Домашнне задание №2
Григорьев Дмитрий БПМИ–163

Задание 1.
Решение:

Найдем для начала все левые смежные классы, для этого каждую четную перестановку умножим слева на все элементы $\langle\sigma\rangle$(а их всего 2):

- $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$

Как видим некоторые из них совпадают, поэтому уберем лишние:

1. $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Теперь таким же образом найдем правые смежные классы, в итоге получится:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Подгруппа H не является нормальной, так как для $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ не выполняется условие $gH = Hg$

Задание 2.
Решение:

Множество $\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) | a \equiv b \equiv 1 \ (mod 3); b \equiv c \equiv 0 \ (mod 3)\}$ является нормальной подгруппой в $SL_2(\mathbb{Z})$ $<=>$ $gHg^{-1} \subseteq H$, где $g \in SL_2(\mathbb{Z})$, H – данное множество.

Пусть $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, тогда $g^{-1} = \frac{1}{det(g)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Пусть $h \in H$, $h = \begin{pmatrix} s & q \\ r & t \end{pmatrix}$

Тогда $ghg^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & q \\ r & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -acq + bdr + ads - bct & a^2q - b^2r - abs + abt \\ -c^2q + d^2r + cds - cdt & acq - bdr - bcs + adt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 3$

Получилось, что $ghg^{-1} \subseteq H =>$

$=>$ множество $\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) | a \equiv b \equiv 1 \ (mod 3); b \equiv c \equiv 0 \ (mod 3)\}$ является нормальной подгруппой в $SL_2(\mathbb{Z})$.

ч.т.д.