Алгоритмы и структуры данных. Семинар 31.
Паросочетания в двудольных графах.
Григорьев Дмитрий БПМИ-163

Задача 1.
Напомним, лемма Холла утверждает, что в двудольном графе $G = (L, R, E)$ из n вершин в каждой доле, совершенное паросочетание существует тогда и только тогда, когда для любого $A \subset L, |N(A)| \geq |A|$. Докажите эту лемму.

Решение:
• Необходимость очевидна.
если существует полное паросочетание, то для любого $A \subset L$ выполнено $|A| \leqslant |N(A)|$. У любого подмножества вершин есть по крайней мере столько же соседей (соседи по паросочетанию).
• Достаточность.
Докажем по индукции. Будем добавлять в изначально пустое паросочетание P по одному ребру и доказывать, что мы можем это сделать, если P не полное. И в конце получим что P — полное паросочетание.
База индукции:
Вершина из L соединена хотя бы с одной вершиной из R. Следовательно база верна.
Индукционный переход:
Пусть после $q < n$ шагов есть паросочетание P. Тогда докажем, что можно добавить в P вершину x из L, не насыщенную паросочетанием P.
Рассмотрим множество вершин M, где M это все вершины, достижимые из x, если мы можем ходить из R в L только по ребрам из P, а из L в R по любым ребрам. Тогда в M найдется вершина y из R, не насыщенная паросочетанием P(так как если рассмотреть вершины из M принадлежащие L, то для них не будет выполнено условие: $|A| \leqslant |N(A)|$). Тогда найдется путь из x в y, который будет удлиняющим для паросочетания P (так как из R в L мы проходили по ребрам паросочетания P). Тогда можем увеличить паросочетание P. Следовательно предположение индукции верно.

Задача 2.
Пусть у двудольного графа степени всех вершин положительны и равны. Докажите, что в этом графе найдётся совершенное паросочетание.

Решение:
Рассмотрим произвольное множество вершин M, где M – вершины из L.
Пусть E – количество ребер, выходящих из M, тогда

$$E = |M| \cdot k,$$

где k – степень любой вершины.

Рассмотрим $N(M)$. Тогда

$$E \leq k \cdot |N(A)|$$

.
Получается, что

$$|M| \cdot k \leq |N(M)| \cdot k$$

$$|M| \leq |N(M)|$$

Получается, что для любого $M \subset L, |N(M)| \geq |M|$. Тогда по лемме Холла, так как для любого $M \subset L, |N(M)| \geq |M|$, то в этом графе найдется совершенное паросочетание.

ч.т.д.

Задача 3.
У вас есть полный двудольный взвешенный граф. Требуется найти максимальное паросочетание, такое что вес максимального ребра минимален. Требуемое время работы $O(n^3 \log n)$.

Решение:
Воспользуемся бинпоиском по весу ребра и алгоритмом Куна. Будем выбирать вес ребра и строим паросочетание, выбирая ребра, с весом меньшем или равным выбранным в бинпоиске. Если это паросочетание максимально, то сдвигаем правую границу, иначе левую. Таким образом за $O(n^3 \log n)$ найдем максимальное паросочетание, такое что вес максимального ребра минимален.

Задача 6.
Рёберным покрытием графа называется такое подмножество рёбер графа, что любая вер- шина является концом хотя бы одного из рёбер этого подмножества. Вам дан двудольный граф, требуется найти минимальное рёберное покрытие за время $O(nm)$.

Решение:
Сначала построим максимальное паросочетание за время $O(nm)$(алгоритм Куна).
Если паросочетание является совершенным паросочетанием, в котором все вершины уже покрыты, то нет необходимости в дополнительных рёбрах.
Иначе пройдемся по всем ненасыщенным вершинам, каждая из ненасыщенных вершин смежна только с насыщенными вершинами, так как в противном случае паросочетание можно было бы дополнить соответствующим ребром. И выбираем ребро, соединяющее насыщенную и ненасыщенную вершины.
Таким образом получим минимальное рёберное покрытие за время $O(nm)$.