Домашнне задание №19
Григорьев Дмитрий БПМИ–163

**Задание 1.**
**Решение:**
Нам задан граф из $\binom{n}{2}$ 0 или 1. Он задан в виде верхнего правого треугольника матрицы смежности. $x_{i,j}$ равен одному, если $i$-ая и $j$-ая вершины соедины и равен нулю, если не соединены. Вершина $i$ будет изолированной, если в матрице смежности $i$-ый столбец или $i$-ая строка нулевые. Нужно просто проверить, есть ли в заданном "треугольнике"такие стлбцы или строки:
$\bigvee_{i=1}^{n} \neg((\bigvee_{j=1}^{i-1} x_{ij}) \vee (\bigvee_{j=i+1}^{n} x_{ij}))$.
Таким образом, мы посчитаем есть ли в графе изолированые выршины.

**Задание 2.**
**Решение:**
Нам задан граф из $\binom{n}{2}$ 0 или 1. Он задан в виде верхнего правого треугольника матрицы смежности. $x_{i,j}$ равен одному, если $i$-ая и $j$-ая вершины соедины и равен нулю, если не соединены. Три вершины $i, j, k$ будут образовывать треугольник, если $x_{ij} = x_{jk} = x_{ki} = 1$. Нужно просто проверить, нет ли в заданном графе три такие вершины:
$\neg(\bigvee_{i=1}^{n-2} \bigvee_{j=i+1}^{n-1} \bigvee_{k=j+1}^{n} (x_{ij} \wedge x_{jk} \wedge x_{ik}))$
Таким образом, мы проверим – есть ли в графе треугольник.

**Задание 3.**
**Решение:**
Нам задан граф из $\binom{n}{2}$ 0 или 1. Он задан в виде верхнего правого треугольника матрицы смежности. $x_{ij}$ равен одному, если $i$-ая и $j$-ая вершины соедины и равен нулю, если не соединены. Граф будет содержать эйлеров цикл, если он связен и степень каждой вершины будет четной. На связность граф можно проверить, возведением матрицы смежности в степень – это было на лекции. Проверить вершину на четность степени можно с помощью xor'a, так как это и есть сумма по модулю 2. Это нужно проверить для каждой вершины:
$\bigwedge_{i=1}^{n} \neg((\bigoplus_{j=1}^{i-1} x_{ji}) \oplus (\bigoplus_{j=i+1}^{n} x_{ij}))$
Таким образом, мы проверим – четны ли степени всех вершин. Теперь, зная связен ли граф и четны ли степени всех вершин, мы можем ответить на вопрос.

**Задание 4.**
**Решение:**
Любую монотонную функцию модно представить в виде ДНФ без отрицаний. Максимум в такой форме может быть $2^n$ операций дизъюнкции, а в каждой конъюнкции может быть $n$ элментов. Получается что размер функции будет $O(n \cdot 2^n)$.

**ч.т.д.**

**Задание 6.**
**Решение:**

Любую функцию можно представить в виде полинома Жегалкина в базисе $\{\oplus, \cdot, 1\}$, т.е. в виде:
$P(x_1, x_2, ..., x_n) = a \oplus a_1 \cdot x_1 \oplus ... \oplus a_n \cdot x_n \oplus a_{1,2} \cdot x_1 \cdot x_2 \oplus a_{1,3} \cdot x_1 \cdot x_3 \oplus ... \oplus a_{1...n} \cdot x_1 \cdot ... \cdot x_n$
Как видим, всего будет $2^n$ слагаемых. Каждое слагаемое можно представить в виде двоичного числа, у которого в $i$-ой позиции стоит 1, если в слагаемом есть $x_i$ и 0 иначе. Xor всех слагаемых мы можем вычислить схемой длины $2^n - 1$. Сами слагаемые мы можем вычислять за $O(1)$ через предыдущие. Так как у нас $2^n$ слагаемых, то и размер схемы для них – $2^n$.
И всего получается $2 \cdot 2^n - 1$, что меньше $2^{n+1}$.

**ч.т.д.**

**Задание 7.**
**Решение:**

Докажем это по индукции.
База: Функция, в схема которой состоит из 1 функци
Шаг индукции: пусть первые $i$ функций в схеме линейны. Тогда $i + 1$-ая функция вычисляется через предыдущие, которые уже линейны:
$f_{i+1} = k_1 \cdot f_1 \oplus ... \oplus k_i \cdot f_i = k_1 \cdot (a_{1,0} \oplus a_{1,1} \cdot x_1 \oplus ... \oplus a_{1,n} \cdot x_n) \oplus ... \oplus k_i \cdot (a_{i,0} \oplus a_{i,1} \cdot x_1 \oplus ... \oplus a_{i,n} \cdot x_n) = b_0 \oplus (b_1 \wedge x_1) \oplus ... \oplus (b_n \wedge x_n)$.
Получилось, что $f_{i+1}$ функция тоже линейна. По индукции получается, что функция, в схеме которой только линейные функции, тоже линейна.

**ч.т.д.**