

Diseño de filtros digitales:

$$h(t) \xrightarrow{Tz} H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}$$

SISTEMA FIR

$$\text{Si } A(z) = 1$$

$$H(z) = \frac{B(z)}{1} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}$$

SISTEMA FIR

Próximamente veremos transformada z y entenderemos mejor la funciones transferencia, por el momento podemos interpretar, cada z^{-1} como una muestra retrasada. Es más el bloque funcional z^{-1} representa un delay.

Diseño de filtros:

Método de la ventana

1

Establecer la respuesta en frecuencia deseada

2

Obtener la respuesta al impulso del filtro ideal a partir de la TFDT inversa.

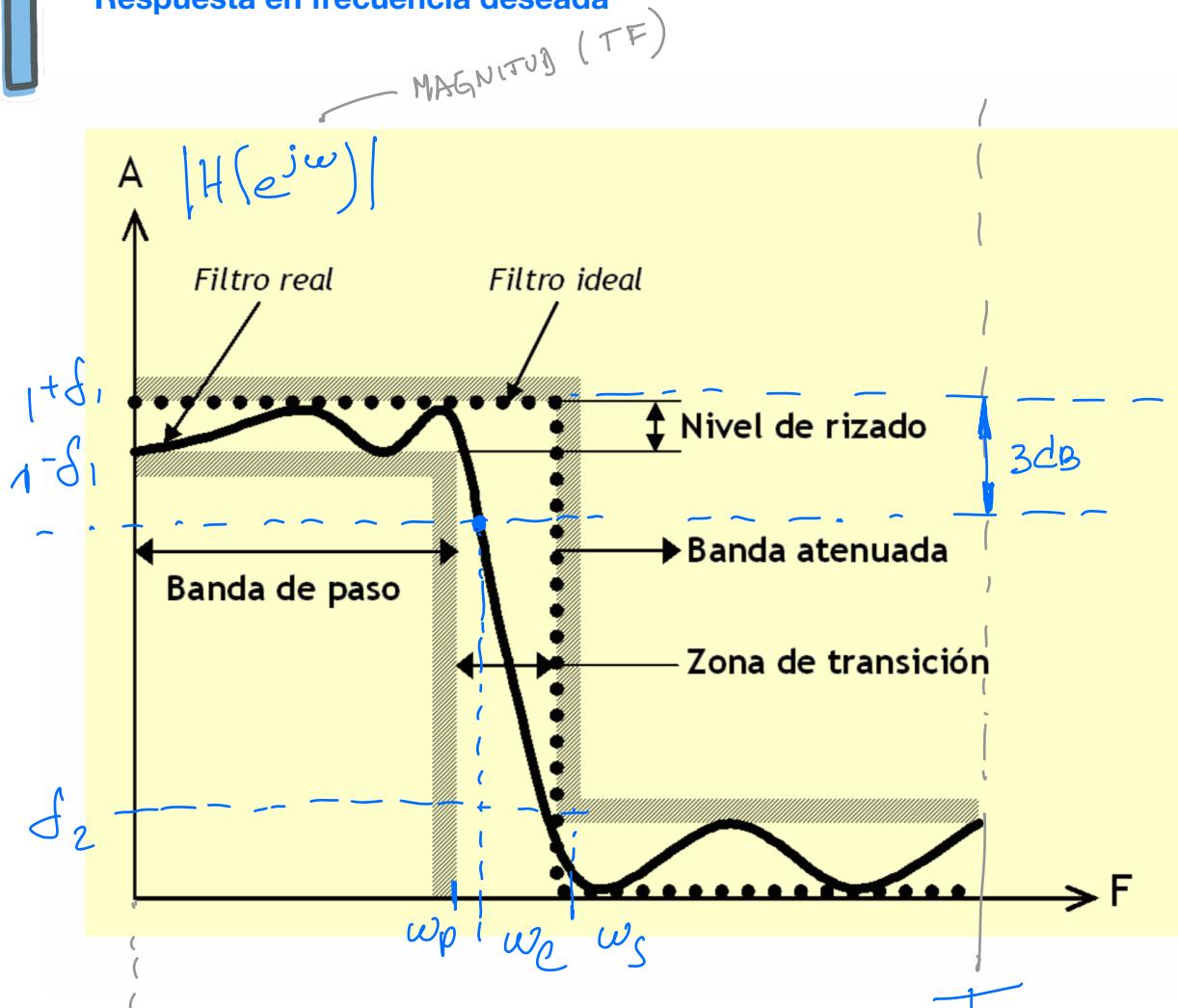
3

Truncar la respuesta al impulso a $M+1$ muestras con la ventana adecuada, M corresponderá con el orden del filtro digital

4

Verificar que se cumplan las especificaciones del filtro

Respuesta en frecuencia deseada



\Leftrightarrow Síntesis
HELIANT

$w_c = \text{corfe}$

$w_p = \text{paso}$

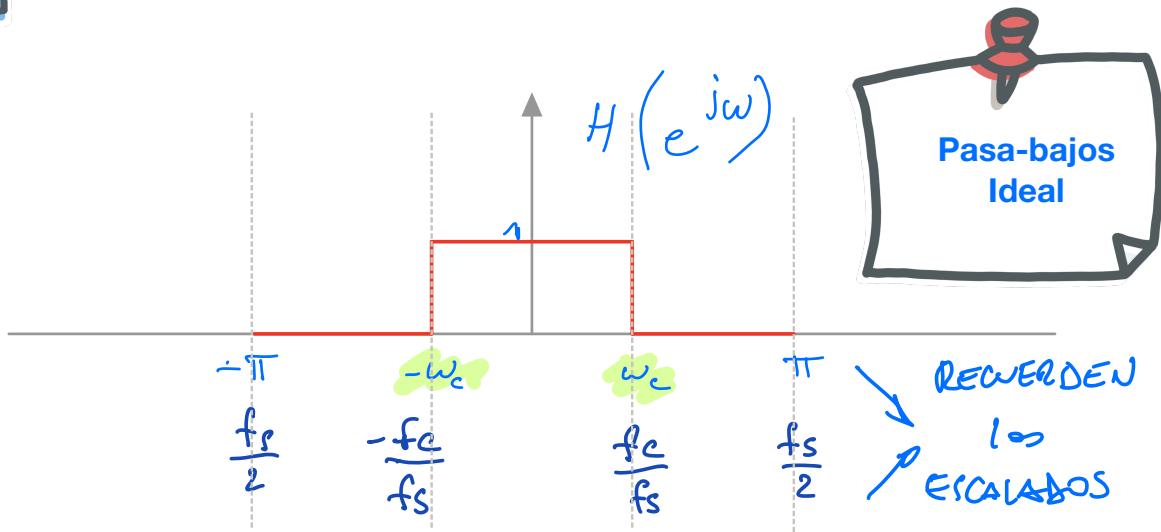
$w_s = \text{rechazo}$

$f_1 = \text{Rizo de banda de paso}$

$f_2 = \text{Rizo de banda de atenuación}$

2

Respuesta al impulso discreta en el tiempo del filtro ideal con la transformada inversa de fourier



$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} e^{j\omega n} d\omega \xrightarrow{[e^{ja}]^{\omega}} \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)}$$

$a = e^{jn}$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi jn} [e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}] \quad \int e^{j\omega n} d\omega = \frac{[e^{jn}]}{jn}$$

Records

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z) \quad \textcircled{I}$$

$$e^{-iz} = \cos(z) - i \sin(z) \quad \textcircled{II}$$

$$\text{I} - \text{II} \quad e^{iz} - e^{-iz} = i \sin(z) + i \sin(z)$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin(z)$$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi j n} [e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}]$$

$$h(n) = \frac{1}{\pi n} \cdot \frac{[e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}]}{2j}$$

$$h(n) = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\pi}\omega_c n\right)}{\pi n} \cdot \frac{\frac{\omega_c}{\pi}}{\frac{\omega_c}{\pi}}$$

$\frac{\omega_c \sin\left(\frac{\pi \omega_c n}{\pi}\right)}{\pi \omega_c n} \xrightarrow{\text{Let } x = \frac{\pi \omega_c n}{\pi}}$

$$\frac{\sin(x)}{x} = \text{sinc}(x)$$

$$= \frac{\omega_c}{\pi} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right)$$

Respuesta al impulso ideal

Vean que esta respuesta al impulso es continua, simétrica y de dominio infinito, y además no causal (posee valores distintos de cero para $n < 0$).

Lo que haremos será, discretizar, para quitar la continuidad y que se pueda implementar en hardware.

Truncar la respuesta nos permite implementarla con una serie finita pero arroja errores asociados al fenómeno de gibbs al aproximar.

La causalidad puede solventarse mediante un desplazamiento temporal de la respuesta truncada a semiplano causal.

3

Truncar a M+1 muestras

$$h_+(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right)$$

$$-\infty < n < \infty$$



$$\frac{-(M-1)}{2} \leq n \leq \frac{(M-1)}{2}$$

$$h_T(n) = h(n) \cdot w(n)$$

Verano
de Truncado

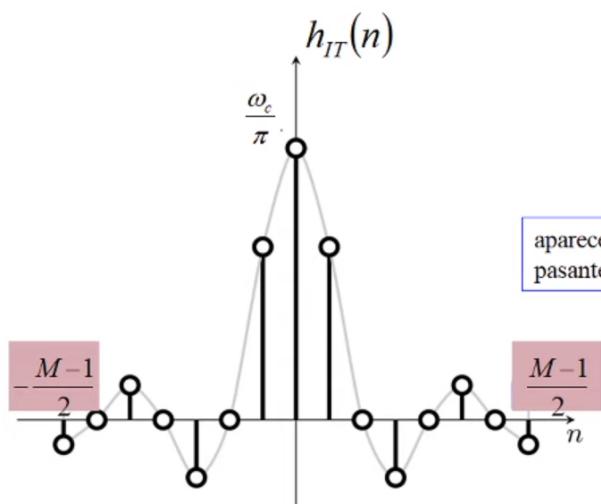
AVIADO ! QUE OCURRE EN
el dominio de las FRECUENCIAS ?

$$H_T(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

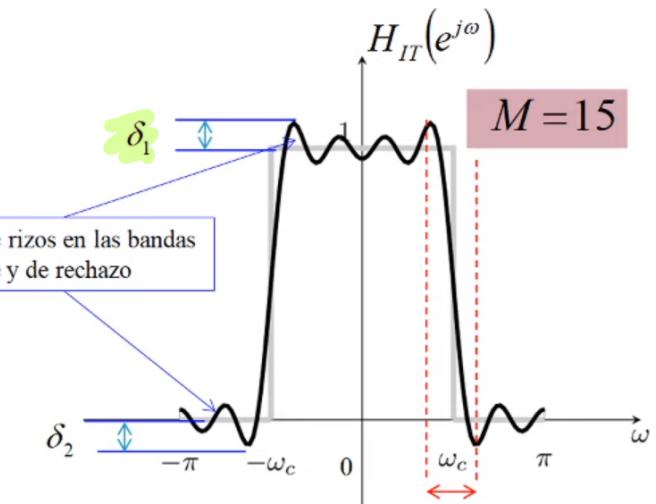
$$= H(e^{j\omega}) * \frac{\sin(\omega(n+1)/2)}{\sin(\omega/2)}$$

función de Dirichlet

respuesta al impulso truncada (FIR)

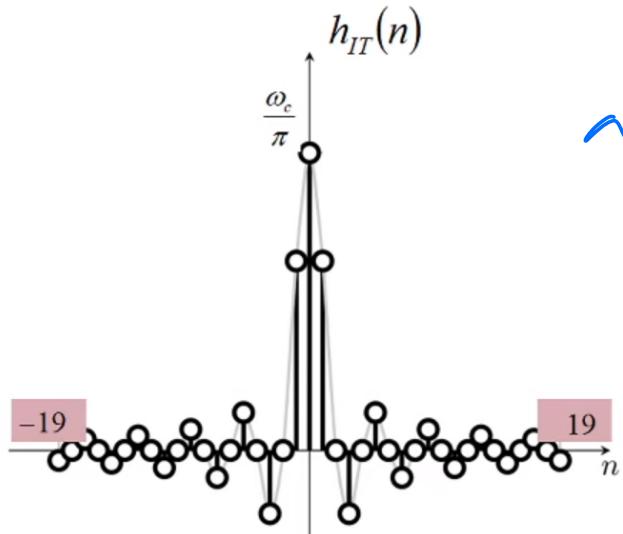


respuesta en frecuencia

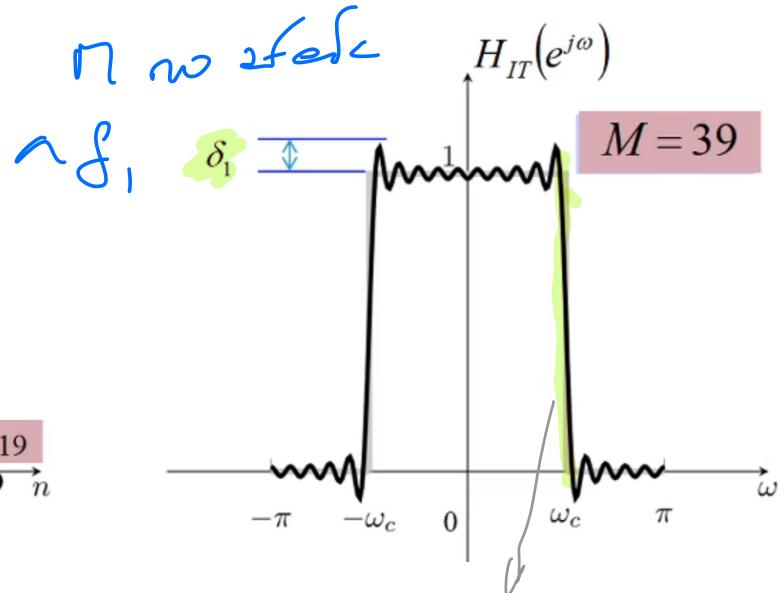


APARECE UNA
BANDA DE TRANSICIÓN

respuesta al impulso truncada (FIR)



respuesta en frecuencia



Pero M mejora la **banda de transición**. Sin embargo $|\delta_1|$ no disminuye su amplitud al aumentar M



Va estar afectado por la diferencia entre el lóbulo principal y el secundario de la ventana seleccionada.

Windows	Mainlobe width	Sidelobe attenuation (dB)	Min. stopband Attenuation	Transition Bandwidth $\Delta\omega$
Rectangular	$4\pi/M$	-13	20.9	$0.92\pi/(M/2)$
Bartlett	$8\pi/M$	-27	See book	See book
Hanning	$8\pi/M$	-32	43.9	$3.11\pi/(M/2)$
Hamming	$8\pi/M$	-43	54.5	$3.32\pi/(M/2)$
Blackman	$12\pi/M$	-58	75.3	$5.56\pi/(M/2)$

Digital Signal Processing, A practical Approach. IFEACHOR, Emmanuel y JERVIS, Barrie. Addison-Wesley.1993

En sí es la ventana que cumple con la especificación

En este método $\$delta_1\$$ y $\$delta_2\$$ son iguales por lo que trabajaremos con el más pequeño para cumplir con la especificación.

4 Verificar el filtro

$$20 \log \left(|H_T(e^{j\omega})| \right)$$

Ejemplo: diseñar un filtro con las siguientes especificaciones:

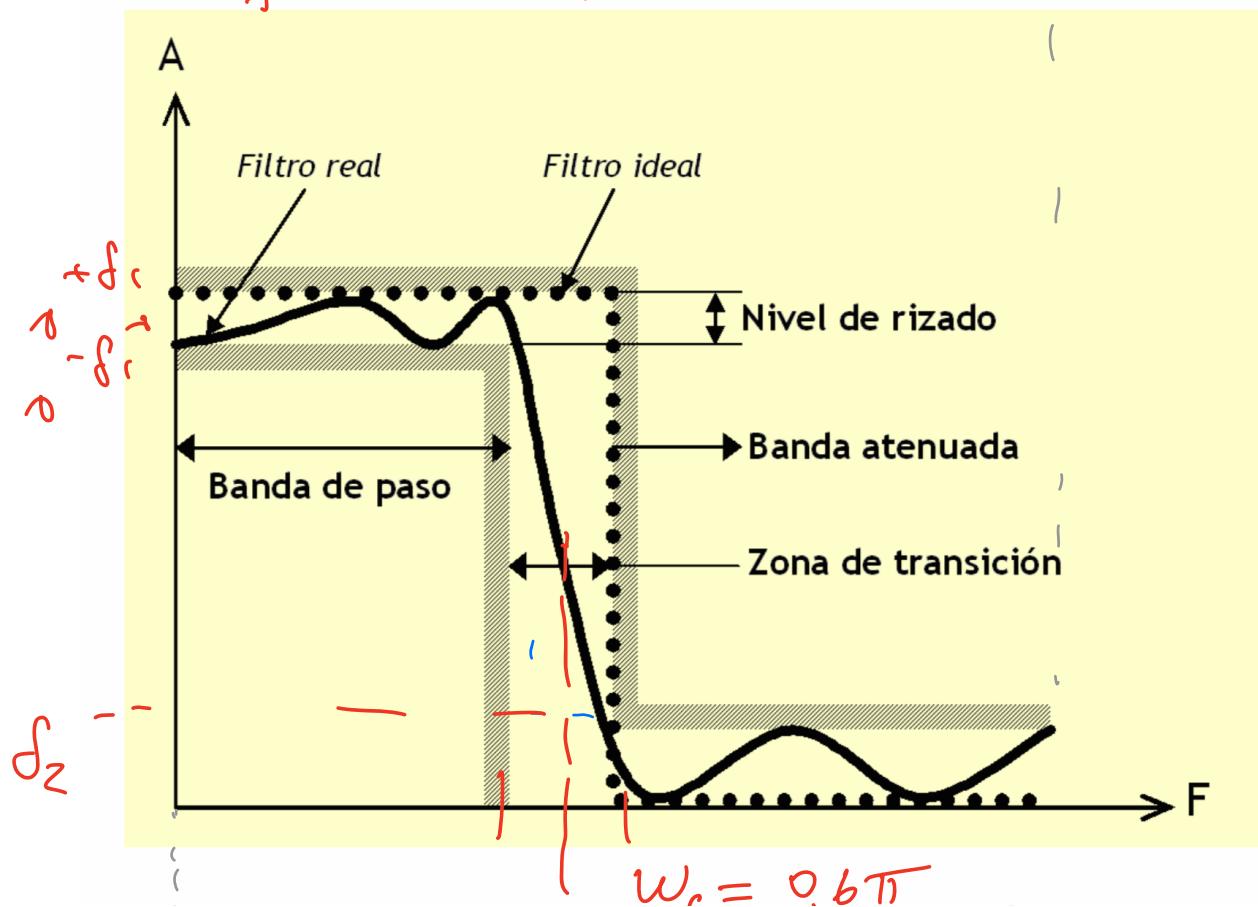
$$f_1 = f_2 = 0,01$$

$$\omega_p = 0.3\pi$$

$$\omega_s = 0.6\pi$$

$$\omega_c \approx \frac{0.3\pi + 0.6\pi}{2} = 0.45\pi$$

① Esquema:



Seleccionar la ventana para cumplir la especificación

$$\omega_p = 0,3\pi$$

$$\omega_c = 0,45\pi$$

$$\delta_2 = 20 \log(0.01) = -40 \text{ dB}$$

Con M evaluamos la respuesta al impulso truncada por la ventana de Hamming

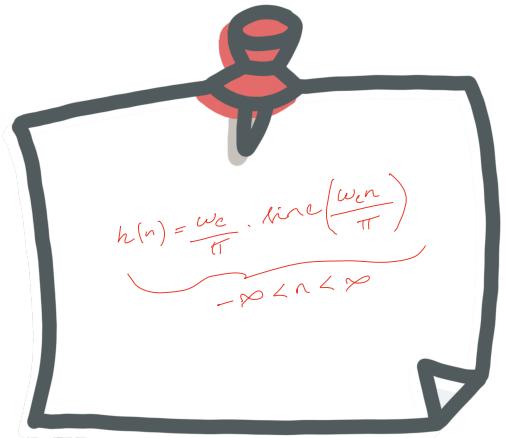
Windows	Mainlobe width	Sidelobe attenuation (dB)	Min. stopband Attenuation	Transition Bandwidth $\Delta\omega$
Rectangular	$4\pi/M$	-13	20.9	$0.92\pi/(M/2)$
Bartlett	$8\pi/M$	-27	See book	See book
Hamming	$8\pi/M$	-32	43.9	$3.11\pi/(M/2)$
Hamming	$8\pi/M$	-43	54.5	$3.32\pi/(M/2)$
Blackman	$12\pi/M$	-58	75.3	$5.56\pi/(M/2)$

Calculamos la FFT y verificamos las especificaciones

$$\frac{8\pi}{M} = \omega_s - \omega_p = 0,3\pi$$

$$M = \frac{8\pi}{0.3\pi} = 26.67$$

$$\boxed{n = 27}$$



$$h_s(n) w_{HsNN}(n) =$$

$$\frac{0.45\pi}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{0.45\pi n}{\pi}\right) [w_{HsNN}(n)]$$

$$-(n-1)/2 \leq n \leq (n-1)/2$$

VER IMPLEMENTACION EN

PYTHON