P / verses / 1

flux perçus $\quad \overset{p^*}{\underset{0}{|}}$ ————————

$$p^* = E\,\frac{X_1}{1+R}.$$

7/11

Pricing de contrats d'assurance : examples

Exemple 1.

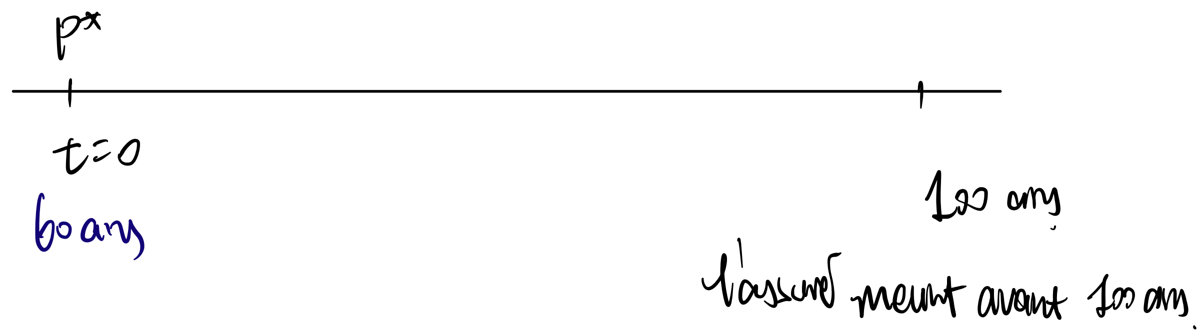
Soit un contrat d'assurance vie proposé à des personnes d'âge $x = 60$ ans selon les modalités suivantes :

Le client verse une prime pure en $t=0$ p^*, et en échange, l'héritier designé percevera un capitale décès fixé en $t=0$ mes valorisé de 5% par an. Ce capital est versé en fin d'année. Soit R le taux technique d'actualisation.

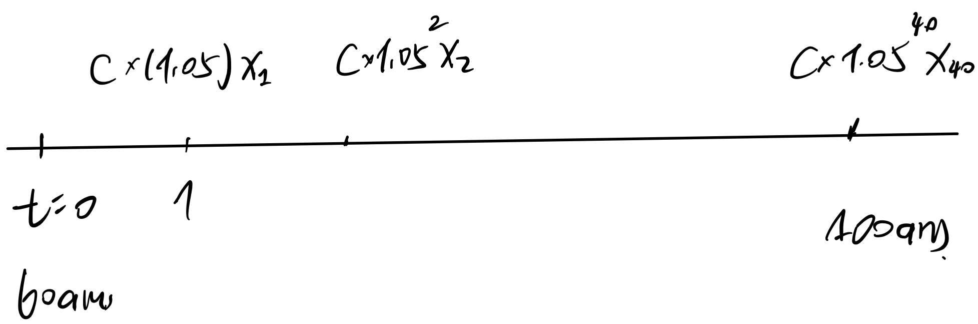
Un contrat = échange de flux.

Principe de tarification = échange aux même prix

Flux perçus par l'assureur.



Flux perçus par l'assuré.



$$X_t = \begin{cases} 1 & \text{s'il meurt entre } t-1 \text{ et } t \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Egalité de prix.

$$p^* = E \sum_{t=1}^{40} \frac{C(1{,}05)^t X_t}{(1+R)^t}$$

$$p^* = \sum_{t=1}^{40} \frac{C(1,05)^t}{(1+R)^t} EX_t .$$

où $EX_t = q^{60}_{t-1,t}$.

Exemple 2.

Le contrat suivant est proposé à des assurés d'âge $x = 40$ ans. Chaque début d'année 25 fois. Le client paie une prime p^a valorisé à 3% par an. En échange, l'héritier désigné percevera un capital décès. à la date anniversaire des 65 ans de l'assuré s'il meurt avant.

En plus, s'il est encore vivant à 65 ans, l'assuré percevera une complémentaire retraite mensuelle en fin de mois, dont le montant initial M est fixé en $t=0$. mais revalorisé chaque mois selon l'inflation. On donne R taux annuel d'actualisation.

Flux perçus par l'assureur.

P^* $\quad P^* 1.03 X_1$ $\quad P^* 1.03^2 X_2$ $\quad \dots \quad P^*(1.03)^{24} X_{24}$

$t=0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \quad 24.$

40 ans

$$X_t = \begin{cases} 1 & \text{si l'assuré est encore vivant à la date } t \text{ (unité d'année)} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$EX_t = p_t^{40}$$

Flux perçus par l'assuré.

où I_t = taux d'inflation entre 0 et t mois

CY_{25} $\quad M(1+I_{301})\hat{X}_{301}$ $\quad \dots \quad M(1+I_t)\hat{X}_t$

$t=25.$ $\quad 301 \quad 302. \quad \dots \quad t \quad \dots \quad t=60$ ans

65 ans $\qquad\qquad\qquad\qquad t=720$ mois

$t=300$ mois.

$$Y_{25} = \begin{cases} 1 & \text{si l'assuré décède avant 65 ans} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$EY_{25} = 1 - p_{25}^{40}$$

$\hat{X}_t = \{ 1$ si l'assuré est encore vivant

$\begin{cases} 1 & \text{au bout de } t \text{ moi} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

tarification.

$$E\sum_{t=0}^{24} \frac{P^*(1{,}03)^t X_t}{(1+R)^t} = E\,\frac{C\,Y_{25}}{(1+R)^{25}} + E\sum_{t=301}^{720} \frac{M(1+I_t)\hat{X}_t}{(1+R^{\text{mensuel}})^t}$$

$$P^* = \frac{\left[\dfrac{C}{(1+R)^{25}}\,E Y_{25} + \displaystyle\sum_{t=301}^{720} \frac{M\,E(1+I_t)\hat{X}_t}{(1+R^{\text{mens}})^t}\right]}{\displaystyle\sum_{t=0}^{24} \frac{(1{,}03)^t}{(1+R)^t}\,E X_t}.$$

$$E(1+I_t)\hat{X}_t = E(1+I_t)\,E\hat{X}_t$$

car on peut supposer que le taux d'inflation et le risque de décès du client sont indépendants

$\varphi_t = E(1+I_t) = 1 + E I_t$, t en mois

(ahi)

En pratique, φ_t doit être évalué, prédit.

RQ : on peut simplifier le modèle.

en $\varphi_t = (1+i_t^m)^t$ où i_t^m = taux d'inflation mensuel.
pour la periode [0 , t mois]
et on a aussi

$$(1+i_t^m)^{12} = (1+i_t^a)$$
$$1+i_t^m = (1+i_t^a)^{1/12}$$
$$\varphi_t = (1+i_t^a)^{t/12} \quad , t \text{ en mois}$$

Il faut ainsi une courbe de taux inflation.
(au lieu de ZC)

EX_t , t en mois

$$\hat{x}_t = X_{\frac{t}{12}}$$

$$E\hat{X}_t = P^{40}_{\frac{t}{12}}.$$

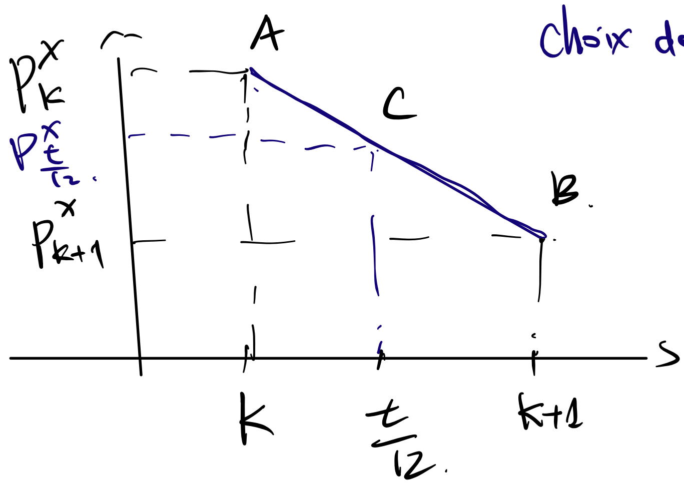
Difficulté : estimer P_t^N quand $t \notin \mathbb{N}$.

→ choix subjectif de méthode de calcul.

$$\text{Pour} \quad 12k \leq \overset{\leftarrow \text{ en mois}}{t} < 12(1+k)$$
$$k \leq \frac{t}{12} < k+1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$k = \mathrm{Ent}\left(\frac{t}{12}\right)$ partie entière.

Choix de modélisation.



égalité des pentes

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$$

$$p_{k+1}^x - p_k^x = \frac{p_{\frac{t}{12}}^x - p_k^x}{\frac{t}{12} - k}$$

$$p_{\frac{t}{12}}^x = p_k^x + (p_{k+1}^x - p_k^x)\left(\frac{t}{12} - k\right)$$

Algorithme de sur-replication d'une option européenne.

1-1) Le modèle.

Soit une base stochastique discrète $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t=0,1,2,\dots T}, \mathbb{P})$ où $\mathcal{F}_t$ est l'information disponible $(\mathcal{F}_t)_t$ à 1 filtration.

Le marché est constitué de deux actifs ?

Le premier, sans risque, est supposé constant :
$S^0_t = 1 \quad \forall t \quad (r=0)$

$$\tilde{X}_t = \frac{X_t}{S^0_t}$$

$$\left(\tilde{X}_t = \frac{X_t}{S^0_t} = \frac{X_t}{e^{rt}} = \frac{X_t}{(1+R)^t} \right.$$

$$\left. \tilde{S}^0_t = 1. \right)$$

Ce qui revient à dire que les prix sont actualisés

Le second est un actif risqué de prix $(S_t)_{t=0,1,\dots T}$.

Def 1. Une stratégie est un processus stochastique

$\vec{\theta} = (\theta^0, \theta)$ où

θ^0_t = quantité actif non risqué entre t inclus et t+1 (θ^0_t $\mathcal{F}_t$-mes choisi en t).

θ_t qté d'actif risqué détenu sur $[t, t+1]$

Déf 2. Valeur liquidative de $\hat{\theta}$

$$V_t = \theta_t^0 \times 1 + \theta_t S_t.$$

Déf 3 : $\hat{\theta}$ en $V_t = V_t^{\hat{\theta}}$ est autofinancée si

$$\underbrace{\theta_{t-1}^0 + \theta_{t-1} S_t}_{\text{valeur liquidative avant réajustement}} = \underbrace{\theta_t^0 + \theta_t \cdot S_t}_{\text{valeur liquidative après réajustement}}.$$

Théorème $\hat{\theta}$ est autofinancé ssi

$$\Delta V_t = \theta_{t-1} \Delta S_t \quad , \forall\ t = 1, \dots T.$$

où $\begin{cases} \Delta V_t = V_t - V_{t-1} \\ \Delta S_t = S_t - S_{t-1} \end{cases}$

1.2) Problème de sur-réplication entre 2 dates.
X_i

Soit un payoff $\xi_{t+1} = g(S_{t+1})$ en $t+1$, où g est une fonction continue. l'exemple typique est $g(x) = (x-K)^+$

Le pb entre t et $t+1$ est le suivant:

Trouver les prix possibles $P_t = V_t$ associés à des stratégies θ telle que

$$(1) \quad P_t + \theta_t \Delta S_{t+1} \geq \xi_{t+1} \qquad P\text{-ps.}$$

RQ $\quad (1) \Leftarrow V_t + \theta_t \Delta S_{t+1} \geq \xi_{t+1}$

$$V_{t+1} \geq \xi_{t+1}$$

car $\quad V_{t+1} = V_t + (V_{t+1} - V_t) = V_t + \Delta V_{t+1}.$

$$V_{t+1} = V_t + \theta_t \Delta S_{t+1} \quad (AF).$$

Pour résoudre 1, on a besoin d'outils.

Théorème.- Soit Γ_{t+1} une famille de variables aléatoires $\mathcal{F}_{t+1}$ - mesurable. Il existe une unique variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable notée

$$\text{essup}_{\mathcal{F}_t} \Gamma_{t+1} \qquad \text{essentiel-sup.}$$

qui vérifie les propriétés suivantes:

a) $\text{essup}_{\mathcal{F}_t} \Gamma_{t+1} \geq \gamma_{t+1}$ ps, $\forall \gamma_{t+1} \in \Gamma_{t+1}.$

b) si γ_t est une autre v.a $\mathcal{F}_t$-mesurable vérifiant

$$\gamma_t \geqslant \gamma_{t+1} \ , \forall \gamma_{t+1} \in \Gamma_{t+1}$$

alors $\gamma_t \geqslant \operatorname{essup}_{\mathcal{F}_t} \Gamma_{t+1}$.

RQ:

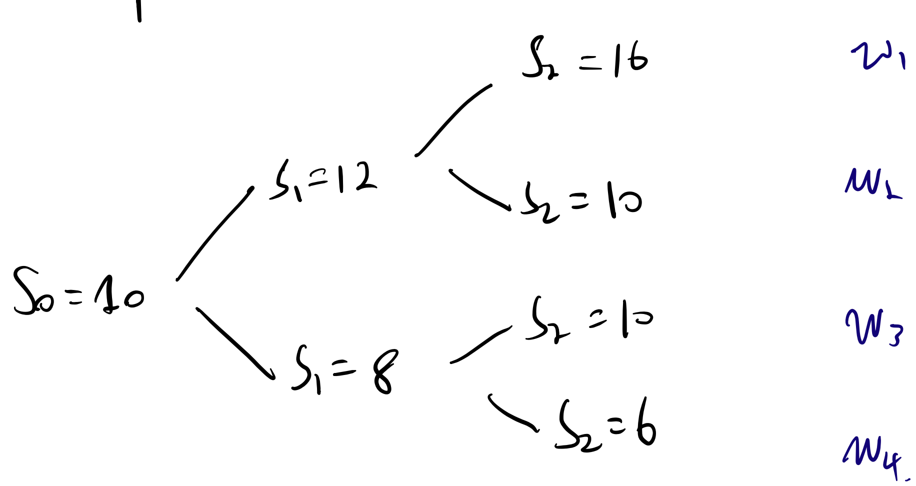
1) $\operatorname{essup}_{F_t} \Gamma_{t+1}$ est la plus petite v.a $\mathcal{F}_t$-mesurable que majore la famille Γ_{t+1}.

2) si $\Gamma_{t+1} = \{\gamma_{t+1}\}$, on note $\operatorname{essup}_{F_t} \Gamma_{t+1} = \operatorname{essup}_{F_t} \gamma_{t+1}$

A priori, on pourrait avoir

$$\operatorname{essup}_{F_t} \Gamma_{t+1} = +\infty$$

Exemple: Soit le modèle binomiale à 3 dates



- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$
- $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

- $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$
- $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2)$

où $A = \{\omega_1, \omega_2\} = \{S_1 = 12\}$.

$A^c = \{S_1 = 8\}$.

Rappel

les v.a $\mathcal{F}_0$-mesurable sont constantes.

les v.a X_1, $\mathcal{F}_1$-mesurable sont des fonctions de S_1 :

$$X_1 = h(S_1) \quad \text{cad} \quad X_1(\omega) = h(S_1(\omega))$$

$$X_1(\Omega) = \{\underbrace{h(12)}_{\alpha}, \underbrace{h(8)}_{\beta}\}.$$

$$X_1(\omega) = \alpha \mathbb{1}_A(\omega) + \beta \mathbb{1}_{A^c}(\omega)$$

ex $X_1 = \sqrt{S_1^2 + 1}$.

Calcul de $\text{esssup}_{\mathcal{F}_0} S_2$.

Par déf, $\operatorname{essup}_{F_0} S_2$ est $\mathcal{F}_0$-mesurable, donc,

on cherche $\operatorname{essup}_0 S_1(w) = c \quad \forall w$, c une constante
Egalement, par déf, c'est la plus petite majorant. S_2 dans 100% des cas:

$$c \geq S_2(w) \quad \forall w.$$

$$c = 14.$$

Ainsi, $\operatorname{essup}_{\mathcal{F}_0} S_2 = 14 \qquad \Gamma_2 = \{S_2\}$.

Calcul de $\operatorname{essup}_{F_1} S_2$, par déf, $\operatorname{essup}_{\mathcal{F}_1} S_2$ est $\mathcal{F}_1$-mesurable:

$\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq:

$$\operatorname{essup}_{\mathcal{F}_1} S_2(w) = \alpha \mathbb{1}_A(w) + \beta \mathbb{1}_{A^c}(w).$$

Cherche α, β les plus petit pour que

$$\alpha \mathbb{1}_A + \beta \mathbb{1}_{A^c} \geq S_2 \qquad p\text{-}ps.$$

$w = w_1$ ou $w_2 \in A$.

$$\alpha \geq S_2(w_1),\ S_2(w_2).$$

$$\alpha = 14.$$

$w = w_3$ ou $w_4 \in A^c$

$$\beta \geq S_2(w_3),\ S_2(w_4)$$

$B = 10.$

$$\operatorname{essup}_{\mathcal{F}_1}(S_2) = 14\,\mathbb{1}_A + 10\,\mathbb{1}_{A^c}.$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & S_2 = 14 \\
 & \operatorname{essup}_{\mathcal{F}_1} S_1 = 14 \arrow[ur, dash] \arrow[r, dash] & S_2 = 10 \\
S_0 = 10 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & \operatorname{essup}_{\mathcal{F}_1} S_2 = 10 \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & S_2 = 10 \\
 & & S_2 = 6.
\end{tikzcd}$$

Définition

Un ensemble aléatoire $w \in \Omega \longrightarrow E(w) \subseteq \mathbb{R}$ est dit $\mathcal{F}_t$-mesurable si

$$\operatorname{graph} E = \{(w, x) \in \Omega \times \mathbb{R} \text{ tq } x \in E(w)\}$$

appartient à la tribu produit $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Interprétation

E_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable s'il est observable à l'instant t.

Example : si X_t et Y_t sont 2 v.a $\mathcal{F}_t$-mesurable avec $X_t \leq Y_t$ p.s. Alors $E_t(w) = [X_t(w), Y_t(w)] \subseteq \mathbb{R}$.

On peut montrer que $\omega \mapsto \Xi_t(\omega)$ est 1 ensemble aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable dans le sens de la définition précédente.

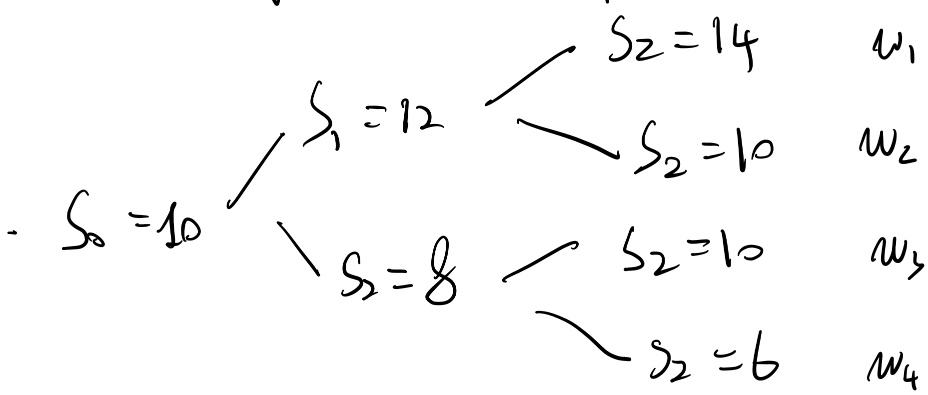
Rq : en t, X_t et Y_t $\Rightarrow$ on observe l'intervalle $[X_t, Y_t]$

Théorème : Soit γ_{t+1} une v.a $\mathcal{F}_{t+1}$-mesurable. Il existe un petit ensemble aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable et fermé, noté $\mathrm{essup}_{\mathcal{F}_t} \gamma_{t+1}$ et appelé support conditionnel de γ_{t+1} sachant $\mathcal{F}_t$, vérifiant :

$$P(\gamma_{t+1} \in \mathrm{supp}_{\mathcal{F}_t} \gamma_{t+1}) = 1.$$

Interprétation : $\mathrm{essup}_{\mathcal{F}_t} \gamma_{t+1}$ est l'ensemble des valeurs possibles de γ_{t+1} évalué en t dont on prend la fermeture.

Ex 3 : Reprenons l'exemple de l'arbre binomial.



a) $\text{Supp}_{\mathcal{F}_0} S_0$ est un ensemble aléatoire $\mathcal{F}_0$ - mesurable donc constant, cad prenant la même valeur $\forall w$. De plus $P(S_2 \in \text{supp}_{\mathcal{F}_0} S_2) = 1$

la plus petit possible.

$$\text{supp}_{\mathcal{F}_0} S_2 = \text{supp}\, S_2 = \{6, 10, 14\}.$$

b) $\text{supp}_{\mathcal{F}_1} S_2$ peut prendre 2 valeur selon que $w \in \{S_1 = 12\}$
$w \in \{S_1 = 8\}$

$$\text{supp}_{\mathcal{F}_1} S_2 = \begin{cases} \{14, 10\} & \text{pour } w = w_1 \text{ ou } w_2 \\ \{6, 10\} & \text{pour } w = w_3 \text{ ou } w_4. \end{cases}$$

c) $\text{supp}_{\mathcal{F}_2} S_2 = \{S_2\}$

$\text{Supp}_{\mathcal{F}_2} S_2(w) = \{S_2(w)\}$ est $\mathcal{F}_2$ - mes

$S_2 \in \{S_2\}$ ps.

$S_2 \in \{S_2\}$

Théorème 3.

Soit Γ_{t+1} une famille de variable aléatoire $\mathcal{F}_{t+1}$-mesurable
Il existe une unique v.a $\mathcal{F}_t$ -mesurable, noté

$\operatorname{essinf}_{\mathcal{F}_t} \Gamma_{t+1}$ qui vérifie les propriétés suivantes:

a) $\operatorname{essinf}_{\mathcal{F}_t} \Gamma_{t+1} \leq \gamma_{t+1}$, $\forall\, \gamma_{t+1} \in \Gamma_{t+1}$

($X \leq Y$ signifie $P(X \leq Y) = 1$.

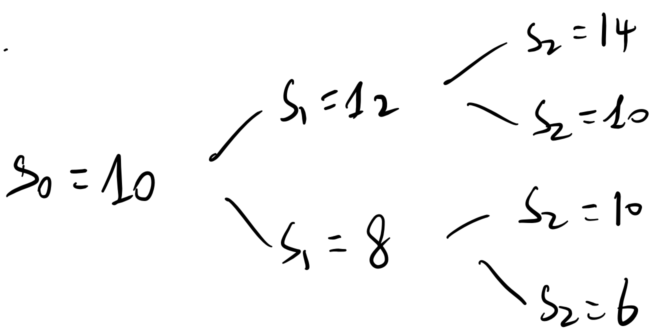
b). Si γ_t est 1 autre v.a $\mathcal{F}_t$-mes telle que $\gamma_t \leq \gamma_{t+1}$, $\forall\, \gamma_{t+1} \in \Gamma_{t+1}$, alors $\gamma_t \leq \operatorname{essinf}_{\mathcal{F}_t} \Gamma_{t+1}$.

interprétation $\operatorname{essinf}_{\mathcal{F}_t} \Gamma_{t+1}$ est la plus grande variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable dominé par Γ_{t+1}.

Rq: Si $\Gamma_{t+1} = \{\gamma_{t+1}\}$ est un singleton, on note $\operatorname{essinf}_{\mathcal{F}_t} \Gamma_{t+1} = \operatorname{essup}_{\mathcal{F}_t} \gamma_{t+1}$

Prop: $\operatorname{essup}_{\mathcal{F}_t}(-\Gamma_{t+1}) = -\operatorname{essup}_{\mathcal{F}_t} \Gamma_{t+1}$

Ex 4:



$\operatorname{essinf}_{\mathcal{F}_0} S_2 = 6 = \inf \operatorname{supp}_{\mathcal{F}_0} S_2$

$= \inf \{6, 10, 14\}$

$$\operatorname{essinf}_{F_1} S_2 = \begin{cases} 10 & \text{si } \omega \in \{S_1 = 12\} = \{\omega_1, \omega_2\} \\ 6 & \text{si } \omega \in \{S_1 = 8\} = \{\omega_3, \omega_4\} \end{cases}$$

On remarque encore que $\operatorname{essinf}_{F_1} S_2 = \inf \operatorname{supp}_{F_1} S_2$

Revenons à notre problem de sur-replication :

On peut résoudre : trouver $P_t = V_t$ et θ_t 1 stratégie afin que

$$P_t + \theta_t \Delta S_{t+1} \geq g(S_{t+1}) \text{ (pay-off en } t+1)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{P_t}_{F_t\text{-mesurable}} \geq \underbrace{g(S_{t+1}) - \theta_t \Delta S_{t+1}}_{F_{t+1}\text{-mes}} \quad (= X_{t+1})$$

$$\Rightarrow P_t \geq \operatorname{essup}(g(S_{t+1}) - \theta_t \Delta S_{t+1})$$

$$\Leftrightarrow P_t \geq \operatorname{essup}_{F_t}(g(S_{t+1}) - \theta_t S_{t+1} + \underbrace{\theta_t S_t}_{F_t\text{-mes}})$$

Prop (admise)

Si X_{t+1} est une v.a F_{t+1}-mes et k_t une v.a F_t-mes alors $\operatorname{essup}_{F_t}(X_{t+1} + k_t) = \operatorname{essup}_{F_t} X_{t+1} + k_t$

$$\operatorname{essinf}_{\mathcal{F}_t}(\gamma_{t+1}+k_t)=\operatorname{essinf}_{\mathcal{F}_t}\gamma_{t+1}+k_t.$$

Ainsi, (1) $\iff$ $p_t \geq \operatorname{esssup}_{\mathcal{F}_t}(g(S_{t+1})-\theta_t S_{t+1})+\theta_t S_t$

Conclusion : l'ensemble des prix de sur-réplication entre t et $t+1$ du pay-off $\xi_{t+1}=g(S_{t+1})$ est donné par

$$P_t(g)=\left\{\operatorname{esssup}_{\mathcal{F}_t}(g(S_{t+1})-\theta_t S_{t+1})+\theta_t S_t : \begin{array}{l}\theta_t \text{ arbitraire} \\ \mathcal{F}_t\text{-mes}\end{array}\right\}$$

$$+L^0(\mathbb{R}_+,\mathcal{F}_t)$$

où $L^0(\mathbb{R}_+,\mathcal{F}_t)$ ens des v.a ≥ 0 $\mathcal{F}_t$-mes

Objectif suivant : Déterminer :

$$\operatorname{essinf}_{\mathcal{F}_t}P_t(g)=\operatorname{essinf}_{\mathcal{F}_t}\{P_t(\theta_t):\theta_t\ \mathcal{F}_t\text{-mes}\}$$

où $P_t(\theta_t)=\operatorname{esssup}_{\mathcal{F}_t}(g(S_{t+1})-\theta_t S_{t+1})+\theta_t S_t.$

Pour calculer chaque $P_t(\theta_t)$, on va utiliser le résultat suivant :

Théorème : soit g une fonction continue, alors

$$P_t(\theta_t)=\sup_{z\in \operatorname{Supp}_{\mathcal{F}_t}S_{t+1}}(g(z)-\theta_t z)+\theta_t S_t.$$

Définition : Fonction support d'un ensemble I.

$$\delta_I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in I \\ +\infty & \text{si } x \notin I. \end{cases}$$

On pose $h_t(z) = -g(z) + \delta(z) = \begin{cases} -g(z) & \text{si } z \in \text{supp}_{F_t} S_{t+1} \\ +\infty, & \text{si } z \notin \text{suppr}_{F_t} S_{t+1} \end{cases}$

Rq: $h_t(z) = h_t(\omega, z)$ car $\text{supp}_{F_{t+1}} S_{t+1}$ dépend de ω.

$$P_t(-\theta_t) = \sup_{z \in \text{supp}_{F_t} S_{t+1}} \left(\theta_t z - (-g(z)) \right) - \theta_t S_t$$

$$= \sup_{z \in \text{supp}_{F_t} S_{t+1}} \left(\theta_t z - h_t(z) \right) - \theta_t S_t$$

car $h_t(z) = -g(z)$ quand $z \in \text{supp}_{F_t} S_{t+1}$

$$= \sup_{z \in \mathbb{R}} \left(\theta_t z - h_t(z) \right) - \theta_t S_t$$

car $z \notin \text{supp}_{F_t} S_{t+1}$, $h_t(z) = \infty$

$\Rightarrow \theta_t z - h_t(z) = -\infty$.

A savoir : si h est une fonction, on appelle conjugué de Fenchel-Legendre, la fonction $h^*(\theta) = \sup_{z \in \mathbb{R}} (\theta z - h(z))$

Ainsi, $P_t(-\theta_t) = h_t^*(\theta_t) - \theta_t S_t$

On va en déduire le prix "minimal" du pay-off ξ_{t+1}.

$$P_t^*(g) = \underset{\theta_t \, \mathcal{F}_t\text{-mes}}{\operatorname{essinf}} P_t(\theta_t) = \underset{\theta_t}{\operatorname{essinf}} P_t(-\theta_t)$$

$$= \underset{\theta_t}{\operatorname{essinf}} (h_t^*(\theta_t) - \theta_t S_t)$$

$$= - \underset{\theta_t}{\operatorname{essup}} (\theta_t S_t - h_t^*(\theta_t))$$

$$= - \sup_{\theta \in \mathbb{R}} (\theta S_t - h_t^*(\theta))$$

$$= - \sup_{z \in \mathbb{R}} (z S_t - h_t^*(z)) = -h_t^{**}(S_t)$$

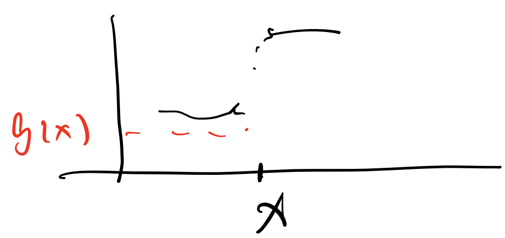
$$P_t^*(g) = -h_t^{**}(S_t)$$

Conclusion : le prix minimal de sur-replication de $\xi_{t+1} = g(S_{t+1})$ est donné par $P_t^*(g) = -h_t^{**}(S_t)$

où h_t^{**} est la bi-conjuguée de $h_t(z) = -g(z) + \delta_{\mathrm{supp}_{F_t}(S_{t+1})}(z)$

Théorème : Soit une fonction h semi-continue inférieur dominant une fonction affine sur $\mathbb{R}$ ($h(z) \geq \alpha x + \beta, \forall z$) Alors h^{**} est la plus grande fonction convexe sci dominé par h.

Rq : Sci pour semi-continue inférieurement :
$h(x) \leq \lim_{m} \uparrow \inf_{n \geq m} g(x_n)$ si $x_m \to x$.



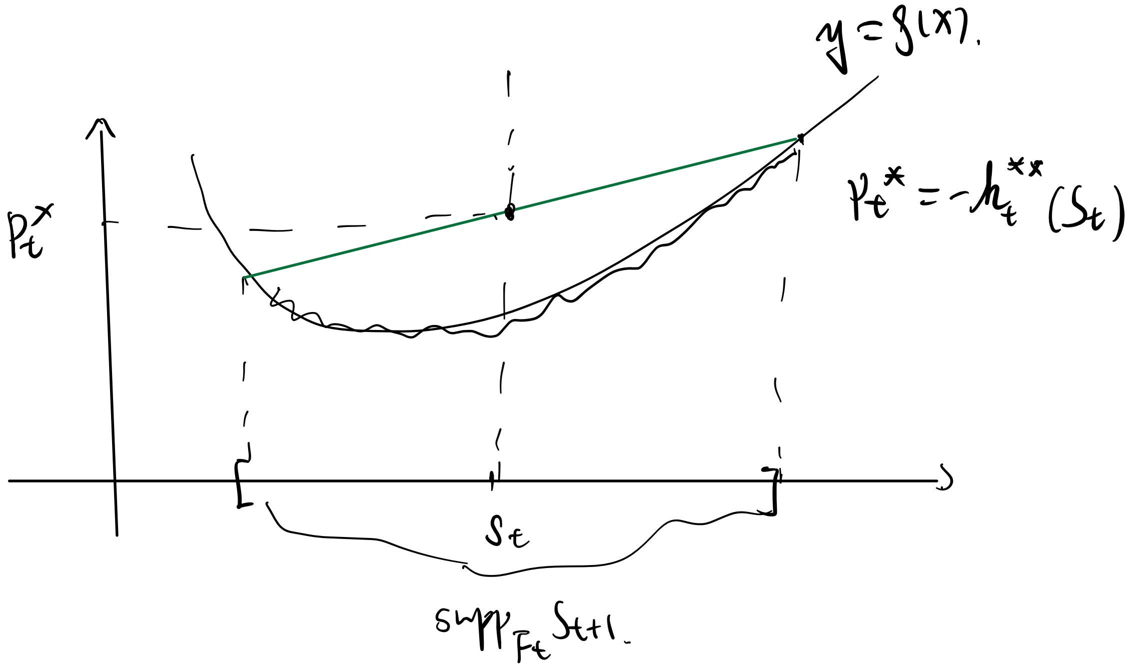
$g(x) \leq$ limite à gauche, à droite.

A retenir

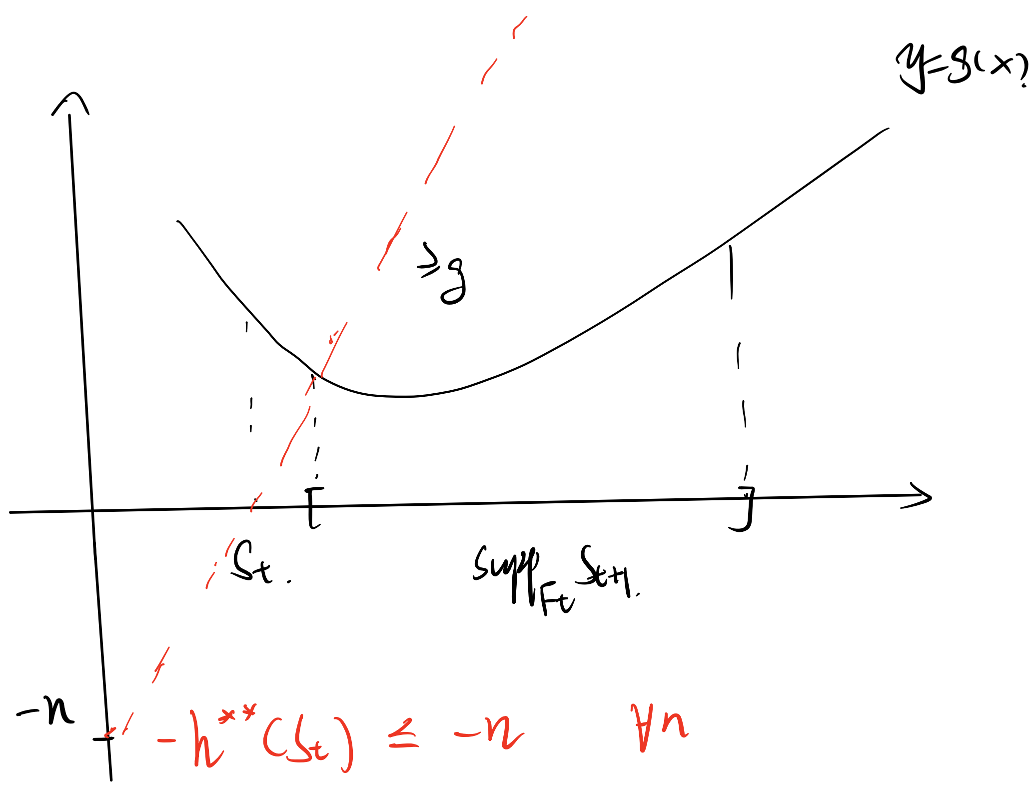
$-h_t^{**}$ est la plus petite fonction concave qui domine g sur le support conditionnel $\mathrm{supp}_{F_t} S_{t+1}$. Mais aussi, $-h_t^{**}$ coincide avec l'inf des fonctions affines qui domine g sur $\mathrm{Supp}_{F_t} S_{t+1}$

Approche aux fonctions de pay-off convexes.

1er cas Si $S_t \in \mathrm{supp}_{F_t} S_{t+1}$



2e cas. si $S_t \notin \mathrm{supp}_{F_t} S_{t+1}$.



$$p^*(S_t) \leq -n \quad \forall n$$
$$p^*(S_t) = -\infty \quad n \to \infty$$

$\to$ impossible dans la réalité des marchés financiers.
Cela nous amène à une condition naturelle de non-arbitrage.

$$(AIP) : \quad S_t \in \operatorname{suppr}_{F_t} S_{t+1}.$$

Hyp $\quad \operatorname{suppr}_{F_t} S_{t+1} = [k_t^d, k_t^u S_t]$ où

k_t^d, k_t^u des constantes > 0

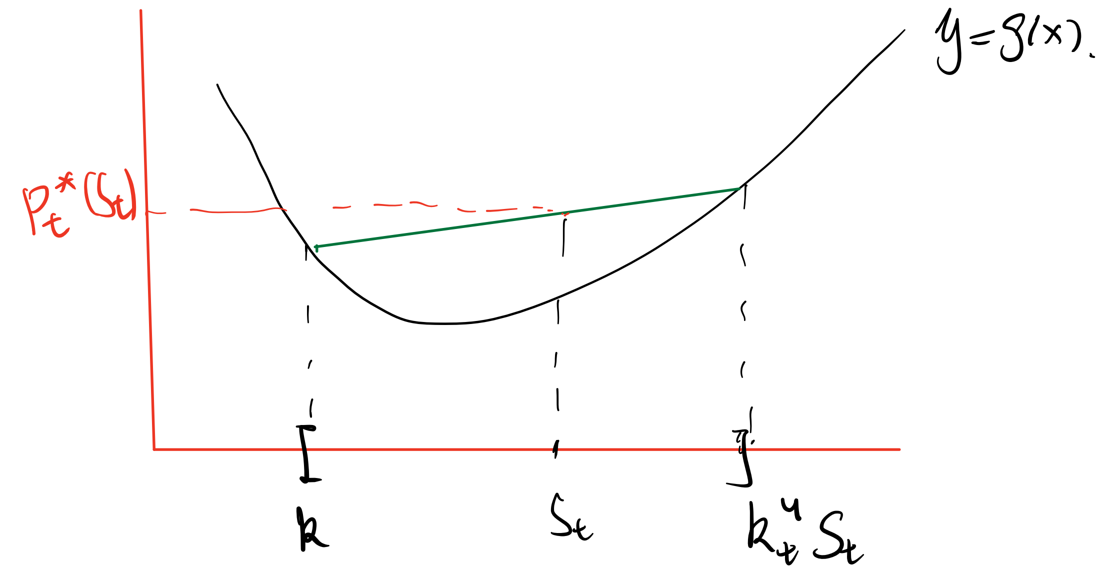
$$AIP \iff S_t \in \operatorname{suppr}_{F_t} S_{t+1}$$
$$\iff k_t^d S_t \leq S_t \leq k_t^u S_t.$$
$$\iff k_t^d \leq 1 \leq k_t^u \quad : S_t > 0$$

$t+1$.

$k_t^u S_t$

$\cdot\ S_t$ $\quad\Bigg\}$ valeur possible de S_{t+1}.

$k^d S_t$



Equation de la droite verte. $y = ax + b$.

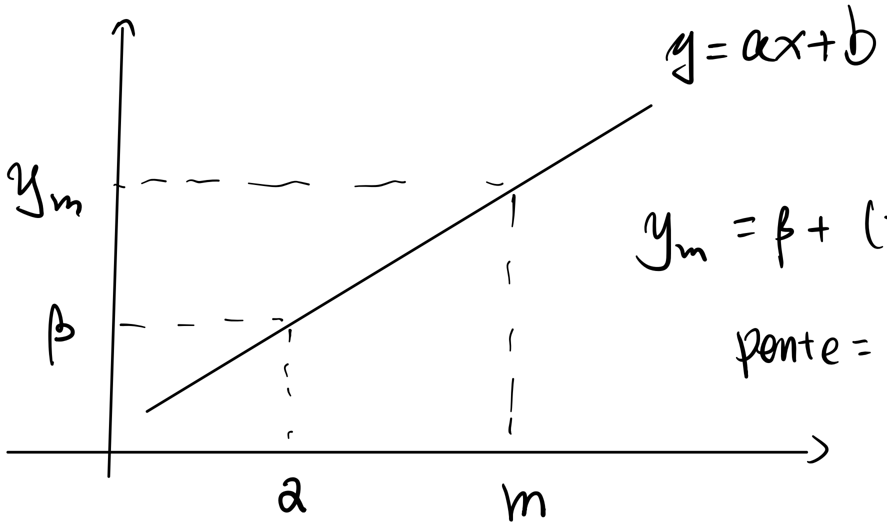
$$\begin{cases} a k_t^d S_t + b = g(k_t^d S_t) & (1) \\ a k_t^u S_t + b = g(k_t^u S_t) & (2). \end{cases}$$

(2) - (1) : $a(k_t^a - k_t^d) S_t = g(k_t^u S_t) - g(k_t^d S_t)$

$$a = \frac{g(k_t^u S_t) - g(k_t^d S_t)}{(k_t^u - k_t^d) S_t}$$

$b = g(k_t^d S_t) - a k_t^d S_t$ en utilisant t

$$b = \frac{k_t^u g(k_t^d S_t) - k_t^d g(k_t^u S_t)}{(k_t^u - k_t^d)}$$



$$y_m = \beta + (m-a) \times \text{pente}.$$

$$\text{pente} = \frac{y_m - \beta}{m - a}.$$

$$p_t^*(g) = g(k_t^d S_t) + (S_t - k_t^d S_t) \times a$$

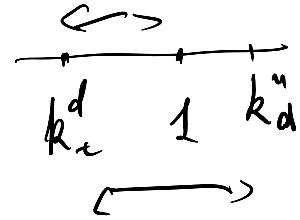
$$= g(k_t^d S_t) + \frac{g(k_t^u S_t) - g(k_t^d S_t)}{(k_t^u - k_t^d) S_t} \times S_t (1 - k_t^d)$$

$$p_t^*(g) = g(k_t^d S_t) + \frac{g(k_t^u S_t) - g(k_t^d S_t)}{k_t^u - k_t^d} \times (1 - h_t^d)$$

$$p_t^*(g) = \frac{1 - k_t^d}{k_t^u - k_t^d} g(k_t^u S_t) + \frac{k_t^u - 1}{k_t^u - k_t^d} g(k_t^d S_t)$$

$$p_t^*(g) = \lambda_t g(k_t^u S_t) + (1 - \lambda_t) g(k_t^d S_t)$$

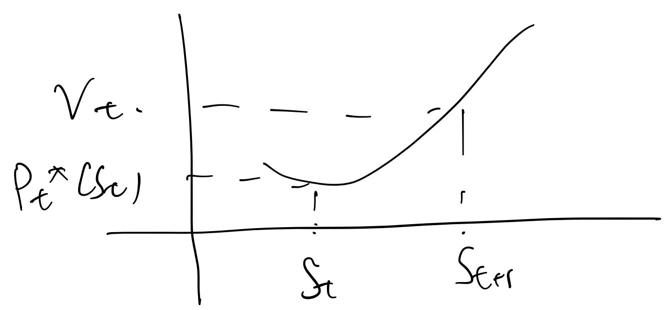
où $\lambda_t = \dfrac{1-k_t^d}{k_t^d - k_t^d} \in [0;1]$



RQ très importante : $P_t^*(g)$ est un prix minimum, et la stratégie associé est :

$$\theta_t^* = \frac{g(k_t^u S_t) - g(k^d S_t)}{(k_t^u - k_t^d) S_t}$$

Preuve



$$V_{t+1} = P_t^*(S_t) + \theta_t^* \circ S_{t+1} = P_t^*(S_t) + \theta_t^*(S_{t+1} - S_t)$$

$$= -h^{**}(S_{t+1}) \quad -h^{**}(x) = ax+b$$

Or $P(S_{t+1} \in \mathrm{supp}_{F_t} S_{t+1}) = 1$

pay-off de $\mathrm{supp}_{F_t} S_{t+1}$

$\Rightarrow S_{t+1} \in \text{supp}_{F_t} S_{t+1}$. Or $-h^{**} \geq g$ sur $\text{supp}_{F_t} S_{t+1}$

$\Rightarrow -h^{**}(S_{t+1}) \geq g(S_{t+1})$

$$V_{t+1} = \underbrace{P_t^*(S_t) + \theta_t^* \Delta S_{t+1} \geq g(S_{t+1})}_{\text{sur replication}}$$

1.3). Generalisation au modèle multi-date $t=0,1,2,\cdots T$.

On suppose qu'il existe des constantes k_t^d, k_t^u, $t=0,1,\ldots,T-1$ telles que $\text{essup}_{F_t} S_{t+1} = [k_t^d S_t, k_t^u S_t]$ $\forall t$ avec

$$k_t^d \leq 1 \leq k_t^u \quad (AIP)$$

Soit g une fonction de payoff definissant le pay-off terminal $g(S_T)$ en T. Ex $g(x) = (x-K)^+$.

L'objectif est de déterminer le portefeuille de sur-réplication minimal $(V_t^*)_{t=0,\cdots T}$ telle que

$$V_T^* \geq g(S_T) \quad p.s.$$

Alors le prix minimal de surréplication en t est pay-off V_t^*.

Principe backward.

en $T-1$ et T $\quad V_{T-1}^* + \theta_{T-1}^* \Delta S_T \geq g(S_T)$
→ déjà résolu, (voir 1er étape entre $T-1$ et T)

$$V_{T-1}^* = P_{T-1}^*(S_{T-1}) = \underbrace{\lambda_{T-1} g(k_{T-1}^u S_{T-1}) + (1-\lambda_{T-1}) g(k_{T-1}^d S_{T-1})}_{\text{fonction continue de } S_{T-1} = \text{pay-off de } S_{T-1}}$$

en $T-2$ et $T-1$

$$V_{T-2}^* + \theta_{T-2}^* \Delta S_{T-1} \geq V_{T-1}^* = g_{T-1}(S_{T-1})$$

$$V_{T-2}^* = \lambda_{T-2} g_{T-1}(k_{T-2}^u S_{T-2}) + (1-\lambda_{T-2}) g_{T-1}(k_{T-2}^d S_{T-2})$$

où $g_{T-1}(x) = \lambda_{T-1} g(k_{T-1}^u x) + (1-\lambda_{T-1}) g(k_{T-1}^d x)$.

À retenir :
le portefeuille minimal de cette application du pay-off $g(S_T)$ en T est donné par

$V_t^* = g(t, S_t)$ où $g(t,x)$ est la fonction définie de manière rétrograde par:

$$g(t,x) = \lambda_t\, g(t+1, k^u x) + (1-\lambda_t)\, g(t+1, k^d x), \quad t<T.$$

$$g(T,x) = g(x)$$

avec $\lambda_t = (1 - k_t^d) / (k_t^u - k_t^d)$

De plus, $$\theta_t^{\alpha} = \frac{g(t+1, k^u_t S_t) - g(t+1, k^d_t S_t)}{(k^u_t - k^d_t) S_t}.$$

Application sur Python.

on va considérer le CAC 40 avec des valeurs journalières entre le 22/11/2016 et 21/03/2019

Ici, on se donne $T = 10$ jours (2 semaines),
$g(x) = (x-K)^+$

Le 1er étape consiste à calibrer le modèle

$$\text{suppr}_{F_t} S_{t+1} = [k^d_t S_t \, , k^u_t S_t]$$

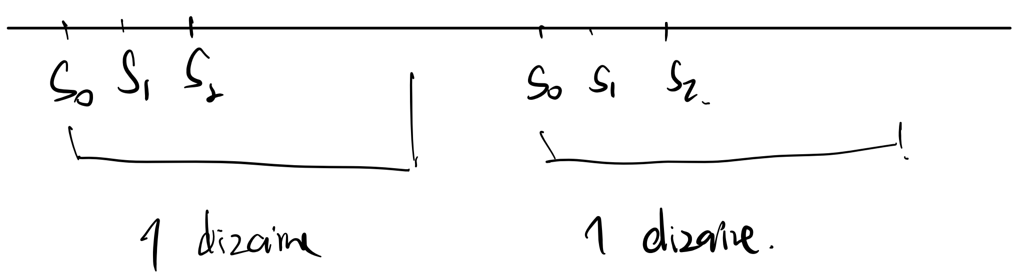
$$\iff \quad \text{suppr}_{F_t} \frac{S_{t+1}}{S_t} = [k^d_t \, , k^u_t]$$

Intuition $\quad k_t^d = \min \frac{S_{t+1}}{S_t} \, , \; k_t^u = \max \frac{S_{t+1}}{S_t}.$

Estimation statistique.

$k_t^d = \inf \frac{S^i_{t+1}}{S^i_t}$ où i désigne le numéro de la dizaine (10 jours). et t fixé $= 0, 1, 2, \dots 8.$

$k_t^u = \max \frac{S^i_{t+1}}{S^i_t}$ sur toutes les dizaines.



05/12/2022

Rappel $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\dots T}, P)$

Un marché financier constitue de 2 actifs. Le sans risque est $S_t^0 = 1$ $(r=0)$. L'actif risqué est $(S_t)_{t=0}^T$

Un portefeuille V vérifie:

$$V_t = \theta_t^0 S_t^0 + \theta_t S_t$$

où θ^0 = qté investie dans $S_t^0 = 1$ (cash)

θ_t = qté investie dans S_t entre t et $t+1$.

V est dt autofinancé si

$$\Delta V_t = \theta_{t-1} \Delta S_t \quad , \forall t \geq 1.$$

où

$$\Delta V_t = V_t - V_{t-1} \quad , \Delta S_t = S_t - S_{t-1}.$$

l'objectif de sur-replication est de trouver V minimal auto-financé tel que

$$V_T \geq g(S_T) \text{ payoff terminal.}$$

RQ. La technique s'applique par des fonctions de pay-off g semi-continue inférieurement, c'est-à-dire si $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$ alors

$$g(x) \leq \liminf_{n \to \infty} g(x_n)$$

où $\liminf\limits_{n} g(x_n) = \lim\limits_{n} \uparrow \inf\limits_{p \geq n} g(x_p)$

On a trouvé le résultat suivant :

Supposons que $\operatorname{supp}_{F_t} S_{t+1} = [k^d_t S_t, k^u_t S_t]$

où $k^d_t < 1$, $k^u_t > 1$

Soit g une fonction de pay-off en T, convexe, positive et donc continue. Il existe un portefeuille minimal de sur-réplication $V_t^* = g(t, S_t)$ où g définie par

$$\begin{cases} g(T, x) = g(x) \\ g(t, x) = \lambda_t\, g(t+1, k^u x) + (1-\lambda_t)\, g(t+1, k^d x) \end{cases}$$

où $\lambda_t = \dfrac{1 - k^d_t}{k^u_t - k^d_t}$

La stratégie de sur-réplication est

$$\theta_t^* = \frac{g(t+1, k^u_t S_t) - g(t+1, k^d_t S_t)}{\quad}$$

$$(k_t^u - k_t^d) S_t .$$

En pratique

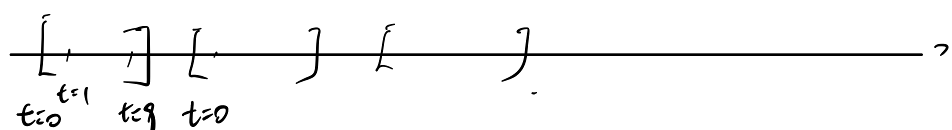
le prix de l'option est $V_0^* = g(0, S_0)$.

$V_1^* = V_0^* + \theta_0^* \Delta S_1$, en $t=1$, changer θ_0^* en θ_1^*

$V_2^* = V_1^* + \theta_1^* \Delta S_2$

Application en Python.

On choisit une période de 10 jours (2 semaines ?) de sorte que $t = 0, 1, 2, \dots, 9$. On a un certain nombre de dizaines (D)



$$\text{Suppr}_{F_t} S_{t+1} = [k_t^d S_t , k_t^u S_t]$$

$$\text{Suppr}_{F_t} \frac{S_{t+1}}{S_t} = [k_t^d, k_t^u]$$

Calibration naturelle

$$k_t^d = \min \frac{S_{t+1}^{(i)}}{S_t^{(i)}} , \quad t = 0, \dots, 8$$

$i=1,\dots,D \quad S_t$

où $S^{(i)}$ prix observé de la période numéro i.

$$k_t^u = \max_{i=1,\dots,D} \frac{S_{t+1}^{(i)}}{S_t^{(i)}}$$

1er fichier apprendre à récupérer les données à partir d'un fichier excel.

Python code à rendre avec XL. PDF

31 / Decembre

Chapitre 2

Calibration du modèle de Black et Scholes

a) le fichier XL est composé de

1ère colonne : valeur du prix $(S_t)_{t=0,\dots}$ avec $\Delta t = 1$ minute.

1 journée = 10 heures en 600 minutes.

On observe des valeurs sur 1 semaine de 5 jours et la maturité correspond à 10 jours.

On a donc $(S_t)_{t=0,1,\dots,T}$, $T = 5999$.

On suppose $r = 0$.

2ème colonne : valeur du call européenne de strike $k = 10$ et de maturité $T = 5999$.

b) Il s'agit de déterminer σ du modèle BS ($dS_t = \sigma S_t \, dB_t$ sous proba risque neutre)

Pour cela, rappelons la formule de BS de prix d'un call de pay-off $(S_T - K)^+$:

$$P(t, x) = x \, \phi(d(t,x)) - K \phi(d(t,x) - \sigma\sqrt{T-t})$$

où $\phi(z) = P(G \leq z)$, $G \overset{loi}{=} \mathcal{N}(0,1)$

$$d(t,x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \ln\left(\frac{x}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$$

V_t portefeuille de réplication avec $V_T = (S_T - k)^+$

On a $V_t = P(t, S_t)$ prix théorique du Call en t.

Rq Data

S_0 $\qquad$ Prix^{call}_{obs} (0)

S_1

$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$

2 approches par la volatilité implicite

1) Résoudre pour tout t, $\forall K$, l'équation

$$\text{Prix}^{call}_{observé}(t, K) = P_{théorique}(t, K, \sigma)$$

→ trouver σ appelée volatilité implicite.

2) Minimisation quadratique.

$$\min_{\sigma} \sum \left(P^{obs} - P^{theo}(t_i, S^0_{t_i}) \right)^2$$

12/12/2022.

Implémentation de méthode de gestion de portefeuille.

On se donne un marché constitué de d actifs risqués. de rendement $R = (R^1, R^2, \dots R^d)$ sur une période donnée $[0;T]$.

Si $(S_t^i)_{t\in[0,T]}$ est le prix de l'actif numéro i, alors

$R^i = \dfrac{S_T^i - S_0^i}{S_0^i}$, $R^1, R^2, \dots R^d$ sont supposées être des variables aléatoires.

Un portefeuille, par définition, c'est le vecteur des quantités détenues.

$$\theta = (\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^d)$$

où θ^i = qté détenu en $t=0$ dans l'actif numéro i jusqu'à l'instant T.

Un portefeuille peut s'écrire de manière équivalente en terme de proportions :

$$x^i = \frac{\theta^i \times S_0^i}{V_0}, \quad i = 1, \dots, d.$$

où $V_0 = \sum_{i=1}^{d} \theta^i S_0^i$, capital initial investi.

RQ $\sum_{i=1}^{d} x^i = 1$ ou encore $x'\mathbb{1} = 1$ où

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

produit scalaire.

x' = transposé de x. (vecteur ligne) ✓

RQ : $\theta^i = \dfrac{x^i V_0}{S_0^i}$. $\forall i = 1 \dots d$.

le rendement du portefeuille de proportions $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$

$$R^x = \frac{\sum_{i=1}^{d} \theta^i S_T^i - V_0}{V_0} = \frac{V_T - V_0}{V_0}$$

$$R^x = \sum_{i=1}^{d} \frac{\theta^i S_T^i}{V_0} - 1.$$

OR.

$$S_T^i = S_0^i \times (1 + R^i)$$

$$R^x = \sum_{i=1}^{d} \underbrace{\frac{\theta_i S_0^i}{V_0}}_{x_i} (1 + R^i) - 1$$

$$R^x = \sum_{i=1}^{d} x_i + \sum_{i=1}^{d} x^i R^i - 1$$

$$R^x = \sum_{i=1}^{d} x^i R^i$$

$$R^x = x'R = R'x.$$

$$ER^x = \sum_{i=1}^{d} x^i E R^i.$$

$$ER^x = x'ER = ER'x \quad \text{où} \quad ER = \begin{pmatrix} ER^1 \\ \vdots \\ ER^d \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{var}(X) = E(X - EX)^2.$$

$$\operatorname{Var}(R^x) = E(R^x - ER^x)^2$$

avec $R^x - ER^x = x'(R - ER) = (R-ER)'x.$

$$\operatorname{var} R^x = E(x'(R-ER)(R-ER)'x)$$
$$= x'\Sigma x$$

où $\Sigma = E(R-ER)(R-ER)'$

$$= E \begin{pmatrix} R^1 - ER^1 \\ R^2 - ER^2 \\ \vdots \\ R^i - ER^i \\ R^d - ER^d \end{pmatrix} (R^1 - ER^1 \ldots R^j - ER^j \ldots R^d - ER^d)$$

$(R^i - ER^i)(R^j - ER^j)$

$$\Sigma = (\Sigma_{ij})_{i,j=1,\ldots d}$$

$$\Sigma_{ij} = E(R^i - ER^i)(R^j - ER^j)$$

$$\Sigma_{ij} = \operatorname{cov}(R^i, R^j)$$

$\to$ Σ matrice de variance-covariance.

Rq : Σ est une matrice symétrique positive, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $x'\Sigma x \geq 0$

En effet , $x'\Sigma x = \text{var}(R^x) \geq 0$.

De plus, on dit que Σ est définie si : $x'\Sigma x = 0$ ssi $x = 0$

signe

RQ : Peut-on avoir Σ non définie ?
Cela signifie qu'il existe $x \neq 0$ tel que $x'\Sigma x = 0$
ou encore $\text{var} R^x = 0$, c'est à dire $R^x = \text{cste}$
($\text{cste} = ER^x$)

$$\sum_{i=1}^{d} x^i R^i = c.$$

Supposons $x^1 \neq 0$, $R^1 = c - \sum_{i=2}^{d} x^i R^i$

l'actif peut être construit à partir des autres actifs.

si bien, qu'en finance, quitte à supprimer certains actifs, on suppose que Σ est définie.

$(P' = P^{-1})$

RQ : Σ est diagonalisable. $\exists P$ matrice inversible telle que $P'\Sigma P = D$ où D diagonale. Si y coordonné de x dans la nouvelle base.

$$x'\Sigma x = y'Dy = \sum_{i=1}^{d} D_{ii} (y_i)^2$$

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_{dd} \end{pmatrix}$$

$x'\Sigma x \geqslant 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow y'Dy \geqslant 0 \quad \forall y$

$\Rightarrow D_{ii} \geqslant 0$

Σ définie $\Leftrightarrow \forall i, D_{ii} > 0 \Leftrightarrow \det \Sigma > 0.$

Selon la théorie de Markoviz, on veut résoudre

$$(P) \begin{cases} \sup_x ER^x \\ \text{sous contrainte } x'\mathbb{1} = 1, \ \mathrm{var}\, R^x \leq \sigma^2 \end{cases}$$

On montre que ce pb est équivalent à

$$\begin{cases} \sup_x ER^x \\ x'\mathbb{1} = 1 \text{ et } \mathrm{Var}\, R^x = \sigma^2. \end{cases}$$

Fonction Lagrangienne.

$$L(x,\lambda,\mu) = ER^x - \lambda(\mathrm{var}\, R^x - \sigma^2) - \mu(x'\mathbb{1} - 1)$$

résoudre (P) $\Leftrightarrow$ résoudre $\max_{x \in \mathbb{R}^d} L(x,\lambda,\mu)$

et construire λ et μ de sorte que les conditions $x'\mathbb{1}$ et $\mathrm{var}\, R^x = \sigma^2$ soient satisfaites.

λ et μ sont fixés. avec $\lambda > 0$

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = x'ER - \lambda(x'Ex - \sigma^2) - \mu(x'\mathbb{1} - 1)$$

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} L(x, \lambda, \mu) = -\infty$$

$x \mapsto L(x, \lambda, \mu)$ admet un maximum sur une boule compacte.

et de plus si x^* est un argmax alors
$\nabla L(x^*, \lambda, \mu) = 0$.

A savoir $\psi : x \mapsto x'A + B$, $A \in \mathbb{R}^d$, $B \in \mathbb{R}$.
$\nabla \psi = A$.

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{d} A^i x^i + B = A^1 x^1 + \cdots$$

$$\nabla \psi(x) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \text{---}, \frac{\partial \psi}{\partial x_d} \right)'$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = A^1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = A_2, \ldots$$

$$\nabla \psi = A$$

$$\psi : x \mapsto x' \Sigma x = (x_1 - x_d)(\Sigma_{ij}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

$$\psi(x) = (x_1 \, \text{--} \, x_d) \left(\sum_{j=1}^{d} \Sigma_{ij} x_j \right) \leftarrow \text{ième terme.}$$

$$\Psi(x) = \sum_i x_i \left(\sum_{j=1}^{d} \Sigma_{ij} x_j\right) = \sum_{i,j} \Sigma_{ij} x_i x_j .$$

$$\Psi(x) = x' \Sigma x = \sum_{i=1}^{d} \Sigma_{ii} (x_i)^2 + 2 \sum_{i<j} \Sigma_{ij} x_i x_j$$

$$\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\Sigma_{11} (x_1)^2 + 2 \sum_{j \neq 1} \Sigma_{1j} x_1 x_j \right)$$

$$= 2 \Sigma_{11} x_1 + 2 \sum_{j \neq 1} \Sigma_{1j} x_j$$

$$= 2 \sum_j \Sigma_{1j} x_j = 2 (\Sigma x)_1 .$$

En général $\nabla \Psi(x) = 2 \Sigma x$.

$$\nabla L(x, \lambda, \mu) = ER - 2\lambda \Sigma x - \mu \mathbb{1} = 0.$$

$$\Sigma x = \frac{(ER - \mu \mathbb{1})}{2\lambda}.$$

$$x = \frac{1}{2\lambda} \Sigma^{-1} (ER - \mu \mathbb{1}).$$

Ecrire les équations satisfaisantes par λ et μ pour que

$x' \mathbb{1} = 1$ et $\mathrm{var}\, R^x = \sigma^2$.

ou $\mathbb{1}' x = 1$. ou $x' \Sigma x = \sigma^2$.

$$\begin{cases} \mathbb{1}'\Sigma^{-1}(ER - \mu\mathbb{1}) = 2\lambda. \\ \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 (ER - \mu\mathbb{1})'\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}(ER - \mu\mathbb{1}) = \sigma^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b - \mu a = 2\lambda \quad \text{où} \quad b = \mathbb{1}'\Sigma^{-1}ER \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad a = \mathbb{1}'\Sigma^{-1}\mathbb{1}. \\ \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 (ER - \mu\mathbb{1})'\Sigma^{-1}(ER - \mu\mathbb{1}) = \sigma^2. \end{cases}$$

$\langle x, y \rangle = x'\Sigma^{-1}y$ produit scalaire.

$\langle x, x \rangle_{\Sigma^{-1}} = x'\Sigma^{-1}x \geq 0$

$\|x\|_{\Sigma^{-1}} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\Sigma^{-1}}}$

$$\begin{cases} b - \mu a = 2\lambda \\ \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 \|ER - \mu\mathbb{1}\|^2_{\Sigma^{-1}} = \sigma^2 \end{cases}$$

$a = \|\mathbb{1}\|^2_{\Sigma^{-1}}$

$b = \langle \mathbb{1}, ER \rangle_{\Sigma^{-1}}.$

Preuve de Pythagore avec $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

$x \perp y$ cad $\langle x, y \rangle = 0$ si et seulement si

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Preuve $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Preuve : $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$.

Ex. Déterminer α de sorte que $ER - \alpha \mathbb{1} \perp \mathbb{1}$ selon $\langle , \rangle_{\Sigma^{-1}}$.

$\langle ER - \alpha \mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle_{\Sigma^{-1}} = 0.$

$\langle ER, \mathbb{1} \rangle_{\Sigma^{-1}} - \alpha \langle \mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle_{\Sigma^{-1}} = 0.$

$b - \alpha a = 0 \iff \alpha = \frac{b}{a}.$

$\rightarrow$ $ER - \frac{b}{a}\mathbb{1} \perp \mathbb{1}.$

$\perp k\mathbb{1}. \quad \forall k \in \mathbb{R}$

Ainsi, $\|ER - \mu \mathbb{1}\|^2_{\Sigma^{-1}} = \|ER - \frac{b}{a}\mathbb{1} + (\frac{b}{a} - \mu)\mathbb{1}\|^2_{\Sigma^{-1}}.$

$= \|ER - \frac{b}{a}\mathbb{1}\|^2_{\Sigma^{-1}} + \frac{(b - a\mu)^2}{a}$

$$L_1 \begin{cases} b - \mu a = 2\lambda \\ \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 \left[\| ER - \frac{b}{a} \mathbb{1} \|^2_{\Sigma^{-1}} + \frac{(b-\mu a)^2}{a} \right] = \sigma^2. \end{cases} L_2$$

L_2:

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 \left(\| ER - \frac{b}{a} \mathbb{1} \|^2_{\Sigma^{-1}} + \frac{(2\lambda)^2}{a} \right] = \sigma^2.$$

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 \times \| ER - \frac{b}{a} \mathbb{1} \|^2_{\Sigma^{-1}} + \frac{1}{a} = \sigma^2.$$

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 \| ER - \frac{b}{a} \mathbb{1} \|^2_{\Sigma^{-1}} = \sigma^2 - \frac{1}{a}.$$

Pour $\sigma^2 \geq \frac{1}{a}$, $\frac{1}{2\lambda} = \frac{\sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}}{\| ER - \frac{b}{a} \mathbb{1} \|_{\Sigma^{-1}}}$.

$$x^* = \frac{1}{2\lambda} \Sigma^{-1} (ER - \mu \mathbb{1})$$

$$x^* = \frac{1}{2\lambda} \Sigma^{-1} \left(ER - \frac{b}{a} \mathbb{1} + \left(\frac{b}{a} - \mu\right) \mathbb{1} \right)$$

$$= \frac{1}{2\lambda} \Sigma^{-1} \left(ER - \frac{b}{a} \mathbb{1} + \frac{(b - \mu a)}{a} \mathbb{1} \right)$$

$$= \frac{1}{2\lambda} \Sigma^{-1} \left(ER - \frac{b}{a} \mathbb{1} \right) + \frac{1}{a} \Sigma^{-1} \mathbb{1}.$$

$$x^* = x^{\sigma} = \frac{\sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}}{\| ER - \frac{b}{a} \mathbb{1} \|_{\Sigma^{-1}}} \Sigma^{-1} \left(ER - \frac{b}{a} \mathbb{1} \right) + \frac{1}{a} \Sigma^{-1} \mathbb{1}.$$

Rq: $\forall x,\ L(x, \overset{\text{solution de système } 2\times 2}{\hat\lambda, \hat\mu}) \leq L(x^\sigma, \lambda, \mu)$

si x vérifie $x'\mathbb{1} = 1$, $\operatorname{var} R^x = \sigma^2$ alors

$$ER^x - \lambda \times 0 - \mu \times 0 \leq ER^{x^\sigma} - 0 - 0$$

$\forall\ x \in \mathbb{R}^d$ tel que $x'\mathbb{1} = 1$ et $\operatorname{var} R^x = \sigma^2$.

$$ER^x \leq ER^{x^\sigma}.$$

$\Rightarrow$ x^σ portefeuille efficient pour le risque $\sigma > 0$

Def: le frontière efficiente, c'est l'ensemble des points (σ, ER^{x^σ}) pour $\sigma \geq \frac{1}{\sqrt{a}}$.

$$m(\sigma) = ER^{x^\sigma} = ER' x^\sigma$$

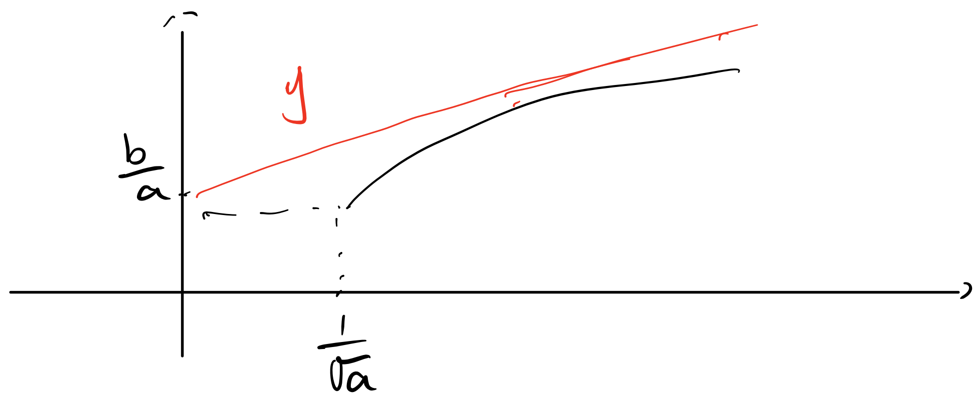
$$m(\sigma) = \frac{\sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}}{\|ER - \frac{b}{a}\|_{\Sigma^{-1}}} \underline{ER'\Sigma^{-1}(ER - \frac{b}{a}\mathbb{1})} + \frac{1}{a} ER'\Sigma^{-1}\mathbb{1}.$$

$$\langle ER, ER - \tfrac{b}{a}\mathbb{1} \rangle_{\Sigma^{-1}} = \langle ER - \tfrac{b}{a}\mathbb{1}, \underbrace{ER - \tfrac{b}{a}\mathbb{1}}_{\perp \text{ à } \frac{b}{a}\mathbb{1}} \rangle_{\Sigma^{-1}}$$

$$= \|ER - \tfrac{b}{a}\mathbb{1}\|^2_{\Sigma^{-1}} + 0$$

$$x^a = x^\sigma = \frac{\sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}}{\|ER - \frac{b}{a}\mathbb{1}\|_{\Sigma^{-1}}} \Sigma^{-1}\left(ER - \frac{b}{a}\mathbb{1}\right) + \frac{1}{a}\Sigma^{-1}\mathbb{1}.$$

$$m(\sigma) = \frac{b}{a} + \|ER - \frac{b}{a}\mathbb{1}\|_{\Sigma^{-1}} \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}.$$



Récapitulatif.

Le marché est constitué de d actions

Un portefeuille est défini par les proportions investies
$x = (x^1, x^2 \dots x^d)$

le pb
$$\begin{cases} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^d} E R^x \\ x'\mathbb{1} = 1 \quad \text{et } \operatorname{Var} R^x = \sigma^2. \end{cases}$$

$\mathbb{1} = (1, \dots 1)'$

avec R^x rendement du portefeuille du composition x.
a une solution unique si $\sigma^2 \geq \frac{1}{a}$ où
$a = \mathbb{1}' \Sigma^{-1} \mathbb{1}$ et $\Sigma = (\mathrm{cov}(R^i, R^j))_{i,j}$.

R^i rend de l'actif i sur la période concernée.

Cette solution est donnée par le portefeuille efficient

$$x_\sigma = \frac{1}{a} \Sigma^{-1} \mathbb{1} + \frac{\sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}}{\| ER - \frac{b}{a} \|_{\Sigma^{-1}}} \Sigma^{-1} (ER - \frac{b}{a} \mathbb{1})$$

où

$$\|x\|_{\Sigma^{-1}} \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt{x' \Sigma^{-1} x}$$

$$b = \langle ER, \mathbb{1} \rangle_{\Sigma^{-1}} = ER' \Sigma^{-1} \mathbb{1}$$

la frontière efficiente est donnée par l'ens des points $(\sigma, m(\sigma))$ pour $\sigma^2 \geq \frac{1}{a}$ et

$$m(\sigma) = \sup_{x'\mathbb{1} = 1, \, \mathrm{var} R^x = \sigma^2} ER^x = ER^{x_\sigma}$$

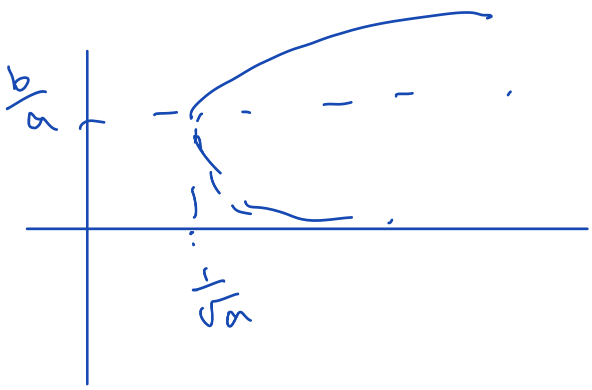
$$m(\sigma) = \frac{b}{a} + \| ER - \frac{b}{a} \mathbb{1} \|_{\Sigma^{-1}} \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}$$

Rq : $ER^x = ER'x = x'ER$.

$\mathrm{Var}R^x = x'\Sigma x$

Rq : Frontière inefficiente

$$m(\sigma) = \frac{b}{a} - \|ER - \frac{b}{a}\mathbb{1}\|_{\Sigma^{-1}} \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{a}}$$



Exemple d'application.

On suppose qu'on a 12 actifs, avec des données journalières entre le 2 janv. 2018 et 13 dec 2019.

1er colonne : cours d'ouverture
2er : cours le plus haut
3er : le plus bas
4er : Cours de cloture.
5er : valeurs échangées.

On fait le choix de modélisation

$$S_t = \text{moyenne}(\text{plus bas}, \text{plus haut})$$

1 période $(0, T)$ = 1 jour.

a) Estimation de ER.

ER est estimé comme la moyenne empirique de rendement de 2018.

$$ER^{(j)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} R_i^{(j)}, \quad R_i^{(j)} = \frac{S_{i+1}^{(j)} - S_i^{(j)}}{S_i^{(j)}}, \text{ actif } j.$$

$$R_i^{(j)} = \frac{S_{i+1}^{(j)}}{S_i^{(j)}} - 1.$$

Alternative :

$$\frac{S_T}{S_0} = e^{\sigma G - \frac{\sigma^2}{2}} \quad \text{où } G \overset{\text{loi}}{=} \mathcal{N}(0,1)$$

$$\Sigma = (\Sigma_{ij})_{i,j=1,\dots,d}.$$

$$\Sigma_{ij} = \mathrm{cov}(R^i, R^j).$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (R_k^i - ER^i)(R_k^j - ER^j)$$

Alternative sans calculer Σ^{-1}

Créer un nuage de points $(\sigma^{x_k}, ER^{x_k})_{k=1}^{m}$

$x_k = (x_k^1, \dots x_k^{12})$ avec $x_k' \mathbb{1} = 1$.

Pour cela générer aléatoirement x_k

Ex. for k in range (M):

$x_k^1 = $ sim.randn ().

$\vdots$

$x_k^{11} = $ sim.randn ().

$$x_k^{n} = 1 - \sum_{n=1}^{11} x_k^n$$

$$\sigma^{x_k} = \sqrt{x^{k\prime} \Sigma x^k}$$

$$ER^{x_k} = ER' x^k.$$

Application 1

$$\begin{cases} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} E\, R^x \\ 0 \leq x_i \leq 1 \quad , \forall i = 1 \ldots d. \\ x' \mathbb{1} = 1 \quad , \quad \operatorname{var} R^x \leq \sigma^2. \end{cases}$$

1er idée:

simuler $\quad y_i \overset{\text{loi}}{=} \mathcal{E}xp(\lambda = 2)$ (ou la loi uniforme)

$$S = \sum_{i=1}^{12} y_i$$

$$x_i = y_i / S.$$

2er idée.

$$X_1 \overset{\text{loi}}{=} U_{[0,2]}.$$

$$X_2 \overset{\text{loi}}{=} U_{[0, 1-X_1]} = (1 - X_1) U_{[0,1]}.$$

$$X_2 \overset{\text{loi}}{=} (1 - X_1 - X_2) U_{[0,1]}$$

$$\vdots$$

$$X_n = 1 - (X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1})$$

15/12/2022

Réallocation dynamique journalière.

On a choisi un risque maximum de 2%, et on a déterminé le portefeuille optimal x_opt correspondant sous les contraintes $x_i \in [0,1]$, $\forall i \in 1, 2, \dots 12$. On va suivre ces proportions entre le 2 janv. 2019 et le 13 dec 2019 en partant de $V_0 = 240\,000$ €.

l'allocation initiale est donnée par $240\,000 \times x_{opt}$ qui donne les capitaux investis dans chacun des actifs.

→ On va se ramener à des quantités entière donc.

$$240\,000 \times x_{opt}^i = \theta_0^i \times S_0^i, \quad i = 1, \dots, 12$$

$$\theta_0^i = 240\,000 \, x_{opt}^i / S_0^i \quad \text{puis} \quad \theta_{0\,choix}^i = \inf(240\,000 \, x_{opt}^i / S_0^i)$$

il reste à priori du cash

$$cash = V_0 - \sum_{i=1}^{12} \theta_0^i \times S_0^i$$

Au bout d'une journée, on fait le point, les proportions investies dans chacun des actifs ont changé.

$$x^i = \frac{\theta_0^i \times S_1^i}{V_1} \quad \text{tandis que} \quad X_{opt}^i = \frac{\theta_0^i \times S^i}{V_0}$$

où $V_1 = Cash + \sum_{i=1}^{12} \theta_0^i \times S_1^i$.

Donc, en $t=1$, on change les proportion des portefeuilles

$x = (x^1, \dots x^{12})'$ afin de les 'ramener' à X_{opt} en achetant ou vendant des actifs.

si $x^i = \frac{\theta_0^i S_1^i}{V_1} > X_{opt}^i$, on va vendre de l'actif i, la quantité que je dois avoir dans mon portefeuille est θ_1^i telle que $X_{opt}^i = \frac{\theta_1^i \times S_1^i}{V_1}$ cad $\theta_1^i = \frac{V_1 \times X_{opt}^i}{S_1^i}$

puis $\theta_1^i = \inf\left(\frac{V_1 \times X_{opt}^i}{S_1^i}\right)$, on doit changer θ_0^i en θ_1^i, c'est à dire vendre $(\theta_0^i - \theta_1^i)$ si $\theta_0^i - \theta_1^i > 0$
acheter $(\theta_1^i - \theta_0^i)$ si $\theta_0^i < \theta_1^i$

(fichier xopt_excel)

Portefeuille du marché.

Soit $\hat{q}^i$ les quantités totales d'actions n° i disponibles

Portefeuille de marché : $\hat{q} = (\hat{q}^1, \dots \hat{q}^d)$.

Volume : $\hat{V} = (\hat{q}^1 S_1, \dots, \hat{q}^d S_d)$

$\hat{x}$ les proportions

$$\hat{x}^i = \underbrace{\frac{\hat{q}^i S^i}{\hat{V}L}}_{\text{calculable}}, \quad \hat{V}L = \sum \hat{q}^i S_i, \text{ très grand.}$$

$$R^m = \hat{x}' R = \sum \hat{x}^i R^i.$$

$$V_0^m = 240\,000, \quad V_1^m = 240\,000\,(1 + R_1^m)$$

$$R_1^m = \sum_{i=1}^{12} \hat{x}^i$$

$$\hat{x}^i = \frac{\hat{q}^i \times S_0^i}{\hat{V}L_0}, \quad \hat{V}L_0 = \sum \hat{q}^i S_0^i, \quad i = 1, \dots, 12$$

$$R^i = \frac{S_1^i - S_0^i}{S_0^i}, \quad i = 1, \dots, 12$$

$\rightarrow$ on en déduit $R_1^m \Rightarrow$ on en déduit V_1^m.

Autres benchmark : CAC 40.

$$V_0^B = 240\,000$$

$$V_1^B = V_0^B (1 + R_1^B)$$

$$R_1^B = \frac{CAC_{40}(1) - CAC_{40}(0)}{CAC_{40}(0)}$$

Autre benchmark B^1

$$x^B = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \dots, \frac{1}{12}\right)$$

$$X_i^B = \frac{1}{12} \quad \forall i = 1, \dots, 12.$$

Mesure de risque

Le contexte pratique des mesures de risque, c'est la régulation bancaire des accords de Bâle. mais aussi en assurance, les accords solvency, qui contraignent les entreprises à faire des réserves de cash afin de compenser d'éventuelles pertes liées aux investissements risqués.

1er example : Value at Risk d'ordre $\alpha \in]0,1[$

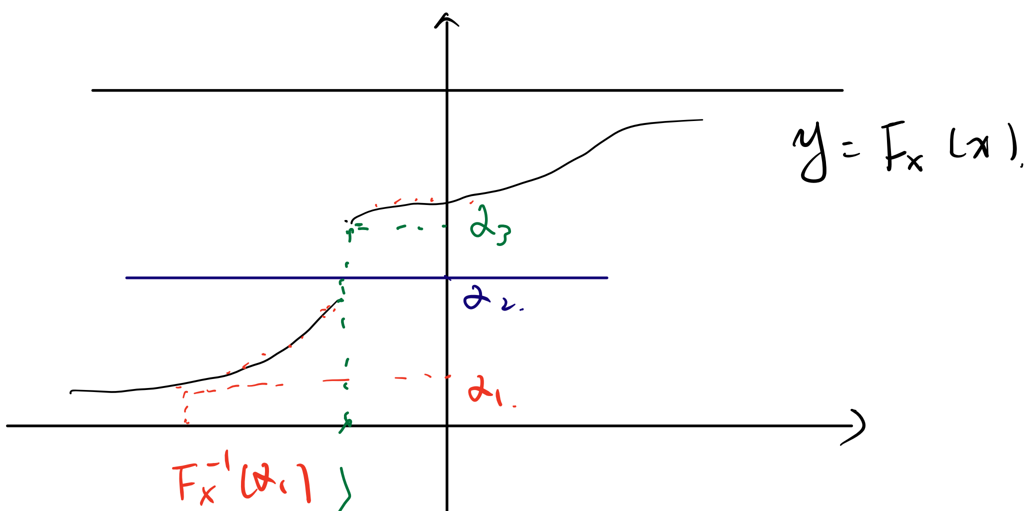
$(\alpha = 95\%, 99\%, 99.9\%)$

On considère sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, une variable aléatoire X qu'on interprète comme la valeur terminale liquidative d'un investissement financier. Cela peut être notamment la valeur liquidative totale d'une banque si bien qu'il y a défaut (faillite) lorsque $X < 0$.

C'est pourquoi, on introduit :

$$F_X^{-1}(\alpha) = \inf\{z : F_X(z) > \alpha\} \quad \text{où } F_X(z) = P(X \le z)$$

et α fixé. (exemple $\alpha = 5\% = 1 - 95\%$, $\alpha = 1\% = 1 - 99\%$).



$F_X^{-1}(\alpha) = \inf(x : F_X(x) > \alpha_1)$, antécédant de α_1.

partie de courbe $\geq (y = \alpha_1)$

$F_X^{-1}(\alpha_2) = \inf\{x : F_X(x) > \alpha_2\}$, x_2 n'a pas d'antécédant.

$= F_X^{-1}(\alpha_3)$.

On notera $F_X^{-1}(0) = -\infty$, car $F_X(-\infty) = 0$

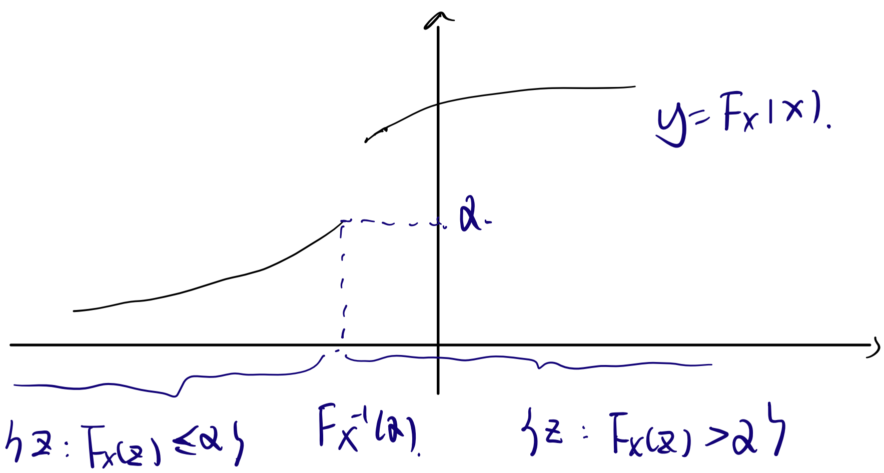
$F_X^{-1}(1) = \inf\{x : F_X(x) > 1\} = \inf \emptyset \overset{\text{conv}}{=} \infty$

dans notre ex

RQ. F_X^{-1} est une inverse généralisée, car F_X n'est pas forcément inversible.

On peut démontrer que $F_X^{-1}(\alpha) = \sup \{z : F_X(z) \leq \alpha\}$

points en dessous de la courbe.



On peut démontrer que $F_X(F_X^{-1}(\alpha)) \geq \alpha$ ($= \alpha$ sur le dessin)

mais aussi $\forall c < F_X^{-1}(\alpha)$, $F_X(c) \leq \alpha$

$\forall c < F_X^{-1}(\alpha)$, $P(X \leq c) \leq \alpha$

$P(-c + X \leq 0) \leq \alpha$.

RQ En general $c < 0$, donc $-c = |c|$.

$P(|c| + X \leq 0) \leq \alpha$

et donc en passant au complémentaire

$(P(A^c) = 1 - P(A))$

$$P(|c| + X > 0) = 1-\alpha$$

si j'ajoute le capital $|c|$ à X, j'obtiens une valeur terminale.

$|c| + X$ qui est positive dans $1-\alpha$ des cas

($\alpha = 5\%$)

$|c| + X \geq 0$ dans 95% des cas.

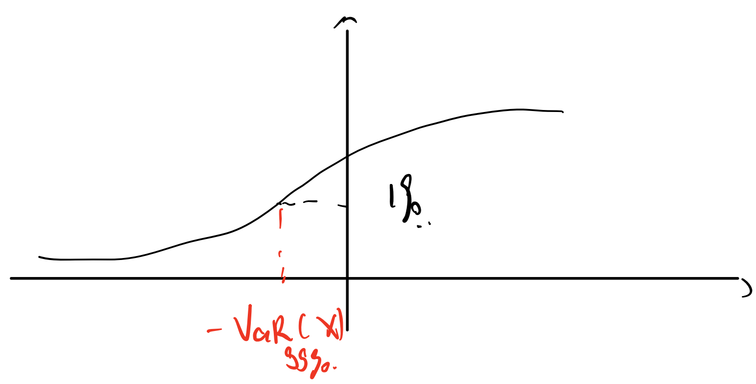
Le réserve $|c|$ est la 95% des cas.

La réserve $|c|$ entre la faillite dans 95% des cas avec $|c| = -c = -F_X^{-1}(5\%)$.

Notion de Value at Risk

$$VaR_{1-\alpha}(X) = -F_X^{-1}(\alpha)$$

Ex $\alpha = 1\%$, $VaR_{99\%}(X) = -F_X^{-1}(1\%)$



$$P(X \leq -VaR_{99\%}(X)) = F_X(-VaR_{99\%}(X)) = 1\%$$

$$P(X + VaR_{99\%}(X) \leq 0) = 1\%$$

avec complémentaire

$$P(X + VaR_{99\%}(X) > 0) = 99\%$$

($\geq 99\%$ en général).

→ la proba de faire faillite est inférieure à 1% grâce à la réserve de cash $VaR_{99\%}(X)$.

RQ : $F_X^{-1}(\alpha)$ est un quantile d'aide α.

Action. $VaR_{1-\alpha}(X) = -F_X^{-1}(\alpha)$ ou de équivalente.

$VarR_\alpha(X) = -F_X^{-1}(1-\alpha)$ proba de faillite.

proba de non faillite.

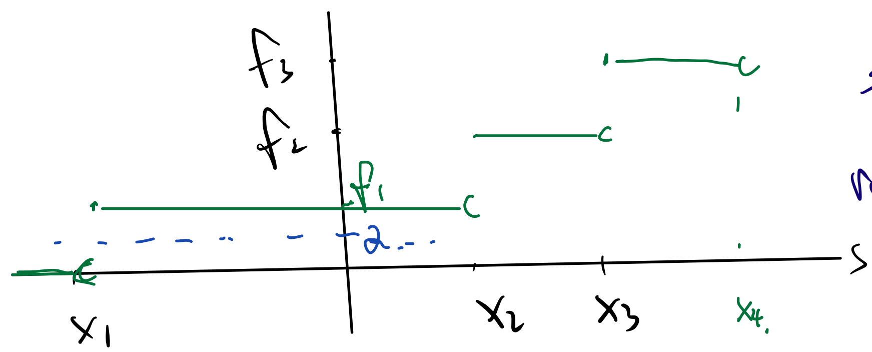
Example d'application

Les valeurs possibles observées empiriquement pour X sont supposées données. On réordonne les valeurs possibles distinctes de X.

$x_1 < x_2 \dots < x_n$ et on calcule les fréquences cumulées associées

$f_1 < f_2 \dots f_n$ où f_i = % des valeurs observées $\leq x_i$

On en déduit histogramme des fréquences cumulées.



$y = \bar{F}_X(x)$,

$\bar{F}_X$ fonction de répartition empirique de X.

Si $x \in [x_2, x_3[$, le % des valeurs observées qui sont $\leq x$ =
" " " qui sont $= x_1$ ou x_2 $= f_2$

On peut en déduire $F_X^{-1}(\alpha)$ pour $\alpha \in]0,1]$

$\alpha \in]0, f_1]$, $F_X^{-1}(\alpha) = x_1$.

$\alpha \in]f_1, f_2]$, $F_X^{-1}(\alpha) = x_2$.

$\alpha \in]f_{n-1}, f_n]$, $F_X^{-1}(\alpha) = x_n$.

RQ : si $U \overset{loi}{=} U[0,1]$, $F_X^{-1}(U)$ v.a à valeurs dans $\{x_1, x_2 \dots x_n\}$
et $P(F_X^{-1}(U) = x_1) = P(U \in]0, f_1]) = f_1$.

$U \overset{loi}{=} U_{[0,1]} = P(U \in [a,b]) = b-a$. pour $a, b \in [0,1]$

En pratique avec Python, un tableau de valeurs de X, y compris celles qui se répètent.

Peut-on utiliser $F_X^{-1}(\alpha)$ = np.percentile (date, 100α, interpolation = "lower")

ou "up".

Example date = np.array ([2, 1, 1, 4, 4, 4]).

$x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 4.$

$f_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $F_X^{-1}(30\%) = \inf\{x : F_X(x) > 30\%\} = 1.$

$f_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 50\%.$