Домашнне задание №6
Григорьев Дмитрий БПМИ–163

Задание 1.
Решение:
$f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2$
$g(x) = 6x^3 + 4x^2 - 5x + 1$
Воспользуемся алгоритмом Евклида.
Сначала разложим многочлены на множители:
$f(x) = (x-1)(2x^3 - 2x^2 - 5x + 2) = (x-1)(x-2)(2x^2 + 2x - 1)$
$g(x) = (2x^2 + 2x - 1)(3x - 1)$
Так как $(2x^2+2x-1)$ – делитель $f(x)$ и $g(x)$, тогда он будет содержаться в НОД$(f(x), g(x))$.
Теперь найдем НОД $(x-1)(x-2)$ и $(3x-1)$:
Если разделим столбиком $(x-1)(x-2)$ на $(3x-1)$, то получим:
$(x-1)(x-2) = (3x-1)(\frac{1}{3}x - \frac{8}{9}) + \frac{10}{9}$
Если разделим столбиком $(3x-1)$ на $\frac{10}{9}$, то получим:
$(3x-1) = \frac{10}{9}(\frac{27}{10}x - \frac{9}{10})$

Получили, что НОД$(f(x), g(x)) = \frac{10}{9}(2x^2 + 2x - 1)$
Рассмотрим первое деление столбиком. Если домножим его на $(2x^2 + 2x - 1)$, то получим:
$f(x) = g(x)(\frac{1}{3}x - \frac{8}{9}) +$ НОД$(f(x), g(x)) \Rightarrow$ НОД$(f(x), g(x) = f(x) + g(x)(-\frac{1}{3}x + \frac{8}{9})$

Задание 2.
Решение:
$x^6 + x^3 - 12 = (x^3+4)(x^3-3) = (x + \sqrt[3]{4})(x^2 - \sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{16})(x - \sqrt[3]{3})(x^2 + \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{9})$
Это разложение в $\mathbb{R}[x]$.
Тепрь разложим в $\mathbb{C}[x]$:

1) $x^2 - \sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{16} = 0$
$D = (\sqrt[3]{4})^2 - 4\sqrt[3]{16} = -3\sqrt[3]{16}$
$x = \frac{\sqrt[3]{4} \pm \sqrt{-3\sqrt[3]{16}}}{2} = \frac{\sqrt[3]{4} \pm \sqrt{3}i\sqrt[3]{4}}{2} = \frac{\sqrt[3]{4}(1 \pm \sqrt{3}i)}{2}$

2) $x^2 + \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{9} = 0$
$D = (\sqrt[3]{3})^2 - 4\sqrt[3]{9} = -3\sqrt[3]{9}$
$x = \frac{-\sqrt[3]{3} \pm \sqrt{-3\sqrt[3]{9}}}{2} = \frac{-\sqrt[3]{3} \pm \sqrt{3}i\sqrt[3]{3}}{2} = \frac{-\sqrt[3]{3}(1 \pm \sqrt{3}i)}{2}$

Разложение в $\mathbb{C}[x]$:
$x^6 + x^3 - 12 = (x^3+4)(x^3-3) = (x + \sqrt[3]{4})(x^2 - \sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{16})(x - \sqrt[3]{3})(x^2 + \sqrt[3]{3}x + \sqrt[3]{9}) =$
$(x + \sqrt[3]{4})(x - \frac{\sqrt[3]{4}(1+\sqrt{3}i)}{2})(x - \frac{\sqrt[3]{4}(1-\sqrt{3}i)}{2})(x - \sqrt[3]{3})(x - \frac{-\sqrt[3]{3}(1+\sqrt{-3}i)}{2})(x - \frac{-\sqrt[3]{3}(1-\sqrt{3}i)}{2})$

Задание 3.
Решение:

У нас есть $(5 + \sqrt{-5})$.
Возьмем произведение $(1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$, оно равно 6.
Нужно свести как то к $(5 + \sqrt{-5})$. Умножим на $\sqrt{-5}$: $(1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) \cdot \sqrt{-5} = (1 + \sqrt{-5})(5 + \sqrt{-5})$

Получили:
$$(1 + \sqrt{-5})(5 + \sqrt{-5}) = 6 \cdot \sqrt{-5}$$
Тогда рассмотрим норму $f = a + bi\sqrt{5}$:
$N(f) = a^2 + 5b^2$
Тогда $N(5 + \sqrt{-5}) = 25 + 5 = 30$
Так же распишем $6 \cdot \sqrt{-5}$ как $3 \cdot 2\sqrt{-5}$
$N(3) = 9$
$N(2\sqrt{-5}) = 20$

Тогда, чтобы $(5+\sqrt{-5})$ было простым элементом кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, то ,так как $6\sqrt{-5}$ делится на $(5+\sqrt{-5})$(из полученного ранее равенства), либо $2\sqrt{-5}$, либо 3 делится на $(5 + \sqrt{-5})$.
Но $N(3) < N(5 + \sqrt{-5})$ и $N(2\sqrt{-5}) < N(5 + \sqrt{-5})$.

Получается, что $5 + \sqrt{-5}$ – не простой элемент кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Задание 4.
Решение:
Пусть у нас найдется такой элемент x, что $N(x)$ – максимально возможный, тогда так как мы знаем, что $N(ab) \geqslant N(a)$ и равно тогда и только тогда, когда b обратим. Тогда $N(x^2)$ не может превосходить $N(x)$(так как это максимально возможное значение), значит x – обратим.
Рассмотрим $N(x \cdot x^{-1})$. Эта норма равна $N(x)$ и так же равна $N(1)$.

Любой ненулевой элемент a мы можем представить в виде $(1 \cdot a)$. Тогда рассмторим норму этого элемента:
$N(a) = N(1 \cdot a) \geqslant N(1)$. Она не может превосходить $N(1)$, так как это максимальное знаечение, тогда получили, что норма любого ненулевого элемента равна $N(1)$.
Но мы знаем, что максимально возможное значение нормы достигается тогда, когда элемент – обратимый. Тогда, так как норма любого ненулевого элемента равна $N(1)$, значит любой такой элемент – обратим. Получается что наше кольцо – поле. Но у нас евклидово кольцо. ПРОТИВОРЕЧИЕ.
Значит N принимает бесконечное число значений.

ч.т.д.