3ème année MIC Groupe A
Rahal Skander & Trung Thai

Compte-Rendu du TP3 d'EDO:

1-Introduction:

Ce TP a pour but d'illustrer des modèles épidémiologiques modélisant la propagation d'une épidémie au sein d'une population.
De prime abord, on va s'intéresser au modèle SIR développé par Kermack et McKendrick , ensuite on va modéliser le problème à l'aide du modèle SZR (Invasion du zombie) qui fait aussi appel au modèle avec vaccin ayant pour but de faire guérir les zombies.

2-Le modèle SIR:

Le modèle SIR consiste à considérer une population totale N composée de personnes pouvant être classées comme saines mais susceptibles d'être infectées (S) , des individus infectés (I) et le reste de la population à savoir ceux qui ne peuvent plus être contaminés et qui ne sont plus contagieux.
On pourra donc représenter la variation de chacun de ces trois paramètres au cours du temps à travers le système suivant:

$$\begin{cases} S'(t) = -ß\, S(t)\, I(t) \\ I'(t) = ß\, S(t)\, I(t) - f\, I(t) \\ R'(t) = f\, I(t) \end{cases}$$

avec ß: représente le taux de contamination (On prendra ß=8)
avec f: représente la fréquence d'incubation (On prendra f=4.3)

En posant X(t) =(S(t), I(t) , R(t)) et X'(t)=(S'(t), I'(t) , R'(t)) , le problème s'écrit de la manière suivante:

$$\begin{cases} X'(t) = F(X(t)) = \begin{pmatrix} -ß\, S(t)\, I(t) \\ ß\, S(t)\, I(t) - f\, I(t) \\ f\, I(t) \end{pmatrix} \\ X(0) = X0 = (S(0), I(0), R(0)) \end{cases}$$

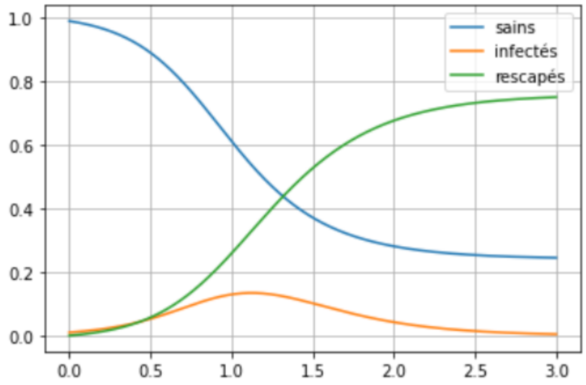
=> Il s'agit bien d'une équation différentielle linéaire autonome, donc par application du théorème de cauchy-Lipschitz , ce problème admet une unique solution.

N représente la population totale donc N(t)=S(t)+R(t)+I(t)
Pour une densité de population N égale à 1, on choisit X0=(0.99,0.01,0). Le choix de ce vecteur va nous permettre d'étudier l'évolution de la propagation du virus au cours du temps. En effet, en commençant par une population composée par une minorité d'individus infectés et une population majoritairement saine , on va pouvoir valoriser la vitesse avec laquelle se propage le virus au cours du temps ainsi que son degré de contamination vis-à-vis de chaque catégorie de la population.

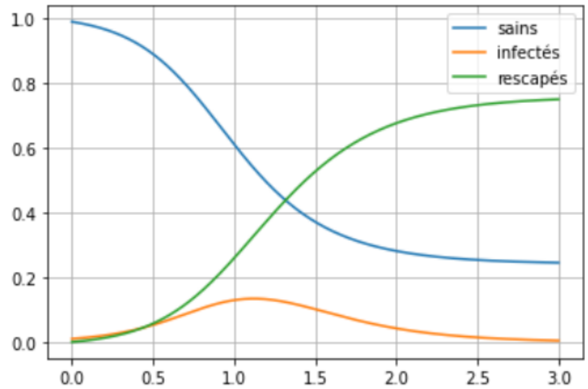
2.1-Solution numérique:

En choisissant X0 comme condition initiale, on a implémenté diverses méthodes de résolutions numériques afin de résoudre le problème, on obtient les graphes de solution des différentes méthodes:

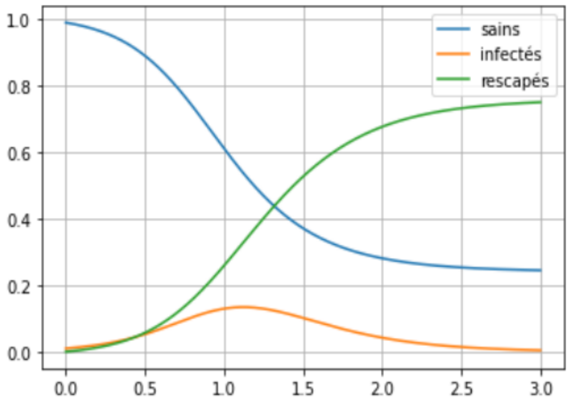
a- Méthode d'Euler explicite



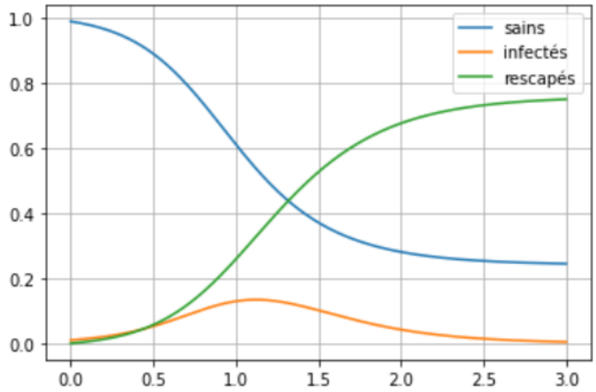
b- Méthode d'Euler implicite



3ème année MIC Groupe A
Rahal Skander & Trung Thai



c- Méthode RK2

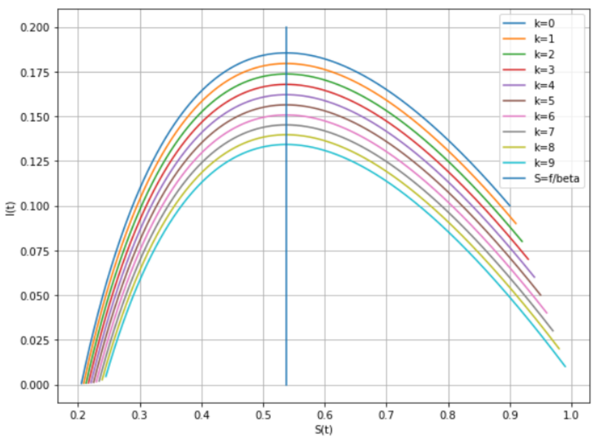


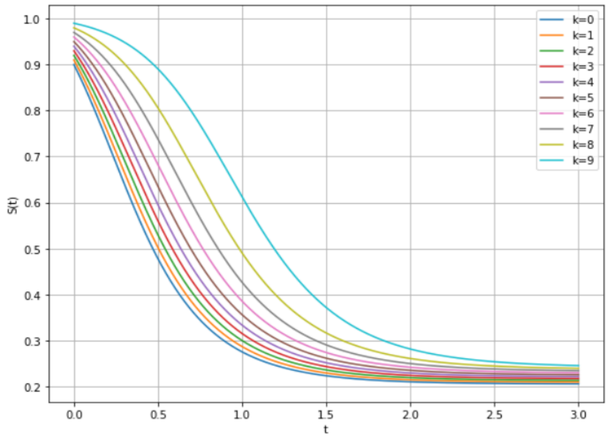
d- Méthode RK4

Les 4 méthodes illustrées ci-dessus sont caractérisées par des ordres différents.
Les méthodes d'Euler sont en effet d'ordre 1 et celles de Runge-Kutta sont d'ordre 4.
Cependant , en prenant T=3, on ne remarque pas de différences entre les quatre courbes: Les erreurs sont très petites. Cela est certainement relié à la valeur de T et aux différents choix du pas du temps. En augmentant la valeur de T , on va certainement pouvoir différencier entre les méthodes vu que les erreurs vont s'accroître au cours du temps.

2.2- I=f(S):

En choisissant différentes valeurs de X0 avec X0=(0.9+0.01k,0.1-0.01k,0) et k ∈{0,9} , on a pu tracer la fonction I=f(S) en compagnie de la fonction S=f/ß dans une première figure et la fonction S=g(t) dans la seconde. On obtient les résultats suivants pour différentes valeurs de k.





D'après la figure 1 (figure de gauche) , on remarque que pour une condition initiale X0, le nombre de personnes infectées est minimale pour k=9 et maximale pour k=0 quelque soit le nombre des personnes saines.
De plus , pour toutes les valeurs de k , on distingue 3 cas:

- Si S(t)<f/ß: le nombre de personnes infectées augmente avec le nombre de personnes saines (proportionnalité).
- Si S(t)=f/ß: le nombre de personnes infectées atteint un seuil maximal.
- Si S(t)>f/ß: le nombre de personnes infectées diminue lorsque le nombre de personnes saines augmente (proportionnalité inverse).

D'après la figure 2, on remarque que la fonction S=g(t) est décroissante au cours du temps et le nombre de personnes saines est toujours le plus élevé pour k=9.
Une stratégie de vaccination est d'autant plus efficace lorsque k est plus élevé (nombre de personnes initialement saines très important).De plus , on notera l'efficacité du vaccin lorsque S(t)>f/ß (en d'autres termes, il faut augmenter la fréquence d'incubation f et diminuer ß)

3ème année MIC Groupe A
Rahal Skander & Trung Thai

3-Le modèle SZR:

Le modèle SZR est une variante du modèle SIR proposé en 2009, Z est maintenant une population de Zombie, et notamment les personnes mortes peuvent se transformer en Zombie. La dynamique maintenant est la suivante:

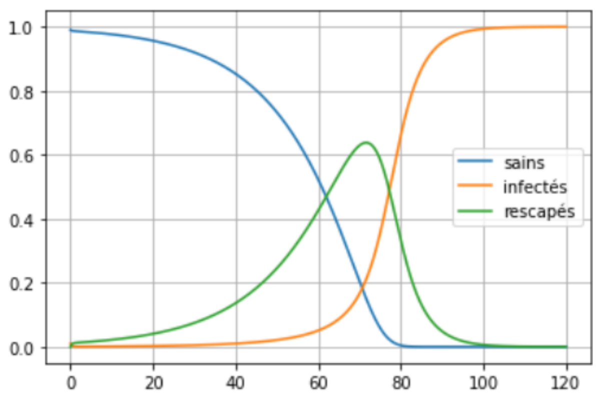
$$\begin{cases} S'(t) = -\beta\, S(t)\, I(t) \\ I'(t) = (\beta-\alpha)\, S(t)\, I(t) + \zeta R(t) \\ R'(t) = \alpha S(t)\, I(t) - \zeta R(t) \end{cases}$$

Lorsqu'une personne saine rencontre un Zombie, il y a deux possibilités: la personne saine est mordue et devient un Zombie (terme $-\beta SZ$), ou alors le Zombie est tué, et passe dans la population R(terme αSZ)

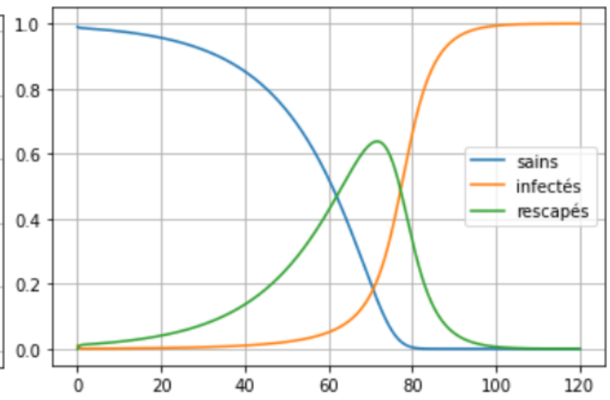
La population R peut spontanément se transformer en Zombie (terme ζR)

Solution numérique:

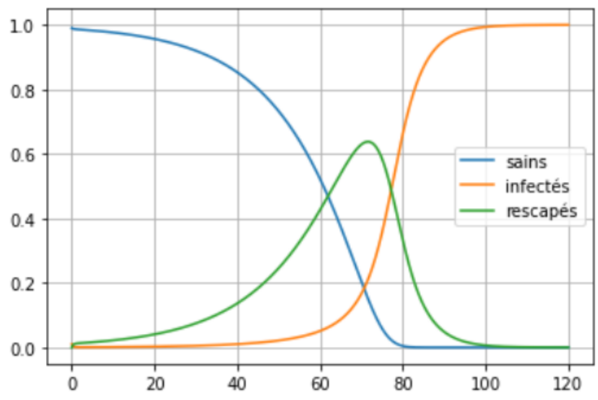
En choisissant X0 comme condition initiale mais avec $\beta=1$, $\alpha=4$ et $\zeta=0.2$, on a utilisé les mêmes méthodes et obtenu les graphiques:



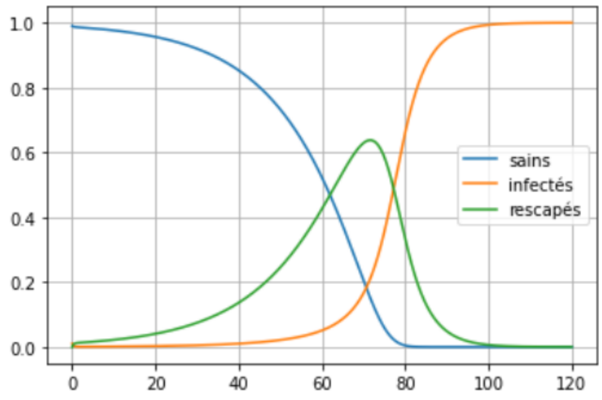
a-Méthode d'Euler explicite



b- Méthode RK2



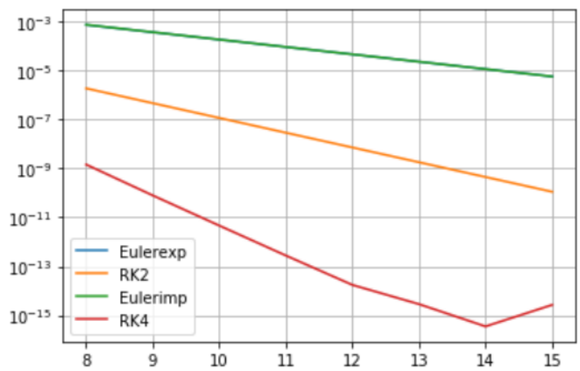
c- Méthode d'Euler implicite



d- Méthode RK4

4-Ordre des méthodes:

On considère maintenant les erreurs entre les méthodes, on suppose que la solution y(30) donné par méthode RK4 avec h= T/2^18 en choisissant T=30, on obtient le graphe de l'écart entre y(30) et yh(30) avec h=t/2^k, k={8,...,15}:



3ème année MIC Groupe A
Rahal Skander & Trung Thai

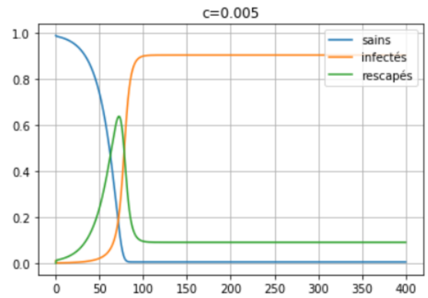
On voit que les erreurs obtenues en implémentant les méthodes d'Euler explicite et implicite sont pareilles, cependant RK4 reste la meilleure méthode pour résoudre ce problème (car les erreurs sont plus petites).

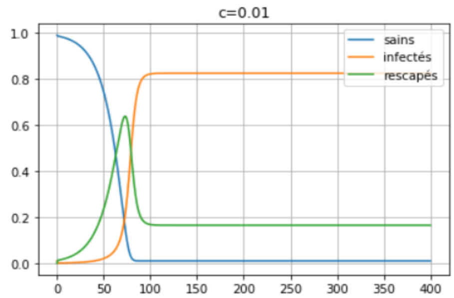
5-Modèle avec vaccin:

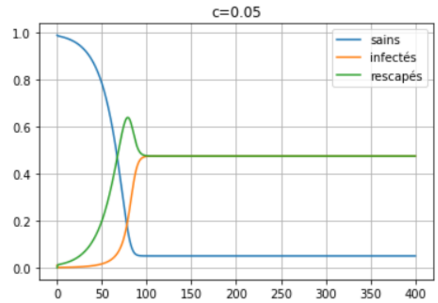
On considère maintenant l'existence d'un vaccin qui permet de guérir les zombies et donc de les transférer vers la catégorie saine. Le modèle devient alors:

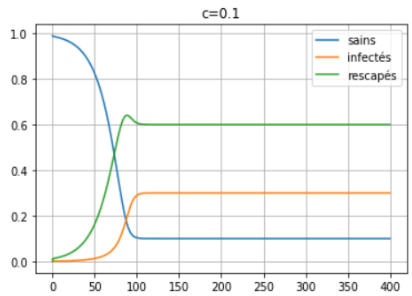
$$\begin{cases} S'(t) = -\beta\, S(t)\, Z(t) \\ Z'(t) = (\beta-\alpha)\, S(t)\, I(t) + \zeta R(t) - c\, Z(t) \\ R'(t) = \alpha S(t)\, I(t) - \zeta R(t) \end{cases}$$

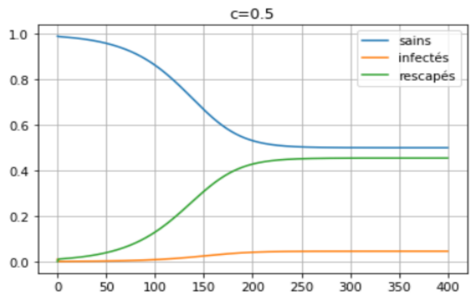
On a pu tracer pour différentes valeurs de c , l'évolution de S , Z et R au cours du temps. On obtient les représentations graphiques suivantes:

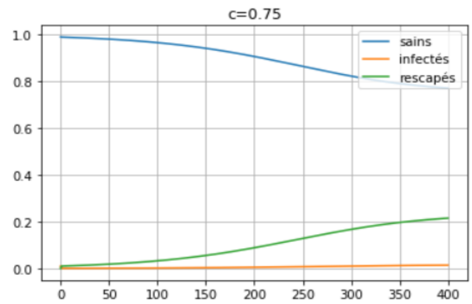


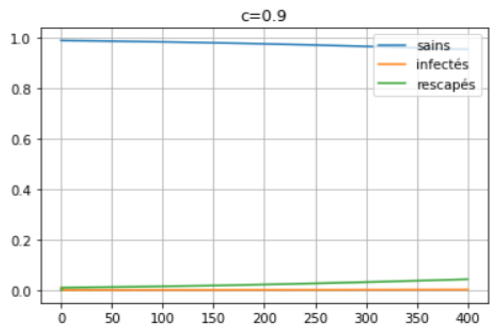












=> On remarque qu'un effet efficace du vaccin est proportionnel avec la valeur du paramètre c . En effet, pour des mêmes conditions initiales précédentes, lorsqu'on augmente la valeur de c, on note que le nombre de personnes saines devient plus important au cours du temps contrairement à la population infectée qui diminue en augmentant c.

En particulier , pour c=0.9, le vaccin est très efficace vu que les fluctuations sont faibles par rapport à l'état initial de la population (pente quasi nulle)

Conclusion:

On remarque que pour T négligeable (T=3), les solutions des modèles SIR et SZR obtenues à partir des différentes méthodes implémentées sont similaires puisque les erreurs sont très négligeables. Cependant, en augmentant T, on commence par distinguer les méthodes les plus pertinentes.

A partir du graphe qui représente l'ordre des méthodes,on note que la méthode RK4 est la meilleure pour résoudre le problème vu que son ordre est égal à 4, elle fournit donc la meilleure approximation mais nécessite aussi un pas très petit pour assurer sa stabilité.En revanche , les méthodes d'Euler et celle de RK2 sont moins précises vu que ce sont des schémas consistants d'ordre inférieur (Les méthodes Euler sont consistants d'ordre 1 et celle de RK2 est consistante d'ordre 2). On note aussi qu'un effet efficace du vaccin est proportionnel avec les paramètres k et c.