Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 13

15 stycznia 2015 r.[1]

M 13.1. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wykazać, że macierzowa *norma spektralna*, indukowana przez normę euklidesową wektorów $\|\cdot\|_2$, wyraża się wzorem

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^T A)},$$

gdzie *promień spektralny* $\varrho(A^T A)$ macierzy $A^T A$ jest z definicji jej największą wartością własną.

M 13.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $\operatorname{cond}(A) := \|A\|_p \|A^{-1}\|_p$ ($p \in \{1, 2, \infty\}$) oznacza p-ty wskaźnik uwarunkowania macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Wykazać, że $\operatorname{cond}(A) \geqslant 1$.

b) Wykazać, że $\operatorname{cond}(AB) \leqslant \operatorname{cond}(A)\operatorname{cond}(B)$.

M 13.3. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Niech $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ będzie macierzą o elementach

$$\begin{array}{ll} b_{ii} = 1 & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ b_{ij} = -1 & (i < j), \\ b_{ij} = 0 & (i > j). \end{array}$$

Sprawdzić, że $\det B \ll \operatorname{cond}_\infty(B)$, gdzie $\operatorname{cond}_\infty(B) := \|B\|_\infty \|B^{-1}\|_\infty$. Jaki stąd wniosek?

M 13.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Jak ocenimy uwarunkowanie układu $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, o macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{bmatrix},$$

dla $0 < \varepsilon \leqslant 0.01$?

M 13.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $\tilde{\boldsymbol{x}}$ będzie przybliżonym rozwiązaniem układu $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, gdzie $\det A \neq 0$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{\theta}$. Niech $\boldsymbol{r} := \boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}$ oznacza *resztę*. Wykazać, że wówczas zachodzą nierówności

$$\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\| \leqslant \operatorname{cond}(A)\frac{\|\boldsymbol{r}\|}{\|A\|}, \qquad \frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leqslant \operatorname{cond}(A)\frac{\|\boldsymbol{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|},$$

gdzie $\boldsymbol{x} := A^{-1}\boldsymbol{b}$ jest dokładnym rozwiązaniem.

M 13.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Macierz

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & b_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ c_n & & & b_n & a_n \end{bmatrix},$$

różni się od trójprzekątniowej tylko obecnością narożnych elementów b_1 i c_n. Wyznaczyć rozkład trójkątny macierzy B, przy założeniu, że istnieje.

---

[1] wprowadzono drobną zmianę w treści M13.2 w dniu 18 stycznia 2015

M 13.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że nieosobliwa macierz $A = [a_{ij}^{(1)}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest symetryczna, tj. $a_{ij}^{(1)} = a_{ji}^{(1)}$ dla $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Załóżmy ponadto, że do rozwiązania układu równań liniowych $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ można zastosować metodę eliminacji bez wyboru elementów głównych.

a) Wykazać, że wówczas wielkości $a_{ij}^{(k)}$, otrzymywane w tej metodzie kolejno dla $k = 2, 3, \ldots, n$, są takie, że $a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)}$ dla $i, j = k, k+1, \ldots, n$.

b) Wskazać, jak można wykorzystać ten fakt dla zmniejszenia kosztu metody eliminacji.

M 13.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że jeśli L jest macierzą trójkątną dolną z jedynkami na przekątnej głównej, to L^{-1} również jest macierzą tego typu.

M 13.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ będzie *macierzą dominującą przekątniowo*, tj. taką, że

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Wykazać, że metoda eliminacji Gaussa bez wyboru elementów głównych zachowuje tę własność, tzn. że wszystkie macierze $A^{(k)}$ są dominujące przekątniowo. Wywnioskować stąd, że każda macierz dominująca przekątniowo jest nieosobliwa i posiada rozkład LU.

M 13.10. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że jeśli dowolna norma macierzy B jest mniejsza od 1, to ciąg $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ określony wzorem

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = B\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{c} \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

jest zbieżny do pewnego wektora $\boldsymbol{x}^*$, niezależnie od wyboru $\boldsymbol{x}^{(0)}$, przy czym – przy naturalnym założeniu (jakim?) – zachodzi nierówność

$$\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k)}\| \leqslant \|B\|^k \, \|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(0)}\| \qquad (k \geqslant 1).$$