Домашнне задание №14
Григорьев Дмитрий БПМИ–163

Задание 1.
Решение: Нам известно, что с 40% от стоимости билетов идет на выигрыш. Значит с каждого билета в среднем на выигрыш уходит 40 рублей. Значит мат. ожидание выигрыша равно 40 рублей.
Теперь рассмотрим неравенство Маркова:
$Pr[f \geqslant a] \leqslant \frac{E[f]}{a}$, где f – случайная величина, в нашем случае это выигрыш.
Тогда $Pr[f \geqslant 5000] \leqslant \frac{40}{5000}$
$Pr[f \geqslant 5000] \leqslant \frac{1}{125} \leqslant \frac{1}{100}$
Получилось, что вероятность выиграть 5000 меньше одного процента.

ч.т.д.

Задание 3.
Решение: а) Расмотрим все возможные выигрыши первого и второго и сравним их средние значения.
У первого среднее значение равно $\frac{(1\cdot(1+2+3+4+5+6)+2\cdot(1+2+3+4+5+6)+..+6\cdot(1+2+3+4+5+6))}{36} = 12,25$
У втрого среднее значение равно $\frac{1+4+9+16+25+36}{6} = 15\frac{1}{6}$
Получилось, что у второго средний выигрыш больше.
б) Теперь будем считать, что вероятности выпадания кубика на грань соответственно равны $p1, p2, p3, p4, p5, p6$. Теперь распишем мат. ожидание для двух случаев.
Для первого: $1 \cdot (2p1p1) + 2 \cdot (2p1p2) + 3 \cdot (2p1p3) + 4 \cdot (2p1p4 + 2p2p2) + 5 \cdot (2p1p5) + 6 \cdot (2p1p6 + 2p2p3) + 8 \cdot (2p2p4) + 10 \cdot (2p2p5) + 12 \cdot (2p2p6 + 2p3p4) + 15 \cdot (2p3p5) + 16 \cdot (2p4p4) + 18 \cdot (2p3p6) + 20 \cdot (2p4p5) + 24 \cdot (2p4p6) + 25 \cdot (2p5p5) + 30 \cdot (2p5p6) + 36 \cdot (2p6p6)$
Для втрого: $1p1 + 4p2 + 9p3 + 16p4 + 25p5 + 36p6$
Если из втрого вычесть первое, то полученная сумма будет больше или равна 0.
Следовательно выигрыш втрого больше

Ответ: Выигрыш больше у втрого

Задание 4.
Решение: Подслово ab мы можем расположить на 19 местах, при этом нам нужно дописать 18 букв из $\{a, b\}$. Тогда получается $19 \cdot 2^{18}$ вариантов.
Всего у нас 2^{20} варианов слов. Получается, что мат. ожидание равно $\frac{19 \cdot 2^{18}}{2^{20}} = 4,75$

Ответ: 4,75

Задание 5.
Решение: Для того, чтобы посчитать мат. ожидание количества завтраков, а для этого нужно знать вероятность того, что он попробует n завтраков.
Из 10 вариантов выбрать n завтраков это C_{10}^{n}. Так же нам нужно учесть количество разбиений 15 дней на n завтраков. (Это неизвестные нам числа Стирлинга второго рода). Всего у нас есть 10^{15} вариантов "последовательностей завтраков". Получается, вероятность того, что проректор попробует n завтраков равна $\frac{C_{10}^{n} \cdot S(15,k)}{10^{15}}$.
Теперь нужно посчитать мат.ожидание по формуле $\sum\limits_{i=1}^{10} i \cdot \frac{C_{10}^{i} \cdot S(15,i)}{10^{15}}$. Если это посчитать то это будет примерно 7,9

Ответ: 7,9

Задание 6.
Решение: Рассмотрим какую то перестановку. Для нее найдется "перевернутая"перестановка. В сумме у них будет $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ инверсий.
Тогда у всех перестановок длины n в сумме будет $\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{n!}{2}$.
Теперь найдем мат.ожидание количества инверсий, разделив общее количество инверсий на количество всех перестановок. $E[I(\pi)] = \frac{\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{n!}{2}}{n!} = \frac{n \cdot (n-1)}{4}$

Ответ:$\frac{n \cdot (n-1)}{4}$

Задание 7.
Решение: Нам необходимо доказать, что $Pr[X \geqslant 6] < \frac{1}{10}$.
Заменим это утверждение на $Pr[2^X \geqslant 64] < \frac{1}{10}$
Тогда по неравенству Маркова: $Pr[2^X \geqslant 64] < \frac{E[X]}{64} => Pr[2^X \geqslant 64] < \frac{5}{64}$.
Получилось, что $Pr[X \geqslant 6] < \frac{5}{64} => Pr[X \geqslant 6] < \frac{1}{10}$.

ч.т.д.