Домашнне задание №3
Григорьев Дмитрий БПМИ–163

**Задание 1.**
**Решение:**
Так как $\mathbb{Z}_6$ не примарная группа, то заменим $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \backsimeq \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ на $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$.
4 Пусть $a \in \mathbb{Z}_3, b \in \mathbb{Z}_4, c \in \mathbb{Z}_2, d \in \mathbb{Z}_3 \Rightarrow (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$. По следствию из Теоремы о разложении на сумму примарных групп, $ord[(a, b, c, d)] =$ НОК$[ord(a), ord(b), ord(c), ord(d)]$.

1) $ord[(a, b, c, d)] = 2$, значит НОК порядков равен так же равен 2, и порядяки $a, b, c, d$ не превосходят 2. Посмотрим сколько элементов не выше порядка 2 содержатся в $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$.
$\{0\} \in \mathbb{Z}_3, \{0, 2\} \in \mathbb{Z}_4, \{0, 1\} \in \mathbb{Z}_2, \{0\} \in \mathbb{Z}_3$. Значит в $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ элементов порядка не выше 2. Но тут есть элемент $(0, 0, 0, 0)$ порядка 1. Итого, в $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6$ элементов порядка 2 – 4 - 1 = 3.

2) $ord[(a, b, c, d)] = 3$, значит НОК порядков равен так же равен 3, и порядяки $a, b, c, d$ не превосходят 3. Посмотрим сколько элементов порядка не выше 3 и не равному 2 содержатся в $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$.
$\{0, 1, 2\} \in \mathbb{Z}_3, \{0\} \in \mathbb{Z}_4, \{0\} \in \mathbb{Z}_2, \{0, 1, 2\} \in \mathbb{Z}_3$. Значит в $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ $3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = 9$ элементов порядка не выше 3 и не равному 2. Но тут есть элемент порядка 1 – $(0, 0, 0, 0)$ Итого, в $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ элементов порядка 3 – 9 - 1 = 8.

3) $ord[(a, b, c, d)] = 4$, значит НОК порядков равен так же равен 4, и порядяки $a, b, c, d$ не превосходят 4. Посмотрим сколько элементов не выше порядка 4 и не равному 3 содержатся в $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$.
$\{0\} \in \mathbb{Z}_3, \{0, 1, 2, 3\} \in \mathbb{Z}_4, \{0, 1\} \in \mathbb{Z}_2, \{0\} \in \mathbb{Z}_3$. Значит в $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ $1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$ элементов порядка не выше 4 и не равному 3. Но тут есть элементы порядка не выше 2, вычтем посчитанное ранее количество элементов порядка не выше 2. Итого, в $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6$ элементов порядка 4 – 8 - 4 = 4.

4) $ord[(a, b, c, d)] = 6$, значит НОК порядков равен так же равен 6, и порядяки $a, b, c, d$ не превосходят 6. Посмотрим сколько элементов не выше порядка 6 и не равному 4 содержатся в $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$.
$\{0, 1, 2\} \in \mathbb{Z}_3, \{0, 2\} \in \mathbb{Z}_4, \{0, 1\} \in \mathbb{Z}_2, \{0, 1, 2\} \in \mathbb{Z}_3$. Значит в $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 36$ элементов порядка не выше 6 и не равному 4. Но тут есть элементы порядка не выше 2 и ровно 3, вычтем посчитанное ранее количество элементов порядка не выше 2 и ровно 3. Итого, в $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6$ элементов порядка 6 – 36 - 4 - 8 = 24.

**Задание 2.**
**Решение:**

Всего существует две группы порядка 45 (с точностью до изоморфизма):
$\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9$ и $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{15}$. Но $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_9$ циклическая, поэтому подходит только $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{15} \backsimeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$.

• Так как 3 – простое, то все ненулевые элементы порядка 3 порождают подгруппу порядка 3. Чтобы подгруппы не пересекались у них не должно быть общих порождающих.
Найдем количество элементов порядка 3.
$\{0, 1, 2\} \in \mathbb{Z}_3, \{0, 1, 2\} \in \mathbb{Z}_3, \{0\} \in \mathbb{Z}_5$. Но мы учли нулевой элемент (0, 0, 0), поэтому элементов порядка 3 – $3 \cdot 3 \cdot 1 - 1 = 8$. Так как подгруппы не должны пересекаться, то общих порождающих у них не должно быть. Всего в подгруппе порядка 3 два элемента порядка 3, поэтому разных подгрупп порядка 3 – $8/2 = 4$.

• Теперь найдем количество элементво порядка 15.
В $\mathbb{Z}_5$ порядка 5 – 4 элемента. В $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ элементов порядка не выше 3 – 9, но тут учитанэлемент порядка 1, поэто всего элементов порядка 3 – 8. Так как подгруппы не должны пересекаться, то общих порождающих у них не должно быть. Всего в подгруппе порядка 3 два элемента порядка 3, поэтому разных подгрупп порядка 3 – $8 \backslash 2 = 4$. Получается элеметов порядка 15 – $4 \cdot 4 = 16$.
Так как количество образущих в циклической подгруппе порядка $a$ равно $\varphi(a)$, то в подгруппе порядка 15: $\varphi(15) = \varphi(3) \cdot \varphi(5) = 8$ порождающих. Получается, что разных подгрупп порядка 15 в $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$ – $16/8 = 2$.

**Задание 3.**
**Решение:**

Так как $\mathbb{Z}_{nm} \backsimeq \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$, если $n$ и $m$ – взаимнопростые, то
$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15} \backsimeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \backsimeq \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{60}$.
Пусть $H = H_1 \times H_2$, тогда по теореме о факторизации по сомножителям:
$\mathbb{G}/H \backsimeq \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15} \Leftrightarrow \mathbb{G}/H \backsimeq \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{60}$.
Пусть $a, b$ – порождающие элементы: $a, b \in \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \backsimeq \langle a \rangle, \mathbb{Z} \backsimeq \langle b \rangle$, тогда $H_1 = \langle a^{30} \rangle, H_2 = \langle b^{60} \rangle$, тогда $H = \langle a^{30} \rangle \times \langle b^{60} \rangle$.

**Задание 4.**
**Решение:**

• Если $A$ – циклическая группа порядка $M$, $n$ – ее образующий, тогда циклическая подгруппа, порожденная элементом $n^{M/m}$ будет иметь порядок $m$.

• Если $A$ – не циклическая, тогда $A \backsimeq A_1 \times A_2$, причем $|A_1| = a_1, |A_2| = a_2$. Так как порядок $A$ делится на $m$, то $a_1 a_2$ делится на $m$. Тогда найдутся такие $a'_1, a'_2$, что $m = a'_1 a'_2$ и $a_1$ делится на $a'_1$, $a_2$ делится на $a'_2$. Пусть $B_1 \leq A_1$, $B_2 \leq A_2$ и $|B_1| = a'_1, |B_2| = a'_2$. Тогда $B_1 \times B_2 \leq A$, $|B_1 \times B_2| = a'_1 a'_2 = m$.

**ч.т.д.**