Домашнне задание №1
Григорьев Дмитрий БПМИ–163

Задание 1.
Решение:

1) Докажем, что формула $m \circ n = mn - m - n - 2$ задает бинарную операцию на множестве $\mathbb{Q} \backslash \{1\}$
Рассмотрим при каких m и n $m \circ n = 1$:
$mn - m - n + 2 = 1$
$mn - m - n = -1$
$m(n-1) = n - 1$
$m(n-1) - (n-1) = 0$
$(n-1)(m-1) = 0$
Получилось, что $m \circ n = 1$ только при $m = 1$ или $n = 1$.
Так как $m \circ n = mn - m - n + 2 = m(n-1) - (n-1) + 1 = (m-1)(n-1) + 1$, тогда т.к. $\forall m, n \in \mathbb{Q} \backslash \{1\},\ (m-1) \in \mathbb{Q} \backslash \{1\},\ (n-1) \in \mathbb{Q} \backslash \{1\}$, то
$\forall m, n \in \mathbb{Q} \backslash \{1\},\ (m-1)(n-1) + 1 \in \mathbb{Q} \backslash \{1\}$
Получилось, что $\forall m, n \in \mathbb{Q} \backslash \{1\},\ m \circ n \in \mathbb{Q} \backslash \{1\}$, значит формула
$m \circ n = mn - m - n - 2$ задает бинарную операцию на множестве $\mathbb{Q} \backslash \{1\}$.

2) Докажем, что $(\mathbb{Q} \backslash \{1\}, \circ)$ является группой
• ассоциативность:
$(a \circ b) \circ c = (ab - a - b + 2)c - (ab - a - b + 2) - c + 2 = abc - ac - bc + c - ab + a + b = c(ab - a - b) - (ab - a - b) + c = (ab - a - b)(c - 1) + c$
$a \circ (b \circ c) = a(bc - b - c + 2) - a - (bc - b - c + 2) + 2 = abc - ab - ac + 2a - a - bc + b + c - 2 + 2 = c(ab - a - b) - (ab - a - b) + c = (ab - a - b)(c - 1) + c$
Получается, что $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{Q} \backslash \{1\}$, значит $\circ$ – ассоциативна
• нейтральный элемент:
$e \circ a = ea - e - a + 2$
$a \circ e = ae - a - e + 2$
Получили, что $e \circ a = a \circ e$, теперь найдем e:
$e \circ a = a$
$ea - e - a + 2 = a$
$ea - e - 2a + 2 = 0$
$e(a-1) - 2(a-1) = 0$
$(e-2)(a-1) = 0$
Нейтральный элемент равен 2
Получилось, что $\forall a \in \mathbb{Q} \backslash \{1\}\ \exists e = 2, (a \circ e) = (e \circ a) = a$
• Обратный элемент:
$a \circ b = ab - a - b + 2$
$b \circ a = ba - b - a + 2$
Получилось, что $a \circ b = b \circ a$
$a \circ b = e$
$ab - a - b + 2 = 2$
$a(b-1) - (b-1) = 1$

$(a-1)(b-1) = 1$
$a - 1 = \frac{1}{b-1}$
$a = \frac{b}{b-1}$
Получилось, что $\forall a \in \mathbb{Q}\backslash\{1\}\ \exists a^{-1} \in \mathbb{Q}\backslash\{1\}, a = \frac{a}{a-1}$

Получилось, что $(\mathbb{Q}\backslash\{1\}, \circ)$ является группой

ч.т.д.

Задание 2.
Решение:
$\mathbb{Z}^{12}$ – $\{0, 1, 2, ..., 11\}$
Нейтральный элемент – 0, поэтому для 0 порядок равен 1.
Для других элементов g должно быть:
Пусть порядок равен q
$gq = 0\ (mod 12)$
$q = \frac{12}{gcd(12,g)}$

Ответ: для 0 порядок равен 1, для остальных $g \in \mathbb{Z}_{12}$ порядок равен $\frac{12}{gcd(12,g)}$

Задание 3.
Решение:
В любой подгруппе должен быть нейтральный элемент.
Так как у нас $\mathbb{Z}_{12}$ – циклическая группа, то все ее подгруппы цикличны.
Тогда переберем все порождающие элементы и получим нужные подгруппы:
При порождающем $g = 0$ мы получим подгруппу $\{0\}$
При порождающем $g = 1$ мы получим подгруппу равную самой группе $\mathbb{Z}_{12}$
При порождающем $g = 2$ мы получим подгруппу $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$
При порождающем $g = 3$ мы получим подгруппу $\{0, 3, 6, 9\}$
При порождающем $g = 4$ мы получим подгруппу $\{0, 4, 8\}$
При порождающем $g = 5$ мы получим подгруппу $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
При порождающем $g = 6$ мы получим подгруппу $\{0, 6\}$
При порождающем $g = 7$ мы получим подгруппу $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
При порождающем $g = 8$ мы получим подгруппу $\{0, 4, 8\}$
При порождающем $g = 9$ мы получим подгруппу $\{0, 3, 6, 9\}$
При порождающем $g = 10$ мы получим подгруппу $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$
При порождающем $g = 11$ мы получим подгруппу $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
В итоге мы получили 6 различных подгрупп:
$\{0\}$
$\{0, 6\}$
$\{0, 4, 8\}$
$\{0, 3, 6, 9\}$
$\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$
$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

ч.т.д.