Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 10

4 grudnia 2014 r.

M 10.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Dane są punkty $(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$, $(i = 1, \ldots, n)$. Podać postać macierzy A i wektora prawych stron d układu równań $A\beta = d$ opisującego równanie regresji $Z = \beta_0 + \beta_1\, X + \beta_2\, Y$. $(\beta = [\beta_0, \beta_1, \beta_2]^T)$.

M 10.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Dane są punkty $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $(i = 1, \ldots, n)$. Podać postać macierzy A i wektora prawych stron d układu równań $A\gamma = d$ opisującego równanie regresji $Y = \gamma_0 + \gamma_1\, X + \gamma_2\, X^2$. $(\gamma = [\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2]^T)$.

M 10.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Rozpatrujemy przestrzeń liniową $\mathbb{R}^2$ wraz z przekształceniem

$$\langle x, y\rangle = x^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot y,$$

gdzie $x, y \in \mathbb{R}^2$. Udowodnić, że przekształcenie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jest iloczynem skalarnym.

M 10.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Jaka jest długość wektora $e_1 = [1, 0]^T$ przy iloczynie skalarnym jak w poprzednim zadaniu? Znaleźć wektor o długości 1, prostopadły do e_1.

M 10.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnić, że spośród wszystkich wielomianów stopnia n-tego postaci $w_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$, najmniejszą wartość całki $\int_a^b p(x) w_n^2(x)\, dx$ daje n-ty standardowy wielomian ortogonalny w sensie normy średniokwadratowej z funkcją wagową $p(x)$.

M 10.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znaleźć liczby c_j, dla których *wielomian trygonometryczny* $w_n(x) := \sum_{j=0}^{n} c_j \cos(jx)$ daje najmniejszą wartość całki

$$\int_0^\pi (\pi - x^2 - w_n(x))^2\, dx.$$

M 10.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech p będzie wielomianem stopnia $n+1$ postaci

$$p(x) = x^{n+1} + a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Udowodnić, że $\|p\|_\infty^{[-1,1]} \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

M 10.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznaczyć n-ty wielomian optymalny w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji $f(x) := x^{n+2}$ w przedziale $[-1, 1]$.

M 10.9. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Rozważmy krok algorytmu Remeza, w którym nowy zbiór $D_m = \{x_0^{(m)}, x_1^{(m)}, \ldots, x_{n+1}^{(m)}\}$ powstaje poprzez

a) wymianę jednego punktu ze zbioru D_{m-1}, na taki, dla którego wartość $|f(x) - w_n^{(m-1)}(x)|$ jest maksymalna,

b) wymianę wszystkich punktów ze zbioru D_{m-1} na ekstrema funkcji $f(x) - w_n^{(m-1)}(x)$,

gdzie $w_n^{(k)}$ oznacza n-ty wielomian optymalny dla funkcji f w sensie normy jednostajnej na zbiorze dyskretnym D_k. Udowodnić, że

$$\|f - w_n^{(m-1)}\|_\infty^{D_{m-1}} \leqslant \|f - w_n^{(m)}\|_\infty^{D_m}.$$