

ĐƯỜNG VÀ MẶT TRONG MẶT PHẪNG VÀ KHÔNG GIAN

Trần Đình Viện

Ngày 20 tháng 8 năm 2014

Mục lục

I. Hình học trong mặt phẳng	4
1. Ôn tập một số kiến thức cơ bản trong chương trình PTTH	5
1.1. Các phép tính về vectơ	5
1.1.1. Phép cộng vectơ	5
1.1.2. Nhân vectơ với một số thực	5
1.1.3. Tích vô hướng của hai vectơ	5
1.1.4. Tích vectơ của hai vectơ trong không gian	6
1.1.5. Tích hỗn hợp của 3 vectơ	6
1.2. Hệ tọa độ ĐềCÁC vuông góc trong mặt phẳng và trong không gian	6
1.3. Đường thẳng	6
1.4. Tam giác và vòng tròn	6
1.5. Các phép biến hình trong mặt phẳng	6
2. Đại cương về đường cong trong mặt phẳng	7
2.1. Biểu diễn tham số (BDTS) một cung	7
2.2. Đường cong trong hệ tọa độ cực (HTĐC)	7
3. Các đường cong bậc hai	8
3.1. Đường conic	8
3.2. Phân loại đường bậc hai từ phương trình tổng quát	8
4. Đường cong có dạng hình hoa	9
4.1. Đường Hoa hồng 4 cánh	9
4.2. Đường Hoa đơn	9
4.3. Đường cong có phương trình	9
4.4. Hoa đơn 2 (\mathcal{D}_2)	9
4.5. Đường hoa kép1 và đường răng cưa	9
4.6. Hoa kép 2 (\mathcal{K}_2)	9
5. Một số đường cong có hình dạng đặc biệt khác	10
5.1. Đường Xycloit	10
5.2. Đường Epyxycloit	10
5.3. Đường Hình Tim	10
5.4. Đường cong Hypoxycloit	10
5.5. Đường Ovan- Cassini và đường Lemniscat-Becnui-y	10

5.6. Đường cong có dạng hình “con cá”	10
5.7. Các đường Xoắn ốc	10
5.8. Đường Hình lưới	10

II. Hình học trong không gian 11

6. Sơ lược về đường cong trong không gian 12

6.1. Biểu diễn tham số (BDTS) một đường cong trong không gian	12
6.2. Tiếp tuyến với đường cong tại một điểm	12
6.3. Mục tiêu Frenet của đường cong (C) tại $M(t)$	12
6.4. Độ cong và độ xoắn của đường cong	12
6.5. Các đường đỉnh ốc	12

7. Đại cương về mặt trong không gian 13

7.1. Biểu diễn tham số một mặt	13
7.2. Phương trình dạng ẩn của một mặt	13
7.3. Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong	13
7.4. Lưới tọa độ cong trên mặt	13
7.5. Độ cong Gauss và độ cong trung bình của mặt	13

8. Một số mặt cong thường gặp 14

8.1. Mặt tròn xoay	14
8.2. Mặt kẻ và mặt khả triển	14
8.3. Mặt xoắn	14
8.4. Mặt ống	14

Phần I.

Hình học trong mặt phẳng

1. Ôn tập một số kiến thức cơ bản trong chương trình PTTH

1.1. Các phép tính về vectơ

1.1.1. Phép cộng vectơ

Cho 2 vectơ \mathbf{u} và \mathbf{v} , đặt $\vec{OA} = \mathbf{u}$, $\vec{OB} = \mathbf{v}$. Gọi C là đỉnh của hình bình hành $OACB$. Ký hiệu $\mathbf{w} = \vec{OC}$ là tổng của \mathbf{u} và \mathbf{v} .

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \quad (1.1)$$

Chú ý: định nghĩa tổng vectơ nói trên không phụ thuộc vào việc chọn điểm đặt O .
Tính chất của phép cộng vectơ:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad (\text{Tính giao hoàn}) \quad (1.2)$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \quad (\text{Tính kết hợp}) \quad (1.3)$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} \quad (1.4)$$

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (1.5)$$

1.1.2. Nhân vectơ với một số thực

Tích của số a với vectơ \mathbf{u} là một vectơ (kí hiệu là $a\mathbf{u}$) cùng phương với \mathbf{u} , cùng chiều với \mathbf{u} nếu $a > 0$, ngược chiều với \mathbf{u} nếu $a < 0$ có độ dài $= |a||\mathbf{u}|$. Ta nói $a\mathbf{u}$ cộng tuyến với \mathbf{u} . Tính chất:

$$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v} \quad (1.6)$$

$$(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u} \quad (1.7)$$

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad (1.8)$$

$$0\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (1.9)$$

1.1.3. Tích vô hướng của hai vectơ

Tích vô hướng của \mathbf{u} và \mathbf{v} (kí hiệu là $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$) là một số $= |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})$; (\mathbf{u}, \mathbf{v}) kí hiệu là số đo của góc tạo bởi \mathbf{u} và \mathbf{v} .

Suy ra

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad (\text{tính giao hoàn}) \quad (1.10)$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \quad (\text{tính phân phối}) \quad (1.11)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \text{ (kí hiệu là } \mathbf{u}^2) = \mathbf{u}^2 \quad \text{Ta có } (\mathbf{u} + \mathbf{v})^2 = \mathbf{u}^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}^2 \quad (1.12)$$

Ta có

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{u} \perp \mathbf{v} \quad (\text{hoặc một trong hai vectơ đó} = \mathbf{0}) \quad (1.13)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \quad (\text{nếu hai vectơ cùng chiều}) \quad (1.14)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \quad (\text{nếu hai vectơ ngược chiều}) \quad (1.15)$$

1.1.4. Tích vectơ của hai vectơ trong không gian

Tích vectơ của \mathbf{u} và \mathbf{v} là vectơ \mathbf{w} , với ký hiệu: $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, có tính chất

\mathbf{w} vuông góc với \mathbf{u} và \mathbf{v} ,

$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ làm thành một tam diện thuận,

$$|\mathbf{w}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

Tính chất của tích vectơ:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u} \quad (1.16)$$

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{u} \times \mathbf{v}_1 + \mathbf{u} \times \mathbf{v}_2 \quad (1.17)$$

1.1.5. Tích hỗn hợp của 3 vectơ

1.2. Hệ tọa độ ĐềCác vuông góc trong mặt phẳng và trong không gian

1.3. Đường thẳng

1.4. Tam giác và vòng tròn

1.5. Các phép biến hình trong mặt phẳng

2. Đại cương về đường cong trong mặt phẳng

2.1. Biểu diễn tham số (BDTS) một cung

2.2. Đường cong trong hệ tọa độ cực (HTĐC)

3. Các đường cong bậc hai

3.1. Đường conic

3.2. Phân loại đường bậc hai từ phương trình tổng quát

4. Đường cong có dạng hình hoa

4.1. Đường Hoa hồng 4 cánh

4.2. Đường Hoa đơn

4.3. Đường cong có phương trình

4.4. Hoa đơn 2 (\mathcal{D}_2)

4.5. Đường hoa kép¹ và đường răng cưa

4.6. Hoa kép 2 (\mathcal{K}_2)

5. Một số đường cong có hình dạng đặc biệt khác

5.1. Đường Xycloit

5.2. Đường Epyxycloit

5.3. Đường Hình Tim

5.4. Đường cong Hypoxycloit

5.5. Đường Ovan- Cassini và đường Lemniscat-Becnui-y

5.6. Đường cong có dạng hình “con cá”

5.7. Các đường Xoắn ốc

5.8. Đường Hình lưới

Phần II.

Hình học trong không gian

6. Sơ lược về đường cong trong không gian

6.1. Biểu diễn tham số (BDTS) một đường cong trong không gian

6.2. Tiếp tuyến với đường cong tại một điểm

6.3. Mục tiêu Frenet của đường cong (\mathcal{C}) tại $M(t)$

6.4. Độ cong và độ xoắn của đường cong

6.5. Các đường đỉnh ốc

7. Đại cương về mặt trong không gian

7.1. Biểu diễn tham số một mặt

7.2. Phương trình dạng ẩn của một mặt

7.3. Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong

7.4. Lưới tọa độ cong trên mặt

7.5. Độ cong Gauss và độ cong trung bình của mặt

8. Một số mặt cong thường gặp

8.1. Mặt tròn xoay

8.2. Mặt kẻ và mặt khả triển

8.3. Mặt xoắn

8.4. Mặt ống