

Suvremena Filozofija (6)

Filozofija matematike:

G. Cantor

G. Frege

D. Hilbert

B. Russell

R. Carnap

L. E. J. Brouwer

K. Gödel

G. Cantor (1845-1918)

- Logičar
- Otac teorije skupova
 - Skup kolekcija objekata gdje za svaki predmet znamo je li unutra ili nije
- Cantorov dijagonalni argument

Cantorov dijagonalni argument

3.14159...
1.41421...
1.73205...
2.23606...
2.71828...
0.14285...



3.43625...



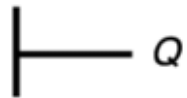
2.32514...

G. Frege (1848-1925)

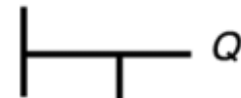
- Filozof i logičar
- Početak filozofije jezika
 - Smisao i značenje
- Prvi aksiomatizirani sustav logike
- Prvi oblik dedukcije
- Fregeov peti postulat: ako neki predmeti zadovoljavaju neko svojstvo, onda oni tvore skup

Begriffsschrift, notacija

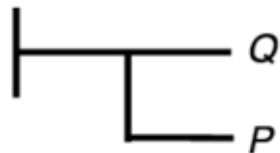
(1) \underline{Q}



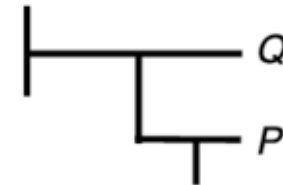
(2) $\underline{\neg Q}$



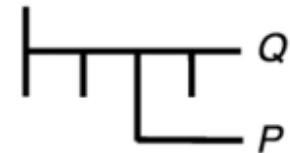
(3) $\underline{P \Rightarrow Q}$ or $\underline{\neg(P \& \neg Q)}$



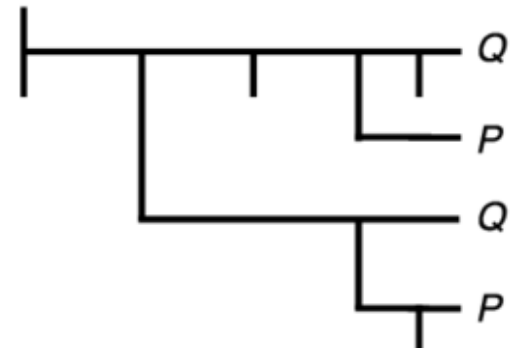
(4) $\underline{\neg P \Rightarrow Q}$ or $\underline{P \vee Q}$



(5) $\underline{\neg(P \Rightarrow \neg Q)}$ or $\underline{P \& Q}$



(6) $\underline{P \Leftrightarrow Q}$



D. Hilbert (1862-1943)

- Matematičar i logičar
- 23 problema
 - Prvi, drugi, deseti (**sami istražite kako točno glase, morate ih znati specificirati**)
- Hilbertov program
 - Formalizam u filozofiji matematike

Hilbertov program/formalizam

- Samo srž matematike (npr. Elementarna aritmetika) ima značenje
- Sve ostalo je samo simbolička nadogradnja definicijama
 - Idealno, ovo bi se trebalo sve izdefinirati i podokazivati
- Kako reducirati ostatak na jezgru?
 - Reducirati **svaki** idealizirani dokaz konačne tvrdnje na konačan dokaz te tvrdnje
 - Konačnim metodama (npr. Dedukcija) dokazati da je idealna nadogradnja sintaktički konzistentna (nema kontradikcije)
 - Budući nema značenja, ne možemo dokazati da je sintaktički korektna

B. Russell (1872-1970)

- Matematičar, logičar, filozof
- 1950. Nobelova nagrada za književnost
- Logicomix. **Pročitajte obvezno!**
- Principia Mathematica (s A. N. Whiteheadom)
 - Logicizam u filozofiji matematike
- Jedan od osnivača analitičke filozofije
 - On Denoting (1905)
 - Naš sadašnji kralj je mršav
 - Umjesto **Mk**, ide $\exists !x(Kx \ \& \ Mx) := \exists x(Kx \ \& \ \forall y(Ky \rightarrow y=x) \ \& \ Mx)$
 - Singularni termini su određeni opisi
- Russellov paradoks
 - **C** = {**x** | **x** \notin **x**}
 - **C** nije skup

R. Carnap (1891-1970)

- Fizičar i filozof
- Jezik
- Bečki krug
 - Metafizika kao pseudoznanost
- Verifikacionizam
- "Logička sintaksa jezika" (1934)
 - Jezik ima deduktivnu strukturu u gramatici
- Emigrirao 1938, posredstvom Quinea, Uni Chicago
 - Djed Al-ja

L. E. J. Brouwer (1881-1966)

- Matematičar, otac topologije
- Intuicionizam:
 - matematika je formalni konstrukt, a ne objektivna istina
 - Zbog toga jedino konstruktivne metode imaju smisla
- Brouwer-Hilbertova svađa:
 - Hilbert 1920. izbacio Brouwera iz uredništva *Mathematische Annalen* jer je Brouwer opasan za matematiku
 - Brouwer postavio Hilbertu jednostavno pitanje: kako odabrati aksiome? Zašto uzeti $A \vee \neg A$?

K. Gödel (1906-1978)

- Matematičar i logičar
- Član Bečkog kruga
- Potpunost logike prvog reda (1930):
 - "sintaksa" i "semantika"
 - Korektnost: Ako je F dokaziva onda je istinita
 - Potpunost: Ako je F istinita onda je dokaziva

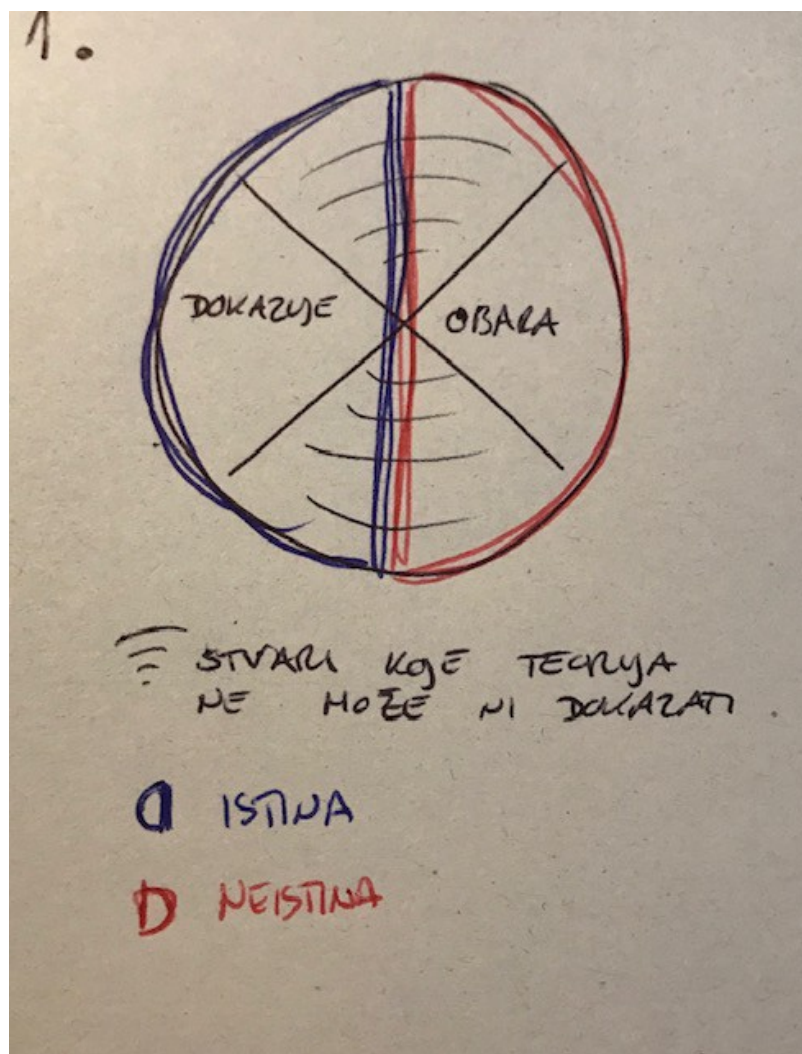
Nepotpunost aritmetike prvog reda (1931)

- Aritmetika prvog reda:
 - FOL
 - Aksiomi za $+$, $*$ i $<$
 - Aksiom indukcije
- Teoremi nepotpunosti
 - Prvi: ako je neka teorija dovoljno jaka da izrazi Robinsonovu aritmetiku i ima rekurzivnu listu aksioma, onda je ona ili inkonzistentna ili nepotpuna
 - Drugi: ako je neka teorija dovoljno jaka da izrazi Peanovu aritmetiku, onda ona sama ne može dokazati svoju konzistentnost

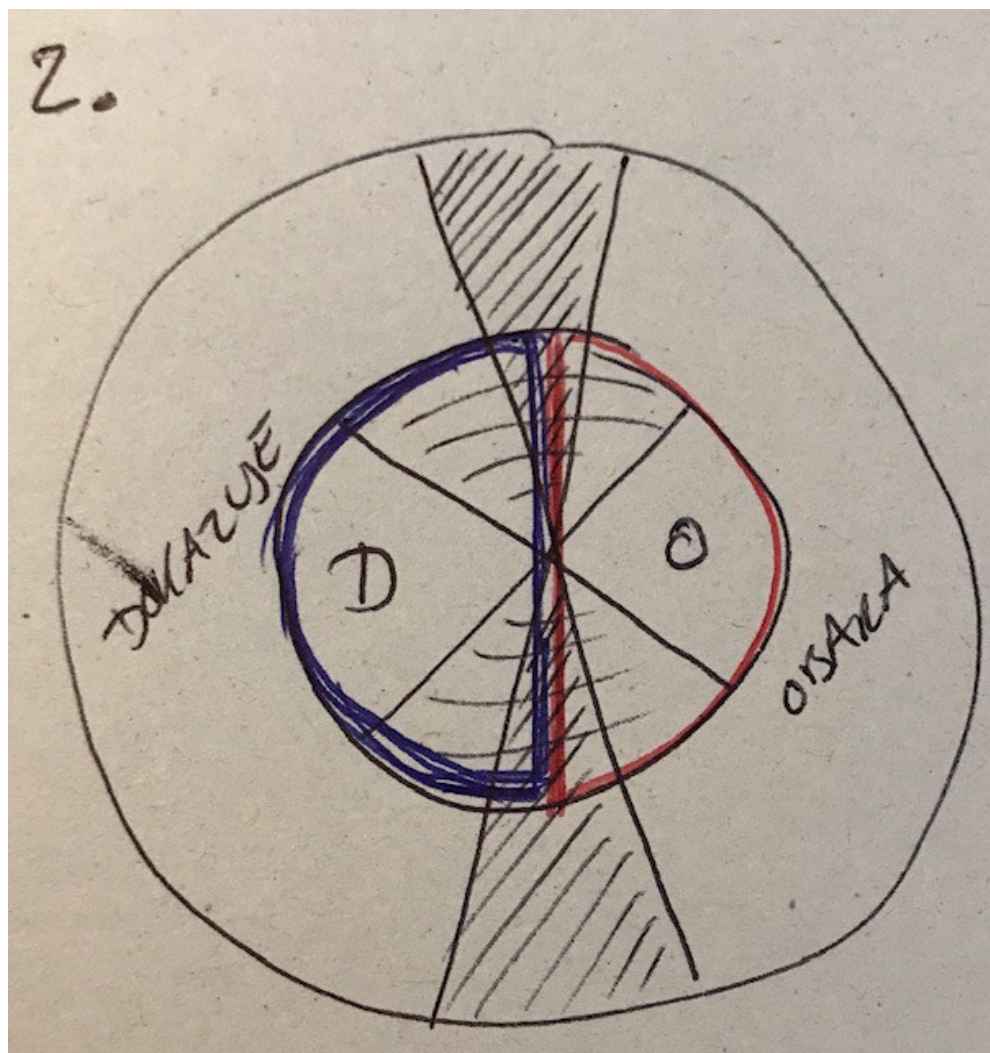
Hilbertov program (ponavljanje)

- Samo srž matematike (npr. Elementarna aritmetika) ima značenje
- Sve ostalo je samo simbolička nadogradnja definicijama
 - Idealno, ovo bi se trebalo sve izdefinirati i podokazivati
- Kako reducirati ostatak na jezgru?
 - (1) Reducirati **svaki** idealizirani dokaz konačne tvrdnje na konačan dokaz te tvrdnje
 - (2) Konačnim metodama (npr. Dedukcija) dokazati da je idealna nadogradnja sintaktički konzistentna (nema kontradikcije)
(Budući nema značenja, ne možemo dokazati da je sintaktički korektna)
- **Garantira li ovo korektnost konačne jezgre?**

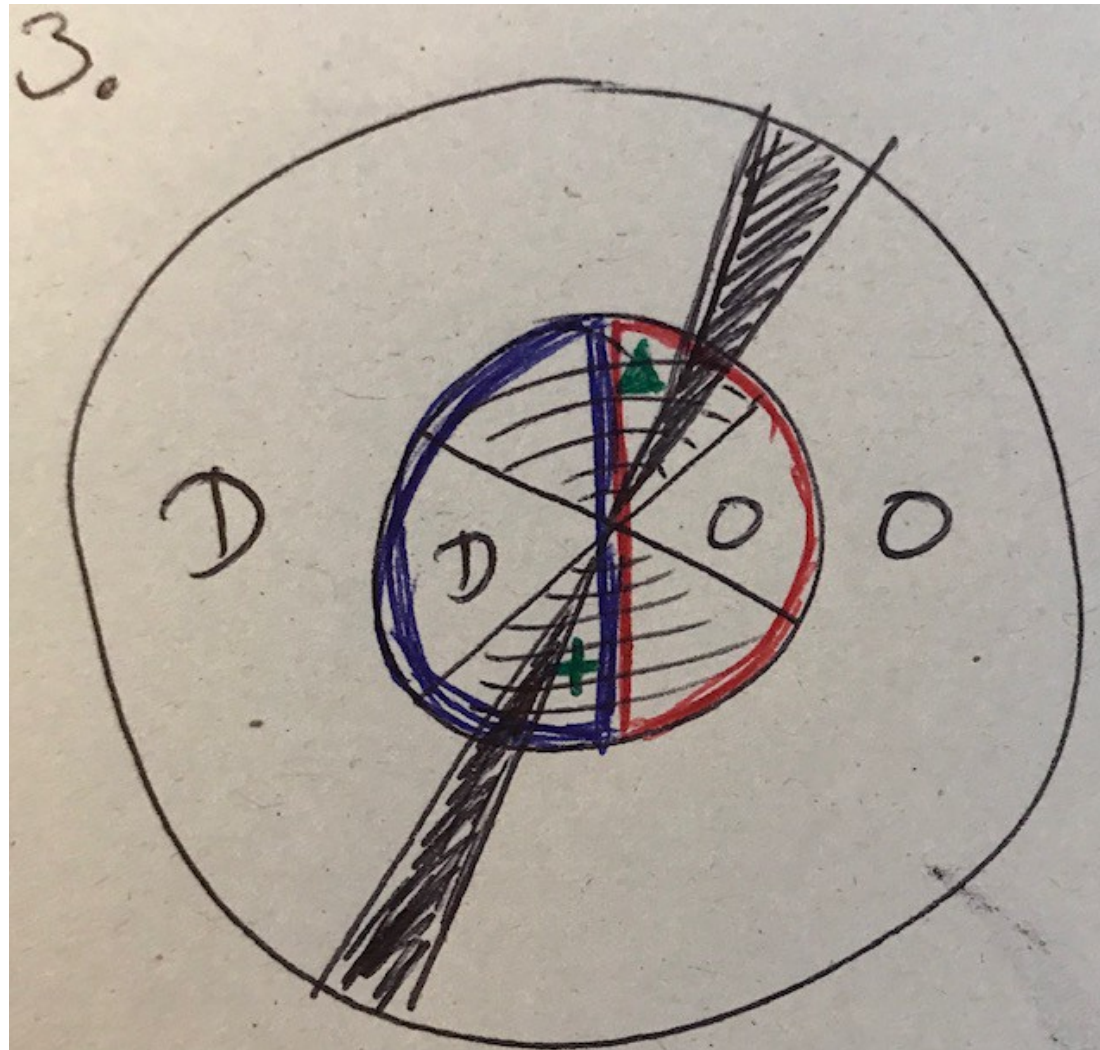
Nepotpuna i korektna teorija



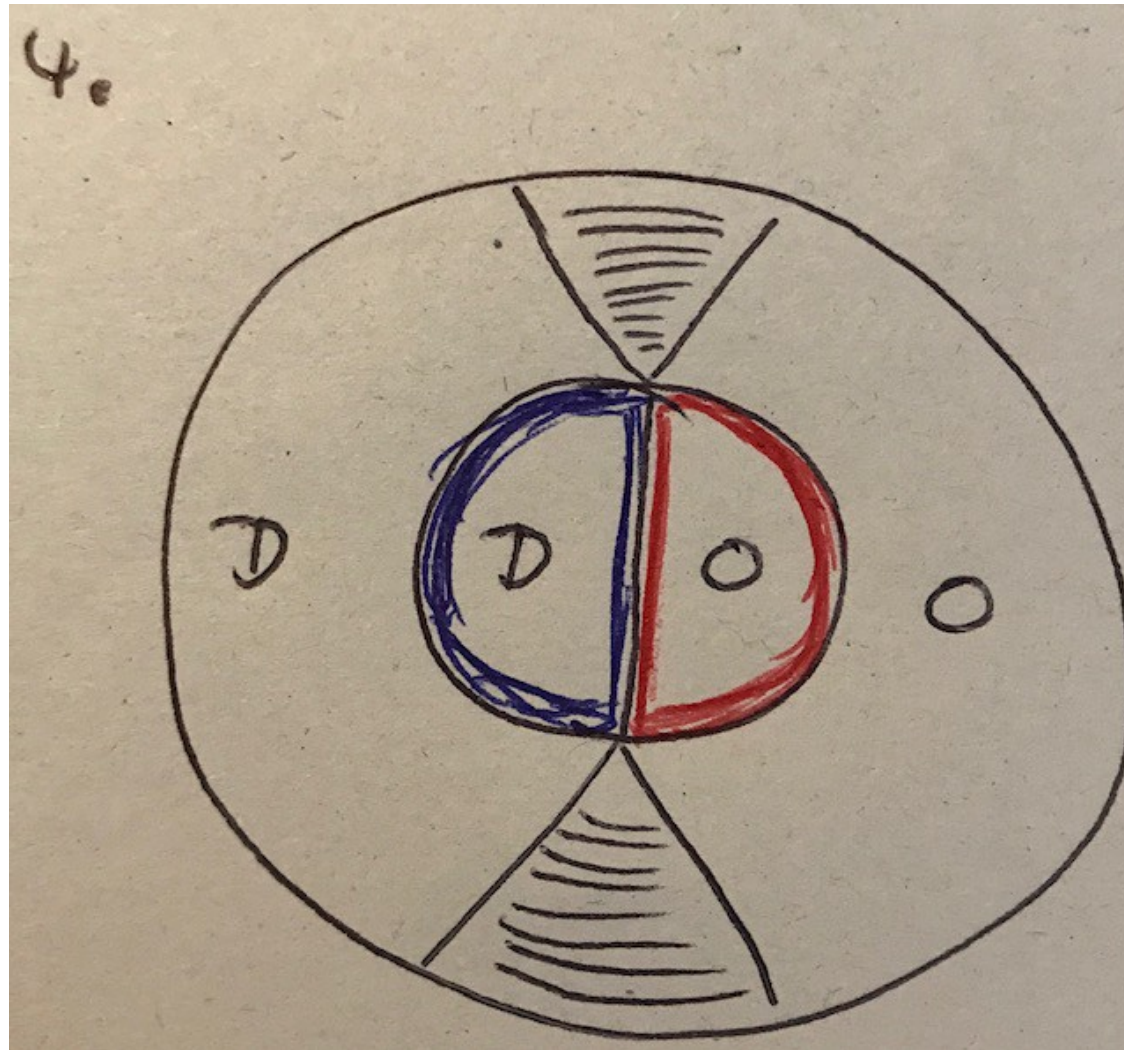
Korektna i konzistentna ekstenzija



Ali! Sama konzistetnost ekstenzije
ne garantira korektnost!!!



Korektnost je garantirana samo ako je konačna jezgra već korektna i potpuna!



Ako je jezgra bila već korektna i potpuna, zašto ekstenzija?

- Hilbert:
 - Brže i lakše dokazivanje
- Prvi Gödel:
 - Konačna jezgra je uvijek ili nepotpuna i nekonzistentna
 - Zato (2) sa zelenog slidea propada i ostaje jedino (1)
 - Time je uništen Hilbertov program
- Drugi Gödel je nebitan za Hilbertov program

