Домашнне задание №13
Григорьев Дмитрий БПМИ–163

Задание 1.
Решение: Рассмотрим возможные исходы:
1) Сначала родился мальчик, потом девочка
2) Сначала родился мальчик, потом еще один мальчик
3) Сначала девочка, потом мальчик
Как видно вариантов которые нам подходят – 2, значит искомая вероятность – $\frac{2}{3}$.
Так же можно посчитать через формулу условных вероятностей: $Pr[A|B] = \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]}$.
Где A – один ребенок в семье девочка, B - один ребенок мальчик.
$Pr[A \cap B] = 0.5$, $Pr[B] = \frac{2}{3}$.
$Pr[A|B] = \frac{2}{3}$

Ответ: $\frac{2}{3}$

Задание 2.
Решение: Множество исходов в данной задаче – числа от 1 до n. Вероятность каждого события одинакова и равна $\frac{1}{n}$
Количество исходов, подходящих под условие того, что выбранное число делится на 2 равна $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
Значит вероятность того, что выбранное число делится на 2 равна $\frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n}$.
Аналогично рассуждая, получим, что вероятность того, что выбранное число делится на 3 равна $\frac{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}{n}$.
События будут независимы, кагда $P[B|A] = P[B]$, т.е. $P[B \cap A] = P[B] \cdot P[A]$.
$P[B \cap A] = \frac{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}{n}$ и это должно быть равно $\frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} \cdot \frac{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}{n}$. Рассмотрим число n, с точки зрения деления на 6:
n = 6m, тогда проверим наше равенство $n \cdot m = 3m \cdot 2m$. Оно верно!
n = 6m + 1, тогда проверим наше равенство $(6m + 1) \cdot m = 6m^2$. Оно верно при m = 0, значит n = 1!
n = 6m + 2, тогда проверим наше равенство $(6m+2) \cdot m = (3m+1) \cdot 2m$. Оно верно!
n = 6m + 3, тогда проверим наше равенство $(6m + 3) \cdot m = (3m + 1) \cdot (2m + 1)$. Оно неверно!
n = 6m + 4, тогда проверим наше равенство $(6m + 4) \cdot m = (3m + 2) \cdot (2m + 1)$. Оно неверно!
n = 6m + 5, тогда проверим наше равенство $(6m + 5) \cdot m = (3m + 2) \cdot (2m + 1)$. Оно неверно!

Ответ: при n = 1, n = 0 (mod 6), n = 2 (mod 6)

Задание 3.
Решение: События будут независимы, кагда $P[B|A] = P[B]$, т. е.
$P[B \cap A] = P[B] \cdot P[A]$.
$P[B \cap A] = \frac{C_{36}^3}{C_{36}^5} = \frac{7140}{376992}$

$P[B] = P[A] = \frac{C_{36}^4}{C_{36}^5} = \frac{58905}{376992}$
Теперь проверим являются ли события независимыми:
$\frac{58905}{376992} \cdot \frac{58905}{376992} != \frac{7140}{376992}$
Получается, что события не являются независимыми.

Ответ: события не являются независимыми.

Задание 4.
Решение: Множество вероятных исходов - это множество всех функций, а их всего – n^n.
Иньективных функций будет $n!$, следовательно вероятность того, что выбранная функция инъективна это $\frac{n!}{n^n}$.
Теперь посмотрим, что будет, когда $f(1) = 1$. Вероятость того, что функция инъективна при условии $f(1) = 1$ равна $\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}$.
Заметим, что $\frac{(n-1)!}{n^{n-1}} = \frac{(n)!}{n^n}$.
Следовательно события независимы.

Ответ: события являются независимыми

Задание 5.
Решение: Множество вероятных исходов - принятые решения членов жюри.
Вероятность того, что два члена жюри примут верное решение это $p \cdot p$. Если же один из членов жюри примет верное решение, а другой нет, то вероятность такого равна $p \cdot (1 - p) \cdot 2$. В этой ситуации все зависит от от третьего члена жюри. Он примет правильно решение с вероятностью $\frac{1}{2} \cdot (2p - 2p^2) = p - p^2$
Теперь посчитаем вероятность того, что будет принято верное решение –
$p - p^2 + p^2 = p$.

Ответ: p

Задание 6.
Решение: Предположим, что мы знаем что в одном ящиек лежит a черных и b белых шаров, следовательно в другом лежит (10 - a) черных и (10 - b) белых. Тогда вероятность того, что узника не казнят равна $\frac{\frac{b}{a+b} + \frac{10-b}{20-a-b}}{2}$. Нам необходимо посчитать, когда эта вероятность будет максимальной.
С помощью программы это легко сделать. В результате получается, что наибольшая вероятность будет при a = 0 и b = 1, и она равна $\frac{14}{19}$ (можно было перебрать руками).

Ответ: Нужно в один ящик положить только 1 белый шар и в другой 10 черных и 9 белых. Тогда $P = \frac{14}{19}$

Задание 7.
Решение: Нужно найти вероятность победы первого при текущем счете 8:7. Всего остается сыграть 5 партий, значит можно перебрать всевозможные исходы 4 партий, потому что после 4 партий будет понятно кто выиграл.

Пусть 1 - выиграл первый, 0 - первый проиграл. Тогда переберем всевозможные последовательности из 0 и 1 длины 4. Чтобы первый выиграл матч, ему необходимо выиграть хотя бы 2 партии, значит нужно посчитать кол-во последовательностей длины 4, в которых не меньше двух 1.
Это последовательности: 0000, 0001, 0010, 0100, 1000
Всего последовательностей длины 4 : $2^4 = 16$, а не подходит нам 5 из них.
Следовательно в (16 - 5 = 11) случаях в матче побеждает первый. Искомая вероятность – $\frac{11}{16}$.

Ответ: $\frac{11}{16}$