时间序列分析作业三

10161511309 栗嘉逸

2019 年 12 月 17 日

题目一：

$$a_t p_t \varphi_t = O(1) \quad a.s$$
$$a_t \left\| p_t \varphi_t \right\| = O(1) \quad a.s$$

证明

题目二：考虑线性动态系统

$$y(t) = \theta^T x(t) + e(t)$$
$$y(t) \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}^d, x(t) \in \mathbb{R}$$
$$e(t) \sim N(0, \lambda(t)) \quad \text{相互独立}$$

试给出 θ 的极大似然估计

证明

我们假设在 n 个时间 $t_1, t_2, ...t_n$ 处进行观测，设这些时刻的输入为 $x(t_1), x(t_2), ...x(t_n)$，观测到的输出为 $y(t_1), y(t_2), ...y(t_n)$

则对应这些观测值的概率密度为：

$$p\{e(t_i) = y(t_i) - x(t_i)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda(t_i)} exp\{-\frac{1}{2\lambda t_i}[y(t_i) - \theta^T x(t_i)]^2\}$$

我们设 $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_d) \in \mathbb{R}^d$，则似然函数：

$$L(t_1, t_2, ...t_n; \theta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i)} exp\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [y(t_i) - \sum_{k=1}^{d} \theta_k x_k(t_i)]^2\}$$

取对数得:

$$lnL = C - 1/2\sum_{i=1}^{n}\frac{[y(t_i) - \sum_{k=1}^{d}\theta_k x_k(t_i)]^2}{\lambda(t_i)}$$

其中 C 为与 θ 无关的已知数。
又由:

$$\frac{\partial lnL}{\partial\theta_l} = \frac{(y(t_i) - \sum_{k=1}^{d}\theta_k x_k(t_i))(x_l(t_i))}{\lambda(t_i)} = 0$$

可以得到:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{y(t_i)}{\lambda(t_i)}x_l(t_i) = \sum_{k=1}^{d}[\sum_{i=1}^{n}x_k(t_i)x_l(t_i)]\theta_k$$

其中 $l = 1, 2, ..., d$
这是一个 d 元的线性方程组
我们不妨设 $Y = [\sum_{i=1}^{n}\frac{y(t_i)}{\lambda(t_i)}x_1(t_i), \sum_{i=1}^{n}\frac{y(t_i)}{\lambda(t_i)}x_2(t_i)), ..., \sum_{i=1}^{n}\frac{y(t_i)}{\lambda(t_i)}x_d(t_i)]^T$
并且 $A = [\sum_{k=1}^{n}x_j(t_k)x_i(t_k)]_{i,j}$
则 A 是一个 $d \times d$ 的矩阵
从而方程组可以表示为

$$Y = A\theta$$

并且一定有解 (因为 Y 为 d 维向量而 $rankA \leq n$ ，且 A 是方阵),
这个解可以表达为:

$$\hat{\theta}_{MLE} = A^{+}Y + (I - A^{+}A)T$$

(其中 T 为任意的 $d \times d$ 矩阵)
这即是 θ 的一个最大似然估计