

Sprawozdanie 3

Stanisław Wilczyński

17 kwietnia 2017

Zadanie 1

W tym zadaniu będziemy estymować wartości krytyczne testu Higher Criticism na poziomie istotności $\alpha_0 = 0.05$. Niech $p \in (5000, 50000, 500000)$. Zakładamy, że nasze zmienne X_1, \dots, X_p pochodzą z rozkładu normalnego o wariancji 1. Testujemy globalną hipotezę $H_0 : \mu_1, \dots, \mu_p = 0, H_0 = \cap_{i=1}^p H_{0i}$ przeciwko alternatywie H_1 mówiącej, że istnieje μ_i niezerowe. Będziemy generować statystykę

$$HC^* = \max_{0 < \alpha \leq 0.05} \sqrt{p} \frac{F_p(\alpha) - \alpha}{\sqrt{\alpha(1 - \alpha)}},$$

gdzie $F_p(\alpha)$ jest dystrybuantą empiryczną dla p-wartości pojedynczych testów dla hipotez H_{0i} . Wygenerujemy naszą statystykę 100 razy i weźmiemy kwantyl próbkowy rzędu 95%.

Otrzymaliśmy następujące wyniki:

1. Dla $p = 5000$ 2.6899034.
2. Dla $p = 50000$ 2.4111515.
3. Dla $p = 500000$ 2.3118553.

Zadanie 2

W tym zadaniu będziemy estymować moc testów Bonferroniego, Higher Criticism, chi-kwadrat, Kołmogorowa-Smirnowa i Andersona-Darlinga. Niech $p = 5000$. Zakładamy, że nasze zmienne pochodzą z rozkładu normalnego o wariancji 1. Dla $H_0 : \mu_1, \dots, \mu_p = 0$ będziemy testować alternatywy:

$$H_1 : \mu_1 = 1.2\sqrt{2\log p}, \mu_2, \dots, \mu_p = 0$$

$$H_2 : \mu_1, \dots, \mu_{1000} = 0.15\sqrt{2\log p}, \mu_{1001}, \dots, \mu_p = 0$$

$$H_3 : \mu_1, \dots, \mu_{100} = 2, \mu_{101}, \dots, \mu_p = 0$$

Aby oszacować moc, wygenerujemy zmienne 500 razy z rozkładów przy hipotezie alternatywnej i sprawdzimy w jak wielu przypadkach hipoteza zerowa została odrzucona.

	μ_1	μ_2	μ_3
Bonf	0.69	0.11	0.53
HC	0.03	0.80	0.99
ChiKw	0.06	0.98	0.98
KS	0.06	1.00	0.51
AD	0.05	1.00	0.84

Table 1: Estymowane moce testów

Widzimy, że jedynym testem nadającym się do szukania igły w stogu siana(H_1) jest test Bonferroniego, bo pozostałe testy dla jednego sygnału mają bardzo małe moce. Jeśli chodzi o testy Higher Criticism i Chi-Kwadrat zachowują się one bardzo podobnie - zarówno dla wielu małych sygnałów(H_2) jak i mniejszej liczby silniejszych sygnałów(H_3) mają duże moce, a więc są skuteczne. Test Bonferroniego wyłapuje również całkiem dobrze sygnał o wielkości z H_3 - nie radzi sobie jednak z wieloma małymi sygnałami, co już sprawdzaliśmy na liście pierwszej. Jeśli chodzi o test Kołmogorowa-Smirnowa, jest on bardzo skuteczny dla wielu małych sygnałów(H_2), jednak dla przypadku z trzeciej kolumny skuteczność przestaje być zadowalająca. Natomiast test Andersona-Darlinga wypada lepiej - zarówno dla H_3 jak i dla H_2 ma dużą moc.

Zadanie 3

W tym zadaniu będziemy testować hipotezy $H_0 : X_1, \dots, X_p \sim N(0, 1)$ przeciwko $H_1 : X_1, \dots, X_p \sim \epsilon N(\mu, 1) + (1 - \epsilon)N(0, 1)$, gdzie $p \in \{5000, 50000, 500000\}$, $\epsilon = p^{-\beta}$, gdzie $\beta \in \{0.6, 0.8\}$ i $\mu = \sqrt{2r \log p}$, gdzie $r \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$. Dla każdego możliwych ustawień porównamy moce testów Neymana-Pearsona, Higher Criticism, Bonferroni, KS, AD oraz Chi-Kwadrat. Najpierw jednak musimy zasymulować wartości krytyczne dla testu Neymana-Pearsona o statystyce testowej $L = \prod_{i=1}^p ((1 - \epsilon) + \epsilon \exp(\mu X_i - \frac{\mu^2}{2}))$.

	0.1	0.2	0.3	0.4
5000	2.75	3.00	0.55	0.15
50000	2.88	4.54	0.12	0.00
5e+05	2.92	0.90	0.00	0.00

Table 2: Wartości krytyczne dla $\beta = 0.6$

	0.1	0.2	0.3	0.4
5000	1.34	1.60	3.08	3.53
50000	1.16	1.50	2.16	3.96
5e+05	1.10	1.33	1.90	2.16

Table 3: Wartości krytyczne dla $\beta = 0.8$

Teraz porównamy wymienione wcześniej testy. Ustawienie są generowane następująco najpierw ustalamy β , dla którego przeglądamy możliwe wartości p , dla którego przeglądamy kolejne wartości r i stąd $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$ wiersze w tabelce.

	β	p	r	NP	Bonf	HC	ChiKw	KS	AD
1	0.60	5000.00	0.10	0.28	0.06	0.11	0.18	0.07	0.11
2	0.60	5000.00	0.20	0.59	0.17	0.21	0.29	0.08	0.11
3	0.60	5000.00	0.30	0.98	0.56	0.50	0.51	0.09	0.15
4	0.60	5000.00	0.40	0.98	0.57	0.73	0.63	0.06	0.10
5	0.60	50000.00	0.10	0.18	0.02	0.11	0.09	0.06	0.07
6	0.60	50000.00	0.20	0.74	0.18	0.34	0.24	0.06	0.10
7	0.60	50000.00	0.30	1.00	0.58	0.58	0.41	0.12	0.17
8	0.60	50000.00	0.40	1.00	0.94	0.97	0.64	0.03	0.09
9	0.60	500000.00	0.10	0.29	0.04	0.13	0.10	0.08	0.07
10	0.60	500000.00	0.20	0.92	0.24	0.41	0.30	0.03	0.05
11	0.60	500000.00	0.30	1.00	0.76	0.66	0.36	0.07	0.12
12	0.60	500000.00	0.40	1.00	0.95	0.94	0.63	0.05	0.13
13	0.80	5000.00	0.10	0.05	0.03	0.02	0.10	0.12	0.12
14	0.80	5000.00	0.20	0.18	0.09	0.08	0.11	0.03	0.03
15	0.80	5000.00	0.30	0.09	0.09	0.05	0.04	0.04	0.04
16	0.80	5000.00	0.40	0.23	0.19	0.05	0.08	0.05	0.07
17	0.80	50000.00	0.10	0.07	0.07	0.04	0.03	0.04	0.04
18	0.80	50000.00	0.20	0.14	0.08	0.03	0.06	0.04	0.05
19	0.80	50000.00	0.30	0.24	0.18	0.08	0.04	0.05	0.04
20	0.80	50000.00	0.40	0.37	0.20	0.15	0.09	0.06	0.07
21	0.80	500000.00	0.10	0.11	0.03	0.05	0.04	0.05	0.06
22	0.80	500000.00	0.20	0.15	0.05	0.06	0.05	0.06	0.05
23	0.80	500000.00	0.30	0.25	0.18	0.10	0.08	0.03	0.01
24	0.80	500000.00	0.40	0.46	0.19	0.08	0.07	0.07	0.09

Table 4: Moce testów dla kolejnych ustawień

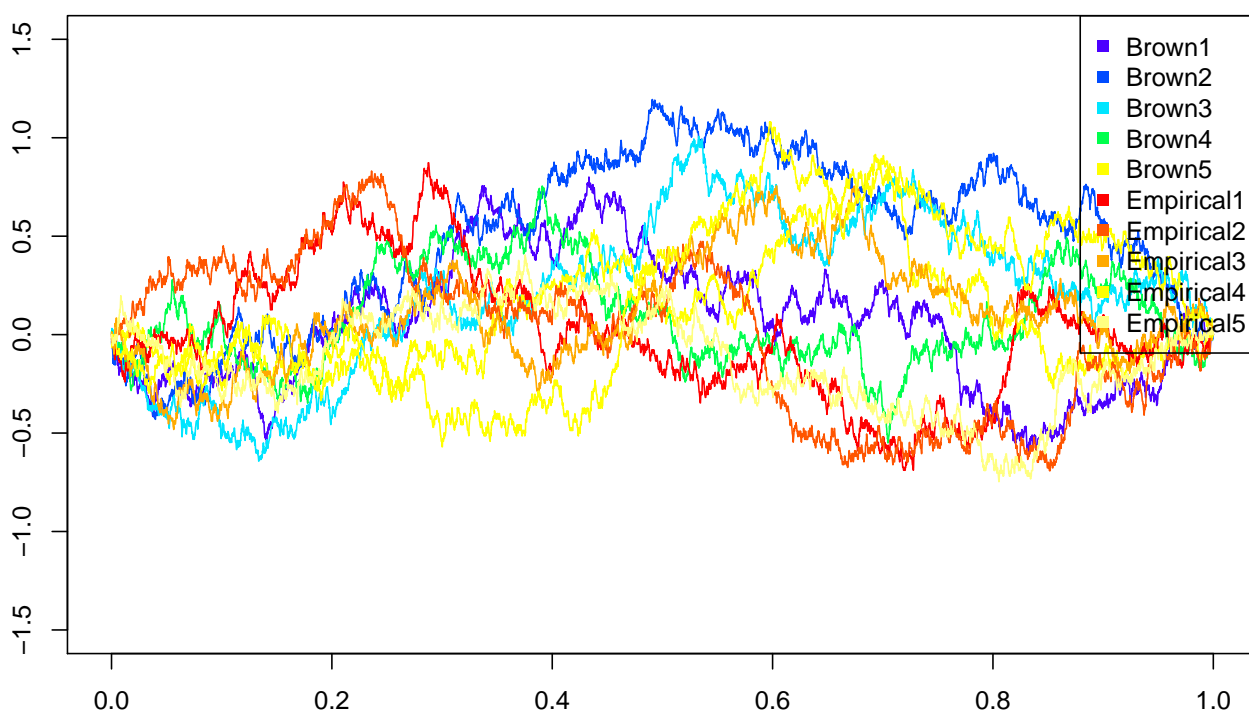
Możemy zauważyć, że zgodnie z oczekiwaniami test Neymana-Pearsona ma największą moc. Zauważamy

również, że dla $\beta = 0.8$ mieszanina jest na tyle rzadka, że żaden test nie działa dobrze - nie osiągamy mocy powyżej 0.5. Co więcej widzimy, że dla ustalonych β, p moc każdego testu rośnie wraz ze wzrostem r , co jest zgodne z teorią, gdyż silniejszy sygnał łatwiej rozpoznać. Ponadto dla $\beta = 0.6$ i ustalonego r możemy zauważyć, że moce testów Neymana-Pearsona, Bonferroniego i Higher Criticism rosną wraz ze wzrostem p , co sugeruje, że te testy przy tych ustawieniach są asymptotycznie mocne względem p . Jeśli chodzi o testy KS i AD widzimy, że przy żadnych ustawieniach się nie mają dużej mocy. Oznacza to, że nie nadają się one do wykrywania rzadkich mieszanin.

Zadanie 4

Niech $p = 5000$. W tym zadaniu wygenerujemy 1000 trajektorii procesu empirycznego $U_p(t)$ na podstawie zmiennych losowych ze standardowego rozkładu normalnego, tzn. $U_p(t) = \sqrt{p}(F_p(t) - t)$, gdzie $F_p(t) = \frac{|\{i: p_i \leq t\}|}{p}$, gdzie p_i są p-wartościami, czyli $p_i = 2(1 - \Phi(x_i))$. Do wygenerowania 1000 trajektorii mostu Browna użyjemy funkcji `rbridge{e1071}`.

Most Browna vs proces empiryczny



Na wykresie przedstawiono przykładowe po 5 wygenerowanych procesów empirycznych i mostów Browna. Z samego wykresu, ciężko coś jednoznacznie wywnioskować, można jednak zauważyć, że procesy mają podobne przebiegi, tzn. bez legendy ciężko odróżnić most Browna od procesu empirycznego. W celu analizy podobieństwa porównujemy kwantyle próbkowe (po to generowaliśmy 1000 trajektorii) rzędu 80% dla statystyk $T_1 = \sup_{t \in (0,1)} |B(t)|$ oraz $T_2 = \sup_{t \in (0,1)} |U_p(t)|$. Wynoszą one odpowiednio 1.0610848 i 1.0647079, co potwierdza teorię z wykładu mówiącą, że $T_1 \xrightarrow{p \rightarrow \infty} T_2$.