ИДЗ №5
Григорьев Дмитрий БПМИ–163
Вариант 3

Задание 1.
$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2(13b - 57) + x_2^2(-7 + b) + x_3^2(5b - 19) + 2x_1x_2(15 - 3b) + 2x_1x_3(-7b + 27) + 2x_2x_3(-7 + b)$
Выпишем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 13b - 57 & 30 - 6b & 54 - 14b \\ 30 - 6b & b - 7 & 2b - 14 \\ 54 - 14b & 2b - 14 & 5b - 19 \end{pmatrix}$$

Теперь воспользуемся критерием Сильвестра.
• Чтобы квадратичная форма была положительно определенной все угловые миноры ее матрицы должны быть положительны. Найдем все значения b при которых все угловые миноры A положительны:
$\begin{vmatrix} 13b - 57 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow b > \frac{57}{13}$
$\begin{vmatrix} 13b - 57 & 30 - 6b \\ 30 - 6b & b - 7 \end{vmatrix} = -23 \cdot b^2 + 212 \cdot b - 501 > 0$
Таких b при кторых$-23 \cdot b^2 + 212 \cdot b - 501 > 0$ нет, так как дискриминант меньше 0. Поэтому угловой минор третьего порядка можно не рассматривать.
• Квадратичная форма является отрицательно определенной, тогда и только тогда, когда знаки всех угловых миноров её матрицы чередуются, причем минор порядка 1 отрицателен.
Угловой минор 2 порядка должен быть больше 0, но как выяснили в предыдущем пункте, таких b при кторых$-23 \cdot b^2 + 212 \cdot b - 501 > 0$ нет, так как дискриминант меньше 0.

Ответ: таких b, при которых квадратичная форма является положительно определённой нет
таких b, при которых квадратичная форма является отрицательно определённой нет

Задание 2.
Задано уравнение подпространство U евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ $3x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 0$.
а) Нужно построить ортонормированный базис в U.
Для начала найдем базис подпространства U:

$$3x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 0$$
$$x_1 = \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_3$$

Получаем ФСР:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда базис подпространства U это

$$b_1(-1,3,0,0), b_2(-5,0,3,0), b_3(1,0,0,3)$$

Теперь получим ортогональный базис с помощью процесса Грамма-Шмидта:
$c_1 = b_1$
$c_2 = b_2 - proj_{c_1} b_2$
$c_3 = b_3 - proj_{c_1} b_3 - proj_{c_2} b_3$

Где $proj_c b = \frac{(b,c)}{(c,c)} c$.

$c_1 = (-1,3,0,0)$
$c_2 = (-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, 3, 0)$
$c_3 = (\frac{9}{35}, \frac{3}{35}, \frac{3}{7}, 3)$
И далее получим ортонормированный базис(перед этим умножим c_2 на 2 и c_3 на 35):
$e_1 = \frac{c_1}{|c_1|}$ $\quad$ $e_1(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}, 0, 0)$
$e_2 = \frac{c_2}{|c_2|}$ $\quad$ $e_2(-\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, 0)$
$e_3 = \frac{c_3}{|c_3|}$ $\quad$ $e_2(\frac{1}{2\sqrt{35}}, \frac{1}{6\sqrt{35}}, \frac{5}{6\sqrt{35}}, \frac{35}{6\sqrt{35}})$
б) Для вектора $v = (0,0,2,1)$ нужно найти его проекцию на U, его ортогональную составляющую относительно U и расстояние от него до U.

$$v = q + w$$

$$q = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3$$

где $q \in U$ – ортогональная проекция вектора v относительно подпространства U, w – ортогональная составляющая этого вектора относительно подпространства U.

Можно составить систему, решив которую получим $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\begin{cases} (v,c_1) = \lambda_1(c_1,c_1) + \lambda_2(c_2,c_1) + \lambda_3(c_{3,1}) \\ (v,c_2) = \lambda_1(c_1,c_2) + \lambda_2(c_2,c_2) + \lambda_3(c_{3,2}) \\ (v,c_3) = \lambda_1(c_1,c_3) + \lambda_2(c_2,c_3) + \lambda_3(c_3,c_3) \end{cases}$$

Пользуясь ортогональностью базиса $\mathbb{c}$ получим:

$$\begin{cases} 0 = 10\lambda_1 \\ 12 = 126\lambda_2 \\ 135 = 11340\lambda_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{2}{21} \\ \lambda_3 = \frac{1}{84} \end{cases}$$

Получается, что ортогональная проекция вектора v относительно подпространства U равна:

$$q = \frac{2}{21}\begin{pmatrix} -9 \\ -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{84}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 15 \\ 105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ -1/4 \\ 3/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем ортогональную состовляющую вектора v относительно подпространства U:

$$w = v - q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3/4 \\ -1/4 \\ 3/4 \\ 5/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ 5/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем расстояние от v до U:

$$\rho = |w| = \frac{3}{2} = 1.5$$

Задание 3.

Нужно составить уравнения прямой в $\mathbb{R}^3$, параллельной плоскости $-x + 4y + z = 0$, проходящей через точку $M(1, -2, 2)$ и пересекающей прямую $x = t+4, y = 4t-1, z = 3t + 3$.

Так как искомая прямая параллельна плоскости и проходит через точку M, то мы можем найти плоскость, параллельную данной и проходящую через точку M. Далее найдем точку пересечения прямой и найденной плоскости. И теперь нам будут изветны 2 точки через которые проходит искомая прямая.

1) Найдем плоскость, параллельную данной и проходящую через точку M:

$$-(x - x_M) + 4(y - y_M) + (z - z_M) = 0$$
$$-x + 1 + 4y + 8 + z - 2 = 0$$
$$-x + 4y + z + 7 = 0$$

2) Теперь найдем точку пересечения плоскости $-x + 4y + z + 7 = 0$ и прямой $x = t + 4, y = 4t - 1, z = 3t + 3$:

$$-(t + 4) + 4(4t - 1) + (3t + 3) + 7 = 0$$
$$18t = -2$$

$$t = -\frac{1}{9}$$

Тогда точка пересечения имеет координаты $A(3\frac{8}{9}, -1\frac{4}{9}, 2\frac{2}{3})$

3)Теперь имеем две точки A, M, через которые проходит искомая прямая. Найдем ее уравнение:

Найдем направляющий вектор прямой MA, $\overrightarrow{s}(2\frac{8}{9}, \frac{5}{9}, \frac{2}{3})$. Теперь у нас есть направляющий вектор искомой прямой и точки принадлежащие ей. Умножим направляющий вектор на 9 и получим $\overrightarrow{s}(26, 5, 6)$. И теперь найдем уравнение искомой прямой:

$$\begin{cases} x = 26t + 1 \\ y = 5t - 2 \\ z = 6t + 2 \end{cases}$$

$$\textbf{Ответ:} \begin{cases} x = 26t + 1 \\ y = 5t - 2 \\ z = 6t + 2 \end{cases}$$

Задание 4.

Нам дан куб со стороной 3. Пусть начало координат – точка A, тогда точки имеют координаты:

$A(0,0,0), B(3,0,0), C(3,0,3), D(0,0,3), A'(0,3,0), B'(3,3,0), C'(3,3,3), D'(0,3,3)$, так как F – середина ребра BB', то F имеет координаты $F(3, 1.5, 0)$, так же точка E имеет координаты $E(3, \frac{15}{7}, 0)$.

Нам нужно найти угол и расстояние между прямыми AE и $D'F$.

• Найдем угол.

Найдем направляющий вектор $\overrightarrow{s}$ прямой AE и направляющий вектор $\overrightarrow{s_1}$ прямой $D'F$:

$$\overrightarrow{s}(3, \frac{15}{7}, 0)$$
$$\overrightarrow{s_1}(3, -1.5, -3)$$

Теперь найдем угол по формуле $\alpha = arccos\frac{|(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{s_1})|}{|\overrightarrow{s}| \cdot |\overrightarrow{s_1}|}$

$$\alpha = arccos\frac{|9 - \frac{45}{14}|}{|\sqrt{9 + \frac{225}{49}}| \cdot |\sqrt{9 + \frac{9}{4} + 9}|} = arccos\frac{\frac{81}{14}}{|\sqrt{\frac{666}{49}}| \cdot |\sqrt{\frac{81}{4}}|} = arccos\frac{3}{\sqrt{74}}$$

Получается угол между прямыми AE и $D'F$ равен $arccos\frac{3}{\sqrt{74}}$.

• Теперь найдем расстояние между прямыми AE и $D'F$. Так как это скрещивающиеся прямые, то найдем плоскость, проходящую через прямую $D'F$ и параллельную прямой AE. Дальше нам нужно найти расстояние от какой-либо точки на прямой

AE до найденной плоскости. Это и будет искомое расстояни.
Прямая AE проходит через точку $A(0,0,0)$ и имеет направляющий вектор $\overrightarrow{s}(3, \frac{15}{7}, 0)$.
Прямая $D'F$ имеет направляющий вектор $\overrightarrow{s_1}(3, -1.5, -3)$. Вычислим векторное произведение $\overrightarrow{s}$ и $\overrightarrow{s_1}$:
$[\overrightarrow{s}, \overrightarrow{s_1}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & \frac{15}{7} & 0 \\ 3 & -\frac{3}{2} & -3 \end{vmatrix} = \frac{(-90 \cdot i + 126 \cdot j - 153 \cdot k)}{14}$
Получили, что вектор нормали $\overrightarrow{n} = [\overrightarrow{s}, \overrightarrow{s_1}]$ плоскости, проходящей через прямую $D'F$ и параллельной прямой AE имеет координаты $\overrightarrow{n}(-\frac{90}{14}, 9, -\frac{153}{14})$
Уравнение плоскости проходящей через прямую $D'F$ и параллельной прямой AE выглядит так:
$-\frac{90}{14}(x-0) + 9(y-3) - \frac{153}{14}(z-3) = 0$
$-\frac{90}{14}x + 9y - \frac{153}{14}z + \frac{81}{14} = 0$
Теперь нам нужно найти расстояние от точки A до найденной плоскости:

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\frac{81}{14}}{\sqrt{\frac{47385}{196}}} = \frac{81}{27\sqrt{65}} = \frac{3}{\sqrt{65}}$$

Это и есть искомое расстояние.

Ответ: угол между прямыми AE и $D'F$ равен $arccos\frac{3}{\sqrt{74}}$
расстояние между прямыми AE и $D'F$ равно $\frac{3}{\sqrt{65}}$