Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 14

23 stycznia 2015 r.[1]

M 14.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oraz dowolnej normy macierzowej $\|\cdot\|$, indukowanej przez pewną normę wektorową, zachodzi nierówność

$$\rho(A) \leqslant \|A\|.$$

M 14.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $\tilde{\boldsymbol{x}}$ oznacza rozwiązanie układu równań liniowych $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ o danej macierzy nieosobliwej A, otrzymane metodą eliminacji, w arytmetyce zmiennopozycyjnej. Dokładność rozwiązania $\tilde{\boldsymbol{x}}$ można poprawić w następujący sposób.

KROK 1 Oblicz wektor $\boldsymbol{r} := \boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}$.

KROK 2 Oblicz rozwiązanie $\boldsymbol{h}$ układu $A\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r}$.

KROK 3 Oblicz poprawione rozwiązanie układu $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ według wzoru $\boldsymbol{x}' := \tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{h}$.

a) Dlaczego w kroku **1** warto obliczyć wektor $\boldsymbol{r}$ z podwójną precyzją?

b) Jak obliczyć możliwie małym kosztem wektor $\boldsymbol{h}$, który pojawia się w kroku **2**?

M 14.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że wszystkie wartości własne λ_i macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ są rzeczywiste i spełniają nierówności

$$0 < \alpha \leqslant \lambda_i \leqslant \beta \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Wykazać, że metoda iteracyjna Richardsona

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (I - \tau A)\boldsymbol{x}^{(k)} + \tau\boldsymbol{b} \qquad (k \geqslant 0),$$

zastosowana do rozwiązania układu równań liniowych $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, jest zbieżna, jeśli $0 < \tau < 2/\beta$.

M 14.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech macierz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spełnia warunki

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

(Mówimy, że A jest macierzą z przekątną dominującą <u>kolumnowo</u>.)
Pokazać, że metoda iteracyjna Jacobiego, zastosowana do układu równań o macierzy A, jest zbieżna.

M 14.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Podać wzory na skalarną wersję relaksacji metody Jacobiego (JOR), tj. metody z macierzą

$$B_{J_\omega} = \omega B_J + (1-\omega)I,$$

gdzie ω jest parametrem.

M 14.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Macierz B_ω, związana z metodą nadrelaksacji (SOR), określona jest wzorem

$$B_\omega := (D + \omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U],$$

gdzie ω jest parametrem. Wykazać, że promień spektralny macierzy B_ω spełnia nierówność

$$\varrho(B_\omega) \geqslant |\omega - 1|.$$

Jaki stąd wniosek?

[1] poprawiono kilka literówek 27 stycznia

M 14.7. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Niech $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Załóżmy, że macierz A jest odwracalna oraz, że $\mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{u} \neq -1$. Udowodnij zależność

$$\left(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T A^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{u}}.$$

M 14.8. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ [**Włącz komputer**] Wykorzystać pakiet LAPACK do rozwiązania układu $Ax = b$, gdzie A jest symetryczną macierzą trójprzekątniową dodatniookreśloną. Należy napisać program w C/C++ (z wykorzystaniem interfejsu LAPACKE) oraz przedstawić jego działanie.