Домашнне задание №21
Григорьев Дмитрий БПМИ–163

Задание 1.
Решение:

У нас $p \in \mathbb{N}$, и мы можем найти такое y, что $y \in \mathbb{N}, U(p,p) = y$, потому что мы можем выписать все алгоритмы, и найдется такой, что он вычисляет функцию $f(x) = y$. Так как мы выписали все алгоритмы, то найдется такой, что для любого $x, f(x) = y$. Тогда получается, что в независимости от $x, U(p,x) = y$. Получается, что $\forall y \in \mathbb{N}$ существует $p \in \mathbb{N}$, такое что $U(p,p) = y$. Следовательно заданное множество совпадает с $\mathbb{N}$.

ч.т.д.

Задание 2.
Решение:

а) Предположим, что данное множество разрешимо, тогда введем функцию $f(p) = U(p,p^2) + 1$. Она будет вычислима, так как вычислима U. Теперь введем новую функцию $g(p)$, которая проверяет является ли p точным квадратом: если да, то $g(p) = \sqrt{p}$, а иначе равна 0. Тогда $g(p)$ – вычислима и $\exists n, U(n,p) = g(p), \forall p$. Тогда $U(x,x^2) = g(x^2) = f(x) = U(x,x^2) + 1$.
Противоречие! Следовательно данное множество неразрешимо.

Ответ: да

б) Я утверждаю что нет, для этого покажем такую универсальную функцию. Пусть $U(p,x)$ равна 0, если p – точный квадрат, иначе равна $G(f(p),x)$, где G – некоторая универсальная вычислимая функция, $f(p)$ – номер числа p в списке всех не квадратов: 2, 3, 5, 6, 7, ... Множество значений $f(p)$ совпадает с $\mathbb{N}$, следовательно U – действительно универсальная функция. Так как для любого квадрата $U(p,x) = 0$, то $U(p^2,p)$ – определено. И исходное множество совпадает с $\mathbb{N}$.

Ответ: нет

Задание 3.
Решение:

Рассмотрим бесконечное разрешимое множество натуральных чисел A. Члены этого множества возрастают, т.е. $f(n) = x_n$ – вычислима и возрастает.
Теперь рассмотрим перечислимое, неразрешимое подмножество в A – B. Так как B – перечеслимо, то $f(b)$ – перечислимо , где $b \in B$. Если бы множество $\{f(b)|b \in B\}$ было разрешимо, то мы бы могли проверить, что $f(n) \in f(B)$, а значит мы могли бы проверить, что $n \in X$ с учетом возрастания f, значит X было бы пазрешимо. Противоречие.

ч.т.д.

Задание 4.
Решение:

Рассмотрим бесконечное разрешимое подмножество $\mathbb{N} - A$. Тогда мы можем в порядке возрастания идти по натуральным числам и выводить те, которые лежат в A – первое встретившееся a_1, второе a_2, n-ое a_n. Тогда мы получим $f(n) = a_n$, причем эта функция вычислима и возрастает.
Теперь мы можем перечислить множество значений этой функции в порядке возрастания, следовательно A – разрешимо.

ч.т.д.

Задание 5.
Решение:

Будем A – некоторое бесконечное перечислимое множество. B – искомое бесконечное разрешимое подмножество. Тогда будем перечислять A и добавлять в B элемент из A только в том случае, если очередной элемент a_i больше чем максимальный из B. Таким образом мы получим возрастающую подпоследовательность A. Значит мы можем перечислить B в порядке возрастания, следовательно B – разрешимо.

ч.т.д.

Задание 6.
Решение:

Пусть у нас есть область определения функции $U - F$, где F – множество пар $\{(p,x)|p,x \in \mathbb{N}\}$. F перечеслимо, так как язвляется областью определения вычислимой функции. Тогда чтобы перечислить S, просто перечислим F, при этом выписывая не пару, а только первое число. Таким образом мы перечислим S.

ч.т.д.