Transformada discreta de Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i2\pi f t} dt$$

integral de fourier

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-i2\pi \frac{kn}{N}}$$

Periodo de muestreo

$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_0 t) \cdot e^{-i2\pi f t}$

Muestreo temporal

$$x(t) \rightarrow x(nT_s) \qquad -\infty < n < \infty$$

Señales discretas en el tiempo de duración finita

$$x(nT_s) \qquad -\infty < n < \infty \rightarrow x(nT_s) \qquad 0 < n < N-1$$

Muestreo del espectro

$$X(f) \qquad -\infty < t < \infty \rightarrow X(k\Delta f) \qquad 0 < k < N-1$$

MUESTREO TEMPORAL

$$x(t) \rightarrow x(nT_s) \qquad -\infty < n < \infty$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i2\pi f t} dt$$

T. F. DISCRETA EN EL TIEMPO

$$X(f) = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} x(nT_s)\, e^{-j2\pi f n T_s}$$

$-\infty < f < \infty$

ES CONTINUA

GENERALIZANDO TS=1

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j2\pi f n}$$

ó

$$X(e^{j\omega}) = X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n}$$

Recordemos cual es el espectro de una señal discreta en el tiempo

$$X(nT_s) = \cos(2\pi n T_s) = \cos\left(\pi \left(\frac{f_0}{f_s}\right) n\right)$$

$$\frac{2\pi f_0}{f_s} \cdot n \qquad w_0$$

https://www.youtube.com/watch?v=pV7GmIcKLPw

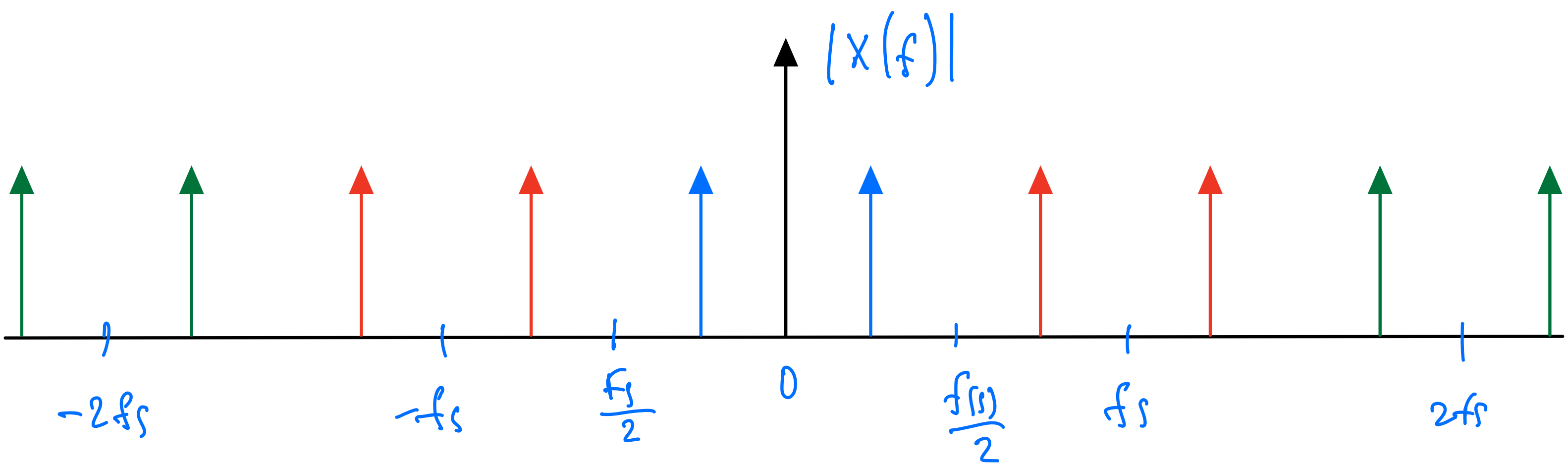
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

$f_0 = 100$

$f_s = 1000$ FREC. DE MUESTREO

$$x(nT_s) = \cos(2\pi f_0 n T_s) = \cos\left(2\pi \frac{f_0}{fs} n\right)$$

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2}\delta(f - k f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + k f_0)\right]$$



MUESTREO TEMPORAL —> PERIODIZACIÓN DEL ESPECTRO

Para cualquier señal discreta en el tiempo tiene que cumplirse que el **espectro sea Periódico**

condición de periodicidad / TDF

$$X(\omega+\omega_T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j(\omega+\omega_T)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, \boxed{e^{-j\omega_T n}}\, e^{-j\omega n}$$

separo la suma

$$\boxed{e^{-j\omega_T n} = \cos(\cancel{\omega_T n}) - j\,\cancel{\operatorname{sen}}(\omega_T n) = 1}$$

$2\pi K$

busco que sea periódico

$$\omega_T n = 2\pi K \Rightarrow \omega_T = 2\pi K$$

$2\pi K$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n} = X(\omega + 2\pi K)$$

¿y si ahora usamos un $T_s \neq 1$?

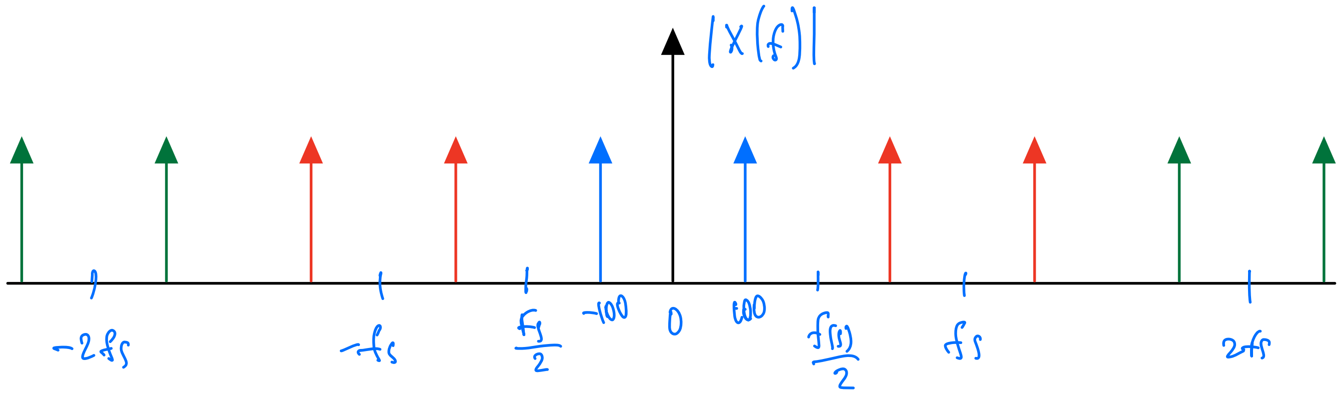
$$X(f+f_T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\, e^{-j2\pi(f+f_T)nT_s} =$$

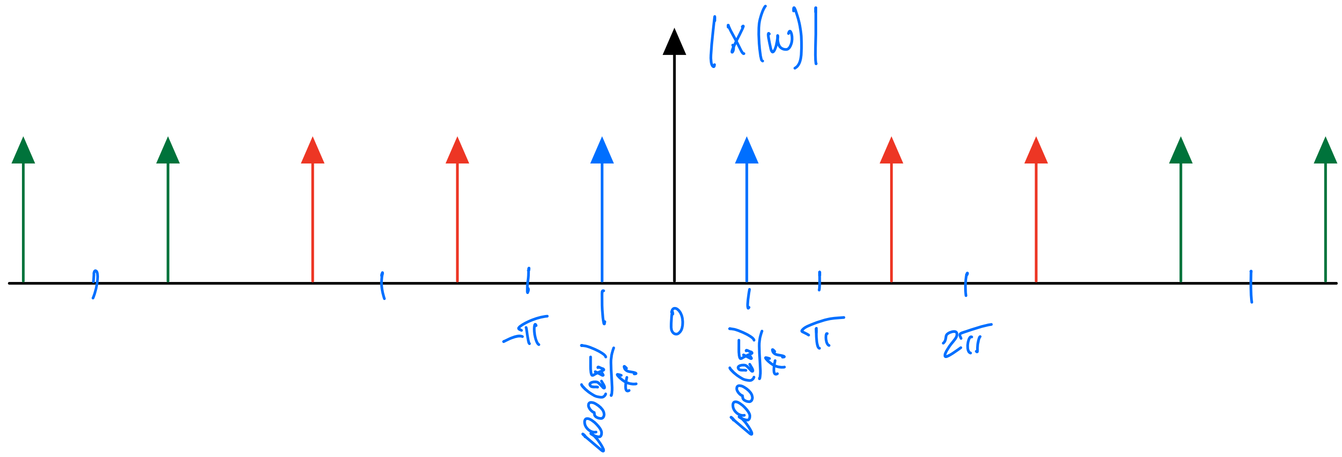
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\, \boxed{e^{-j2\pi f_T nT_s}}\, e^{-j2\pi f nT_s}$$

la repetición del espectro es cada $K f_s$

$$e^{-j2\pi f_T nT_s} = \cos(2\pi f_T nT_s) - j\operatorname{sen}(2\pi f_T nT_s) = 1$$

$$2\pi f_T nT_s = 2\pi K \Rightarrow \boxed{f_T = \frac{K}{T_s} = K f_s}$$





Ejemplo TFDT

$$x(n) = \delta(n)$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-j\omega n} = e^{-j\omega(0)} = 1$$

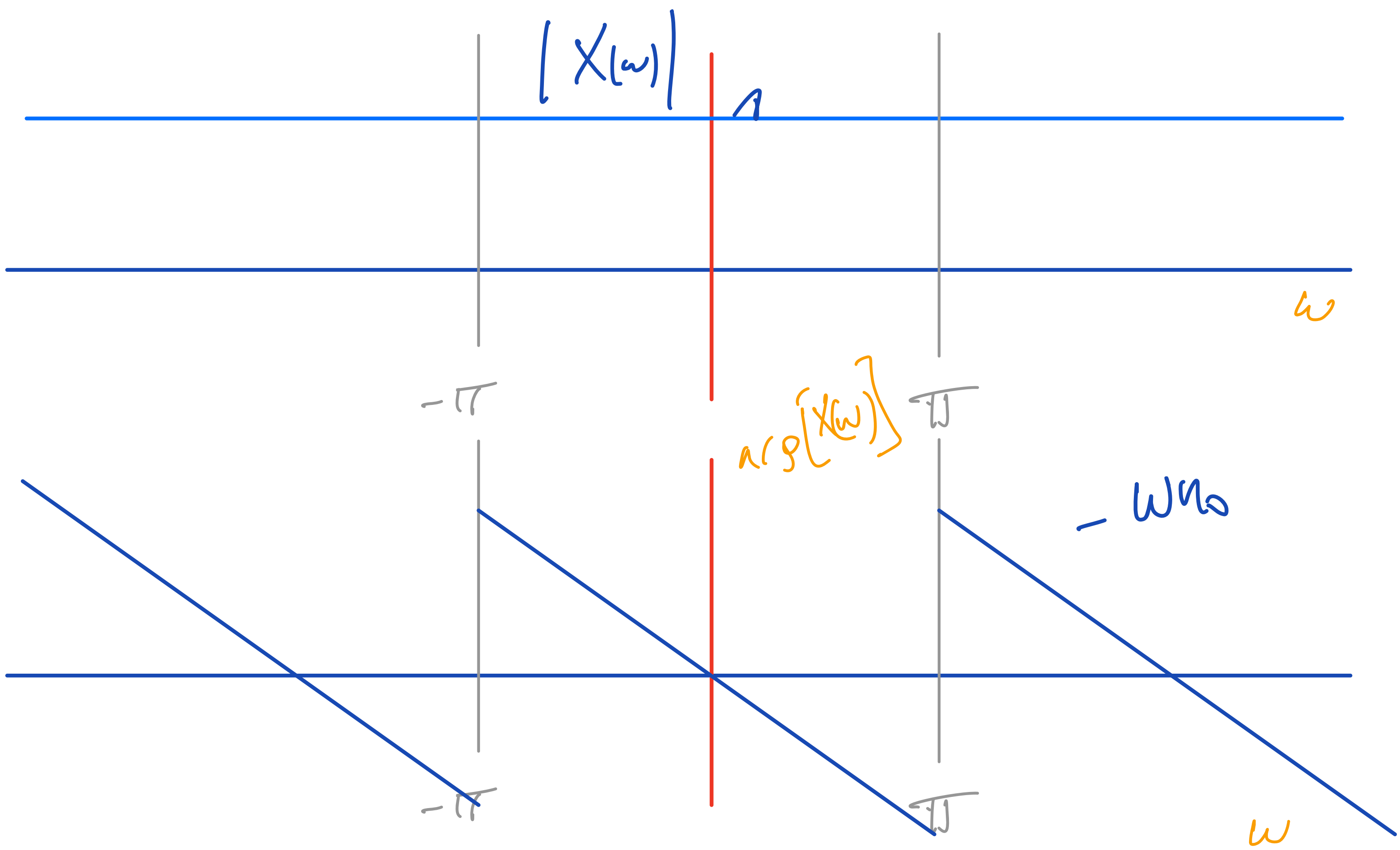
espectro plano constante

$$x(n) = \delta(n-n_0)$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-n_0) e^{-j\omega n}$$

$$= e^{-j\omega(n_0)}$$

$$X(\omega) = (1) e^{-j\omega n_0} = |X(\omega)| e^{j\arg[X(\omega)]}$$



$$X(\omega) = \sum_{n-\infty}^{\infty} a^n u(n) e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = a^n u(n) \quad |a| < 1$$

$$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) e^{-jwn}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a e^{-jw}\right]^n$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} n^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - n}$$

Serie geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

$$S = 1 + a + a^2 + a^3 \dots a^n$$

$$aS = a + a^2 + a^3 + a^4 \dots a^{n+1}$$

$$S - aS = 1 - a^{n+1}$$

$$S(1-a) = 1 - a^{n+1}$$

$$S = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a r^k = \frac{a}{1 - r}$$

$$X(w) = \frac{1}{1 - a e^{-jw}}$$

Ejemp 6 T Inversa

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$$

$$X\left(\omega\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-}^{\infty}2_{\infty}\pi f\left(\omega-\omega_u+2k\pi\right)_e^{j\omega n}\,dw$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2k\pi) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega}_{\text{Integral } 1} = e^{j\omega_0 n}$$

$$x(n) = e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + j \sin(\omega_0 n)$$

Pulso Rectangular

$$x(n) = u(n) - u(n-N)$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} (1)\, e^{-j\omega n}$$

$$X(\omega) = \frac{e^{-j\omega(0)} - e^{-j\omega(N-1+1)}}{1 - e^{-j\omega}}$$

suma finita $\displaystyle = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega}}$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

$a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + \dots + a^n$

$$= \frac{e^{-j\omega\frac{N}{2}}\left[e^{j\omega\frac{N}{2}} - e^{-j\omega\frac{N}{2}}\right]}{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left[e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}\right]}$$

$$\boxed{X(\omega) = e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{\operatorname{sen}\left(\omega\frac{N}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

PyThon

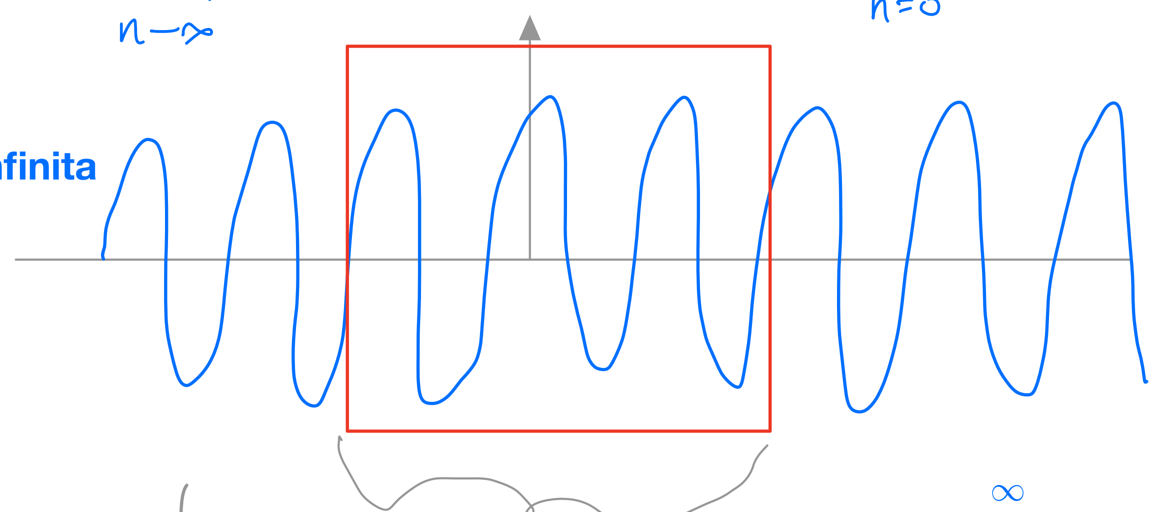
$$-\infty < n < \infty$$

VETANEO → Generalmente no tengo un numero infinito de Muestras

$$X(nT_s) \longrightarrow -\infty < n < \infty \longrightarrow X nT_s \quad 0 < n < N-1$$

$$X(\omega) = \sum_{n-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \longrightarrow X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n}$$

Señal infinita



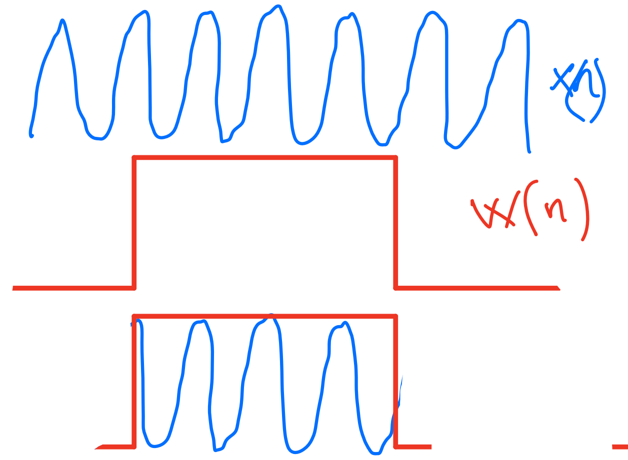
Ventana de duración finita

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$$

Saul Francolz

$$x_T(nT_s) = x(nT_s)\, w(nT)$$

$$x_T(n) = x(n)\, w(n)$$



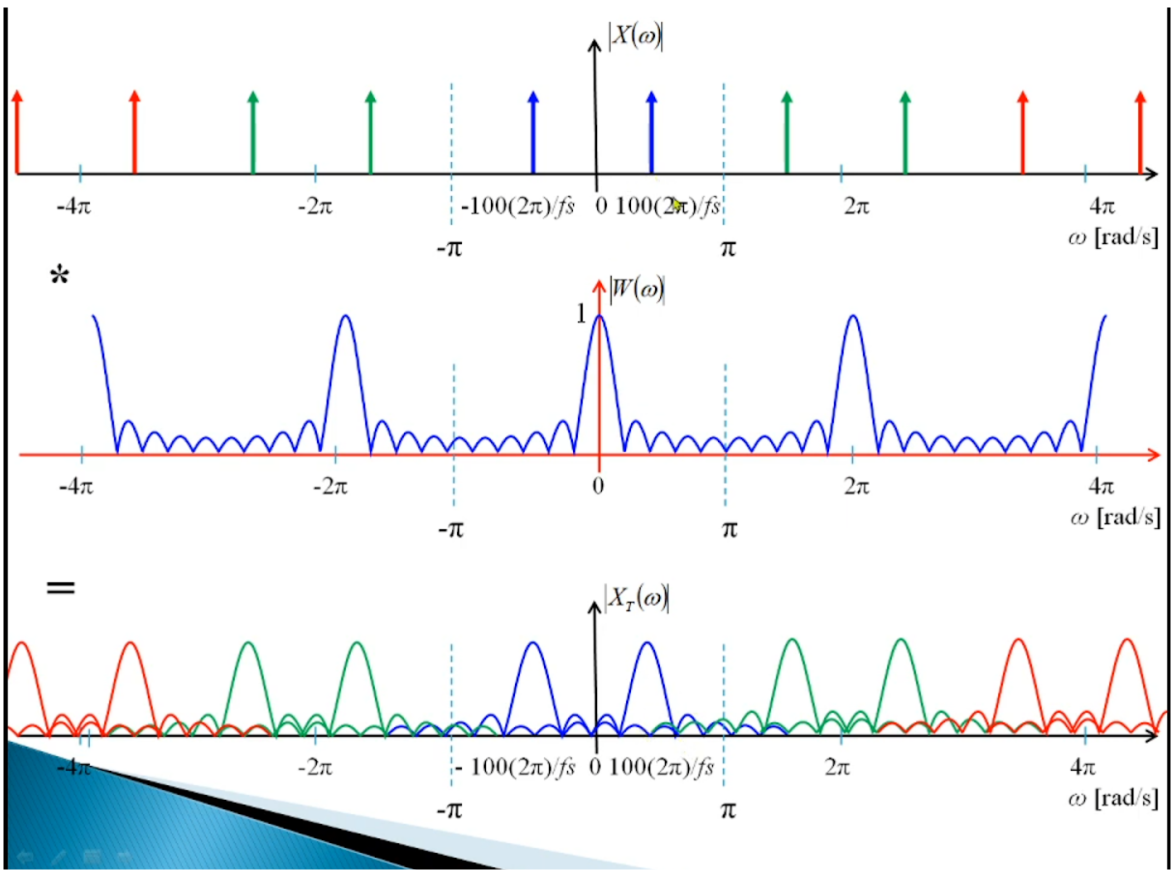
Propiedad de la convolución.

$$X_T(\omega) = TFDT\{x_n\} * TFDT\{w(n)\}$$

$$X_T(\omega) = X(\omega) * W(\omega)$$

ESPECTRO ORIGINAL

ESPECTRO VENTANA



Recordar el efecto de convolucionar por una seríe de Delta Unitario

$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \qquad f_0 = 100\,Hz \qquad f_s = 1000$

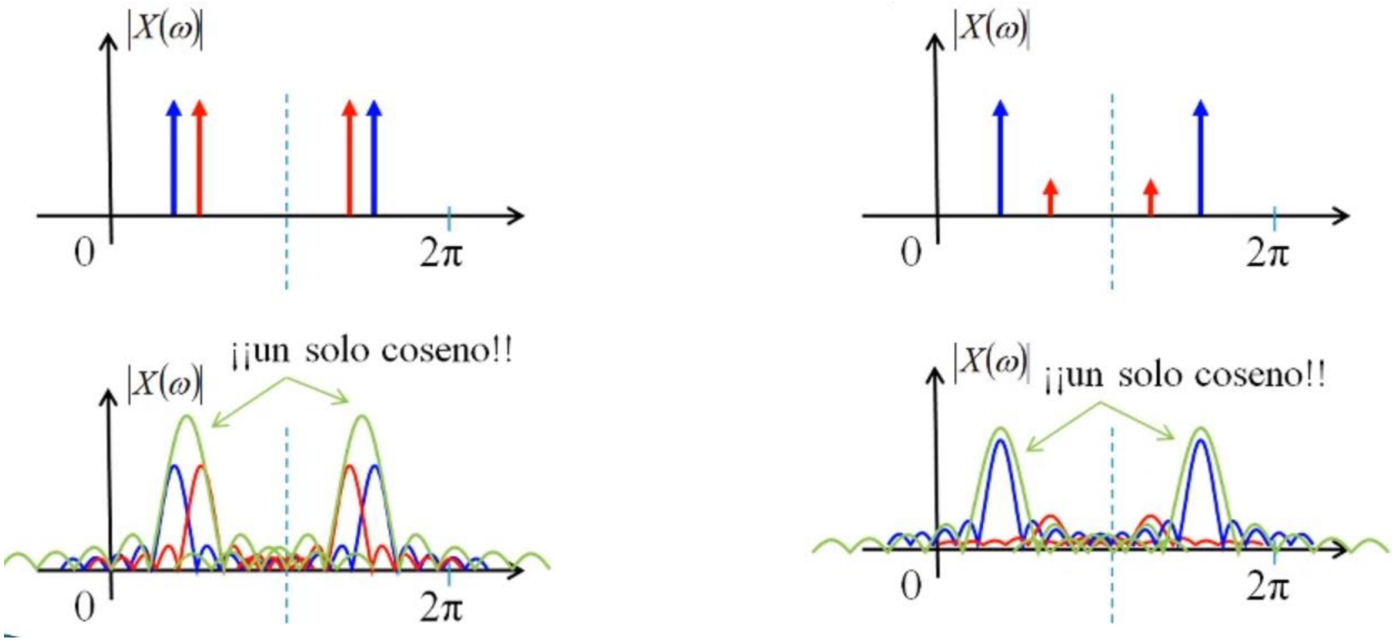
$$x(nT_s) = \cos(2\pi f_0 n T_s) = \cos\left(\pi \left(\frac{f_0}{f_s}\right) n\right)$$

$$X_T(\omega) = X(\omega) * W(\omega) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big(\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi k) + \pi\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)\Big) * \left[e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right]$$

$$X \quad |X_T(\omega)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\pi \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(\omega-\omega_0-2\pi k)N}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{(\omega-\omega_0-2\pi k)}{2}\right)} + \pi \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(\omega+\omega_0+2\pi k)N}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{(\omega+\omega_0+2\pi k)}{2}\right)} \right)$$

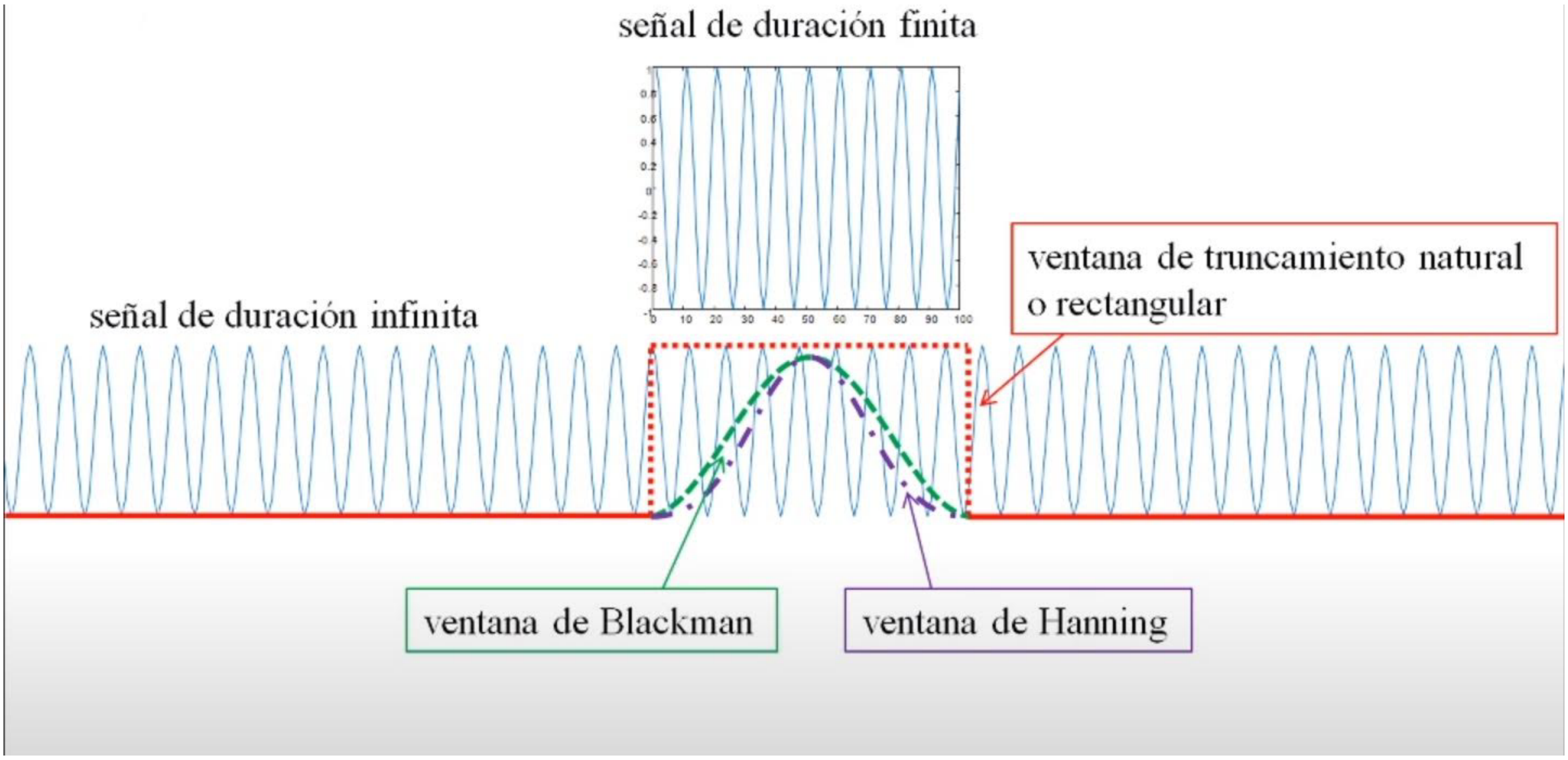
Resolución espectral:
2 casos:



Espectro de una ventana rectangular:

$$\boxed{X(\omega) = \left| \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right| e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}}$$

Graficar en python y comparar.



RECTANGULAR

$$w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto del dominio} \end{cases}$$

Ventanas comunes:

BARTLET (TRIANGULAR)

$$w[n] = \begin{cases} \dfrac{2n}{M} & 0 \leq n \leq \dfrac{M}{2} \\ 2 - \dfrac{2n}{M} & \dfrac{M}{2} < n \leq M \\ 0 & \text{resto del Dom.} \end{cases}$$

$\boxed{\text{HANNING}}$

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5\cos\left(\dfrac{2\pi n}{M}\right) & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto del Dom} \end{cases}$$

$\boxed{\text{HAMMING}}$

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos\left(\dfrac{2\pi n}{M}\right) & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto del Dom} \end{cases}$$

Graficar en python emplear np.”nombre_ventanta” (M_puntos)

Discretización de la Frecuencia
Muestreo del Espectro:

$$X(f) \quad -\infty < f < \infty \longrightarrow X(k\Delta f) \quad 0 < k < N-1$$

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\omega n}$$

Transformada de Fourier discrecta en el tiempo

$$\frac{k}{f} = f_n$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j 2\pi k \frac{n}{N}}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots N-1$$

Recordar que al usar la herramienta fft solo **veremos de [0,2np.pi)**

Pero al partir de una señal discreta el espectro ser repite

Y existe una escalado equivalente :

[0,2np.pi) ciclo

[0,fs) frecuencia de muestreo

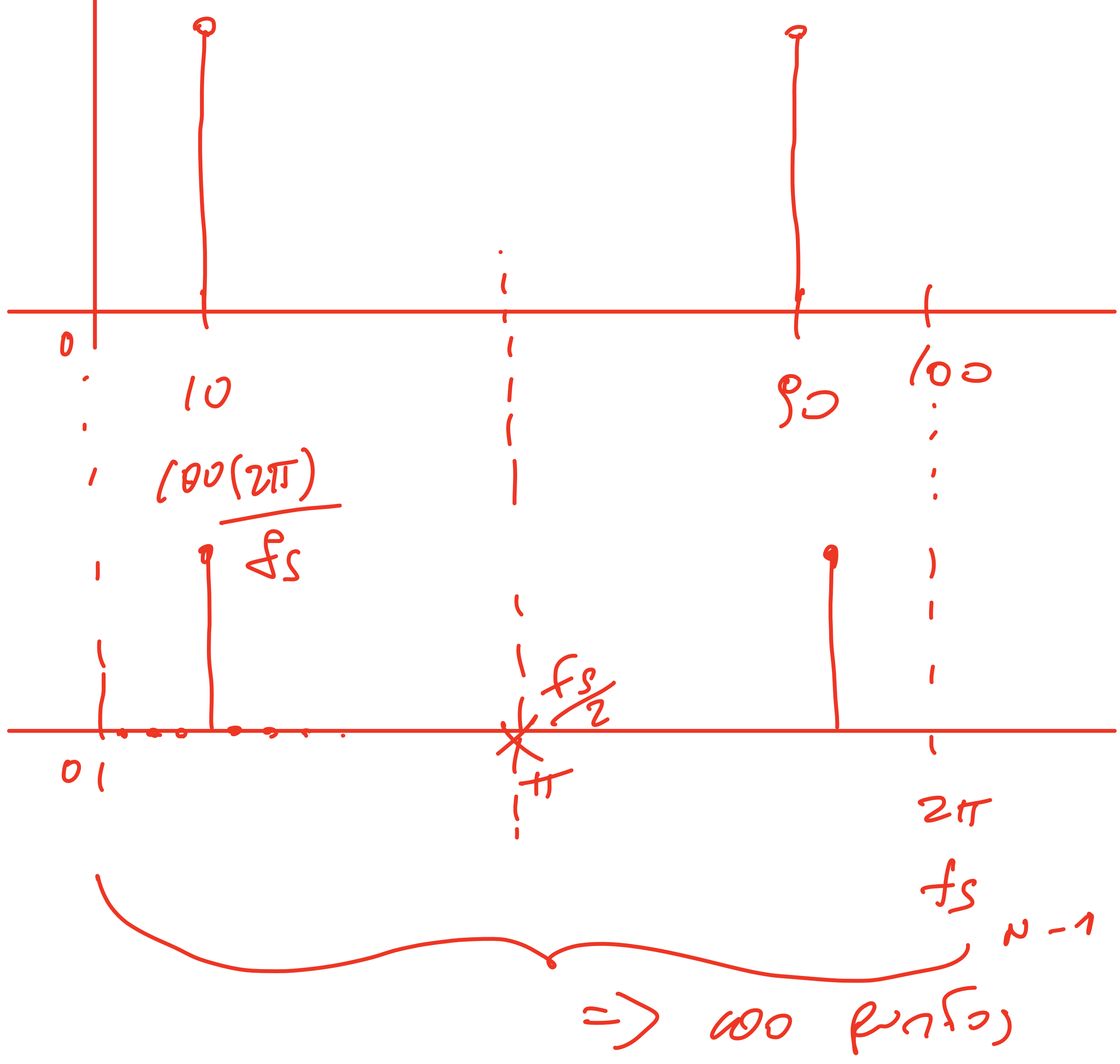
[0,1) frecuencias normalizadas

$\cos(2\pi f_0 t)$

$f_0 = 100$

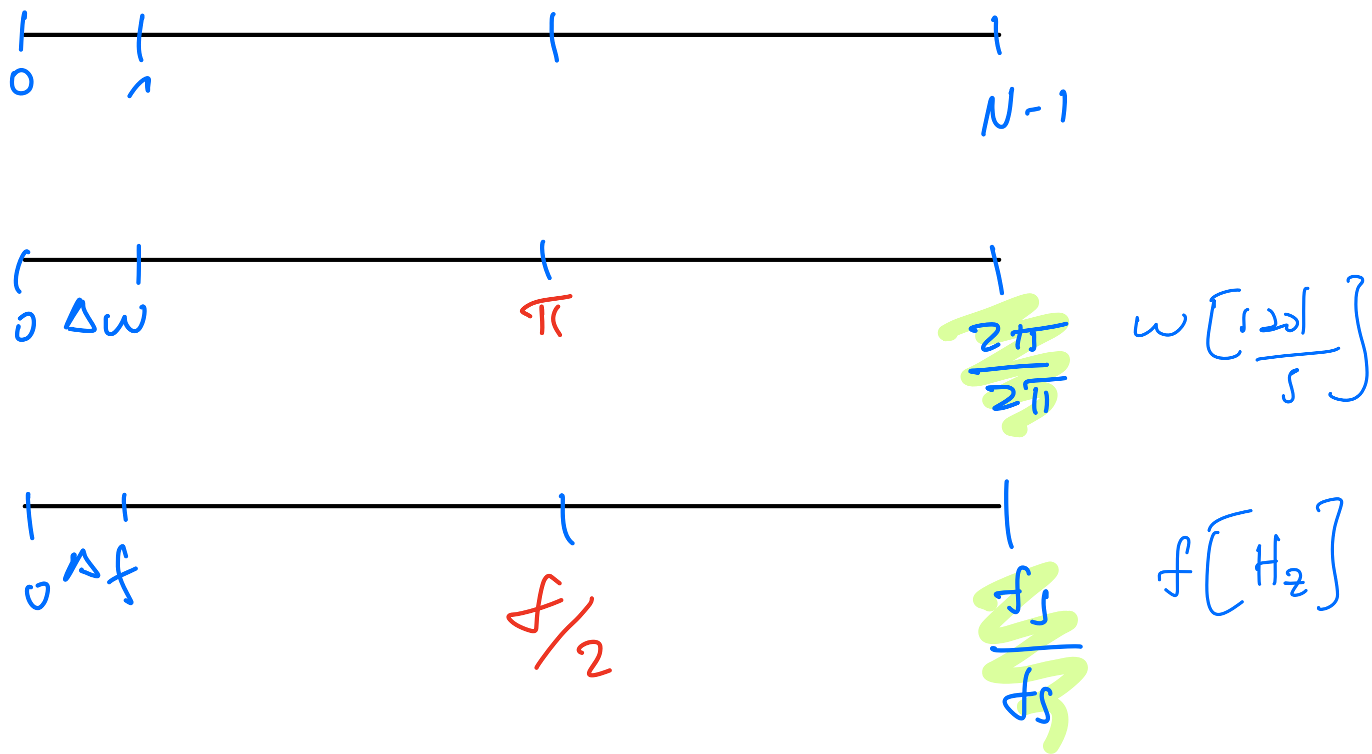
$f_s = 1000$

$N = 100$



N

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\omega &= \frac{2\pi}{N} \\ \Delta f &= \frac{f_s}{N} \end{aligned}}$$



= 1
ESCALA
NORMALIZADA

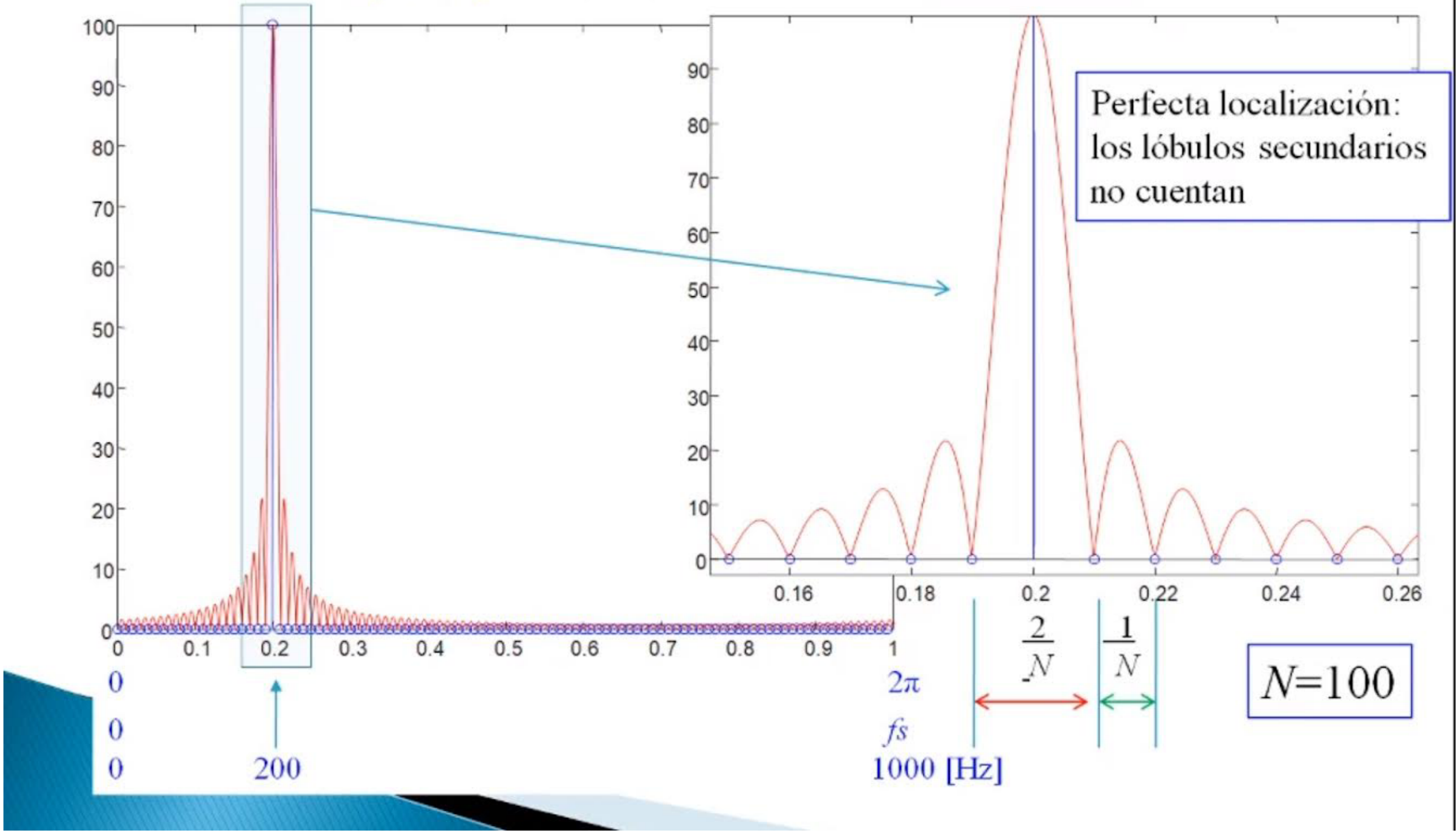
Transformada inversa:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j 2\pi k \frac{n}{N}}$$

$n = 0, 1, 2 \dots N-1$

Consideremos un señal exponencial compleja: $x(n) = \exp(j\omega_0 n) = \exp(j2\pi f_0 n)$

Al truncar la señal a N puntos tendremos una TFDT con el espectro de la ventana rectangular centrada en la frecuencia de la exponencial compleja. Grafiquémoslo en un solo periodo [0, 2π] (ó [0, fs]) y en frecuencias normalizadas [0,1):



Relación de Parseval

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

$$S_{xx}(k) = |X(k)|^2$$

$$\hat{S}_{xx} = \frac{1}{N} \left| TDF\{x(n)\} \right|^2 = \frac{1}{N} |X(k)|^2$$

SGfG