

Compte-rendu du TP n°1:

Etude et comparaison de schémas numériques pour la résolution de
l'équation de transport linéaire

Travail élaboré par:

RAHAL Skander et TAIEB Talel

Année Scolaire: 2021-2022

I. Présentation du problème:

Ce TP a pour objectif de résoudre l'équation de transport linéaire monodimensionnelle en ayant recours à l'étude de trois schémas numériques que nous allons présenter plus tard:

$$\frac{du}{dt} + a \frac{du}{dx} = 0, x \in]0, 1[$$

où a est une constante strictement positive représentant la vitesse de convection.

Cette équation est complétée par la condition aux limites de périodicité:

$$\forall t \geq 0, u(t, -1) = u(t, 1)$$

et par la condition initiale:

$$\forall x \in [-1, 1], u(0, x) = u_0(x)$$

où u_0 est une fonction qui sera définie dans la suite telle que $u_0(1) = u_0(-1)$.

On note Δx le pas de discrétisation spatiale et Δt le pas de discrétisation temporelle.

On pose : $\Delta x = 1/I$ où, par définition, $J = 2I + 1$ désigne le nombre de points de discrétisation spatiale sur l'intervalle $[-1, 1]$, indicés par convention de $i = 0$ à $i = J - 1 = 2I$.

On note u_i^n la valeur de la solution discrète au nœud i (i.e $x_i = i\Delta x$) à l'instant $t^n = n\Delta t$.

On considère maintenant les trois schémas aux différences finies suivants:

$$\forall j \in [1, J - 1], u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

$$\forall j \in [1, J - 2], u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\alpha}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\alpha^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

$$\forall j \in [2, J - 2], u_j^{n+1} = u_j^n - \alpha(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{\alpha(1 - \alpha)}{4}(u_{j+1}^n - u_j^n - u_{j-1}^n + u_{j-2}^n)$$

où $\alpha = a \Delta t / \Delta x$ appelé le nombre de Courant-Friedrichs-Lewy ou encore CFL.

Pour les nœuds 0, 1 et $J - 1$, on observe les mêmes schémas mais on tient compte de la condition aux limites de périodicité en posant:

$$u_{-1}^n = u_{J-2}^n, \quad u_{-2}^n = u_{J-3}^n \quad \text{et} \quad u_J^n = u_1^n$$

On vérifie facilement par récurrence que si $u_0(1)=u_0(-1)$, on a bien que pour tout $n>0$, $u_0^n=u_{j-1}^n$

II. Etude théorique des propriétés dispersives et dissipatives des schémas:

On sait que la solution exacte de l'équation de transport a pour expression:

$$u(t,x)=u_0(x-at).$$

Si on considère comme condition initiale la fonction $u_0(x)=A_0 \exp(ikx)$ où A_0 est un complexe et k un réel quelconque de la forme $k=s\pi$ avec s un entier pour que u_0 soit 2-périodique.

La solution exacte a donc pour expression:

$$u(t,x) = A(t) \exp(ikx), \text{ avec } A(t) = A_0 \exp(-iakt)$$

Cela signifie qu'au cours du transport, l'amplitude de l'onde $A(t)$ reste constante en module, seule sa phase évolue. En particulier, entre deux instants voisins, on a:

$$A(t^{n+1}) = \exp(-iak\Delta t) A(t^n)$$

Considérons maintenant un schéma explicite à un pas de la forme:

$$u_j^{n+1} = \sum_{p=-P}^{p=P} a_p u_{j+p}^n$$

Si on suppose que pour tout j on a $u_j^n = A_n \exp[ik(j \Delta x)]$ où A_n est une constante complexe quelconque, on obtient:

$$u_j^{n+1} = A_{n+1} \exp(ikj\Delta x) \quad \text{avec} \quad A_{n+1} = F(k\Delta x) A_n$$

où F est la fonction de transfert du schéma défini par:

$$F(k\Delta x) = \sum_{p=-P}^{p=P} a_p \exp(ikp\Delta x)$$

Concernant la solution discrète, on déduit donc qu'entre deux instants voisins, l'amplitude d'une onde monochromatique de nombre d'onde k est multipliée par le coefficient complexe $F(K \Delta x)$.

On appelle aussi:

. Erreur d'amplitude, le nombre :

$$E_A(K \Delta x) = 1 - |F(K \Delta x)|$$

. Erreur de phase, le nombre :

$$E_\phi(K \Delta x) = \text{Arg}[F(K \Delta x)] + \alpha K \Delta t = \text{Arg}[F(K \Delta x)] + \alpha K \Delta x$$

2.1- Calcul des fonctions de transfert:

On procède maintenant au calcul de la fonction de transfert relatif à chacun des schémas numériques. Pour alléger les notations, on prendra $\varepsilon = K \Delta x$

a-Pour le schéma de Courant:

On sait que :

$$u_j^{n+1} = A_{n+1} e^{ij\xi}, \quad u_j^n = A_n e^{ij\xi}$$

$$\text{et } u_{j-1}^n = A_n e^{i(j-1)\xi}$$

$$= A_n e^{ij\xi - i\xi}$$

$$= A_n e^{ij\xi} \cdot e^{-i\xi}$$

$$= u_j^n \cdot e^{-i\xi}$$

On remplace ces trois expressions dans le schéma de courant et on obtient:

$$A_{n+1} e^{ij\xi} = A_n e^{ij\xi} - \alpha A_n e^{ij\xi} + \alpha A_n e^{ij\xi} \cdot e^{-i\xi}$$

$$\implies A_{n+1} = A_n (1 - \alpha + \alpha \cdot e^{-i\xi})$$

$$\begin{aligned} \implies F_1(\xi) &= \frac{A_{n+1}}{A_n} = 1 - \alpha + \alpha \cdot (\cos(\xi) - i \cdot \sin(\xi)) \\ &= 1 - \alpha \cdot (1 - \cos(\xi)) - i \cdot \alpha \cdot \sin(\xi) \end{aligned}$$

b-Pour le schéma de Lax Wendroff:

On sait que :

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= A_{n+1} \cdot e^{ij\xi}, \quad u_j^n = A_n e^{ij\xi}, \quad u_{j+1}^n = A_n e^{i(j+1)\xi} & \text{et } u_{j-1}^n &= u_j^n \cdot e^{-i\xi} \\ &= A_n e^{ij\xi + i\xi} & &= A_n \cdot e^{ij\xi} \cdot e^{-i\xi} \\ &= A_n e^{ij\xi} \cdot e^{i\xi} \\ &= u_j^n \cdot e^{i\xi} \end{aligned}$$

On remplace ces expressions dans le schéma de Lax Wendroff et on trouve:

$$A_{n+1} \cdot e^{ij\xi} = A_n \cdot e^{ij\xi} - \frac{\alpha}{2} \cdot A_n \cdot e^{ij\xi} \cdot e^{i\xi} + \frac{\alpha}{2} \cdot A_n \cdot e^{ij\xi} \cdot e^{-i\xi} + \frac{\alpha^2}{2} A_n \cdot e^{ij\xi} \cdot e^{i\xi} - \alpha^2 \cdot A_n \cdot e^{ij\xi} + \frac{\alpha^2}{2} \cdot A_n \cdot e^{ij\xi} \cdot e^{-i\xi}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{A_{n+1}}{A_n} &= F_2(\xi) = 1 - \frac{\alpha}{2} (e^{i\xi} - e^{-i\xi}) + \frac{\alpha^2}{2} (e^{i\xi} + e^{-i\xi}) - \alpha^2 \\ &= 1 - \frac{\alpha}{2} \cdot 2i \cdot \sin(\xi) + \frac{\alpha^2}{2} \cdot 2 \cdot \cos(\xi) - \alpha^2 \\ &= 1 - \alpha^2 \cdot (1 - \cos(\xi)) - i \cdot \alpha \cdot \sin(\xi) \end{aligned}$$

c-Pour le schéma décentré du 2ème ordre:

On a :

$$A_{n+1} \cdot e^{ij\xi} = A_n \cdot e^{ij\xi} - \alpha [A_n \cdot e^{ij\xi} - A_n \cdot e^{i(j-1)\xi}] - \frac{\alpha(1-\alpha)}{4} \cdot [A_n \cdot e^{i(j+1)\xi} - A_n \cdot e^{ij\xi} - A_n e^{i(j-1)\xi} + A_n e^{i(j-2)\xi}]$$

Donc :

$$\begin{aligned} F_2(\xi) &= \frac{A_{n+1}}{A_n} = 1 - \alpha(1 - e^{-i\xi}) - \frac{\alpha(1-\alpha)}{4} \cdot (e^{i\xi} - 1 - e^{-i\xi} + e^{-2i\xi}) \\ &= 1 - \alpha[1 - \cos(\xi) + i \sin(\xi)] - \frac{\alpha(1-\alpha)}{4} [\cos(\xi) + i \sin(\xi) - 1 - \cos(\xi) + i \sin(\xi) + \cos(2\xi) - i \sin(2\xi)] \\ &= 1 - \alpha[1 - \cos(\xi)] - i \cdot \alpha \cdot \sin(\xi) - \frac{\alpha(1-\alpha)}{4} [2i \sin(\xi) - 2 \cdot \sin^2(\xi) + 1 - 2i \sin(\xi) \cos(\xi) - 1] \\ &= 1 - \alpha[1 - \cos(\xi)] + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \cdot \sin^2(\xi) - i \cdot \left[\alpha \sin(\xi) + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \sin(\xi) - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \sin(\xi) \cos(\xi) \right] \\ &= 1 - \alpha[1 - \cos(\xi)] + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \cdot \sin^2(\xi) - i \cdot \left[\alpha \sin(\xi) + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \sin(\xi)(1 - \cos(\xi)) \right] \end{aligned}$$

2.3- Calcul des erreurs d'amplitude:

On procède maintenant au calcul des erreurs d'amplitude pour chacun des schémas numériques:

a-Schéma de Courant:

$$\text{On a : } F_1(\xi) = 1 - \alpha(1 - \cos(\xi)) - i \cdot \alpha \sin(\xi)$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } |F_1(\xi)|^2 &= [1 - \alpha(1 - \cos(\xi))]^2 + (\alpha \cdot \sin(\xi))^2 \\ &= 1 - 2 \cdot \alpha(1 - \cos(\xi)) + \alpha^2(1 - \cos(\xi))^2 + \alpha^2 \sin^2(\xi) \\ &= 1 - 2 \cdot \alpha + 2 \cdot \alpha \cdot \cos(\xi) + \alpha^2(1 - 2 \cdot \cos(\xi) + \cos^2(\xi)) + \alpha^2 \cdot \sin^2(\xi) \\ &= 1 - 2 \cdot \alpha \cdot (1 - \cos(\xi)) + 2 \cdot \alpha^2(1 - \cos(\xi)) \\ &= 1 + 2 \cdot \alpha \cdot (1 - \cos(\xi)) \cdot (\alpha - 1) \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } |F_1(\xi)| = \sqrt{1 - 2 \cdot \alpha \cdot (1 - \cos(\xi)) \cdot (1 - \alpha)}$$

$$\text{D'où : } E_{A1}(\xi) = 1 - |F_1(\xi)| = 1 - \sqrt{1 - 2 \cdot \alpha \cdot (1 - \cos(\xi)) \cdot (1 - \alpha)}$$

$$\begin{aligned}
 |F_1(\xi)| \leq 1 &\iff |F_1(\xi)|^2 \leq 1 \\
 &\iff 1 + 2 \cdot \alpha \cdot (1 - \cos(\xi)) \cdot (\alpha - 1) \leq 1 \\
 &\iff 2 \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot (1 - \cos(\xi)) \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\text{or } \forall K \in \left[0, \frac{2\pi}{\Delta x}\right], \text{ on a } \cos(\xi) \in [-1, 1] \text{ donc : } 1 - \cos(\xi) \geq 0$$

$$\text{donc : } \alpha \cdot (1 - \alpha) \geq 0 \text{ tq : } \alpha = a \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \geq 0$$

$$\text{donc : } 1 - \alpha \geq 0 \text{ tq : } \alpha \geq 0$$

$$D'où : \alpha \in [0, 1]$$

Le schéma n°1 est stable pour tout α appartenant à $[0, 1]$.

b- Schéma de Lax Wendroff:

$$\text{On a : } F_2(\xi) = 1 - \alpha^2 \cdot (1 - \cos(\xi)) - i \cdot \alpha \cdot \sin(\xi)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc : } |F_2(\xi)|^2 &= [1 - \alpha^2(1 - \cos(\xi))]^2 + [\alpha \cdot \sin(\xi)]^2 \\
 &= 1 - 2 \cdot \alpha^2 \cdot (1 - \cos(\xi)) + \alpha^4 \cdot (1 - \cos(\xi))^2 + \alpha^2 \cdot \sin^2(\xi) \\
 &= 1 - 2 \cdot \alpha^2 \cdot (1 - \cos(\xi)) + \alpha^4 \cdot (1 - \cos(\xi))^2 + \alpha^2 \cdot (1 - \cos^2(\xi)) \\
 &= 1 - 2 \cdot \alpha^2 + 2 \cdot \alpha^2 \cdot \cos(\xi) + \alpha^2 - \alpha^2 \cdot \cos^2(\xi) + \alpha^2 \cdot (1 - \cos(\xi))^2 \\
 &= 1 - \alpha^2 [1 - 2 \cdot \cos(\xi) + \cos^2(\xi)] + \alpha^4 \cdot (1 - \cos(\xi))^2 \\
 &= 1 - \alpha^2 \cdot (1 - \cos(\xi))^2 + \alpha^4 \cdot (1 - \cos(\xi))^2 \\
 &= 1 - \alpha^2 \cdot (1 - \cos(\xi))^2 \cdot (1 - \alpha^2)
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } E_{A2}(\xi) = 1 - |F_2(\xi)| = 1 - \sqrt{1 - \alpha^2 \cdot (1 - \cos(\xi))^2 \cdot (1 - \alpha^2)}$$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } |F_2(\xi)| \leq 1 &\iff |F_2(\xi)|^2 \leq 1 \\
 &\iff \alpha^2 \cdot (1 - \alpha^2) \cdot (1 - \cos(\xi))^2 \geq 0 \\
 &\iff 1 - \alpha^2 \geq 0 \text{ et : } \alpha \geq 0 \\
 &\iff \alpha \in [-1, 1] \text{ et : } \alpha \geq 0 \\
 &\iff \alpha \in [0, 1]
 \end{aligned}$$

Le schéma n°2 est aussi stable pour tout α appartenant à $[0, 1]$.

c-Schéma décentré du 2ème ordre:

$$\text{On a } F_3(\xi) = 1 - \alpha \cdot (1 - \cos(\xi)) + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \cdot \sin^2(\xi) - i \cdot \left[\alpha \sin(\xi) + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \sin(\xi) \cdot (1 - \cos(\xi)) \right]$$

$$\text{On pose : } \xi = 2 \cdot \theta$$

$$\begin{aligned}
 F_3(\xi) &= F_3(2 \cdot \theta) = 1 - \alpha(1 - \cos(2\theta)) + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \cdot \sin^2(2\theta) - i \left[\alpha \cdot \sin(2\theta) + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \cdot \sin(2\theta) \cdot (1 - \cos(2\theta)) \right] \\
 &= 1 - \alpha(1 - \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \cdot 4 \cdot \sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\theta) - i [\alpha \cdot 2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) + \alpha(1-\alpha) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot (1 - \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))] \\
 &= 1 - 2 \cdot \alpha \sin^2(\theta) + 2 \cdot \alpha(1-\alpha) \cdot \sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\theta) - i [\alpha \cdot 2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) + 2 \cdot \alpha \cdot (1-\alpha) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin^2(\theta)]
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 |F_3(\xi)|^2 &= [1 - 2 \cdot \alpha \sin^2(\theta) + 2 \cdot \alpha(1-\alpha) \cdot \sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\theta)]^2 + [2 \cdot \alpha \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) + 2 \cdot \alpha \cdot (1-\alpha) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin^2(\theta)]^2 \\
 &= [1 - 2 \cdot \alpha \cdot \sin^2(\theta) [1 - (1-\alpha) \cdot \cos^2(\theta)]]^2 + 4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\theta) [1 + (1-\alpha) \sin^2(\theta)]^2
 \end{aligned}$$

$$E_{A3}(\xi) = 1 - |F_3(\xi)| = 1 - \sqrt{[1 - 2 \cdot \alpha \cdot \sin^2(\theta) [1 - (1-\alpha) \cdot \cos^2(\theta)]]^2 + 4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\theta) [1 + (1-\alpha) \sin^2(\theta)]^2} \text{ et : } \xi = 2\theta$$

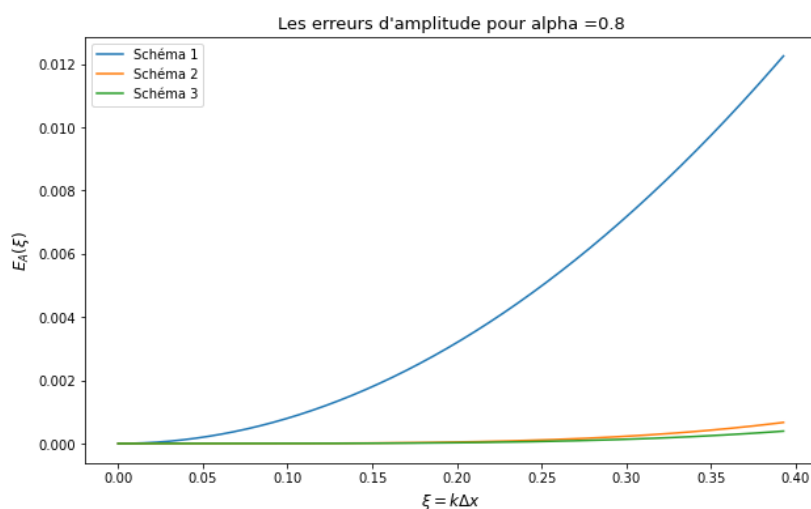
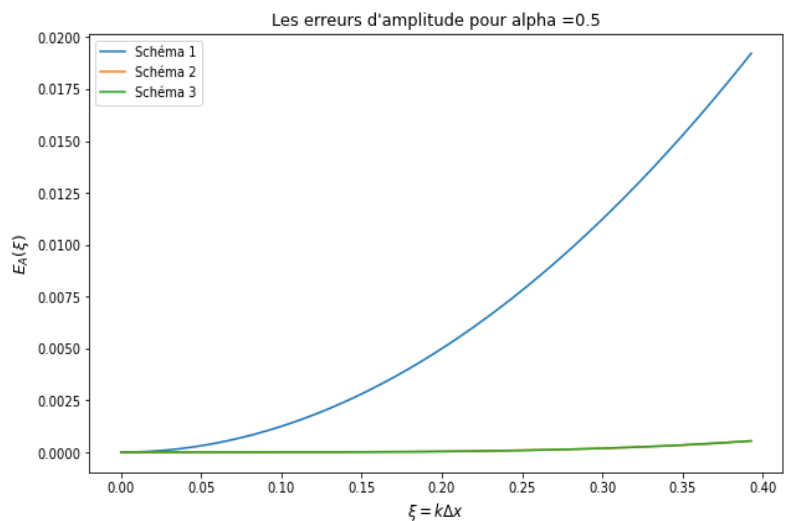
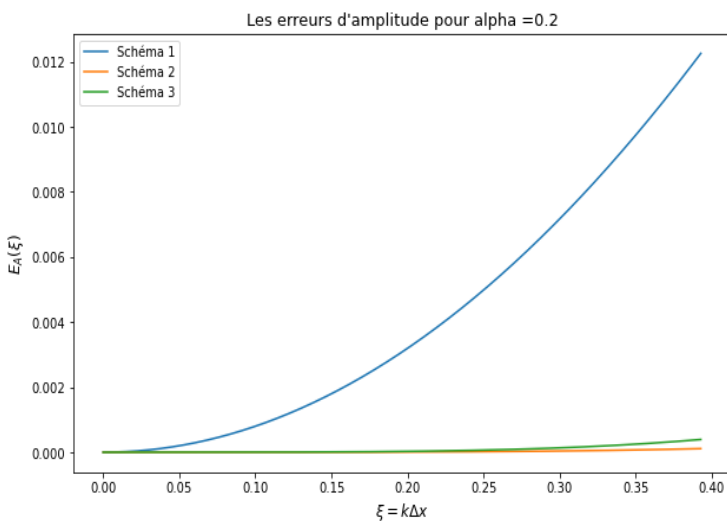
. On dit qu'un schéma dissipatif si le module de sa fonction de transfert est strictement inférieur à 1.

En effet , dans ce cas,l'amplitude de la fonction à transporter diminue à chaque pas de temps en raison des phénomènes de dissipation.L'amplitude est amortie pour des hautes fréquences mais doit rester constante.En effet, on a bien que:

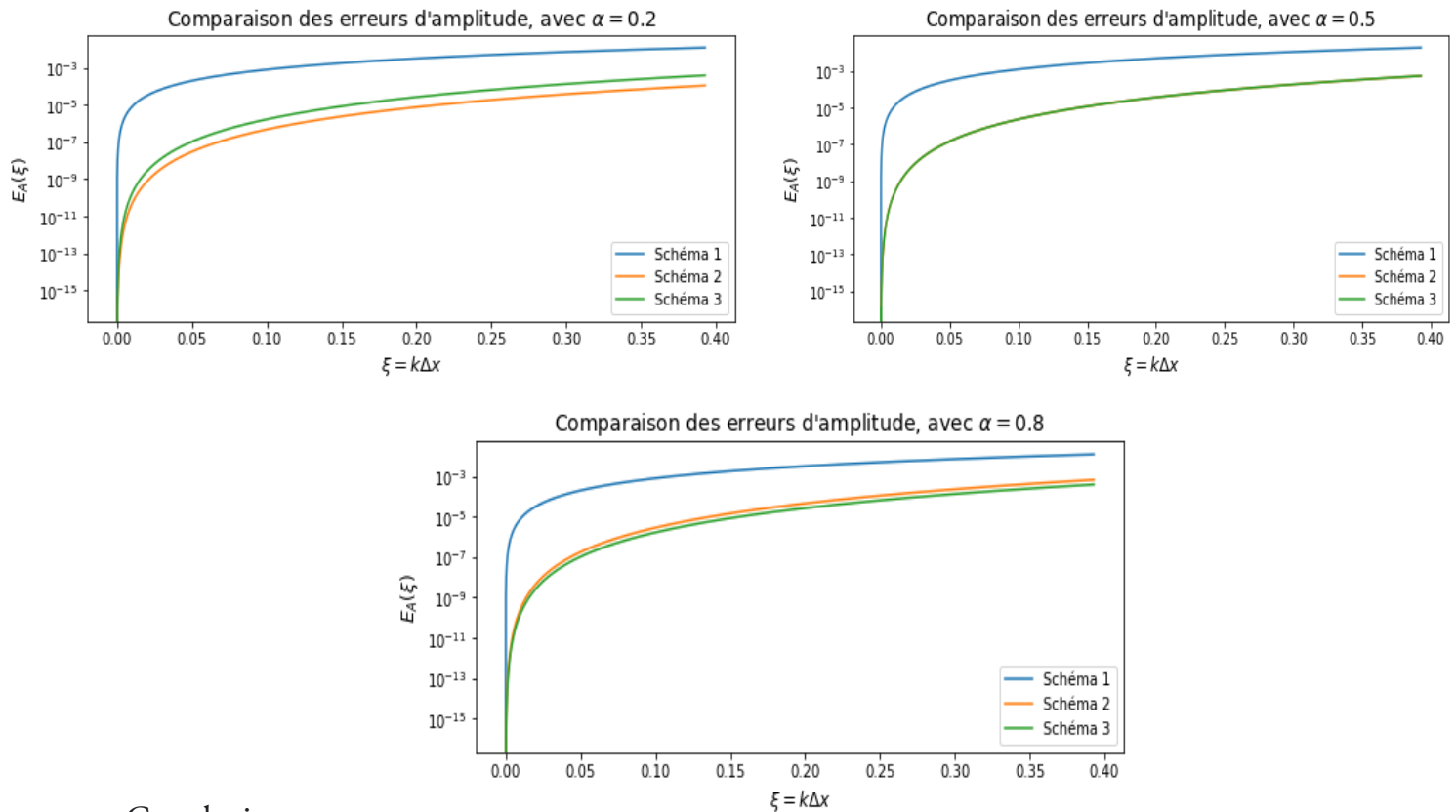
$$|A_n| = |F(\varepsilon)| |A_{n-1}| = |F(\varepsilon)|^2 |A_{n-2}| = \dots = |F(\varepsilon)|^n |A_0|$$

D'où, si $|F(\varepsilon)| < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n| = 0$

. On trace ,à présent sur Python, les graphes qui correspondent aux fonctions E_{A1}, E_{A2} et E_{A3} en usant des différentes valeurs de alpha:0.2 ,0.5 et 0.8 . On obtient:



Afin de pouvoir visualiser que l'erreur la plus importante est prise en compte lorsque ε est petite, on va donc tracer les mêmes graphes précédents en échelle semi logarithmique afin de pouvoir observer le comportement de l'erreur d'amplitude pour de petites valeurs de ε . On obtient donc:



Conclusion:

A partir des trois premiers graphes, on pourra noter que le schéma de courant est dissipatif. En effet, l'erreur d'amplitude du schéma 1 croît très rapidement pour toutes les valeurs de α comparant aux deux autres schémas.

Pour toutes valeurs de α , on remarque que les écarts entre les courbes représentatives des erreurs de phase du schéma 2 et 3 sont très faibles.

Quand ε tend vers 0, on note que l'erreur d'amplitude du schéma 1 est plus importante que l'erreur dans les schémas 2 et 3, ce qui montre que les schémas 2 et 3 sont plus stables.

Les schémas 2 et 3 sont très stables pour $\varepsilon < 0.225$ car les erreurs d'amplitude sont quasi-nulles dans ce cas.

2.4- Calcul des erreurs de phase: On procède maintenant au calcul des erreurs de phase pour chacun des schémas numériques.

On utilise dans ce cas le fait que $x \rightarrow \arccos(x)$ soit une bijection de $[-1,1]$ dans $[0,\pi]$.

Si $z=a+ib$ et si on cherche $\arg(z)$ dans $[-\pi,\pi]$, deux cas sont possibles:

. Si $b>0$, alors $\arg(z)=\arccos(a/|z|)$.

. Si $b<0$, alors $\arg(z)=-\arccos(a/|z|)$.

a-Schéma de courant:

$$\text{On a } F_1(\xi) = 1 - \alpha \cdot (1 - \cos(\xi)) - i \cdot \alpha \cdot \sin(\xi)$$

$$\text{On sait que : } \xi = K \cdot \Delta x \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right] \text{ donc } \sin(\xi) > 0 \text{ et comme } \alpha > 0 \text{ donc : } \operatorname{Im}(F_1(\xi)) = -\alpha \cdot \sin(\xi) < 0$$

$$\text{Donc : } \arg(F_1(\xi)) = -\arccos\left(\frac{1 - \alpha \cdot (1 - \cos(\xi))}{\sqrt{1 - 2 \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot (1 - \cos(\xi))}}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } E_{\phi 1}(\xi) &= \arg(F_1(\xi)) + \alpha \cdot \xi \\ &= \alpha \cdot \xi - \arccos\left(\frac{1 - \alpha \cdot (1 - \cos(\xi))}{\sqrt{1 - 2 \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot (1 - \cos(\xi))}}\right) \end{aligned}$$

b-Schéma de Lax-Wendroff:

$$\text{On a } F_2(\xi) = 1 - \alpha^2 \cdot (1 - \cos(\xi)) - i \cdot \alpha \cdot \sin(\xi)$$

$$\text{On a : } \xi = K \cdot \Delta x \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right] \text{ donc : } \sin(\xi) > 0 \text{ et } -\alpha \cdot \sin(\xi) < 0 \text{ car } \alpha > 0$$

$$\text{Donc } \arg(F_2(\xi)) = -\arccos\left(\frac{1 - \alpha^2 \cdot (1 - \cos(\xi))}{\sqrt{1 - \alpha^2 \cdot (1 - \alpha^2) \cdot (1 - \cos(\xi))^2}}\right)$$

$$\begin{aligned} D' \text{ où : } E_{\phi 2}(\xi) &= \arg(F_2(\xi)) + \alpha \cdot \xi \\ &= \alpha \cdot \xi - \arccos\left(\frac{1 - \alpha^2 \cdot (1 - \cos(\xi))}{\sqrt{1 - \alpha^2 \cdot (1 - \alpha^2) \cdot (1 - \cos(\xi))^2}}\right) \end{aligned}$$

c-Schéma décentré du 2ème ordre:

$$\text{On a } F_3(\xi) = 1 - \alpha \cdot (1 - \cos(\xi)) + \frac{\alpha \cdot (1 - \alpha)}{2} \cdot \sin^2(\xi) - i \cdot \left[\alpha \sin(\xi) + \frac{\alpha \cdot (1 - \alpha)}{2} \sin(\xi) \cdot (1 - \cos(\xi)) \right]$$

$$\text{Or on sait que : } \xi = K \Delta x \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right] \text{ donc } \sin(\xi) \geq 0 \text{ et comme } \alpha \in [0,1] \text{ donc } \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot \sin(\xi) > 0$$

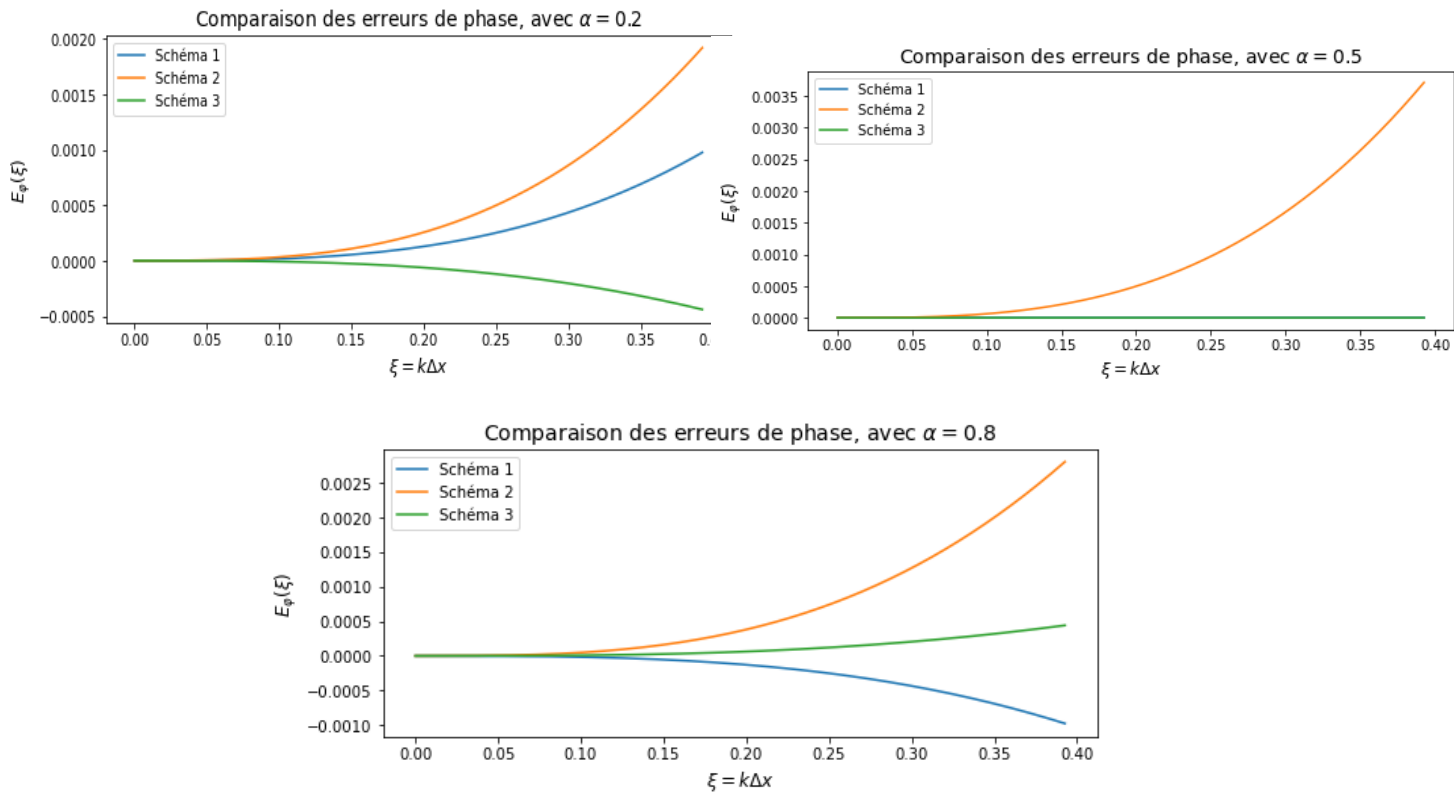
$$\text{De plus } 1 - \cos(\xi) \geq 0 \text{ donc on a bien que } \operatorname{Im}(F_3(\xi)) < 0$$

$$\text{Donc : } \arg(F_3(\xi)) = -\arccos\left(\frac{1 - \alpha \cdot (1 - \cos(\xi)) + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \cdot \sin^2(\xi)}{|F_3(\xi)|}\right)$$

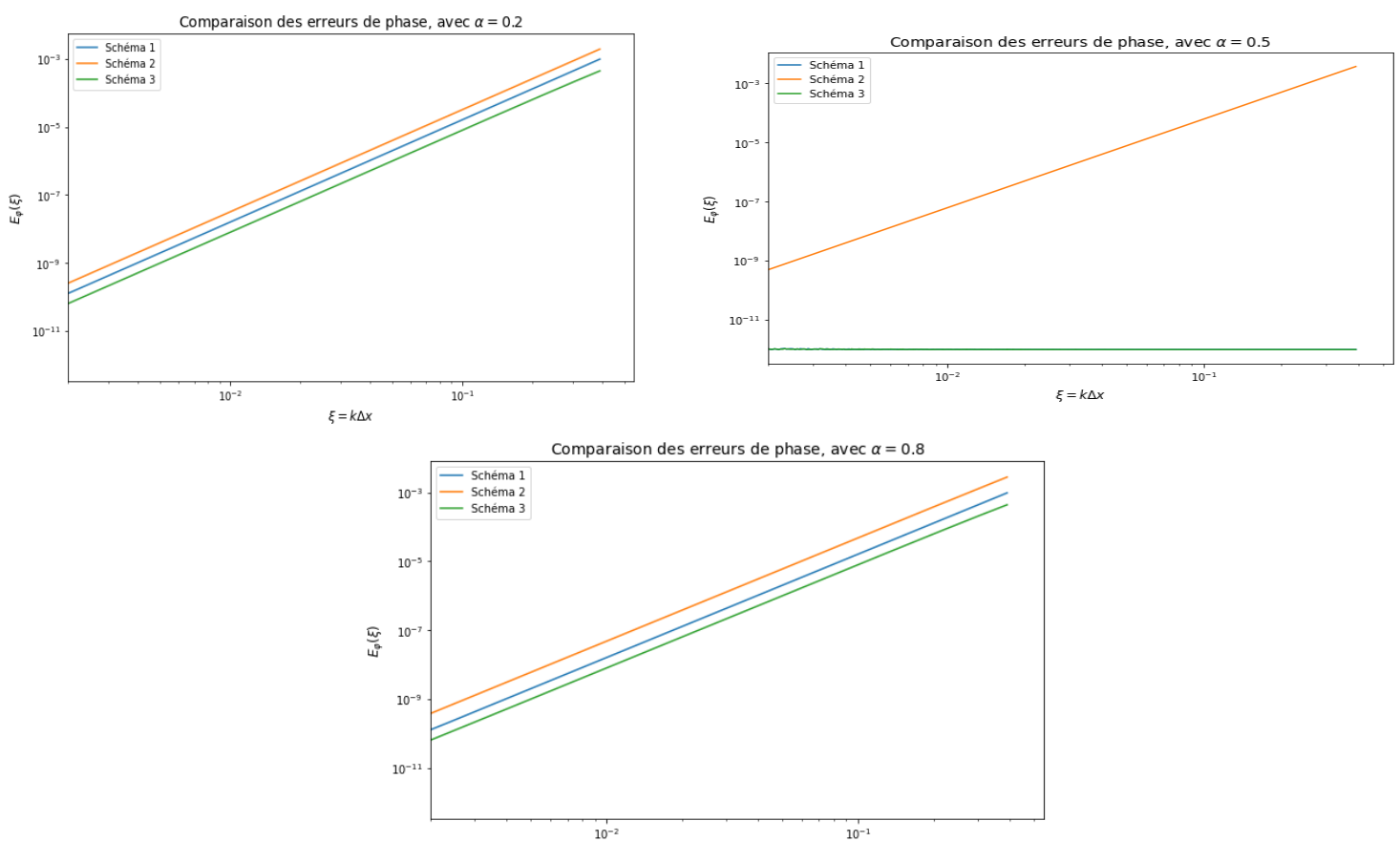
$$\text{On pose : } \xi = 2\theta$$

$$\begin{aligned} \text{On obtient : } E_{\phi 3}(\xi) &= \alpha \xi - \arccos\left(\frac{1 - \alpha \cdot (1 - \cos(2\theta)) + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \cdot \sin^2(2\theta)}{|F_3(\xi)|}\right) \\ &= \alpha \xi - \arccos\left(\frac{1 - 2\alpha \cdot \sin^2(\theta) + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2} \cdot 4 \cdot \sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\theta)}{|F_3(\xi)|}\right) \\ &= \alpha \xi - \arccos\left(\frac{1 - 2\alpha \cdot \sin^2(\theta) + 2 \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot \sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\theta)}{|F_3(\xi)|}\right) \\ &= \alpha \xi - \arccos\left(\frac{1 - 2\alpha \cdot \sin^2(\theta)(1 - (1 - \alpha) \cdot \cos^2(\theta))}{|F_3(\xi)|}\right) \\ &= \alpha \xi - \arccos\left(\frac{1 - 2\alpha \cdot \sin^2(\theta)(1 - (1 - \alpha) \cdot \cos^2(\theta))}{\sqrt{[1 - 2 \cdot \alpha \cdot \sin^2(\theta)(1 - (1 - \alpha) \cos^2(\theta))]^2 + 4\alpha^2 \cdot \sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\theta) \cdot (1 + (1 - \alpha) \cdot \sin^2(\theta))^2}}\right) \end{aligned}$$

On trace ,à présent sur Python, les graphes qui correspondent aux fonctions E_{ϕ_1}, E_{ϕ_2} et E_{ϕ_3} en usant des différentes valeurs de α : 0.2 ,0.5 et 0.8 . On obtient:



Afin de pouvoir visualiser comme toute à l'heure que l'erreur la plus importante est prise en compte lorsque ϵ est petite, on va donc tracer les mêmes graphes précédents en échelle semi logarithmique afin de pouvoir observer le comportement de l'erreur de phase pour de petites valeurs de ϵ . On obtient donc:



Conclusion:

On note que l'erreur de phase du schéma 2 est beaucoup plus grande que les deux autres schémas. Elle est très négligeable et varie aussi selon les valeurs de α .

=> Le schéma 2 est le schéma le plus dispersif, il est plus dispersif que le schéma 1.

Le schéma 3 est beaucoup moins dispersif que les deux autres.

Pour $\alpha=0.5$, on remarque que les erreurs de phases du schéma 1 et 3 sont nulles contrairement au schéma 2. Dans ce cas, la solution du schéma 2 est déphasée par rapport à la solution exacte.

III. Mise en oeuvre des schémas numériques et analyse des résultats:

3.1-Programmation des Schémas:

Afin de mettre en oeuvre les trois schémas différentiels sur Python, on a écrit trois fonctions schéma1, schéma2 et schéma3 qui correspondent respectivement aux schémas de courant, de Lax Wendroff et celui décentré du 2ème ordre.

Chaque fonction prend comme argument: le nombre CFL alpha, le nombre de points de discrétisation spatiale J et le vecteur $U_0 =$

$(u_0^n, \dots, u_{J-1}^n)$ constitué des valeurs de la solution discrète à l'instant t^n . Elle renvoie ensuite comme résultat le vecteur U_1 correspondant à U_{n+1} constitué des valeurs de la solution discrète à l'instant t^{n+1} .

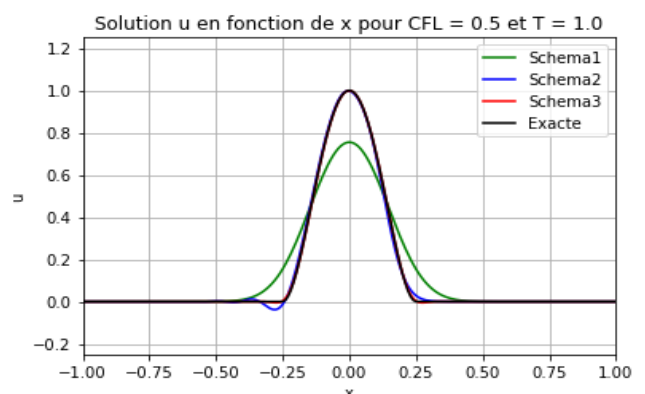
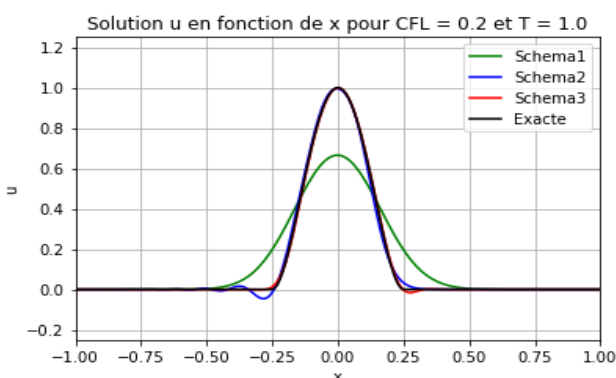
3.2-Premier test numérique:

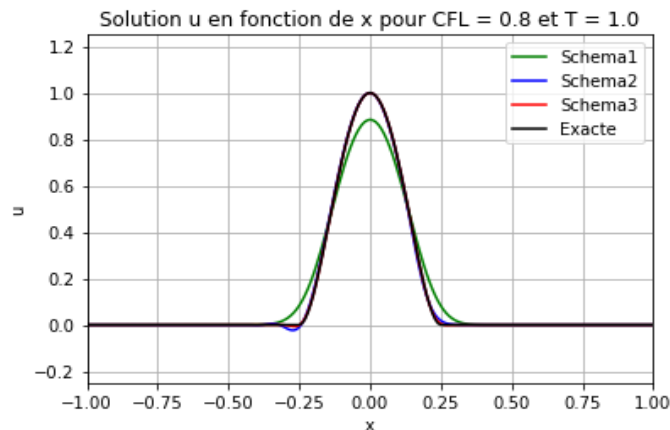
Pour un premier test, on fixe $J=201$, $a=2$ et $\alpha=0.8$ et on prend comme condition initiale la fonction u_0 définie par:

$$u_0(x) = 256(1 - \frac{1}{4})^2 \chi(x) \text{ où } \chi \text{ est la fonction indicatrice de } [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}].$$

On implémente cette condition initiale sur Python à travers la fonction Uinitiale.

. On trace sur les figures les solutions numériques des trois équations au temps $T=1s$ pour une condition initiale u_0 .





On trace sur ces trois graphes les solutions numériques des trois équations au temps $T=1s$ relatifs aux trois schémas respectivement celui de courant, de Lax-Wendroff et le Décentré du 2ème ordre pour différentes valeurs de α : $\alpha=0.8, \alpha=0.5$ et $\alpha=0.2$ pour une même condition initiale u_0 .

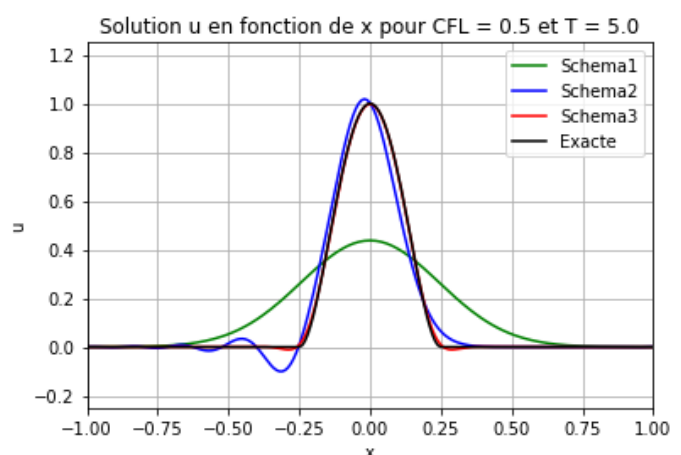
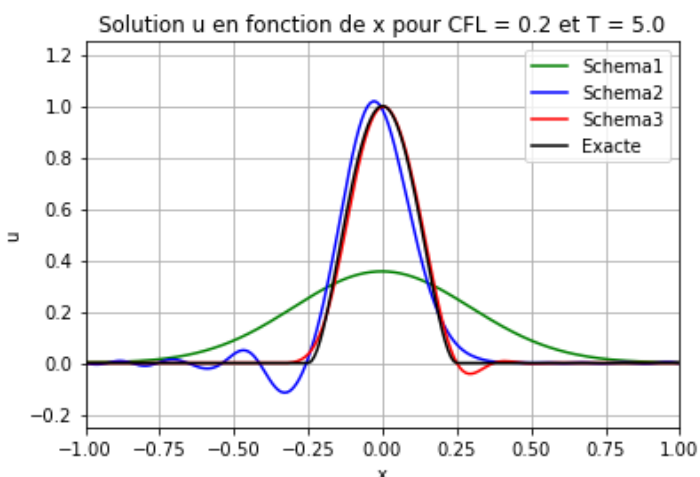
On observe que la solution numérique obtenue à partir du schéma de courant est très éloignée de la solution exacte. On dit que le schéma de courant est très dissipatif.

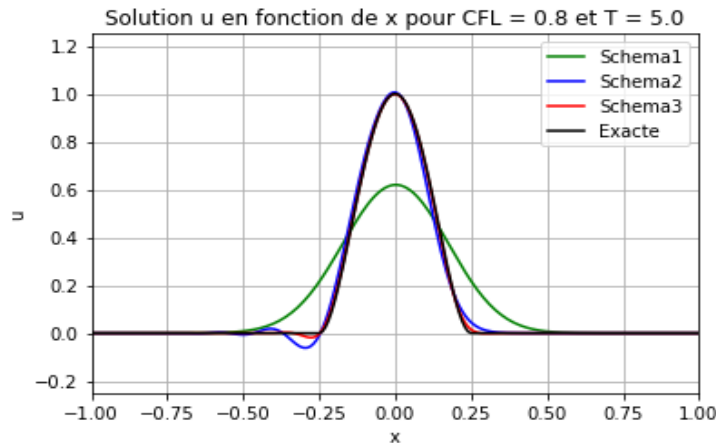
En effet, ce schéma possède une fonction de transfert en module strictement inférieure à 1 qui diminue l'amplitude de la fonction à transporter à chaque pas de temps. Ce qui est aussi expliqué à partir de l'erreur d'amplitude qui est très importante comparant aux deux autres schémas.

On observe aussi qu'au même instant $T=1s$, les schémas de Lax-Wendroff et le décentré du 2ème ordre sont très proches de la solution exacte et cela s'explique par le fait que les erreurs de phase obtenues à partir de ces schémas sont très inférieures à l'erreur de phase du schéma de courant.

De plus, on pourra bien noter que les variables: α et l'erreur d'amplitude sont inversement proportionnelles. En effet, plus que α augmente, plus l'erreur d'amplitude commise par chacun des trois schémas diminue.

. On trace sur les figures les solutions numériques des trois équations au temps $T=5s$ pour une même condition initiale u_0 .





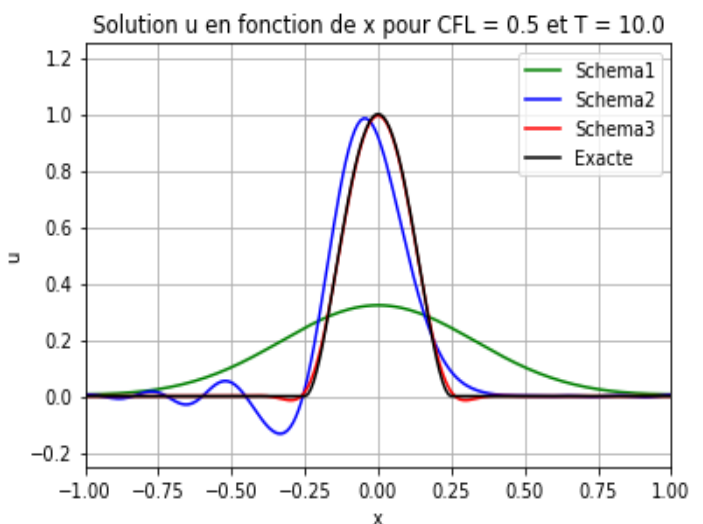
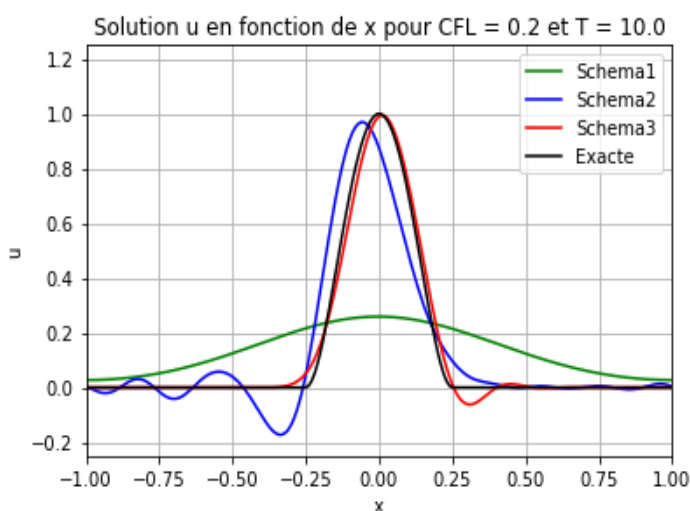
On trace sur ces trois graphes les solutions numériques des trois équations au temps $T=5s$ relatifs aux trois schémas respectivement celui de courant, de Lax-Wendroff et le Décentré du 2ème ordre pour différentes valeurs de $\alpha: \alpha=0.8, \alpha=0.5$ et $\alpha=0.2$ pour la même condition initiale u_0 .

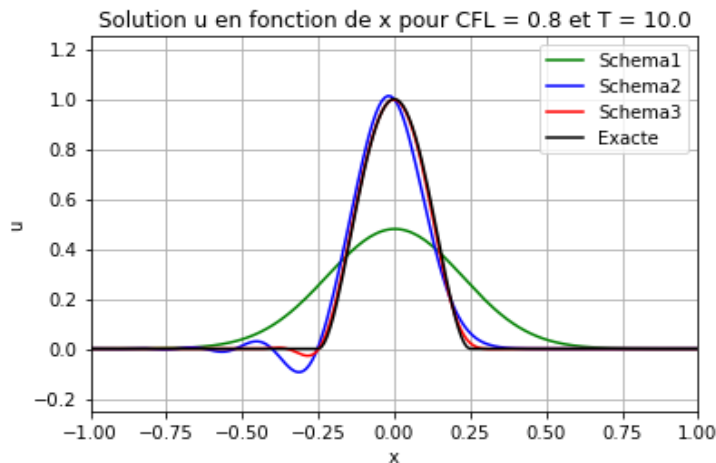
Dans ce cas, on note que les propriétés dissipatives sont beaucoup plus importantes. Cela s'explique par l'augmentation du temps de calcul qui se fait sur 5s. Cette augmentation engendre une accentuation des erreurs d'amplitude.

On note également un phénomène de déphasage (un retard de phase) qui apparaît et qui s'accroît lorsque α diminue (Ce phénomène est très visible dans le cas du deuxième schéma). De plus, on pourra remarquer que le schéma de Lax-Wendroff est dispersif (présentant des oscillations aux bords du support de u_0) contrairement au schéma décentré du 2ème ordre qui est beaucoup moins dispersif pour $\alpha=0.2$ et très proche de la solution exacte pour différentes valeurs de α .

On note aussi que: plus que α augmente, plus que les phénomènes de dispersion et de dissipation engendrés par chacun des trois schémas diminuent.

. On trace sur les figures les solutions numériques des trois équations au temps $T=10s$ pour une même condition initiale u_0 .





On trace sur ces trois graphes les solutions numériques des trois équations au temps $T=10s$ relatifs aux trois schémas respectivement celui de courant, de Lax-Wendroff et le Décentré du 2ème ordre pour différentes valeurs de α : $\alpha=0.8, \alpha=0.5$ et $\alpha=0.2$ pour la même condition initiale u_0 .

On observe que les phénomènes de dispersion et de dissipation sont beaucoup plus lisibles ici par rapport aux deux derniers cas surtout à partir des schémas de courant et de Lax-Wendroff puisque la solution en rapport avec le schéma décentré du second ordre est quasi-confondu avec la solution exacte.

La solution en rapport avec schéma de courant présente une erreur d'amplitude très importante puisque la courbe de celle-ci est très aplatie.

On note un retard de phase de la solution du schéma de Lax-Wendroff par rapport à la solution exacte ainsi que des oscillations beaucoup plus importantes au niveau des bord du support de u_0 .

Conclusion:

En guise de conclusion, on pourra admettre que le schéma 1 qui présente des propriétés dissipatives très importantes et des erreurs d'amplitude bien remarquables est nettement le schéma le moins adapté à la résolution de notre équation.

Le schéma 2 est bien meilleur mais présente des erreurs de phase importantes aux instants $T=5s$ et $T=10s$ ainsi que des oscillations liées au phénomène de dispersion.

Enfin, le schéma 3 est le plus adéquat pour la résolution vu que sa solution coïncide avec la solution exacte de notre équation. Pour mettre en évidence les erreurs numériques que pourra engendrer ce schéma, il faut imposer un temps de résolution qui tend vers l'infini et un nombre CFL α très faible.

3.3-Second test numérique:

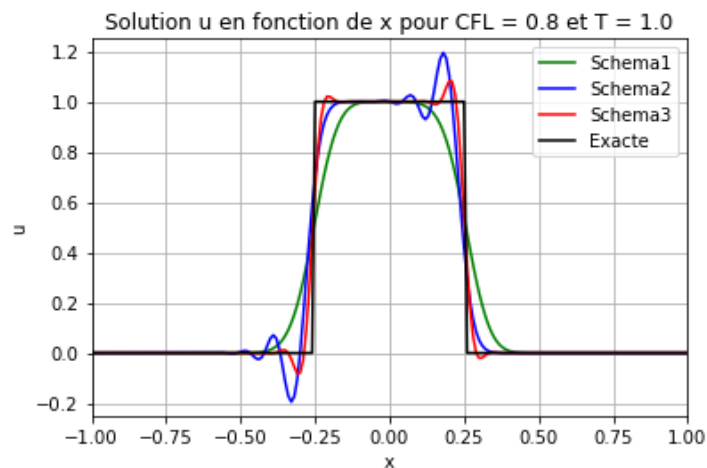
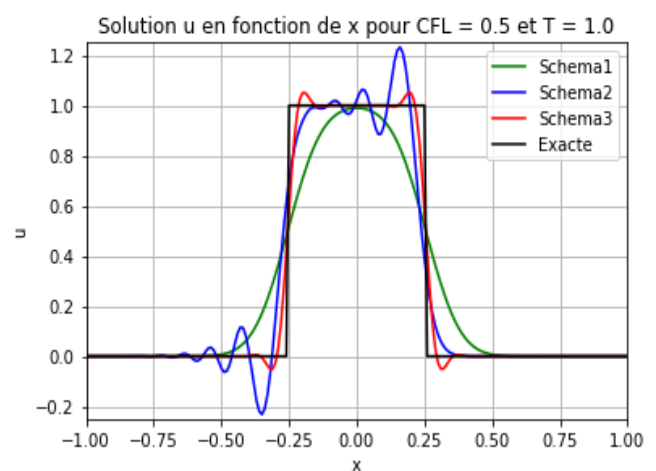
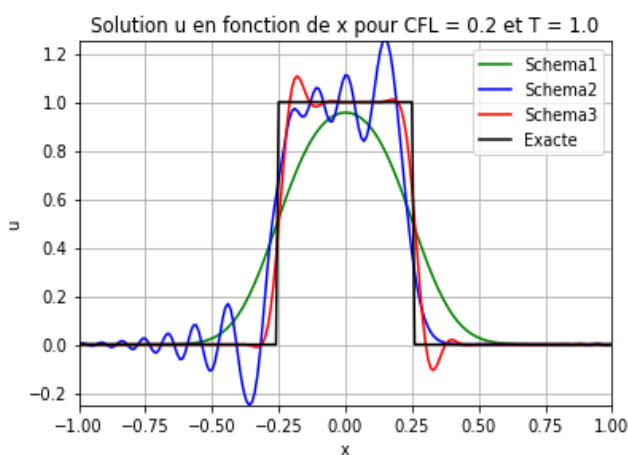
Pour notre second test, on fixe $J=201$, $a=2$ et $\alpha=0.8$ et on prend comme nouvelle condition initiale la fonction u_0 définie par:

$$u_0(x) = \chi(x) \text{ où } \chi \text{ est la fonction indicatrice de } [-1/4, 1/4].$$

On implémente cette condition initiale sur Python à travers la fonction Uinitiale2.

On note ici que la fonction u_0 présente une discontinuité aux points d'abscisses $-1/4$ et $1/4$.

. On trace sur les figures les solutions numériques des trois équations au temps $T=1s$ pour une nouvelle condition initiale u_0 .



On trace sur ces trois graphes les solutions numériques des trois équations au temps $T=1s$ relatifs aux trois schémas respectivement celui de courant, de Lax-Wendroff et le Déc centré du 2ème ordre pour différentes valeurs de α : $\alpha=0.8$, $\alpha=0.5$ et $\alpha=0.2$ pour une deuxième condition initiale u_0 .

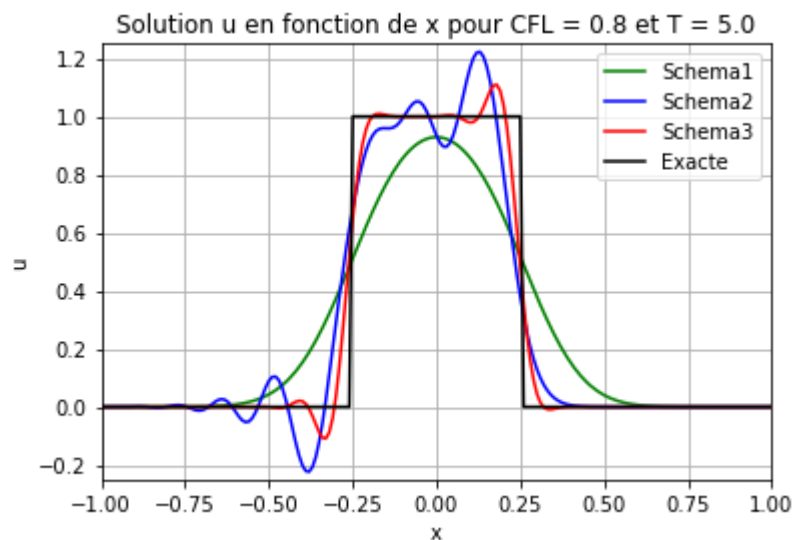
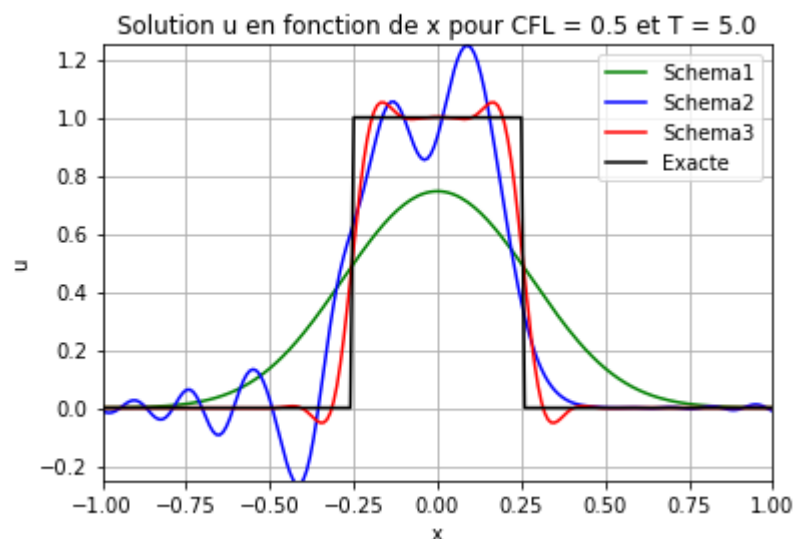
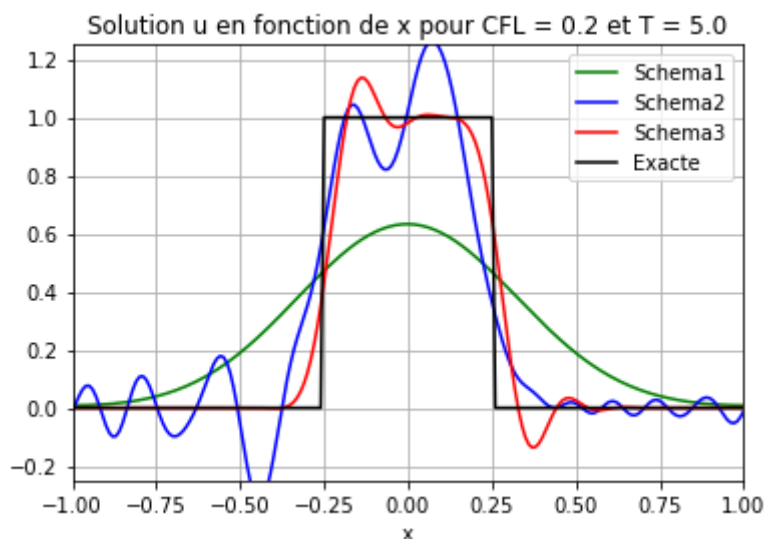
On constate que les trois schémas présentent des erreurs très importantes au niveau des points de discontinuité $-1/4$ et $1/4$.

Ceci s'explique par le fait que chacun de ces trois schémas nécessitent une fonction de transport qui soit au moins de classe C^1 or ici ce n'est pas le cas vu la discontinuité aux points $-1/4$ et $1/4$.

On remarque que le schéma de courant est toujours dissipatif, cependant les schémas de Lax-Wendroff et le schéma décentré de 2ème ordre se montrent dispersifs à partir des oscillations repérées aux points de discontinuité.

On note aussi que les phénomènes de dispersion et de dissipation s'atténuent lorsqu'on augmente le nombre CFL.

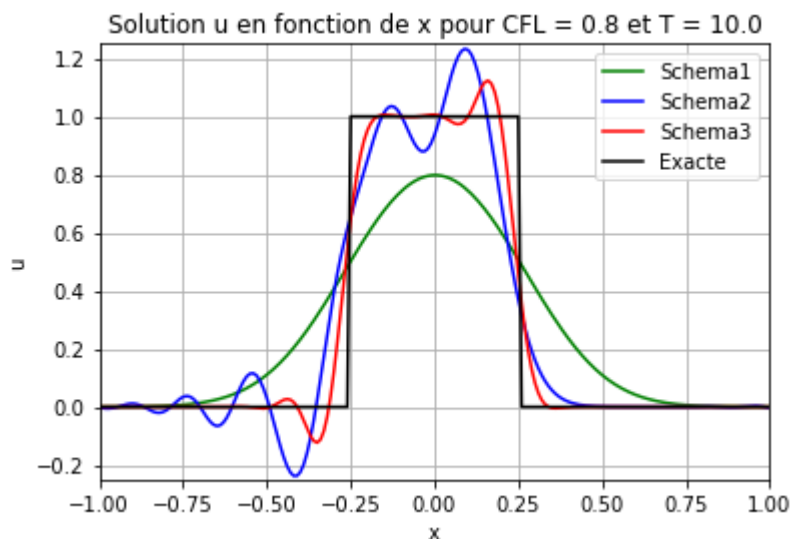
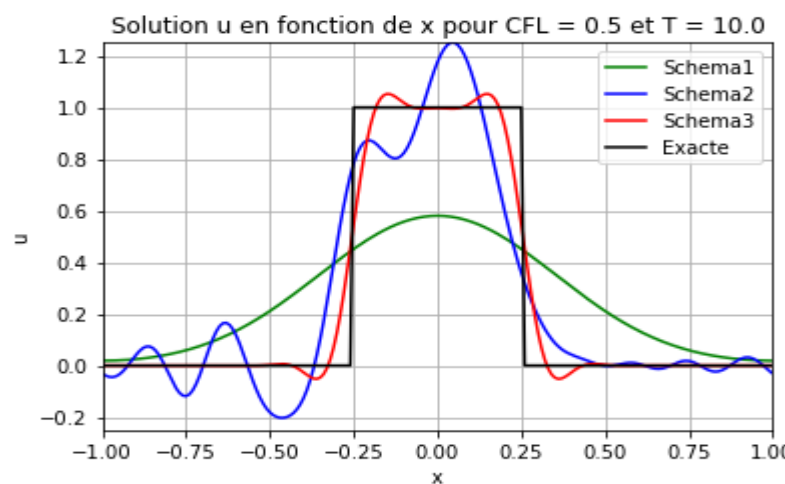
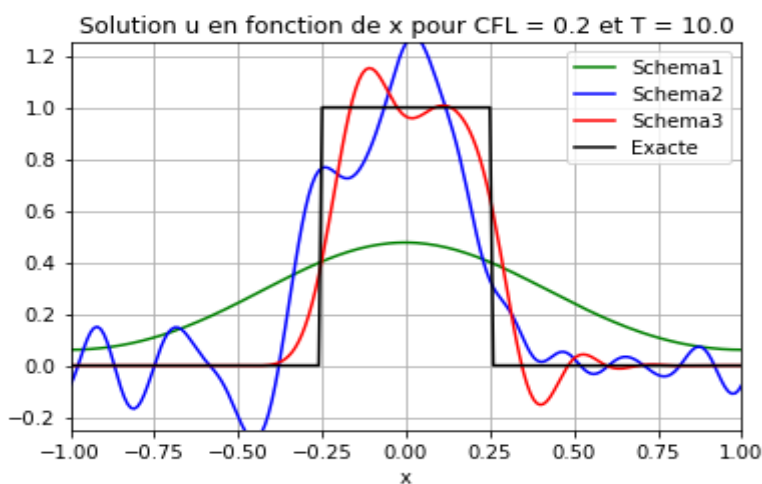
. On trace sur les figures les solutions numériques des trois équations au temps $T=5s$ pour la même nouvelle condition initiale u_0 .



On trace sur ces trois graphes les solutions numériques des trois équations au temps $T=5s$ relatifs aux trois schémas respectivement celui de courant, de Lax-Wendroff et le Décentré du 2ème ordre pour différentes valeurs de α : $\alpha=0.8, \alpha=0.5$ et $\alpha=0.2$ pour une deuxième condition initiale u_0 .

Dans ce cas, on observe les mêmes phénomènes: le phénomène de dissipation pour le schéma de courant et le phénomène de dispersion pour les schémas de Lax-Wendroff et le décentré du second ordre. Cependant, puisque le temps de résolution est plus long, on note que les erreurs deviennent plus importantes et les oscillations plus amplifiées.

. On trace sur les figures les solutions numériques des trois équations au temps $T=10s$ pour la même nouvelle condition initiale u_0 .



On trace sur ces trois graphes les solutions numériques des trois équations au temps $T=10s$ relatifs aux trois schémas respectivement celui de courant, de Lax-Wendroff et le Décentré du 2ème ordre pour différentes valeurs de α : $\alpha=0.8$, $\alpha=0.5$ et $\alpha=0.2$ pour une deuxième condition initiale u_0 .

Dans ce cas, on observe toujours comme précédemment les mêmes phénomènes: le phénomène de dissipation pour le schéma de courant et le phénomène de dispersion pour les schémas de Lax-Wendroff et le décentré du second ordre. Cependant, puisque le temps de résolution est beaucoup plus long par rapport aux deux derniers cas, on note que les erreurs deviennent plus importantes puisque la courbe du Schéma 1 est plus aplatie, de plus les oscillations sont beaucoup plus amplifiées dans les schémas 2 et 3.