Eksamen FYS 128 V 2020

Oppgave 1

Et legeme med masse m opplever en tidsavhengig kraft $\mathbf{F}(t)= [f, -ge^{-kt}]$, hvor f, g, og k er konstanter. Dette er den eneste kraften som virker på legemet. Anta følgende initialbetingelse for posisjonen $\mathbf{r}(t)= [x(t), y(t)]$ og hastigheten $\mathbf{v}(t)$ til legemet: $\mathbf{r}(0)= [0, 0]$ m og $\mathbf{v}(0)= [0, 0]$ m/s.

a) Finn uttrykket for hastigheten $\mathbf{v}(t)$.

b) Finn uttrykket for posisjonen $\mathbf{r}(t)$.

$$\vec{F}(t) = f\vec{i} + -ge^{-kt}\vec{j} = m\vec{a}$$

f, g, k - konstanter

N. 2. lov

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}}$$

$$\vec{r}(0) = \vec{0}$$
$$\vec{v}(0) = \vec{0}$$

x-retning

$$\frac{f}{m} = a_x$$

$$v_x = \int_0^t \frac{f}{m}\,dt = \frac{f}{m}\cdot t\Big|_0^t$$

$$v_x = \frac{f}{m} \cdot t$$

y-retning $\quad -\frac{g}{m} e^{-kt} = a_y$

$$v_y = \int_0^t -\frac{g}{m} \cdot e^{-kt} \, dt$$

$$v_y = -\frac{g}{km}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{f}{m} t \, \vec{i} - \frac{g}{km}\left(1 - e^{-kt}\right) \vec{j}}$$

$$\vec{a} = \frac{f}{m} \vec{i} - \frac{g}{m} e^{-kt} \vec{j}$$

$\vec{r}(0) = 0$

$\vec{v}(0) = 0$

Euler-cromers metode

Oppgave 2

En komet med masse m passerer en planet med masse $M = 6{,}0\cdot 10^{24}$ kg. Kometen opplever da et potensial $U(\mathbf{r}) = -GMm/|\mathbf{r}|$ på grunn av gravitasjonskraften. Her er $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ $\mathrm{Nm^2/kg^2}$ gravitasjonskonstanten og $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ er posisjonen til kometen når origo for koordinatsystemet er valgt i planetens massesenter.

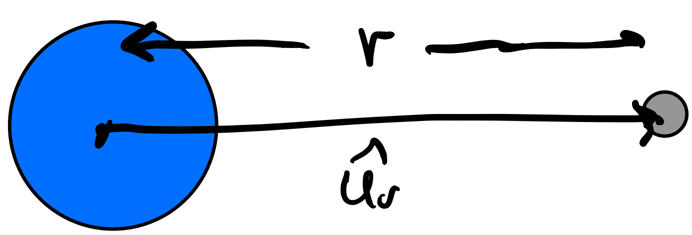
a) Anta at kometen har en hastighet på 10 km/s når den er uendelig langt borte. Hva er hastigheten til kometen når $|\mathbf{r}| = 100\,000$ km? Vi ser bort fra gravitasjonskraften fra andre planeter.

b) Skrive ned bevegelsesligningene som beskriver tidsutviklingen til posisjonen $\mathbf{r}(t)$.

Energien er bevart

$$K_0 + U_0 = K_1 + U_1$$

$$U(\vec{r}) = \frac{-GMm}{|\vec{r}|}$$



$$\left.\begin{aligned} &U \to 0 \quad \text{når} \quad r \to \infty \\ &\lim_{r\to\infty} \frac{-GMm}{r} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \underline{U_0 = 0}$$

$$\underline{K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2}$$

Når $r_1 = 100.000$ km:

$$U_1 = \frac{-GMm}{r_1} \quad , \quad K_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$$

<u>Energi bevaring</u>

$$\underbrace{\cancel{\tfrac{1}{2}} \cancel{m} v_0^2}_{K_0} = \underbrace{\frac{-2GM\cancel{m}}{r_1}}_{U_1} + \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{2}} \cancel{m} v_1^2}_{K_1} \quad \Big| \cdot \frac{2}{m}$$

$$v_1^2 = v_0^2 + \frac{2GM}{r_1}$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2GM}{r_1}} = \underline{\underline{10{,}4 \text{ km/s}}}$$

Forhold mellom potensial og kraft.

$$\vec{F} - \nabla U \qquad\qquad U = mgy$$

$$U = \frac{-GMm}{|\vec{r}|} \qquad\qquad F = -\nabla U = -\frac{d}{dy} mgy$$

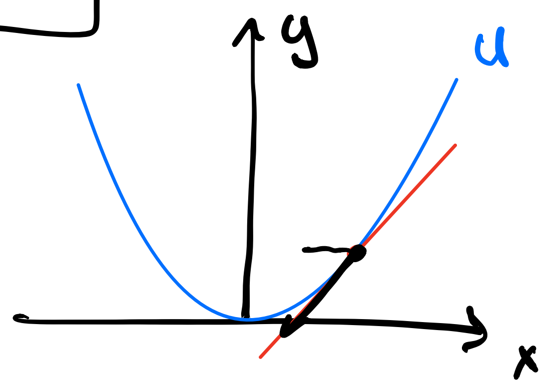
$$U = \frac{-GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad\qquad F = -mg$$

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{-GMm}{r^2}\frac{\cancel{\partial} x}{\cancel{\partial} r} = \frac{-GMm\,x}{r^3}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla U}$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$



$$\vec{F} = -\nabla U$$

$$F = -\frac{d}{dx}U$$

$$F = -kx$$

Oppgave 3

Vi lager en luke for huskatten Glenn-Rodny i inngangsdøren. Katteluken har form av en kvadratisk skive med sidelengde a. Vi antar at luken har en jevn tykkelse og at den kan rotere friksjonsfritt omkring omdreiningsaksen (Fig. 1).

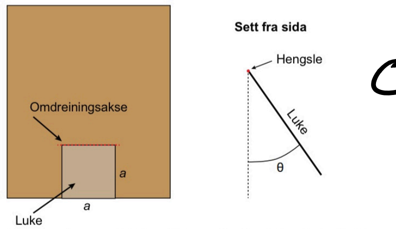


Fig. 1: Dør med luke til katt. Rød stiplet linje indikerer omdreiningsaksen til luken. θ er rotasjonsvinkelen til luken i forhold til vertikalplanet.

a) Vis at treghetsmomentet til luken om omdreiningsaksen er $I = ma^2/3$, hvor m er massen til luken.

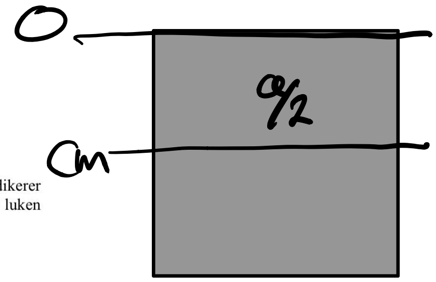
b) Vis at tidsutviklingen for rotasjonsvinkelen θ til luken er gitt ved ligningen

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3g}{2a}\sin\theta$$

når gravitasjonen er den eneste kraften som gir et kraftmoment om omdreiningsaksen.

c) For små vinkler θ er $\sin\theta \approx \theta$. Bruk dette til å finne en generell løsning for $\theta(t)$ som gjelder for små rotasjonsvinkler og vis at løsningen er $\theta(t) = \theta_0 \cos(t\sqrt{3g/2a})$ når du antar initialbetingelsene $\theta(0) = \theta_0$ og $d\theta/dt = 0\ \mathrm{s}^{-1}$.

d) Anta at luken slippes fra en vinkel θ_0. Luken har ingen vinkelfart i det den slippes. Bruk bevaring av mekanisk energi til å finne et generelt uttrykk for vinkelfarten til luken når den passerer bunnpunktet $\theta = 0$. Vis at dette resultatet samsvarer med løsningen du fant i oppgave 3c når startvinkelen θ_0 er liten. Hint: Du får her bruk for at $\cos\theta_0 \approx 1 - (1/2)\theta_0^2$ for små θ_0.



$$I_{cm} = \frac{1}{12} M a^2$$

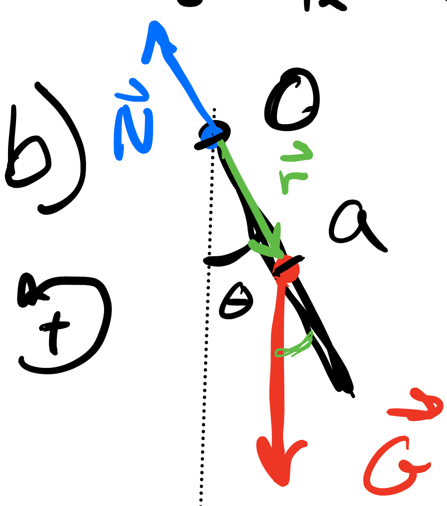
$$I_{cm} = \frac{1}{12} M a^2$$ (stav eller plate om massenteraksen)

Paralellakse-teorem (steinar's sats)

$$I_o = I_{cm} + M\underline{R}^2$$

$$I_o = \frac{1}{12} M a^2 + M \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{3} M a^2}}$$

b)



Kraftmoment om O:

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F}$$

$$|\vec{\tau}| = r \cdot mg \cdot \sin\theta$$

$$|\vec{\tau}| = \frac{a}{2} \cdot mg \cdot \sin\theta$$

Spinnsats: $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

$$-\frac{a}{2} mg \sin\theta = I_0 \alpha$$

$$-\frac{\cancel{a}}{2} \cancel{m} g \sin\theta = \frac{1}{3} m a^2 \cdot \alpha \quad \Big| \cdot \frac{3}{\cancel{m} a^{\cancel{2}}}$$

$$-\frac{3}{2}\frac{g}{a}\sin\theta = \underbrace{\alpha}_{\frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3}{2}\frac{g}{a}\sin\theta}$$

c) $\sin\theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3}{2}\frac{g}{a}\theta = 0$$

$$\theta(0) = \theta_0$$

$$\omega_0 = \frac{d\theta}{dt}(0) = 0$$

$x'' + \omega^2 x = 0$

$A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$$\theta = A\cos\left(\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{a}}\, t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{a}}\cdot t\right)$$

$$\theta = \theta_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{a}}\cdot t\right)$$