Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 12

9 stycznia 2015 r.

M 12.1. $\boxed{\text{1 punktu}}$ Wykazać, że dla każdej funkcji $f \in C[a,b]$ ciąg kwadratur Gaussa $\{G_n(f)\}$ jest przy $n \to \infty$ zbieżny do całki $\int_a^b p(x)f(x)\,dx$.

M 12.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będzie $w_n(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' a_k\, T_k(x)$, gdzie T_k jest k-tym wielomianem Czebyszewa, a $\sum'$ oznacza sumę z połowionym pierwszym składnikiem. Wykazać, że

$$\int_{-1}^{1} w_n(x)\,\mathrm{d}x = 2 \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}{}' \frac{a_{2i}}{1-4i^2}.$$

M 12.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znaleźć, o ile to możliwe, takie węzły x_0, x_1 i współczynniki A_0, A_1, żeby dla każdego wielomianu f stopnia $\leqslant 3$ zachodziła równość $\int_0^1 (1+x^2)f(x)\,dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$.

M 12.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznaczyć, o ile to możliwe, takie wartości stałych A, B, C, żeby równość

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{-1/2}\,dx = Af(-1) + Bf(0) + Cf(1)$$

zachodziła dla dowolnego wielomianu f stopnia $\leqslant 5$.

M 12.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Do obliczania całki

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

można użyć *kwadratury Gaussa-Legendre'a*, tj. kwadratury interpolacyjnej

$$GL_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$

której węzły x_0, x_1, $\ldots, x_n$ są zerami $(n+1)$-szego wielomianu ortogonalnego Legendre'a. Obliczyć całkę $\int_0^1 t^4 \sin^2 \pi t\,dt$ stosując kolejno cztero-, sześcio- i ośmiopunktową kwadraturę Gaussa-Legendre'a.

Uwaga: Tablice węzłów i współczynników kwadratur Gaussa-Legendre'a są dostępne np. pod adresem `http://www.convertit.com/Go/ConvertIt/Reference/AMS55.ASP?Res=150&Page=916&Submit=Go` lub `http://dlmf.nist.gov/3.5#v`.

M 12.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Sprawdzić, że wzór $\|\boldsymbol{x}\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k|$, gdzie $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$, definiuje normę w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

M 12.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Sprawdzić, że wzór $\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$, gdzie $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$, definiuje normę w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

M 12.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że dla każdego $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ zachodzą nierówności

a) $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant n\|\boldsymbol{x}\|_\infty$;

b) $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_\infty$;

c) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1$.

M 12.9. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Wykazać, że norma macierzowa indukowana przez normę wektorową $\|\cdot\|_\infty$ wyraża się wzorem

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

M 12.10. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że wzór

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}^2}$$

definiuje submultiplikatywną normę w $\mathbb{R}^{n\times n}$, zwaną *normą euklidesową*, zgodną z normą wektorową $\|\cdot\|_2$.