Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 1

2 października 2014 r.

M 1.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech B będzie liczbą naturalną większą od 1. Wykazać, że każda niezerowa liczba rzeczywista x ma jednoznaczne przedstawienie w *postaci znormalizowanej* $x = smB^c$, gdzie s jest znakiem liczby x, c – liczbą całkowitą (*cechą*), a m – liczbą z przedziału $[1, B)$, zwaną *mantysą*.

M 1.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Dla danych: naturalnej liczby t oraz niezerowej liczby rzeczywistej

$$x = s\,m\,2^c, \tag{1}$$

gdzie s jest znakiem liczby x, c – liczbą całkowitą, a m – liczbą z przedziału $[1, 2)$, o rozwinięciu dwójkowym $m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e_{-k}2^{-k}$, w którym $e_{-k} \in \{0, 1\}$ dla $k \geqslant 1$, definiujemy *zaokrąglenie liczby* x do $t+1$ cyfr za pomocą wzoru

$$\mathrm{rd}\,(x) := s\,\bar{m}\,2^c,$$

gdzie $\bar{m} = 1 + \sum_{k=1}^{t} e_{-k}2^{-k} + e_{-t-1}2^{-t}$.
Wykazać, że

$$|\mathrm{rd}\,(x) - x| \leqslant 2^c\mathsf{u},$$

gdzie $\mathsf{u} := 2^{-t-1}$ jest *precyzją arytmetyki.*

M 1.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech x będzie dowolną niezerową liczbą rzeczywistą. Wykazać, że błąd względny zaokrąglenia liczby x nie przekracza precyzji arytmetyki.

M 1.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Ile jest liczb zmiennopozycyjnych w arytmetyce *single*, a ile w arytmetyce *double* (wg standardu IEEE 754)?

M 1.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech x będzie dowolną niezerową liczbą rzeczywistą. Wykazać, że zachodzi równość $\mathrm{rd}\,(x) = x(1+\varepsilon)$, gdzie ε jest liczbą spełniająca nierówność $|\varepsilon| \leqslant \mathsf{u}$.

M 1.6. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Załóżmy, że $|\alpha_j| \leqslant \mathsf{u}$ i $\rho_j \in \{-1, +1\}$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$ oraz że $n\mathsf{u} < 1$, gdzie $\mathsf{u} := 2^{-t-1}$. Wykazać, że zachodzi równość

$$\prod_{j=1}^{n}(1+\alpha_j)^{\rho_j} = 1 + \theta_n,$$

gdzie θ_n jest wielkością spełniającą nierówność

$$|\theta_n| \leqslant \gamma_n,$$

gdzie z kolei

$$\gamma_n := \frac{n\mathsf{u}}{1 - n\mathsf{u}}.$$

M 1.7. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Załóżmy, że $|\alpha_j| \leqslant \mathsf{u}$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$ oraz że $n\mathsf{u} < 0.01$. Wykazać, że zachodzi równość

$$\prod_{j=1}^{n}(1+\alpha_j) = 1 + \eta_n,$$

gdzie

$$|\eta_n| \leqslant 1.01 n\mathsf{u}.$$