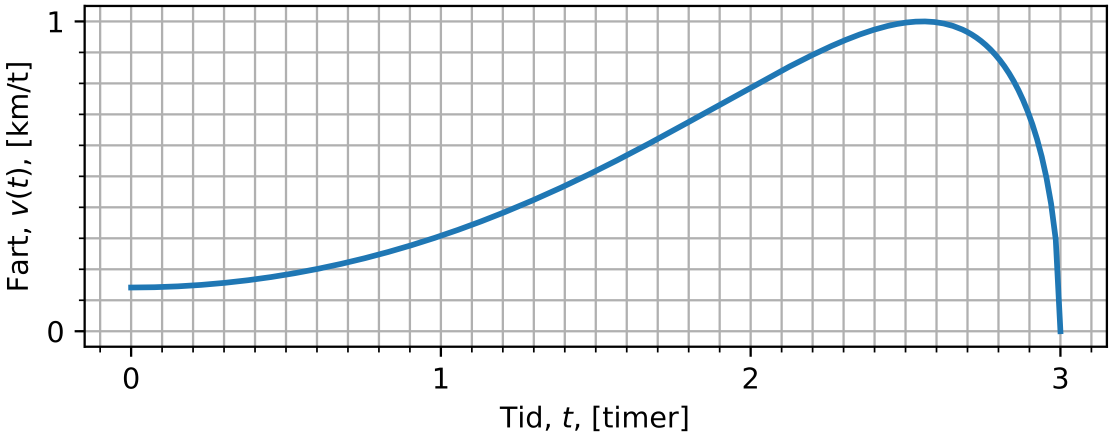
Ta med **all mellomregning** som er nødvendig for å grunngi svaret.

Oppgave 1 . . . .

En NASA Q36 Robotic Lunar Rover kan kjøre i 3 timer. Figuren under viser farten til denne månebilen som funksjon av tid. Estimér (så godt du kan) en øvre og nedre grense for hvor langt bilen har kjørt etter 3 timer.

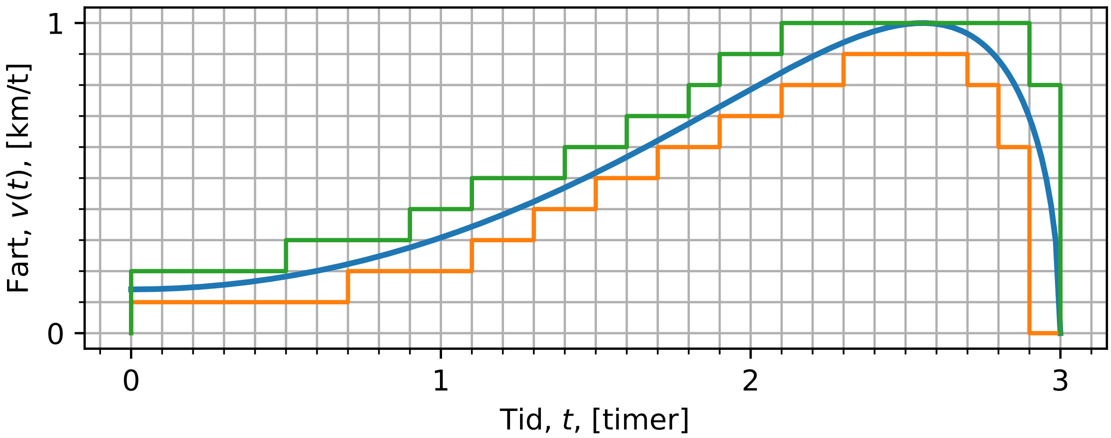


Løsning. Fra grafen ser vi at farten alltid er mindre enn 1 km/t. Øvre grense for strekningen bilen har kjørt blir

$$U = 1\text{km/t} \cdot 3\text{t} = 3\text{km}.$$

Siden farten alltid er positiv er nedre grense $L = 0$km.

Hvis vi vil finne litt mer nøyaktige øvre og nedre grenser så kan vi bruke rutenettet i grafen (se figur under).



Rutene er på 0.1 timer ganger 0.1 km/t. Vi får nedre grense

$$\begin{aligned} L &= 0{,}1^2\,(1\cdot 7 + 2\cdot 4 + 3\cdot 2 + 4\cdot 4 + 5\cdot 2 + 6\cdot 2 + 7\cdot 2 + 8\cdot 2 + 9\cdot 4 + 8\cdot 1 + 6\cdot 1 + 0\cdot 1) \\ &= 0{,}01\,(139) = 1{,}39\text{km}. \end{aligned}$$

Tilsvarende øvre grense

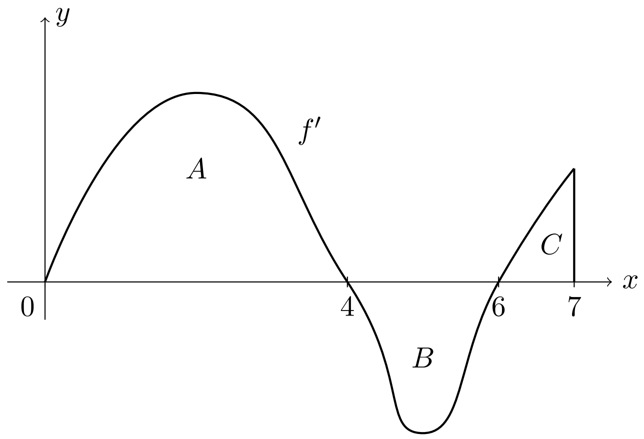
$$\begin{aligned} U &= 0{,}1^2\,(2\cdot 5 + 3\cdot 4 + 4\cdot 2 + 5\cdot 3 + 6\cdot 2 + 7\cdot 2 + 8\cdot 1 + 9\cdot 2 + 10\cdot 8 + 8\cdot 1) \\ &= 0{,}01\,(185) = 1{,}85\text{km}. \end{aligned}$$

□

Oppgave 2 ....

Under er f', den deriverte av f, skissert. Arealet av områdene A, B og C er henholdsvis 20, 8 og 5.

Gitt at $f(0) = -5$, hva er da $f(6)$?



Løsning. Vi har

$$20 = \int_0^4 f'(x)\,dx = [f(x)]_0^4 = f(4) - f(0) = f(4) - (-5) = f(4) + 5.$$

Dette betyr at $f(4) = 20 - 5 = 15$. Vi har også

$$-8 = \int_4^6 f'(x)\,dx = [f(x)]_4^6 = f(6) - f(4) = f(6) - 15.$$

Så $f(6) = 15 - 8 = 7$.

□

Oppgave 3 ....

Finn integralene:

(a) $\displaystyle\int 2xe^{2x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int x^2 - 4x + 5\,dx$

(c) $\displaystyle\int 2x\sqrt{1-x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2-9}\,dx$

(e) $\displaystyle\int e^x \sin(x)\,dx$

Løsning. (a) Bruker delvis integrasjon ved tabell. Fortegn i første kolonne, deriverer andre og integrerer tredje.

$$\begin{array}{cc|c} + & 2x & e^{2x} \\ - & 2 & \frac{1}{2}e^{2x} \\ + & 0 & \frac{1}{4}e^{2x} \end{array}$$

Altså er

$$\int 2xe^{2x}\,dx = 2x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - 2 \cdot \frac{1}{4}e^{2x} + C = xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

(b)

$$\int x^2 - 4x + 5\ dx = \frac{1}{3}x^3 - 4 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 5x + C = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x + C$$

(c) Bruker substitusjon med $u = 1 - x^2$ og $du = -2xdx$:

$$\int 2x\sqrt{1-x^2}\ dx = -\int \sqrt{u}\ du = -\frac{2}{3}u^{3/2} + C = -\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} + C$$

(d) Hvis vi skriver

$$\int \frac{2x+3}{x^2-9}\ dx = \int \frac{2x+3}{(x-3)(x+3)}\ dx = \int \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}\ dx$$

så kan vi bruke delbrøksoppspaltning. Må ha

$$2x + 3 = A(x+3) + B(x-3) = (A+B)x + 3(A-B)$$

Altså er $A + B = 2$ og $3(A - B) = 3$. Den siste er $A - B = 1$. Legger vi sammen likningene får vi $2A = 3$ så $A = \frac{3}{2}$. Det gir $B = 2 - A = \frac{1}{2}$. Integrerer

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{x^2-9}\ dx &= \int \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}\ dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-3}\ dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+3}\ dx \\ &= \frac{3}{2}\ln|x-3| + \frac{1}{2}\ln|x+3| + C.\end{aligned}$$

(I disse integralene bruker vi vel egentlig substitusjonene $u = x - 3$ og $u = x + 3$ hhv.)

(e) Her kan en bruke delvis integrasjon (vi har produkt av to funksjoner). Tabell:

$$\begin{array}{cc|c} + & \sin(x) & e^x \\ - & \cos(x) & e^x \\ + & -\sin(x) & e^x \end{array}$$

Dette sier at

$$\int e^x \sin(x)\ dx = \sin(x)e^x - \cos(x)e^x - \int \sin(x)e^x\ dx$$

De to integralene er anti-deriverte til $e^x \sin(x)$ så bortsett fra en konstant C_1 er de like. Altså er

$$2\int \sin(x)e^x\ dx = \sin(x)e^x - \cos(x)e^x + C_1$$

slik at (med $C = C_1/2$)

$$\int \sin(x)e^x\ dx = \frac{1}{2}\left(\sin(x)e^x - \cos(x)e^x\right) + C.$$

□

Oppgave 4 . . . .

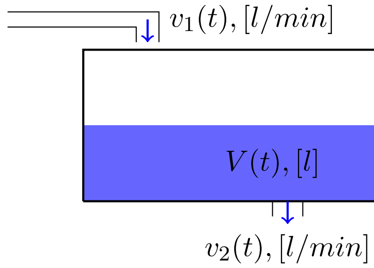
I en vanntank, formet som en sylinder, renner vann inn øverst i tanken med en tilstrømningshastighet (liter/min) gitt ved $v_1(t)$. Samtidig renner vannet ut gjennom et hull i bunnen, med en utstrømningshastighet gitt ved $v_2(t)$. $V(t)$ angir vannvolumet i tanken ved en vilkårlig tid, t.

(a) Lag figur og finn et generelt uttrykk for $V(t)$, uttrykt ved $V(0)$, $v_1(t)$ og $v_2(t)$.

Vi antar at tilstrømningshastigheten inn i tanken $v_1(t)$ er konstant lik 5 liter/min, mens utstrømningshastigheten er gitt ved $v_2(t) = \dfrac{1}{t+1}$.

(b) Hvor mye vann er det i tanken etter 19 minutter?

Løsning. Figur:



Volumet $V(t)$ er lik mengden vi startet med pluss mengden som har strømmet inn minus mengden som har strømmet ut. Mengden som strømmer inn er lik innstrømmingshastighet ganger tid, og tilsvarende for mengden som strømmer ut. Siden hastigheten kan forandres hele tida tenker vi at vi deler opp tida i små intervall og summerer hvor mye som strømmer på hver tidsintervall – altså må vi integrere:

$$V(t) = V(0) + \text{mengde inn} - \text{mengde ut} = V(0) + \int_0^t v_1(x)\,dx - \int_0^t v_2(x)\,dx$$

(b). Hvis $v_1(t) = 5$ og $v_2(t) = \dfrac{1}{t+1}$ blir

$$\begin{aligned} V(19) &= V(0) + \int_0^{19} 5\,dx - \int_0^{19} \frac{1}{x+1}\,dx = V(0) + \Big[5x\Big]_0^{19} - \Big[\ln|x+1|\Big]_0^{19} \\ &= V(0) + (5\cdot 19 - 5\cdot 0) - \Big(\ln(19+1) - \ln(0+1)\Big) = V(0) + 95 - \ln(20). \end{aligned}$$

Dette svaret er i liter. Det er altså $95 - \ln(20) \approx 92$ liter mer enn vi startet med. □