

**Compte-rendu du TP n°2:**

Méthode de Monte-Carlo et méthodes de différences finies pour l'équation de  
chaleur

**Travail élaboré par:**

RAHAL Skander et Taieb Talel

**Année scolaire: 2021-2022**

### I.Présentation du problème:

Ce TP a pour objectif de comparer deux méthodes numériques dans le but de résoudre l'équation de chaleur.

De prime abord, on va s'intéresser à la méthode de différences finies et par la suite, la résolution sera effectuée avec la méthode de Monte-Carlo.

Soit  $L=1$ ,  $\Omega = ]0, L[x]0, L[$  et  $T$  un réel strictement positif.

Le problème à résoudre est le suivant:

$$\frac{du}{dt} + V \cdot \nabla u - D \Delta u = f, \text{ sur } [0, T] \cdot \Omega,$$

*tq la condition à  $t = 0$  est :  $u(0, x, y) = 0, \forall (x, y) \in \Omega$ ,*

*et les conditions aux limites :*

$$\begin{aligned} \text{en } x = 0 \text{ et } x = L, \forall t \in [0, T], \forall y \in [0, L] \text{ on a : } \frac{du}{dx}(t, 0, y) = 0, \frac{du}{dx}(t, L, y) = 0, \\ \text{en } y = 0 \text{ et } y = L, \forall t \in [0, T], \forall x \in [0, L] \text{ on a : } u(t, x, 0) = 0, u(t, x, L) = 1. \end{aligned}$$

Le coefficient  $D$ , strictement positif, correspond à la diffusivité thermique du fluide.

Sa valeur est la suivante:

$$D=0.2$$

$V=(V_1, V_2)$  représente le champ de vitesse du fluide. Ses composantes  $V_1$  et  $V_2$  ont pour expression:

$$V_1(t, x, y) = V_1(x, y) = -V_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right),$$

$$V_2(t, x, y) = V_2(x, y) = V_0 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right),$$

avec  $V_0=1$ .

$f$  désigne la source de chaleur et a pour expression:

$$\forall (t, x, y) \in [0, T] \cdot \Omega, f(t, x, y) = f(x, y) = 256 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 \cdot \left(\frac{y}{L}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{y}{L}\right)^2$$

## II. Méthode des différences finies:

Dans cette première partie, on s'intéresse à la résolution par différences finies du problème posé ci-dessus. On définit tout d'abord la grille de discrétisation.

Soit  $K$  un entier strictement positif.

Les sommets de la grille sont par définition les  $(K+1)^2$  points  $X_{i,j}$  de coordonnées  $(i.h, j.h)$  avec  $h = \frac{L}{K}$  et  $i \in \{0, \dots, K\}$ ,  $j \in \{0, \dots, K\}$ .

On considère le schéma aux différences finies défini par les relations suivantes.

On note d'abord  $V_{i,j}^1 = V_1(X_{i,j})$  et  $f_{i,j} = f(X_{i,j})$ .

Pour tout  $(i,j) \in \{1, \dots, K-1\}^2$  (points intérieurs):

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - \Delta t \cdot V_{i,j}^1 \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h} - \Delta t \cdot V_{i,j}^2 \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2h} + \Delta t \cdot D \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j+1}^n - 4u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j-1}^n}{h^2} + \Delta t \cdot f_{i,j}$$

Pour tout  $(i,j)$  avec  $i \in \{0, K\}$  et  $j=0$  (points sur la frontière  $y=0$ ) ou  $j=K$  (points sur la frontière  $y=L$ ):

$$u_{i,0}^{n+1} = 0 \text{ et } u_{i,K}^{n+1} = 1,$$

Pour tout  $(i,j)$  avec  $k \in \{1, K-1\}$  et  $i=0$  (points sur la frontière  $x=0$ ):

$$u_{0,j}^{n+1} = u_{0,j}^n - \Delta t \cdot V_{0,j}^2 \cdot \frac{u_{0,j+1}^n - u_{0,j-1}^n}{2 \cdot h} + \Delta t \cdot D \cdot \frac{u_{1,j}^n + u_{0,j+1}^n - 3 \cdot u_{0,j}^n + u_{0,j-1}^n}{h^2} + \Delta t \cdot f_{0,j}$$

Pour tout  $(i,j)$  avec  $k \in \{1, K-1\}$  et  $i=K$  (points sur la frontière  $x=L$ ):

$$u_{K,j}^{n+1} = u_{K,j}^n - \Delta t \cdot V_{K,j}^2 \cdot \frac{u_{K,j+1}^n - u_{K,j-1}^n}{2 \cdot h} + \Delta t \cdot D \cdot \frac{u_{K,j+1}^n - 3 \cdot u_{K,j}^n + u_{K-1,j}^n + u_{K,j-1}^n}{h^2} + \Delta t \cdot f_{K,j}$$

Afin de regrouper toutes les valeurs de la solution discrète (à chaque instant  $t=n.\Delta t$ ) dans un unique vecteur, on associe à tout couple  $(i,j) \in \{0, \dots, K\}^2$  un entier  $k=k(i,j)$  compris entre 0 et  $(K+1)^2-1$  défini par :

$$k(i,j) = i + (K+1) \cdot j$$

Réciproquement, on note  $ij(k)$  le couple  $(i,j)$  associé à l'entier  $k$  et on pose  $u_k^n = u_{ij(k)}^n$ . Enfin, on note  $U^n$  le vecteur de dimension  $(K+1)^2$  de composantes  $(u_0^n, \dots, u_{(k+1)^2-1}^n)$ .

### Question 1:

Dans cette question, on montrera qu'il existe une matrice creuse

$A \in M_{(k+1)^2}(\mathbb{R})$  et un vecteur  $S$  de dimension  $(K+1)^2$  tels que pour tout entier

$n \in \mathbb{N}$ , le schéma défini par les relations précédentes soit équivalent à la relation vectorielle suivante:

$$U^{n+1} = AU^n + S.$$

Remarquons d'abord que :

$$k(i, j+1) = i + (K+1) \cdot (j+1) = i + (K+1) \cdot j + (K+1) = k(i, j) + (K+1)$$

$$k(i-1, j) = i-1 + (K+1) \cdot j = k(i, j) - 1$$

$$k(i, j-1) = i + (K+1) \cdot (j-1) = i + (K+1) \cdot j - (K+1) = k(i, j) - (K+1)$$

Notons  $A[i, j]$  le coefficient à  $i^{\text{ème}}$  ligne et  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $A$ ,  $S[k]$  est la  $k^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $S$ ,  $U[k]$  est la  $k^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $U$  et  $F[k]$  la  $k^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $F$  de composantes  $(f_0, f_1, \dots, f_{(K+1) \wedge 2-1})$ .

Cherchons maintenant les composantes de  $A$  et  $S$  à partir des relations ci-dessus.

### II.1.1- Les composantes de $A$ et $S$ pour les points intérieurs:

Pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, K-1\}^2$  (points intérieurs):

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n \left( 1 - \frac{4 \cdot \Delta t \cdot D}{h^2} \right) + u_{i+1,j}^n \left( \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} - \frac{\Delta t \cdot V_{i,j}^1}{2 \cdot h} \right) + u_{i-1,j}^n \left( \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} + \frac{\Delta t \cdot V_{i,j}^1}{2 \cdot h} \right) + u_{i,j+1}^n \left( \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} - \frac{\Delta t \cdot V_{i,j}^2}{2 \cdot h} \right) + u_{i,j-1}^n \left( \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} + \frac{\Delta t \cdot V_{i,j}^2}{2 \cdot h} \right) + \Delta t \cdot f_{i,j}$$

En utilisant les notations ci-dessus, on obtient:

$$U_{i,j}^{n+1}[k] = \left( 1 - \frac{4 \cdot \Delta t \cdot D}{h^2} \right) U^n[k] + \left( \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} - \frac{\Delta t \cdot V_{i,j}^1}{2h} \right) U^n[k+1] + \left( \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} + \frac{\Delta t \cdot V_{i,j}^1}{2h} \right) U^n[k-1] + \left( \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} - \frac{\Delta t \cdot V_{i,j}^2}{2h} \right) U^n[k+K+1] + \left( \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} + \frac{\Delta t \cdot V_{i,j}^2}{2h} \right) U^n[k-(K+1)] + \Delta t \cdot F[k]$$

Prenons  $A$  une matrice initialement nulle (remplie de zéros). En prenant

$k(i, j) = k$ , on remplit par la suite la matrice  $A$  et le vecteur  $S$ :

$$\begin{aligned} A[k, k] &= 1 - \frac{4 \cdot \Delta t \cdot D}{h^2} \\ A[k, k-1] &= \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} + \frac{\Delta t \cdot V_{i,j}^1}{2h} \\ A[k, k+1] &= \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} - \frac{\Delta t \cdot V_{i,j}^1}{2h} \\ A[k, k-(K+1)] &= \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} + \frac{\Delta t \cdot V_{i,j}^2}{2h} \\ A[k, k+(K+1)] &= \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} - \frac{\Delta t \cdot V_{i,j}^2}{2h} \\ S[k] &= \Delta t \cdot F[k] \end{aligned}$$

### II.1.2- Les composantes de A et S sur les points sur la frontière $y=0$ et $y=L$ (points en bas et en haut de la plaque):

Pour tout  $(i,j)$  avec  $i \in \{0,1,\dots,K\}$  et  $j=0$  ou  $j=K$ .

Dans ce cas, on a bien que:

$$u_{i,0}^{n+1}=0 \text{ et } u_{i,K}^{n+1}=1$$

$$\text{Donc } U^{n+1}[i]=0 \text{ et } U^{n+1}[i+K(K+1)]=1$$

On a donc pour tout  $i \in \{0,1,\dots,K\}$ :

$$A[:,i]=0 ; A[:,i+K(K+1)]=0 \text{ et } S[i+K(K+1)]=1$$

### II.1.3- Les composantes de A et S sur les points sur la frontière $x=0$ (points à gauche de la plaque):

Dans ce cas, on obtient en remplaçant  $i$  par 0 et en notant  $k=k(0,j)$ :

$$\begin{aligned} u_{0,j}^{n+1} &= u_{0,j}^n - \Delta t \cdot V_{0,j}^2 \frac{u_{0,j+1}^n - u_{0,j-1}^n}{2h} + \Delta t \cdot D \cdot \frac{u_{1,j}^n + u_{0,j+1}^n - 3u_{0,j}^n + u_{0,j-1}^n}{h^2} + \Delta t \cdot f_{0,j} \\ &= \left(1 - \frac{3 \cdot \Delta t \cdot D}{h^2}\right) u_{0,j}^n + \left(\frac{\Delta t \cdot D}{h^2} - \frac{\Delta t \cdot V_{0,j}^2}{2h}\right) u_{0,j+1}^n + \left(\frac{\Delta t \cdot D}{h^2} + \frac{\Delta t \cdot V_{0,j}^2}{2h}\right) u_{0,j-1}^n + \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} u_{0,j+1}^n + \Delta t \cdot f_k \end{aligned}$$

On a donc :

$$u_k^{n+1} = \left(1 - \frac{3 \cdot \Delta t \cdot D}{h^2}\right) u_k^n + \left(\frac{\Delta t \cdot D}{h^2} - \frac{\Delta t \cdot V_{0,j}^2}{2h}\right) u_{k+(K+1)}^n + \left(\frac{\Delta t \cdot D}{h^2} + \frac{\Delta t \cdot V_{0,j}^2}{2h}\right) u_{k-(K+1)}^n + \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} u_{k+1}^n + \Delta t \cdot f_k$$

et :

$$U^{n+1}[k] = \left(1 - \frac{3 \cdot \Delta t \cdot D}{h^2}\right) U^n[k] + \left(\frac{\Delta t \cdot D}{h^2} - \frac{\Delta t \cdot V_{0,j}^2}{2h}\right) U^n[k + (K+1)] + \left(\frac{\Delta t \cdot D}{h^2} + \frac{\Delta t \cdot V_{0,j}^2}{2h}\right) U^n[k - (K+1)] + \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} U^n[k+1] + \Delta t \cdot F[k]$$

On obtient donc les composantes du vecteur A et S:

Pour tout  $j \in \{1,2,\dots,K-1\}$  et  $k=k(0,j)$ , on a bien:

$$\begin{aligned}
 A[k, k] &= 1 - \frac{3 \cdot \Delta t \cdot D}{h^2} \\
 A[k, k + (K + 1)] &= \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} - \frac{\Delta t \cdot V_{0,j}^2}{2h} \\
 A[k, k - (K + 1)] &= \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} + \frac{\Delta t \cdot V_{0,j}^2}{2h} \\
 A[k, k + 1] &= \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} \\
 S[k] &= \Delta t \cdot F[k]
 \end{aligned}$$

II.1.4- Les composantes de A et S sur les points frontières x=L(points à droite de la plaque):

Dans ce cas , on obtient en remplaçant i par K et en notant k=k(K,j) avec  $j \in \{1, 2, \dots, K-1\}$ :

$$\begin{aligned}
 u_{K,j}^{n+1} &= u_{K,j}^n - \Delta t \cdot V_{K,j}^2 \frac{u_{K,j+1}^n - u_{K,j-1}^n}{2h} + \Delta t \cdot D \frac{u_{K,j+1}^n - 3u_{K,j}^n + u_{K-1,j}^n + u_{K,j-1}^n}{h^2} + \Delta t \cdot f_{K,j} \\
 &= \left(1 - \frac{3 \cdot \Delta t \cdot D}{h^2}\right) u_{K,j}^n + \left(\frac{\Delta t \cdot D}{h^2} - \frac{\Delta t \cdot V_{K,j}^2}{2h}\right) u_{K,j+1}^n + \left(\frac{\Delta t \cdot D}{h^2} + \frac{\Delta t \cdot V_{K,j}^2}{2h}\right) u_{K,j-1}^n + \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} u_{K-1,j}^n + \Delta t \cdot f_{K,j}
 \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$U^{n+1}[k] = \left(1 - \frac{3 \cdot \Delta t \cdot D}{h^2}\right) U^n[k] + \left(\frac{\Delta t \cdot D}{h^2} - \frac{\Delta t \cdot V_{K,j}^2}{2h}\right) U^n[k + (K + 1)] + \left(\frac{\Delta t \cdot D}{h^2} + \frac{\Delta t \cdot V_{K,j}^2}{2h}\right) U^n[k - (K + 1)] + \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} U^n[k - 1] + \Delta t \cdot F[k]$$

On obtient finalement les composantes de A et S:

$$\begin{aligned}
 A[k, k] &= 1 - \frac{3 \cdot \Delta t \cdot D}{h^2} \\
 A[k, k + (K + 1)] &= \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} - \frac{\Delta t \cdot V_{K,j}^2}{2h} \\
 A[k, k - (K + 1)] &= \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} + \frac{\Delta t \cdot V_{K,j}^2}{2h} \\
 A[k, k - 1] &= \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} \\
 S[k] &= \Delta t \cdot F[k]
 \end{aligned}$$

Finalement, on retrouve bien les composantes de la matrice A et du vecteur S en ayant recours aux relations précédentes.

A et S vérifient bien la relation:  $U^{n+1} = A \cdot U^n + S$ .

### **Question 2:**

On pose  $\lambda = \frac{4 \cdot D \cdot \Delta t}{h^2}$  et  $P_e = \frac{V_0 \cdot h}{D}$

On s'intéresse dans cette question à l'établissement de conditions suffisantes sur  $P_e$  et  $\lambda$  pour que le schéma (1) soit monotone c'est-à-dire que tous ses coefficients sont positifs.

Dans ce cas, les composantes de la matrice A et S sont données par:

pour tout  $(i,j) \in \{1,2,\dots,K-1\}^2$

$$\begin{aligned}
 A[k, k] &= 1 - \frac{4 \cdot \Delta t \cdot D}{h^2} \\
 A[k, k-1] &= \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} + \frac{\Delta t \cdot V_{i,j}^1}{2h} \\
 A[k, k+1] &= \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} - \frac{\Delta t \cdot V_{i,j}^1}{2h} \\
 A[k, k-(K+1)] &= \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} + \frac{\Delta t \cdot V_{i,j}^2}{2h} \\
 A[k, k+(K+1)] &= \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} - \frac{\Delta t \cdot V_{i,j}^2}{2h} \\
 S[k] &= \Delta t \cdot F[k]
 \end{aligned}$$

#### II.2.1- Condition suffisante sur la valeur de $\lambda$ :

On a que :

$$A[k, k] = 1 - \frac{4 \cdot \Delta t \cdot D}{h^2} = 1 - \lambda \geq 0$$

Une condition suffisante sur  $\lambda$  est donc :  $\lambda \leq 1$

#### II.2.2-Condition suffisante sur la valeur de $P_e$ :

Dans le but de conjecturer une condition suffisante sur  $P_e$ , on utilise l'inégalité:

$$A[k, k-1] = \frac{\Delta t \cdot D}{h^2} + \frac{\Delta t \cdot V_{i,j}^1}{2h} \geq 0$$

Comme h et  $\Delta t$  sont strictement positifs, l'inégalité devient:

$$\frac{D}{h} + \frac{V_{i,j}^1}{2} \geq 0$$

On peut encadrer le cosinus et sinus qui sont inclus dans l'expression de  $V_{i,j}^1$ .

On obtient donc :  $|V_{i,j}^1| \leq V_0$  ce qui veut bien dire que:  $-V_0 \leq V_{i,j}^1 \leq V_0$ .

Ainsi on obtient:

$$\frac{D}{h} + \frac{V_{i,j}^1}{2} \geq \frac{D}{h} - \frac{V_0}{2}$$

Le terme de droite est positif si et seulement si  $P_e \leq 2$ .

En posant cette condition comme conjecture , on a que :  $A[k,k-1] \geq 0$ .

De plus , en remarquant que  $|V_{i,j}^1| \leq V_0$  et  $|V_{i,j}^2| \leq V_0$  , on obtient aussi que:

$$A[k,k-(K+1)] \geq 0 , A[k,k+(K+1)] \geq 0 \text{ et } A[k,k+1] \geq 0.$$

On a donc bien vérifié que  $P_e \leq 2$  est une condition suffisante pour assurer la positivité des 4 derniers termes.

On obtient ainsi une condition suffisante sur la monotonie du système:

$$\lambda \leq 1 \text{ et } P_e \leq 2$$

### II.2.3-Condition sur $P_e$ en prenant compte des valeurs de $V_0$ et $D$ :

Dans ce problème, on sait que la valeur du coefficient de la diffusivité thermique  $D$  est égale à 0.2 et la valeur de  $V_0$  est égale à 1.

En remplaçant ces valeurs dans l'expression ci-dessus, on obtient:

$$P_e = \frac{V_0 h}{D} = \frac{h}{0.2} \leq 2 \text{ donc : } h \leq 0.4$$

On a bien que :  $h = \frac{L}{K}$  telque la valeur de  $L$  est égale à 1, on obtient donc :

$$h = \frac{L}{K} = \frac{1}{K} \leq 0.4$$

Donc :

$$K \geq 2.5$$

Comme  $K$  est un entier naturel, il faut que sa valeur soit plus grande que 3.

On sait que  $K+1$  désigne le nombre de points sur un axe, il est donc clair que lors des applications , nous aurons plus de 4 points.



Pour que le schéma soit monotone , il faut que la distance entre les points de la grille soit plus petite que 0,4 .

De plus , puisque cette condition n'est pas très restrictive , il faut fixer  $h$  et choisir  $\Delta t$  de sorte que  $\lambda$  soit inférieure ou égale à 1 afin d'assurer la monotonie du schéma.

### Question 3:

Dans cette question , il nous est demandé d'écrire un programme Python dans le but de calculer la solution discrète des schémas numériques.

Tous les fichiers Python seront en jointure avec ce fichier PDF qui comprend le compte-rendu.

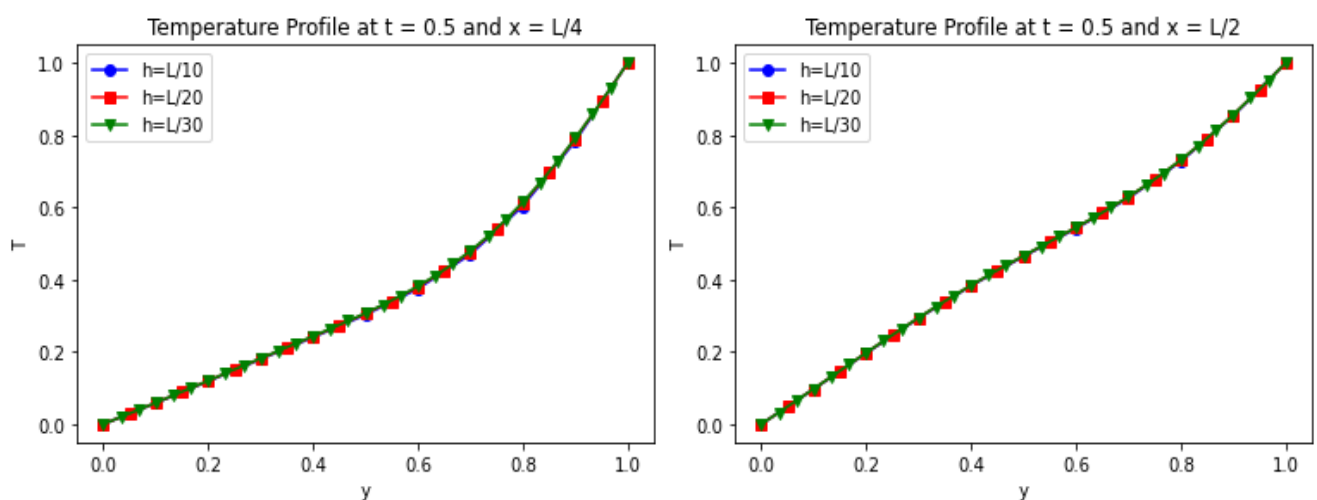
### Question 4:

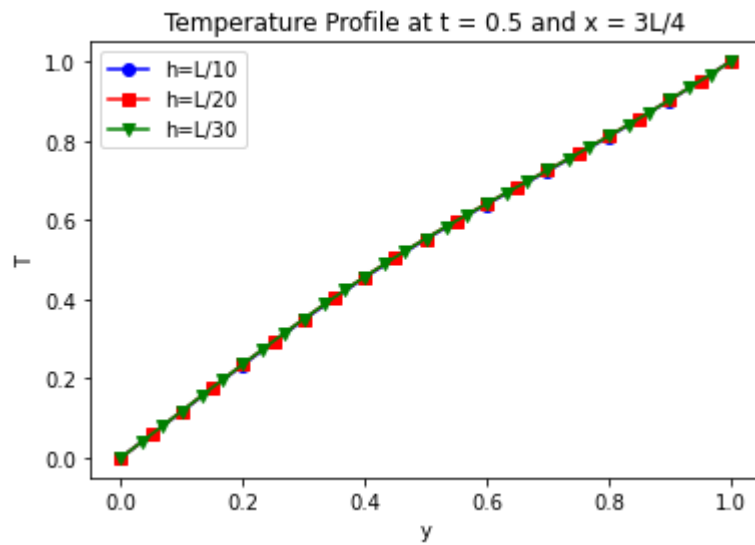
Dans cette partie , on va calculer la solution numérique aux différents instants  $t=0.5$  ,  $t=1$  et  $t=1.5$  et pour différentes valeurs du pas de maillage  $h$ :  $h=1/10$ ;  $h=1/20$  et  $h=1/30$ .

Pour chacun de ces trois instants, on trace les trois différentes figures correspondant aux profils de température  $U_{x_0}(y)=U(x_0,y)$  en  $x_0=0.25L$ ,  $x_0=0.5L$  et  $x_0=0.75L$ .

On trace d'abord les profils de température à l'instant  $t=0.5s$ :

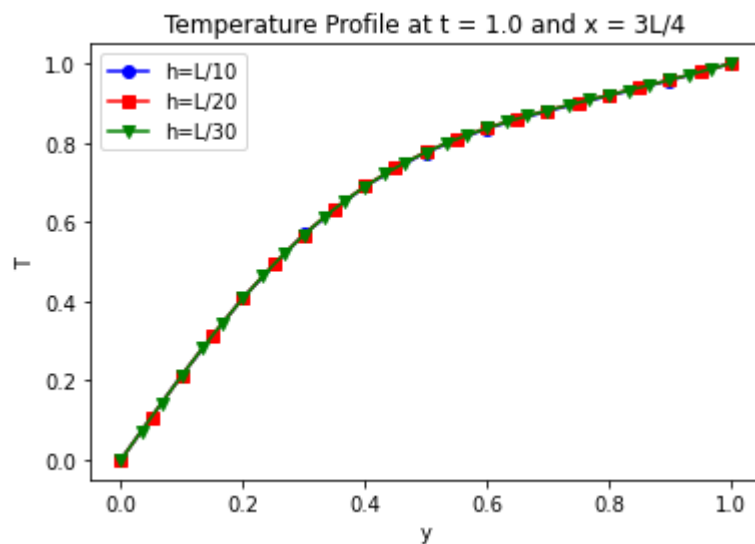
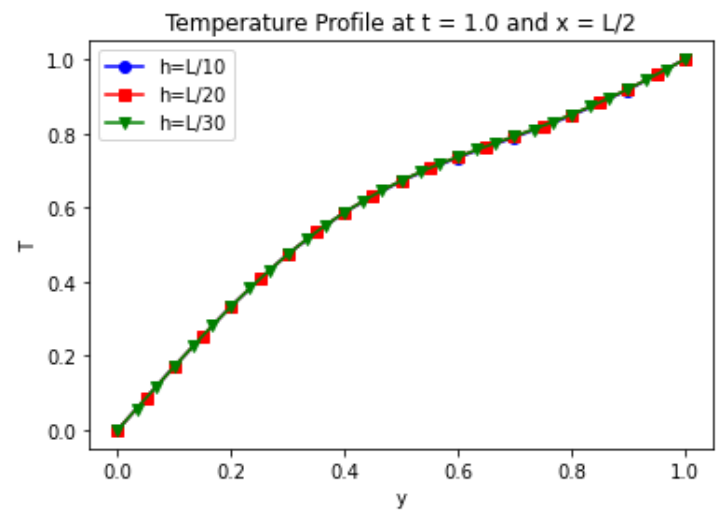
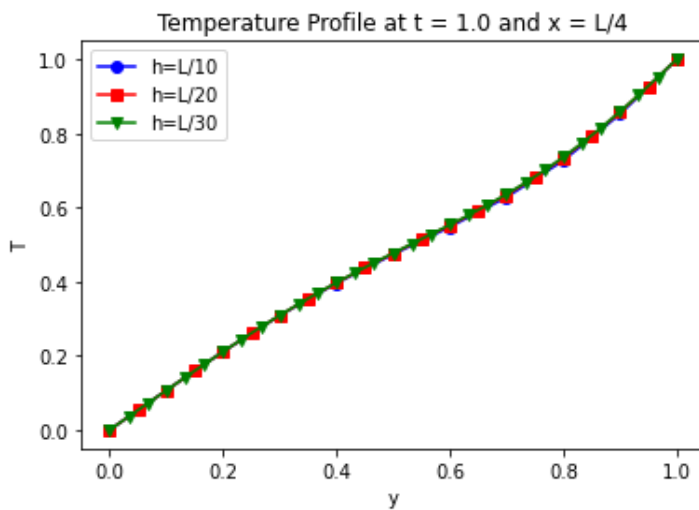
On obtient ces trois figures:





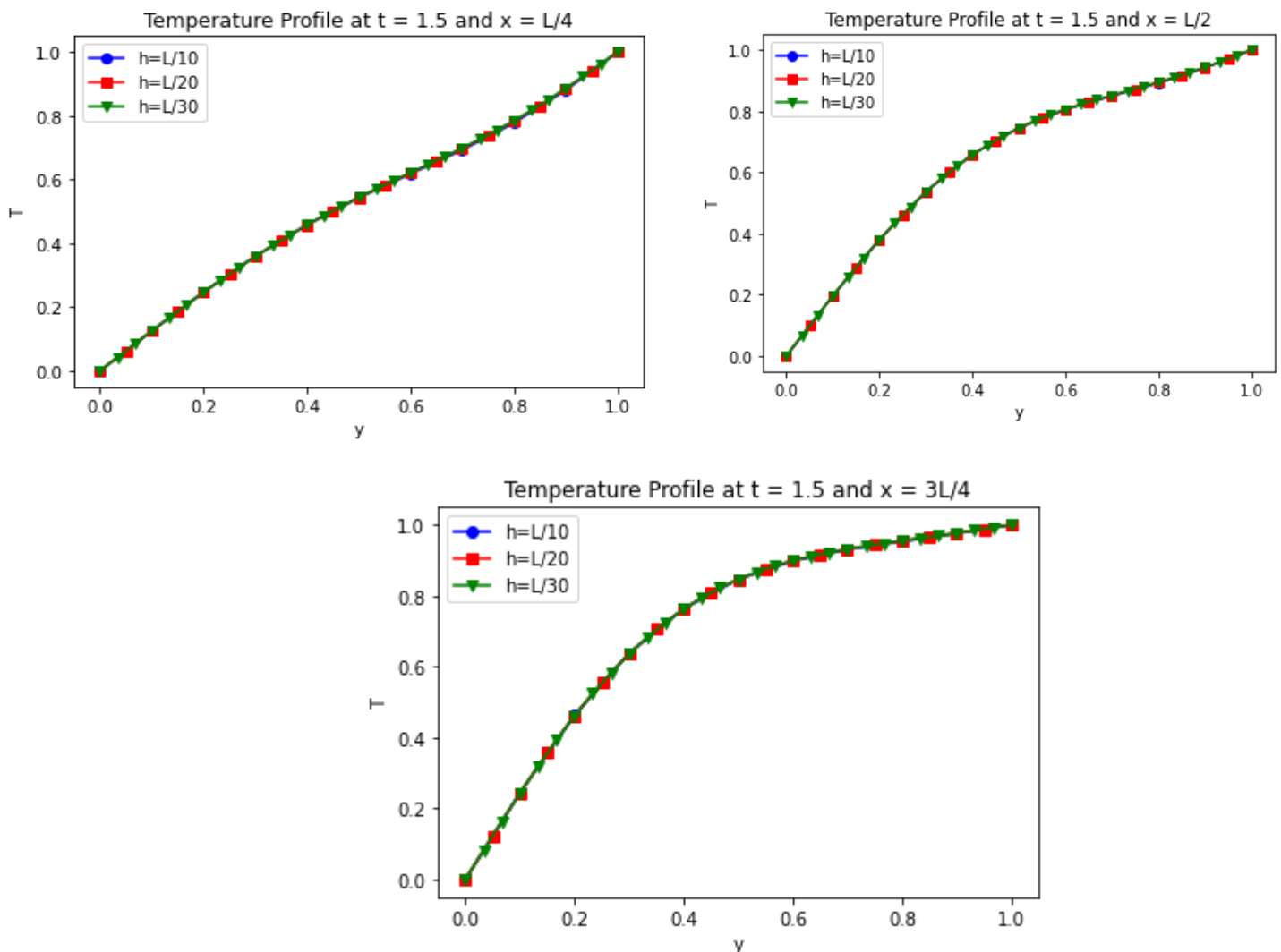
Ensuite, on trace les profils de températures à l'instant  $t=1s$ .

On obtient ces trois figure:



Finalement, on trace les profils de température à l'instant  $t=1.5s$ .

On obtient ces trois figures:



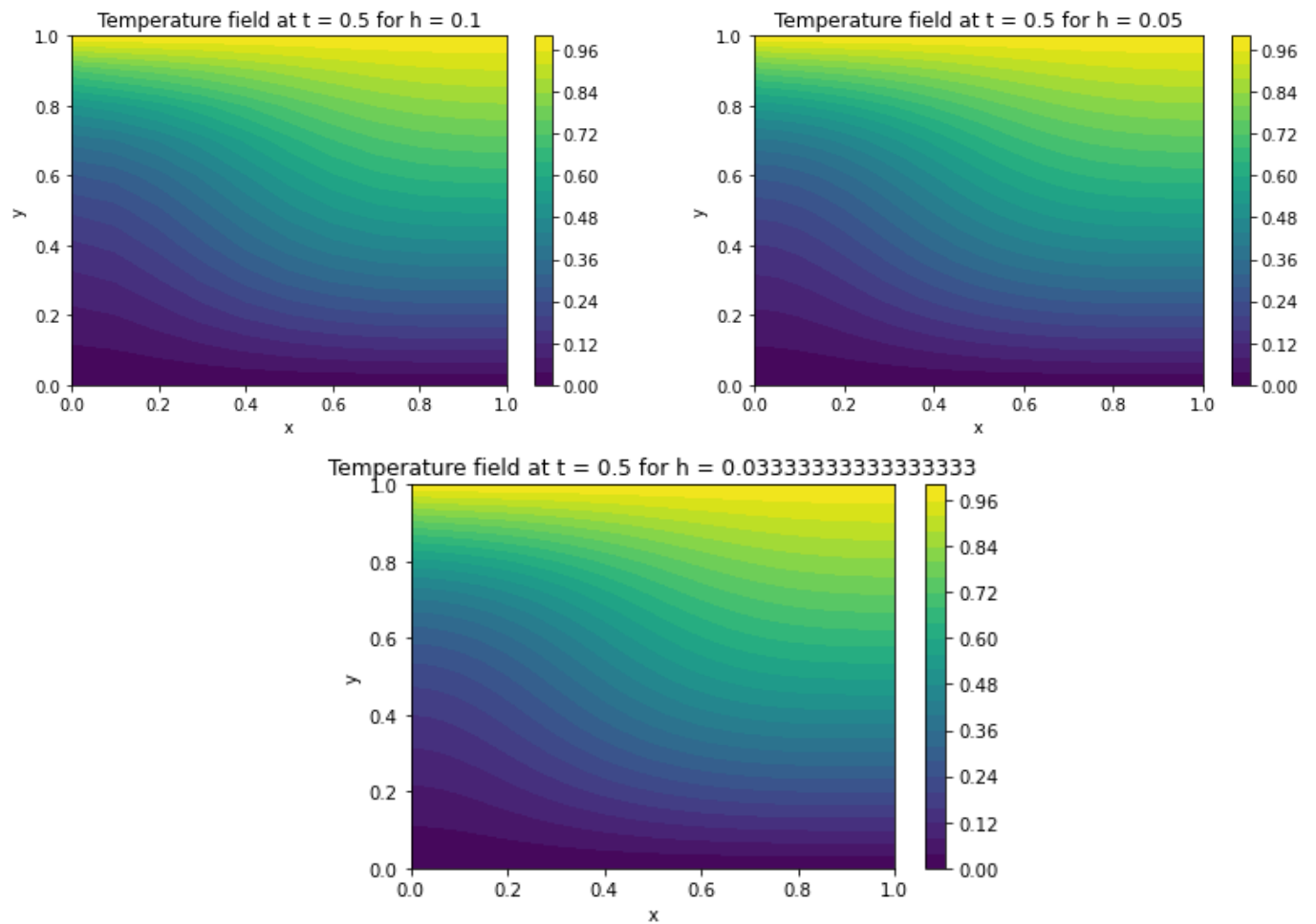
A partir de l'expression de  $f$ , on pourra déduire que la source de chaleur centrale crée une zone froide lorsque  $x$  et  $y$  sont proches de 0 et une zone de chaleur chaude si  $x$  et  $y$  sont proches de 1.

On pourra aussi déterminer le comportement du fluide à travers sa température qui augmente lorsque les abscisses  $x$  augmentent tout en s'approchant du domaine  $y=1$ .

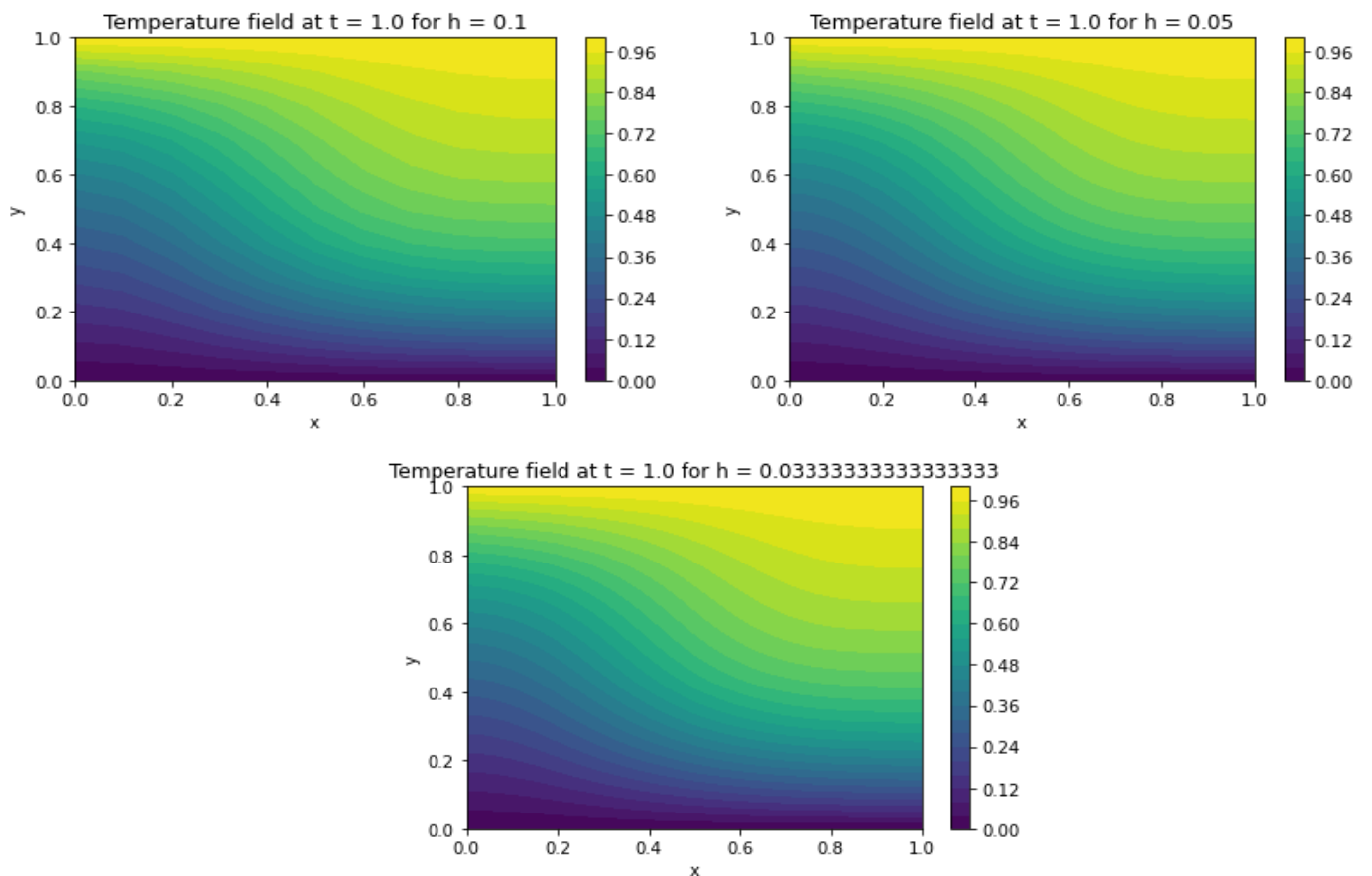
Cependant pour  $y=0$ , la température du fluide diminue en repartant vers  $x=0$ .

On pourra aussi tracer les champs de température aux différents instants.

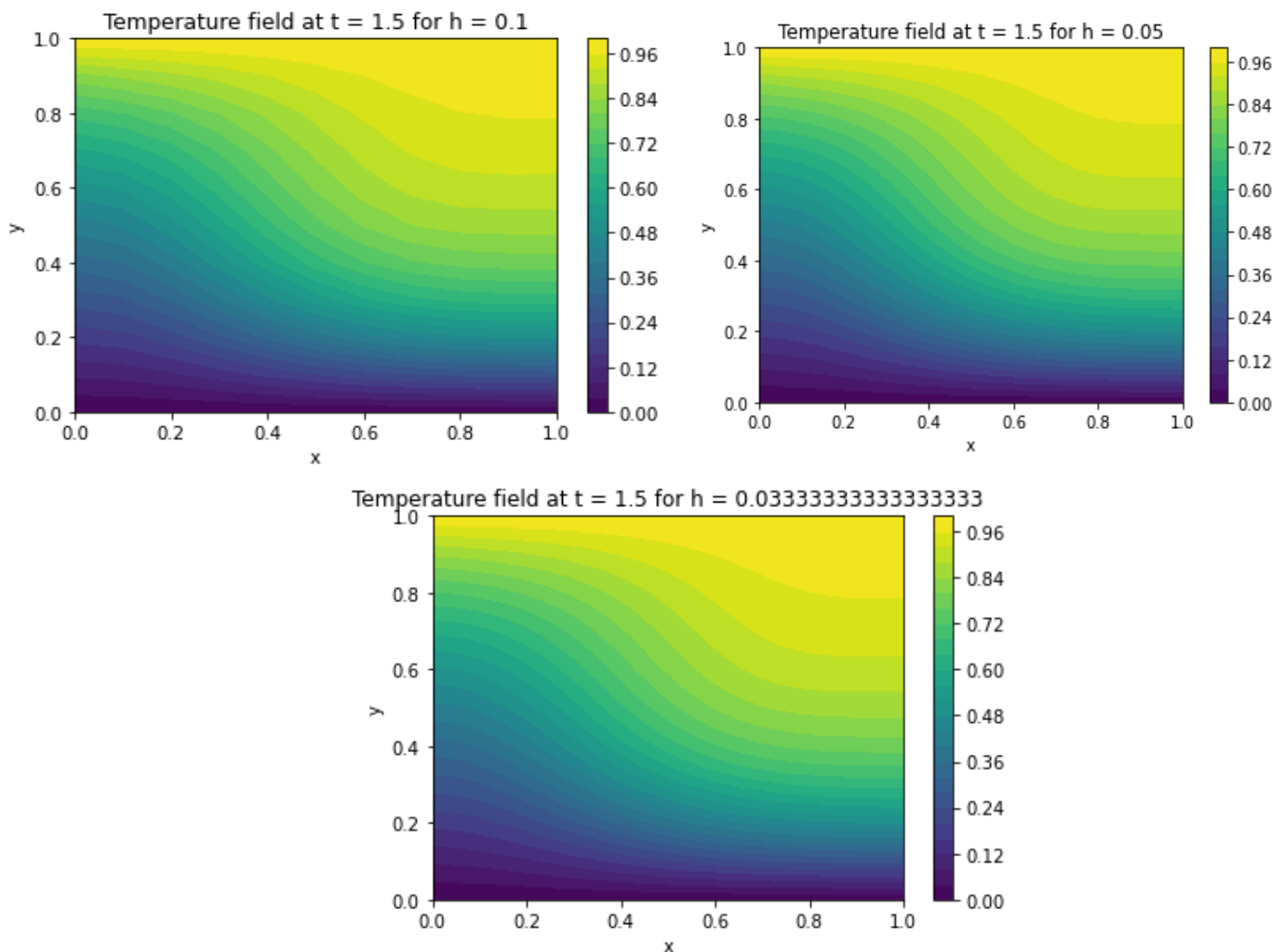
Les champs de température à l'instant  $t=0.5s$ :



Les champs de températures à l'instant  $t=1s$ :



Les champs de température à l'instant  $t=1.5s$ :



### Le Temps de calcul:

On sait que  $h=L/K$  ce qui explique que lorsqu'on divise le pas de maillage par 2, en même temps, on augmente deux fois le nombre de maillage  $K$ .

Le temps d'exécution est proportionnel au nombre d'itérations de la boucle.

Lorsqu'on divise  $h$  par 2, notre procédure d'évaluation de la solution au temps  $T$  voit son coût en temps être multiplié par 4 (car la procédure totale est en  $O(1/h^2)$ ).

Afin de valider la condition  $\lambda \leq 1$ , on pose:  $\Delta t = (0.9 \cdot h^2) / (4 \cdot D)$  qui diminue de manière quadratique lorsque  $h$  diminue, donc le nombre d'itérations pour atteindre  $T$  augmente de manière quadratique par rapport à  $h$ .

Il faut donc essayer d'éviter l'usage des boucles.

### III.Méthode de Monte-Carlo:

Dans cette deuxième partie, on va s'intéresser à la méthode de Monte-Carlo dans le but de résoudre le problème de chaleur que nous avons étudié dans la première partie. Son principe consiste à considérer un ensemble de K particules fictives (appelées particules numériques) animées d'un mouvement aléatoire et dont la température varie le long de leur trajectoire en fonction des valeurs de la source de chaleur modélisée par la fonction f.

On note  $(x_k^n, y_k^n)$  le vecteur position à l'instant  $t^n = n \cdot \Delta t$  de la particule k et  $\theta_k^n$  sa température.

D'après le cours,  $x_k^n$ ,  $y_k^n$  et  $\theta_k^n$  vérifient le schéma numérique suivant:

Étape prédicteur:

$$x_k^{n+1,*} = x_k^n + \Delta t \cdot V_1(x_k^n, y_k^n) + \sqrt{2 \cdot D \cdot \Delta t} \cdot \alpha_k^n$$

$$y_k^{n+1,*} = y_k^n + \Delta t \cdot V_2(x_k^n, y_k^n) + \sqrt{2 \cdot D \cdot \Delta t} \cdot \beta_k^n$$

$$\theta_k^{n+1,*} = \theta_k^n + \Delta t \cdot f(x_k^n, y_k^n)$$

où les  $\alpha_k^n$  et  $\beta_k^n$  sont des variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes deux à deux.

Étape correcteur (pour tenir compte des conditions aux limites):

$$x_k^{n+1} = \min\left(L, \max\left(x_k^{n+1,*}, 0\right)\right)$$

$$y_k^{n+1} = \min\left(L, \max\left(y_k^{n+1,*}, 0\right)\right)$$

et

$$\theta_k^{n+1} = \theta_k^{n+1,*} \quad \text{si : } 0 < x_k^{n+1,*} < 1$$

$$\theta_k^{n+1} = 0 \quad \text{si : } x_k^{n+1,*} \leq 0$$

$$\theta_k^{n+1} = 1 \quad \text{si : } x_k^{n+1,*} \geq 1$$

A l'instant initial, les coordonnées initiales  $x_k^0$  et  $y_k^0$  sont tirées selon une loi uniforme sur  $[0, L]$  et on pose:

$$\theta_k^0 = T_0(x_k^0, y_k^0) = 0$$

Pour calculer une approximation du champ température  $T(t, x, y)$  la méthode de Monte-Carlo consiste à diviser le domaine  $\Omega = ]0, L[x]0, L[$  en  $M^2$  cellules identiques de dimensions  $\epsilon \times \epsilon$  avec  $\epsilon = L/M$ . La température discrète  $T_{i,j}^n$ , dans

la cellule  $C_{i,j}$  de centre  $X_{i,j}=(x_{i,j},y_{i,j})=((i-1/2) \epsilon, (j-1/2) \epsilon)$  et à l'instant  $t^n=n.\Delta t$  est définie comme la température moyenne des particules  $p_k$  situées à l'instant  $t^n$  dans la cellule  $C_{i,j}$ , c'est-à-dire par:

$$T_{i,j}^n = \frac{1}{K_{ij}^n} \cdot \sum_{p_k \in C_{ij}} \theta_k^n$$

où  $K_{ij}^n$  désigne le nombre de particules situées à l'instant  $t^n$  dans la cellule  $C_{ij}$ .

### **Question 5:**

La méthode de Monte-Carlo converge vers la même solution trouvée à l'aide de la méthode des différences finies.

Cependant, la précision de cette méthode dépend du nombre de particules dans le domaine mais aussi de la taille de ces cellules.

En effet, en utilisant la loi des grands nombres, la convergence n'est obtenue pour  $N$  très grand que lorsque chacune des cellules possède suffisamment de particules.

Il faut donc considérer deux paramètres importants qui agissent sur la précision de la solution: d'une part, le nombre de particules totale  $N$  et d'autre part, la densité de particules par cellule est aussi importante.

Dans un premier cas, on fixe  $N$  un nombre de particules. On a  $\epsilon=L/M$  qui représente la taille de la cellule.

lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, on a donc la densité de particules par cellule tend vers 0 et donc la probabilité d'avoir une particule dans une cellule tend vers 0.

On en déduit que la température moyenne dans cette cellules tend vers 0.

On prend maintenant un  $\epsilon$  tq  $\epsilon$  tend vers l'infini, autrement dit, la taille d'une cellule est très grande, dans ce cas, on a bien que:  $K_{ij}^n \rightarrow N$  ainsi:

$$T_{ij}^n = \frac{1}{K_{ij}^n} \cdot \sum_{p_k \in C_{ij}} \theta_k^n \rightarrow \frac{1}{N} \cdot \sum_{p_k \in C_{ij}} \theta_k^n$$

En fixant une valeur très grande à  $N$ , si on choisit de répartir le domaine d'abord en un nombre de cellules  $c1$  de taille  $\epsilon$  puis en un nombre de cellules  $c2$  de même taille  $\epsilon$  mais tels que  $c1 > c2$ .

On déduira que les cellules du second domaine seront beaucoup plus peuplées que dans le second. D'où la moyenne des températures dans le deuxième cas approche mieux la température que dans le premier cas.

### Question 6:

Dans cette question, il nous est demandé d'écrire un programme Python dans le but de calculer le champ de température à l'aide de la méthode de Monte-Carlo.

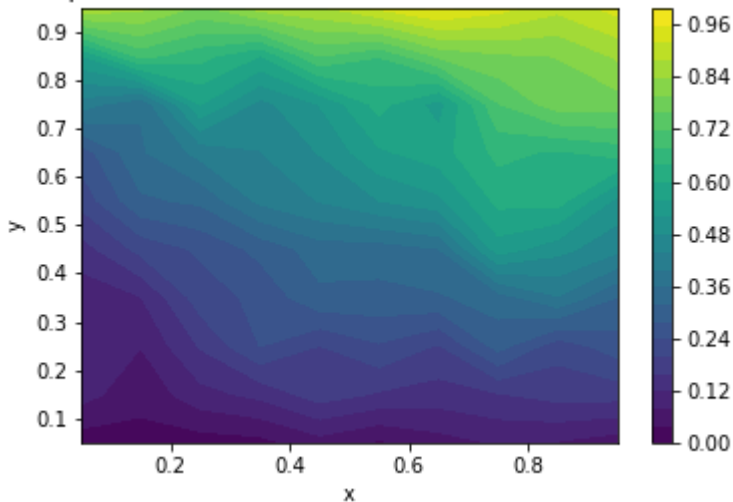
Tous les fichiers Python seront en jointure avec ce fichier PDF qui comprend le compte-rendu.

### Question 7:

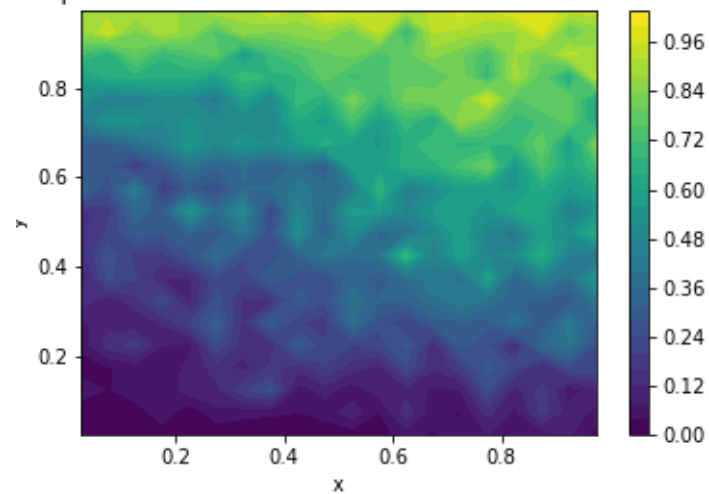
On trace ci-dessous les champs de température obtenus par la méthode de Monte-Carlo:

A  $t=0.5s$ :

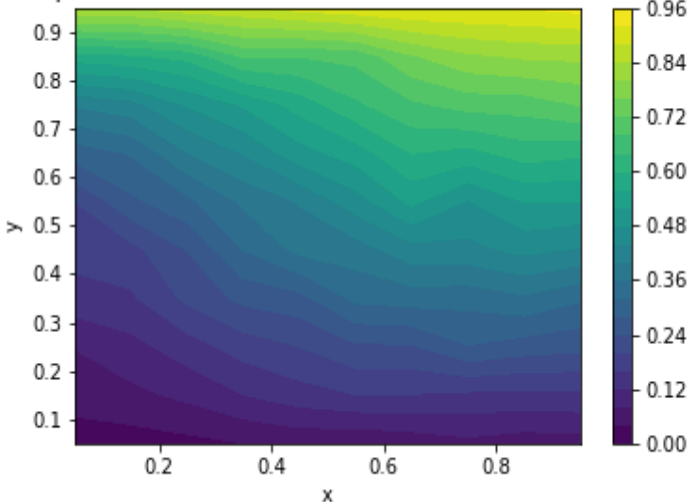
Temperature field at  $t = 0.5$  for  $h = 0.1$  and  $K = 10000$



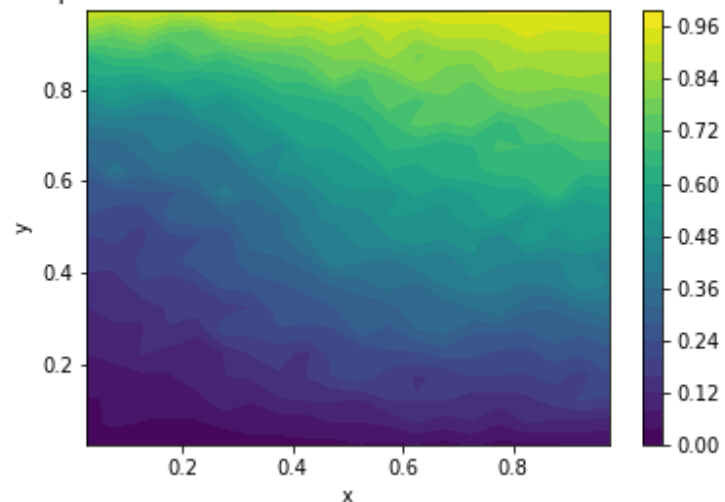
Temperature field at  $t = 0.5$  for  $h = 0.05$  and  $K = 10000$



Temperature field at  $t = 0.5$  for  $h = 0.1$  and  $K = 100000$



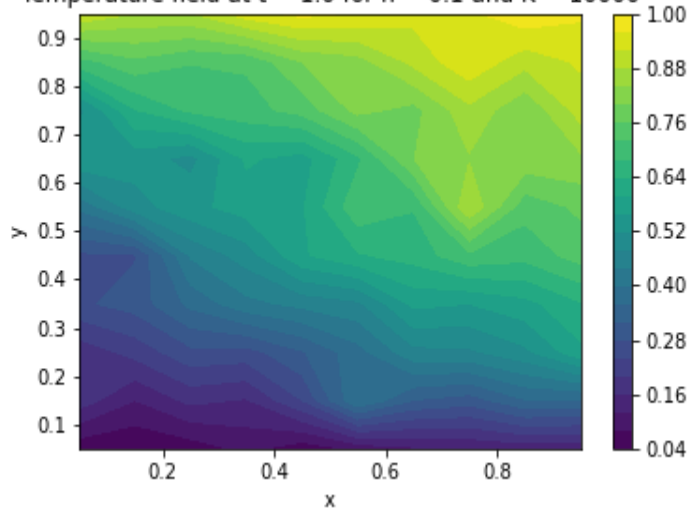
Temperature field at  $t = 0.5$  for  $h = 0.05$  and  $K = 100000$



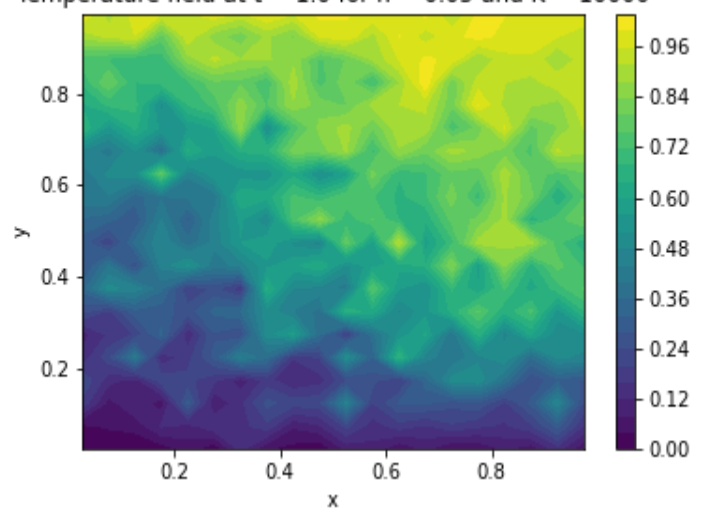


A t=1s:

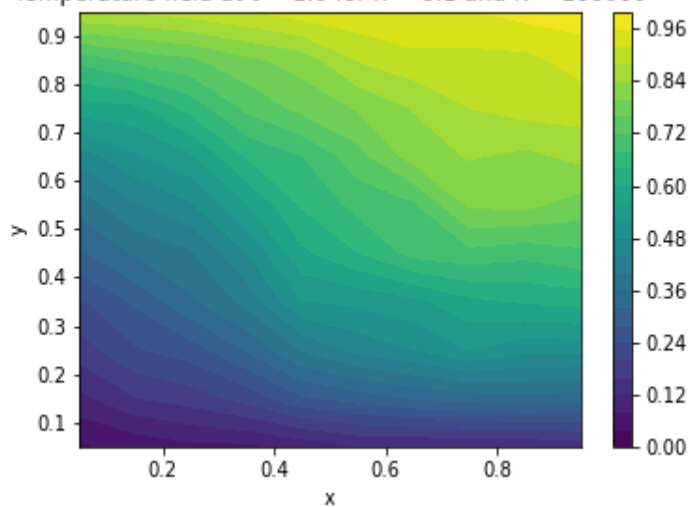
Temperature field at t = 1.0 for h = 0.1 and K = 10000



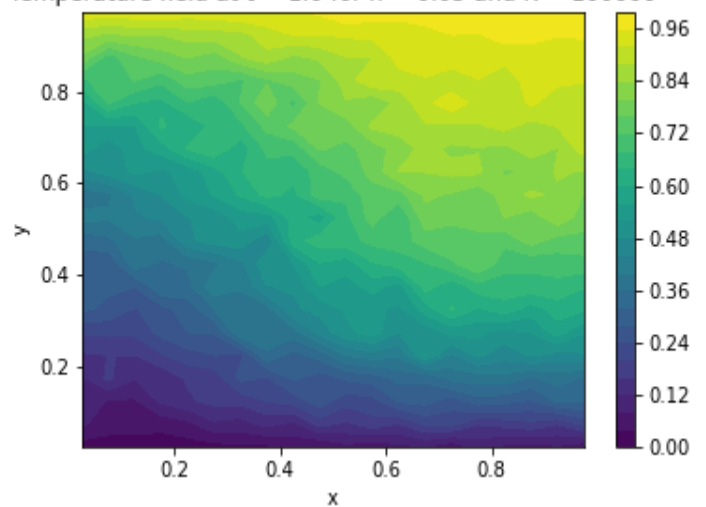
Temperature field at t = 1.0 for h = 0.05 and K = 10000



Temperature field at t = 1.0 for h = 0.1 and K = 100000

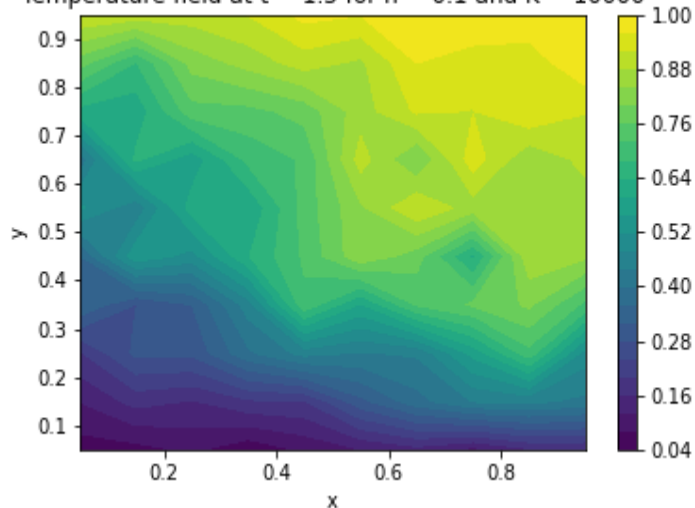


Temperature field at t = 1.0 for h = 0.05 and K = 100000

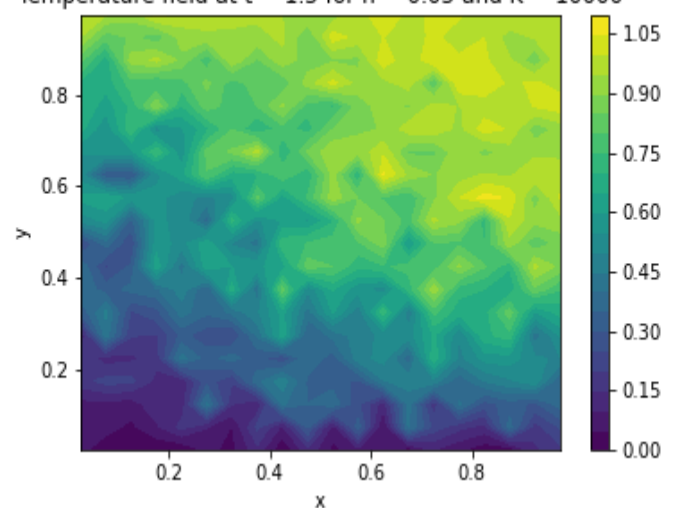


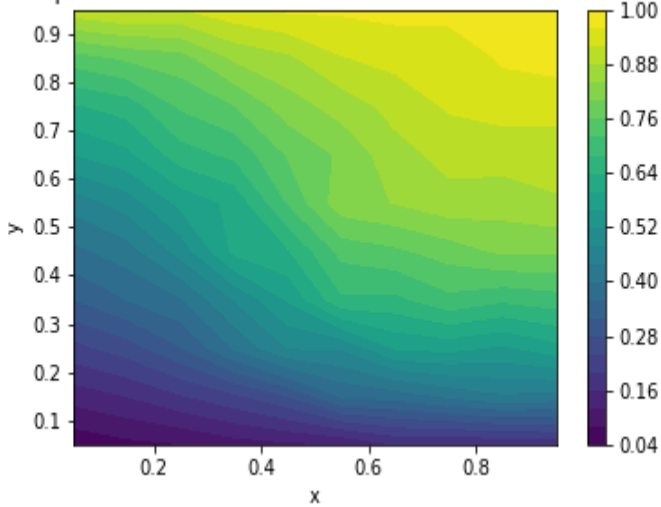
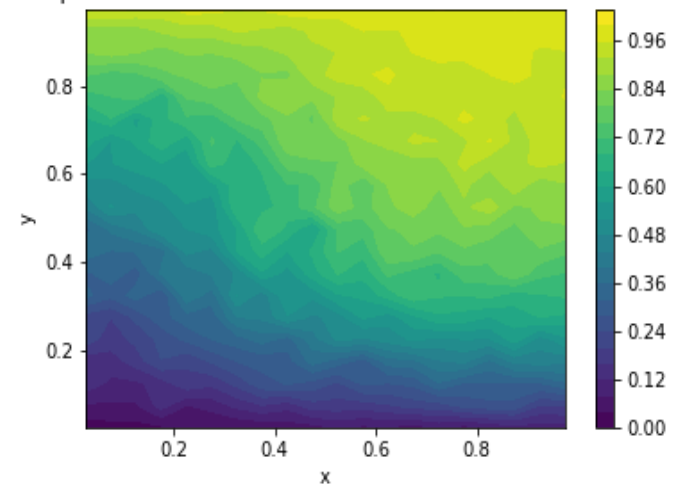
A t=1.5s:

Temperature field at t = 1.5 for h = 0.1 and K = 10000



Temperature field at t = 1.5 for h = 0.05 and K = 10000

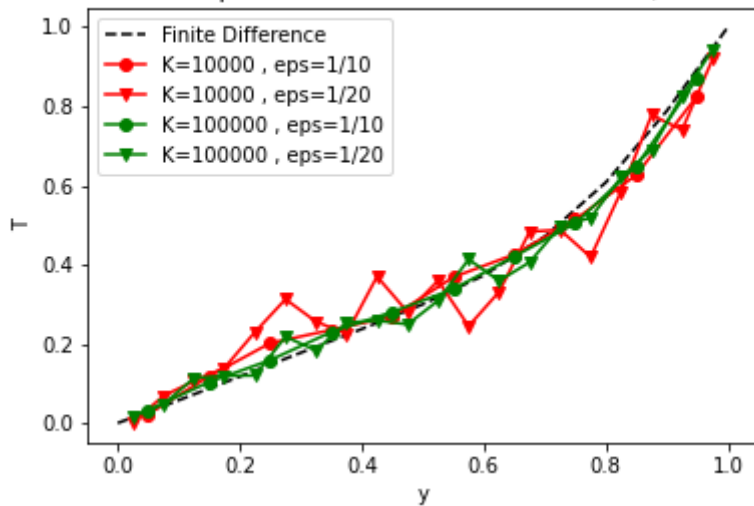
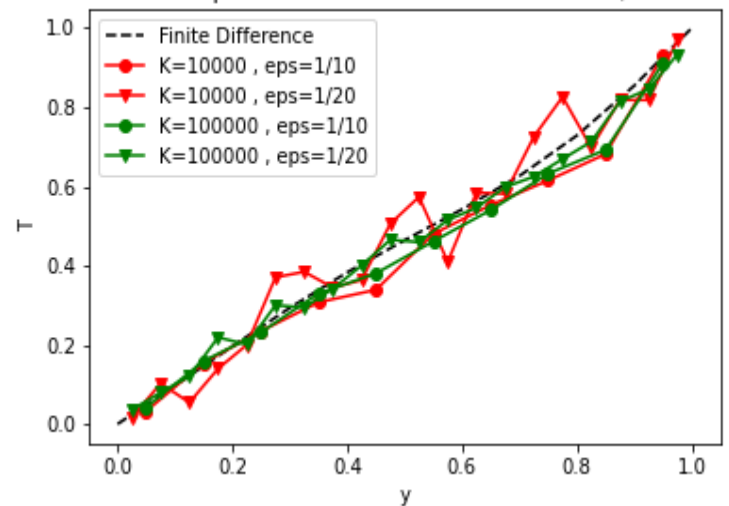
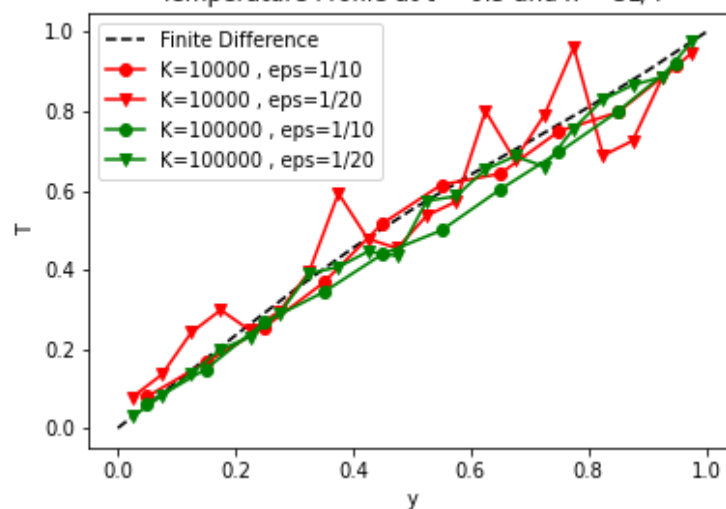


Temperature field at  $t = 1.5$  for  $h = 0.1$  and  $K = 100000$ Temperature field at  $t = 1.5$  for  $h = 0.05$  and  $K = 100000$ 

On trace ensuite les profils de température obtenus avec la méthode de Monte-Carlo.

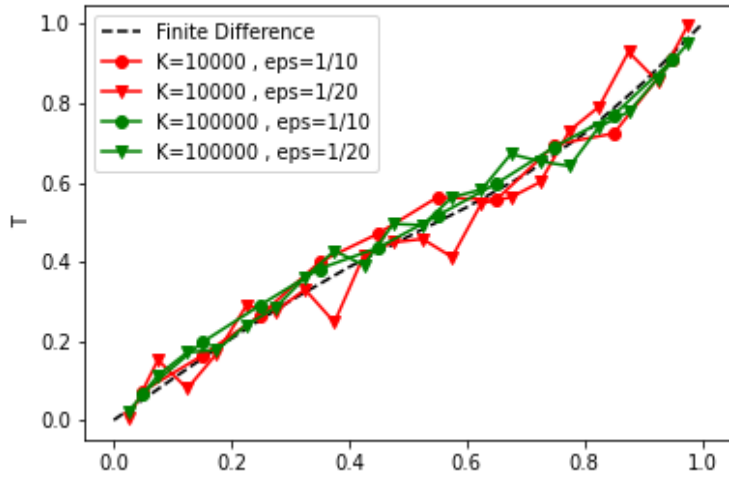
On obtient ces figures ci-dessous:

A  $t=0.5s$ :

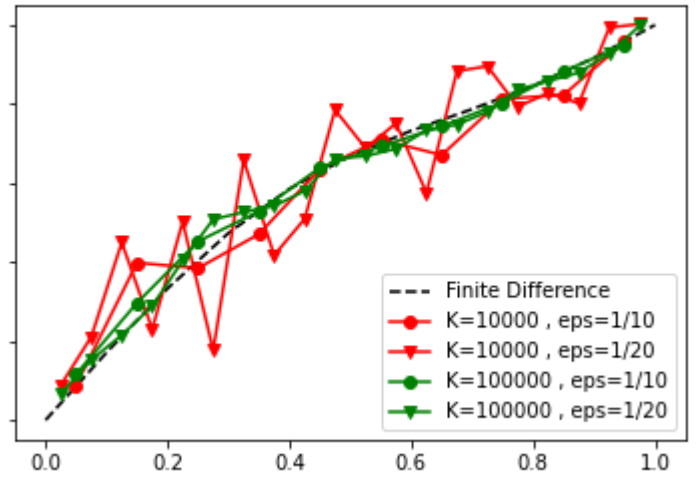
Temperature Profile at  $t = 0.5$  and  $x = L/4$ Temperature Profile at  $t = 0.5$  and  $x = L/2$ Temperature Profile at  $t = 0.5$  and  $x = 3L/4$ 

A  $t=1s$ :

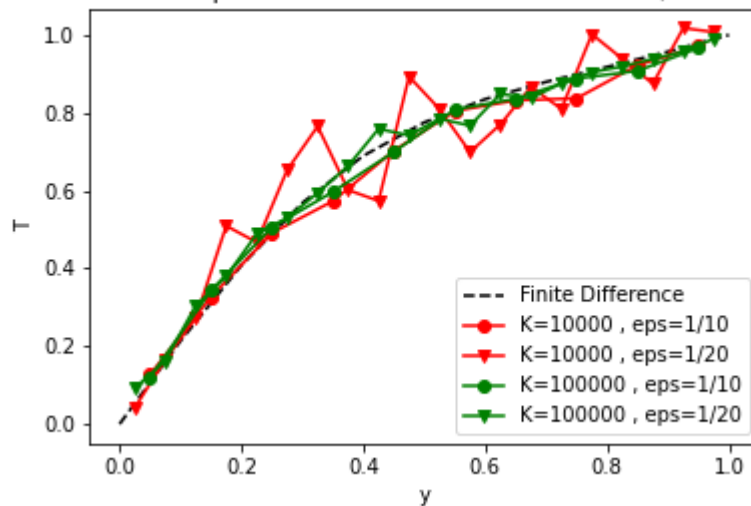
Temperature Profile at  $t = 1.0$  and  $x = L/4$



Temperature Profile at  $t = 1.0$  and  $x = L/2$

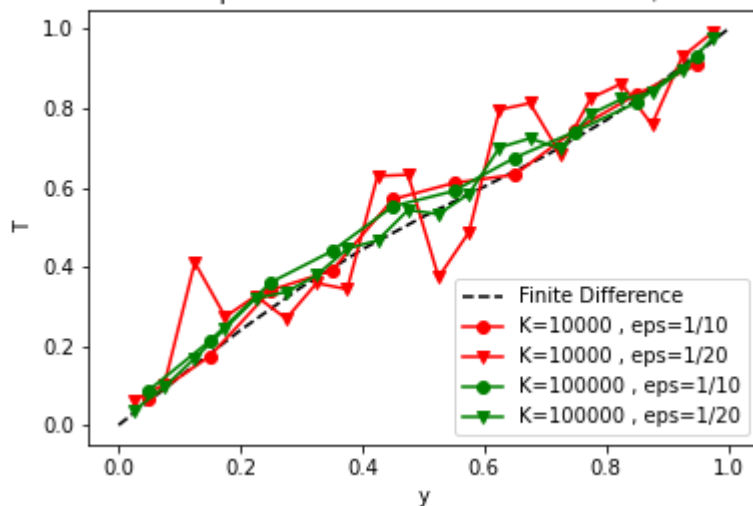


Temperature Profile at  $t = 1.0$  and  $x = 3L/4$

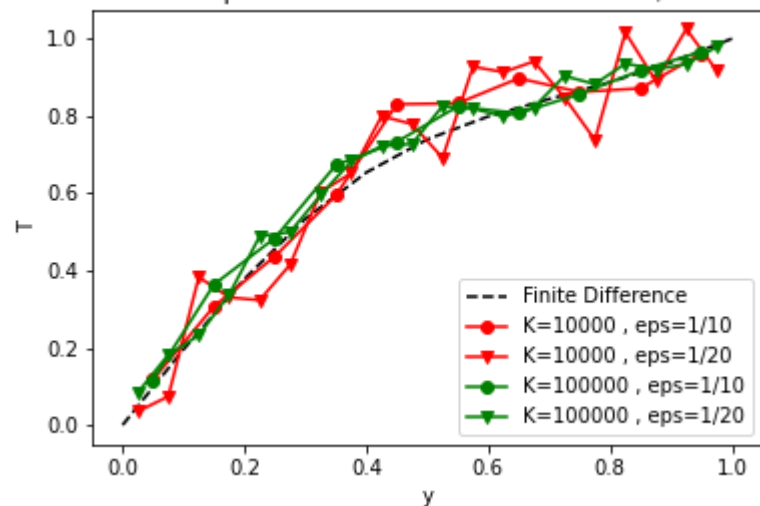


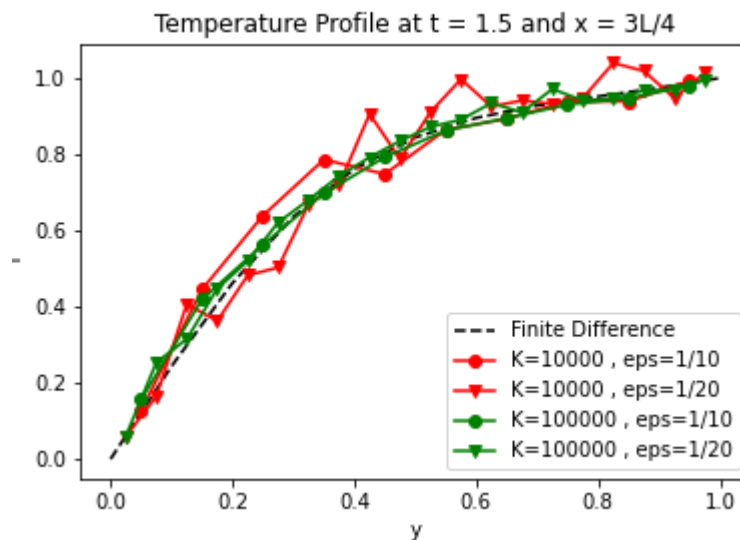
A  $t=1.5s$ :

Temperature Profile at  $t = 1.5$  and  $x = L/4$



Temperature Profile at  $t = 1.5$  and  $x = L/2$





### Analyse des résultats:

On pourra déduire à partir de ces figures que le nombre de particules ainsi que la taille des cellules agissent sur le champ de température.

La précision du schéma dépend du nombre de particules par cellule.

Le résultat est moins performant lorsque le nombre de particules  $K$  et la taille des cellules sont petites.

En effet, en fixant un nombre de particules  $K=10000$ , on notera que la densité dans le cas où  $h=0.05$  est plus faible que dans le cas où  $h=0.1$ .

En fixant un  $h=0.5$ , on notera aussi que la densité dans le cas où  $K=100000$  est plus importante que dans le cas où  $K=10000$ .

A partir des profils de température, on pourra noter que la solution la plus performante obtenue à l'aide de la méthode de Monte-Carlo est toujours celle dans le cas où  $\epsilon=1/20$  et  $K=100000$ .

Par contre, les autres solutions oscillent beaucoup par rapport à la solution théorique.

On pourra voir que les solutions obtenues à l'aide de la méthode de Monte-Carlo oscillent beaucoup donc sont moins efficaces que les solutions obtenues avec la méthode des différences finies.

Certes, dans notre cas bi-dimensionnel, la méthode de différences finies reste la plus performante pour un coût égale en temps. Cependant, en fréquentant un

problème de dimension supérieur ou égale à 3, la méthode des différences finies atteint ses limites et le temps de calcul de la solution est multiplié par un coefficient.

Concernant les algorithmes de calcul de la méthode Monte-Carlo, ces derniers ne sont pas affectés si le nombre de particules ne change pas.

En guise de conclusion, on préférera la méthode des différences finies en faible dimension et celle de Monte-Carlo en forte dimension.