Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Lista M 11

11 grudnia 2014 r.

M 11.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Obliczamy całkę

(1) $$I_p(f) := \int_a^b p(x)f(x)\,dx,$$

gdzie p jest ustaloną funkcją nieujemną w przedziale $[a,b]$, stosując kwadratury

(2) $$Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Korzystając z twierdzenia o warunkach koniecznych i dostatecznych zbieżności ciągu $\{Q_n(f)\}$ do $I_p(f)$ dla dowolnej funkcji ciągłej w przedziale $[a,\, b]$ wykazać, że jeśli

$$A_k^{(n)} \geqslant 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n;\; n = 0, 1, \ldots),$$

to następujące dwa zdania są równoważne:

a) ciąg $\{Q_n(f)\}$ jest zbieżny do całki $I_p(f)$ dla każdej funkcji f ciągłej na odcinku $[a,\, b]$;

b) ciąg $\{Q_n(w)\}$ jest zbieżny do $I_p(w)$ dla dowolnego wielomianu w.

M 11.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Obliczamy wartość całki $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ stosując *kwadraturę Newtona-Cotesa*, czyli kwadraturę interpolacyjną z węzłami równoodległymi $x_k := a + kh$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, gdzie $h := (b-a)/n$:

$$Q_n^{NC}(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f\,(a + kh)\,.$$

Wykazać, że

(3) $$A_k = h(-1)^{n-k} \frac{1}{k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} (t-j)\,\mathrm{d}t \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

M 11.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $A_0,\, A_1, \ldots,\, A_n$ będą podane wzorem (3) i niech będzie $B_k := A_k/(b-a)$ $(k = 0,\, 1, \ldots, n)$. Sprawdzić, że

a) wielkości B_k są liczbami wymiernymi;

b) $B_k = B_{n-k}$ $\;(k = 0,\, 1, \ldots, n)$.

M 11.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Obliczyć $Q_n^{NC}(f)$ dla $n = 2, 4, 6, 8, 10$ dla całki

$$\int_{-4}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2 \operatorname{arc\,tg} 4.$$

Który wynik jest najdokładniejszy? Jak to skomentować?

M 11.5. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Niech $f \in C^4[a,b]$. Obliczamy wartość całki $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ za pomocą kwadratury *Newtona-Cotesa* dla $n = 2$, tj. za pomocą wzoru Simpsona. Udowodnić, że istnieje taka liczba $\eta \in [a,b]$, dla której

$$I(f) - Q_2^{NC}(f) = -\frac{f^{(4)}(\eta)}{90} h^5,$$

gdzie $h = (b-a)/2$.

M 11.6. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech $f \in C^4[a,b]$. Obliczamy wartość całki $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ za pomocą kwadratury *Newtona-Cotesa* dla $n = 3$. Udowodnić, że istnieje taka liczba $\xi \in [a,b]$, dla której

$$I(f) - Q_3^{NC}(f) = -\frac{3f^{(4)}(\xi)}{80}h^5,$$

gdzie $h = (b-a)/3$.

M 11.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że dla dowolnej funkcji f ciągłej w przedziale $[a,\,b]$ ciąg złożonych wzorów trapezów $\{T_n(f)\}$ jest zbieżny do wartości całki $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, gdy $n \to \infty$.

M 11.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$

a) Stosując złożony wzór Simpsona S_n z odpowiednio dobranym n obliczyć przybliżoną wartość całki $\int_0^\pi \sin x\, dx$ z błędem $\leqslant 2 \cdot 10^{-5}$.

b) Jaka wartość n gwarantuje uzyskanie tak dokładnego wyniku, jeśli zamiast wzoru S_n użyjemy złożonego wzoru trapezów T_n?

M 11.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Sprawdzić, że

$$S_n(f) = \frac{1}{3}[4T_n(f) - T_{n/2}(f)] \quad (n = 2, 4, \ldots),$$

gdzie $S_n(f)$ jest złożonym wzorem Simpsona, a $T_n(f)$ – złożonym wzorem trapezów. Jaki jest związek tej obserwacji z metodą Romberga?