Sprawozdanie 6

Stanisław Wilczyński

11 czerwca 2017

Zadanie 1

Podobnie jak na poprzedniej liście, oba zadania dotyczą estymacji ryzyka różnych estymatrów średniej w wielowymiarowym rozkładzie normalnnym. W tym zadaniu, podobnie jak w zadaniu drugim z poprzedniej listy, będziemy porównywać estymowane ryzyka estymatorów największej wiarogodności z modyfikacją estymatora bayesowskiego, tzn. $\hat{\mu}_{MEB} = \left(1 - \frac{\tilde{p}-2}{X^T E^{-1} X}\right) X$, gdzie $\tilde{p} = \frac{Tr(\Sigma)}{\lambda_{max}(\Sigma)}$. Użyjemy ustawień:

$$\mu_1 = (0, 0, \dots, 0)$$

$$\mu_2 \sim N(0, 5I)$$

$$\mu_3 \sim N(20, 5I)$$

dla dlugości wektora $p = 500$. Aby wyestymować ryzyko w każdym przypadku generujemy nasz wektor danych 500 razy i obliczamy średni błąd kwadratowy między średnią, z której generowaliśmy wektor, a otrzymanym estymatorem, tzn. wyciągamy średnią z norm euklidesowych podniesionych do kwadratu różnic średniej i estymatora.

	$\hat{\mu}^{MLE}$	$\hat{\mu}^{MEB}$
μ_1	469.02818	468.11339
μ_2	523.13046	523.02839
μ_3	470.58563	470.49645

Table 1: Estymowane ryzyko estymatorów przy kolejnych ustawieniach

Zgodnie z teorią modyfikacja estymatora bayesowskiego ma mniejsze estymowane ryzyko niż estymator największej wiarogodności. Różnica jednak nie jest duża, prawdopodbnie wynika z tego, że największa wartość własna macierzy jest dość duża (200.6), przez co estymator ma niewielki efekt ściągający do 0.

Zadanie 2

W tym zadaniu będziemy porównywać estymowane ryzyka $\hat{\mu}^{MLE} = X$, $\hat{\mu}^{JS} = \left(1 - \frac{p-2}{||X||^2}\right) X$, $\hat{\mu}^{HTBonf}$ oraz $\hat{\mu}^{HTBenj}$. Dwa ostatnie estymatory są konstruowane na podstawie zasady "hard-thresholding" odpowiednio w procedurze Bonferroniego i Benjaminiego-Hochberga, tzn. dla $\alpha = 0.1$ i $H_{0i} : \mu_i = 0$

$$\hat{\mu}^{HTBonf} = \begin{cases} X_i, \text{ gdy metoda Bonferroniego odrzuca } H_{0i} \\ 0 \text{ w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

oraz

$$\hat{\mu}^{HTBenj} = \begin{cases} X_i, \text{ gdy metoda Benjaminiego-Hochberga odrzuca } H_{0i} \\ 0, \text{ w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

gdzie za nominalne FWER metody Bonferroniego i nominalne FDR metody Benjaminiego-Hochberga przyjmujemy α. Będziemy generować wektor X z rozkładu $N(\mu, I)$ i używać następujących ustawień dla średnich:

$$a)\mu_1 = \ldots = \mu_5 = 3.5, \mu_6 = \ldots = \mu_{500} = 0$$

$$b)\mu_1 = \ldots = \mu_{30} = 2.5, \mu_{31} = \ldots = \mu_{500} = 0$$

$$c)\mu_1 = \ldots = \mu_{100} = 1.8, \mu_{101} = \ldots = \mu_{500} = 0$$

$$d)\mu_1 = \ldots = \mu_{500} = 0.4$$

$$e)\mu_i = \frac{3.5}{\sqrt{i}}$$

$$f)\mu_i = \frac{3.5}{i}$$

Jednym z kryteriów oceny ryzyka estymatorów będzie porównanie ich ryzyka z "naiwnym" estymatorem $\hat{\mu}_0 = 0$, dla którego ryzyko to $E||\mu - \hat{\mu}_0||^2 = ||\mu||^2$.

	$\hat{\mu}^{MLE}$	$\hat{\mu}^{JS}$	$\hat{\mu}^{HTBonf}$	$\hat{\mu}^{HTBenj}$	$\hat{\mu}^{0}$
a	501.864	56.400	40.214	36.251	61.250
b	501.201	137.847	178.330	160.922	187.500
c	502.196	197.785	331.989	334.903	324.000
d	498.967	70.828	82.949	83.956	80.000
e	496.584	72.943	81.294	83.058	83.212
f	501.497	21.334	17.798	18.678	20.126

Table 2: Estymowane ryzyko estymatorów przy kolejnych ustawieniach

Po pierwsze, widzimy, że dla wszystkich ustawień wszytskie estymatory mają mniejsze estymowane ryzyko niż estymator największej wiarogodności, nawet "naiwny"(z powodu takiego wyboru średnich). Po drugie, zauważmy, że $3.5 \approx \sqrt{2 \log p}$, czyli jest to próg detekcji dla metody Bonferroniego. W takim razie przy ustawieniach a) oba estymatory oparte na zasadzie "hard thresholding" są lepsze niż estymator Jamesa-Steina i "naiwny". W drugim przypadku mamy średnie poniżej progu detekcji dla metody Bonferroniego. Skutkuje to gorszymi wynikami estymatorów opartych na zasadzie "hard thresholding". W tym wypadku są już one mniej skuteczne niż estymator Jamesa Steina, ale wciąż lepsze niż estymator "naiwny". Przy ustawieniach c,d,e mamy jeszcze mniejsze średnie co powoduje, że tylko estymator Jamesa-Steina ma ryzyko wyraźnie mniejsze niż estymator "naiwny", w przeciwieństwie do estymatorów opartych na "hard thresholding". W ostatnim przypadku zauważamy jednak zmianę. Estymator Jamesa-Steina przestaje być lepszy od estymatora "naiwnego", a metody "hard thredholding", ponownie stają się od niego lepsze. Wynika to z faktu, że bardzo szybko średnie robią się bardzo bliskie 0, przez co kilka pierwszych średnich jest wykrywana przez te metody, natomiast reszta średnich, które są różne od zera jest traktowane jako szum i dla nich H_{0i} nie są odrzucane, a estymator Jamesa-Steina ściąga do 0, jednak nie wystarczająco mocno.