Problema de Otimização na Industria

Sérgio Kardec Soares Batista

30 de setembro de 2025

Enunciado

Produzir um cilindro de volume fixo $V = 900\ \text{cm}^3$. O custo do material da *lateral* do cilindro (por área) é o custo de referência: c_ℓ. O material da *base* custa $3c_\ell$ por área e o material do *topo* custa $2c_\ell$ por área. Dá-se $c_\ell = 140\,\$/\text{m}^2$. A altura do cilindro não pode exceder $H_{\max} = 20\,\text{cm}$. Objetivo: minimizar o custo de produção por unidade.

Modelagem

Seja $r > 0$ o raio (em cm) e $h > 0$ a altura (em cm). O volume é

$$V = \pi r^2 h = 900\ \text{cm}^3.$$

Áreas:

$$A_\ell = 2\pi r h, \qquad A_{\text{base}} = \pi r^2, \qquad A_{\text{top}} = \pi r^2.$$

Custos por área em \$/cm^2: converter c_ℓ de \$/m^2 para \$/cm^2 ($1\ \text{m}^2 = 10^4\ \text{cm}^2$):

$$\tilde{c}_\ell = \frac{140}{10^4} = \ 0.014\ \$/\text{cm}^2, \quad \tilde{c}_{\text{base}} = 3\tilde{c}_\ell, \quad \tilde{c}_{\text{top}} = 2\tilde{c}_\ell.$$

Custo total:

$$C(r,h) = \tilde{c}_\ell(2\pi r h) + \tilde{c}_{\text{base}}(\pi r^2) + \tilde{c}_{\text{top}}(\pi r^2) = \tilde{c}_\ell\big(2\pi r h + 5\pi r^2\big).$$

Problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min_{r>0,\ h>0} \quad & C(r,h) \\ \text{sujeito a} \quad & g_1(r,h) := \pi r^2 h - V = 0 \quad \text{(igualdade)}, \\ & g_2(r,h) := h - H_{\max} \le 0 \quad \text{(inequação)}. \end{aligned}$$

Aplicação das condições KKT

Formamos o Lagrangiano com multiplicador $\lambda \in \mathbb{R}$ para a igualdade e multiplicador de desigualdade $\mu \ge 0$:

$$\mathcal{L}(r,h,\lambda,\mu) = \tilde{c}_\ell\big(2\pi r h + 5\pi r^2\big) + \lambda(\pi r^2 h - V) + \mu(h - H_{\max}).$$

Estacionaridade (gradiente nulo):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \tilde{c}_\ell(2\pi h + 10\pi r) + \lambda(2\pi r h) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} = \tilde{c}_\ell(2\pi r) + \lambda(\pi r^2) + \mu = 0.$$

Complementaridade: $\mu \geq 0,\ \mu(h - H_{\max}) = 0$. E claro $\pi r^2 h = V$.

Caso 1: restrição de altura inativa ($\mu = 0$)

Com $\mu = 0$, das equações:

$$\tilde{c}_\ell(2\pi r) + \lambda(\pi r^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{2\tilde{c}_\ell}{r}.$$

Substituindo em $\partial\mathcal{L}/\partial r = 0$:

$$\tilde{c}_\ell(2\pi h + 10\pi r) + \Big(-\frac{2\tilde{c}_\ell}{r}\Big)(2\pi r h) = 0.$$

Simplificando (dividindo por $2\pi\tilde{c}_\ell$):

$$h + 5r - \frac{2h}{r}r = h + 5r - 2h = 5r - h = 0.$$

Logo $h = 5r$. Usando a restrição de volume:

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2(5r) = 5\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{V}{5\pi}.$$

Portanto

$$r^\star = \Big(\frac{V}{5\pi}\Big)^{1/3}, \qquad h^\star = 5r^\star.$$

Caso 2: restrição de altura ativa ($\mu > 0$ e $h = H_{\max}$)

Se a solução do caso 1 violar $h \leq H_{\max}$, então $h = H_{\max}$ e r é dado por

$$r = \sqrt{\frac{V}{\pi H_{\max}}}.$$

Compara-se o custo e escolhe-se a melhor solução viável.

Cálculo numérico

Parâmetros: $V = 900$ cm^3, $\tilde{c}_\ell = 0.014$ \$/cm^2, $H_{\max} = 20$ cm.
Solução do caso 1:

$$r^\star = \Big(\frac{900}{5\pi}\Big)^{1/3} \approx 3.8551 \text{ cm},$$

$$h^\star = 5r^\star \approx 19.2757 \text{ cm},$$

que satisfaz $h^\star \leq 20$, logo a restrição de altura está inativa.

Cálculo do custo mínimo:

$$C^\star = \tilde{c}_\ell\Big(\frac{2V}{r^\star} + 5\pi r^{\star 2}\Big) \approx \$\,9.8051 \text{ por unidade}.$$

Conclusão

A solução ótima que minimiza o custo para produzir um cilindro de 900 cm^3 é:

$$\boxed{r^\star \approx 3.855\text{ cm}, \qquad h^\star \approx 19.276\text{ cm}, \qquad C^\star \approx \$\,9.81.}$$

A restrição de altura $h \leq 20$ cm não se tornou ativa. Caso a altura ótima calculada excedesse 20 cm, a condição KKT indicaria $\mu > 0$ e a solução passaria a ser $h = 20$ cm com $r = \sqrt{V/(\pi H_{\max})}$.

Referências

[1] SOLODOV, Mikhail. *Otimização 1.* [IMPA, Rio de Janeiro - RJ]: [Editora SBM], [2005].

[2] SOLODOV, Mikhail. *Otimização 2.* [IMPA, Rio de Janeiro - RJ]: [Editora SBM], [2005].