

**KILKA ZADAŃ DO TRENINGU PRZED KOŁOKWIUM**

1. Udowodnij, że

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

2. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej
- $n$
- zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n i^5 < \frac{n^3(n+1)^3}{6}.$$

3. Przy odpowiednich założeniach na
- $n, k$
- (takich, że wszystkie symbole istnieją), udowodnij wzory:

(a)

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1},$$

(b)

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1},$$

(c)

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1},$$

4. Dowiedź, że liczba
- $\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$
- jest niewymierna.

5. Dowiedź, że nie istnieje liczba wymierna
- $q$
- spełniająca równość

$$q^q = 5.$$

6. Liczby
- $a+b$
- ,
- $b+c$
- i
- $c+a$
- są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby
- $a$
- ,
- $b$
- ,
- $c$
- są wymierne?

7. Znajdź kresy zbioru

$$\left\{ \frac{m^2 + 5n^2}{mn} : m, n \in \mathbf{N} \right\}.$$

8. Policz granice następujących ciągów (zbadaj też granice niewłaściwe):

(a)

$$\frac{\sqrt{3^n + n^2}}{\sqrt{3^n + 2^n + 1}}$$

(b)

$$\frac{n^2+1}{n^3+1} + \frac{n^2+2}{n^3+2} + \frac{n^2+3}{n^3+3} + \dots + \frac{n^2+n}{n^3+n}$$

(c)

$$\frac{n!}{n^{22}}$$

9. Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n^3 + k}{n^4 + (-1)^k \cdot k^2}.$$

10. Z definicji oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 5}{3n^2 + n + 1}.$$

11. Pokaż, że następujący ciąg jest zbieżny

$$\prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{1}{(k+1)^3} \right).$$

12. Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}.$$

13. Oblicz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2}.$$

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n$$

14. Zbadaj zbieżność i bezwzględną zbieżność następujących szeregów:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} (-1)^n$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left( 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$$

15. Dla jakich  $x \in \mathbb{R}$  szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3nx) \arctan n}{\sqrt{n}}$$

jest zbieżny?

16. Zrób zadanie 10 z listy 5.

17. Dla których wartości parametrów  $a, b$  funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < 1 \\ x^2 + ax + b & \text{dla } 1 \leq x < 2 \\ x + 3 & \text{dla } 2 \leq x \end{cases}$$

jest ciągła?

18. Załóżmy, że dla każdego  $x \neq 0$  funkcja  $f(x)$  ma własność  $f(x/\sqrt{n}) \rightarrow 0$  gdy  $n \rightarrow \infty$ . Czy funkcja  $f$  ma granicę zero w punkcie zero?

19. Policz granicę

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$$

20. Znajdź funkcję odwrotną do  $\operatorname{arcsinh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$ .

21. Skonstruuj funkcję nieciągłą we wszystkich punktach postaci  $n + 1/n$  dla  $n \in \mathbb{N}$ .

22. Do podanych  $f$ ,  $x_0$  i  $\varepsilon$  dobrać takie  $\delta$ , aby

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(a)  $f(x) = 1/x$ ,  $x_0 = 4$ ,  $\varepsilon = 1/100$

(b)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 30$ ,  $\varepsilon = 1/10$

23. Czy warunek

$$\forall \delta \in (0, 1) \exists \kappa > 0 \forall x, y \in D \quad (|x - y| < \kappa^2 \implies f(x) - f(y) < -(\ln \delta)^{-1})$$

jest równoważny jednostajnej ciągłości funkcji  $f$  na zbiorze  $D$ ?

24. Czy funkcja  $e^x$  jest jednostajnie ciągła na przedziałach  $(-\infty, 0]$ ,  $[-1, 1]$ ,  $[0, \infty)$ . Uzasadnij odpowiedź.

25. Udowodnij, że funkcja  $f(x) = x^{-1/2}$  nie jest jednostajnie ciągła na  $(0, 1]$ .