

Sprawozdanie 4

Stanisław Wilczyński

4 maja 2017

Zadanie 1

W tym zadaniu porównamy moce, False Discovery Rate(FDR) oraz Family-wise Error Rate(FWER) dla procedur Bonferroni, Holma, Hochberga oraz Benjaminiego-Hochberga przy małej liczbie testów. Oczywiście jeśli R będzie liczbą odrzuconych hipotez, a V oraz W będą odpowiednio liczbami prawdziwych hipotez odrzuconych przez procedurę oraz fałszywych hipotez odrzuconych przez procedurę to $FWER = P(V \geq 1)$, a $FDR = \frac{EV}{R}$ oraz $moc = \frac{EW}{R}$. Te wartości będziemy estymować, przeprowadzając symulacje 10000 razy i wyciągając średnią z otrzymanych wyników. W tym zadaniu zmienne generujemy z rozkładu normalnego o wariancji 1 oraz testujemy hipotezy dla $p = 20$: $H_{0i} : \mu_i = 0$ przeciwko $H_{1i} : \mu_i = \sqrt{2 \log \frac{p}{i}}$ dla $i = 1, \dots, 10$ oraz $\mu_i = 0$ dla $i = 11, \dots, p$. Wszystkie testy przeprowadzamy na poziomie istotności $\alpha = 0.05$

	Moc	FDR	FWER
Bonferroni	0.68653	0.01367	0.02350
Holm	0.68636	0.01384	0.02490
Hochberg	0.68643	0.01387	0.02500
Benjamini	0.70760	0.02380	0.07010

Table 1: Wyniki dla procedur przy ustawieniach 1

Ze względu na to, że p jest małe, średnie z rozkładu przy alternatywie nie są za duże. Odzwierciedlenie tego widzimy w tabeli w kolumnie mocy procedur - nie są one specjalnie wysokie. Jeśli chodzi o FWER już dla tak małego p potwierdza się teoria z wykładu: procedury Bonferroni, Holma i wynikowa Hochberga kontrolują FWER na poziomie α , natomiast procedura Benjaminiego-Hochberga nie. Jeśli chodzi o FDR jest on kontrolowany na poziomie α przez wszystkie procedury.

Zadanie 2

W tym zadaniu będziemy również porównywać FWER, FDR oraz moce dla procedur wykorzystanych w poprzednim zadaniu. Tym razem będziemy generować znacznie większe testy: $p = 5000$. Sprawdzimy również inne alternatywy, tzn. $H_{2i} : \mu_i = \sqrt{2 \log p}$ dla $i = 1, \dots, 100$ oraz $\mu_i = 0$ dla $i = 101, \dots, p$, $H_{3i} : \mu_i = 2$ dla $i = 1, \dots, 100$ oraz $\mu_i = 0$ dla $i = 101, \dots, p$, $H_{4i} : \mu_i = 1.2\sqrt{2 \log p}$ oraz $\mu_i = 0$ dla $i = 2, \dots, p$, $H_{5i} : \mu_i = 0.15\sqrt{2 \log p}$ dla $i = 1, \dots, 1000$ oraz $\mu_i = 0$ dla $i = 1001, \dots, p$.

	Moc	FDR	FWER
Bonferroni	0.99876	0.00124	0.04710
Holm	0.99875	0.00125	0.04760
Hochberg	0.99875	0.00125	0.04760
Benjamini	0.95115	0.04885	0.97800

Table 2: Wyniki dla procedur przy ustawieniach 2

Zauważmy, że przy tych ustawieniach moce wszystkich procedur są bliskie 1. Nie jest to zaskakujący rezultat, gdyż ustawiliśmy na pierwszych 100 średnich bardzo duży sygnał. Podobnie jak w zadaniu 1 i zgodnie z teorią, FDR jest kontrolowany na poziomie α przez wszystkie procedury, z tą różnicą, że dla Benjaminiego-Hochberga

jest on bliski α natomiast dla pozostałych trzech jest on bardzo mały. Jeśli chodzi o FWER trzy pierwsze procedury kontrolują go na poziomie α , natomiast dla Benjaminiego-Hochberga wynosi on prawie 1, co wykazuje całkowity brak kontroli FWER dla tych ustawień, co zresztą udowodniliśmy na wykładzie.

	Moc	FDR	FWER
Bonferroni	0.52786	0.03254	0.04650
Holm	0.52786	0.03254	0.04650
Hochberg	0.52786	0.03254	0.04650
Benjamini	0.55879	0.04741	0.12110

Table 3: Wyniki dla procedur przy ustawieniach 3

Przy tych ustawieniach wartości sygnału zostały zmniejszone do 2. Jak widać w tabelce miało to ogromne przełożenie na moc procedur - zmalały one bardzo znacznie dla każdej z nich, jednak wciąż pozostały bliskie sobie. Jeśli chodzi o procedury Bonferroniego, Hochberga i Holma podobnie jak w poprzednich przypadkach kontrolują one FWER i FDR na poziomie α , jednak już nie tak dobrze jak przy poprzednich ustawieniach (wciąż jednak wartości dla tych trzech procedur są do siebie zbliżone). Natomiast dla procedury Benjaminiego-Hochberga FDR jest kontrolowany, w przeciwieństwie do FWER, który ponownie przekroczył wyznaczoną przez nas granicę.

	Moc	FDR	FWER
Bonferroni	0.68317	0.03083	0.04720
Holm	0.68317	0.03083	0.04720
Hochberg	0.68317	0.03083	0.04720
Benjamini	0.66825	0.04915	0.08390

Table 4: Wyniki dla procedur przy ustawieniach 4

Przy tych ustawieniach mamy tylko jeden duży sygnał. Moc wszystkich czterech procedur jest tym razem przeciętna (wciąż podobna). Tak jak poprzednio FDR jest kontrolowany przez wszystkie 4 procedury. Jeśli chodzi o FWER, jak zwykle, Benjamini-Hochberg go nie kontroluje, natomiast dla pozostałych trzech procedur pierwszy raz zauważamy, że bardzo zbliżyły się one do granicy, co wiąże się oczywiście z tym, że mamy tylko jeden sygnał na całe p testów.

	Moc	FDR	FWER
Bonferroni	0.07063	0.03837	0.03990
Holm	0.07063	0.03837	0.03990
Hochberg	0.07063	0.03837	0.03990
Benjamini	0.07245	0.04035	0.04550

Table 5: Wyniki dla procedur przy ustawieniach 5

W ostatnim przypadku ponownie dajemy bardzo dużo, ale już jednak mniejszych, sygnałów. Ma to oczywiście wpływ na moc, która nie jest bardzo wysoka (wciąż podobna dla wszystkich czterech testów). FDR jest kontrolowany przez wszystkie cztery procedury na poziomie istotności α . Tym razem jednak FWER jest kontrolowany przez wszystkie procedury (w tym Benjaminiego-Hochberga), co wynika z faktu, że sygnał jest mały nawet w porównaniu z sygnałem z H_3 .

Możemy zauważyć, patrząc na wszystkie tabelki, że procedury Bonferroniego, Holma i wynikowa Hochberga dla wszystkich przypadków zachowują się bardzo podobnie (czasem nawet identycznie). Ewidentnie zauważamy, że procedura Benjaminiego-Hochberga jest z nich najslabsza - raczej nie kontroluje FWER, a FDR ma zwykle większą wartość niż dla pozostałych procedur. Jedyną zaletą jest delikatnie większa moc dla H_1 , H_3 i H_5 .