时间序列分析作业 2

10161511309 粟嘉逸

日期 2019/11/26

题目 1　设 $[X, Y]^T$ 为二维正态向量，求

1. 用 Y 对 X^2 的最小方差估计
2. 用 Y 对 X^2 的线性无偏最小方差估计

解答 1　设 $Z = [X, Y]^T$ 满足正态分布 $N(\mu_X, \mu_Y; \sigma_X^2, \sigma_Y^2; \rho)$

1. 用 Y 对 X^2 的最小方差估计

我们已习得，用 Y 对 X^2 的最小方差估计为：$E[X^2|Y]$

我们设 Z 的密度函数为 $f(x, y)$，则当 $Y = y$ 时，X 的条件密度函数为:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_X} exp(-\frac{(y-\mu)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_X^2})$$

其中:$\mu_y = \mu_X + (\rho\sigma_X/\sigma_Y)(y - \mu_Y)$

说明已知 $Y = y$ 时,X 的分布为 $N(\mu_y, (1-\rho^2)\sigma_X^2)$

又

$$E[X^2|Y=y] = Var[X|Y=y] + (E[X|Y=y])^2$$

所以

$$E[X^2|Y=y] = (1-\rho^2)\sigma_X^2 + \mu_y^2 = (1-\rho^2)\sigma_X^2 + [\mu_X + (\rho\sigma_X/\sigma_Y)(y-\mu_Y)]^2$$

从而有

$$E[X^2|Y] = (1-\rho^2)\sigma_X^2 + [\mu_X + (\rho\sigma_X/\sigma_Y)(Y-\mu_Y)]^2$$

2. 用 Y 对 X^2 的线性无偏最小方差估计

我们已习得，该估计表达式为:

$$\hat{X_Y^2} = E[X^2] + Cov(X^2, Y) \cdot Cov(Y, Y)^+(Y - E[Y])$$

由已知有:

$$E[X^2] = Var[X] + E[X]^2 = \sigma_X^2 + \mu_X^2$$

与

$$Y - E[Y] = Y - \mu_Y$$

特别地，当 Y 为随机变量的时候，我们不妨将其视作一维的随机向量，于是有:

$$Cov(Y, Y)^+ = 1/\sigma_Y^2$$

根据定义，我们计算得到:

$$Cov(X^2, Y) = E[(X^2 - E[X^2])(Y - E[Y])] = 2\rho\mu_X\sigma_X\sigma_Y$$

综上有，所求估计式为:

$$\hat{X_Y^2} = \sigma_X^2 + \mu_X^2 + 2\rho\mu_X\sigma_X/\sigma_Y(Y - \mu_Y)$$

题目 2 考虑如下的线性随机系统

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Dw(k+1) \\ y(k) &= Cx(k) + Fw(k) \end{cases}$$

$$x(k) \in R^n, y(k) \in R^n, w(k) \in R^n$$

$w(k)$ 满足 $w(k+1) = Mw(k) + \xi(k), M \in R^{m\times m}$,$\xi(k)$ 为零均值白噪声

用 y^k 求 $x(k), x(k+1)$ 线性无偏最小方差估计，并求 Kalman 滤波方程