Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 9

27 listopada 2014 r.

M 9.1. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Rozważmy aproksymację średniokwadratową na zbiorze dyskretnym $D_N = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$. Niech $\{P_k(x)\}_{k=0,1,\ldots,N}$ będzie układem wielomianów ortonormalnych, tzn.

$$\sum_{j=0}^{N} P_r(x_j) P_s(x_j) = \delta_{rs}, \qquad 0 \leqslant r, s \leqslant N,$$

oraz niech $w_n^*(x) := \sum_{k=0}^{N} d_k P_k(x)$, gdzie $d_k := \sum_{j=0}^{N} f(x_j) P_k(x_j)$. Uzasadnić, że spośród wszystkich wielomianów $w_n \in \Pi_n$, najmniejszą wartość sumy

$$\sum_{j=0}^{N} |f(x_j) - w_n(x_j)|^2$$

można uzyskać tylko dla wielomianu w_n^*.

M 9.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Uzasadnić poprawność metody ortogonalizacji Grama-Schmidta.

M 9.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$. Wykazać, że dla dowolnego podprzedziału $[c, d]$ tego przedziału zachodzi nierówność $E_n(f; [c, d]) \leqslant E_n(f; [a, b])$, gdzie $E_n(f; T)$ oznacza n-ty błąd apryksymacji jednostajnej dla funkcji f na zbiorze T, tzn. $E_n(f; T) := \inf_{w_n \in \Pi_n} \|f - w_n\|_\infty^T$.

M 9.4. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Niech f będzie funkcją ciągłą na odcinku $[a, b]$, a w_n — wielomianem stopnia nie wyższego niż n. Udowodnić, że jeśli istnieją takie $n + 2$ punkty $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} \in [a, b]$, że $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ i że

(i) $f(x_j) - w_n(x_j) = -[f(x_{j-1}) - w_n(x_{j-1})] \quad (j = 1, 2, \ldots, n + 1)$,

(ii) $|f(x_k) - w_n(x_k)| = ||f - w_n||_\infty \quad (k = 0, 1, \ldots, n + 1)$,

to w_n jest n-tym wielomianem optymalnym w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji f.

M 9.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznaczyć pierwszy wielomian optymalny w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w przedziale $[0, 1]$.

M 9.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będzie $f(x) = x^{n+1} + a_1 x^n + \ldots + a_n x + a_{n+1}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1;\ a_1, \ldots, a_{n+1}$ – dane stałe) i niech $L_n \in \Pi_n$ będzie wielomianem interpolującym funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$, leżących w przedziale $[-1, 1]$. Jak należy wybrać te węzły, żeby wyrażenie $\|f - L_n\|_\infty^{[-1,1]}$ było możliwie najmniejsze? Uzasadnić odpowiedź.

M 9.7. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech dla $f \in C[a, b]$ istnieją wszystkie pochodne i niech $|f^{(k)}(x)| > 0$ dla każdego $x \in [a, b]$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Wykazać, że dla każdego $n \geqslant 0$ zachodzi wówczas nierówność $E_n(f) > E_{n+1}(f)$.

M 9.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznaczyć trzeci wielomian optymalny w sensie normy jednostajnej na zbiorze $\{0, 1, 2, 4, 6\}$ dla funkcji o wartościach

x_k	0	1	2	4	6
$f(x_k)$	1	9	23	93	259