Ta med **all mellomregning** som er nødvendig for å grunngi svaret.

Oppgave 1 . . . .

Løs likninga $2^{2x} = 5^{x+1}$.

Løsning. Begynner med å ta logaritme på begge sider

$$\ln(2^{2x}) = \ln(5^{x+1}).$$

Flytter ned eksponenter

$$2x\ln(2) = (x+1)\ln(5).$$

Samler x på ene sida

$$x2\ln(2) - x\ln(5) = x(2\ln(2) - \ln(5)) = \ln(5)$$

Deler

$$x = \frac{\ln(5)}{2\ln(2) - \ln(5)} \approx -7.2.$$

□

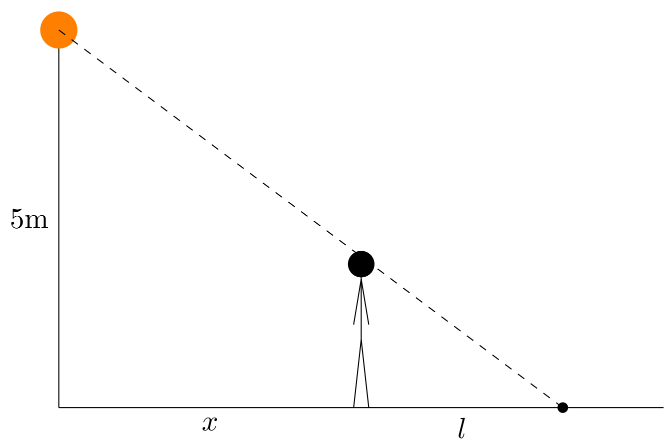
Oppgave 2 . . . .

En 2 meter høy mann går mot en lysstolpe, som står på flat mark, med en hastighet på 0.5 m/s. Lyset står 5 meter opp på stolpen.

Hvor fort avtar lengden av skyggen mannen kaster på bakken i det han er 3 meter fra stolpen?

Hvor fort beveger skyggen av hodet hans seg på det tidspunktet?

Løsning. Her må vi først tegne figur:



La x være avstanden fra mannen til stolpen. La l være lengden av skyggen. Det er oppgitt at $\frac{dx}{dt} = -0.5$ (m/s) (avstanden avtar så derivert er negativ).

Ved formlike trekanter har vi at

$$\frac{l}{2} = \frac{x+l}{5}$$

Da får vi

$$\frac{5}{2}l = x + l \quad \text{så} \quad \frac{3}{2}l = x \quad \text{eller} \quad l = \frac{2}{3}x.$$

Det gir at lengden av skyggen avtar med en hastighet på

$$\frac{dl}{dt} = \frac{2}{3}\frac{dx}{dt} = \frac{2}{3}(-0.5) = -\frac{1}{3}.$$

Altså omtrent -0.33 m/s.

Posisjonen til skyggen av hodet er $h = x + l$, så

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dl}{dt} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{6} \approx -0.83$$

også i meter pr. sekund. □

Oppgave 3 ....

Løs initialverdiproblemet

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{9+x^2} \\ y(3) = 2. \end{cases}$$

(Altså: finn først en anti-derivert og så konstanten.)

Løsning. Formel på side 197 i boka sier at antiderivert blir

$$y = \int \frac{1}{9+x^2}\, dx = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$

Setter inn $x = 3$ og får

$$2 = y(3) = \frac{1}{3}\tan^{-1}(1) + C = \frac{1}{3}\frac{\pi}{4} + C = \frac{\pi}{12} + C,$$

altså blir

$$C = 2 - \frac{\pi}{12}.$$

Tilsammen blir

$$y = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + 2 - \frac{\pi}{12}.$$

□

Oppgave 4 ....

Finn grensa

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}.$$

Løsning. Setter vi inn $x = 0$ får vi $0/0$. Vi bruker l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{6x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{6} = \frac{1}{6}.$$

□

Oppgave 5 ....

Finn den deriverte

$$f(x) = \exp(\arctan(2x+3)).$$

Løsning. Setter $u = \arctan(2x+3)$ og $v = 2x+3$. Altså er $f(x) = e^u$.
Får at $v' = 2$ og

$$u' = \frac{1}{1+v^2}v' = \frac{2}{1+(2x+3)^2}$$

Tilslutt

$$\begin{aligned} f'(x) = f'(u)u' = e^u u' &= \exp(\arctan(2x+3))\frac{2}{1+(2x+3)^2} \\ &= \exp(\arctan(2x+3))\frac{2}{1+4x^2+12x+9} = \frac{\exp(\arctan(2x+3))}{2x^2+6x+5} \end{aligned}$$

Alle de tre siste svarene er like gode. □

Oppgave 6 ....

Vi skal lage en dieseltank bestående av en sylindrisk del med ei halvkule i hver ende.

Halvkulene er dobbelt så dyre å lage som sylinderveggen. Hvis volumet av tanken skal være V, finn radius r og høyde h av sylinderdelen slik at prisen på tanken blir så liten som mulig.

Løsning. Overflateareal av halvkule er $A_K = \frac{1}{2}4\pi r^2$. Overflateareal av sylinder er $A_S = 2\pi rh$. Overflata av hele tanken blir

$$A = A_S + 2A_K = 2\pi rh + 4\pi r^2.$$

Hvis k er konstand pr arealenhet så blir totalkostnaden C for å lage tanken

$$C = k \cdot (2\pi rh + 2 \cdot 4\pi r^2) = k \cdot (8\pi r^2 + 2\pi rh).$$

Volumet av tanken er

$$V = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Hvis V er fast kan vi bruke den til å bli kvitt h-en i uttrykket for C:

$$V - \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2 h \quad \text{så} \quad h = \frac{V - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2} = \frac{3V - 4\pi r^3}{3\pi r^2}$$

Setter inn i C:

$$C = k \cdot \left(8\pi r^2 + 2\pi r\frac{3V - 4\pi r^3}{3\pi r^2}\right) = k \cdot \left(8\pi r^2 + 2\frac{3V - 4\pi r^3}{3r}\right) = k \cdot \left(8\pi r^2 + \frac{2V}{r} - \frac{8\pi r^2}{3}\right).$$

Deriverer C:

$$C' = k \cdot \left(16\pi r - \frac{2V}{r^2} - \frac{16\pi r}{3}\right) = k \cdot \left(\frac{32}{3}\pi r - \frac{2V}{r^2}\right).$$

Setter $C' = 0$ og får

$$\frac{32}{3}\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \quad \text{så} \quad 16\pi r^3 - 3V = 0.$$

(Ganget med $3r^2/2$ på begge sider.) Dette gir

$$r = \left(\frac{3V}{16\pi}\right)^{1/3} \quad \text{mens} \quad h = \frac{3V - 4\pi r^3}{3\pi r^2} = \frac{3V - 4\pi\frac{3V}{16\pi}}{3\pi\left(\frac{3V}{16\pi}\right)^{2/3}} = \frac{\frac{3V}{4\pi}V}{\left(\frac{3V}{16\pi}\right)^{2/3}} = 4\left(\frac{3V}{16\pi}\right)^{1/3}.$$

Siden

$$C'' = k \cdot \left(\frac{32}{3}\pi + \frac{4V}{r^3}\right)$$

er positiv når prisen k, volumet V og radien r er positive, så har vi et minimum for verdiene av r og h over. □

Oppgave 7 ....

Minimal luftmotstand til en flyvinge oppnås når uttrykket

$$\frac{C_D + kC_L^2}{C_L}$$

er minst mulig.

Her er C_L lift-koeffisient, C_D drag-koeffisient, og k en konstant. Alle er positive tall.

For hvilken verdi av C_L får vi minimal luftmotstand? (Regn med C_D og k som konstanter.)

Løsning. Vi skal minimere når C_L varierer. Det er vanligere å kalle den variable x så uttrykket vi skal minimerer er

$$f(x) = \frac{C_D + kx^2}{x} = \frac{C_D}{x} + kx.$$

Deriverer

$$f'(x) = -\frac{C_D}{x^2} + k.$$

Dette er lik 0 når

$$k = \frac{C_D}{x^2} \quad \text{så} \quad x^2 = \frac{C_D}{k} \quad \text{altså} \quad x = \pm\sqrt{\frac{C_D}{k}}.$$

Den negative løsningen er ugyldig siden C_L skal være positiv. Finner andrederivert

$$f''(x) = \frac{2C_D}{x^3}$$

Denne er positiv når $x = \sqrt{C_D/k}$. Altså

$$C_L = x = \sqrt{\frac{C_D}{k}}$$

gir minimal luftmotstand. □

Oppgave 8 ....

Vil finne skjæringspunkt mellom kurvene

$$y = e^{-x^2} \quad \text{og} \quad y = x^2.$$

1. Vis at kurvene har et skjæringspunkt i intervallet $[0, 1]$.
2. Regn ut x_1 når du setter $x_0 = 1$ i Newtons metode.
3. Bruk PC (matlab/python) til å finne x_4 i Newtons metode.

Løsning. Sett $f(x) = e^{-x^2} - x^2$. Har $f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$ og $f(1) = e^{-1} - 1 \approx -0.63 < 0$. Funksjonen er kontinuerlig med ulikt fortegn i endepunktene av $[0, 1]$ så den har et nullpunkt i $[0, 1]$.

Finner

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} - 2x.$$

Med $x_0 = 1$ får vi fra Newtons metode

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{e^{-1} - 1}{-2e^{-1} - 2} \approx 0.77.$$

Hvis en vil finne x_4 kan det f.eks. se slik ut i python:

```
from math import exp
def f(x): return exp(-x**2) - x**2
def df(x): return -2*x*exp(-x**2) - 2*x
x = 1.0
for i in range(4):
   x = x - f(x)/df(x)

print(x)
```

Dette gir verdien $x_4 = 0.7530891649796748$.

I **matlab**:

```
x = 1.0
f = @(x) exp(-x^2) - x^2
df = @(x) -2*x*exp(-x^2) - 2*x

for i = 1:4
  x = x - f(x)/df(x);
end

format long
x
```

som gir verdien $x_4 = 0.753089164979675$. (Dette med “format long” er for å få matlab til å gi flere desimaler.) $\square$