sklejaną trzeciego stopnia $s(x)$. Podać wartości całek

$$\int_a^b [f''(x)]^2 dx, \qquad \int_a^b [L_n''(x)]^2 dx, \qquad \int_a^b [s''(x)]^2 dx.$$

Wyniki należy przedstawić z dokładnością do 8 cyfr dziesiętnych.

M 7.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będzie $p(x) := 1 + c\,(x+1)^3$ $(-1 \leqslant x \leqslant 0)$, gdzie c jest parametrem rzeczywistym. Wyznaczyć taki wielomian q, żeby wzór

$$s(x) = \begin{cases} p(x) & (-1 \leqslant x \leqslant 0), \\ q(x) & (0 \leqslant x \leqslant 1) \end{cases}$$

definiował naturalną funkcję sklejaną III stopnia, z węzłami -1, 0, 1.
Jaką wartość c należy przyjąć, jeśli chcemy, by $s(1) = -1$?

M 7.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Dla danego naturalnego n, węzłów $t_0, t_1, \ldots, t_n$ $(a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$ oraz punktów na płaszczyźnie $P_i = (x_i, y_i)$ $\quad (i = 0, 1, \ldots, n)$ definiujemy *krzywą sklejaną*

$$S(t) := [s_x(t),\ s_y(t)] \qquad (a \leqslant t \leqslant b),$$

gdzie s_x i s_y są dwiema naturalnymi funkcjami sklejanymi III stopnia, o własnościach:

$$s_x(t_i) = x_i, \quad s_y(t_i) = y_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Sprawdzić, że punkty $P_0, P_1, \ldots, P_n$ leżą na krzywej. Podać oszczędny algorytm konstrukcji krzywej sklejanej $S(t)$.

M 7.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że jeśli s jest naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia, interpolującą funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$, to

$$\int_a^b [s''(x)]^2\, dx = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]\right) M_k,$$

gdzie $M_k := s''(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

M 7.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech s będzie funkcją określoną w zadaniu **7.4**. Wykazać, że dla węzłów $x_k := a + k \cdot h$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, gdzie $h := (b-a)/n$, zachodzi wzór

$$\int_a^b s(x)\, dx = h \sideset{}{''}\sum_{k=0}^{n} f(x_k) - \frac{h^3}{12} \sideset{}{''}\sum_{k=0}^{n} M_k.$$

(Symbol $\sum''$ oznacza sumę, której pierwszy i ostatni składnik należy podzielić przez 2.) Jakie zastosowanie może mieć powyższa równość?

M 7.6. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Niech s będzie funkcją określoną w zadaniu **7.4**. *Momenty* $M_k := s''(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ spełniają układ

$$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k+1} = d_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{1}$$

gdzie $M_0 = M_n = 0$ oraz

$$d_k := 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}], \quad \lambda_k := \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}}, \quad h_k := x_k - x_{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Uzasadnić następujący algorytm rozwiązywania układu (1):

> Obliczamy pomocnicze wielkości $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$, $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ w następujący sposób rekurencyjny:
>
> $$q_0 := u_0 := 0,$$
> $$\left.\begin{aligned} p_k &:= \lambda_k q_{k-1} + 2, \\ q_k &:= (\lambda_k - 1)/p_k, \\ u_k &:= (d_k - \lambda_k u_{k-1})/p_k \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$
>
> Wówczas
>
> $$M_{n-1} = u_{n-1},$$
> $$M_k = u_k + q_k M_{k+1} \qquad (k = n-2, n-3, \ldots, 1).$$

Podać koszt realizacji algorytmu.

M 7.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wielomiany Bernsteina n-tego stopnia definiujemy następująco

$$B_i^{(n)}(t) := \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n, \quad n \geqslant 0.$$

Udowodnić następujące własności:

a) $\sum_{i=0}^{n} B_i^{(n)}(t) \equiv 1$.

b) $B_i^{(n)}(t) \geqslant 0$ dla $t \in [0, 1]$.

c) $B_i^{(n)}(t) = (1-t)B_i^{(n-1)}(t) + tB_{i-1}^{(n-1)}(t)$.

d) $\left[B_i^{(n)}(t)\right]' = n\left(B_{i-1}^{(n-1)}(t) - B_i^{(n-1)}(t)\right)$.

e) $B_i^{(n)}(t) = \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{(n+1)}(t) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{(n+1)}(t)$.

M 7.8. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Niech $B_i^{(n)}(t)$ oznaczają wielomiany Bernsteina n-tego stopnia. Wyprowadzić wzory na współczynniki $a_k^{(n,i)}$, $b_k^{(n,i)}$, dla których

$$B_i^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n,i)} t^k, \qquad t^i = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n,i)} B_k^{(n)}(t).$$