Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 8

20 listopada 2014 r.

M 8.1. $\boxed{\text{0,5 punkt}}$ Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych w przedziale $[a, b]$ z wagą $p(x)$. Wykazać, że wielomiany $P_0, P_1, \ldots, P_n$ ($n \in \mathbb{N}$) tworzą bazę przestrzeni Π_n.

M 8.2. $\boxed{\text{0,5 punkt}}$ Wykazać, że jeśli $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ jest układem ortogonalnym w przestrzeni $C_p(a, b)$, to elementy $f_1, f_2, \ldots, f_m$ są liniowo niezależne.

M 8.3. $\boxed{\text{0,5 punkt}}$ Niech P_k będzie k-tym ($k > 0$) wielomianem ortogonalnym. Wówczas dla dowolnego wielomianu $Q \in \Pi_{k-1}$ jest $\langle Q, P_k \rangle = 0$.

M 8.4. $\boxed{\text{0,5 punkt}}$ Wykazać, że dla ustalonej funkcji wagowej $p(x)$ i ustalonego przedziału $[a, b]$ ciąg wielomianów ortogonalnych jest określony jednoznacznie, z dokładnością do stałych mnożników.

M 8.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych w przedziale $[a, b]$, z wagą $p(x)$. Wykazać, że dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ wszystkie zera wielomianu P_n są rzeczywiste, pojedyncze i leżą w przedziale otwartym (a, b).

M 8.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnić twierdzenie Pitagorasa, tzn. jeśli $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ jest układem ortogonalnym, to

$$\left\| \sum_{j=0}^{n} c_j f_j \right\|_2^2 = \sum_{j=0}^{n} |c_j|^2 \|f_j\|_2^2.$$

M 8.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnić, że istnieje dokładnie jeden wielomian optymalny $w_n^* \in \Pi_n$ w sensie normy średniokwadratowej.

M 8.8. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Udowodnić, że wielomian $w_n^* \in \Pi_n$ jest n-tym wielomianem optymalnym dla funkcji $f \in C_p[a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego wielomianu $w_n \in \Pi_n$ zachodzi równość

$$\langle f - w_n^*, w_n \rangle = 0.$$

M 8.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $\{P_k(x)\}$ będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych w przedziale $[-a, a]$, z wagą $p(x)$ o własności $p(-x) = p(x)$. Wykazać, że wówczas

$$P_{2m}(x) = S_m(x^2), \qquad P_{2m+1}(x) = x\,R_m(x^2) \qquad (m = 0, 1, \ldots),$$

gdzie S_m, R_m są wielomianami stopnia m.

M 8.10. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem wielomianów, określonych w następujący sposób rekurencyjny:

$$P_0(x) = \alpha_0, \qquad P_1(x) = (\alpha_1 x - \beta_1)P_0(x),$$
$$P_k(x) = (\alpha_k x - \beta_k)P_{k-1}(x) - \gamma_k P_{k-2}(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

gdzie α_k, β_k, γ_k są danymi stałymi. Uzasadnić następujący *uogólniony algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu

$$s_n := a_0 P_0 + a_1 P_1 + \ldots + a_n P_n$$

o danych współczynnikach $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Obliczamy pomocnicze wielkości V_k $(k = 0, 1, \ldots, n+2)$ według wzorów

$$V_k = a_k + (\alpha_{k+1} x - \beta_{k+1})V_{k+1} - \gamma_{k+2} V_{k+2} \qquad (k = n, n-1, \ldots, 0),$$

gdzie $V_{n+1} = 0$, $V_{n+2} = 0$.

Wynik: $s_n(x) = \alpha_0 V_0$.

M 8.11. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że wielomiany Czebyszewa T_k spełniają równości

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-1/2} T_k(x) T_l(x)\, dx = 0 \qquad (k \neq l;\ k, l = 0, 1, \ldots),$$

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-1/2} \left[T_k(x)\right]^2\, dx = \begin{cases} \pi & (k = 0), \\ \pi/2 & (k = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Co one oznaczają?