

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 2

9 października 2014r.

M 2.1. 1,5 punktu Zaproponować sposób uniknięcia utraty cyfr znaczących wyniku w związku z obliczaniem wartości wyrażeń

$$(a) w(x) := -e^{-2x} + e^x; \quad (b) r_i(p, q) := -p + (-1)^i \sqrt{p^2 - q} \quad (i = 1, 2).$$

M 2.2. 1 punkt Pole n -kąta foremnego ($n \geq 4$) wpisanego w okrąg o promieniu 1 wynosi

$$P_n = \frac{1}{2} n \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Wartość P_n jest przybliżeniem liczby π – tym lepszym, im większe jest n . Następujący algorytm pozwala oszczędnie obliczać kolejno P_4, P_8, P_{16}, \dots :

$$s_2 := 1, \quad c_2 := 0, \quad P_4 := 2;$$

$$s_k := \sqrt{\frac{1}{2}(1 - c_{k-1})}, \quad c_k := \sqrt{\frac{1}{2}(1 + c_{k-1})}, \quad P_{2^k} := 2^{k-1} s_k \quad (k = 3, 4, \dots).$$

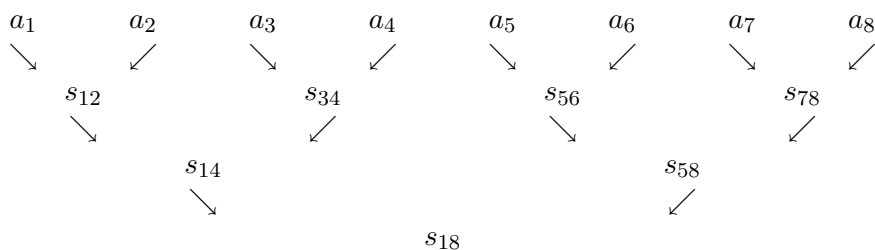
- Uzasadnić powyższy algorytm.
- Stosując wybraną arytmetykę t -cyfrową obliczyć P_{2^k} dla $k = 2, 3, \dots, 2t$.
- Czy wyniki są zgodne z oczekiwaniami? Jeśli nie, to jakie jest źródło kłopotów? Jak można ich uniknąć?

M 2.3. 1 punkt Zbadać uwarunkowanie zadania obliczania wartości funkcji f , podanej wzorem

$$(a) f(x) = 1/(x^2 + c), \quad \text{gdzie } c \text{ jest stałą}; \quad (b) f(x) = (1 - \cos x)/x \quad \text{dla } x \neq 0.$$

M 2.4. 1 punkt Zbadać uwarunkowanie zadania obliczania iloczynu skalarnego $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \sum_{k=1}^n a_k b_k \neq 0$ wektorów $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$, $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T \in \mathbb{R}^n$.

M 2.5. 1 punkt Wartość sumy $\sum_{k=1}^n a_k$, gdzie $n := 2^m$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, można wyznaczyć stosując strategię *dziel i zwyciężaj*. Np. dla $m = 3$ obliczenia wykonywane są wówczas zgodnie z następującym diagramem:



gdzie $s_{ij} := a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$. Wykazać, że ten algorytm jest numerycznie poprawny i — dla dużych wartości n — dokładniejszy niż zwykły algorytm sumowania.

M 2.6. 1 punkt Wartość wielomianu $L(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ w punkcie x można obliczyć według następującego schematu Hornera:

— Oblicz wielkości pomocnicze w_0, w_1, \dots, w_n za pomocą wzorów

a) $w_n := a_n$,

b) $w_k := w_{k+1} \times x + a_k \quad (k = n-1, n-2, \dots, 0)$.

— Wynik: $L(x) = w_0$.

Zakładając, że a_0, a_1, \dots, a_n oraz x są liczbami zmiennopozycyjnymi wykazać, że schemat Hornera jest algorytmem numerycznie poprawnym.

M 2.7. 1,5 punktu Uproszczoną metodę Newtona

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

stosujemy do wyznaczenia pojedynczego zera funkcji f . Jaki jest rząd zbieżności tej metody?

M 2.8. 1,5 punktu Uzasadnić, że odwrotność liczby c można obliczać bez wykonywania dzielenia, za pomocą wzoru $x_{n+1} := x_n(2 - cx_n) \quad (n = 0, 1, \dots)$. Uzasadnić (lokalną?) zbieżność tej metody. Dla jakich wartości x_0 metoda jest zbieżna?

M 2.9. 1 punkt Niech będzie $a = 2^d r$, gdzie d jest liczbą całkowitą, a r – ułamkiem z przedziału $[\frac{1}{2}, 1)$. Zaproponować efektywną metodę obliczania \sqrt{a} , otrzymaną przez zastosowanie metody Newtona do wyznaczania zera pewnej funkcji f . Jak wyznaczyć przybliżenie początkowe x_0 ?