Домашнне задание №5
Григорьев Дмитрий БПМИ–163

Задание 1.
Решение:
• Пусть $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ – это обратимый элемент. $B = \begin{pmatrix} q & 0 \\ w & e \end{pmatrix} \in R$.
Тогда $AB = BA = E$
$\begin{pmatrix} q & 0 \\ w & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aq & 0 \\ be + aw & ce \end{pmatrix} = E$
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & 0 \\ w & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aq & 0 \\ bq + cw & ce \end{pmatrix} = E$
$\begin{cases} aq = 1 \\ ce = 1 \\ be + aw = 0 \\ bq + cw = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{q} \\ c = \frac{1}{e} \\ b = -\frac{w}{qe} \end{cases}$
Тогда обратимые элементы имеют вид:

$$\left\{ \begin{pmatrix} q & 0 \\ w & e \end{pmatrix} \right\} \quad q, e \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, w \in \mathbb{R}$$

• Пусть $A = \begin{pmatrix} q & 0 \\ w & e \end{pmatrix}$ – это левый делитель нуля. $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in R$.
Тогда $AB = 0$
$\begin{pmatrix} q & 0 \\ w & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aq & 0 \\ be + aw & ce \end{pmatrix} = 0$
Тогда переберем все различные варианты, когда q, w, e равны 0 или неравны и посмотрим, чтобы $B \neq 0$:
$t, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$
1) $q = 0, w = 0, e = t$, тогда найдется $B \neq 0$
2) $q = 0, w = t, e = 0$, тогда найдется $B \neq 0$
3) $q = t, w = 0, e = 0$, тогда найдется $B \neq 0$
4) $q = t, w = t_1, e = 0$, тогда найдется $B \neq 0$
5) $q = t, w = 0, e = t_1$, тогда НЕ найдется $B \neq 0$
6) $q = 0, w = t, e = t_1$, тогда найдется $B \neq 0$
7) $q = t, w = t_1, e = t_2$, тогда НЕ найдется $B \neq 0$

Пусть $A = \begin{pmatrix} q & 0 \\ w & e \end{pmatrix}$ – это правый делитель нуля. $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in R$.
Тогда $BA = 0$
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & 0 \\ w & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aq & 0 \\ bq + cw & ce \end{pmatrix} = 0$
Тогда переберем все различные варианты, когда q, w, e равны 0 или неравны и посмотрим, чтобы $B \neq 0$:

$t, t_1, t_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
1) $q = 0, w = 0, e = t$, тогда найдется $B \neq 0$
2) $q = 0, w = t, e = 0$, тогда найдется $B \neq 0$
3) $q = t, w = 0, e = 0$, тогда найдется $B \neq 0$
4) $q = t, w = t_1, e = 0$, тогда найдется $B \neq 0$
5) $q = t, w = 0, e = t_1$, тогда НЕ найдется $B \neq 0$
6) $q = 0, w = t, e = t_1$, тогда найдется $B \neq 0$
7) $q = t, w = t_1, e = t_2$, тогда НЕ найдется $B \neq 0$

Тогда все делители нуля имеют вид:
$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix} q & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & e \end{pmatrix}\right\} \quad q, w, e \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

• Пусть Пусть $A = \begin{pmatrix} q & 0 \\ w & e \end{pmatrix}$ – это нильпотентный элемент.
Тогда $A^m = \begin{pmatrix} q^m & 0 \\ w' & e^m \end{pmatrix}, w' \in \mathbb{R}$
Получается, что $q = e = 0$
Тогда $A^2 = \begin{pmatrix} q^2 & 0 \\ ew + qw & e^2 \end{pmatrix}$ и так как $q = e = 0$, то $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Тогда все нильпотентные элементы имеют вид:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} \quad w \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Задание 2.
Решение:
Идеал $I = (2, x)$ – является идеалом в кольце $\mathbb{Z}[x]$ и не является главным.
Этот идеал, порожденный 2 и x состоит из многочленов вида $2q(x) + xw(x)$, где $q(x), w(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Видно, что свободные члены в идеале – четны, так как мы удваиваем свободный член $q(x)$.
• I – идеал, так как $\forall i \in I \forall r \in \mathbb{Z}[x]$ произведение ir, $ri \in I$
Действительно, все целочисленные многочлены с четным свободным членом при умножении дают снова многочлен с четным свободным членом, который принадлежит идеалу.
• Пусть I – главный идеал, тогда можно сказать, что $I = (p(x))$. Тогда так как 2 и x тоже лежат в идеале, тогда $2 \ mod \ p(x) = 0$ и $x \ mod \ p(x) = 0$, значит $p(x) = \pm 1$. Тогда $I = (\pm 1) = \mathbb{Z}[x]$, но $I = (2, x) \neq \mathbb{Z}[x]$, так как в I – все многочлены имеют четный свободный член. Следовательно, I – не главный идеал.

Задание 3.
Решение:
$f(x) = x^3 - x^2 + 2$
Пусть $g(x)$ – многочлен степени n, $g(x) = q(x) * f(x) + p(x)$, тогда при делении $g(x)$

на $f(x)$ получим $p(x)$, причем степень $p(x) < 3$, значит

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

Рассмотрим отображение $\varphi : \mathbb{R}[x] \longmapsto p(x), \varphi(g(x)) = g(x) \ mod \ f(x)$
Тогда $(f(x)) = Ker\varphi$, так как $\forall a \in (f(x)) \ \varphi(a) = 0$
Тогда по теореме о гомоморфизме колец:

$$\mathbb{R}[x] \backslash (x^3 - x^2 + 2) \simeq Im\varphi$$
$$\mathbb{R}[x] \backslash (x^3 - x^2 + 2) \simeq \{p(x)\}$$

Базис $\mathbb{R}_{\leq 2}$ – это $1, x, x^2$. Тогда многочлен $p(x)$ можно представить в виде лиенйной комбинации элементов базиса. Так как в базисе $p(x)$ – 3 элемента, значит размерность $\mathbb{R}$–алгебры $\mathbb{R}[x] \backslash (x^3 - x^2 + 2)$ равна 3.

Задание 4.
Решение: