Ta med **all mellomregning** som er nødvendig for å grunngi svaret.

Oppgave 1 ....

La $s > 0$ være et fast tall. Regn ut

$$\int_0^\infty t^2 e^{-st}\, dt.$$

Løsning. Her kan en bruke delvis integrasjon (vi har produkt av to funksjoner). Tabell:

$$\begin{array}{cc|c} + & t^2 & e^{-st} \\ - & 2t & \frac{1}{-s}e^{-st} \\ + & 2 & \frac{1}{s^2}e^{-st} \\ - & 0 & \frac{1}{-s^3}e^{-st} \end{array}$$

Dette betyr at

$$\int t^2 e^{-st}\, dt = -\frac{t^2}{s}e^{-st} - \frac{2t}{s^2}e^{-st} - \frac{2}{s^3}e^{-st} + C$$

slik at

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^2 e^{-st}\, dt &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R t^2 e^{-st}\, dt = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{t^2}{s}e^{-st} - \frac{2t}{s^2}e^{-st} - \frac{2}{s^3}e^{-st} \right]_0^R \\ &= \lim_{R\to\infty} \left(-\frac{R^2}{s}e^{-sR} - \frac{2R}{s^2}e^{-sR} - \frac{2}{s^3}e^{-sR} \right) - \left(-0e^0 - 0e^0 - \frac{2}{s^3}e^0 \right) \\ &= \frac{2}{s^3} \end{aligned}$$

siden ved l'Hôpital

$$\lim_{R\to\infty} \frac{R^2}{s}e^{-sR} = \lim_{R\to\infty} \frac{R^2}{se^{sR}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{R\to\infty} \frac{2R}{s^2e^{sR}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{R\to\infty} \frac{2}{s^3e^{sR}} = 0.$$

□

Oppgave 2 ....

La $f(x) = x^3$.

(a) Sett opp integralet for buelengden, $s = \int_a^b ds$, for kurven $f(x)$ mellom $x = 0$ og $x = 1$.

(b) Bruk Simpsons metode til å finne tilnærmingen S_4 for buelengden.

(c) Finn overflatarealet til romlegemet vi får ved å rotere $y = x^3$ om x-aksen mellom $x = 0$ og $x = 1$.

Løsning. (a). Med $y = x^3$ blir $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ så

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + 9x^4}.$$

Buelengdeintegralet blir

$$s = \int_0^1 \sqrt{1+9x^4}\, dx.$$

(b). Nå skal vi bruke Simpsonsmetode med $y = \sqrt{1+9x^4}$. Deler [0,1] i 4 biter så $h = 0.25$. Regner ut

$$y_0 = \sqrt{1+9\cdot 0^4} = 1 \qquad y_1 = \sqrt{1+9\cdot 0.25^4} \approx 1.017$$

$$y_2 = \sqrt{1+9\cdot 0.5^4} = 1.25 \qquad y_3 = \sqrt{1+9\cdot 0.75^4} \approx 1.962 \qquad y_4 = \sqrt{1+9\cdot 1^4} = 3.162$$

Da blir

$$\begin{aligned} s \approx S_4 &= \frac{0.25}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) \\ &\approx 0.0833(1 + 4.068 + 2.5 + 7.848 + 3.162) \approx 1.578. \end{aligned}$$

(c). Formel for areal ved rotasjon om x-aksen

$$\begin{aligned} S_x &= \int_{x=0}^{x=1} 2\pi y\, ds = \int_0^1 2\pi x^3 \sqrt{1+9x^4}\, dx = \frac{1}{36}\int_{x=0}^{x=1} 2\pi u^{1/2}\, du \\ &= \frac{\pi}{18}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{27}\left[(1+9x^4)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{27}\left((10)^{3/2} - 1^{3/2}\right) = \frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right). \end{aligned}$$

□

Oppgave 3 ....

Vil finne volum av en rund vase ved bruk av kun kalkulator, hyssing og meterstokk. Måler høyden til å være 12 cm. Bruker hyssingen til å måle omkretsen av vasen for hver centimeter oppover. Her er tabell over målingene

5.4	4.5	4.4	5.1	6.3	7.8	9.4	10.8	11.6	11.6	10.8	9.0	6.3

Finn et estimat for volumet av vasen.

Løsning. Her er en kort løsning: Gjennomsnittsomkrets er omtrent 7.9. Det gir radius omtrent 1.26. Som gir volum omtrent $\pi \cdot (1.26)^2 \cdot 2 \approx 59.85$ (cm^3).

La oss se hvordan vi kan bruke Trapesmetoden for å løse dette. Vi tenker at vasen ligger langs x-aksen fra $x = 0$ til $x = 12$. Bruker vi snitt/skive-metoden så er volumet av vasen gitt ved

$$V = \int_0^{12} A(x)\, dx$$

der $A(x)$ er arealet av snitt av vasen. Siden vasen er rund blir snittene sirkler.

Istedetfor areal av snitt oppgir tabellen omkrets av sirkelsnittene. Vi har

$$A = \pi r^2 \quad \text{og} \quad O = 2\pi r$$

så

$$A = \pi\left(\frac{O}{2\pi}\right)^2 = \frac{O^2}{4\pi}$$

Tabellen oppgir $h = 1$ cm. Bruker Trapesmetoden med $y_i = O_i^2/(4\pi)$ og får

$$\begin{aligned} V \approx T_{12} &= h(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{11} + \frac{1}{2}y_{12}) \\ &= 1\left(\frac{5.4^2}{8\pi} + \frac{4.5^2}{4\pi} + \frac{4.4^2}{4\pi} + \frac{5.1^2}{4\pi} + \frac{6.3^2}{4\pi} + \frac{7.8^2}{4\pi} + \frac{9.4^2}{4\pi}\right. \\ &\left. + \frac{10.8^2}{4\pi} + \frac{11.6^2}{4\pi} + \frac{11.6^2}{4\pi} + \frac{10.8^2}{4\pi} + \frac{9.0^2}{4\pi} + \frac{6.3^2}{8\pi}\right) = \frac{872.335}{4\pi} \approx 69(\text{cm}^3). \end{aligned}$$

□

Oppgave 4 . . . .

(a) Finn Taylorpolynomene av grad 3, 5 og 7 sentrert i $x = 0$ til $\sin(x)$.
Plott grafene til $\sin(x)$ og polynomene i ett koordinatsystem der x-verdiene ligger mellom -2π og 2π. (Bruk Matlab/Python.)

(b) Bruk Taylorpolynomet av grad 7 fra forrige delpunkt til å finne en tilnærmet verdi av $\sin(0.4)$.

(c) Gi et estimat for feilen Taylortilnærmingen til $\sin(0.4)$ i forrige delpunkt ved bruke formel for feilen i Kapittel 4.10 (Lagrange remainder). Er verdien i (b) for stor eller for liten?

(d) Funksjonen $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ er kontinuerlig overalt hvis vi bare lar

$$f(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Bruk passende Taylorpolynom for $\sin(x)$ til å finne Taylorpolynomet av grad 6 sentrert i $x = 0$ for $\dfrac{\sin(x)}{x}$.
Bruk dette Taylorpolynomet for å finne en tilnærmet verdi av integralet

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$

Løsning. (a). Vi har

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x) & f(0) &= 0\\
f'(x) &= \cos(x) & f'(0) &= 1\\
f''(x) &= -\sin(x) & f''(0) &= 0\\
f'''(x) &= -\cos(x) & f'''(0) &= -1\\
f^{(4)}(x) &= \sin(x) & f^{(4)}(0) &= 0\\
f^{(5)}(x) &= \cos(x) & f^{(5)}(0) &= 1\\
f^{(6)}(x) &= -\sin(x) & f^{(6)}(0) &= 0\\
f^{(7)}(x) &= -\cos(x) & f^{(7)}(0) &= -1
\end{aligned}$$

Formel for Taylorpolynom av grad N med senter i $x = a$:

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Vi skal ha $a = 0$ så $(x-a)^n = x^n$ og $f^{(n)}(a) = f^{(n)}(0)$. Dermed Taylorpolynom grad 3 blir

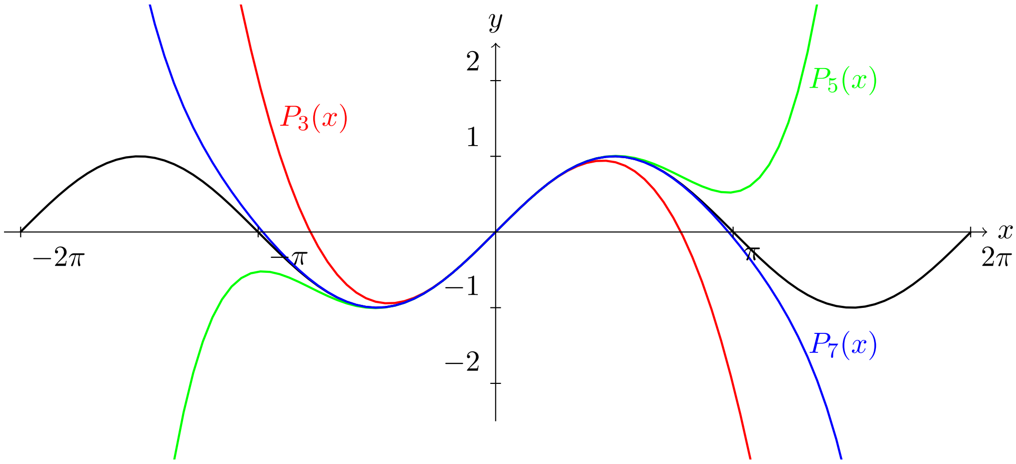
$$P_3(x) = 0 + x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{3!},$$

mens Taylorpolynom grad 5 blir

$$P_5(x) = P_3(x) + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

og Taylorpolynom grad 7 blir

$$P_7(x) = P_5(x) + \frac{0}{6!}x^6 + \frac{1}{7!}x^7 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.$$



(b). Plugger inn $x = 0.4$ i $P_7(x)$:

$$\sin(0.4) \approx P_7(x) = 0.4 - \frac{0.4^3}{3!} + \frac{0.4^5}{5!} - \frac{0.4^7}{7!} \approx 0.389418341587302.$$

(c). Fra Kapittel 4.10 har vi at

$$f(0.4) = \sin(0.4) = P_7(0.4) + E_7(0.4) = P_7(0.4) + \frac{f^{(8)}(s)}{8!}0.4^8$$

der s er et tall mellom 0 og 0.4. Fortsetter vi derivering over finner vi at $f^{(8)}(s) = \sin(s)$. Siden $\sin(x) \geq 0$ på $[0,\pi]$ må $E_7(0.4) \geq 0$. Dette betyr at $P_7(0.4)$ gir oss en for lav verdi. Vi kan gi følgende anslag for feilen:

$$0 \leq E_7(0.4) = \frac{\sin(s)}{8!}0.4^8 \leq \frac{1}{8!}0.4^8 \approx 1.63 \cdot 10^{-8}.$$

Forøvrig: Siden $1.63 \cdot 10^{-8} < 0.5 \cdot 10^{-7}$ er minst 7 desimaler korrekte når vi sier

$$\sin(0.4) \approx 0.389418341587302.$$

(Sammenlikn gjerne med hva kalkulator/pc sier at $\sin(0.4)$ er.)

(d). Fra (a) har vi

$$\sin(x) \approx P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

Derfor blir

$$\frac{\sin(x)}{x} \approx \frac{1}{x}P_7(x) = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!}.$$

Nå kan vi regne:

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}\,dx \approx \int_0^\pi 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!}\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!}\right]_0^\pi$$
$$= \pi - \frac{\pi^3}{3\cdot 3!} + \frac{\pi^5}{5\cdot 5!} - \frac{\pi^7}{7\cdot 7!} \approx 1.84344.$$

Kommentar om nøyaktiget i dette svaret: Dette er en delsum av ei alternerende rekke, så

$$\left|\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}\,dx - \left(\pi - \frac{\pi^3}{3\cdot 3!} + \frac{\pi^5}{5\cdot 5!} - \frac{\pi^7}{7\cdot 7!}\right)\right| \leq \frac{\pi^9}{9\cdot 9!} \leq 0.0092.$$

□