Derived Categories and Localisation

Sascha Roggatz

January 20, 2021

Contents

1 Grundlagen

1.1 Wichtige Begriffe zu Kategorien

Betrachte folgendes Setting
- C, D Kategorien, $F : C \mapsto D$ Funktor, $B \subset C$, $a, b, s, q, x, z \in Obj(C)$, $f : a \mapsto b$

Dann heisst
- B vollstaendige Unterkategorie von C, falls

i) $Obj(B) \subset Obj(C)$

ii) $\forall X, Y \in Obj(B) : Mor_B(X, Y) = Mor_C(X, Y)$

- Morphismus $m : a \mapsto b$ monomorph, falls

i) $fuer\ g_1, g_2 : x \mapsto a\ folgt\ aus\ m \circ g_1 = m \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$

- Morphismus $e : a \mapsto b$ epimorph, falls

i) $fuer\ g_1, g_2 : b \mapsto x\ folgt\ aus\ g_1 \circ e = g_2 \circ e \Rightarrow g_1 = g_2$

- Morphismus $k : d \mapsto a$ Kern, falls

i) $f \circ k = 0$

ii) $zu\ h : x \mapsto a\ \exists! h' : x \mapsto d : h = k \circ h'$

- Morphismus $k : b \mapsto d$ Kokern, falls

i) $k \circ f = 0$

ii) $zu\ h : b \mapsto x\ \exists! h' : d \mapsto x : h = h' \circ k$

- Funktor F volltreu, falls

i) $Mor_C(a, b) \mapsto Mor_D(F(a), F(b)), f \mapsto F(f)\ bijektiv$

- Funktor F Aequivalenz von kategorien, falls

i) $\exists G : D \mapsto C,\ sodass\ F \circ G \cong id_D\ und\ G \circ F \cong id_C$

1.2 Was ist eine abelsche Kategorie?

Sei A Kategorie. A heisst abelsch, falls $\forall X, Y, Z \in$ Obj(A):

i) $\forall f, f_1, f_2 \in Hom_A(X,Y), g, g_1, g_2 \in Hom_A(Y,Z):$

$$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$$

$$(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$$

ii) $\forall X_1, X_2 \exists X_1 \otimes X_2 \, mit \, Morphismen \, p_v : X_1 \otimes X_2 \mapsto X_v \, und \, i_v : X_i \mapsto X_1 \otimes X_2 :$

$$p_v \circ i_v = id_{X_v}$$

$$i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = id_{X_1 \otimes X_2}$$

iii) $\exists \, Nullobjekte$

iv) $\exists \, Kerne, \; Kokerne$

v) $Jeder \, Monomorphismus \, ist \, Kern, \; jeder \, Epimorphismus \, ist \, Kokern$

1.3 Was sind Kettenkomplexe?

Eine Familie C_n von Objekten aus abelschen Kategorie mit Morphismen $d_n : C_n \mapsto C_{n-1}$, sodass $d_n \circ d_{n+1} : C_{n+1} \mapsto C_{n-1} = 0$ heisst Kettenkomplex. Dazu definieren wir $H_n(C) := ker(d_n)/im(d_{n+1})$ und bezeichnen dieses als Homologieobjekt. Ein Kettenkomplex (C_*, d_*) heisst exakt, falls alle $H_n(C)$ verschwinden. Wir nennen $Kom(A)$ die Kategorie der Kettenkomplexe abelscher Kategorien. Ein Morphismus $u : C \mapsto D$ von Kettenkomplexen ist eine Familie von Morphsimen $u_n : C_n \mapsto D_n$. $u : C \mapsto D$ heisst quasi-Isomorphismus, falls alle $H_n(C) \mapsto H_n(D)$ Isomorphismen sind.

2 Abgeleitete Kategorien

2.1 Definition

Sei A abelsche Kategorie und Kom(A) die Kategorie der Komplexe über A. Dann $\exists$ Kategorie D(A) und ein Funktor $Q : Kom(A) \mapsto D(A)$:

i) $Q(f)\, ist\, Isomorphismus\, fuer\, jeden\, quasi - Isomorphismus\, f : A \mapsto B$**:**

$$H_n(A_0) \mapsto H_n(B_0)\, ist\, Isomorphismus$$

ii) $Fuer\, jeden\, Funktor\, F : Kom(A) \mapsto D\, gilt$**:**

$$\exists! Funktor\, G : D(A) \mapsto D : F = G \circ D$$

D(A) heisst abgeleitete Kategorie von A. A heisst halbeinfach, falls jedes exakte Triple T in A isomorph zu $0 \mapsto X \mapsto X \oplus Y \mapsto Y \mapsto 0$ ist.

2.2 Beweisskizze zur Existenz eine Lokalisierung

Sei B eine Kategorie und S eine Klasse von Morphismen in B. Wir wollen eine Kategorie $B[S^{-1}] =: B_S$ und einen Funktor $Q : B \mapsto B_S$ konstruieren. Dazu setzen wir $Obj(B_S) = Obj(B)$ und gehen wir folgt vor:
- Konstruiere Morphismen in B_S

i) $Variable\, x_s\, fuer\, jedes\, s \in S$

ii) $gerichteten\, Graph\, \Gamma$**:**

iii) $Pfad\, in\, \Gamma\, endliche\, Folge\, von\, Kanten$

iv) $Morphismus\, in\, B_S\, ist\, Aequivalenzklasse\, von\, Pfaden\, in\, \Gamma$

v) $Komposition\, von\, Morphismen\, \rightarrow\, entsprechende\, Pfade\, verbinden$

- Zum Funktor $Q : B \mapsto B_S$

i) $Q\, bildet\, Morphismus\, X \mapsto Y\, in\, Klasse\, der\, Pfade\, X \mapsto Y\, ab$

ii) $\forall s \in S : Q(s)\, ist\, Isomorphismus\, in\, B_S$

iii) $Funktor\ F : B \mapsto B'.Definiere\ G : B_S \mapsto B'\ mit\ F = G \circ Q\ durch$

$$G(X) = F(X),\ X \in Obj(B_S) = Obj(B)$$

$$G(f) = F(f),\ f \in Mor(B)$$
$$G(x_s) = F(s^{-1}),\ s \in S$$

Damit haben wir die Objekte der Kategorie B_S und deren Morphismen angegeben.

2.3 Wie studiert man die Struktur abgeleiteter Kategorien?

Idee: Studiere zyklische Komplexe. Dazu geben wir skizzenhaft eine Aequivalenz von Kategorien an:

i) $Komplex\ ZK\ heisst\ zyklisch,\ falls\ alle\ Differentiale\ null\ sind$

ii) $Es\ gilt : Kom_0(A) \subset Kom(A)\ ist\ vollstaendige\ Unterkategorie$

iii) $Kom_o(A) \cong \prod_{n=-\infty}^{\infty} A_n$

iv) $i : Kom(A) \mapsto Kom_0(A),\ h : Kom(A) \mapsto Kom_0(A)$**:**

$$h((K^n, d^n) = (H^n(K', 0)))$$

$$h(f : K' \mapsto L') = H^n(f)$$

v) $h\ kann\ ueber\ D(A)\ faktorisiert\ werden$**:**

vi) $Abelsche\ Kategorie\ A\ heisst\ halbeinfach,\ falls\ fuer\ jedes\ exakte\ Triple\ T$**:**

$$T \cong 0 \mapsto X \mapsto X \oplus Y \mapsto Y \mapsto 0$$

$$Funktor\ D(A) \mapsto Kom_0(A)\ ist\ Aequivalenz\ von\ Kategorien$$

Diese gilt nur fuer halbeinfache Kategorien. Allgemein ist ersichtlich, dass wir deren Struktur ueber Morphismen zu Kategorien, deren Struktur einfacher zu verstehen und untersuchen ist, studieren.

3 Lokalisierung

3.1 Definition

Sei B beliebige Kategorie. $S \in Mor(B)$ Klasse von Morphismen heisst Lokalisierung, falls gilt:

i) *S ist abgeschlossen*:

$$X \in Obj(B) \Rightarrow id_X \in S$$

$$s, t \in S \Rightarrow s \circ t \in S$$

ii) $\forall f \in Mor(B), s \in S\ \exists g \in Mor(B), t \in S$:

iii) *Seien $f, g : X \mapsto Y$*:

$$\exists s \in S :\ sf = sg \equiv \exists t \in S :\ ft = gt$$

3.2 Wie stellen wir $B[S^{-1}]$ dar?

Sei S Lokalisierungsklasse von Kategorie B. Dann kann $B[S^{-1}] =: B_S$ beschrieben werden durch:

i) $Obj(B_S) = Obj(B)$

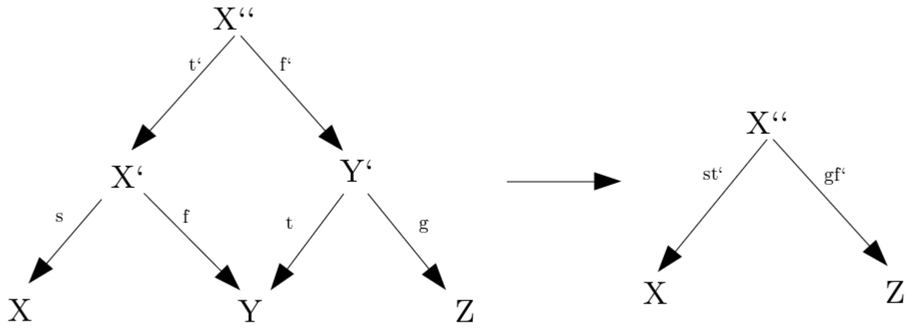
ii) *$X \mapsto Y \in B_S$ ist z.B. Diagramm (s, f) in B*:

$$(s, f) \sim (t, g)\ falls$$

$$\begin{tikzcd}
 & X''' \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "h"] & \\
X' \arrow[d, "s"'] \arrow[drr, "f"] & & X'' \arrow[dll, "t"'] \arrow[d, "g"] \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

iii) *Komposition von Morphismen durch* $(s,f),\ (t,g)$ *ist Klasse von* (st', gf')**:**



3.3 Wann ist $B[S^{-1}]$ eine volle Unterkategorie von $C[S^{-1}]$

Sei $B \subset C$ vollstaendige Unterkategorie, S Lokalisierungsklasse von C. Betrachte:

i) $S_B = S \cap Mor(B)$ *Lokalisierungssystem in* B

ii) $\forall s \in S : X' \mapsto X \in Obj(B) \exists f : X'' \mapsto X'$**:**

$$sf \in S,\ X'' \in Ob(B)$$

iii) *wie ii) Pfeile umgekehrt*

Gilt i) und ii) oder iii), dann ist $B[S^{-1}] < C[S^{-1}]$ eine volle Unterkategorie und der kanonische Funktor $k : B[S^{-1}] \mapsto C[S^{-1}]$ ist volltreu.