Алгоритмы и структуры данных.
Семинар 7
Григорьев Дмитрий БПМИ-163

Задача 1.
Посмотрим сколько раз изменяется каждый бит "длинного"числа n. Первый бит изменится ровно n раз. Второй бит изменится $\frac{n}{2}$ раз, так как второй бит будет изменяться после полного всех перестановок длины 1, а их всего $2^1 = 2$, третий бит изменится $\frac{n}{4}$ раз, так как перед этим битом есть последовательность длины 2, т. е. бит будет изменяться каждые 4 инкримента. Итак, получается, что бит, стоящий в позиции l, будет меняться $\frac{n}{2^l}$ раз.
После n инкрементов будет выполнено $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + ...$ раз. Эта последовательность стремится к $2n$. Получается что фактическая стоимость последовательных операций инкремента длинного двоичного числа это $\mathcal{O}(n)$.

Задача 2.

$Node * last = list.begin()$
$Node * next = last- > next$
$Node * tmp$
$last- > next = NULL;$
$while(next! = NULL)$
  $tmp = next- > next$
  $next- > next = last$
  $last = next$
  $next = tmp$

Задача 3.
Пусть существует такая шаблонная структура данных с операциями вставки, поиска и удаления минимума за $\mathcal{O}(1)$. Мы добавим в нее все элементы за $n \cdot \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(n)$. Мы можем удалять и искать минимум за $\mathcal{O}(1)$. Тогда мы можем отсортировать элементы за $\mathcal{O}(n)$, найдя минимум запомнить его и удалить.
Но мы знаем, что по Теореме о нижней оценке для сортировки сравнениями: в худшем случае любой алгоритм сортировки сравнениями выполняет $\Omega(n \log n)$ сравнений, где n — число сортируемых элементов.
Получается противоречие в том, что наша структура может отсортировать n элементов за $\mathcal{O}(n)$. Значит такой структуры не существует.

ч.т.д.

Задача 4.
Пусть существует такая шаблонная структура данных с операциями вставки, поиска медианы за $\mathcal{O}(1)$. Мы добавим в нее все элементы за $n \cdot \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(n)$. Мы можем искать медиану за $\mathcal{O}(1)$. Тогда мы можем отсортировать элементы за $\mathcal{O}(n)$ следующим образом:
Будем вставлять две $-\infty$ и каждый раз искать и запоминать новую медиану до тех пор пока новая медиана не будет равна $-\infty$. Так мы упорядочим элементы, меньшие первоначальной медианы. Теперь надо вставлять по 2 $+\infty$ столько же раз, сколько мы вставляли $-\infty$. И далее нужно опять вставлять по 2 $+\infty$ и каждый раз искать и запоминать медиану до тех пор пока медиана не будет равна $+\infty$.
Таким образом мы получим отсортированный массив за $\mathcal{O}(n)$.
Получается противоречие в том, что наша структура может отсортировать n элементов за $\mathcal{O}(n)$. Значит такой структуры не существует.

ч.т.д.