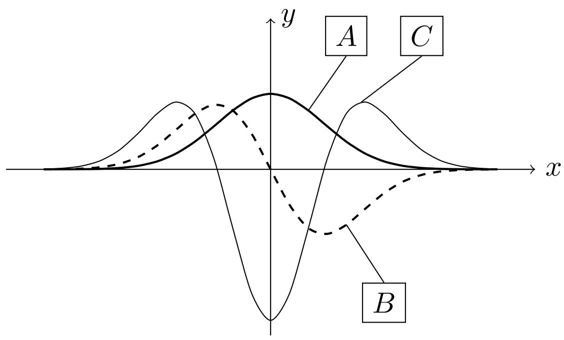
Ta med **all mellomregning** som er nødvendig for å grunngi svaret.

Oppgave 1 . . . .

Figuren under viser grafen til tre kurver A, B og C. En av grafene er $f(x)$, den andre $f'(x)$ og den tredje $f''(x)$.

Finn ut hvilken kurve som tilhører hvilken funksjon. Husk å begrunne svaret.



løsning: Vi vet at $f(x)$ har et stasjonært punkt når $f'(x) = 0$. Videre har $f'(x)$ et stasjonært punkt når $f''(x) = 0$. Kurve A har ingen nullpunkt og et stasjonært punkt. B har et nullpunkt og to stasjonære punkt. C har to nullpunkt og tre stasjonære punkt. Videre ser vi at nullpunktet til B er for samme x-verdi som A har stasjonært punkt. A er $f(x)$. B er $f'(x)$ og C er $f''(x)$.

Oppgave 2 . . . .

Finn den deriverte til

$$f(x) = \cos^3\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

løsning: Denne uppgaven bruker dobbel kjerneregel. Vi har $f(u) = u^3$ der $u = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. For å finne u' må vi igjen bruke kjerneregel. $v = \frac{\pi x}{2}$. Vi får $u' = -\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2}$.

$$f'(u) = 3u^2 \cdot u'$$

$$f'(x) = 3\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot -\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = \frac{-3\pi}{2}\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

Oppgave 3 . . . .

Gitt funksjonen

$$f(t) = 4t + |4t - 1|$$

Regn ut $f'(t)$. Skisser funksjonen og den deriverte.

løsning: Ved å derivere $f(t)$ ved bruk av kjerneregel får en

$$f'(t) = 4 + 4(\mathrm{sgn}(4x - 1))$$

der $(\mathrm{sgn}(4x - 1))$ er fortegnsfunksjonen. Den 1 når $t > \frac{1}{4}$ og -1 når $t < \frac{1}{4}$ Vi får derfor

$$f'(t) = \begin{cases} 8 & \text{når } t > \frac{1}{4} \\ 0 & \text{når } t < \frac{1}{4} \end{cases}$$

En annen måte å løse oppgaven på er å løse opp absoluttverdien får derivering.

$$f(t) = \begin{cases} 4t + (4t-1) = 8t - 1 & \text{når } t > \frac{1}{4} \\ 4t - (4t-1) = 1 & \text{når } t < \frac{1}{4} \end{cases}$$

Her ser en enkelt at $f'(t) = 8$ når $t > 1/4$ og $f'(t) = 0$ når $t < 1/4$. Den deriverte eksisterer ikke når $t = 1/4$.

Oppgave 4 . . . .

Finn tangenten til kurven

$$x\ \sin(xy - y^2) = x^2 - 1$$

i punktet (1,1)

løsning: Vi deriverer uttrykket $x\ \sin(xy - y^2) = x^2 - 1$ implisitt. Da er det viktig å huske på at $y = y(x)$ slik at når vi deriverer y med hensyn på x får vi y'.

$$\sin\left(xy - y^2\right) + x\left(\cos\left(xy - y^2\right)\right)(y + xy' - 2yy') = 2x$$

Vi ønsker å finne stignigstallet i punktet $(1, 1)$. Vi setter derfor inn for $x = 1$ og $y = 1$ i uttrykket over:

$$\sin\left(1 \cdot 1 - 1^2\right) + 1\left(\cos\left(1 \cdot 1 - 1^2\right)\right)(1 + 1 \cdot y' - 2 \cdot 1 \cdot y') = 2 \cdot 1$$

Dette gir:

$$0 + (1)(1)(1 - y') = 2$$

Vi løser for y' og får $y' = -1$.

Vi bruker etpunktsformel med punktet $(1, 1)$ og stigningstall -1 til å finne tangenten:

$$y - 1 = -1(x - 1)$$

som kan skrives som:

$$y = 2 - x$$

Oppgave 5 . . . .

Gitt kurven $y = 3 - \frac{x}{2} + \sin(x)$ der $0 \leq x \leq \pi$.
Finn x-koordinaten til punktet der tangenten til kurven er parallell med linjen
$y = -\frac{x}{3} + 5$.

løsning: Tangenten skal være paralell med linjen som har stigningstall $-1/3$. Tangenten må derfor ha samme stigningstall. Vi finner tangenten ved å derivere:

$$\begin{aligned} y &= 3 - \frac{x}{2} + \sin(x) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{1}{2} + \cos(x) \end{aligned}$$

Vi finner x-koordinaten, der $0 \leq x \leq \pi$, slik at $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1/3$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} &= -\frac{1}{2} + \cos(x) \\ \cos(x) &= \frac{1}{6} \\ x &= \cos^{-1}(\frac{1}{6}) \approx 1,4033 \end{aligned}$$

Oppgave 6 . . . .

Avstanden et fly tilbakelegger langs rullebanen før det tar av er gitt ved $D(t) = t^2$ der $D(t)$ er målt i meter og t i sekunder. Hvis flyet tar av når hastigheten er 200 km/t, hvor lang tid tar det før flyet letter? Hvor lang distanse har flyet tilbakelagt? Hvilken akselerasjon har flyet?

løsning: hastigehten er $D'(t) = v(t) = 2t$. En hastighet på 200 km/t tilsvarer $200 \cdot 1000/3600 = 500/9 \approx 55.56$ m/s. Flyer når en hastighet på 55.56 m/s etter 27,8 s. Tilbakelagt avstand er $D(27.8) = 27.8^2 = 771.6$ m. Akselerasjonen er $D''(t) = 2$ m/s^2.

Oppgave 7 . . . .

Omtrent hvor mange prosent øker volumet til en kule med radius r hvis radiusen økes 2%?

løsning: Vi bruker differensialet til å estimere økningen i volumet.

$$dV = V'dr$$

der V er volumet og r er radius. Volumet for en kule er gitt ved:

$$V = \frac{4\pi}{3}r^3$$

Vi deriverer V med hensyn på r.

$$V = \frac{4\pi}{3} \cdot 3 \cdot r^2 = 4\pi r^2$$

Differensialet gir oss:

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

Vi har oppgitt i oppgaven at radiusen øker 2%. Det vil si $\frac{dr}{r} = 0,02$. Vi har videre

$$\frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2}{V}dr$$

Ved å sette inn $V = \frac{4\pi}{3}r^3$ får vi

$$\frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2}{\frac{4\pi}{3}r^3}dr = 3\frac{dr}{r}.$$

Den relative endringen i volum, $\frac{dV}{V}$, er 3 ganger den relative endringen i radius, $\frac{dr}{r}$. Volumet vil derfor øke 6 %

Oppgave 8 . . . .

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

Vis at funsksjonen f er en-entydig og finn den inverse funksjonen f^{-1}. Hva er definisjonsmengden og verdimengden til f og f^{-1}?

løsning: Vi ser at defenisjonsmengden til $f(x)$ er alle reelle tall større enn 1. Verdimengden er alle tall fra og med 0 til uendelig.

$$D_f = [1, \infty)$$

$$R_f = [0, \infty)$$

For å vise at $f(x)$ er en-entydig holder det å vise at den deriverte ikke skifer fortegn.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0$$

$f'(x) > 0$. Derfor er $f(x)$ en-entydig.
Vi finner $f^{-1}(x)$:

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt{x-1}\text{ , } x \text{ og } y \text{ bytter plass}\\
x &= \sqrt{y-1}\text{ , kvadrerer}\\
x^2 &= y-1\text{ , løser for } y\\
y &= x^2-1
\end{aligned}$$

Vi får

$$f^{-1}(x) = x^2 - 1$$

$$D_{f^{-1}} = R_f = [0, \infty)$$

$$R_{f^{-1}} = D_f = [1, \infty)$$