Stanisław Wilczyński*

Pracownia z analizy numerycznej
Sprawozdanie do zadania **P.3.3**

Wrocław, 21 stycznia 2016

Spis treści

1. Wstęp

Wielomiany ortogonalne są niezwykle ważne ze względu na ich szerokie zastosowania w metodach numerycznych. Ich szczególnie ciekawym rodzajem są powszechnie znane wielomiany Czebyszewa. Wykorzystuje się je nie tylko w aproksymacji średniokwadratowej, ale również w aproksymacji jednostajnej czy przy obliczaniu całek. Kwadratura Gaussa-Czebyszewa jest przecież kwadraturą bardzo wysokiego rzędu, a jest to nic innego jak całka z wielomianu interpolacyjnego Czebyszewa. Tematem poniższej pracy będzie zastosowanie wielomianów interpolacyjnych Czebyszewa w aproksymacji jednostajnej funkcji oraz próba poprawienia wyniku aproksymacji przez niewielkie modyfikacje tych wielomianów.

2. Definicje oraz twierdzenia

W tym rozdziale przedstawimy podstawowe pojęcia niezbędne do zrozumienia tematu niniejszego sprawozdania. Większość poniższych definicji zostało wziętych z [1].

Definicja 1. *Iloczyn skalarny*
Na przestrzeni liniowej V definiujemy funkcję zwaną iloczynem skalarnym, która każdej parze elementów $f, g \in V$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą $\langle f, g\rangle$ i spełnia następujące warunki:
— $\langle f, f\rangle \geqslant 0$; $\langle f, f\rangle = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $f = 0$
— $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$

* *E-mail*: opos1@onet.eu

— $\langle \alpha f + \beta g, h\rangle = \alpha\langle f, h\rangle + \beta\langle g, h\rangle$
dla dowolnych $f, g, h \in V$ *i* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Definicja 2. *Przestrzeń unitarna*
Przestrzenią unitarną nazywamy przestrzeń liniową wyposażoną w iloczyn skalarny.

Definicja 3. *Ortogonalność*
Mówimy, że w przestrzeni unitarnej V *elementy* f, g *są ortogonalne, jeśli* $\langle f, g\rangle = 0$.

Definicja 4. *Przestrzeń* $l^2_{p,r}$
Przestrzeń unitarna $l^2_{p,r}$ *to przestrzeń funkcji, których dziedziną jest* $\mathbb{R}$, *a przeciwdziedziną podzbiór* $\mathbb{R}$ *z iloczynem skalarnym określonym wzorem:*

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=0}^{r} f(x_i)g(x_i)p(x_i),$$

gdzie $\{x_0, x_1, \ldots, x_r\}$ *jest wyróżnionym zbiorem punktów, a* p *nieujemną funkcją zwaną funkcją wagową.*

Definicja 5. *Norma*
Normą średniokwadratową w $l^2_{p,r}$ *funkcji* f *nazywamy wartość* $||f||_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. *Normą jednostajną w* $l^2_{p,r}$ *nazywamy* $||f||_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$,*gdzie* X *jest wyróżnionym zbiorem punktów naszej przestrzeni.*

Definicja 6. *Wielomian optymalny*
Niech π_n *oznacza przestrzeń wielomianów stopnia nie większego niż* n. n*-tym wielomianem optymalnym względem pewnej normy* $||\cdot||$ *nazywamy wielomian* $w_n \in \pi_n$ *spełniający*

$$||f - w_n|| = inf_{p\in\pi_n}||f - p||.$$

Definicja 7. *Ciąg wielomianów ortogonalnych*
Ciąg $P_0, P_1, \ldots, P_n$, *gdzie* P_k *jest wielomianem stopnia dokładnie* k *nazywamy ciągiem wielomianów ortogonalnych na zbiorze dyskretnym* $\{x_0, x_1, \ldots, x_r\}$, *z wagą* p, *jeśli tworzą one układ ortogonalny w przestrzeni* $l^2_{p,r}$,*tzn.*

$$\langle P_k, P_l\rangle = 0$$

dla $k \neq l$, k,$l = 0, 1, \ldots, n (n \leqslant r)$.
Na danej przestrzeni ciąg wielomianów ortogonalnych jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do mnożników liczbowych([1, strona 93])

Potrzebne będą również dwa twierdzenia o wielomianach optymalnych:

Twierdzenie 1. *(o n-tym wielomianie optymalny względem normy średniokwadratowej)*[1]
Jeśli $\{P_k\}_{k=0}^n$ *jest ciągiem wielomianów ortogonalnych to dla dowolnej funkcji ciągłej* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ n*-ty wielomian optymalny w sensie normy średniokwadratowej jest jedyny i wyraża się wzorem:*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, P_k\rangle}{\langle P_k, P_k\rangle} \cdot P_k.$$

[1] dowód tego twierdzenia można znaleźć w [4, strona 91]

Twierdzenie 2. *(Czebyszewa o alternansie)*[2]
Wielomian w_n jest n-tym wielomianem optymalnym względem normy jednostajnej dla funkcji ciągłej $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje alternans, czyli zbiór $n+2$-punktowy $\{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\} \subset [a,b]$ o własnościach:
1. $e_n(x_k) = -e_n(x_{k-1})$ *dla* $k = 1, 2, \dots, n+1$
2. $|e_n(x_k)| = ||e_n||_\infty$ *dla* $k = 0, 1, 2, \dots, n+1$,

gdzie $e_n = f - w_n$.

2.1. Wielomiany Czebyszewa

Definicja 8. *Wielomiany Czebyszewa*
Wielomianami Czebyszewa nazywamy ciąg wielomianów $\{T_k\}$, gdzie

$$T_k(x) = \cos(k \cdot \arccos x)$$

Wielomiany te spełniają zależność rekurencyjną

$$\begin{aligned} T_k(x) &= 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k = 2, 3, \dots \\ T_1(x) &= x \\ T_0(x) &= 1 \end{aligned}$$

W [1, strony 98-99] podane są dwie ważne własności wielomianów Czebyszewa:
— T_k $(k \neq 0)$ ma zera z_j jednokrotne rzeczywiste, leżące w przedziale $(-1, 1)$ i równe

$$t_{k,j} = \cos\frac{(2j-1)\pi}{2k}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

— T_k $(k \neq 0)$ ma k+1 punktów ekstremalnych u_j:

$$u_{k,j} = \cos\frac{j\pi}{k}, \quad j = 0, 1, \dots, k.$$

Co więcej $T_k(u_{k,j}) = (-1)^j$.
Pokażemy kilka przydatnych twierdzeń o wielomianach Czebyszewa:

Lemat 1. *Dla każdych $n, k, j \in \mathbb{N}$ zachodzi $T_k(u_{n,j}) = T_j(u_{n,k})$.*

Dowód. Weźmy dowolne $n, k, j \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$T_k(u_{n_j}) = \cos(k \cdot \frac{j}{n}\pi) = \cos(j \cdot \frac{k}{n}\pi) = T_j(u_{n,k})$$

□

Twierdzenie 3. *$T_0, \dots, T_N$ tworzą układ ortogonalny w przestrzeni $l^2_{p,N}$, gdzie funkcja wagowa jest stale równa 1, a zbiór punktów to pierwiastki T_{N+1}. Ponadto $\langle T_n, T_n\rangle = \frac{N+1}{2}$ dla $n \neq 0$ oraz $\langle T_0, T_0\rangle = N + 1$.*

Dowód. Do pokazania powyższego twierdzenia będzie potrzebny lemat zawarty w [3]:

Lemat 2. *Jeśli $\alpha, \theta \in \mathbb{R}, \theta \neq 0$ oraz $N \in \mathbb{N}$ mamy:*

$$\sum_{k=0}^{N} \cos(\alpha + k\theta) = \frac{\sin(\frac{N+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} \cdot \cos(\alpha + \frac{N}{2}\theta).$$

[2] [4, strona 122]

Weźmy dowolne $n, m \in \{0, 1, \dots, N\}$. Wtedy

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_m\rangle &= \sum_{k=0}^{N} T_n(t_{N+1,k}) \cdot T_m(t_{N+1,k}) = \sum_{k=0}^{N} \cos\left(n \cdot \frac{2k+1}{2N+2}\pi\right) \cdot \cos\left(m \cdot \frac{2k+1}{2N+2}\pi\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{N} \left[\cos\left((n+m) \cdot \frac{2k+1}{2N+2}\pi\right) + \cos\left((n-m) \cdot \frac{2k+1}{2N+2}\pi\right)\right]\end{aligned}$$

W powyższej równości skorzystaliśmy z tożsamości trygonometrycznej:

$$cos(x) \cdot cos(y) = \frac{1}{2}(cos(x+y) + cos(x-y)).$$

Oznaczmy $\theta_1 = (n+m)\frac{\pi}{N+1}$ wtedy $(n+m)\frac{2k+1}{2N+2}\pi = k\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_1$. Oznaczmy $\theta_2 = (n-m)\frac{\pi}{N+1}$ wtedy $(n-m)\frac{2k+1}{2N+2}\pi = k\theta_2 + \frac{1}{2}\theta_2$. Używając tych oznaczeń dostajemy:

$$\langle T_n, T_m\rangle = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{N} \left[\cos(k\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_1) + \cos(k\theta_2 + \frac{1}{2}\theta_2)\right] \tag{1}$$

Jeśli $n \neq m$ z lematu 2. otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_m\rangle &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\sin((N+1)/2 \cdot \theta_1)}{\sin(\theta_1/2)} \cdot \cos(\theta_1/2 + N\theta_1/2)\right] \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\sin((N+1)/2 \cdot \theta_2)}{\sin(\theta_2/2)} \cdot \cos(\theta_2/2 + N\theta_2/2)\right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\sin((N+1)/2 \cdot \theta_1)}{\sin(\theta_1/2)} \cdot \cos((N+1)\theta_1/2) + \frac{\sin((N+1)/2 \cdot \theta_2)}{\sin(\theta_2/2)} \cdot \cos((N+1)\theta_2/2)\right]\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\sin((N+1)/2 \cdot \theta_1) \cdot \cos((N+1)\theta_1/2) &= \frac{1}{2}\sin((N+1) \cdot \theta_1 = \\ &= \sin((n+m)\pi) = 0.\end{aligned}$$

Analogicznie $\sin((N+1)/2 \cdot \theta_2) \cdot \cos((N+1)\theta_2/2) = 0$. Otrzymujemy, więc $\langle T_n, T_m\rangle = 0$ dla $n \neq m$. Dla $n = m$ podstawiając do 1 dostajemy:

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_n\rangle &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{N}[\cos(k\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_1) + \cos(0)] = \\ &= \frac{N+1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{N} \cos(k\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_1)\end{aligned}$$

Jeśli $2n \neq 0$ korzystamy z lematu 2. i podobnie jak poprzednio otrzymujemy $\sum_{k=0}^{N} \cos(k\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_1) = 0$, a więc dla $n \neq 0$ mamy $\langle T_n, T_n\rangle = \frac{N+1}{2}$. Natomiast dla $n = 0$

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{N} \cos(k\theta_1 + \frac{1}{2}\theta_1) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{N} \cos(0) = \frac{N+1}{2}.$$

W takim razie $\langle T_0, T_0\rangle = N + 1$ $\square$

Twierdzenie 4. *$T_0, \ldots, T_N$ tworzą układ ortogonalny w przestrzeni $l^2_{p,N}$, gdzie zbiór punktów $\{u_{N,i}\}_0^N$ to ekstrema T_N oraz $p(u_{N,i}) = 1$ dla $i \neq 0, N$ oraz $p(u_{N,0}) = p(u_{N,N}) = \frac{1}{2}$. Ponadto $\langle T_n, T_n \rangle = \frac{N}{2}$ dla $n \neq 0, n \neq N$ oraz $\langle T_0, T_0 \rangle = \langle T_N, T_N \rangle = N$.*

Dowód. Weźmy dowolne $n, m \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Wtedy

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_m \rangle &= \sum_{k=0}^{N}{}'' T_n(u_{N,k}) \cdot T_m(u_{N,k}) = \sum_{k=0}^{N}{}'' \cos\left(n \cdot \frac{k}{N}\pi\right) \cdot \cos\left(m \cdot \frac{k}{N}\pi\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{N}{}'' \left[\cos\left((n+m) \cdot \frac{k}{N}\pi\right) + \cos\left((n-m) \cdot \frac{k}{N}\pi\right)\right]\end{aligned}$$

W powyższej równości skorzystaliśmy z tożsamości trygonometrycznej:

$$cos(x) \cdot cos(y) = \frac{1}{2}(cos(x+y) + cos(x-y)).$$

Oznaczmy $\theta_1 = (n+m)\frac{\pi}{N}$ wtedy $(n+m)\frac{k}{N}\pi = k\theta_1$. Oznaczmy $\theta_2 = (n-m)\frac{\pi}{N}$ wtedy $(n-m)\frac{k}{N}\pi = k\theta_2$. Używając tych oznaczeń dostajemy:

$$\langle T_n, T_m \rangle = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{N}{}''[\cos(k\theta_1) + \cos(k\theta_2)] \tag{2}$$

Jeśli $n \neq 0$ i $m \neq 0$ z lematu 2. otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} \cos(k\theta_1) &= \frac{\sin((N+1)/2 \cdot \theta_1)}{\sin(\theta_1/2)} \cdot \cos(N\theta_1/2) = \\ &= \frac{\sin(N/2 \cdot \theta_1)}{\sin(\theta_1/2)} \cdot \cos(\theta_1/2) \cdot \cos(N\theta_1/2) + \frac{\sin(\theta_1/2)}{\sin(\theta_1/2)} \cdot \cos(N\theta_1/2) \cdot \cos(N\theta_1/2) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(N\theta_1)}{\sin(\theta_1/2)} \cdot \cos(\theta_1/2) + \cos^2(N\theta_1/2) = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)\pi)}{\sin(\theta_1/2)} \cdot \cos(\theta_1/2) + \cos(N\theta_1) + 1\right] = \frac{1}{2}[\cos(N\theta_1) + 1]\end{aligned}$$

W powyższym rachunku wykorzystaliśmy tożsamości trygonometryczne:
— $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
— $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$
Podobnie, jeśli $n \neq m$ dostajemy $\sum_{k=0}^{N} \cos(k\theta_2) = \frac{1}{2}[\cos(N\theta_2)+1]$.Podstawiając do 2 otrzymane wyniki dostajemy:

$$\begin{aligned}\langle T_n, T_m \rangle &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{N}[\cos(k\theta_1) + \cos(k\theta_2)] - \frac{1}{4}[\cos(0) + \cos(N\theta_1) + \cos(0) + \cos(N\theta_2)] = \\ &= \frac{1}{4}[\cos(N\theta_1) + 1 - \cos(0) - \cos(N\theta_1) + \cos(N\theta_2) + 1 - \cos(0) - \cos(N\theta_2)] = 0.\end{aligned}$$

Z powyższego rachunku widzimy, że jeśli $\theta_1 \neq 0$(analogicznie dla θ_2) to

$$\sum_{k=0}^{N}{}'' \cos(k\theta_1) = 0.$$

W takim razie dla $n = m$ ale $n \neq 0, N$ dostajemy:

$$\langle T_n, T_n \rangle = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{N}{}'' \cos(0) = \frac{N}{2}$$

. Natomiast dla $n = m = 0$ lub $n = m = N$ mamy

$$\langle T_n, T_n \rangle = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{N}{}'' \cos(0) + \cos(0) = N$$

$\square$

Twierdzenie 5. *Wielomian I_n n-tego stopnia interpolujący funkcję f w zerach T_{n+1} ma postać:*

$$I_n(x) = \frac{2}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n}{}' \left(\sum_{j=0}^{n} f(t_{n+1,j}) T_k(t_{n+1,j}) \right) T_k(x)$$

Dowód. Zauważmy, że na zbiorze dyskretnym $n+1$ punktów wielomian I_n jest optymalny względem normy średniokwadratowej, gdyż

$$||f - I_n||_\infty = \sup_{x \in \{t_{n+1,1}, \ldots, t_{n+1,n+1}\}} |f(x) - I_n(x)| = 0,$$

a z definicji normy jednostajnej dla każdej funkcji jest ona większa lub równa 0. W takim razie z twierdzenia 1. mamy:

$$\begin{aligned}
I_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, T_k \rangle}{\langle T_k, T_k \rangle} \cdot T_k = \\
&= \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n}{}' \langle f, T_k \rangle \cdot T_k = \\
&= \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n}{}' \left(\sum_{j=0}^{n} f(t_{n+1,j}) T_k(t_{n+1,j}) \right) \cdot T_k
\end{aligned}$$

$\square$

Przeprowadzając analogiczne do powyższego rozumowanie udowadnia się:

Twierdzenie 6. *Wielomian J_n n-tego stopnia interpolujący funkcję f w ekstremach T_n ma postać:*

$$J_n(x) = \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n}{}'' \left(\sum_{j=0}^{n}{}'' f(u_{n,j}) T_k(u_{n,j}) \right) T_k(x)$$

Twierdzenie 7. *Wielomian K_n podany wzorem:*

$$K_n(x) = \frac{2}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n}{}' \left(\sum_{j=0}^{n+1}{}'' f(u_{n+1,j}) T_k(u_{n+1,j}) \right) T_k(x)$$

jest n-tym wielomianem optymalnym w sensie normy jednostajnej dla funkcji ciągłej f na zbiorze dyskretnym $U = \{u_{n+1,0}, u_{n+1,1}, \ldots, u_{n+1,n+1}\}$.

Dowód. Z twierdzenia 2 wystarczy pokazać, że U jest alternansem. Niech $e(x) = f(x) - K_n(x)$. Zauważmy, że dla $x \in U$ $f(x) = J_{n+1}(x)$. W takim razie dla $x \in U$ $e(x) = J_{n+1}(x) - K_n(x)$. Dla $k = 0, 1, \ldots, n+1$ mamy(dla skrócenia zapisu będziemy używać u_k zamiast $u_{n+1,k}$):

$$\begin{aligned} e(u_k) &= J_{n+1}(u_k) - K_n(u_k) = \frac{2}{n+1} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{j=0}^{n+1}{}'' f(u_j) T_{n+1}(u_j)\right)\right] T_{n+1}(u_k) = \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \langle f, T_{n+1}\rangle T_{n+1}(u_k) = \frac{\langle f, T_{n+1}\rangle}{n+1} \cdot (-1)^k, \end{aligned}$$

więc dla $k = 1, \ldots, n+1$ mamy $e(u_k) = -e(u_{k-1})$ oraz $|e(u_k)| = ||e||_\infty$ dla $k = 0, 1, \ldots, n+1$, a z tego wynika, że U jest alternansem, co na mocy twierdzenia 2. pociąga za sobą tezę. □

3. Aproksymacja

Teraz zajmiemy się obliczaniem przybliżonego błędu aproksymacji jednostajnej funkcji przy użyciu K_n, I_n, J_n. Do obliczania wartości wielomianu zapisanego w bazie wielomianów Czebyszewa użyjemy algorytmu Clenshawa ([2, strona 275]). W załączonym programie *program.jl* przeprowadzamy rachunki w następujący sposób:

— Obliczanie $I_n(x)$: obliczamy współczynniki zewnętrznej sumy używając funkcji *skalarf* - zwykły iloczyn skalarny. Następnie wykorzystując algorytm Clenshawa(funckja *wielomianC*) obliczamy wartość wielomianu w x.
— Obliczanie $J_n(x)$ i $K_n(x)$ można ulepszyć, gdyż korzystając z lematu 1. możemy wewnętrzne sumy również zapisać jako kombinację liniową wielomianów Czebyszewa, a więc dwukrotnie wykorzystamy tu algorytm Clenshawa.
— Obliczanie przybliżonego błędu: dla każdego z wielomianów liczymy wartości błędu aproksymacji $(|f(x) - I_n(x)|, |f(x) - J_n(x)|, |f(x) - K_n(x)|)$ w punktach $x_0, x_1, \ldots, x_{1000}$, gdzie $x_i = -1 + \frac{i}{1000}$ i spośród nich wybieramy największą wartość.
— Wszystkie obliczenia wykonujemy w arytmetyce DOUBLE.

Obliczenia wykonamy dla funkcji
1. $f_1 = x^2 + \sin x$
2. $f_2 = x^4 \cdot \cos x$
3. $f_3 = (log(\sin x + 10))^3$
4. $f_4 = \frac{x^2}{\sin(x)+1.1} \cdot e^x$

oraz dla $n = 5, 10, 20, 30, 40, 50$. Oznaczmy przez $e_I(f,n), e_J(f,n), e_K(f,n)$ odpowiednio znalezione przez nas największe wartości błędów aproksymacji odpowiednio wielomianami I_n, J_n, K_n dla funkcji f.[3]

n	$e_I(f_1,n)$	$e_J(f_1,n)$	$e_K(f_1,n)$	$e_I(f_2,n)$	$e_J(f_2,n)$	$e_K(f_2,n)$
5	$6 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$
10	$2 \cdot 10^{-11}$	$5 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-8}$
20	$7 \cdot 10^{-11}$	$1 \cdot 10^{-15}$	$1 \cdot 10^{-15}$	$1 \cdot 10^{-11}$	$1 \cdot 10^{-15}$	$1 \cdot 10^{-15}$
30	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-15}$	$1 \cdot 10^{-15}$	$6 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-15}$	$3 \cdot 10^{-15}$
40	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-15}$	$2 \cdot 10^{-15}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-15}$	$2 \cdot 10^{-15}$
50	$9 \cdot 10^{0}$	$1 \cdot 10^{-15}$	$2 \cdot 10^{-15}$	$2 \cdot 10^{0}$	$7 \cdot 10^{-15}$	$1 \cdot 10^{-15}$

[3] Wykresy naszych wielomianów i aproksymowanych funkcji można zobaczyć na samym końcu załączonego programu *program.jl*

n	$e_I(f_3,n)$	$e_J(f_3,n)$	$e_K(f_3,n)$	$e_I(f_4,n)$	$e_J(f_4,n)$	$e_K(f_4,n)$
5	$1 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$
10	$5 \cdot 10^{-10}$	$6 \cdot 10^{-10}$	$4 \cdot 10^{-10}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$
20	$5 \cdot 10^{-10}$	$9 \cdot 10^{-14}$	$6 \cdot 10^{-14}$	$7 \cdot 10^{-10}$	$7 \cdot 10^{-10}$	$4 \cdot 10^{-10}$
30	$1 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-14}$	$1 \cdot 10^{-13}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-14}$	$1 \cdot 10^{-14}$
40	$6 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-13}$	$1 \cdot 10^{-13}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-14}$	$9 \cdot 10^{-15}$
50	$7 \cdot 10^{1}$	$3 \cdot 10^{-13}$	$2 \cdot 10^{-13}$	$6 \cdot 10^{1}$	$9 \cdot 10^{-15}$	$1 \cdot 10^{-14}$

Patrząc ma tabelki, możemy zauważyć,że:

— aproksymacja wielomianem K_n osiąga przeważnie najmniejszą wartość błędu
— aproksymacja I_n dla $n \geqslant 30$ jest nieskuteczna
— błędy aproksymacji K_n i J_n maleją wraz ze wzrostem n aż do $n \leqslant 30$, a dla większych n nie zauważamy znaczącej poprawy wyniku
— dla $n \geqslant 30$ aproksymacja zarówno J_n jak i K_n jest bardzo dobra, gdyż ich błędy są rzędu 10^{-13} albo nawet mniejszego
—

Nieskuteczność I_n bierze się ze względu na numeryczne kłopoty podczas jego obliczania, a dokładnie z powodu funkcji *skalarf* - standardowe obliczanie iloczyny skalarnego jest niestabilne ze względu na kumulujący się w czasie dodawania błąd - liczba tych operacji jest dość duża z powodu potrzeby obliczania wartości wielomianu Czebyszewa w punkcie za pomocą schematu Hornera. W algorytmie Clenshawa liczba tych operacji jest zdecydowanie mniejsza i zjawisko kumulacji błędu podczas dodawania nie ma takiego wpływu na wynik.

4. Podsumowanie

Z przeprowadzonych obliczeń możemy wywnioskować ze wielomiany I_n, J_n, K_n są bardzo dobrymi narzędziami do aproksymowania funkcji względem normy jednostajnej. Już dla 20 punktów, a więc wielomianów 19 stopnia, których obliczenie nie jest dla komputera żadnym wyzwaniem otrzymujemy bardzo dobre wyniki - przybliżony błąd jest dla testowanych przez nas funkcji rzędu nie większego niż 10^{-8}. Wnioskujemy również, że ze względu na numeryczne własności lepiej nie stosować interpolacji I_n ,mimo że zgonie z [4, strony 105-106] błąd ten powinien być najmniejszy ze wszystkich wielomianów interpolacyjnych tego samego stopnia(tzw. twierdzenie o optymalnym doborze węzłów). Stwierdzamy, że aproksymacja wielomianami J_n i K_n jest bardzo skuteczna, ale nie warto przesadzać ze stopniem znajdowanego przez nas wielomianu ze względu na brak poprawy wyniku dla $n \geqslant 30$.

Literatura

[1] J. i M Jankowscy, Przegląd metod numerycznych część 1, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1988.

[2] S. Paszkowski, Zastosowania numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1975

[3] Michael P. Knapp, Sines and Cosines of Angles in Arithmetic Progression, Loyola University Maryland, Baltimore, MD 21210-2699. `http://evergreen.loyola.edu/mpknapp/www/papers/knapp-sv.pdf`

[4] Ake Bjorck, Germund Dahlquist, Metody numeryczne, Polskie Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1987.