ИДЗ №4
Григорьев Дмитрий БПМИ–163
Вариант 3

Задание 1.
$e_1 = (0, 3, 0)$
$e_2 = (-3, 0, 2)$
$e_3 = (2, -1, 3)$
$e'_1 = (5, 2, 1)$
$e'_2 = (-1, -4, 5)$
$e'_3 = (-4, 5, -6)$,

и вектор v, имеющий в базисе e координаты $(-2, 1, 4)$.

а) **Нужно найти матрицу перехода от базиса e к базису e'.**
Пусть матрица перехода из стандартного базиса в e – это T_1, а T_2 - это матрица перехода из стандар тного базиса в e'.
Тогда матрица перехода из e в e' будет равна $T = T_1^{-1} \cdot T_2$.
$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $T_2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$
Терперь найдем T_1^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{III - II \cdot \frac{-2}{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{III = III / \frac{13}{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{III = III / \frac{13}{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{13} & 0 & \frac{3}{13} \end{array}\right) \xrightarrow{II - III \cdot 2}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & \frac{9}{13} & 0 & \frac{-6}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{13} & 0 & \frac{3}{13} \end{array}\right) \xrightarrow{I - III \cdot -1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & \frac{2}{13} & 1 & \frac{3}{13} \\ 0 & -3 & 0 & \frac{9}{13} & 0 & \frac{-6}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{13} & 0 & \frac{3}{13} \end{array}\right) \xrightarrow{II = II / -3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & \frac{2}{13} & 1 & \frac{3}{13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{13} & 0 & \frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{13} & 0 & \frac{3}{13} \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{I = I/3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{39} & \frac{1}{3} & \frac{1}{13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{13} & 0 & \frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{13} & 0 & \frac{3}{13} \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{39} & \frac{1}{3} & \frac{1}{13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{13} & 0 & \frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{13} & 0 & \frac{3}{13} \end{array}\right)$$

Получили, что $T_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{39} & \frac{1}{3} & \frac{1}{13} \\ \frac{-3}{13} & 0 & \frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & 0 & \frac{3}{13} \end{pmatrix}$, тогда $T = T_1^{-1} \cdot T_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{39} & \frac{1}{3} & \frac{1}{13} \\ \frac{-3}{13} & 0 & \frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & 0 & \frac{3}{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

б) **Нужно найти координаты вектора v в базисе e'.**
Для начала запишем как находится вектор v через v': $v = T \cdot v'$, тогда $v' = T^{-1} \cdot v$.
Нужно найти T^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II-I\cdot -1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{III-I\cdot 1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{II \leftrightarrow III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{III=III/1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{II-III\cdot -3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{I-III\cdot 1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{II=II/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I-II\cdot -1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Получилось, что $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, тогда $v' = T^{-1} \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ответ: а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

Задание 2.

$a_1 = (3, 1, -1, -2, 2)$
$a_2 = (-3, 2, -2, 1, 1)$
$a_3 = (-1, -2, 4, 1, 1)$
$a_4 = (-1, 1, -1, 2, 1)$
$a_5 = (-4, 3, -3, 1, 2)$
$b_1 = (8, -12, 8)$
$b_2 = (-12, 13, 18)$
$b_3 = (2, 3, -34)$
$b_4 = (-8, 8, 16)$

$b_5 = (-16, 17, 26)$

а) **Нужно доказать, что существует единственное линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, переводящее векторы a в соответствующие b.**

Мы знаем, что для некоторого набора векторов $w_1, ..., w_n \in W$ существует единственное линейное отображение $\varphi : V \to W$ такое, что $\varphi(e_1) = w_1, ..., \varphi(e_n) = w_n$. Поэтому для того, чтобы линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ переводило векторы a в соответствующие b, нужно проверить, что векторы a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 являются базисом в $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-I\cdot -1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-I\cdot\frac{-1}{3}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{-5}{3} & \frac{11}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{IV-I\cdot\frac{-1}{3}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{-5}{3} & \frac{11}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{-4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ -4 & 3 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{V-I\cdot\frac{-4}{3}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{-5}{3} & \frac{11}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{-4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{-13}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{14}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{III-II\cdot\frac{-5}{9}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{-2}{9} & \frac{10}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{-4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{-13}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{14}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{IV-II\cdot\frac{4}{9}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{-2}{9} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{-13}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{14}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{V-II\cdot\frac{13}{9}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{-2}{9} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{V-IV\cdot\frac{-1}{8}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{-2}{9} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

Видно, что эти векторы линейно независимы, следовательно они являются базисом в $\mathbb{R}^5$.

ч.т.д.

б) **Нужно найти базис ядра и базис образа этого линейного отображения**

Пусть некоторый вектор $v \in Ker\varphi$. Мы можем расписать v через базис:
$v = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + x_3 \cdot a_3 + x_4 \cdot a_4 + x_5 \cdot a_5$.
Распишем $\varphi(v) = x_1 \cdot b_1 + x_2 \cdot b_2 + x_3 \cdot b_3 + x_4 \cdot b_4 + x_5 \cdot b_5$. $\varphi(v) = 0$, ведь $v \in Ker\varphi$.
Найдем ФСР этой системы:

$$\begin{pmatrix} 8 & -12 & 2 & -8 & -16 \\ -12 & 13 & 3 & 8 & 17 \\ 8 & 18 & -34 & 16 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-I\cdot\frac{-3}{2}} \begin{pmatrix} 8 & -12 & 2 & -8 & -16 \\ 0 & -5 & 6 & -4 & -7 \\ 8 & 18 & -34 & 16 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-I\cdot 1} \begin{pmatrix} 8 & -12 & 2 & -8 \\ 0 & -5 & 6 & -4 \\ 0 & 30 & -36 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III-II\cdot -6} \begin{pmatrix} 8 & -12 & 2 & -8 & -16 \\ 0 & -5 & 6 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II=II/-5} \begin{pmatrix} 8 & -12 & 2 & -8 & -16 \\ 0 & 1 & \frac{-6}{5} & \frac{4}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I-II\cdot -12} \begin{pmatrix} 8 & 0 & \frac{-62}{5} & \frac{8}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-6}{5} & \frac{4}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{I=I/8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-31}{20} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & \frac{-6}{5} & \frac{4}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I=I\cdot 20} \begin{pmatrix} 20 & 0 & -31 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-6}{5} & \frac{4}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II=II\cdot 5} \begin{pmatrix} 20 & 0 & -31 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -6 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Имеем

$$\begin{cases} 20x_1 - 31x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 5x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0 \end{cases}$$

Свободные переменные – x_3, x_4, x_5, тогда ФСР выглядит так:

$$\{ \ x_3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{31}{20} \\ \frac{6}{5} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{5} \\ \frac{-4}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{10} \\ \frac{-7}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \}$$

Тогда базис ядра будет:

$v_1 = \frac{31}{20}a_1 + \frac{6}{5}a_2 + a_3$

$v_2 = \frac{-1}{5}a_1 - \frac{4}{5}a_2 + a_4$

$v_3 = \frac{-1}{10}a_1 - \frac{7}{5}a_2 + a_5$

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{39}{20} \\ \frac{1}{20} \\ \frac{-9}{10} \\ \frac{53}{10} \end{pmatrix} \ v_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} \\ \frac{-1}{5} \end{pmatrix} \ v_3 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{10} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{-1}{10} \\ \frac{-1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Размерность образа линейного отображения:

$dim Im\varphi = dim\mathbb{R}^5 - dim Ker\varphi = 2$

Найдем базис b_1, b_2, b_3, b_4, b_5:

$$\begin{pmatrix} 8 & -12 & 8 \\ -13 & 13 & 18 \\ 2 & 3 & -34 \\ -8 & 8 & 16 \\ -16 & 17 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-I\cdot\frac{-3}{2}} \begin{pmatrix} 8 & -12 & 8 \\ 0 & -5 & 30 \\ 2 & 3 & -34 \\ -8 & 8 & 16 \\ -16 & 17 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-I\cdot\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 8 & -12 & 8 \\ 0 & -5 & 30 \\ 0 & 6 & -36 \\ -8 & 8 & 16 \\ -16 & 17 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV-I\cdot -1}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -12 & 8 \\ 0 & -5 & 30 \\ 0 & 6 & -36 \\ 0 & -4 & 24 \\ -16 & 17 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{V-I\cdot -2} \begin{pmatrix} 8 & -12 & 8 \\ 0 & -5 & 30 \\ 0 & 6 & -36 \\ 0 & -4 & 24 \\ 0 & -7 & 42 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-II\cdot\frac{-6}{5}} \begin{pmatrix} 8 & -12 & 8 \\ 0 & -5 & 30 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 24 \\ 0 & -7 & 42 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV-II\cdot\frac{4}{5}} \begin{pmatrix} 8 & -12 & 8 \\ 0 & -5 & 30 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 42 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{V-II\cdot\frac{7}{5}}\begin{pmatrix}8 & -12 & 8\\ 0 & -5 & 30\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Получилось, что базис образа линейного отображения равен:

$$v_1' = \begin{pmatrix}8\\ -12\\ 8\end{pmatrix}\ v_2' = \begin{pmatrix}0\\ -5\\ 30\end{pmatrix}.$$

Задание 3.

Найдем ФСР этой системы:

$$\begin{pmatrix}6 & 18 & 25 & -13\\ 2 & -14 & -20 & 14\\ 0 & 12 & 17 & -11\end{pmatrix}\xrightarrow{II-I\cdot\frac{1}{3}}\begin{pmatrix}6 & 18 & 25 & -13\\ 0 & -20 & \frac{-85}{3} & \frac{55}{3}\\ 0 & 12 & 17 & -11\end{pmatrix}\xrightarrow{III-II\cdot\frac{-3}{5}}\begin{pmatrix}6 & 18 & 25 & -13\\ 0 & -20 & \frac{-85}{3} & \frac{55}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{II=II/-20}\begin{pmatrix}6 & 18 & 25 & -13\\ 0 & 1 & \frac{17}{12} & \frac{-11}{12}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{I-II\cdot 18}\begin{pmatrix}6 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{7}{2}\\ 0 & 1 & \frac{17}{12} & \frac{-11}{12}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{I=I/6}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{-1}{12} & \frac{7}{12}\\ 0 & 1 & \frac{17}{12} & \frac{-11}{12}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{I=I\cdot 12}$$

$$\begin{pmatrix}12 & 0 & -1 & 7\\ 0 & 1 & \frac{17}{12} & \frac{-11}{12}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{II=II\cdot 12}\begin{pmatrix}12 & 0 & -1 & 7\\ 0 & 12 & 17 & -11\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Свободные переменные – x_3, x_4, тогда ФСР выглядит так:

$$\{\ x_3\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{12}\\ \frac{-17}{12}\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + x_4\cdot\begin{pmatrix}\frac{-7}{12}\\ \frac{11}{12}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\ \}$$

Теперь дополним базис ядра до базиса в $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{1}{12} & \frac{-17}{12} & 1 & 0\\ \frac{-7}{12} & \frac{11}{12} & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Теперь найдем $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4)$:

$$\varphi(e_1) = \begin{pmatrix}25\\ -20\\ 17\end{pmatrix}\ \varphi(e_2) = \begin{pmatrix}13\\ 14\\ -11\end{pmatrix}\ \varphi(e_3) = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\ \varphi(e_4) = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Теперь осталось дополнить базис образа до базиса $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{pmatrix} 25 & -20 & 17 \\ 13 & 14 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Выразим C_1 и C_2:
$$C_1 = \begin{pmatrix} 25 & 13 & 0 \\ -20 & 14 & 0 \\ 17 & -11 & 1 \end{pmatrix} \; C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{-7}{12} \\ 0 & 0 & \frac{-17}{12} & \frac{11}{12} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$D = C_1^{-1} \cdot A \cdot C_2$
$A = C_1 \cdot D \cdot C_2^{-1}$

Задание 4.
$Q(x_1, x_2, x_3) = -9x_1^2 - 13x_2^2 - 7x_3^2 + 18x_1x_2 + 12x_1x_3 - 4x_2x_3 = -9(x_1^2 - 2x_1(x_2 + \frac{2}{3}x_3) + (x_2 + \frac{2}{3}x_3)^2) + 9(x_2 + \frac{2}{3}x_3)^2 - 13x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_2x_3 = -9(x_1 - x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 + 9x_2^2 + 12x_2x_3 + 4x_3^2 - 13x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_2x_3 = -9(x_1 - x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 - 4x_2^2 + 8x_2x_3 - 3x_3^2 = -9(x_1 - x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 - 4(x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + x_3^2 = -9(x_1 - x_2 - \frac{2}{3}x_3)^2 - 4(x_2 - x_3)^2 + x_3^2$
Замена:
$y_1 = 3(x_1 - x_2 - \frac{2}{3}x_3)$
$y_2 = 2(x_2 - x_3)$
$y_3 = x_3$
А теперь выразим старые координаты через новые:
$x_3 = y_3$
$x_2 = \frac{1}{2}y_2 + 2y_3$
$x_1 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{8}{3}y_3$